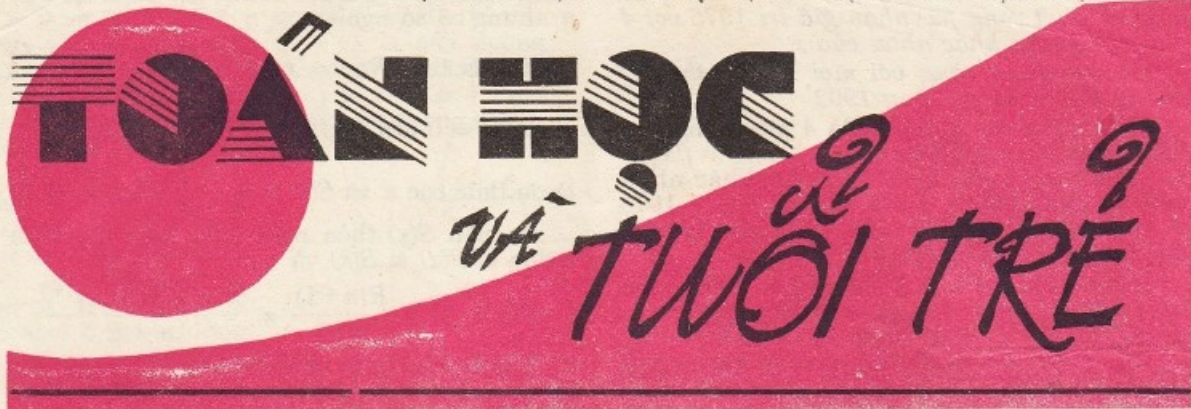




Tổng biên tập : Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập : Ngô Đạt Tứ - Hoàng Chúng

7 (193)
1993

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Dành cho các bạn PTCS

MỘT CHÚT VỀ ĐA THỨC

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Nếu biết vận dụng khéo léo những tính chất của đa thức được học ở PTCS chúng ta sẽ tìm được lời giải đẹp của một số bài toán và hơn nữa chúng ta còn có thể giải được một số bài toán khó thường gặp trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi toán.

Xin trao đổi cùng bạn đọc "Một chút về đa thức".

Nhắc lại một số tính chất đã học :

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức biến x .

1) $f(a) = 0, a \in \mathbb{Q} \rightarrow f(x)$ có nghiệm $x = a$

2) Dư khi $f(x)$ chia cho $x - a$ là $f(a)$ (định lý Bezout).

3) $f(x) : g(x)$, bậc $f(x) <$ bậc $g(x) \rightarrow f(x) = 0$

4) $f(x) \equiv g(x) \leftrightarrow$ các hệ số tương ứng bằng nhau.

5) Số nghiệm của một đa thức bậc n không quá n ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Một số bài toán áp dụng :

Bài 1 : Phân tích thành nhân tử $P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

Giải : Xem P là một đa thức biến x . Khi $x = -y$ thì $P = 0 \Rightarrow P : x + y$. Trong P vai trò x, y, z như nhau nên cũng có $P : x + z, P : y + z$ như vậy $P = (x + y)(x + z)(y + z)Q$. Mà P là đa thức bậc 3 đối với x, y và z nên Q là hằng số. Với $x = 0, y = z = 1$ ta có $Q = 3$. Vậy $P = 3(x + y)(x + z)(y + z)$

Bài 2 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn $xP(x-1) \equiv (x-26)P(x)$

(VÔ ĐỊCH TOÁN MATXCÓVA 1963)

Giải :

Để thấy $P(0) = 0 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow P(2) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow P(25) = 0$

Vậy $P(x) = x(x-1)\dots(x-25)Q(x)$.

Suy ra $P(x-1) = (x-1)(x-2)\dots(x-26)Q(x-1)$

$xP(x-1) = (x-26)P(x)$

$\Rightarrow Q(x-1) = Q(x) \Rightarrow Q(x) = a$ (hằng số)

Vậy $P(x) = ax(x-1)\dots(x-26)$

Bài 3 : Cho hai đa thức với hệ số nguyên $f_1(x), f_2(x)$ thỏa mãn $f(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3) : x^2 + x + 1$

Chứng minh rằng USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) \geq 1983$.

(TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ BÀI 2/134)

Giải : $f(x) = [f_1(x^3) - f_1(1)] + x[f_2(x^3) - f_2(1)] + f_1(1) + f_2(1)$ để thấy $f_1(x^3) - f_1(1) : x^2 + x + 1, f_2(x^3) - f_2(1) : x^2 + x + 1$

Suy ra $xf_2(1) + f_1(1) : x^2 + x + 1$ nhờ t/c (3) suy ra $f_1(1) = f_2(1) = 0$ Vậy $f_1(x) : x-1, f_2(x) : x-1$, do đó USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) = k, 1984$

($k \in \mathbb{N}$), $k = 1$ khi $f_1(x) = f_2(x) = x - 1$.

Bài 4 : Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên và $f(0), f(1)$ là những số lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không thể có nghiệm số nguyên.

Giải : Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm số nguyên a thì $f(x) : x - a$ do đó $f(x) = (x - a)g(x)$ ($g(x)$ là đa thức có hệ số nguyên)

Ta có $f(0) = -ag(0)$ là một số lẻ $\Rightarrow c$ là số lẻ (vì $g(x)$ có hệ số nguyên nên $g(0)$ là một số nguyên)

Tương tự $f(1) = (1 - c)g(1)$ lẻ $\Rightarrow 1 - c$ là số lẻ $\Rightarrow c$ là số chẵn.

Điều này mâu thuẫn $\rightarrow$ đpcm.

Bài 5 : Cho đa thức $f(x)$ bậc 5 có hệ số nguyên. Biết rằng $f(x)$ nhận giá trị 1975 với 4 giá trị nguyên khác nhau của x .

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{Z}$ thì $f(x)$ không thể có số trị bằng 1992

Giải : Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 giá trị nguyên khác nhau của x mà $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 1975 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, x_4$ là 4 nghiệm khác nhau của đa thức $f(x) - 1975$ suy ra $f(x) - 1975 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)g(x)$ ($g(x)$ là đa thức có hệ số nguyên).

Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ mà $f(a) = 1992$ ta có $(a - x_1)(a - x_2)(a - x_3)(a - x_4)g(a) = 17(*)$ do $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ khác nhau nên $a - x_1, a - x_2, a - x_3, a - x_4$ là 4 số nguyên khác nhau và $g(a) \in \mathbb{Z}$ mà 17 chỉ có thể phân tích thành một tích có nhiều nhất ở thừa số nguyên khác nhau $17 = 1 \cdot (-1) \cdot (-17)$ nên (*) không xảy ra $\rightarrow$ đpcm.

Bài 6 : Với a, b, c là ba số khác nhau :

Hãy tính

$$a^k \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^k \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

với $k = 0; 1; 2$.

Giải : Đặt $f(x) =$

$$a^k \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^k \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^k$$

Dễ thấy $f(a) = f(b) = f(c) = 0$

Vậy a, b, c là 3 nghiệm khác nhau của $f(x)$ nhưng bậc $f(x) \leq 2$.

Do đó $f(x) = 0$ Vậy : $a^k \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^k \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^k$

Bài 7 : Đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn đẳng thức $P(k) = \frac{k}{k+1}$ với $k = 0; 1; 2; \dots; n$.
Tìm $P(n+1)$?

(VÔ DỊCH TOÁN MỸ 1975)

Giải : Đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện trên là duy nhất. Vì nếu có đa thức khác $Q(x) \neq P(x)$

cũng thỏa mãn thì bậc đa thức $P(x) - Q(x) \leq n$ nhưng có số nghiệm $\geq n+1$.

Xét đa thức $R(x) = x + \frac{(0-x)(1-x)\dots(n-x)}{(n+1)!}$

vì $R(-1) = 0$ nên $R(x) : x+1$ do đó $S(x) = \frac{R(x)}{x+1}$

là đa thức bậc n và $S(k) = \frac{k}{k+1}$ với $k = 0; 1;$

$\dots; n$ nên $S(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán nghĩa là $P(x) \equiv S(x)$ và

$$P(n+1) = \frac{R(n+1)}{n+2} = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$$

Bài 8. Chứng tỏ rằng đa thức $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) - 1$ ($a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{Z}$ khác nhau) không phân tích được thành nhân tử.

Giải : Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x)$ có hệ số nguyên. $f(a_i) = -1$ ($i = 1, n$)

nên hoặc $g(a_i) = 1, h(a_i) = -1$

hoặc $g(a_i) = -1; h(a_i) = 1$.

Do đó $g(a_i) + h(a_i) = 0$. ($i = 1, n$)

Đa thức $g(x) + h(x)$ có n nghiệm khác nhau nhưng bậc $< n$ do đó

$g(x) + h(x) = 0$. Vì vậy $f(x) = -h^2(x)$ điều này không thể được vì hệ số cao nhất của $f(x)$ là 1 là số dương

Dưới đây là một số bài toán thêm để các bạn tự luyện

1) Phân tích thành nhân tử

$$(x+y)^4(x-y) + (y+z)^4(y-z) + (z+x)^4(z-x)$$

2) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện.

$$(x-1992)P(x) = xP(x-1) \text{ và } P(1993) = 1993!$$

3) Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$ (với $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số nguyên khác nhau) không phân tích được thành nhân tử

4) a và b là hai số khác nhau. Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-a$ bằng A và phần dư trong phép chia $f(x)$ cho $x-b$ bằng B . Tìm phần dư trong phép chia $f(x)$ cho $(x-a)(x-b)$.

BIẾT THEO AI ?

Trong cả 3 bộ sách CCGD môn Đại số và Giải tích lớp 11, khi viết về cấp số nhân đều đưa ra Bài toán cổ Ấn Độ : đặt vào bàn cờ 8×8 ô thứ nhất 1 hạt thóc, ô thứ hai 2 hạt, ô thứ ba 4 hạt, ô thứ tư 8 hạt v.v... và hỏi có bao nhiêu hạt thóc cả thảy.

Sách do DHSP TP Hồ Chí Minh viết thì đưa dưới dạng bài tập (không có đáp số), còn sách do Viện KHGD và do DHSP HNI viết thì đưa dưới dạng ví dụ. Tôi xem cả 2 quyển này (in lần thứ hai 1992) thì thấy đáp số ở quyển đầu (VKHGD) và quyển sau (DHSP HNI) tương ứng là:

18.446.744.073.709.551.615

1.844.674.507.309.551.615

Có lẽ chẳng phải bình luận nhiều về hai đáp số khác nhau một trời một vực này !!

Lần giờ lại SGK Đại số (cũ) mà bao thế hệ học sinh phổ thông nước ta đã học, xem cả tài liệu nước ngoài, thì thấy đáp số trong sách do Viện KHGD viết đúng với những gì đã được in từ xưa đến nay, chưa thấy ở đâu có đáp số như trong sách do DHSP HNI viết.

Vậy, xin đề nghị các nhà biên soạn SGK CCGD, các nhà biên tập sách xem xét lại vấn đề này, để có kết quả thống nhất trong mọi bộ sách cho học sinh cả nước theo học, kể từ lần thứ 3 hè 1993 này.

Nếu không thì biết theo sách nào đây ?

LÊ HẠNH DUNG

<https://tieulun.hopto.org>

TOÁN Ở QUANH TA

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Nghỉ hè đã đến. Cả một năm học miệt mài đèn sách, bây giờ cũng nên xả hơi một tí. Chả nhẽ "nghỉ hè" lại cứ vùi đầu vào sách vở, mẩu giấy với cây bút chì. Các bạn say mê toán lo gì! Toán ở quanh ta, ở khắp nơi vì đâu mà chẳng có những quan hệ số lượng, quan hệ hình dạng, quan hệ logic. Quanh năm, học lý thuyết, ta có nói đến ứng dụng thì cũng là lý thuyết nốt. Có mấy khi cầm cái thước mà đo cụ thể, rồi tính toán cho ra chiều cao một cái cây cụ thể, một ngôi nhà cụ thể. Bây giờ nghỉ hè, dù nghĩ cách nào đi nữa thì cũng phải tăng cường tiếp xúc với thiên nhiên, với xã hội, vừa đi dưỡng tinh thần, vừa tò mò khoa học... Nào các chuyện đo đạc tính toán đã học trong lượng giác, nào chuyện trăng sao trên trời, nào chuyện mặt trời mọc, lặn với ngày dài, đêm ngắn. Nào chuyện giờ giấc, tốc độ, khoảng cách gắn với các phương tiện đi đường, ô tô, tàu hỏa, máy bay v.v... Ngay cả những chuyện không đâu cũng có thể làm chúng ta động não. Sau đây xin kể câu chuyện nhỏ ngày xưa của tôi. Hồi đó, hàng ngày đi học, tôi đọc trên một cột cây số thấy : Phú Diễn 37. Tôi hiểu ngay, nếu từ cột đó đi tiếp 37 Kilômét nữa thì đến Phú Diễn (tôi học ở Quốc học Vinh). Nhưng trên cột lại còn một số khác là 462 không thấy gắn với địa điểm nào. Tôi tự hỏi : "Số đó là số gì ? " Chà ! Bài toán xem ra đơn giản mà hóa ra lại khó vì chỉ đọc có một dữ kiện : 462. Lúc đầu tôi đành dùng cách "phi toán", nghĩa là đi hỏi. Hóa ra là tôi hay tò mò, còn xung quanh thì người ta mặc kệ. Thậm chí có người nói như mắng : "Mày chỉ vớ vẩn. Lo mà học đi. Số đó là gì mặc nó, liên can gì đến mày" Tôi không dám cãi lại nhưng trong bụng không chịu : "Sao lại vớ vẩn ? Tìm cho được bí mật về một số mà không phải là một cách học ư ? Học như thế tốt quá đi chứ". Nhưng từ đó, tôi thôi cách làm "phi toán" đó. Và hàng ngày đi học, số 462 cứ xuất hiện trước mặt tôi như thách thức : "Này cậu học sinh kia ơi! Đố cậu biết tôi là ai ? ". Và thách thức hình như càng ngày càng ráo riết : "Sao? Cậu chịu rồi à ? Xoàng thế !" Hồi đó, tôi rất thích đọc tiểu thuyết trinh thám. Kẻ gian nằm im thì nhà chức trách thường bó tay, không tìm ra dấu vết. Kẻ gian hoạt động thì nhà chức trách mới lần theo dấu vết mà tìm ra chúng. Không ngờ việc đọc tiểu thuyết trinh thám lại làm nảy ra hướng giải quyết tìm bí mật số 462. Phải, lâu nay tôi chịu vì

tôi nhìn số đó tĩnh tại, không hoạt động. Có chiều đèn pha vào số đó cũng chịu không lần ra tung tích của nó. Phải tìm xem nó thay đổi như thế nào ? Nghĩ vậy, một hôm tôi đi học sớm nửa giờ, đến cột "Phú Diễn 37" thì không rẽ vào cổng trường mà đi thẳng một mạch đến cột tiếp theo : trên cột đó "Phú Diễn 36" và số 461. Tôi như reo lên trong bụng : "Này, cậu số bí mật ơi ! Tôi bắt đầu vén được tấm màn bí mật rồi. Này nhé! Đi ra Phú Diễn bớt đi một kilômét thì cậu cũng bớt đi một đơn vị. Rõ ràng cậu cũng chỉ số kilômét từ cột đến một địa điểm nào đó phía ngoài Phú Diễn, nhưng khá xa. Hôm nay tớ còn chịu chưa biết đó là địa điểm nào. Nhưng cậu phải biết, ở trường tớ còn học cả môn địa lý nữa nhé. Hẹn cậu vài hôm nữa, tớ về tra sách địa lý thì cậu hết cả bí mật". Tôi về tra sách địa lý : Vinh - Hà Nội chỉ có chưa đầy 300 km. Vậy địa điểm đó còn xa hơn Hà Nội. Cuối cùng tôi tìm ra rằng địa điểm đó ở trên đường quốc lộ 1A, trên biên giới với Trung Quốc.

Sau này, tôi mới ý thức được rằng bài toán tôi vừa giải là một bài toán về tìm một hàm số chưa biết. Không thể tìm ra một hàm số khi chỉ mới biết một giá trị của nó. Phải theo dõi sự biến thiên của nó đến một chừng mức nào đó mới có thể tìm ra nó. Càng học lên, tôi càng biết rằng toán học có cả một lĩnh vực đồ sộ về các loại phương trình trong đó ẩn không phải là các số mà là các hàm. Không ngờ tôi đã đụng phải việc tìm "hàm" ngay khi vừa mới bước vào lớp đầu cấp hai.

Câu chuyện nhỏ trên đây càng chứng tỏ rằng "toán ở khắp nơi". Có thể có bạn cho rằng bài toán này quá dễ. Trong toán học, có ba cái khó : khó thứ nhất là "phát hiện ra vấn đề" ; khó thứ hai là "tìm được hướng giải quyết vấn đề" ; Khó thứ ba là "giải quyết vấn đề". Tại sao người khác không tò mò muốn biết số 462 là số gì ? Có được óc tò mò như vậy thì mới có vấn đề mà giải quyết. Đó là một cái khó. Có vấn đề rồi, định hướng giải quyết nó như thế nào ? Nảy ra được ý nghĩ theo dõi sự biến thiên để tìm ra số cũng không phải là việc dễ ở một học sinh đầu cấp hai.

Học toán nghĩa là phải học cả cách phát hiện vấn đề, cách định hướng giải quyết vấn đề và cuối cùng là giải quyết vấn đề. Nghỉ hè, đi nghỉ, đi chơi đây đó, tha hồ cho các bạn học cả ba cách và bạn càng thấy "toán khắp mọi nơi, toán ở quanh ta". Ta có thể học toán trên lớp, trong sách vở nhưng cũng có thể học toán "mọi lúc, mọi nơi". Hai cách học bổ sung cho nhau.

Học sinh tìm tòi

THIẾT LẬP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TỪ MỘT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

ĐÀO HẢI LONG

Lớp 10 CT, Đại học Tổng hợp HN

Một lần trong khi xem một quyển toán sơ cấp, tôi gặp bài toán sau : Cho a, b, c là ba số khác nhau, chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = -1 \quad (1)$$

Tác giả của cuốn sách đã đưa ra lời giải như sau. Đặt

$$x = \frac{a+b}{a-b}, y = \frac{b+c}{b-c}, z = \frac{c+a}{c-a}.$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow xy + yz + zx = -1 \quad (2)$$

Rõ ràng

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$$

Từ đó suy ra

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = \\ = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1 \text{ hay}$$

$xv + yv + zv = -1$, tức là (2) đúng, như vậy (1) đã được chứng minh.

Từ dạng của đẳng thức (2) khiến tôi nghĩ đến liệu có thể tạo ra một vài bất đẳng thức nào đó hay không đối với các số x, y, z , khi nó thỏa mãn (2)? Lẽ dĩ nhiên một bất đẳng thức rất quen thuộc liên quan đến (2) là $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Nhưng từ đó ta không tìm được một điều gì mới cả. Vì thế tôi suy nghĩ theo một hướng khác. Dựa vào bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx),$$

thì từ bài toán (1), ta thu được ngay bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2 \quad (3)$$

Ràng cách thêm và bớt 3 vào cả hai vế của (3), ta có

$$\frac{a^2 + b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2 + c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2 + a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4} \quad (5)$$

Cộng từng vế của (4), (5) và sau một biến đổi nhỏ, ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^3} + \frac{b^3 - c^3}{(b-c)^3} + \frac{c^3 - a^3}{(c-a)^3} \geq \frac{9}{4} \quad (6)$$

Ta biết rằng (6) có dạng rất giống với một bất đẳng thức quen thuộc sau : Nếu $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{4} \quad (7)$$

Nhưng giữa (6) và (7) có một khoảng cách khá xa vì hai lí do. Một là (7) chỉ đúng với $a, b, c > 0$, còn (6) đúng với mọi bộ ba số a, b, c từng đôi khác nhau. Hai là bất đẳng thức (7) chứng minh rất dễ vì thực chất việc chứng minh (7) tương đương với việc chứng minh

$$\frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} \geq \frac{1}{4}, \quad (8)$$

mà (8) thì hiển nhiên đúng ; còn để chứng minh (6) thì như các bạn thấy đấy, đó là một điều không hề tầm thường.

Thú vị vì hình thức đẹp và đối xứng của bất đẳng thức (6) mới tìm được, tôi lại thử tiếp tục tìm kiếm những dạng số khác nhau mới thỏa mãn đẳng thức (2).

Nếu đặt $x = \frac{a}{b-c}, y = \frac{b}{c-a}, z = \frac{c}{a-b}$, thì rõ ràng x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = -1$

Vì thế theo lập luận trên, ta có

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2 \quad (9)$$

Nếu trong (9) cho $c = 0$, thì ta có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 2$$

Vậy (9) là một mở rộng khá độc đáo của một bất đẳng thức rất quen thuộc. Bây giờ thêm 3 vào cả 2 vế của (9), ta đi đến

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} \right] \geq$$

$$\geq 5 + 2 \left[\frac{bc}{(c-a)^2} + \frac{ca}{(a-b)^2} + \frac{ab}{(b-c)^2} \right]$$

Áp dụng (4), ta thu được kết quả sau : Nếu a, b, c đôi một khác nhau, thì $(a^2 + b^2 + c^2) \times \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{9}{2}$ (10)

Bất đẳng thức (10) có dạng giống với bất đẳng thức quen thuộc sau :

Nếu $a, b, c > 0$, thì

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$
 (11)

Để thấy sự "có giá" hơn của bất đẳng thức (10), ta chỉ cần lưu ý rằng việc chứng minh (11) được thực hiện dễ dàng vì VT(11) $\geq$

$$\geq (a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{2(a^2 + b^2)} + \frac{1}{2(b^2 + c^2)} + \frac{1}{2(c^2 + a^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} [(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Như vậy, để tạo ra các bất đẳng thức mới ta chỉ cần tìm các bộ số x, y, z thỏa mãn (2), sau đó áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$ và thực hiện các phép biến đổi cần thiết để bất đẳng thức thu được là không "tầm thường". Các số x, y, z như vậy rất nhiều, tôi xin đưa ra đây vài ví dụ nữa để các bạn áp dụng

$$1) x = \frac{1-ab}{a-b}; y = \frac{1-bc}{b-c}; z = \frac{1-ca}{c-a}$$

$$2) x = \frac{a+m}{b-c}; y = \frac{b+m}{c-a}; z = \frac{c+m}{a-b}$$

Để kết thúc, tôi xin cảm ơn thầy giáo Phan Huy Khải đã tận tình động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành bài viết này.

LỜI CẢM ƠN

Nhân dịp công bố kết quả cuộc thi giải báo Toán học và Tuổi trẻ năm 1992, Quý Hồ trợ sáng tạo kỹ thuật Việt Nam đã tặng thưởng 1.000.000 đồng cho 2 giải xuất sắc, 5 giải nhất và giải trường có số học sinh giải bài đồng nhất.

Thay mặt cho những người được tặng thưởng Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chân thành cảm ơn Quý Hồ trợ sáng tạo kỹ thuật Việt Nam.



VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH "KIỂU" FECMA

HOÀNG ĐỨC TÂN

Một bài toán số học được rất nhiều người quan tâm từ lâu là bài toán sau đây.

Xét phương trình "kiểu" Fécma :

$(1) x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = x_1 x_2 \dots x_n$ ($x_i \neq 0, n \geq 2$) (Tức là một số tự nhiên có n chữ số bằng tổng các lũy thừa bậc n của từng chữ số của số tự nhiên đó).

Trong trường hợp $n = 2$ ta dễ dàng chứng minh được rằng phương trình (1) không có nghiệm trong các số tự nhiên. Tuy nhiên với $n > 2$ thì người ta vẫn chưa biết rằng:

1) - Phương trình (1) có nghiệm hay không?

2) - Phương trình (1) có nghiệm trong trường hợp nào, và nghiệm có duy nhất hay không?

Năm 1975 N.P. Liapkin (nhà toán học Liên Xô) đã có nghiên cứu bài toán trên, và ông đã chỉ ra các nghiệm sau đây:

+ Với $n = 3$ đó là các số : 153, 370, 371, 407.

+ Với $n = 4$ là các số : 1634, 8208, 9474.

+ Với $n = 5$ là các số : 54748, 92727.

+ Với $n = 6$ là số : 548834.

Xuất phát từ ý tưởng sử dụng máy vi tính để tìm các nghiệm của phương trình (1). Bằng một giải thuật đơn giản sau đây :

- Bước 1 : Đưa vào số tự nhiên $n \geq 3$.

- Bước 2 : $A = 10^n$.

- Bước 3 : Gồm 2 bước nhỏ sau

a - Tách n chữ số của A thành các số : $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($0 \leq x_i \leq 9$).

b - Kiểm tra xem đẳng thức : $x_1 + x_2 + \dots + x_n = A$ có đúng hay không?

+ Nếu đúng thì in ra số A . Sau đó chuyển sang bước 4.

+ Nếu sai thì chuyển sang bước 4.

- Bước 4 : Gán : $A = A + 1$ và kiểm tra điều kiện $A < 10^n$.

+ Nếu đúng thì quay lại bước 3

+ Nếu sai thì dừng điều khiển chương trình.

Kết quả của việc chạy chương trình cho ta tất cả các nghiệm mà N.P. Liapkin đã chỉ ra, ngoài ra nó còn "phát hiện" thêm một nghiệm mới đối với trường hợp $n = 5$ là số 93084. Từ giải thuật trên rõ ràng là với trường hợp $3 \leq n \leq 6$ thì phương trình (1) chỉ có các nghiệm đó mà thôi !

Giải thuật trên đây đơn giản, dễ viết song rất tiếc là nó lại rất "tối tệ" về mặt thời gian thực hiện chương trình. Bởi lẽ đối với mỗi n ta phải xét tới $9 \cdot 10^{n-1}$ số tự nhiên và đối với mỗi số tự nhiên đó ta lại phải tiến hành tách từng chữ số của nó ra và kiểm tra xem đẳng thức (1) có đúng hay không (Tức là Bước 3 được lặp lại đến $9 \cdot 10^{n-1}$ lần) và đó là một công việc đòi hỏi mất rất nhiều thời gian thực hiện. Vì vậy về mặt thời gian giải thuật trên đây chỉ nên dùng với những $n \leq 6$ mà thôi !

Bằng một giải thuật tổ hợp phức tạp hơn, nhưng lại tránh được thủ tục tách các chữ số và cũng không phải duyệt toàn bộ các số tự nhiên trên đoạn $(10^{n-1}, 10^n)$ tôi đã phát hiện thêm được các nghiệm khác của phương trình (1). Đó là các nghiệm sau đây :

+ Với $n = 7$ là số 9.926.315

+ Với $n = 8$ là các số 24.678.050, 24.678.051, 63.645.890, 63.645.891 và 73.495.876

Tuy nhiên chương trình lại không cho một nghiệm nào của phương trình (1) đối với $n \geq 9$ cả (Phải chăng với $n \geq 9$ thì phương trình (1) là vô nghiệm ?)

Việc nghiên cứu bài toán trên đây vẫn chưa kết thúc. Rất mong các Bạn trẻ yêu toán hay tiếp tục nghiên cứu để phát hiện thêm các nghiệm mới của phương trình (1) hoặc xem xét xem liệu có thể xây dựng được một thuật toán hữu hiệu (ít nhất là về mặt thời gian thực hiện) để chỉ ra rằng phương trình (1) với $n \geq 9$ có nghiệm hay không. Rất mong đợi kết quả của các Bạn.

Xin chúc các Bạn thành công !

Giai thoại toán học

JOSEPHE VÀ HAI NGƯỜI MUỐN SỐNG

Toán học và Lịch sử cổ đại hình như có một duyên nợ gì với nhau. Rất nhiều bài toán độc đáo gắn liền với giai thoại về một Hoàng đế, một vĩ nhân thời Cổ Hy-La, thời Cổ Trung Hoa, hoặc một câu chuyện lí thú về sinh hoạt cung đình, hội hè, đình đám dân gian (chuyện Hoàng đế IBN AL KUZ cân vàng; Hàn Tín điểm binh; Ba tên cướp của Trần Cửu Châu; Bàn cờ tướng của Ấn Độ; Bài toán về tuổi khắc trên mộ Diophant v.v...)

Sau đây là một giai thoại toán học thời Cổ Hy Lạp: Vespasien là Hoàng đế La Mã từ năm 69 đến 79 theo Công lịch. Ông ta có đức tính kiên nghị, nhưng cũng có lối sinh hoạt "bình dân", thích hài hước một cách dân dã. Ông đặt nền móng cho một cấu trúc nhà nước đế quốc quy mô: lập viện dân biểu, xây dựng nền tài chính. Chính ông là người cho xây dựng nhà hát lộ thiên Colisée vĩ đại, chứa được 8 vạn khán giả. Ở đó các người tù vì đạo bị ném cho thú dữ ăn. Ông ta đàn áp cuộc nổi dậy của người Gô- loa. Một hôm, thấy con trai là Titus ngạc nhiên về sắc thuế đánh cả vào nhà vệ sinh, ông đưa cho Titus người một đồng tiền mà nói rằng "Con ngủ xem, đồng tiền không có mùi gì!"

Thời ấy có Josephé là nhà viết sử bị Vespasien truy nã. Tục truyền rằng năm 67 Công lịch, Vespasien tìm được hang ẩn náu của Josephé và 40 người Do Thái. Vespasien kêu gọi 41 người ra hàng nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát, quyết không đầu hàng. Chỉ có hai người nói riêng với Josephé là muốn đầu hàng để sống, vì hoàn cảnh riêng. Josephé thông cảm với hai người đó và đặt ra một "quy tắc" như sau:

Tất cả đứng thành vòng tròn. Người số 1 cầm dao đếm 1, rồi đưa sang người số 2. Người số 2 đếm 2, rồi đưa sang người số 3 để đếm số 3. Ai đếm số 3 thì tự sát ngay. Người thứ 4 cầm dao và bắt đầu lại đếm số 1, người thứ 5 đếm số 2, người thứ 6 đếm số 3 rồi tự sát v.v..., cứ thế mà tiếp tục từ vòng này qua vòng khác (người nào chết rồi hiện

hiện là không đếm được nữa). Cuối cùng còn lại hai người muốn sống.

Hỏi Josephé phải sắp xếp cho hai người muốn sống ở vị trí nào?

Đây là một bài toán không thể đặt thành phương trình được. Cách giải bài toán này cũng tương tự như cách lập bảng số nguyên tố bằng cách viết ra tất cả các số tự nhiên, rồi "nhặt ra" từng số nguyên tố lần lượt từ nhỏ đến lớn.

Bạn hãy vẽ vòng tròn, đặt vào đó 41 mẫu giấy để tiến hành "phép thử". Trong vòng đầu bạn sẽ thấy các người tự sát mang số 3, 6, 9, ..., 36. 39 (bội của 3). Người số 40 lấy dao của người 39 (đã chết) đếm 1, rồi đưa cho người số 41 v.v...

Trong vòng hai, các người sau đây tự sát: 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37 và 41.

Trong vòng ba còn 18 người và có 6 người tự sát mang số 7, 13, 20, 26, 34 và 40

Trong vòng bốn có 4 người chết mang số 8, 17, 29 và 38

Trong vòng năm có 2 người chết mang số 21 và 25

Trong vòng sáu có 2 người chết mang số 2 và 22

Trong vòng bảy có 2 người chết mang số 4 và 35

Cuối cùng hai người sống sót còn lại là số 16 và 31.

Vậy Josephé phải xếp hai người muốn sống vào số 16 và 31.

Bachet, một nhà toán học, đã thử tìm công thức tổng quát cho bài toán này, bằng cách lập bảng quan sát trường hợp 4 người, 5 người, đến 1000 người, nhưng đành bó tay! Cho tới nay vẫn chưa có câu trả lời cho câu hỏi:

"Bài toán này thuộc loại bài toán không giải được hay là bài toán chưa giải được?"

PHAN THANH QUANG

VUI MỘT TÍ

TOÁN HỌC VÀ NHỮNG SUY LUẬN "CÓ LÍ"

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ a = c \end{array} \right\} \Rightarrow b = c$$

Chúng ta, ai cũng biết: "Im lặng là vàng".
Mặt khác, ta lại biết: "Im lặng là đồ trang sức quý nhất của phụ nữ"

(Ngạn ngữ)

Từ đó suy ra: "Vàng là đồ trang sức quý nhất của phụ nữ!"

**

Ta có: "Thời gian là vàng, bạc".

Ta lại có: "Mất thời gian là mất tất cả".

(Ngạn ngữ)

Từ đó suy ra: "Mất vàng bạc là mất tất cả!"

LÊ VI



SỐ φ - ĐÔI ĐIỀU LÍ THÚ

NGUYỄN CANG

Ta hãy xét một dãy các số nguyên được thành lập theo quy tắc sau :

$$u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$$

Ví dụ : 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... với $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, v.v...

Dãy như trên có tên là dãy Lucas

Ta lập tỷ số giữa 2 số hạng u_{33} và u_{32}
 $u_{33}/u_{32} = 5781196/3570847$ (α) Ta lập một dãy khác cũng theo quy tắc trên :

-3, +4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45,...

và lập tỷ số :

$$u_{25}/u_{24} = 160996/99501$$
 (β)

Tỷ số (α) là 1,618... Tỷ số (β) cũng cho kết quả 1,618... Nếu n đủ lớn thì $u_{n+1}/u_n = 1,618...$

và người ta nhận thấy rằng n càng tăng thì tỷ số u_{n+1}/u_n càng gần nghiệm dương của phương trình bậc hai $x^2 - x - 1 = 0$. Nghiệm dương này được mang tên là φ . Các nhà toán học gọi φ là "số vàng" vì có không biết bao nhiêu là tính chất kì lạ của nó !

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = \varphi$$

Bây giờ nếu ta chọn những số nguyên âm làm 2 số hạng đầu tiên của dãy Lucas. Ví dụ: $u_1 = -1$, $u_2 = -5$,... và ta thấy $u_{11}/u_{12} = 0,618$ ($\neq \frac{1}{\varphi}$)

$$\text{và } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n/u_{n+1} = \varphi' \text{ (tức } \frac{1}{\varphi})$$

Các nhà khoa học tự hỏi = Phải chăng đây là một trong những "hàng số của thiên nhiên"? Đặt vấn đề như vậy không có gì là quá đáng khi ở vật lý lý thuyết, vật lý hạt nhân cũng có những hàng số như vậy. Ví dụ ta gặp hàng số c trong tốc độ truyền sóng điện từ (ví dụ ánh sáng) trong chân không hay hàng số n gọi là hằng số Plăng (Planck)

trong nghiên cứu nguyên tử, hạt nhân và bức xạ của nó. Quen thuộc nhất đối với người làm toán là lấy số e làm cơ sở cho lôgic Népen. Và điều lý thú là các hàng số như e , i (bằng $\sqrt{-1}$), π lại liên kết với nhau trong một biểu thức đẹp : $e^{i\pi} = -1$.

Trở lại phương trình $x^2 - x - 1 = 0$.

Ta có hai nghiệm của nó có đặc điểm lý thú.

$$\varphi \text{ (nghiệm dương)} \approx 1,61803$$

$$\varphi' \text{ (nghiệm âm)} \approx -0,61803$$

$\varphi + \varphi' = 1$; $\varphi\varphi' = -1$; $\varphi^2 = \varphi + 1 = 2,61803$ và trong lượng giác ta có bảng sau đây :

	góc	$(2\sin)^2$	$(2\cos)^2$
$\pi/20$	9°	$2 - \sqrt{\varphi+2}$	$2 + \sqrt{\varphi+2}$
$\pi/10$	18°	$\varphi' + 1$	$\varphi + 2$
$3\pi/20$	27°	$2 - \sqrt{\varphi'+2}$	$2 + \sqrt{\varphi'+2}$
$\pi/5$	36°	$\varphi' + 2$	$\varphi + 1$
$\pi/4$	45°	$\varphi + \varphi'$	$\varphi + \varphi'$
$9\pi/20$	81°	$2 + \sqrt{\varphi+2}$	$2 - \sqrt{\varphi+2}$

Chúng tôi xin có dịp giới thiệu thêm nhiều điều kì lạ nữa về số φ đã được H.E. Huntley đề cập đến.



Trang vật lí

TỪ ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

VŨ THANH KHIẾT

Các định luật bảo toàn là hệ quả chặt chẽ của tính đối xứng. Trong số đó định luật bảo toàn năng lượng có vai trò rất quan trọng trong vật lí; nó đã giúp cho các nhà vật lí tìm ra được nhiều sự kiện và hiện tượng mới (chẳng hạn như phát hiện ra các hạt cơ bản mới). Bạn đọc đã thấy rõ vai trò của định luật này khi giải các bài toán cơ học. Trong sách giáo khoa Vật lí 11 các em đã thấy việc vận dụng định luật đó (kết hợp với định luật Jun - Lenxơ) để tìm ra biểu thức của hiệu điện thế đặt vào máy thu, định luật Ôm cho toàn mạch... Dưới đây xin gợi ý bạn đọc vận dụng định luật đó để tìm ra một số công thức và giải một số bài toán điện.

1. Trước hết có thể thấy rằng: dựa vào biểu thức của năng lượng tụ điện $W = (1/2)QU = (1/2)CU^2 = (1/2)(Q^2/C)$ (Vật lí 11, trang 77) và định luật bảo toàn năng lượng có thể tìm được các công thức ghép tụ điện. Chẳng hạn, trong trường hợp các tụ $C_1, C_2, \dots, C_n$ mắc song song, năng lượng của mỗi tụ là $W_1 = (1/2)C_1U^2, W_2 = (1/2)C_2U^2, \dots, W_n = (1/2)C_nU^2$. Điện dung tương đương của bộ tụ sẽ là C_b sao cho năng lượng của cả bộ tụ $W_b = (1/2)C_bU^2$ bằng tổng năng lượng các tụ: $W_b = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ (1)

Từ đó $(1/2)C_bU^2 = (1/2)(C_1 + C_2 + \dots + C_n)U^2$, suy ra $C_b = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ (2). Cũng như vậy, gọi Q_b là điện tích của bộ tụ ta cũng có

$(1/2)Q_bU = (1/2)(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)U$, suy ra $Q_b = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ (3). Trong trường hợp ghép nối tiếp, nếu lúc đầu các tụ chưa tích điện, áp dụng định luật bảo toàn điện tích ta có $Q_b = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ (4).

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng (1) ta có:

$$(1/2)(Q_b^2/c_b) = (1/2)(Q_1^2/c_1) +$$

$$+ (1/2)(Q_2^2/c_2) + \dots + (1/2)(Q_n^2/c_n), \text{ suy ra}$$

$$(1/c_b) = (1/c_1) + (1/c_2) + \dots + (1/c_n) \quad (5)$$

gọi U_b là hiệu điện thế của cả bộ tụ ta lại có

$$(1/2)(Q_bU_b) = (1/2)(Q_1U_1) + (1/2)(Q_2U_2) + \dots + (1/2)(Q_nU_n) \text{ suy ra } U_b = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (6)$$

2. Dựa vào biểu thức công suất của nguồn điện ($P = EI$) và định luật bảo toàn năng lượng ta cũng có thể suy ra công thức tính suất điện động của bộ nguồn. Chẳng hạn khi ghép nối tiếp các nguồn $E_1, E_2, \dots, E_n$, công suất của mỗi nguồn là $P_1 = E_1I, P_2 = E_2I, \dots, P_n = E_nI$ (dòng điện chạy qua các nguồn như nhau). Gọi E_b là sđđ của bộ nguồn, theo định luật bảo toàn năng lượng $E_bI = E_1I + E_2I + \dots + E_nI$, suy ra $E_b = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ (7). Còn trong trường hợp mắc song song các nguồn giống nhau thì $P_1 = EI_1, P_2 = EI_2, \dots, P_n = EI_n$ và theo định luật bảo toàn năng lượng $E_bI = E(I_1 + I_2 + \dots + I_n)$. Bởi vì $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ (định luật bảo toàn điện tích) suy ra $E_b = E$ (8)

3. Bằng cách tương tự bạn đọc còn có thể tìm ra nhiều công thức khác nữa.

Định luật bảo toàn năng lượng còn giúp ta giải quyết các bài toán điện liên quan đến công và năng lượng. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1: Một nguồn điện có suất điện động $E = 220V$ được mắc nối tiếp với một tụ điện có điện dung $C = 2000\mu F$ qua một khóa K . Đóng khóa K để nạp điện cho tụ điện. Hãy tìm nhiệt lượng tỏa ra trong mạch.

Giải: Khi đóng K , điện lượng chuyển qua nguồn để tích điện cho tụ điện là $q = CU = CE$, do đó nguồn điện đã sinh ra một công $A = qE = CE^2 = 96,8J$.

Năng lượng của tụ điện là:

$W = (1/2)CU^2 = (1/2)CE^2 = 48,4J$. Công do nguồn điện sinh ra chỉ có một phần biến thành năng lượng của tụ điện, còn phần nữa tiêu hao do điện tích chuyển động, làm tỏa nhiệt Q trong mạch. Từ đó $Q = A - W = 48,4J$.

Ví dụ 2. Một tụ điện phẳng có các bản hình chữ nhật (chiều rộng l , chiều cao h) được đặt thẳng đứng sao cho mép dưới của tụ chạm vào một chất điện môi lỏng đựng trong chậu có hằng số điện môi ε và khối lượng riêng ρ . Khoảng cách d giữa hai bản tụ điện rất nhỏ so với kích thước của bản ($d \ll l, h$). Khi nối hai bản với nguồn điện có hiệu điện thế U người ta thấy điện môi dâng lên giữa hai bản đến độ cao H . Tính H . Bỏ qua hiện tượng mao dẫn.

Giải. Khi tụ điện được tích điện nó có xu hướng hút điện môi vào giữa hai bản, vì vậy năng lượng của tụ giảm đi. Theo định luật bảo toàn năng lượng công của lực điện trường kéo điện môi lỏng vào trong tụ điện biến thành thế năng của cột điện môi trong trọng trường. Công này bằng độ biến thiên năng lượng của tụ điện và có giá trị bằng $A = (C_2 - C_1)U^2/2$, với C_1 và C_2 là điện dung của tụ điện trước và sau khi có cột điện môi chiều cao H . Để tìm C_2 ta coi như tụ điện là một bộ tụ gồm hai tụ điện mắc song song (tụ điện không khí có chiều cao $h - H$ và tụ điện điện môi có chiều cao H), do đó $C_2 = (\varepsilon l(h - H)/d) + (\varepsilon \varepsilon_0 \cdot lH/d)$ (đặt $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$). Như vậy $A = (U^2/2d)\varepsilon_0(\varepsilon - 1)lH$. Còn thế năng của cột điện môi trong trọng trường bằng trọng lượng mg của nó nhân với chiều cao $H/2$ của khối tâm:

$$W = mg(H/2) = (1/2)\rho g l d H^2$$

$$\text{Vì } A = W, \text{ suy ra } H = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2/\rho g d^2$$

Bạn đọc hãy xét tiếp trường hợp sau đây : lúc đầu tích điện cho tụ điện đến hiệu điện thế U rồi ngắt khỏi nguồn, sau đó mới cho tụ điện chạm vào mặt chất lỏng.

BẠN CÓ BIẾT

Các kí hiệu toán học có từ bao giờ

Dấu phẩy thập phân xuất hiện vào thế kỉ thứ 18. Trước kia thay vì viết $10 + 5$ người ta viết 10 5 còn $10 - 5$ được viết là 10 ψ 5. Sau đó $10 + 5$ được viết là 10 et 5 (et tiếng Latin nghĩa là "và"). Lâu dần et được viết tắt thành +. Có người cho rằng các dấu + và - là cách viết tắt của plus (cộng) và minus (trừ). Kí hiệu phần trăm % lúc đầu được viết rõ là Cento sau đó được viết tắt thành Cto và cuối cùng, chữ Cto lại được viết tắt một lần nữa để trở thành kí hiệu chính thống. Dấu nhân và chia xuất hiện vào thế kỉ 17. Vào thời gian này dấu bằng (=) được viết là ∞ . Trước đó nó được viết dưới dạng từ gốc là aequalis (tiếng Latin nghĩa là bằng) sau đó được viết tắt thành ae rồi do viết ngoáy hai chữ a và e dính lại với nhau mà thành ∞ . Sau này khi xuất hiện dấu bằng chính thống thì ∞ được dùng để kí hiệu cho số 1000. Cuối cùng Uôles đề nghị dùng ∞ biểu diễn cho vô cùng. Năm 1980 Peano bắt đầu sử dụng kí hiệu $\in$ (thuộc)

Hồi đó ký hiệu "bao hàm trong" còn được viết là α hoặc $<$. Năm 1920 Hauxdooc bắt đầu dùng kí hiệu $\subset$. Các kí hiệu $\cup$ (hợp), $\cap$ (giao) và suy ra $\supset$ lúc đầu cũng do Peano đề xuất. Sau một thời gian dài nhiều nhà toán học thử dùng các kí hiệu khác người ta lại quay về với cách dùng ban đầu của Peano. Riêng kí hiệu $\supset$ có thể lẫn lộn với dấu đảo của "bao hàm trong" $\subset$ cho nên cần được xem xét lại. Hince dùng kí hiệu $\rightarrow$, còn nhóm Buócbaki dùng $\Rightarrow$ cho khái niệm suy dẫn.

Do ảnh hưởng của các kí hiệu $\cup$ và $\cap$ người ta dùng $\vee$ và $\wedge$ để biểu diễn cho phép "hoặc" và phép "và" logic. Kí hiệu phủ định thường được viết là - hoặc $\sim$, nhưng do chúng còn mang nghĩa khác nên năm 1937 Haytinh đề nghị dùng $>$ thay cho phủ định. Peano cũng là tác giả của lượng tử tồn tại $\exists$. Năm 1903 Rutxen và Oaitghet đặt thêm kí hiệu $()$, còn kí hiệu $\exists$ mãi tới năm 1920 mới xuất hiện.

XUÂN TRUNG
(Sưu tầm)

Toán học và đời sống



TOÁN GIÚP ĐỠ THỂ THAO NHƯ THẾ NÀO?

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Trong một giải vô địch bóng đá quốc gia có n đội tham gia. Các đội thi đấu theo thể thức vòng tròn, mỗi đội đấu một trận với tất cả các đội còn lại. Mỗi ngày, mỗi đội chỉ được phép đá nhiều nhất là một trận.

Số trận đấu của giải sẽ là $n(n-1)/2$. Mỗi ngày tổ chức được tối đa $[n/2]$ trận. Để giải kết thúc nhanh gọn, Ban tổ chức muốn lập một lịch thi đấu trong đó mỗi ngày có $[n/2]$ trận. Giải sẽ kéo dài n ngày với n lẻ và $n-1$ ngày nếu n chẵn. Đó là thời biểu ngắn nhất có thể.

Làm thế nào để lập một lịch như vậy một cách nhanh chóng và khoa học? Làm thế nào để đưa ra một quy trình chung để có thể áp dụng được cho mọi mùa thi đấu bóng đá? Ở đây thể thao đã phải kêu gọi sự giúp đỡ của toán học.

Ta hãy cố định một số i ($i = 1, 2, \dots, n$). Với mỗi số nguyên a ($a = 1, 2, \dots, n$) có tồn tại duy nhất số nguyên $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $a + b \equiv i \pmod{n}$ (cụ thể $b = i - a$ nếu $a < i$ và $b = n + i - a$ nếu $a \geq i$)

Ta gọi b là số i -liên hợp của $a \pmod{n}$. Hiển nhiên nếu b là i -liên hợp của $a \pmod{n}$ thì a cũng là i -liên hợp của $b \pmod{n}$. Nếu số i -liên hợp của a bằng a ta nói a là i -tự liên hợp $\pmod{n}$. Để thấy rằng nếu n lẻ thì với mỗi i , có duy nhất một số i -tự liên hợp $\pmod{n}$.

Đó là số $i/2$ nếu i chẵn và là số $(n+i)/2$ nếu i lẻ. Nếu n chẵn thì sẽ không có số i -tự liên hợp $\pmod{n}$ với i lẻ, nhưng với i chẵn có hai số i -tự liên hợp $\pmod{n}$. Đó là các số $i/2$ và $(n+i)/2$.

Ta hãy đánh số các đội tham dự từ 1 đến n . Trong trường hợp n lẻ quy trình lập lịch là như sau:

Trong ngày thi đấu thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$) đội mang số a sẽ gặp đội mang số i -liên hợp với $a \pmod{n}$ còn đội mang số i -tự liên hợp $\pmod{n}$ sẽ nghỉ. Như vậy nếu $n = 2k + 1$ thì mỗi ngày sẽ có k trận đấu với $2k$ đội tham dự và một đội nghỉ.

Chẳng hạn với $n = 7$ dùng quy tắc trên ta nhanh chóng lập được lịch sau

Ngày 1	Ngày 2	Ngày 3	Ngày 4	Ngày 5	Ngày 6	Ngày 7
1 - 7	2 - 7	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6
2 - 6	3 - 6	4 - 6	5 - 6	2 - 3	2 - 4	2 - 5
3 - 5	4 - 5	3 - 7	4 - 7	5 - 7	6 - 7	3 - 4
4 nghỉ	1 nghỉ	5 nghỉ	2 nghỉ	6 nghỉ	3 nghỉ	7 nghỉ

(Lịch thi đấu bóng đá của 7 đội mang mã số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Trong trường hợp n chẵn, $n = 2k$ hơi có một chút rắc rối. Nếu ta làm như ở trường hợp n lẻ thì ở ngày thứ i (với i chẵn) sẽ có hai đội mang số $i/2$ và $(n+i)/2$ nghỉ thi đấu do đó chỉ có $k-1$ trận. Nếu ta cho hai đội này gặp nhau thì ở ngày $i+k$ (nếu $i \leq k$) hoặc ngày $i-k$ (nếu $i > k$) hai đội này lại gặp nhau nữa vì $i/2 + (n+i)/2 = i+k$. Vì thế ta phải cải biên như sau:

Tách một đội ra chẳng hạn đội n . Trong ngày thi đấu thứ i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) đội mang số $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sẽ gặp đội mang số i -liên hợp với $a \pmod{n-1}$. Đội mang số i -tự liên hợp $\pmod{n-1}$ sẽ gặp đội n . Như vậy mỗi ngày có k trận và giải kéo dài trong $2k-1 = n-1$ ngày.

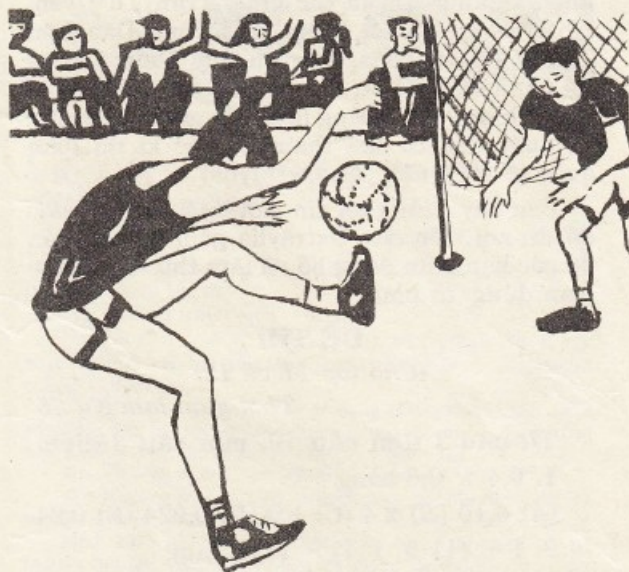
Chẳng hạn với $n = 8$ dùng quy tắc trên ta có ngay lịch sau.

Ngày 1	Ngày 2	Ngày 3	Ngày 4	Ngày 5	Ngày 6	Ngày 7
1 - 7	2 - 7	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6
2 - 6	3 - 6	4 - 6	5 - 6	2 - 3	2 - 4	2 - 5
3 - 5	4 - 5	3 - 7	4 - 7	5 - 7	6 - 7	3 - 4
4 - 8	1 - 8	5 - 8	2 - 8	6 - 8	3 - 8	7 - 8

(Lịch thi đấu cho 8 đội bóng mang mã số 1, 2, ..., 8)

Bài tập : 1) Các bạn ở các lớp chuyên tin học hãy lập chương trình cho máy tính thực hiện thuật toán lập lịch trên.

2) Dĩ nhiên đây không phải là cách lập lịch duy nhất. Các bạn hãy nghĩ ra thêm các cách khác, xem có cách nào tốt hơn cách lập trên hay không?



GIỚI THIỆU VỀ VIỆC THI HỌC SINH GIỎI TOÁN CỦA ÔXTRÂYLI

PHẠM VĂN HÙNG và TRẦN VĂN NHUNG

Tháng 7 năm 1992 chúng tôi có dịp được thăm một số trường đại học ở Ôxtrâyli. Nhân dịp chuyến đi này, chúng tôi được mời ghé thăm Trung tâm quốc tế về đào tạo tài năng toán học trẻ của Ôxtrâyli do Giáo sư P.J. O'Halloran (Đại học Tổng hợp Canberra) làm giám đốc. Trung tâm này thường xuyên tổ chức các cuộc thi học sinh giỏi toán cho học sinh phổ thông ở Ôxtrâyli và nhiều nước trên thế giới. Cách thức tiến hành thi và đề thi có nhiều nét độc đáo. Từ Canberra, ban tổ chức gửi đầu bài thi đi các nơi ở Ôxtrâyli và các nước trên thế giới và nhận lại các bài làm qua bưu điện. Các thí sinh không cần phải đến Canberra. Đề ra gồm có 30 bài toán và thí sinh phải giải chúng trong thời gian 75 phút. Mỗi bài toán có kèm theo 5 đáp số, trong đó chỉ có một đáp số đúng. Mỗi thí sinh được phát một phiếu trả lời dưới dạng một trang giấy kẻ ô 30×5 chứa 150 đáp số và phải dùng bút chì đánh dấu để chọn lấy 30 đáp số đúng. Sau khi thi xong, các trang giấy kẻ ô nói trên, đã được thí sinh đánh dấu, được gửi lại ngay cho Trung tâm của GS. O'Halloran. Việc chấm bài được thực hiện rất đơn giản và nhanh chóng nhờ các máy tính điện tử : một số lượng lớn bài thi được chấm xong trong ít phút.

Trong khi thi thí sinh không được sử dụng máy tính. Trong một thời gian ngắn (75 phút cho 30 bài toán !) thí sinh không phải trình bày lời giải mà phải có sự phân tích, phán đoán và chọn lựa 30 đáp số đúng từ 150 đáp số cho trước. Tất nhiên, việc đoán mò chẳng giúp ích được gì, nếu không muốn nói là có hại, vì nếu chọn sai đáp số cho một câu nào đó thì sẽ bị trừ đi $1/4$ điểm. 30 bài toán được chia thành ba nhóm : dễ, trung bình, khó và bao quát khá đầy đủ các dạng : số học, đại số, hình học, hình học tổ hợp, xác suất, ... Để làm được 30 bài toán này thí sinh vừa phải có sự thông minh (nhất là khi giải các bài toán logic tổ hợp) vừa phải có kĩ năng tính toán giỏi (tính nhanh).

Khi đến thăm Trung tâm của GS. O'Halloran, ông đã chuyển cho chúng tôi bộ đề thi gồm 30 bài toán để các học sinh lớp 11 và 12 của khối phổ thông chuyên Toán - Tin học mang tên Leonardo da Vinci của Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội làm thử. Chúng tôi đã tổ chức cho 102 em học sinh ở đây "thử sức" vào ngày 31-10-1992. Các thí sinh đã làm bài một cách nghiêm túc và thích thú, vì cách ra đề thi của Ôxtrâyli khá độc đáo mà các em mới làm quen. Chúng tôi đã gửi phiếu bài làm của các em đi Ôxtrâyli để bạn chấm. Kết quả

có 6 em đạt kết quả xuất sắc được nước bạn khen thưởng. Đó là các em : Trần Tú Uyên, Hồ Trường Nguyên, Nguyễn Bá Dũng, Đào Kiên Trung, Lê Gia Kiên, Nguyễn Quý Tuấn. Chúng tôi đề nghị Bộ Giáo dục và Đào tạo đứng ra tổ chức để sao cho những học sinh giỏi toán trong cả nước đều có thể tham dự các kì thi toán quốc tế kiểu này của Ôxtrâyliá.

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc đề thi nổi trên của Ôxtrâyliá gồm 30 bài toán để các bạn bấm đồng hồ và làm thử trong thời gian đúng 75 phút.

ĐỀ THI

(Cho lớp 11 và 12)

Thời gian làm bài 75'

Từ câu 1 đến câu 10, mỗi câu 3 điểm

1. $0,4 \times 0,6$ bằng

(A) 0,10 (B) 2,4 (C) 1,0 (D) 0,024 (E) 0,24.

2. $1 + (11 \times 111) - 1111$ bằng

(A) 111 (B) 1221 (C) 2333 (D) 11011 (E) 11.

3. $100^2 - 99^2$ bằng

(A) 1 (B) 2 (C) 9 (D) 99 (E) 199.

4. Trong công thức vật lí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,

nếu $R_1 = 3$ và $R_2 = 6$ thì giá trị của R là
(A) $1/2$ (B) 2 (C) $1/9$ (D) 9 (E) $9/2$.

5. Nếu n là số nguyên thì số nào dưới đây phải là số nguyên lẻ?

(A) $5n$ (B) $n^2 + 5$ (C) n^3 (D) $n + 16$ (E) $2n^2 + 5$.

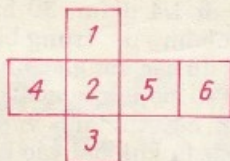
6. $(1 - q^2)(1 + q^2 + q^4)$ bằng

(A) $1 - q^6$ (B) $1 - q^2 - q^4 - q^6$ (C) $1 + q^4 + q^6$
(D) $1 + 2q^4 + 2q^6$ (E) $1 - q^2 + q^4 - q^6$.

7. Nếu $xy = 3$ thì $x^{3y} + 2$ bằng

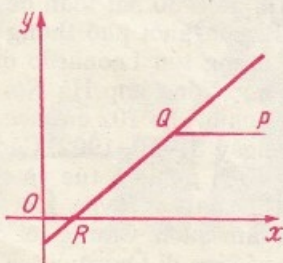
(A) 11 (B) 8 (C) 29 (D) 6 (E) 35.

8. Hình vẽ bên cạnh được gấp lại thành một hình lập phương, tại mỗi đỉnh của hình lập phương có ba mặt cắt nhau. Những số trên ba mặt cắt nhau ở một đỉnh bất kì được nhân lại với nhau. Giá trị lớn nhất của các tích đó bằng bao nhiêu?



(A) 40 (B) 60 (C) 72 (D) 90 (E) 120.

9. Trong biểu đồ bên, phương trình của RQ là $y = 2x - 1$. Nếu QP song song với trục Ox và tọa độ của P là $(8,4)$ thì khoảng



cách từ P đến Q là:

(A) 3,5 (B) 4 (C) 4,5 (D) 5 (E) 5,5.

10. Trong tam giác PQR , $\widehat{PQR} = 2x^\circ$, $\widehat{PRQ} = (x + 15)^\circ$,

$\widehat{QPR} = (2x - 10)^\circ$. Giá trị của x là

(A) 30 (B) 35 (C) 40 (D) 25 (E) 32.

Từ câu 11 đến câu 20, mỗi câu 4 điểm

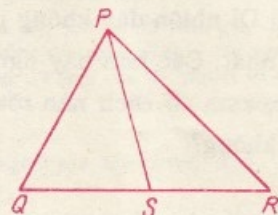
11. Hiệu số giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ của phương trình

$4x^2 - 24x + 35 = 0$ là:

(A) 2 (B) 1 (C) $1/2$ (D) $1/4$ (E) 4.

12. S là điểm giữa của QR trong tam giác PQR .

Nếu $PQ = 6$, $PR = 8$ và $\widehat{PQR} + \widehat{PRQ} = 90^\circ$ thì PS là:



(A) $4\frac{3}{4}$ (B) 5 (C) $5\frac{1}{2}$ (D) 6 (E) 7.

13. Một khối lập phương có cạnh bằng 3, các mặt của khối được quét sơn. Sau đó nó được cắt thành 27 khối lập phương con có cạnh bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt của khối lập phương con không được sơn?

(A) 36 (B) 24 (C) 81 (D) 72 (E) 108.

14. Rowenna thích uống nước quả ép pha với nước chanh. Một hôm, cô rót nửa cốc nước quả ép lẫn với nửa cốc nước chanh. Sau khi trộn hai thứ nước với nhau, cô đã uống $1/3$ lượng nước đó và sau đó cô lại rót thêm nước chanh vào cho đầy cốc. Hỏi tỉ lệ phần nước quả ép trong hỗn hợp cuối cùng là bao nhiêu?

(A) $1/6$ (B) $1/3$ (C) $1/2$ (D) $3/4$ (E) $5/6$.

15. Nếu $f(x) = |x| + |x + 1| + |x - 1|$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là:

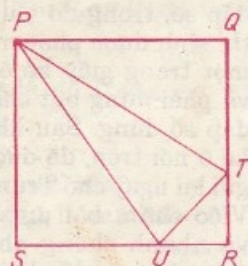
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2 (E) 0.

16. Giá trị của:

$1992^2 - 1991^2 + 1990^2 - 1989^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ là:

(A) 996 (B) 329845486 (C) 1983035
(D) 988528 (E) 1985028.

17. $PQRS$ là hình vuông, PTU là tam giác cân với $PT = PU$ và $\widehat{TPU} = 30^\circ$. T trên QR , U trên RS . Nếu diện tích tam giác PTU là 1 thì diện tích của $PQRS$ là:



(A) 2 (B) $2\frac{2}{3}$ (C) 3 (D) 4 (E) $\sqrt{3}$.

18. Một hôm, cô gái chạy xuống trên một cầu thang tự động và xuống được trong vòng 15 giây. Ngày hôm sau, thang hỏng và không chuyển động. Khi đó, vẫn cùng tốc độ như ngày hôm trước của cô, cô gái chạy xuống phải mất 20 giây. Hỏi nếu cô gái vẫn đứng trên thang khi nó chuyển động thì mất bao nhiêu giây cô gái mới xuống được?

- (A) 40 (B) 50 (C) 35 (D) 60 (E) 65.

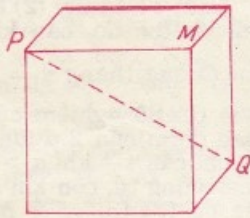
(Ghi chú : Ở đây, thang máy hoạt động theo nguyên tắc băng tải và hay dùng ở những nơi công cộng như siêu thị, ga tàu điện ngầm, ...).

19. Cho m, n là các số nguyên. Có bao nhiêu nghiệm (m, n) thỏa mãn bất đẳng thức:

$$4 \leq m^2 + n^2 \leq 17?$$

- (A) 48 (B) 36 (C) 15 (D) 50 (E) 52.

20. Cho hình lập phương với cạnh bằng 1. P và Q là hai đỉnh đối diện của hình lập phương. M là một đỉnh bất kì của nó. Xác định khoảng cách từ M đến PQ .



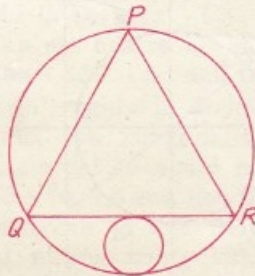
- (A) $\sqrt{3}/2$ (B) $\sqrt{5}/8$
(C) $1 + \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}/2$
(E) $\sqrt{6}/3$.

Từ câu 21 đến câu 30, mỗi câu 5 điểm

21. Mỗi mặt của khối lập phương được sơn đen hoặc trắng. Hai cách sơn được gọi là khác nhau nếu chúng không thể bị nhầm lẫn cho dù khối lập phương đó được để kiểu nào. Số cách sơn khác nhau của khối lập phương này là:

- (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 64.

22. Tam giác cân PQR ($PQ = PR$) nội tiếp trong một vòng tròn bán kính bằng 6. Vòng tròn thứ hai tiếp xúc với vòng tròn thứ nhất và tiếp xúc với QR tại điểm giữa như hình vẽ. Cạnh PQ có độ dài $4\sqrt{5}$. Bán kính của vòng tròn nhỏ là:



- (A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $8/3$ (D) $7/3$ (E) $(3 + \sqrt{5})/2$.

23. Cho a và b là những số nguyên không âm. Khi nào thì $(2^a + 2^b)^2$ có thể viết được dưới dạng tổng của hai số phân biệt và mỗi số đều là lũy thừa của 2?

- (A) $a = b$ (B) $a = 0$ hoặc $b = 0$
(C) $|a - b| = 1$ (D) a và b đều là lũy thừa của 2 (E) không bao giờ.

24. Có bao nhiêu số trong các số 1, 2, 3, ..., 10000 mà số đó có đúng 2 chữ số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp (chẳng hạn như các số 993; 1992; 9929; Còn các số 9295 hoặc 1999 không thỏa mãn đòi hỏi)?

- (A) 270 (B) 271 (C) 280 (D) 123 (E) 261.

25. Trên một giá sách có các tác phẩm của ba tác giả, ba tập của A, ba tập của B và 1 tập của C. Các cuốn sách được xếp đặt một cách ngẫu nhiên trên giá. Xác suất để các tập sách của cùng một tác giả đứng liền nhau là:

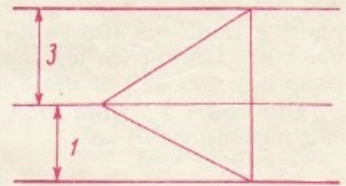
- (A) $3/70$ (B) $1/140$ (C) $3/140$ (D) $1/70$ (E) $1/35$.

26. Các điểm S và T nằm trên các cạnh PQ và PR của một tam giác đều PQR sao cho: $ST = TR$ và ST vuông góc với PQ. Cho biết độ dài của QR là 1. Vậy độ dài của ST là:

- (A) $1/2$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3} - 3$
(D) $2(2 - \sqrt{3})$ (E) $(1/3)\sqrt{3}$.

27. Mạng lưới xe lửa của thành phố bán về 1 chiều đi du lịch từ ga này đến ga kia. Mỗi vé có ghi ga xuất phát và ga đến. Một số ga mới được bổ sung thêm vào mạng lưới này và có 76 loại vé bổ sung khác nhau đã được in ra. Hỏi có bao nhiêu ga mới được bổ sung thêm vào mạng lưới?

- (A) 4 (B) 2
(C) 19 (D) 8 (E) 38



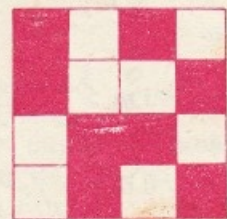
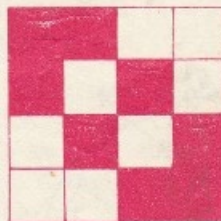
28. Các đỉnh của tam giác đều nằm trên ba đường thẳng song song. Các khoảng cách được chỉ ra trên hình vẽ. Khi đó diện tích của tam giác bằng:

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $(13/3)\sqrt{3}$ (C) $(16/3)\sqrt{3}$
(D) $4\sqrt{3}$ (E) $(52/3)\sqrt{3}$

29. Một nhóm người được gọi là Clique nếu trong nhóm đó có ít nhất 3 người mà mỗi người có quen biết với những người khác trong nhóm. Cho một nhóm $2n$ người ($n > 1$) sao cho trong đó không có một Clique nào cả. Hỏi số cặp những người quen biết nhau tối đa là bao nhiêu?

- (A) $3n - 2$ (B) $n(2n - 1)$ (C) n^2
(D) $(n^3 + 11n - 6)/6$ (E) $n(n + 1)/2$

30. Người ta yêu cầu sơn mẫu đen và trắng các hình vuông cạnh 4×4 sao cho có đúng 2 hình vuông mẫu đen và hai hình vuông mẫu trắng trong mỗi hàng hoặc mỗi cột. Ví dụ như hai hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu cách có thể làm được điều này?

- (A) 36 (B) 54 (C) 72 (D) 120 (E) 90.

BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

PHAN HUY KHÁI

Có nhiều cách để giải các bài toán định tính về phương trình và bất phương trình có tham số như các phương pháp điều kiện cần và đủ, tam thức bậc hai, giá trị lớn và nhỏ nhất,... Trong bài này chúng tôi giới thiệu một phương pháp độc đáo để biện luận các phương trình và bất phương trình có tham số: phương pháp hình học và đồ thị. Dựa vào các đặc trưng mang tính hình học của bài toán như phương trình đường thẳng, đường tròn, các biểu diễn hình học của tập hợp nghiệm các phương trình, bất phương trình mà tìm ra lời giải thích hợp cho bài toán. Chúng ta hãy làm quen với phương pháp này qua một số bài toán cụ thể dưới đây.

Bài toán 1: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau

$$\sqrt{4-x^2} = mx + 2 - m \quad (1)$$

Giải: Ta biết rằng số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đường $y = \sqrt{4-x^2}$ và $y = mx + 2 - m$. Vì $y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$, nên đồ thị của $y = \sqrt{4-x^2}$ là nửa đường tròn (phần nằm trên trục hoành) tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 2. Còn $y = mx + 2 - m$ là một họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $A(1, 2)$ với mọi m . Ta nhận thấy có hai tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A : đường thẳng $y = 2$ song song với trục hoành và tiếp tuyến AD (xem hình 1). Gọi $B(-2, 0)$ và $C(2, 0)$ là hai đầu mút của đường kính BOC . Giả sử m_1, m_2, m_3, m_4 tương ứng là các hệ số góc của các đường thẳng AC, AD, AB, AE thì dễ dàng thấy

$$m_1 = -\tan \widehat{ACO} = -2; m_2 = -\tan \widehat{DCO} = -\tan \widehat{EAD} = -\tan (2 \widehat{OAE}) = -\frac{4}{3};$$

$$(\text{vì } \tan \widehat{OAE} = 2); m_3 = \tan \widehat{ABO} = \frac{2}{3};$$

Còn $m_4 = 0$.

Từ đó suy ra

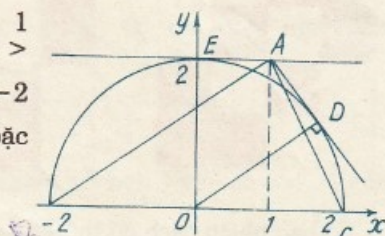
1) (1) có 2 nghiệm khi $0 < m \leq \frac{2}{3}$ hoặc

$$-2 \leq m < -\frac{4}{3}$$

2) (1) có 1 nghiệm khi $m > \frac{2}{3}$ hoặc $m < -2$

hoặc $m = 0$ hoặc

$$m = -\frac{4}{3}$$



H.1

3) (1) vô nghiệm khi $-\frac{4}{3} < m < 0$.

Bài toán 2. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo a

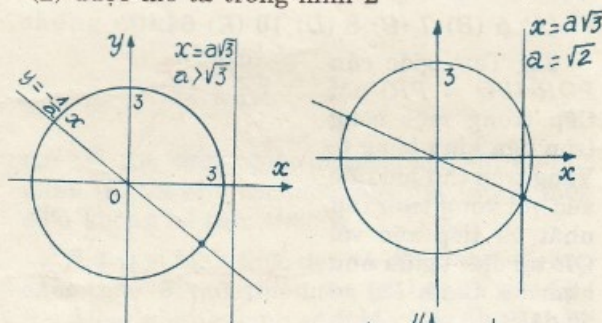
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (ay + x)(x - a\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(ay + x)(x - a\sqrt{3}) = 0 \quad (3)$$

Giải: Dễ thấy (2) biểu diễn đường tròn tâm tại gốc tọa độ, bán kính 3, còn (3) biểu diễn

hai đường thẳng $x = a\sqrt{3}$ và $y = -\frac{1}{a}x$ (nếu $a \neq 0$). Số nghiệm của hệ (2) (3) chính là số giao điểm của 2 đường thẳng với đường tròn. Ta chỉ cần xét khi $a > 0$ (vì khi $a < 0$ ta có kết quả tương tự, còn khi $a = 0$ thì (3) $\Leftrightarrow x = 0$ và lúc đó (2) (3) có 2 nghiệm). Ta xét xem khi

nào $x = a\sqrt{3}; y = -\frac{1}{a}x$ và đường tròn đồng qui. Gọi (x_0, y_0) là điểm đồng qui thì ta có $x_0^2 + y_0^2 = 9; x_0 = a\sqrt{3}$ và $y_0 = -\frac{1}{a}x_0$, và do $a > 0$ nên suy ra $a = \sqrt{2}$. Từ đó số giao điểm của hai đường thẳng trên với đường tròn (2) được mô tả trong hình 2



Vậy ta đi đến kết luận

a) Hệ (2) (3) có 4 nghiệm khi $0 < |a| < \sqrt{3}$ và $|a| \neq \sqrt{2}$

2) Hệ (2) (3) có 3 nghiệm khi $|a| = \sqrt{3}$ hoặc $|a| = \sqrt{2}$

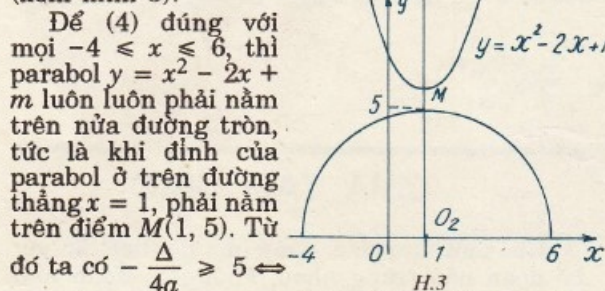
3) Hệ (2) (3) có 2 nghiệm khi $a = 0$ hoặc $|a| > \sqrt{3}$.

Bài toán 3

Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $-4 \leq x \leq 6$

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m \quad (4)$$

Giải : Đặt $y = \sqrt{(4+x)(6-x)}$, thì ta có $y \geq 0$ và $(x-1)^2 + y^2 = 25$. Vậy đồ thị của hàm số $y = \sqrt{(4+x)(6-x)}$ là nửa đường tròn (phần nằm trên trục hoành) tâm tại điểm $O_1(1, 0)$ và bán kính 5. Còn $y = x^2 - 2x + m$ là parabol luôn có cực tiểu nằm trên đường $x = 1$. (xem hình 3).



đó ta có $-\frac{\Delta}{4a} \geq 5 \Leftrightarrow m - 1 \geq 5 \Leftrightarrow m \geq 6$. Vậy giá trị của m cần tìm là $m \geq 6$.

Bài toán 4

Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(0, 9)$ và $B(3, 6)$. Xét hệ bất phương trình

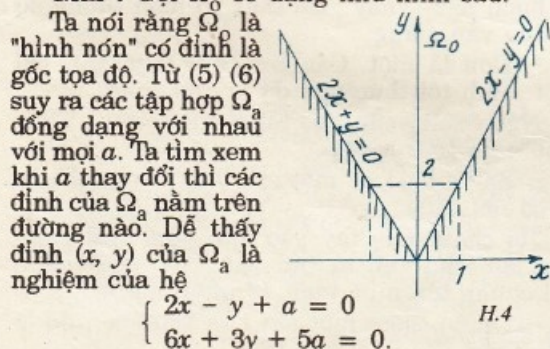
$$\begin{cases} 2x - y + a \leq 0 \\ 6x + 3y + 5a \geq 0 \end{cases} \quad (5) \quad (6)$$

Gọi Ω_a là tập hợp nghiệm của hệ (5), (6)

1. Tìm a để cả đoạn AB nằm trong Ω_a ,

2. Tìm a để AB có ít nhất một điểm chung với Ω_a .

Giải : Gọi Ω_a có dạng như hình sau:



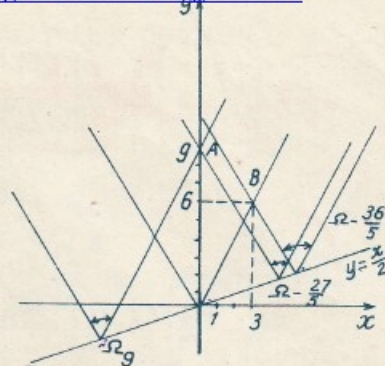
Từ đó ta có $x = -\frac{2a}{3}$; $y = -\frac{a}{3}$. Vậy các

đỉnh của Ω_a nằm trên đường thẳng $y = \frac{x}{2}$. Khi $a > 0$, thì nó nằm trên tia Ot' , còn khi $a < 0$ thì nằm trên tia Ot (xem hình 5).

Từ đó ta thấy ngay để $AB \subset \Omega_a$ thì hoặc là cạnh $2x - y + a = 0$ phải đi qua $B(3, 6)$, tức là $a = 0$; hoặc là cạnh $6x + 3y + 5a = 0$ phải đi qua $A(0, 9)$, tức là $a = -\frac{27}{5}$.

Vị trí cuối cùng ở bên phải mà Ω_a còn cắt AB là cạnh $6x + 3y + 5a = 0$ phải đi qua $B(3, 6)$, tức là $a = -\frac{36}{5}$. Vị trí cuối cùng ở bên trái mà Ω_a còn cắt AB là cạnh $2x - y + a = 0$ phải đi qua $A(0, 9)$, tức là $a = 9$.

Vậy để AB có ít nhất một điểm chung với Ω điều kiện là $-\frac{36}{5} \leq a \leq 9$, còn để AB nằm trọn trong Ω thì phải có $-\frac{27}{5} \leq a \leq 0$.



Bài toán 5

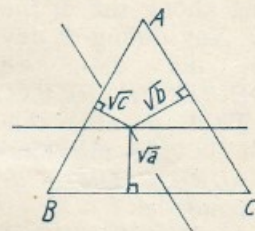
Cho $a, b, c > 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \\ \sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \\ \sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1. \end{cases}$$

Giải : Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Áp dụng kết quả quen biết sau đây trong hình học phẳng : "Nếu M là một điểm bất kì trong tam giác đều, thì tổng các khoảng cách từ M xuống ba cạnh tam giác bằng chiều cao của nó".

Đường thẳng song song với cạnh BC và cách nó 1 khoảng bằng $\sqrt{a}$, và đường thẳng song song với cạnh AC cách nó 1 khoảng bằng $\sqrt{b}$ cắt nhau tại M (xem hình 6). Khi đó từ kết quả



trên, và từ giả thiết $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, suy

ra khoảng cách từ M xuống cạnh AB chính là $\sqrt{c}$. Từ định lý Pitago, dễ thấy $x = MA^2$, $y = MB^2$, $z = MC^2$ chính là một nghiệm của hệ đã cho. Bằng phương pháp phản chứng các bạn có thể chứng minh một cách không lấy gì làm khó khăn, rằng hệ đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất trên.

Để kết thúc cho bài toán, xin mời các bạn hãy làm quen với phương pháp chúng tôi vừa trình bày ở trên qua một số ví dụ sau đây:

1. Biện luận theo a số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 4 \\ (x-2a)(y-a) = 0 \end{cases}$$

2. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$$

3. Tìm a để có ít nhất một điểm của đoạn AC có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2a \leq 0 \\ 6x - 2y + 7a \leq 0, \end{cases}$$

trong đó $A(-2, -3)$; $C(6, 1)$.

4. Tìm m để hệ sau có hai nghiệm (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) và đại lượng $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ đạt giá trị lớn nhất:

$$\begin{cases} x + my - m = 0 \\ x^2 + y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$



Giải đáp bài

ĐI ĐƯỜNG NÀO

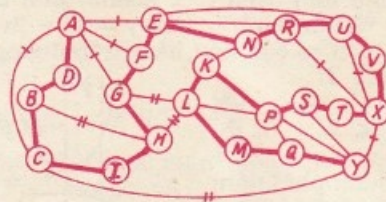
Trước hết xét những địa điểm mà chỉ có một đường đi qua. Đó là các chặng: ADB , CIH , LMQ , STX và XVU . Đường đi cần tìm nhất định phải qua các chặng đường này. Đầu tiên ta đi theo ADB . Từ B không thể đi theo BH vì đến H ta phải đi tiếp HIC rồi CY . Vậy phải đi theo BC rồi CIH . Đến H không thể đi theo HL vì phải đi tiếp LMQ , và như vậy buộc ta phải quay lại L một lần nữa hoặc muốn qua G không thể qua F , E chỉ một lần. Do đó phải đi theo HG rồi GFE . Đến E không thể đi theo EU rồi $UVXTS$ vì như thế không thể qua N và K chỉ một lần nếu muốn qua R . Tương tự cũng không thể đi theo ER mà phải đi theo EN . Vậy đường đi duy nhất từ A đến Y qua mỗi địa điểm chỉ một lần là : $ADBCIHGFENRUVXTSPKLMQY$

Từ đó dễ nhận thấy 8 đường đi từ A qua mỗi địa điểm một lần rồi trở về A là
 $ADBHCICYQLMKPSTXVURNEFGA$
 và ngược lại
 $ADBHCYSTKVURNKPQMLGFEA$
 và ngược lại
 $ADBHCYSTXVUERNKPQMLGFA$
 và ngược lại
 $ADBHCYSTXVURENKPQMLGFA$
 và ngược lại

Trên đây là một thí dụ rất đơn giản về đường đi Hamilton và bài toán "người du lịch", một bài toán có nhiều ý nghĩa thực tế và hiện nay chưa có lời giải tổng quát.

(Dựa theo Phạm Ngọc Châu, trường chuyên Văn - Toán, Đức Phổ, Quảng Ngãi)

BÌNH PHƯƠNG



CHIA TAM GIÁC

Cho một tam giác. Bằng một nét liền, không có đoạn nào trùng nhau, không có đoạn nào trùng với các cạnh của tam giác đã cho, hãy chia tam giác thành 25 hình bằng nhau.

VŨ HOÀNG THÁI

Nụ cười toán học

ĐA THỨC

Trời mùa hè nóng bức mà lại đang là tiết cuối cùng của buổi học nên mọi người đều có vẻ buồn ngủ. Thấy giáo thấy rõ hiện tượng đó nhưng vẫn giảng:

- Đơn là một. Các em đang ngủ gật, chỉ một mình tôi thức nên đó là đơn thức.

Nghe xong câu đó, tôi choàng tỉnh. Thấy giáo nhìn tôi rồi tiếp:

- Bây giờ đã có một em thức cùng tôi nên ta có nhị thức.

Tôi chạm nhẹ tay vào anh bạn ngồi cùng bàn làm cho anh ta tỉnh lại. Thấy giáo nhìn hai chúng tôi, mỉm cười và nhấn mạnh:

- Lại có thêm một em nữa thức nên đó là tam thức.

Hai chúng tôi bật cười làm cho cả lớp bừng tỉnh. Thấy giáo vui mừng kết luận:

- Lớp ta thực sự là đa thức rồi!

TRẦN VĂN VUÔNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Chung, Ngô Đạt Tú, Lê Khắc Bảo, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu, Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc Minh, Trần Văn Nhung, Nguyễn Đăng Phát, Phan Thanh Quang, Tạ Hồng Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ Dương Thụy, Trần Thành Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội, ĐT : 2.60786
 231 Nguyễn Văn Cừ, TPHCM, ĐT : 3. 56111

Biên tập : Vũ Kim Thủy

Trình bày và minh họa : Đoàn Hồng
 In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
 In xong và Gửi lưu chiếu tháng 7-1993

ISSN : 0866 - 8035 - Chỉ số : 12884

Giá : 1000đ