



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 541

Tháng 7 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghienctuusachgd.com



Nhà Toán học **Christian Goldbach** (1690 – 1764)



Thành phố Kaliningrad (Nga)

<https://tieulun.hopto.org>



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG BỐ ĐƯỜNG DÂY NÓNG

PHỤC VỤ NHU CẦU MUA SÁCH GIÁO KHOA

Trước thềm năm học mới, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXB GDVN) đã khẩn trương triển khai in sách giáo khoa (SGK) phục vụ học sinh trước khai giảng. Tính đến thời điểm này, NXB GDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho trên 90% sản lượng SGK theo kế hoạch, sẵn sàng phục vụ năm học mới. SGK bắt đầu được NXB GDVN phát hành từ tháng 3/2022, đảm bảo cung ứng đầy đủ, đồng bộ, kịp thời đến các nhà trường, học sinh, giáo viên, không để xảy ra tình trạng thiếu sách, sót sách, đặc biệt trong giai đoạn triển khai áp dụng

Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Trong các tháng phát hành phục vụ khai giảng năm học mới, các cửa hàng bán lẻ thuộc hệ thống NXB GDVN chuẩn bị đầy đủ hàng hoá, mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời tổ chức các chương trình khuyến mại phong phú. Đặc biệt, đường dây nóng số 0344181018 sẽ hỗ trợ giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK được duy trì từ 8h00 đến 22h00 hàng ngày trong khoảng thời gian từ ngày 15/6 đến ngày 15/9/2022, kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ.





TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÌN NHẬN PHÉP QUAY ĐỂ VẼ THÊM HÌNH TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 7

VŨ HỮU CHÍNH

(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, Hải Phòng)

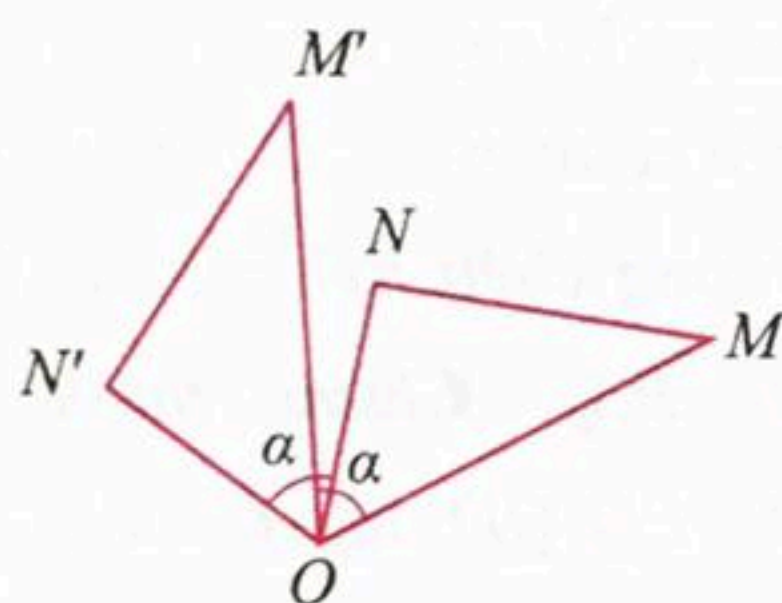
Để giải bài toán hình học lớp 7 khi cần phải vẽ thêm hình để làm bài là một việc khó khăn với học sinh. Nhưng có một số bài toán khi vẽ thêm hình, nhìn nhận dưới một phép quay trong hình học thì sẽ giúp cho học sinh thuận tiện trong làm bài.

1. Phép quay tâm O góc quay α là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \alpha$.

2. Phép quay ngược chiều với kim đồng hồ và phép quay cùng chiều với kim đồng hồ.

3. Phép quay với góc $\alpha = 180^\circ$ là phép đối xứng tâm O .

4. Phép quay biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng nó; biến góc thành góc bằng nó; biến tam giác thành tam giác bằng nó.



I. BÀI TOÁN CÓ GÓC QUAY 90°

Bài 1.1. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và điểm M nằm trong tam giác thỏa mãn $\frac{MB}{1} = \frac{MA}{2} = \frac{MC}{3}$.

Tính số đo $\widehat{AMB}$.

Lời giải. Vẽ $\triangle ADM$ vuông cân tại A , điểm D và M khác phía đối với AC .

Ta có $\triangle AMB = \triangle ADC$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{AMB}$

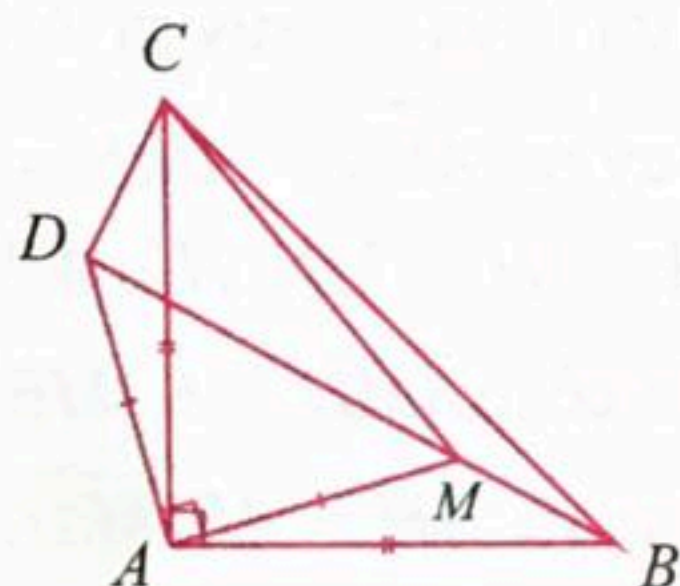
Từ $\frac{MB}{1} = \frac{MA}{2} = \frac{MC}{3}$, đặt

$MB = a, MA = 2a, MC = 3a$.

Suy ra $CD = BM = a$.

Xét $\triangle ADM$ vuông tại A , có

$$AD = AM = 2a \Rightarrow DM^2 = AD^2 + AM^2.$$



$$\text{Suy ra } DM^2 = (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2.$$

Xét $\triangle CDM$, có

$$CD^2 + DM^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2, CM^2 = (3a)^2 = 9a^2.$$

Do đó $CD^2 + DM^2 = CM^2$, suy ra $\triangle CDM$ vuông tại D , nên $\widehat{CDM} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{ADC} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. Vậy

$$\widehat{AMB} = \widehat{ADC} = 135^\circ = 135^\circ.$$

Nhận xét. Ở đây ta đã xét phép quay tâm A góc quay 90° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng hình phụ. Khi đó có $CD = BM$ và $\triangle CDM$ vuông tại D .

Bài 1.2. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , điểm M nằm trong tam giác thỏa mãn $MA:MB:MC = \sqrt{3}:\sqrt{2}:2\sqrt{2}$. Tính số đo các góc: $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMA}$.

Lời giải. Từ $MA:MB:MC = \sqrt{3}:\sqrt{2}:2\sqrt{2}$,

$$\text{đặt } MA = \sqrt{3}a, MB = \sqrt{2}a, MC = 2\sqrt{2}a$$

Dựng $\triangle AMN$ vuông cân tại A sao cho N và M nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ AB .

Có $\triangle ABN = \triangle ACM$ (c.g.c). Suy ra

$$BN = CM = 2\sqrt{2}a.$$

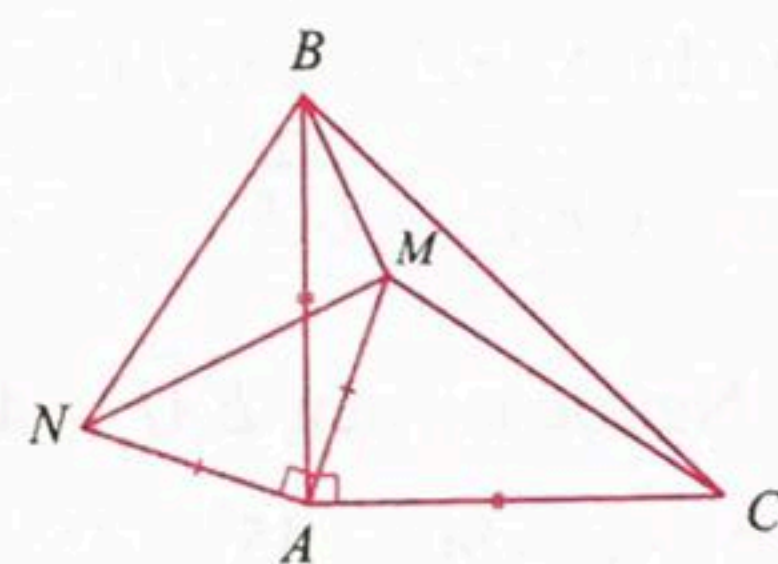
Từ $\triangle AMN$ vuông cân tại A . Suy ra:

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 6a^2.$$

$$\text{Có } MN^2 + BM^2 = 6a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = 8a^2,$$

$$BN^2 = CM^2 = (2\sqrt{2}a)^2 = 8a^2.$$

Xét $\triangle BMN$ có $MN^2 + BM^2 = BN^2$. Suy ra $\triangle BMN$ vuông tại M .



Do đó $\widehat{BMN} = 90^\circ$, suy ra:

$$\widehat{AMB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

Xét $\triangle BMN$ vuông tại, có $BM = \sqrt{2}a, BN = 2\sqrt{2}a$

Do đó $BN = 2BM \Rightarrow \widehat{BNM} = 30^\circ$.

Suy ra $\widehat{ANB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 75^\circ, \widehat{BMC} = 150^\circ$.

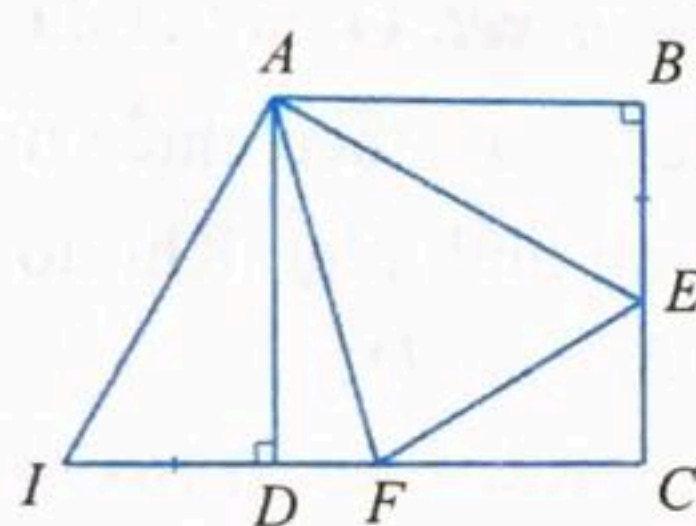
Nhận xét. Ở đây ta đã xét phép quay tâm A góc quay 90° theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng hình phụ. Khi đó $BN = CM$ và $\triangle BMN$ vuông tại M .

Bài 1.3. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài các cạnh là 1. Trên các cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm E và F . Chứng minh rằng chu vi $\triangle CEF$ bằng 2 khi và chỉ khi $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

Lời giải. Trên tia đối của tia DC lấy điểm I sao cho $DI = BE$. Khi đó

$$\triangle ABE = \triangle ADI \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AE = AI, \widehat{BAE} = \widehat{DAI}.$$



Mà $\widehat{BAE} + \widehat{DAE} = 90^\circ$, suy ra:

$$\widehat{DAI} + \widehat{DAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAI} = 90^\circ.$$

* Nếu chu vi $\triangle CEF$ bằng 2 thì

$$CE + CF + EF = 2.$$

Từ $CE + BE + CF + DF = 2$,

$$CE + CF + EF = CE + BE + CF + DF = 2$$

$$\Rightarrow EF = BE + DF \Rightarrow EF = DI + DF = IF.$$

Do đó $\triangle AFE = \triangle AFI$ (c.c.c).

$$\text{Suy ra } \widehat{EAF} = \widehat{IAF} = \frac{1}{2} \widehat{EAI} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

* Ngược lại, nếu $\widehat{EAF} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{IAF} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{IAF}.$$

Do đó $\triangle AFE = \triangle AFI$ (c.g.c), suy ra:

$$EF = IF = DI + DF = BE + DF.$$

$$\text{Do đó } CE + CF + EF = CE + CF + BE + DF = BC + CD = 2.$$

Vậy chu vi $\triangle CEF$ bằng 2.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 90° , theo chiều kim đồng hồ. Khi đó $BE = DI$ và $\triangle ADI$ vuông tại D . Thay đổi giả thiết của bài toán, ta có bài toán mới.

Bài 1.4. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên cạnh CD . Tia phân giác $\widehat{BAM}$ cắt BC tại E , tia phân giác $\widehat{DAM}$ cắt CD tại F . Chứng minh $AM \perp EF$.

Lời giải. Gọi AM cắt EF tại H .

Trên tia đối của tia DC lấy điểm I sao cho $DI = BE \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADI$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{EAM},$$

$$AI = AE.$$

Suy ra:

$$\widehat{IAF} = \widehat{EAF} = 45^\circ.$$

Do đó:

$$\triangle AFI = \triangle AFE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AFH} \Rightarrow \triangle AFD = \triangle AFH \text{ (g.c.g.)}.$$

Do đó $\widehat{ADF} = \widehat{AHF} = 90^\circ$. Vậy $AM \perp EF$.

Nhận xét. Từ bài toán trên, ta còn chứng minh được chu vi $\triangle CEF$ bằng $2AB$.

Bài 1.5. Cho hình vuông $ABCD$, có cạnh hình vuông bằng 1 đơn vị. Lấy các điểm M, N lần lượt trên cạnh BC, CD sao cho chu vi $\triangle CMN$ bằng 2. Đường chéo BD cắt các đoạn AM, AN lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành 3 cạnh của một tam giác vuông.

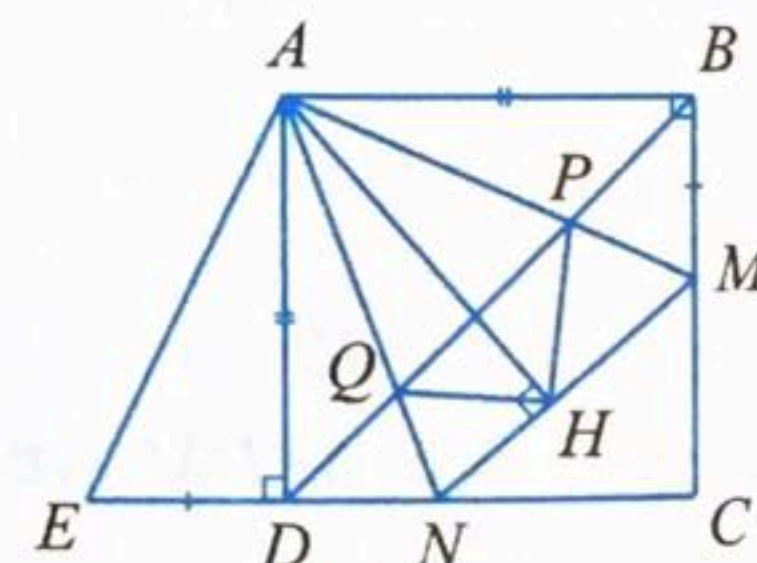
Lời giải. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$.

Ta có $\triangle ADE = \triangle ABM$

(c.g.c). Suy ra:

$$AE = AM,$$

$$\widehat{AED} = \widehat{AMB} \quad (1).$$



$$\text{Từ } MC + CN + NM = 2 = MC + BM + CN + DN \Rightarrow MN = BM + DN = DE + DN = EN \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ANE = \triangle ANM$ (c.c.c).

$$\text{Suy ra } \widehat{AEN} = \widehat{AMN} = \widehat{AMB}.$$

Hạ $AH \perp MN, H \in MN$.

Ta có $\triangle AMH = \triangle AMB$ (cạnh huyền, góc nhọn).

$$\text{Suy ra } AH = AB, \widehat{MAH} = \widehat{MAB}.$$

$$\text{Do đó } \triangle APH = \triangle APB \text{ (c.g.c). Suy ra } HP = BP, \widehat{AHP} = \widehat{ABP} = 45^\circ.$$

Chứng minh tương tự $\Delta AHQ = \Delta ADQ$, suy ra:

$$QH = QD, \widehat{AHQ} = 45^\circ.$$

Vậy $\widehat{PHQ} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, suy ra:

$$PQ^2 = HP^2 + HQ^2 = BP^2 + QD^2.$$

Do đó các đoạn thẳng BP, PQ, QD lập thành 3 cạnh của một tam giác vuông.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 90° , theo chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $BM = DE$ và ΔADE vuông tại D .

Bài 1.6. Trong hình vuông $ABCD$ lấy hai điểm P, Q sao cho $BP \parallel DQ$ và $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$.

Hãy tính số đo $\widehat{PAQ}$.

Lời giải. Cách 1. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ điểm E sao cho

$$AE = AQ, AE \perp AQ.$$

Khi đó:

$$\Delta ADQ = \Delta ABE \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow DQ = BE, \widehat{AQD} = \widehat{AEB}$ Gọi DQ cắt EB tại I . Có $\widehat{AQD} + \widehat{AQI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{AQI} = 180^\circ$.

$$\text{Mà } \widehat{AQI} + \widehat{AEB} + \widehat{QIB} = 360^\circ - \widehat{QAE} \\ = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

suy ra $\widehat{QIB} = 90^\circ \Rightarrow DI \perp EI$. Mà $BP \parallel DQ$ suy ra $BP \perp BE$. Ta có:

$$PQ^2 = BP^2 + DQ^2 = BP^2 + BE^2 = PE^2 \Rightarrow PQ = PE.$$

Suy ra $\Delta APQ = \Delta APE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{PAQ} = 45^\circ$.

Cách 2. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A vẽ điểm E sao cho $BE \perp BP, BE = DQ$.

$$\text{Ta có } PQ^2 = BP^2 + DQ^2 = BP^2 + BE^2 = PE^2.$$

Suy ra $PQ = PE$ (1)

Gọi F là giao điểm của BP và AD , do $BP \parallel DQ$.

Suy ra $\widehat{ADQ} = \widehat{AFB}$, mà

$$\widehat{AFB} + \widehat{ABF} = 90^\circ = \widehat{ABE} + \widehat{ABF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{ABE} \Rightarrow \widehat{ADQ} = \widehat{ABE}.$$

Xét ΔABE và ΔADQ có:

$$AB = AD, \widehat{ABE} = \widehat{ADQ}, BE = DQ.$$

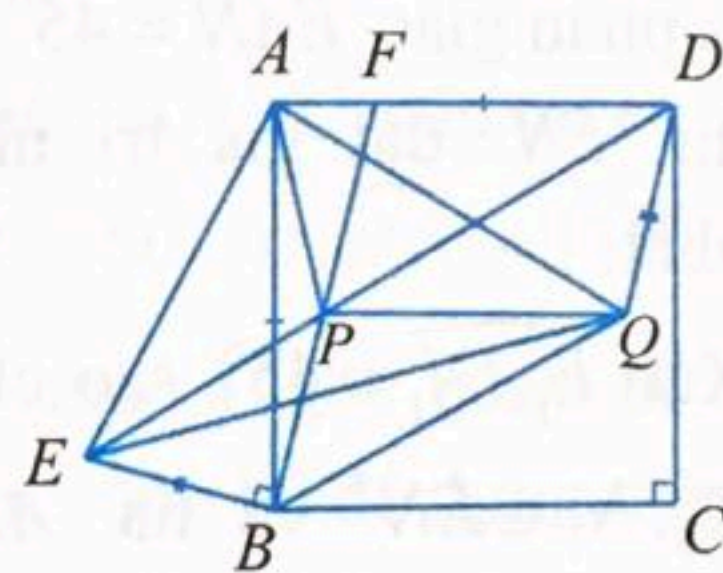
Suy ra $\Delta ABE = \Delta ADQ$ (c.g.c) Suy ra

$$AE = AQ, \widehat{BAE} = \widehat{DAQ} \Rightarrow \widehat{QAE} = 90^\circ \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta APQ = \Delta APE$ (c.c.c).

Suy ra:

$$\widehat{PAQ} = \widehat{PAE} = 90^\circ : 2 \\ = 45^\circ.$$



Nhận xét. Trong cách 1, xét phép quay tâm A góc quay 90° , theo chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $BE = DQ, BE \perp DQ$. Trong cách 2, vẽ ΔBEP vuông tại B với $BE = DQ$. Từ đó có $PQ = PE$.

Bài 1.7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N di động sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

a) Xác định vị trí của điểm M và N sao cho MN lớn nhất.

b) Xác định vị trí của điểm M và N sao cho MN nhỏ nhất.

Lời giải. a) Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$. Hạ

$AI \perp MN$, ta chứng minh được:

$$\Delta ABM = \Delta ADE \text{ (c.g.c)}.$$

Suy ra $\Delta ANE = \Delta ANM$

$$\text{(c.g.c)} \Rightarrow AD = AI = a.$$

Suy ra $\Delta AND = \Delta ANI$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Do đó $S_{ABCD} = S_{AMN} + S_{ABM} + S_{ADN} + S_{CMN}$.

$$\text{Suy ra: } a^2 = S_{AMN} + S_{ADE} + S_{ADN} + S_{CMN}.$$

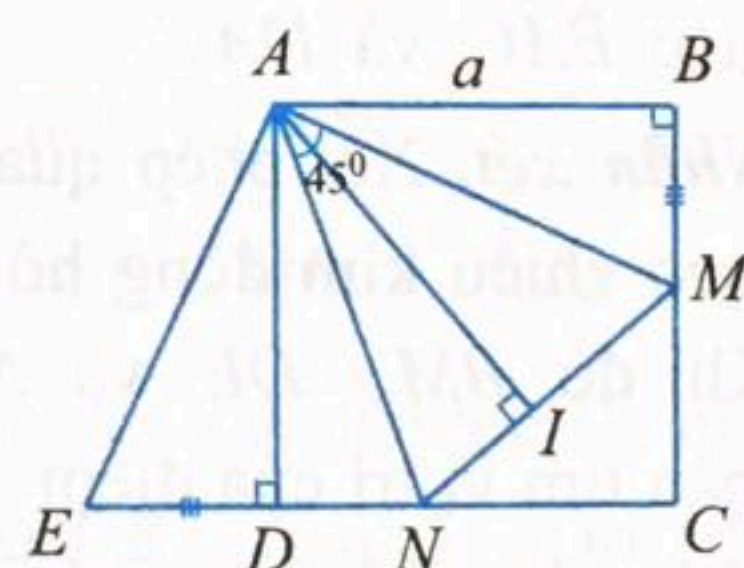
$$a^2 = S_{AMN} + S_{AEN} + S_{CMN}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2S_{AMN} + \frac{1}{2}CM \cdot CN.$$

$$\Rightarrow AI \cdot MN = a^2 - \frac{1}{2}CM \cdot CN \leq a^2. \text{ Mà } AI = a \text{ nên}$$

$MN \leq a$. Do đó MN lớn nhất bằng a khi

$$\begin{cases} CM = 0 \\ CN = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv D \\ M \equiv B \end{cases}.$$



b) Từ $\widehat{MAN} = 45^\circ$ suy ra $MN = EN$. Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow EN$ nhỏ nhất.

Ta chứng minh nếu AD

là phân giác $\widehat{EAN} = 45^\circ$ thì EN đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét $\widehat{E_1AN_1} = 45^\circ$ sao cho

$E_1, N_1 \in EN$ và tia AD nằm giữa tia AN_1 và AE_1 .

Ta có $\widehat{AEN} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEE_1} > 90^\circ$.

Xét $\triangle AEE_1$ có $\widehat{AEE_1} > \widehat{AE_1E}$.

Suy ra $AE_1 > AE = AN > AN_1$

Lấy điểm F trên cạnh AE_1 với $AF = AN_1$.

Suy ra F nằm giữa A và E_1 .

Do đó $\triangle AEF = \triangle ANN_1$ (c.g.c) $\Rightarrow S_{AEF} = S_{ANN_1}$

$\Rightarrow S_{AEE_1} > S_{ANN_1} \Rightarrow S_{AE_1N_1} > S_{AEN}$.

Mà hai tam giác này cùng chiều cao $AD \Rightarrow E_1N_1 > EN$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ là phân giác $\widehat{EAN} \Leftrightarrow AM = AN \Leftrightarrow AM, AN$ lần lượt là phân giác $\widehat{BAC}$ và $\widehat{DAC}$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 90° , theo chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $BM = DE$ và $\triangle ADE$ vuông tại D . Bài toán tìm vị trí của điểm M và N để cho MN lớn nhất, nhỏ nhất. Dựa vào bất đẳng thức cơ bản tìm được vị trí của điểm M và N để cho diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất. Ta có bài toán

Bài 1.8. Cho hình vuông $ABCD$, các điểm M, N lần lượt trên cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Hãy tìm vị trí điểm M, N để cho diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Đặt a là cạnh của hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia DC , lấy điểm E sao cho $DE = BM$. Ta có $\triangle ADE = \triangle ABM$ (c.g.c), do đó $AE = AM$, $\widehat{EAD} = \widehat{MAB}$. Suy ra:

$$\begin{aligned}\widehat{EAN} &= \widehat{EAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MAB} + \widehat{DAN} \\ &= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.\end{aligned}$$

Do đó $\triangle EAN = \triangle MAN$ (c.g.c). Suy ra:

$$\begin{aligned}MN &= EN = ED + DN = BM + DN \\ &= 2a - CM - CN \quad (1).\end{aligned}$$

Lại có $\triangle CMN$ vuông tại C , nên

$$MN = \sqrt{CM^2 + CN^2}.$$

Thay vào (1) ta có:

$$\sqrt{CM^2 + CN^2} = 2a - (CM + CN).$$

$$\Leftrightarrow 2a = (CM + CN) + \sqrt{CM^2 + CN^2} \quad (2).$$

Mà $CM + CN \geq 2\sqrt{CM \cdot CN}$,

$$\sqrt{CM^2 + CN^2} \geq \sqrt{2CM \cdot CN}$$

do đó: $2a \geq 2\sqrt{CM \cdot CN} + \sqrt{2CM \cdot CN}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{CM \cdot CN} \leq \frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow CM \cdot CN \leq \left(\frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \right)^2.$$

$$\text{Suy ra: } S_{CMN} = \frac{1}{2} CM \cdot CN \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \right)^2.$$

$$\text{Vậy } \max S_{CMN} = \frac{a^2}{3 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow CM = CN$$

$$\Leftrightarrow DN = a - CN = a - CM = BM$$

và ta có $\triangle ADN = \triangle ABM$ (c.g.c)

hay $\widehat{BAM} = \widehat{DAN} = 22^\circ 30'$. Vậy vị trí của điểm M, N để diện tích $\triangle CMN$ đạt giá trị lớn nhất là $\widehat{BAM} = 22^\circ 30'$.

II. BÀI TOÁN CÓ GÓC QUAY 60° .

Bài 2.1. Cho $\widehat{xOy} = 60^\circ$, trên tia Ox, Oy thứ tự lấy điểm A, B sao cho $OA = OB$. Lấy điểm M nằm trong $\widehat{xOy}$ và nằm ngoài $\triangle OAB$ sao cho $\widehat{AMO} = 15^\circ$. Cho biết $MA = \sqrt{2}$ cm, $MB = 2$ cm. Tính độ dài AB, OM và $\widehat{BMO}$.

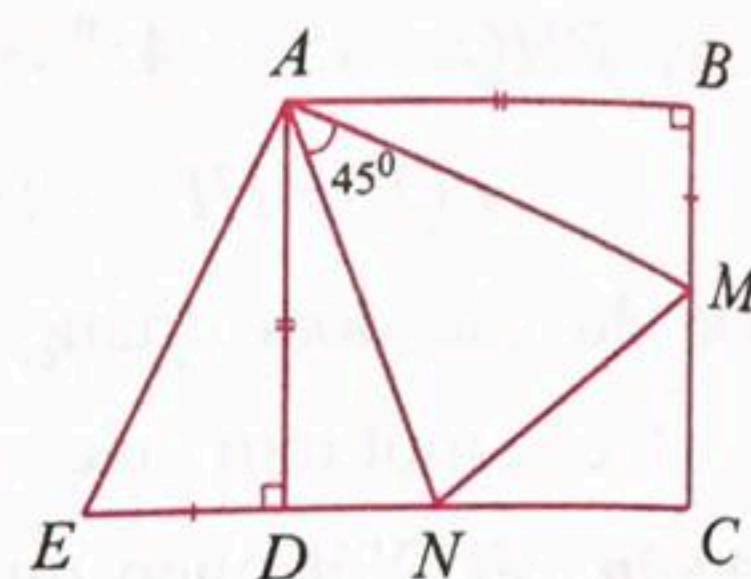
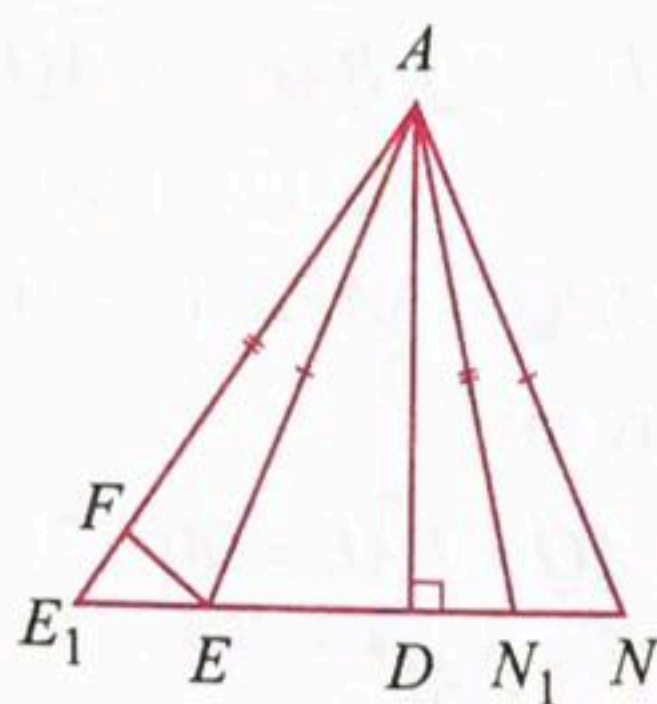
Lời giải. Dựng $\triangle OMN$ đều sao cho M và N nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ Oy .

Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.

Suy ra $\triangle AOM = \triangle BON$ (c.g.c).

Do đó:

$$\widehat{AMO} = \widehat{BNO} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BNM} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$



Hạ

$BP \perp MN, P \in MN$,

ta có $\triangle BPN$ vuông cân tại P và

$BN = AM = \sqrt{2}$.

Suy ra $BP = PN = 1$.

Xét $\triangle BMP$ vuông tại

P , $BM = 2, BP = 1$. Suy ra:

$\widehat{BMP} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABM$, có $AM = \sqrt{2}, BM = 2, \widehat{AMB} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle AMB$ vuông cân tại A . Suy ra

$AM = AB = \sqrt{2}$.

Ta có $\triangle BPM$ vuông tại P , nên

$MP^2 = MB^2 - BP^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow MP = \sqrt{3}$.

Do đó $OM = MN = MP + PN = \sqrt{3} + 1$.

Vậy $OM = \sqrt{3} + 1$ (cm), $AB = \sqrt{2}$ (cm), $\widehat{BMO} = 30^\circ$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm O góc quay 60° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $AM = BN$ và $\widehat{AMO} = \widehat{BNO} = 15^\circ$.

Bài 2.2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\widehat{A} = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} = 40^\circ, \widehat{MAB} = 60^\circ$. Tính $\widehat{AMC}$.

Lời giải. Gọi BM cắt AC tại D , dựng $\triangle ABH$ đều với H và C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB . Kẻ tia phân giác của $\widehat{CAH}$ cắt BD tại G .

Ta có:

$\widehat{CAH} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{CAG} = \widehat{HAG} = \widehat{CBG} = \widehat{CBH} = 10^\circ$.

Xét $\triangle ABM$ có $\widehat{MBA} = 40^\circ, \widehat{MAB} = 60^\circ$.

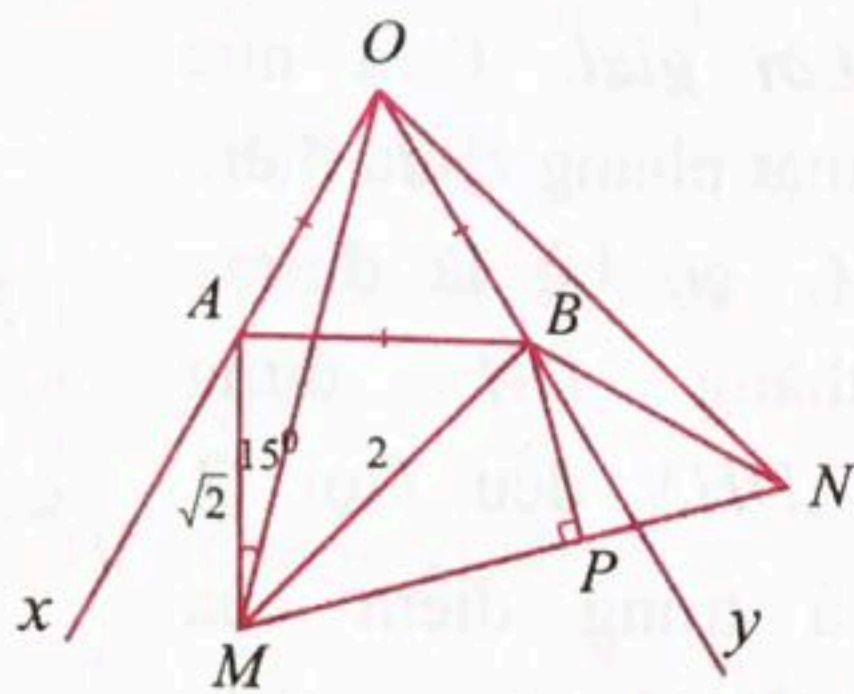
Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{GMH} = 80^\circ$.

Xét $\triangle ABG$ có $\widehat{ABG} = 40^\circ, \widehat{BAG} = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$.

nên $\triangle ABG$ cân tại B . Suy ra:

$BG = BA = BH = AC = AH$.

Suy ra $\triangle AGC = \triangle AGH, \triangle BCG = \triangle BCH$.



Do đó $CG = GH = CH$, nên $\triangle CHG$ đều.

Suy ra $\widehat{CHG} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{GHM} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Xét $\triangle MHG$ có $\widehat{GHM} = 20^\circ, \widehat{GMH} = 80^\circ$. Suy ra $\triangle MHG$ cân tại H .

Do đó $HM = HG = HC$, nên $\triangle HMC$ cân tại H .

Lại có $\widehat{MHC} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{HMC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AMC} = 130^\circ$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 60° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $AB = AH = AC$ và $\widehat{CAG} = \widehat{HAG} = \widehat{CBG} = \widehat{CBH} = 10^\circ$.

Bài 2.3. Cho tam giác $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 80^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = 30^\circ$; trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Gọi I là giao điểm của AD và BE . Chứng minh $\triangle IDE$ cân.

Lời giải. Dựng $\triangle ABF$ đều với F và D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB . Lấy điểm K trên BI sao cho $\widehat{BAK} = 10^\circ$.

Từ $\triangle ABC$ cân tại A nên

$\widehat{ABC} = (180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$.

Lại có $\widehat{BAD} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 50^\circ$. Suy ra $\triangle ABD$ cân tại D , nên $AD = BD \Rightarrow \triangle FDA = \triangle FDB$ (c.c.c). Do đó $\widehat{AFD} = 60^\circ : 2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{ABK} = 30^\circ$, ta có: $\widehat{DAF} = \widehat{KAB} = 10^\circ$. Suy ra $\triangle ADF = \triangle AKB$ (g.c.g), nên $AD = AK$ (1). Ta có:

$\widehat{AEB} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$;

$\widehat{EAK} = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

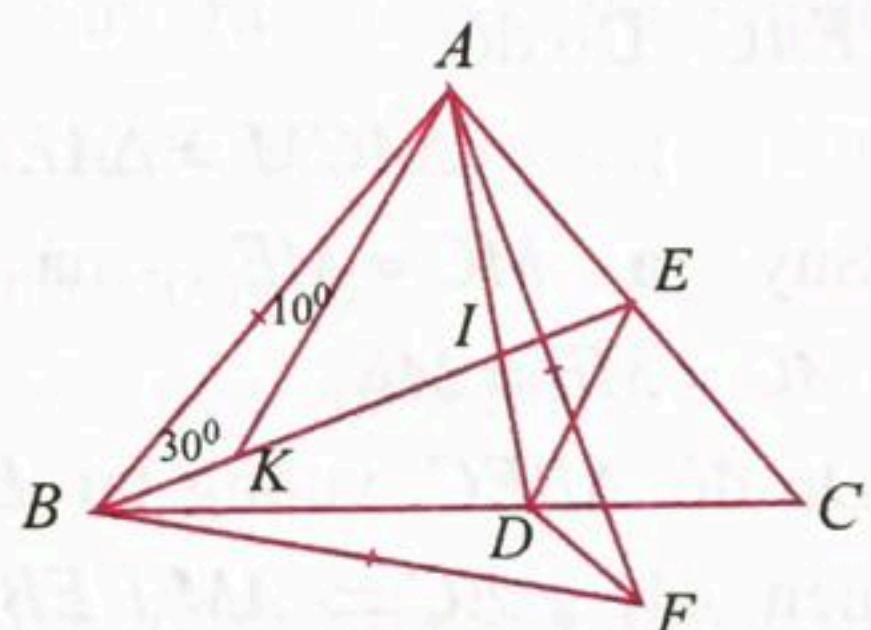
Từ đó $\widehat{AEB} = \widehat{EAK} \Rightarrow \triangle KAE$ cân tại $K \Rightarrow AK = KE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AD = KE$ (3).

Có $\widehat{IAK} = 40^\circ, \widehat{IKA} = 40^\circ \Rightarrow \triangle IAK$ cân tại I . Suy ra $IA = IK$ (4). Từ (3) và (4), suy ra:

$AD - IA = KE - IK \Rightarrow ID = IE$

$\Rightarrow \triangle IDE$ cân tại I .

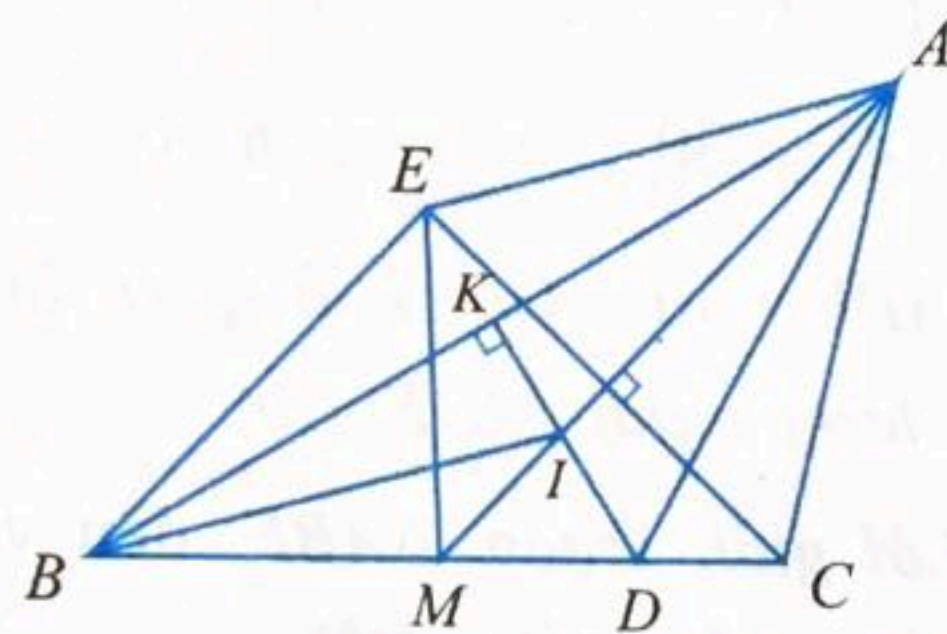


Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 60° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $AD = AK$.

Bài 2.4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 45^\circ$, AM là đường trung tuyến, AD là đường phân giác trong của $\triangle MAC$. Kẻ $DK \perp AB$ ($K \in AB$); gọi I giao điểm của AM với DK . Chứng minh rằng nếu AM là tia phân giác của $\widehat{BAD}$ thì BI là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Lời giải. Nếu AM là tia phân giác của $\widehat{BAD}$ thì ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MAD} = \widehat{DAC} = 15^\circ$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa B ta dựng $\triangle ACE$ đều, khi đó AM là tia phân giác của $\widehat{EAC}$. Do đó



$$\triangle ACM = \triangle AEM \text{ (c.g.c.)}$$

Suy ra $MC = ME$, mà $MC = MB$. Suy ra $MC = MB = ME$.

Do đó $\triangle BEC$ vuông tại E (1). Vì $\triangle ACE$ đều, nên $AM \perp EC \Rightarrow AM \parallel EB$.

Suy ra: $\widehat{EBA} = \widehat{MAB} = 15^\circ$. Lại có $\widehat{EAB} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Từ đó:

$$\widehat{EAB} = \widehat{EBA} \Rightarrow EB = EA = EC \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BCE$ vuông cân tại E .

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{EBC} - \widehat{EBA} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ = \widehat{BAD}$.

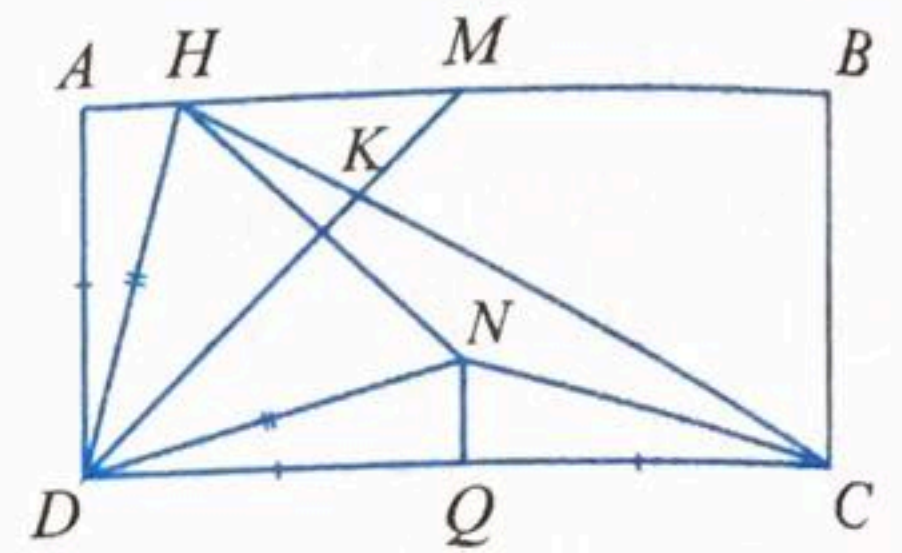
Do đó $\triangle ABD$ cân tại D . Từ đó DK là phân giác của $\widehat{ADB}$ (vì $DK \perp AB$). Nên I là giao điểm hai đường phân giác AM, DK của $\triangle ABD$.

Suy ra BI là tia phân giác của $\widehat{ABD}$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 60° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $AC = AE, MB = MC = ME$.

Bài 2.5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2AD$, M là trung điểm đoạn AB . Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15^\circ$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K . So sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK .

Lời giải. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ là đường thẳng DH , dựng $\triangle DHN$ đều. Gọi Q là trung điểm của CD . Ta có:



$$AD = DQ, \widehat{ADH} = \widehat{QDN} = 15^\circ, DH = DN.$$

$$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle QDN \text{ (c.g.c.)} \Rightarrow \widehat{NQD} = \widehat{HAD} = 90^\circ.$$

Do đó $\triangle NQD = \triangle NQC$ (c.g.c). Suy ra:

$$\widehat{NCQ} = \widehat{NDQ} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{DNC} = 150^\circ.$$

$$\text{Từ đó } \widehat{CNH} = 360^\circ - 60^\circ - 150^\circ = 150^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \triangle CND = \triangle CNH \text{ (c.g.c.)} \Rightarrow CD = CH.$$

Do đó $\triangle CDH$ cân tại C , suy ra

$$\widehat{CHD} = \widehat{CDH} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \text{ (1)}.$$

Có $\triangle ADM$ vuông cân tại A , nên $\widehat{HDK} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ (2)

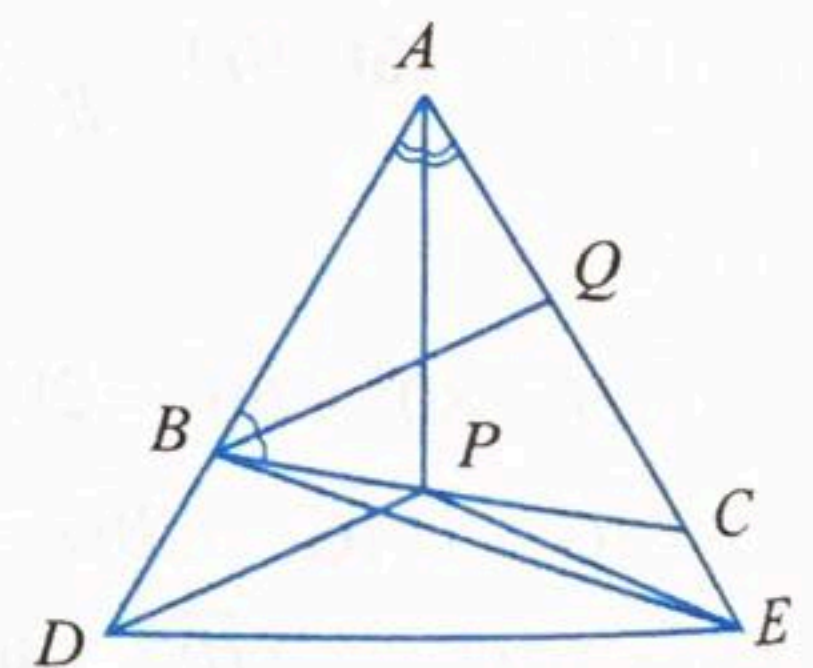
Xét $\triangle DHK$, từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DKH} = 75^\circ$.

Do đó $\widehat{DKH} = \widehat{DHK} = 75^\circ$, suy ra $\triangle DHK$ cân tại D . Vậy $DH = DK$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm D góc quay 60° , theo chiều kim đồng hồ để dựng thêm hình phụ. Khi đó $DH = DN, AH = NQ$.

Bài 2.6. Cho AP, BQ là đường phân giác trong của $\triangle ABC$. Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AB + BP = AQ + QB$. Tính $\widehat{B}, \widehat{C}$ của $\triangle ABC$.

Lời giải. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BP = BD$. Vẽ $\triangle ADE$ đều với E, C cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB , ta có E thuộc tia AC .



Suy ra $\triangle BDP$ cân tại B , nên $\widehat{BDP} = \widehat{BPD}$.

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{BDP} + \widehat{BPD} \Rightarrow 2.\widehat{ABQ} = 2.\widehat{BDP}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BDP} = \widehat{BPD} = \widehat{ABQ} = \widehat{CBQ}.$$

$$\text{Từ } AQ + QE = AB + BD = AB + BP = AQ + QB$$

suy ra $QE = QB$, nên $\triangle QBE$ cân tại Q
 $\Rightarrow \widehat{QBE} = \widehat{QEB}$ (1). Từ $\triangle ADE$ đều, mà AP là
 phân giác của $\widehat{DAE}$ do đó AP là trung trực của
 DE , suy ra $PD = PE$, $\widehat{ADP} = \widehat{AEP}$.

Suy ra $\widehat{CBQ} = \widehat{AEP}$ (2). Ta chứng minh $E \equiv C$.
 + Xét điểm E thuộc tia đối của tia CA . Từ (1) và
 (2), suy ra

$$\widehat{QBE} - \widehat{CBQ} = \widehat{QEB} - \widehat{AEP} \Rightarrow \widehat{PBE} = \widehat{PEB}.$$

Từ đó:

$$PE = PB = PD$$

$$\Rightarrow PB = PD = BD,$$

vô lí.

+ Xét điểm E thuộc
 tia CA .

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\begin{aligned} \widehat{CBQ} - \widehat{QBE} &= \\ &= \widehat{AEP} - \widehat{QEB} \Rightarrow \widehat{PBE} = \widehat{PEB}. \end{aligned}$$

Suy ra $PE = PB = PD \Rightarrow PB = PD = BD$, vô lí.

Vậy $E \equiv C$. Suy ra $\triangle BQC$ cân tại Q , nên

$$\widehat{ACB} = \widehat{QBE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}.$$

Do đó $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow 3 \cdot \widehat{ACB} = 120^\circ$.

Vậy $\widehat{ACB} = 40^\circ$, $\widehat{ABC} = 80^\circ$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 60° ,
 theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó
 $AD = AE$, $PD = PE$.

Bài 2.7. Cho $\triangle ABC$ đều và điểm M bất kì. Chứng
 minh trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC mỗi đoạn
 thẳng không lớn hơn tổng của hai đoạn thẳng kia.

Lời giải. * Ta chứng minh $MA + MB \geq MC$.

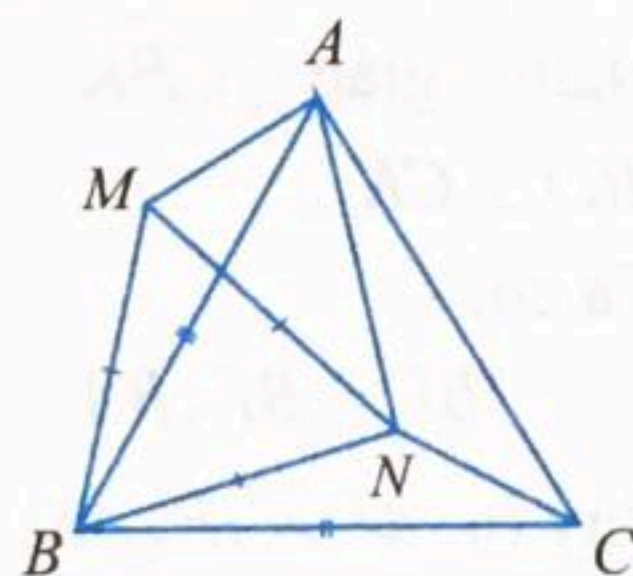
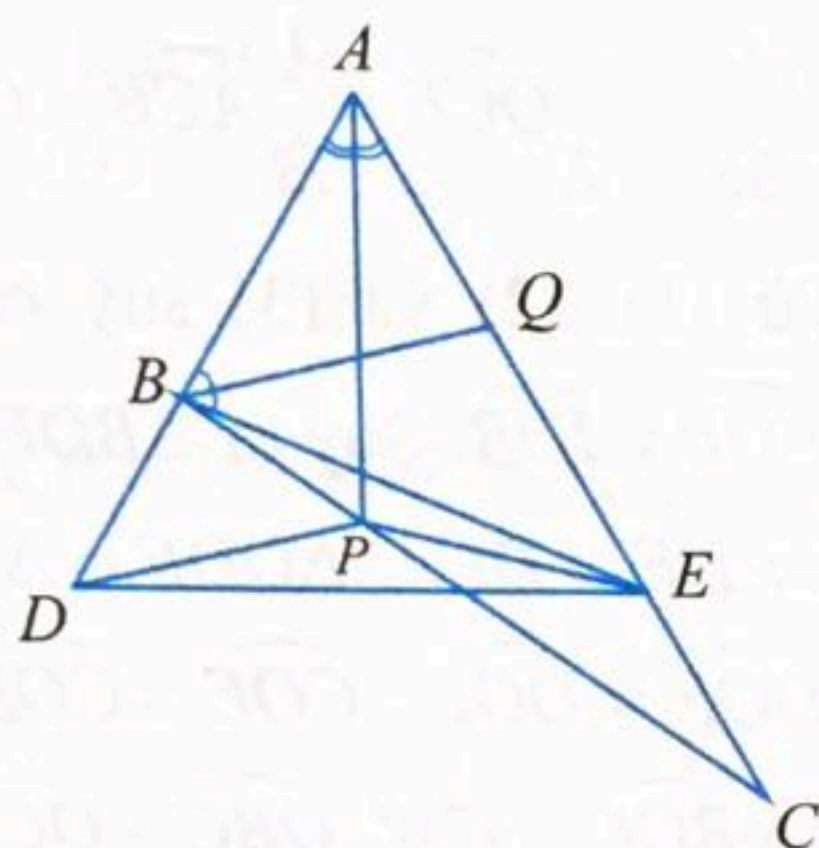
(Tương tự chứng minh $MA + MC \geq MB$,
 $MB + MC \geq MA$).

Xét các trường hợp

a) Điểm M thuộc nửa mặt
 phẳng bờ AB không chứa
 điểm C .

Vẽ $\triangle BMN$ đều với điểm
 M và N nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ AB .

Ta có $\triangle BMA = \triangle BNC$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = NC$ (1).



Ta có $BM = MN = NB$. Xét $\triangle CMN$ (có thể suy
 biến), ta có: $MN + NC \geq MC \Rightarrow MB + MA \geq MC$.

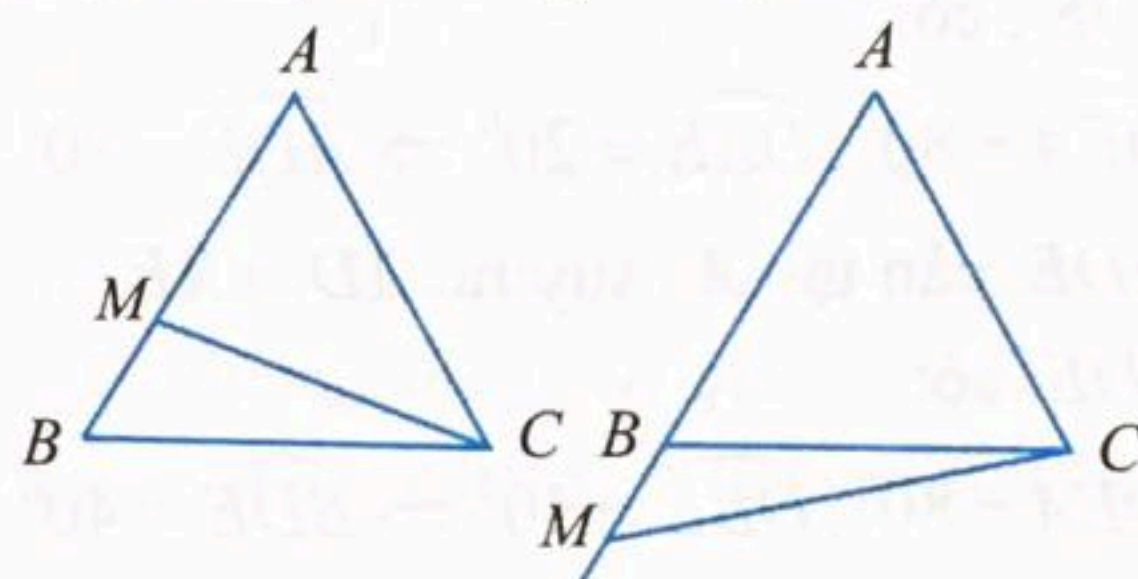
b) Điểm M thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa
 điểm C .

Vẽ $\triangle BMN$ đều với điểm
 M và N nằm trên hai nửa
 mặt phẳng bờ BC .

Ta có $\triangle BMA = \triangle BNC$
 (c.g.c) $\Rightarrow MA = NC$.

Tương tự phần a) ta chứng
 minh được $MB + MA \geq MC$.

c) Điểm M thuộc đường thẳng AB .



• Với điểm M thuộc cạnh AB . Ta có
 $\widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{AMC} \geq 90^\circ$ hoặc
 $\widehat{BMC} \geq 90^\circ$. Nếu $\widehat{BMC} \geq 90^\circ$ (trường hợp
 $\widehat{AMC} \geq 90^\circ$ chứng minh tương tự)

Xét $\triangle BMC$, vì $BC > MC$ nên $AB > MC$.

Do đó $MA + MB > MC$.

• Với điểm M thuộc tia đối của tia BA (hoặc tia
 đối của tia AB). Suy ra
 $MA + MB > AB + MB = BC + MB > MC$.

Suy ra $MA + MB > MC$.

• Với điểm $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$ thì
 $MA + MB = MC$.

Kết luận: Trong mọi trường hợp ta có

$$MA + MB \geq MC.$$

Nhận xét. Xét phép quay tâm B góc quay 60° ,
 theo chiều ngược chiều hay cùng chiều kim đồng
 hồ tùy theo từng trường hợp của bài toán. Khi đó
 có $MA = NC$.

III. BÀI TOÁN CÓ GÓC QUAY KHÁC GÓC QUAY $90^\circ, 60^\circ$.

Bài 3.1. Cho $\triangle ABC$ cân có $\widehat{ACB} = 100^\circ$. Kẻ
 phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D . Chứng
 minh $AD + DC = AB$.

Lời giải.

Hạ $DM \perp AB, DN \perp AC, (M \in AB, N \in AC)$.

Suy ra $DM = DN$.

Do $\widehat{ACB} > 90^\circ$ nên

N thuộc tia đối tia

CA . Trên tia MB

lấy điểm E sao

cho $NC = ME$. Suy ra $\triangle DNC = \triangle DME$ (c.g.c),

nên $DC = DE$ (1).

Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{DNC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Có $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 40^\circ, \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 20^\circ$.

Xét $\triangle ADE$, có:

$$\widehat{DEA} = 80^\circ, \widehat{DAE} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 80^\circ.$$

Nên $\triangle ADE$ cân tại A , suy ra $AD = AE$.

Xét $\triangle BDE$ có:

$$\widehat{DEA} = 80^\circ, \widehat{DBE} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BDE} = 40^\circ.$$

Do đó $\triangle EBD$ cân tại $E \Rightarrow BE = DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DC = BE$, mà $AD = AE$.

Do đó $AB = AE + EB = AD + CD$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm D góc quay $\widehat{NDM}$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó có $DC = DE$.

Bài 3.2. Cho $\triangle ABC$, các điểm E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AC, AB sao cho

$$\widehat{ABE} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}; \widehat{ACF} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}. \text{ Gọi } O \text{ là giao}$$

điểm của BE và CF . Chứng minh rằng nếu

$OE = OF$ thì $AB = AC$ hoặc $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $OB \geq OC$.

TH1: Nếu $OB = OC$ thì

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$$

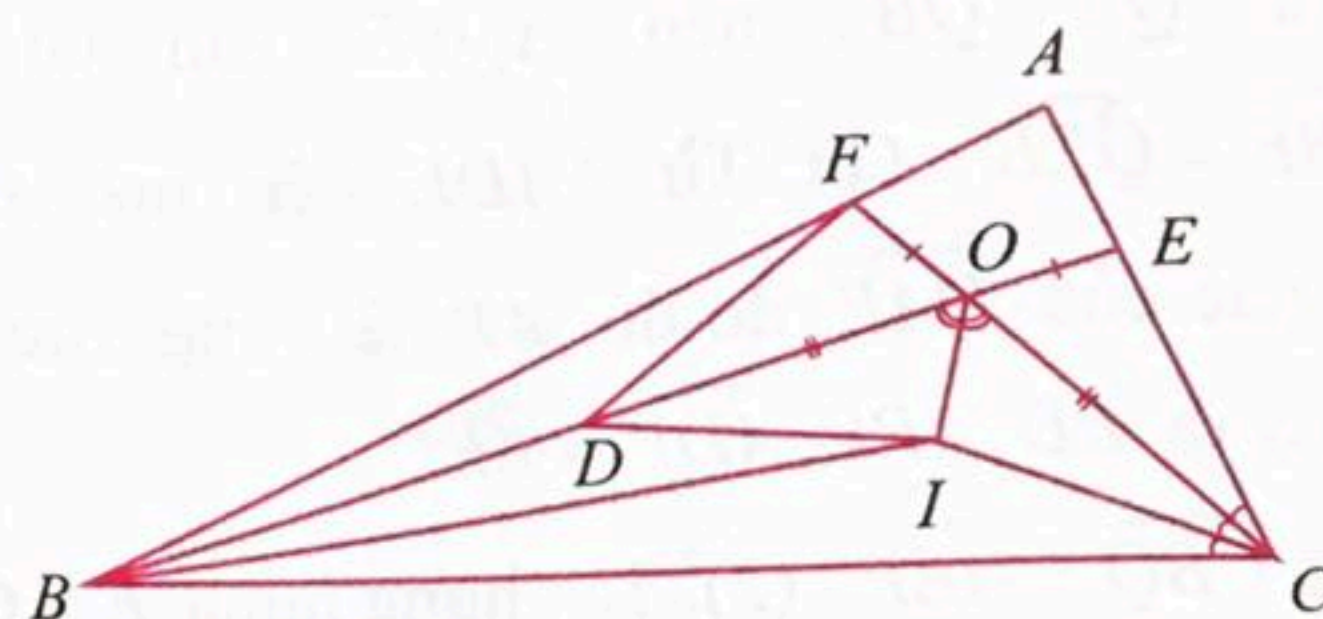
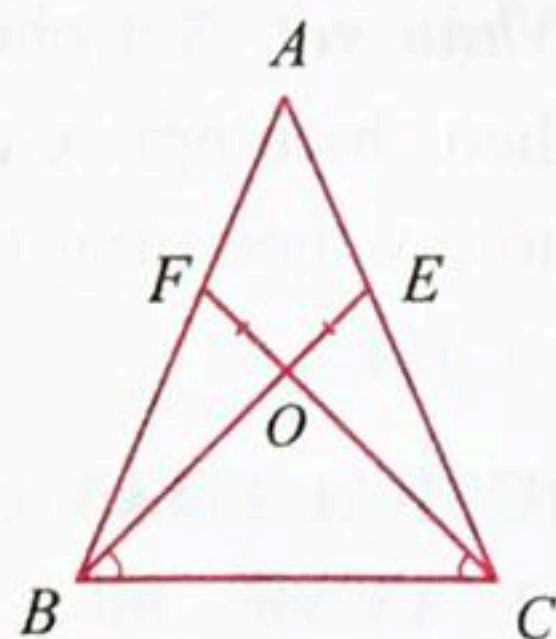
$$\Rightarrow \frac{2}{3} \widehat{ABC} = \frac{2}{3} \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}.$$

Do đó $\triangle ABC$ cân tại A .

TH2: Nếu $OB > OC$. Trên cạnh OB lấy điểm D sao cho $OD = OC$. Gọi I là giao điểm 3 đường phân giác trong của $\triangle OBC$.

Ta có $\triangle ODF = \triangle OCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODF} = \widehat{OCE}$ (1).



Có $\triangle OID = \triangle OIC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODI} = \widehat{OCI}$ (2).

Do $\widehat{OBF} = \frac{1}{3} \widehat{ABC} = \widehat{OBI} = \widehat{IBC}$ nên

$$\widehat{OCE} = \frac{1}{3} \widehat{ACB} = \widehat{OCI} = \widehat{ICB} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{ODF} = \widehat{ODI}$. Do đó $\widehat{FDB} = \widehat{IDB}$. Suy ra $\triangle BDF = \triangle BDI$ (g.c.g).

$\Rightarrow DF = DI \Rightarrow \triangle ODF = \triangle ODI$ (c.g.c). Suy ra

$$\widehat{DOF} = \widehat{DOI} = \widehat{COE} = \widehat{COI} \Rightarrow \widehat{COI} = \widehat{DOI} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ, \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó: } \frac{2}{3} \widehat{ABC} + \frac{2}{3} \widehat{ACB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Nhận xét. Xét phép quay tâm O góc quay $\widehat{EOF}$, theo chiều kim đồng hồ. Khi đó có $OF = OE, OC = OD, \widehat{ODI} = \widehat{OCI}$.

Bài 3.3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ, AB = AC$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ tương ứng cắt các cạnh AC và AB tại D và E . Từ A và E kẻ các đường thẳng vuông góc với BD cắt đường thẳng BC tương ứng tại I và F . Chứng minh rằng $IC = IF$.

Lời giải. Trên tia BA lấy điểm K sao cho $BK = BC$, K thuộc tia đối tia AB . Suy ra $\triangle BCK$ cân tại B , mà BD là phân giác $\widehat{CBK}$, nên $BD \perp CK$.

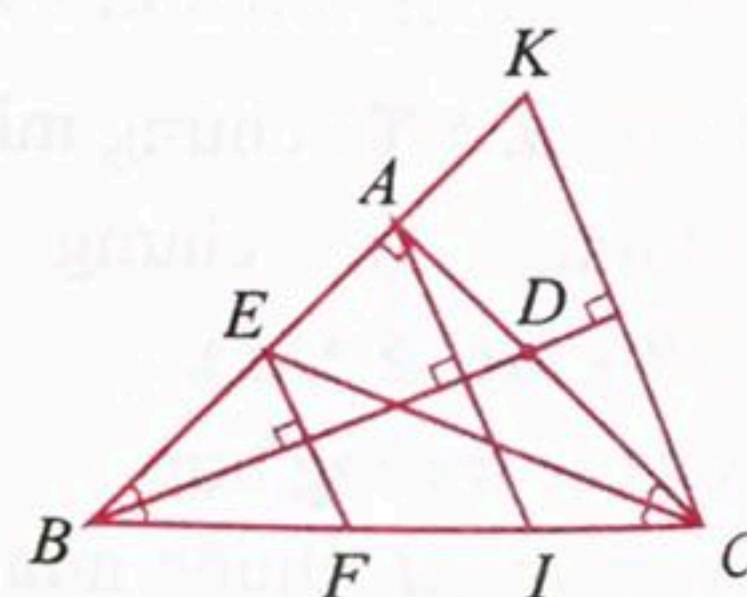
Ta có:

$$BE = BF, BA = BI, BD \perp EF, BD \perp AI.$$

Suy ra $AE = IF, AK = IC$ (1).

Ta có $\widehat{ACK} = \widehat{ABD}$ (cùng phụ với $\widehat{AKC}$)

$$\text{mà } \widehat{ABD} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \widehat{ACE}$$



suy ra $\widehat{ACK} = \widehat{ACE}$, nên $\triangle CEK$ cân tại $C \Rightarrow AK = AE$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $IC = IF$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm B góc quay $\widehat{EBF}$, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó có $BE = BF, BA = BI, BC = BK$.

Bài 3.4. Cho $\triangle ABC$ với $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$. Trên tia phân giác của $\widehat{ABC}$ lấy điểm N sao cho $\widehat{BCN} = 12^\circ$. So sánh độ dài của CN và CA .

Lời giải. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Ta có $\triangle BCD$ cân tại B , nên $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$.

Lại có $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$, suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{DAC} = 72^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C , do đó $CA = CD$ (1).

Xét $\triangle BDN$ và $\triangle BCN$, có cạnh BN chung,

$BD = BC, \widehat{NBD} = \widehat{NBC}$. Suy ra $\triangle BDN = \triangle BCN$ (c.g.c) $\Rightarrow CN = DN \Rightarrow \triangle NCD$ cân tại N .

Lại có $\widehat{NCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCN} = 72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$.

Do đó $\triangle NCD$ đều $\Rightarrow CN = CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CA = CN$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm B góc quay 36° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó có $BC = BD, NC = ND$.

Bài 3.5. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $AM = AN$. Gọi K là giao điểm của BN và CM . Hãy so sánh độ dài của KB và KC .

Lời giải. Trên đoạn AB lấy điểm I sao cho $AI = AC$. Khi đó $\triangle AMC = \triangle ANI$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = NI$ (1). Ta có $\triangle AIC$ cân tại A , suy ra

$\widehat{AIC} < 90^\circ$. Suy ra

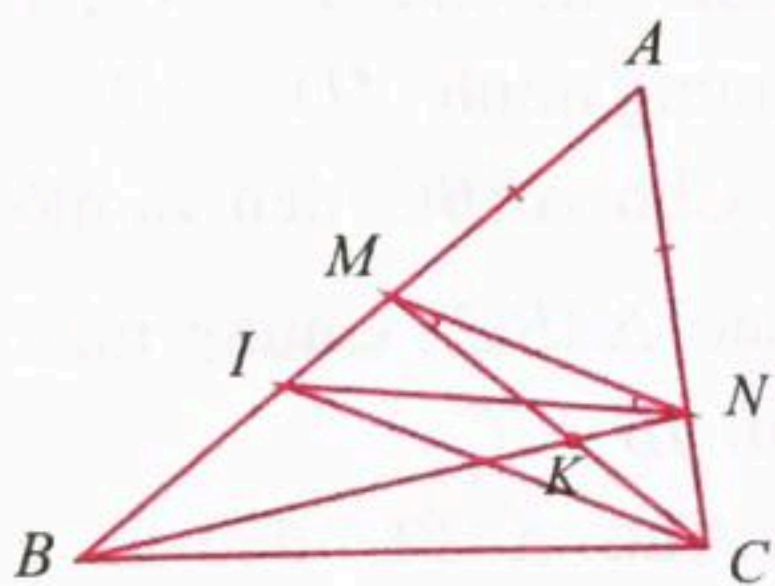
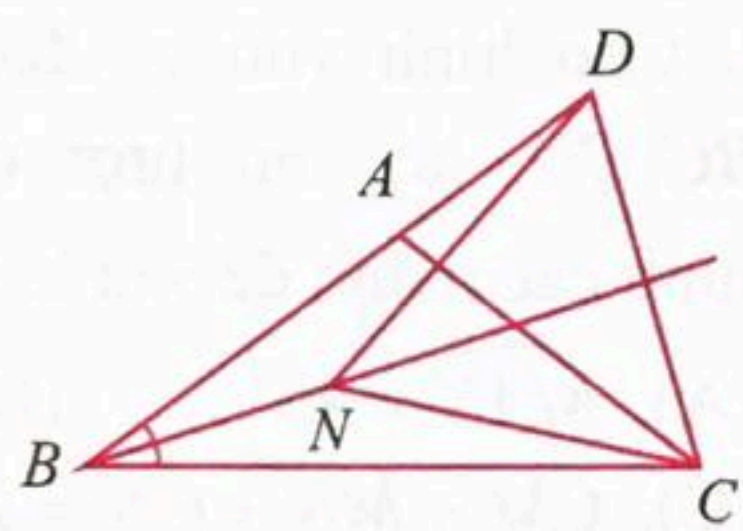
$\widehat{AIN} < 90^\circ$.

Mà $\widehat{AIN} + \widehat{BIN} = 180^\circ$

suy ra $\widehat{BIN} > 90^\circ$.

Xét $\triangle BIN$ có

$\widehat{BIN} > 90^\circ$, suy ra $BN > NI$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra $BN > MC$ (3).

Từ $\triangle AMC = \triangle ANI$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{ANI}$, mà $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (do $\triangle AMN$ cân), suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{KNM}$. Lại có $\widehat{INM} < \widehat{KNM}$ (do I nằm giữa B và M), do đó $\widehat{KMN} < \widehat{KNM}$. Xét $\triangle KMN$ có $\widehat{KMN} < \widehat{KNM}$, suy ra $KM > KN$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$$BN - KN > MC - KM \Rightarrow BK > KC.$$

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay $\widehat{MAN}$, theo chiều kim đồng hồ. Khi đó có $AM = AN, AC = AI, CM = IN$.

Bài 3.6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi E là điểm tùy ý nằm giữa B và C . Đường thẳng đi qua E vuông góc với AB đường thẳng đi qua C vuông góc với AC cắt nhau ở D . Gọi K là trung điểm của BE .

Tính số đo $\widehat{AKD}$.

Lời giải. Gọi F là giao điểm của DE và AB .

Ta có:

$$\widehat{DCE} + \widehat{ACB} = 90^\circ,$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$$

(vì $\triangle ABC$ cân tại A),

$$\widehat{FEB} = \widehat{DEC}$$

(đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} \Rightarrow \triangle DEC$ cân tại $D \Rightarrow DC = DE$ (1). Trên tia đối của tia KD lấy điểm L sao cho $KL = KD$. Theo giả thiết $KB = ED$. Suy ra $\triangle KBL = \triangle KED$ (c.g.c) $\Rightarrow BL = ED$ (2) và $\widehat{BLK} = \widehat{EDK}$ (3).

Từ (1) và (2) suy ra $CD = LB$. Từ (3) suy ra $BL \parallel ED \Rightarrow BL \perp AB$. Suy ra $\widehat{LBA} = 90^\circ = \widehat{DCA}$.

Lại có $AB = AC$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A).

Do đó $\triangle ABL = \triangle ACD$, suy ra $AL = AD$.

Mà $KL = KD$, ta có $AK \perp LD$. Vậy $\widehat{AKD} = 90^\circ$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay $\widehat{BAC}$, theo chiều kim đồng hồ. Khi đó có $AB = AC, AD = AL, CD = BL$.

Bài 3.7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A với $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = 20^\circ$ và $\widehat{MCA} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{MBC}$.

Lời giải. Trên đường cao AH của $\triangle ABC$ lấy điểm P sao cho

$$AP = AB = AC.$$

Vẽ $\triangle AMN$ sao cho

$$MN \perp AH \text{ tại } K$$

và

$$\widehat{PAN} = \widehat{PAM} = 20^\circ.$$

Từ đó có:

$$\widehat{BAN} = 20^\circ \text{ và}$$

$$\triangle AKN = \triangle AKM \text{ (g.c.g)}$$

Suy ra $AN = AM$. Từ đó suy ra $\triangle ABN = \triangle APN = \triangle APM = \triangle ACM$ (g.c.g). Do đó

$$\begin{cases} BN = PN = PM = CM \\ \widehat{NBA} = \widehat{NPA} = \widehat{MPA} = \widehat{MCA} = 30^\circ \end{cases}$$

Suy ra $\widehat{NBC} = 20^\circ$ và $\triangle PMN$ đều $\Rightarrow MN = PN$.

Vậy $BN = MN$, nên $\triangle BNM$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{NMB}$ (1). Mà $MN \parallel BC$ (cùng vuông góc với AH). Suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{MBC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NBM} = \widehat{MBC}$. Do đó $\widehat{MBC} = 20^\circ : 2 = 10^\circ$.

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 40° , theo chiều kim đồng hồ. Khi đó có $AB = AC = AP, AM = AN$.

Bài 3.8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tìm điểm M sao cho $P = \sqrt{3}.MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C' sao

cho $AC = AC'$, lấy

điểm M' sao

cho $AM = AM'$,

$\widehat{MAM'} = 120^\circ$, điểm M

và M' cùng nằm trên

nửa mặt phẳng bờ AB .

Ta có $\triangle MAM'$ cân tại

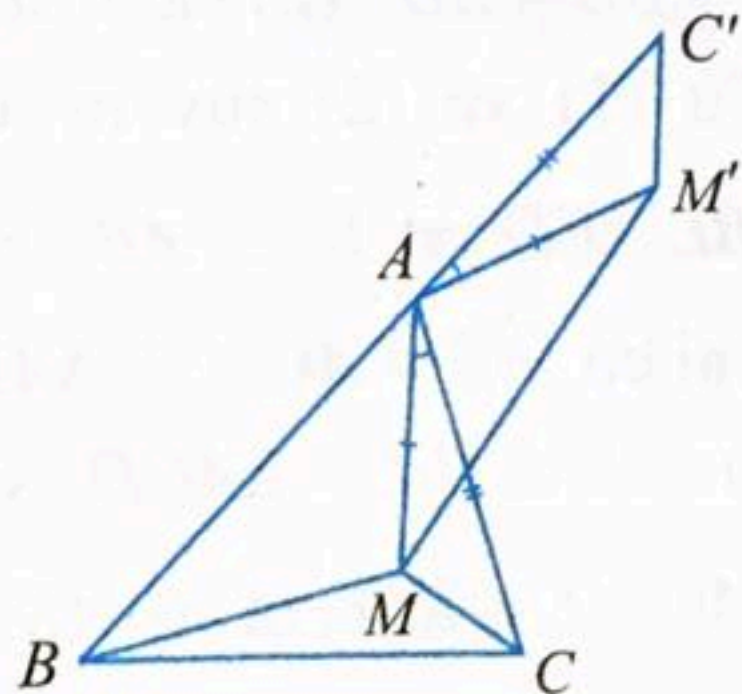
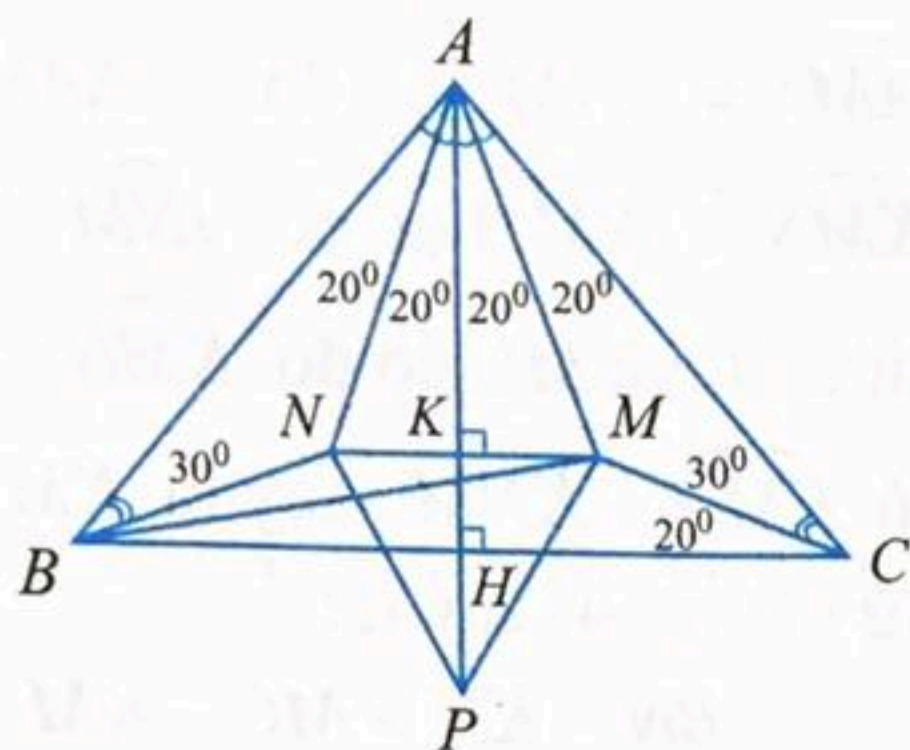
A và $\widehat{MAM'} = 120^\circ$. Suy ra $\sqrt{3}.MA = MM'$. Ta

có $\widehat{MAC} = \widehat{M'AC'}$. Suy ra $\triangle MAC = \triangle M'AC'$,

nên $MC = M'C'$. Do đó

$$P = (\sqrt{3}.MA + MB + MC) \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow (MM' + MB + M'C') \text{ nhỏ nhất}$$



$$\Leftrightarrow (BM + MM' + M'C') \text{ nhỏ nhất.}$$

$\Leftrightarrow B, M, M', C'$ thẳng hàng và được sắp xếp theo thứ tự đó $\Leftrightarrow M \equiv A$. Vậy

$$\min P = BC' = AB + AC \text{ khi và chỉ khi } M \equiv A.$$

Nhận xét. Xét phép quay tâm A góc quay 120° , theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó $AC = AC', AM = AM', MC = M'C'$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Trên cạnh BC, CD của hình vuông $ABCD$ lấy lần lượt các điểm E, F sao cho $EC = 2.EB, FC = FD$. Chứng minh rằng

$$\widehat{AEB} = \widehat{AEF}$$

2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh BC, CD lấy lần lượt các điểm M, N . Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:

$$(A). \widehat{MAN} = 45^\circ; \quad (B). MN = BM + DN;$$

$$(C). CM + MN + CN = 2a;$$

$$(D). \text{Khoảng cách từ } A \text{ đến } MN \text{ bằng } a;$$

$$(E). \widehat{ANM} = \widehat{AND}.$$

3. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH thỏa mãn $BC = AH.\sqrt{2}$. Cho biết $\widehat{ABC} = 67,5^\circ$. Tính số đo $\widehat{ACB}$.

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Kẻ $NH \perp CM, HE \perp AB, (H \in CM, E \in AB)$. Chứng minh HM là tia phân giác của $\widehat{BHE}$.

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 75^\circ$. Kẻ đường cao AH , biết $AH = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

6. Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{BAC} = 120^\circ, AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt trung trực của BC tại D . Chứng minh $AD = AB + AC$.

7. Cho $\triangle ABC$ đều và một điểm I nằm trong tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh $\widehat{AIB} > \widehat{AIC}$ khi và chỉ khi $IB < IC$.

8. Cho $\triangle ABC$ đều và một điểm M nằm trong tam giác $\triangle ABC$ sao cho $MA < MB < MC$. So sánh các góc $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMA}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ LỚP 9, TP. HỒ CHÍ MINH, NĂM HỌC 2021 – 2022

Bài 1. Cho các số a, b thỏa mãn các điều kiện:

$$2a^2 + 7ab - 3b^2 = 0, \quad b \neq 2a, \quad b \neq -2a.$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{8a-3b}{2a-b} - \frac{2a-5b}{2a+b}$.

Lời giải.
$$M = \frac{8a-3b}{2a-b} - \frac{2a-5b}{2a+b}$$
$$= \frac{(8a-3b)(2a+b) - (2a-5b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)}$$
$$= \frac{16a^2 + 8ab - 6ab - 3b^2 - 4a^2 + 2ab + 10ab - 5b^2}{4a^2 - b^2}$$
$$= \frac{12a^2 + 14ab - 8b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{12a^2 + 2(3b^2 - 2a^2) - 8b^2}{4a^2 - b^2}$$
$$= \frac{12a^2 + 6b^2 - 4a^2 - 8b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{8a^2 - 2b^2}{4a^2 - b^2}$$
$$= \frac{2(4a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2} = 2.$$

Bài 2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $ab + bc + ca = 2022$. Chứng minh

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2.$$

Lời giải. Ta có: $ab + bc + ca = 2022; a, b, c > 0$.

Do đó:
$$\sqrt{a^2 + 2022} = \sqrt{a^2 + ab + bc + ca}$$
$$= \sqrt{(ab + 2\sqrt{a^2bc} + ca) + (a^2 - 2\sqrt{a^2bc} + bc)}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{ca})^2 + (a - \sqrt{bc})^2} \geq \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{ca})^2}$$
$$= \sqrt{ab} + \sqrt{ca}.$$

Ta có: $\sqrt{a^2 + 2022} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ca} \quad (1).$

Tương tự: $\sqrt{b^2 + 2022} \geq \sqrt{bc} + \sqrt{ab} \quad (2).$

$\sqrt{c^2 + 2022} \geq \sqrt{ca} + \sqrt{bc} \quad (3).$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Vậy $\frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2.$

Bài 3. Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1, x \neq 0$. Khi đó:

$$\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow \frac{4x(\sqrt{x+1}-1)}{(x+1)-1} + \frac{5}{x} = x$$
$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x+1}-1) + \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow 4x\sqrt{x+1} - 4x + 5 = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 4(x+1) = 9$$
$$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x+1})^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x+1} = 3 \\ x - 2\sqrt{x+1} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x - 3 \\ 2\sqrt{x+1} = x + 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{5} + 5 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{5} + 5.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

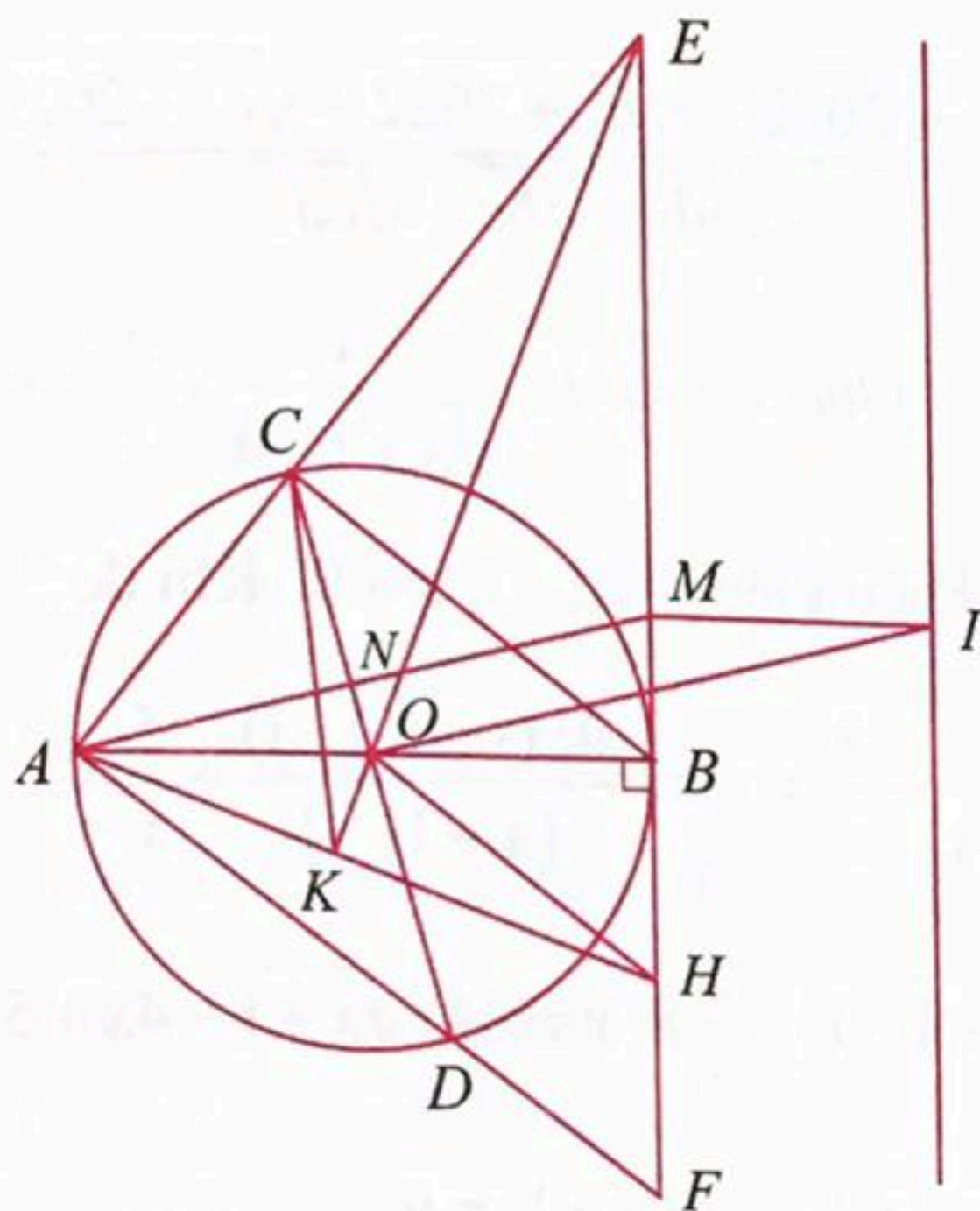
$$S = \{2\sqrt{5} + 5\}.$$

Bài 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O) (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF ; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH .

a) Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ECDF$. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O) .

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{CAD} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} \right)$$

và $\widehat{ABC} = \widehat{CEF}$ (cùng phụ với $\widehat{CBE}$).

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{CEF}$. Tứ giác $CDFE$ nội tiếp (1).

Ta có H, O lần lượt là trung điểm của BF, AB , suy ra HO là đường trung bình của tam giác ABF .

Suy ra $HO \parallel AF$. Mà AF vuông góc với AE ($\widehat{CAD} = 90^\circ$) nên HO vuông góc với AE .

Tam giác AHE có AB, HO là hai đường cao cắt nhau tại O , suy ra O là trực tâm của tam giác AHE .

Do đó EK vuông góc với AH .

Xét $\triangle KOA$ và $\triangle BOE$ có:

$$\widehat{OKA} = \widehat{OBE} (= 90^\circ), \widehat{KOA} = \widehat{BOE} \text{ (đối đỉnh).}$$

Do đó $\triangle KOA \sim \triangle BOE$ (g.g), suy ra:

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OK.OE = OA.OB.$$

Mà $OA.OB = OC.OD$ ($OA = OB = OC = OD$) nên

$$OK.OE = OC.OD.$$

Xét $\triangle OKD$ và $\triangle OCE$ có:

$$\widehat{KOD} = \widehat{COE} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\frac{OK}{OC} = \frac{OD}{OE} \text{ (vì } OK.OE = OC.OD).$$

Do đó $\triangle OKD \sim \triangle OCE$ (c.g.c). Suy ra:

$$\widehat{OKD} = \widehat{OCE} \Rightarrow \text{tứ giác } KCED \text{ nội tiếp (2).}$$

Từ (1), (2) ta có E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi M là trung điểm của EF , N là giao điểm của AM và CD .

Tam giác AEF vuông tại A , AM là đường trung tuyến nên $AM = FM$, suy ra:

$$\triangle MAF \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{NAD} = \widehat{AFE}.$$

Mà $\widehat{AFE} + \widehat{AEF} = 90^\circ$ ($\triangle AEF$ vuông tại A), do đó: $\widehat{NAD} + \widehat{ADN} = \widehat{AFE} + \widehat{AEF} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác NAD vuông tại $N \Rightarrow AM$ vuông góc với CD . Mà OI vuông góc với CD (O là trung điểm của dây CD của (I)) $\Rightarrow AM \parallel OI$.

Mặt khác AO vuông góc với EF (EF là tiếp tuyến của (O)) và IM vuông góc EF (M là trung điểm của dây EF của (I)), suy ra $AO \parallel IM$.

Tứ giác $AOIM$ có $AM \parallel OI$ và $AO \parallel IM$ do đó

$$AOIM \text{ là hình bình hành } \Rightarrow IM = AO = \frac{AB}{2}.$$

AB không đổi, EF cố định, IM vuông góc EF , vậy I nằm trên đường thẳng cố định song song với tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) , cách tiếp tuyến đó một khoảng bằng $\frac{AB}{2}$ và nằm trên nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó mà không chứa điểm A .

Bài 5. Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Xét $\triangle BME$ và $\triangle BCA$ có:

$$\widehat{B} \text{ (chung)}, \widehat{BME} = \widehat{BCA} \text{ (đồng vị vì } ME \parallel AC).$$

Do đó: $\triangle BME \sim \triangle BCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{BME}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2.$$

Tương tự: $\frac{S_{CMD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CM}{BC}\right)^2.$

Mà $\left(\frac{BM}{BC}\right)^2 + \left(\frac{CM}{BC}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BC} + \frac{CM}{BC}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BC} - \frac{CM}{BC}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BC} + \frac{CM}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Do đó $\frac{S_{BME}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CMD}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{2}.$

Ta có: $S_{BME} + S_{CMD} \geq \frac{1}{2} S_{ABC}$ nên $S_{ADME} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \left(\frac{BM}{BC} - \frac{CM}{BC}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow BM = CM$$

$$\Leftrightarrow M \text{ là trung điểm cạnh } BC.$$

Vậy khi M là trung điểm của cạnh BC thì hình bình hành có diện tích lớn nhất và bằng nửa diện tích tam giác ABC .

Bài 6. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ với $m \geq n$ sao cho $A = (m+n)^3$ là ước của

$$B = 2n(3m^2 + n^2) + 8.$$

Lời giải. Vì $A, B \geq 0$, A là ước của B do đó $B \geq A$

hay $2n(3m^2 + n^2) + 8 \geq (m+n)^3$

$$\Leftrightarrow 6m^2n + 2n^3 + 8 \geq m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^3 \leq 8 \Leftrightarrow m-n \leq 2 \Leftrightarrow m \leq n+2.$$

Mà $m \geq n$ nên: $n \leq m \leq n+2$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Do đó $m = n$ hoặc $m = n+1$ hoặc $m = n+2$.

• Nếu $m = n$ thì

$$B = 2n(3m^2 + n^2) + 8 = 8n^3 + 8, A = 8n^3.$$

Vì $B:A$ suy ra $8:(8n^3)$, suy ra $n = 1$.

Ta có $m = n = 1$.

• Nếu $m = n+1$ thì

$$B = 2n[3(n+1)^2 + n^2] + 8 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 8,$$

$$A = (2n+1)^3.$$

Ta có $B = (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) + 7 = (2n+1)^3 + 7$

chia hết cho $A = (2n+1)^3$ nên $7:(2n+1)^3$. Suy

ra: $(2n+1)^3 = 1 \Rightarrow n = 0$. Khi đó $m = 0+1 = 1$.

• Nếu $m = n+2$ thì

$$B = 2n[3(n+2)^2 + n^2] + 8$$

$$= 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 = (2n+2)^3,$$

$$A = (2n+2)^3.$$

Ta thấy $B:A, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $m = n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Kết luận. Các cặp số tự nhiên (m, n) cần tìm là:

$$(1;0); (1;1); (n+2; n) \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Sưu tầm và hướng dẫn giải

ĐỀ THI TUYỂN SINH... (tiếp theo trang 14)

Bài 5. (1,0 điểm) a) Trong mặt phẳng cho 5 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có các đỉnh được lấy từ 5 điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐHSPT HÀ NỘI
NĂM HỌC: 2022 – 2023
VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 90 phút, dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Bài 1. (1,5 điểm) Cho

$$A = \left(\frac{x + \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) : \frac{1}{x-1} \quad (x \geq 0; x \neq 1).$$

a) Rút gọn A .

b) Tìm các số nguyên x sao cho $\frac{1}{A}$ là số nguyên dương.

Bài 2. (2,5 điểm) a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng $(d): y = ax + b$ biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -1)$ và song song với đường thẳng $y = -3x + 1$.

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử của hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Bài 3. (3 điểm) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm D thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O)

tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G . Gọi I là giao điểm của CE và BG .

a) Chứng minh rằng $\triangle EBC \sim \triangle BCG$.

b) Tính số đo góc BIC . Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác $BIDE$ nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC . Chứng minh rằng $BK^2 = KI \cdot KD$.

Bài 4. (3,0 điểm) a) Tìm các số thực x sao cho $a = x + \sqrt{2}$ và $b = x^3 + 5\sqrt{2}$ đồng thời là hai số hữu tỉ.

b) Biết rằng: phương trình bậc hai $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_1 ; phương trình bậc hai $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_2 ; ...; phương trình bậc hai $x^2 + a_{2022}x + b_{2022} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_{2022} . Chứng minh rằng số thực $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2022}}{2022}$ là nghiệm của phương

trình bậc hai:

$$x^2 + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}}{2022} \right)x + \left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}}{2022} \right) = 0.$$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 120 phút, dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng nếu $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì ba số $2a$, $a + b$, c đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số $2a$, $a + b$, c là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x .

Bài 2. (3,0 điểm) Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Cung nhỏ $\widehat{OB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E . Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F .

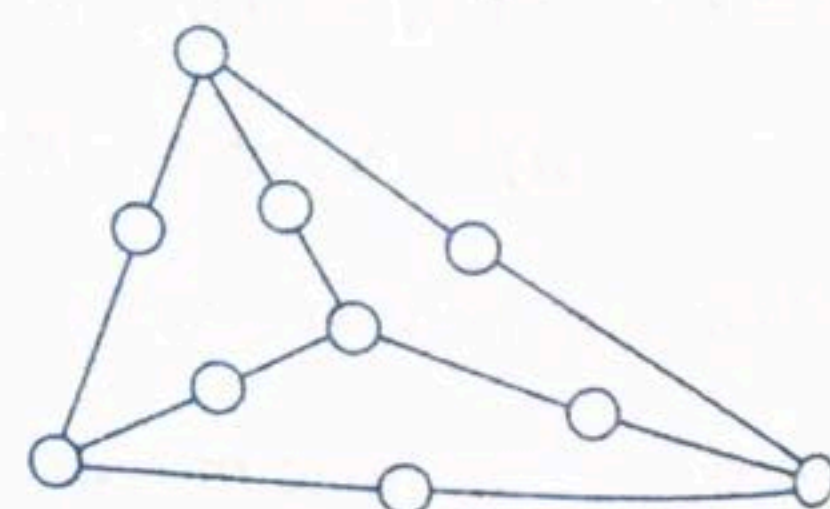
a) Chứng minh tia EO là tia phân giác của góc CEF .

b) Chứng minh tứ giác $ABOF$ nội tiếp.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm A , F , D thẳng hàng.

Bài 3. (2,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương sao cho $a \cdot b = c \cdot d$. Chứng minh rằng số $N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$ là hợp số.

Bài 4. (2,0 điểm) Ta viết mười số 0, 1, 2, ..., 9 vào mười ô tròn trong hình bên, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được 6 tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho 6 tổng nhận được là bằng nhau?



(Xem tiếp trang 13)



NGHIỆM PHỨC CỦA ĐA THỨC

PHẠM NGỌC CHÂU

(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Đa thức trong các đề thi học sinh giỏi thường là khá phức tạp đối với thí sinh, dùng số phức để giải toán không là sự lựa chọn của nhiều học sinh do các em không có nhiều điều kiện tiếp xúc. Bài viết này cố gắng làm nhẹ đi sự phức tạp và làm tăng điều kiện tiếp xúc cho các em qua việc xét nghiệm phức của đa thức.

Bài viết này sử dụng các kiến thức quen thuộc : định lý Bezout, định lý Viète, các kiến thức về số phức trong sách giáo khoa môn Toán lớp 12 nâng cao,..., chỉ cần lưu ý thêm vài ý sau:

- Đa thức bậc n có không quá n nghiệm thực, có đúng n nghiệm phức.
- Đa thức bậc lẻ luôn có nghiệm thực.
- Khi số phức $z = a + bi$ có phần ảo $b = 0$ thì môđun của z chính là giá trị tuyệt đối của phần thực a .
- Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ ($g(x)$ không là đa thức 0) bất kỳ của $\mathbb{Z}(x)$ (tương ứng là $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{C}(x)$) thì bao giờ cũng có hai đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $\mathbb{Z}(x)$ (tương ứng là $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{C}(x)$) sao cho

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

với $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$.

Nếu $r(x) = 0$, ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

- Nếu z là nghiệm phức của đa thức hệ số thực $f(x)$ thì $\bar{z}$ cũng là nghiệm phức của đa thức $f(x)$.
- Tích của hai số phức liên hợp là một số thực không âm.

Bài toán mở đầu là một bài khá quen trong đề thi Quốc gia của Rumani đã khá lâu.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \alpha \in \mathbb{R}$ mà $\sin \alpha \neq 0$ thì đa thức

$$P(x) = x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Ta có cách giải quen thuộc là chứng minh quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$. Xét cách giải dùng số phức sau

Lời giải.

- Ta có: $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ với $x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha$ nên ta chứng minh x_1, x_2 là hai nghiệm của $P(x)$.

Ta có: $P(x_1) = x_1^n \sin \alpha - x_1 \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$
 $= (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \sin \alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin n\alpha$
 $+ (\sin n\alpha \cos \alpha - \cos n\alpha \sin \alpha)$
 $= 0$.

- Vì $x_2 = \bar{x}_1$ nên $P(x_2) = 0$.

Vậy $P(x) : Q(x)$, ta có điều phải chứng minh. Phức tạp hơn một chút, ta có bài toán sau

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}^*, n$ không chia hết cho 2 và 3 thì đa thức

$$P(x) = C_n^1 x^{n-2} + C_n^2 x^{n-3} + \dots + C_n^{n-1} x$$

chia hết cho đa thức $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Lời giải. • Đa thức $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ có các nghiệm $x_1 = -1, x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, x_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ nên ta chứng minh $P(x_i) = 0, i = 1, 2, 3$. Ta có:

$$xP(x) = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} x^n$$

$$\Leftrightarrow xP(x) + x^n + 1 = (x+1)^n$$

do đó $xP(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ và từ giả thiết suy ra n lẻ, ta có:

$$+ x_1P(x_1) = 0 - (-1)^n - 1 = -(-1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x_1) = 0.$$

$$+ x_2P(x_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n - \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n - 1$$

$$= \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) - 1$$

$$= \left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) + i\left(\sin\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Vì n không chia hết cho 2, cho 3 nên

$$n = 6k \pm 1, k \in \mathbb{N}^*. \text{ Do đó}$$

$$+ \cos n\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$+ \cos n\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$+ \sin n\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{n2\pi}{3}$$

$$\text{nên } x_2P(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 0 = 0.$$

$$+ \text{Lại có } x_2 \neq 0 \text{ nên } P(x_2) = 0.$$

$$\text{Vì } x_3 = \overline{x_2} \text{ nên } P(x_3) = 0.$$

Vậy $P(x):Q(x)$, ta có điều phải chứng minh.

Mở rộng một chút bài toán này, ta có bài toán 3

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để đa thức

$$P(x) = -C_n^1 x^{n-2} + C_n^2 x^{n-3} - C_n^3 x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$$

chia hết cho đa thức $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Lời giải. • Đa thức $Q(x) = (x-1)(x^2 - x + 1)$ có

các nghiệm $x_1 = 1; x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ nên ta tìm

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ để } P(x_i) = 0, i = \overline{1;3}.$$

• Ta có $\forall x \neq 0$,

$$xP(x) = -C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^1 x$$

$$\Leftrightarrow xP(x) + x^n + (-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^1 x + (-1)^n C_n^n$$

$$\Leftrightarrow xP(x) = (x-1)^n - x^n - (-1)^n.$$

Do đó:

$$+ x_1P(x_1) = 0 - 1^n - (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow P(x_1) = -1 - (-1)^n \text{ (do } x_1 = 1).$$

$$\text{Do đó } P(x_1) = 0 \Leftrightarrow -1 = (-1)^n \Leftrightarrow n \text{ lẻ.}$$

$$\text{Lúc đó } xP(x) = (x-1)^n - x^n + 1, \forall x \neq 0.$$

$$+ x_2P(x_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right)^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + 1$$

$$= \left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + 1$$

$$= \left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + 1\right) + i\left(\sin\frac{2n\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

$$\text{Do đó } P(x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin\frac{2n\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{n\pi}{3} \left(2\cos\frac{n\pi}{3} - 1\right) = 0 \\ \sin\frac{n\pi}{3} \left(2\cos\frac{n\pi}{3} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{n\pi}{3} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow n = 6k \pm 1, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \text{Vì } x_3 = \overline{x_2} \text{ nên } P(x_3) = 0 \Leftrightarrow n = 6k \pm 1.$$

Vậy số n cần tìm là số nguyên dương chia cho 6 dư 1 hoặc dư 5.

Kết hợp với dãy số, ta có bài thứ 5 (bài đầu của ngày thứ hai) VMO 2015.

Bài toán 4. Cho dãy đa thức $(f_n(x))$ được xác định bởi: $f_0(x) = 2; f_1(x) = 3x;$

$$f_n(x) = 3xf_{n-1}(x) + (1-x-2x^2)f_{n-2}(x), n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n để đa thức $f_n(x)$ chia hết cho đa thức $x^3 - x^2 + x$.

Bài này ngoài cách giải đặt dãy hàm phụ và đồng dư, còn có cách giải khác, có thể nhẹ hơn, là cách dùng dãy số và số phức.

Lời giải.

• Xét dãy số

$$\begin{cases} u_0 = 2; u_1 = 3x; \\ u_n = 3xu_{n-1} + (1-x-2x^2)u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

với x là tham số thực.

Ta có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 3x\lambda + (2x^2 + x - 1) = 0$$

có hai nghiệm $\lambda_1 = x+1; \lambda_2 = 2x-1$ nên

$$u_n = \alpha(x+1)^n + \beta(2x-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Có } \begin{cases} u_0 = 2 = \alpha + \beta \\ u_1 = 3x = \alpha(x+1) + \beta(2x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

nên $f_n(x) = (x+1)^n + (2x-1)^n, n \in \mathbb{N}.$

• Đặt $g(x) = x^3 - x^2 + x$ thì $g(x) = x(x^2 - x + 1)$

có ba nghiệm $x_1 = 0; x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ nên ta tìm

$n \in \mathbb{N}$ để $f_n(x_1) = 0; f_n(x_2) = 0$ (lúc đó

$f_n(x_3) = 0$ do $x_3 = \overline{x_2}$). Ta có:

$$+ f_n(x_1) = 0 \Leftrightarrow 1^n + (-1)^n = 0 \Leftrightarrow n \text{ lẻ.}$$

$$+ f_n(x_2) = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + (\sqrt{3}i)^n$$

$$= (\sqrt{3})^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n + (\sqrt{3})^n (0+i)^n$$

$$= (\sqrt{3})^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^n \right]$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3})^n \left[\left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}\right) + \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= (\sqrt{3})^n \left[\left(\cos \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{2}\right) + i \left(\sin \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= 2(\sqrt{3})^n \left[\left(\cos \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6}\right) + i \left(\sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{6}\right) \right] \\ &= 2(\sqrt{3})^n \cos \frac{n\pi}{6} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } f_n(x_2) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}.$$

+ Kết hợp với n lẻ, chọn $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}.$

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}.$

Ta xét một vài dạng toán khác của đa thức sử dụng đến số phức và nghiệm phức.

Bài toán 5. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức với hệ số thực

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (x_i^2 + 1) &= \\ &= (1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots)^2. \end{aligned}$$

Nhận xét. Đa thức $x^2 + 1$ có hai nghiệm là i và $-i$ nên $x^2 + 1 = (x-i)(x+i) = (i-x)(-i-x).$

Do đó cần viết lại $P(x)$ dưới dạng tích và thay x bởi i và $-i$ để xuất hiện nhân tử $x_i^2 + 1$.

Lời giải. Theo giả thiết, $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ nên

$$\begin{aligned} P(i).P(-i) &= \prod_{i=1}^n (i - x_i)(-i - x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n [-(i^2 - x_i^2)] = \prod_{i=1}^n (x_i^2 + 1) \quad (1). \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} P(i)P(-i) &= (i^n + a_1i^{n-1} + a_2i^{n-2} + \dots + a_n)((-i)^n \\ &\quad + a_1(-i)^{n-1} + a_2(-i)^{n-2} + \dots + a_n) \end{aligned}$$

$$\text{và } 1 = -i^2 = i^4 = -i^6 = i^8 = \dots ;$$

$$1 = -(-i)^2 = (-i)^4 = -(-i)^6 = (-i)^8 = \dots$$

$$\text{nên } a_1 i^{n-1} = -i^2 a_1 i^{n-1} = -a_1 i^{n+1},$$

$$a_1 (-i)^{n-1} = -(-i)^2 a_1 (-i)^{n-1} = -a_1 (-i)^{n+1},$$

$$a_2 i^{n-2} = -i^2 a_2 i^{n-2} = -a_2 i^n,$$

$$a_2 (-i)^{n-2} = -(-i)^2 a_2 (-i)^{n-2} = -a_2 (-i)^n,$$

$$a_3 i^{n-3} = i^4 a_3 i^{n-3} = a_3 i^{n+1},$$

$$a_3 (-i)^{n-3} = (-i)^4 a_3 (-i)^{n-3} = a_3 (-i)^{n+1},$$

$$a_4 i^{n-4} = i^4 a_4 i^{n-4} = a_4 i^n,$$

$$a_4 (-i)^{n-4} = (-i)^4 a_4 (-i)^{n-4} = a_4 (-i)^n,$$

$$a_5 i^{n-5} = -i^6 a_5 i^{n-5} = -a_5 i^{n+1},$$

$$a_5 (-i)^{n-5} = -(-i)^6 a_5 (-i)^{n-5} = -a_5 (-i)^{n+1},$$

$$a_6 i^{n-6} = -i^6 a_6 i^{n-6} = -a_6 i^n,$$

$$a_6 (-i)^{n-6} = -(-i)^6 a_6 (-i)^{n-6} = -a_6 (-i)^n, \dots$$

$$\text{Do đó: } P(i).P(-i) =$$

$$= (i)^n \cdot (-i)^n [1 - a_1 i - a_2 + a_3 i + a_4 - a_5 i - a_6 + \dots] \times$$

$$\times [1 - a_1 (-i) - a_2 + a_3 (-i) + a_4 - a_5 (-i) - a_6 + \dots]$$

$$= [(1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots) - i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] \times$$

$$\times [(1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)]$$

$$= (1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots)^2 - [i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)]^2$$

$$= (1 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots)^2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán tiếp theo sử dụng số phức ở khía cạnh khác : một đa thức hệ số thực nếu có nghiệm phức thật sự z (không phải nghiệm thực) thì sẽ có nghiệm $\bar{z}$, do đó nó có một số chẵn nghiệm phức và tích hai nghiệm liên hợp này là một số thực dương.

Bài toán 6 (IMO lần thứ 34). Cho

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1).$$

Chứng minh rằng $f(x)$ không thể biểu diễn thành tích hai đa thức (khác hằng số) với hệ số nguyên.

Lời giải.

• Khi $n = 2$ thì $f(x) = x^2 + 5x + 3$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}(x)$.

• Khi $n \geq 3$, giả sử $f(x) = g(x).h(x)$ với $g(x); h(x) \in \mathbb{Z}(x)$ và có bậc ≥ 1 .

Vì $\deg g + \deg h = n \geq 3$ nên trong hai số $\deg g; \deg h$ có một số lớn hơn 1. Lại có $f(0) = 3$ là số nguyên tố nên $|g(0)| = 1$ hoặc $|h(0)| = 1$. Giả sử

$$g(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k \quad (k \in \mathbb{N}, k > 1)$$

$$\text{và } |g(0)| = 1.$$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_k$ là các nghiệm (nói chung $\in \mathbb{C}$)

$$\text{của } g(x) \text{ thì } g(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i).$$

$$\text{Vì } |g(0)| = 1 \text{ nên } |x_1 x_2 \dots x_k| = 1 \quad (*).$$

Có $g(x_i) = 0$ nên $f(x_i) = 0$, $i = \overline{1, k}$. Do đó

$$x_i^{n-1} (x_i + 5) = -3, i = \overline{1, k}.$$

Nhân k đẳng thức này và dùng (*), ta được:

$$|(x_1 + 5)(x_2 + 5) \dots (x_k + 5)| = 3^k \quad (**).$$

$$\text{Lại có: } |g(-5)| = |(x_1 + 5)(x_2 + 5) \dots (x_k + 5)|$$

$$\text{và } 3 = f(-5) = g(-5).h(-5)$$

$$\text{nên } |(x_1 + 5)(x_2 + 5) \dots (x_k + 5)| = 3$$

$$\text{hoặc } |(x_1 + 5)(x_2 + 5) \dots (x_k + 5)| = 1 \quad (***)$$

Vì $k > 1$ nên $3^k > 3$, từ (**) và (***) ta có ngay mâu thuẫn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Kết hợp với các kỹ thuật thường dùng trong bài toán xác định đa thức như xét nghiệm và số nghiệm, đồng nhất hai vế, ..., ta có bài toán tương đối phức tạp sau

Bài toán 7. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(x).P(x+1) = P(x^2 + x + 1), \forall x \quad (1).$$

Lời giải. • Nếu $P(x) = a, \forall x$ (a là hằng số) thì từ

$$(1) \text{ ta có } a^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}. \text{ Thử lại, chọn hai đa}$$

thức $P(x) = 0, \forall x, P(x) = 1, \forall x$.

• Xét $P(x)$ không là đa thức hằng.

+ Nếu x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì

$$P(x_0^2 + x_0 + 1) = P(x_0).P(x_0 + 1) = 0$$

nên $x_1 = x_0^2 + x_0 + 1$ là nghiệm của $P(x)$.

Tương tự, $x_2 = x_1^2 + x_1 + 1$ thì

$$P(x_2) = P(x_1^2 + x_1 + 1) = P(x_1).P(x_1 + 1) = 0$$

nên x_2 là nghiệm của $P(x)$.

Cứ thế ta có $x_{k+1} = x_k^2 + x_k + 1, k \in \mathbb{N}$ là nghiệm của $P(x)$ và $x_{k+1} - x_k = x_k^2 + 1 > 0$ nên $P(x)$ có vô số nghiệm (là điều vô lý).

Do đó $P(x)$ không có nghiệm thực.

+ Ta được: $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0$

($a_{2n}, a_0 \neq 0, n \geq 1$).

Thay vào (1), được:

$$\begin{aligned} & (a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0) \times \\ & \times [a_{2n}(x+1)^{2n} + a_{2n-1}(x+1)^{2n-1} + \dots + a_0] = \\ & = a_{2n}(x^2 + x + 1)^{2n} + a_{2n-1}(x^2 + x + 1)^{2n-1} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của x^{4n} và hệ số tự do, ta có:

$$\begin{cases} a_{2n}^2 = a_{2n} \\ a_0(a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_0) = a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{2n} = 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}.$$

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ là $2n$ nghiệm phức của $P(x)$ thì

$$x_1 x_2 \dots x_{2n} = \frac{(-1)^{2n} a_0}{a_{2n}} = 1$$

do đó $|x_1 x_2 \dots x_{2n}| = |x_1| |x_2| \dots |x_{2n}| = 1$.

Vì x_k là nghiệm của $P(x)$ thì $x_k^2 + x_k + 1$ cũng là nghiệm $P(x)$ nên từ $|x_k^2 + x_k + 1| > |x_k|$ ta có:

- Nếu $|x_k| > 1$ thì $|x_k^2 + x_k + 1| > |x_k| > 1$, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm: loại.

- Nếu $|x_k| < 1$ thì số phức u_i thỏa mãn $u_k^2 + u_k + 1 = x_k$ cũng là nghiệm của $P(x)$ và ta có $|u_k| < |u_k^2 + u_k + 1| = |x_k|$, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm: loại.

Như vậy phải có $|x_k| = 1, k = \overline{1, 2n}$ hay

$$x_k = \cos \varphi_k + i \sin \varphi_k, k = \overline{1, 2n}.$$

Vì $|x_k^2 + x_k + 1| = 1$ nên

$$\begin{aligned} & |(2 \cos \varphi_k + 1)(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)| = 1 \\ & \Leftrightarrow (2 \cos \varphi_k + 1)^2 (\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) = 1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi_k = 0 \\ \cos \varphi_k = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = i \\ x_k = -i \end{cases}. \end{aligned}$$

Lại có $\sum_{k=1}^n x_k = \frac{-a_{2n-1}}{a_{2n}} = 0$ nên

$$P(x) = (x^2 + 1)^n, n \geq 1 \text{ (thỏa mãn (1))}.$$

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2 + 1)^n, n \geq 1$.

Để rèn luyện, các em học sinh có thể giải các bài toán sau

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = (x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + 1$ với mọi số tự nhiên n .

2. Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$.

(Xem tiếp trang 22)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/541 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$(xy+3)(xy+2)=2007^{77}+1930.$$

HOÀNG HẢI DƯƠNG

(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T2/541 (Lớp 7). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có $\widehat{BAC} = \alpha$. M là trung điểm của cạnh BC . D là điểm trên cạnh AC sao cho $AD = \frac{AB+AC}{2}$. Tính số đo góc $\widehat{ADM}$ theo α .

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/541. Tìm tất cả các số thực dương x thỏa mãn phương trình

$$\frac{1945}{6x+3} + \frac{1954}{4x+5} + \frac{1975}{3x+9} + \frac{2023}{2x+14} = 15.$$

NGUYỄN TIÊN TIỀN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T4/541. Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các tam giác ABD , BCE , CAF thỏa mãn $\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = 90^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = \widehat{CAF} = \alpha$. Chứng minh $DF = AE$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

Bài T5/541. x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1}.$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/541. Tìm các số tự nhiên x, y lớn hơn 1 thỏa mãn

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=5^y.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T7/541. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a-3bc}{2a+3bc} + \frac{2b-3ca}{2b+3ca} + \frac{2c-3ab}{2c+3ab} \leq 1.$$

MAI QUỐC THẮNG

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/541. Cho ABC là tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . Chứng minh rằng với mọi điểm M bất kỳ thuộc (O) ta luôn có

$$6\sqrt{2} < \frac{MA^3 + MB^3 + MC^3}{R^3} < 3\sqrt[4]{216}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/541. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 5 và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = m_a^2 + m_b^2 + 2m_c^2 + 4c.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/541. Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng không tồn tại đa giác có $2n+1$ đỉnh nguyên (tọa độ đỉnh có hoành độ nguyên và tung độ nguyên) và các cạnh bằng nhau.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T11/541. Với mỗi số nguyên dương n , chứng minh rằng tồn tại duy nhất số nguyên dương x_n thỏa mãn

$$(2+\sqrt{7})^n = \sqrt{x_n-3^n} + \sqrt{x_n}.$$

CHÂU HÒA NHÂN

(GV THPT Gò Đen, Long An)

Bài T12/541. Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt cố định A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. Tìm tập hợp các điểm M sao cho MAC và MBD là các tam giác có trục tâm trùng nhau.

LÊ VIỆT ÂN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/541. Trên mặt nước có hai nguồn kết hợp S_1, S_2 cách nhau $6\sqrt{2}$ cm dao động theo phương trình $u = a\cos 20\pi t$, với t đo bằng s. Biết tốc độ truyền sóng trên mặt nước là 40 cm/s và coi biên độ sóng không đổi trong quá trình truyền. Điểm gần nhất dao động ngược pha với các nguồn nằm trên đường trung trực của S_1S_2 và cách S_1S_2 một đoạn bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

Bài L2/541. Một đoạn mạch A_1B_1 có R_1, L_1, C_1 mắc nối tiếp, cộng hưởng điện với tần số $f_1 = 30$ Hz. Một đoạn mạch khác A_2B_2 có R_2, L_2, C_2 mắc nối tiếp, cộng hưởng điện với tần số $f_2 = 40$ Hz. Biết $C_1 = C_2$. Nếu mắc nối tiếp hai đoạn mạch đó với nhau thì đoạn mạch mới tạo thành sẽ cộng hưởng điện với tần số là bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

ĐÍNH CHÍNH:

Trong mục *Đề ra kỳ này*, số 540, tháng 6.2022

Bài T12, đã viết: ... Chứng minh $KP \perp LQ$.

Xin được sửa là: ... Chứng minh $KQ \perp LP$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/541 (For 6th grade). Find all natural numbers x, y satisfying

$$(xy+3)(xy+2)=2007^{77}+1930.$$

Problem T2/541 (For 7th grade). Given a triangle ABC ($AB < AC$) with $\widehat{BAC} = \alpha$. Let M be the midpoint of BC . Let D be the point on the side AC such that $AD = \frac{AB+AC}{2}$. Find the measurement of $\widehat{ADM}$ in terms of α .

Problem T3/541. Find all positive numbers x , satisfying

$$\frac{1945}{6x+3} + \frac{1954}{4x+5} + \frac{1975}{3x+9} + \frac{2023}{2x+14} = 15.$$

Problem T4/541. Outside a given triangle ABC draw triangles ABD, BCE, CAF such that $\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = 90^\circ, \widehat{ABD} = \widehat{CBE} = \widehat{CAF} = \alpha$.

Prove that $DF = AE$.

Problem T5/541. Let x, y be positive numbers such that $xy \geq 1$. Find the minimum value of the expression $A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/541. Find all natural numbers x, y which are greater than 1 and satisfy $1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=5^y$.

Problem T7/541. Given positive numbers a, b, c such that $a+b+c=1$. Show that

$$\frac{2a-3bc}{2a+3bc} + \frac{2b-3ca}{2b+3ca} + \frac{2c-3ab}{2c+3ab} \leq 1.$$

Problem T8/541. Given an equilateral triangle ABC inscribed in a circle (O) with radius R . Show that, for an arbitrary point M on the circle (O) , we always have

$$6\sqrt{2} < \frac{MA^3 + MB^3 + MC^3}{R^3} < 3\sqrt[4]{216}.$$

Problem T9/541. Let a, b, c be the lengths of three sides of a triangle which has the circumference 5 and m_a, m_b, m_c be the lengths of the corresponding medians. Find the minimum value of the expression

$$T = m_a^2 + m_b^2 + 2m_c^2 + 4c.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/541. Given a positive integer n . Show that there does not exist a $(2n + 1)$ -polygon with equal sides and integral vertices i.e. the

components of the coordinates of all vertices are integers.

Problem T11/541. For each positive integer n , show that there exists a unique positive integer x_n satisfying $(2 + \sqrt{7})^n = \sqrt{x_n - 3^n} + \sqrt{x_n}$.

Problem T12/541. In a plane there are 4 fixed points A, B, C, D which are collinear in that order. Find the locus of the points M such that two triangles MAC and MBD share the same orthocenter.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

NGHIỆM PHỨC ... (Tiếp theo trang 19)

3. Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho đa thức $P(x) = (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - (2x)^{2n}$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^4 - 1$.

4. Cho dãy đa thức $(f_n(x))$ được xác định bởi

$$\begin{cases} f_0(x) = 2, f_1(x) = \frac{3x}{2} \\ f_n(x) = \frac{3x}{2} f_{n-1}(x) - \frac{1}{2}(x^2 + x - 2)f_{n-2}(x), n \geq 2 \end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n để đa thức $(f_n(x))$ chia hết cho đa thức $x^3 - 2x^2 + 4x$.

5. Cho các đa thức hệ số phức

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$;

$$P(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n$$

có n nghiệm $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$. Chứng minh rằng nếu các tổng $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ và $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ là các số thực thì tổng $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ cũng là số thực.

6. Cho đa thức

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^{6n+1} = \sum_{k=0}^{12n+2} a_k x^k, n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Mong là bài viết này giúp các thầy cô có thêm tài liệu cho các em đọc và làm bài tập. Những ý kiến trao đổi xin gửi về: Phạm Ngọc Châu, giáo viên Toán Trường THPT chuyên Lê Khiết, thành phố Quảng Ngãi, tỉnh Quảng Ngãi.



Bài T1/537. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a^3 + a + 2 = 2^b$ và $a^2 = 2^c + 1$.

Lời giải. Từ $a^2 = 2^c + 1$ thì số tự nhiên $c > 0$ nên số tự nhiên $a > 1$ và a là số lẻ.

Cách 1. Từ $2^c = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ nên $a + 1$ và $a - 1$ chỉ là lũy thừa của 2. Đặt $a + 1 = 2^d$ và $a - 1 = 2^e$ với các số tự nhiên d, e thỏa mãn $d > e > 0$. Từ đó $2^d - 2^e = 2$, hay là $2^e(2^{d-e} - 1) = 2$, suy ra $e = 1$ và $d = 2$.

Khi đó $a = 3$ và $2^c = a^2 - 1 = 2^3$ nên $c = 3$.

Ta có $2^b = a^3 + a + 2 = 32 = 2^5$, suy ra $b = 5$.

Vậy $a = 3; b = 5; c = 3$.

Cách 2: Từ $2^b(a^2 - 1) = 2^c(a^3 + a + 2)$
 $= 2^c[a(a^2 - 1) + 2(a + 1)],$

giản ước cho số $a + 1 > 0$ được

$$2^b(a - 1) = 2^c[a(a - 1) + 2],$$

hay là $2^{b-c}(a - 1) = a(a - 1) + 2,$

suy ra số $a - 1$ là ước số của 2, mà số a lẻ, $a > 1$ nên $a = 3$. Lúc đó $2^c = a^2 - 1 = 8$ nên $c = 3$ và $2^b = a^3 + a + 2 = 2^5$, suy ra $b = 5$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** Phan Thùy Linh, Bùi Thái Hải Linh, Hoàng Trường Phúc, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

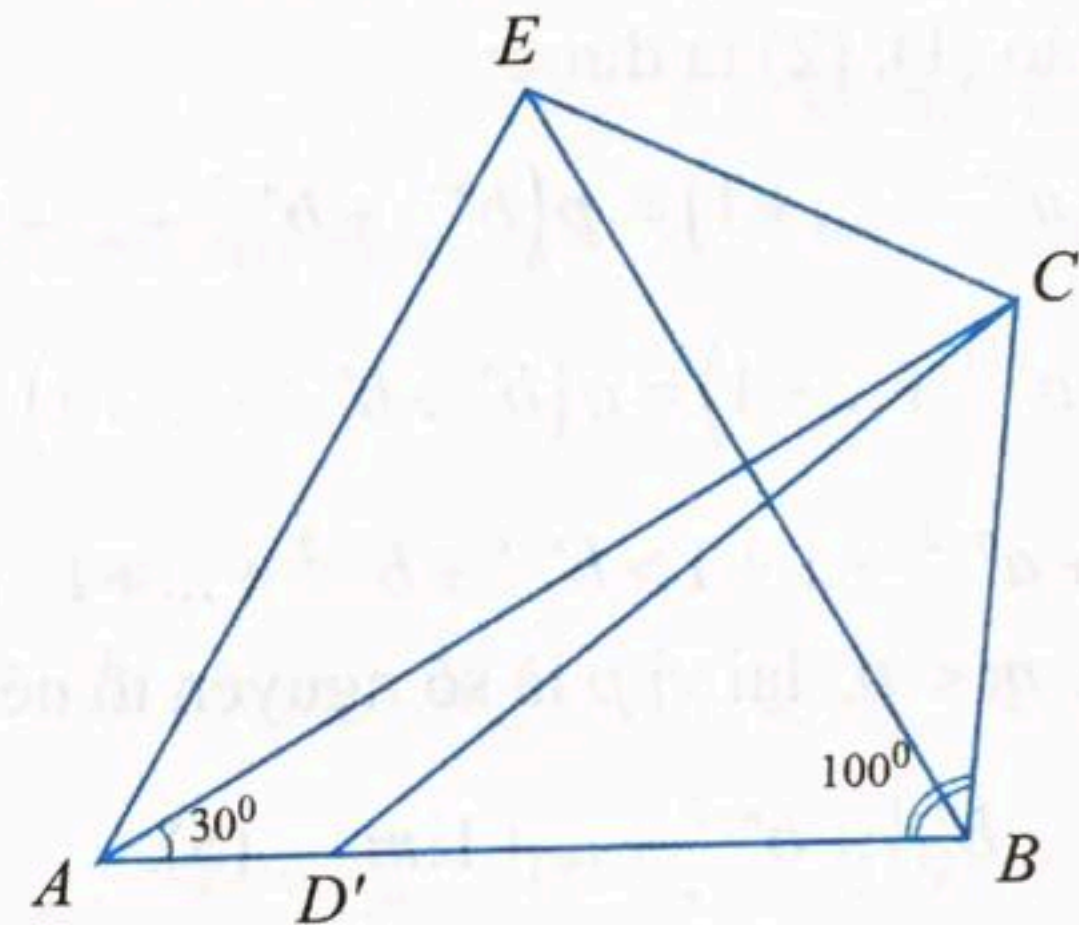
NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/537. Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 30^\circ, \widehat{CBA} = 100^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Tính số đo góc $\widehat{CDB}$.

Lời giải. Ta có $\widehat{ACB} = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ$.

Dựng tam giác đều ABE (xem hình vẽ).

Do $\widehat{CAB} = 30^\circ$ cho nên AC là trung trực EB , tam giác CEB cân tại C . Lấy D' trên AB sao cho $\widehat{CD'B} = 40^\circ$.



Có $\widehat{D'CB} = \widehat{ACB} - \widehat{ACD'} = 50^\circ - (40^\circ - 30^\circ) = 40^\circ$.

Tam giác $D'CB$ cân tại B .

Mặt khác $\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$.

Trong tam giác cân ECB có:

$$\widehat{ECB} = 180^\circ - 2.40^\circ = 100^\circ = \widehat{CBD'}.$$

Suy ra hai tam giác cân CBD' và ECB bằng nhau (c.g.c), cho nên $CD' = EB = AB$. Suy ra D' trùng với D và $\widehat{CDB} = \widehat{CD'B} = 40^\circ$.

Nhận xét. Có hai bạn giải đúng bài toán này là:

Hà Nội: Phạm Nguyễn Nam Anh, 7A4, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Thanh Hóa:** Mã An Khánh, 7D, THCS Chu Văn An, Nga Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/537. Cho các số nguyên dương a, b, n thỏa mãn $\frac{a^n - 1}{b^n - 1}$ và $\frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$ đều là các số nguyên tố.

Chứng minh rằng $n = 1$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a > b > 1$. Giả sử $\frac{a^n - 1}{b^n - 1} = p, \frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1} = q$ với p, q là các số nguyên tố. Giả sử $n > 1$.

Ta có: $a^n - 1 = p(b - 1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1)$ (1);

$$a^{n+1} - 1 = q(b-1)(b^n + b^{n-1} + \dots + 1) \quad (2).$$

Suy ra: $a^n - 1 : b - 1, a^{n+1} - 1 : b - 1$.

Do đó: $a^{n+1} - 1 - a(a^n - 1) : b - 1 \Rightarrow a - 1 : b - 1$.

Đặt $a - 1 = m(b - 1)$ với m là số tự nhiên lớn hơn 1.

1. Thay vào (1), (2) ta được:

$$m(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) = p(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1) \quad (3);$$

$$m(a^n + a^{n-1} + \dots + 1) = q(b^n + b^{n-1} + \dots + 1) \quad (4).$$

Vì $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 > b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1$ nên từ (3) suy ra $m < p$, lại vì p là số nguyên tố nên

$$b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1 : m \quad (5).$$

Lý luận tương tự, từ (4) suy ra:

$$b^n + b^{n-1} + \dots + 1 : m \quad (6).$$

Từ (5), (6) có:

$$b^n + b^{n-1} + \dots + 1 - b(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1) : m \Rightarrow 1 : m$$

vô lý. Vậy phải có $n = 1$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Nhờ giả thiết phản chứng $n > 1$, ta mới có (1) từ đó dẫn đến mâu thuẫn $m > 1, 1 : m$!

2) Với $n = 1$ có nhiều cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn bài toán như:

$$(a, b) = (4, 2) \text{ hoặc } (a, b) = (5, 3) \dots$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hưng Yên: Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thanh Hóa:** Mã An Khánh, 7D, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS&THPT Archimedes Đông Anh.

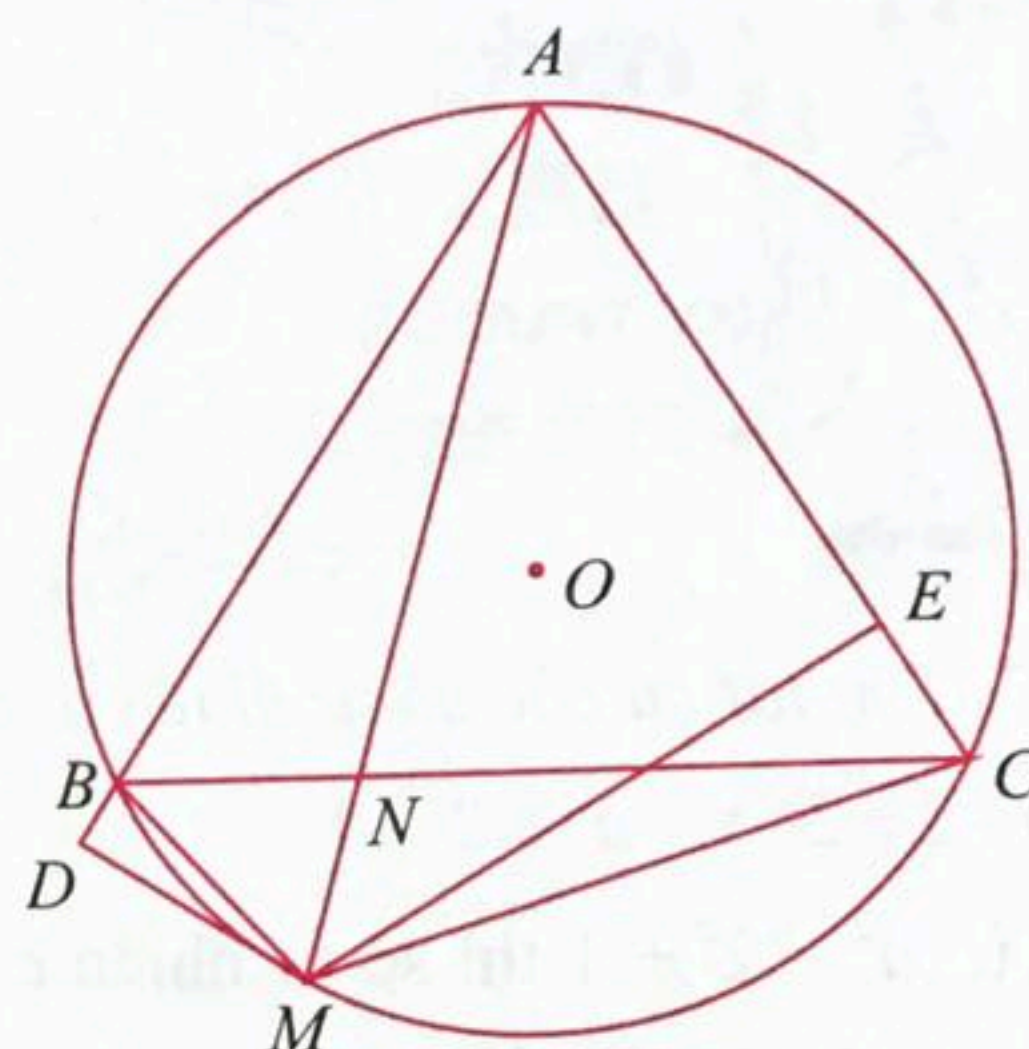
NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/537. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung BC (không chứa A). Các điểm D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC . Xác định vị trí điểm M để tổng

$$MA + MB + MC + MD + ME$$

đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của AM và BC . Vì $AB = AC$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$. Áp dụng tính chất góc nội tiếp, ta có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{AMC} = \widehat{AMB}.$$

Từ đó suy ra $\triangle ABN \sim \triangle AMB$, ta có:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BN}{MB} \Rightarrow MB \cdot AB = MA \cdot BN \quad (1).$$

Tương tự ta có: $MC \cdot AC = MA \cdot CN \quad (2).$

Từ (1) và (2), theo giả thiết $AC = AB$, ta có:

$$MB + MC = \frac{BC}{AB} \cdot MA \quad (*).$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD + ME &\leq \\ &\leq MA + 2(MB + MC) = MA \left(1 + \frac{2BC}{AB} \right) \\ &\leq 2R \left(1 + \frac{2BC}{AB} \right) \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là điểm chính giữa cung BC không chứa A .

Nhận xét. Đẳng thức (*) là trường hợp riêng của đẳng thức Ptolemy. Các bạn dưới đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Hà Phương Anh, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Điện Biên:** Nguyễn Ngọc Diệp, 8C3, THCS xã Pom Lót, huyện Điện Biên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS Archimedes, Đông Anh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/537. Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; k]$ với k là số thực dương cho trước sao cho $a + b + c = 2k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = ab(a + k) + bc(b + k) + ca(c + k).$$

Lời giải. Do $0 \leq a, b \leq k \Rightarrow a(a - k)(b - k) \geq 0$

$$\Rightarrow a(ab - ka - kb + k^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow ab(a + k) \geq ka^2 + 2kab - k^2a.$$

Tương tự có:

$$bc(b + k) \geq kb^2 + 2kbc - k^2b;$$

$$ca(c + k) \geq kc^2 + 2kca - k^2c.$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta nhận được:

$$A = ab(a + k) + bc(b + k) + ca(c + k)$$

$$\geq k(a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ca) - k^2(a + b + c)$$

$$= k(a + b + c)^2 - k^2(a + b + c) = k(2k)^2 - k^2 \cdot 2k = 2k^3.$$

$$A = 2k^3 \Leftrightarrow a(a - k)(b - k) = b(b - k)(c - k)$$

$$= c(c - k)(a - k) = 0$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và hai số bằng k . Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $2k^3$.

Nhận xét. Phương pháp giải trên không phải là mới lạ với nhiều bạn học sinh. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Hà Phương Anh, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** Phạm Minh Anh, 8V1, THCS Victoria Thăng Long, Thanh Oai, Thanh Hà, Trần Việt Anh, 8C1, THCS Archimedes Đông Anh; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T6/537. Có bao nhiêu tập A mà các phần tử của nó gồm 2020 số dương phân biệt, trong đó có hai số 1, 2 và thỏa mãn tính chất: Với hai phần tử phân biệt bất kỳ x và y thuộc tập A thì ít nhất một trong hai số $|x - y|$ và $x + y$ cũng thuộc tập A ?

Lời giải. Giả sử tập $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{2019}, x_{2020}\}$, không mất tính tổng quát, ta coi các phần tử của tập A được sắp xếp như sau:

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2019} < x_{2020}.$$

Với hai số x_{2020} và x_i ($i = 1, \dots, 2019$) thì $x_{2020} + x_i > x_{2020}$ nên $x_{2020} + x_i$ không thuộc tập A . Từ giả thiết suy ra $x_{2020} - x_i$ ($i = 1, \dots, 2019$) thuộc tập A .

$$\text{Mà } 0 < x_{2020} - x_{2019} < \dots$$

$$< x_{2020} - x_2 < x_{2020} - x_1 < x_{2020}$$

$$\text{Nên } x_{2020} - x_i = x_{2020-i} \quad (i = 1, \dots, 2019) \quad (1).$$

Tương tự, với hai số x_{2019} và x_i ($i = 2, \dots, 2018$) thì $x_{2019} + x_i > x_{2019} + x_1 = x_{2020}$ nên $x_{2019} + x_i$ không thuộc tập A . Suy ra $x_{2019} - x_i$ ($i = 2, \dots, 2018$) thuộc tập A .

$$\text{Mà } 0 < x_{2019} - x_{2018} < \dots$$

$$< x_{2019} - x_2 < x_{2019} - x_1 < x_{2019}$$

$$\text{Nên } x_{2019} - x_i = x_{2019-i} \quad (i = 2, \dots, 2018) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$x_{2020} - x_{i+1} = x_{2019} - x_i \quad (i = 1, \dots, 2018)$$

$$\text{hay } x_{i+1} - x_i = x_{2020} - x_{2019} = x_1.$$

$$\text{Suy ra } x_i = i \cdot x_1.$$

Từ đó tập A có dạng $\{d, 2d, \dots, 2019d, 2020d\}$.

Do 1, 2 thuộc A nên $d = \frac{1}{i}$ ($i = 1, \dots, 1010$). Vậy

có 1010 tập A_i ($i = 1, \dots, 1010$) với $d = \frac{1}{i}$ thỏa mãn.

Nhận xét. Bài này là dạng toán tìm tập hợp thỏa mãn điều kiện đã cho. Các bạn tham gia gửi bài nhưng đều nhầm rằng các phần tử của tập hợp đều là số nguyên nên chỉ tìm được duy nhất tập $A = \{1, 2, \dots, 2019, 2020\}$.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/537. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC thì

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4R+r}{R}} \quad (1),$$

trong đó $a = BC, b = AC, c = AB; R, r, r_a, r_b, r_c$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, các bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Lời giải 1 (của bạn Trần Việt Anh) Kí hiệu S và p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác ABC . Trước tiên ta phát biểu một số Bổ đề.

Bổ đề 1.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}.$$

Chứng minh. Xem, thí dụ, [1], trang 40-43.

[1] Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2017.

Bổ đề 2.

$$r_a = p \tan \frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

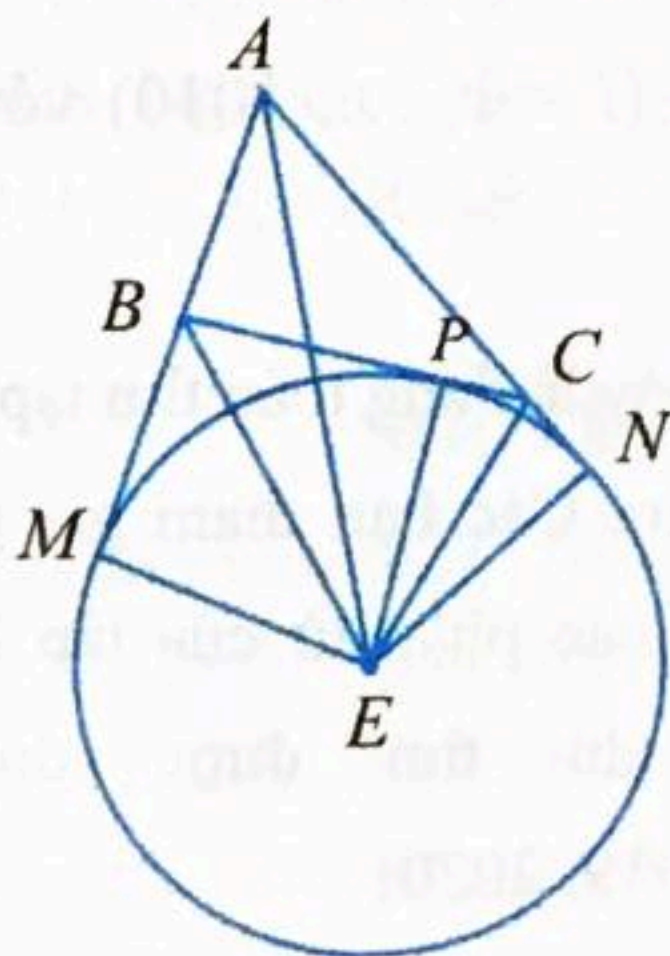
Chứng minh. Ta có (xem hình vẽ):

$$AM = AB + BM = AB + BP;$$

$$AN = AC + CN = AC + CP;$$

$$AM = \frac{AM + AN}{2} = \frac{AB + BP + PC + CA}{2} = p.$$

$$\text{Suy ra: } r_a = EM = AM \tan \frac{A}{2} = p \tan \frac{A}{2}.$$



Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} S &= S_{EAB} + S_{EAC} - S_{EBC} \\ &= \frac{AB \cdot EM}{2} + \frac{AC \cdot EN}{2} - \frac{BC \cdot EP}{2} \\ &= \frac{r_a}{2} (c + b - a) = r_a \cdot (p - a). \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} \\ &= \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}. \end{aligned}$$

Vậy bổ đề 2 được chứng minh. Tương tự ta có:

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}; \quad r_c = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-a)}{p-c}}.$$

$$\text{Bổ đề 3. } \frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_b r_c}{bc} + \frac{r_c r_a}{ca} = \frac{4R+r}{2R}.$$

Chứng minh. Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z$. Khi ấy

$$p = x+y+z; \quad a = y+z; \quad b = z+x; \quad c = x+y.$$

Theo bổ đề 1 và bổ đề 2, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_b r_c}{bc} + \frac{r_c r_a}{ca} &= \frac{p(p-c)}{ab} + \frac{p(p-a)}{bc} + \frac{p(p-b)}{ca} \\ &= (x+y+z) \cdot \frac{z(x+y) + x(y+z) + y(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2(x+y+z)(xz+yz+xy)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2[(x+y)(y+z)(z+x) + xyz]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= 2 + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 2 + \frac{2xyz}{abc} = 2 + \frac{2xyz}{4prR} \\ &= 2 + \frac{2pxyz}{4p^2rR} = 2 + \frac{2p^2r^2}{4p^2rR} = 2 + \frac{r}{2R} = \frac{4R+r}{2R}. \end{aligned}$$

Vậy bổ đề 3 được chứng minh. Quay lại bài toán:
Từ bổ đề 3 và bất đẳng thức

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

ta suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} &\geq \sqrt{3 \left(\frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_b r_c}{bc} + \frac{r_c r_a}{ca} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{4R+r}{R}}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Lời giải 2. (Của tác giả Nguyễn Việt Hùng)

Trước tiên ta có:

Bổ đề 4. Gọi l_A là độ dài đường phân giác xuất phát từ A . Khi ấy

$$l_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

Chứng minh. Xem, thí dụ, [1], trang 44-45.

Hệ quả 1.

$$\frac{p(p-a)}{bc} = \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}.$$

Bổ đề 5. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

Chứng minh. Xem, thí dụ, [1], Bài 4.2.1, trang 283-284.

Áp dụng. Từ bổ đề 2, hệ quả 1 và bổ đề 5 ta có:

$$\begin{aligned}\frac{r_a r_b}{ab} &= \frac{S^2}{ab(p-a)(p-b)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{ab(p-a)(p-b)} \\ &= \frac{p(p-c)}{ab} = \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1+\cos C}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{1+\cos A}{2}; \quad \frac{r_c r_a}{ca} = \frac{1+\cos B}{2}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\frac{r_a r_b}{ab} + \frac{r_b r_c}{bc} + \frac{r_c r_a}{ca} &= \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} \\ &= \frac{4R+r}{2R}.\end{aligned}$$

Tương tự lời giải 1, suy ra (1) được chứng minh.

Nhận xét 1. Các bạn sau có lời giải đúng:

Bình Định: Nguyễn Thành Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Bình Định:** Nguyễn Thành

Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8E, THCS Archimedes, Đông Anh.

Nhận xét 2. Trong [1] có khá nhiều đẳng thức liên quan đến (1), thí dụ,

1) Bài 3.4.46, [1], trang 207:

$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{2(4R+r)}{p};$$

2) Bài 3.4.48, [1], trang 208:

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} = \frac{(4R+r)^2 + p^2}{4Rp}.$$

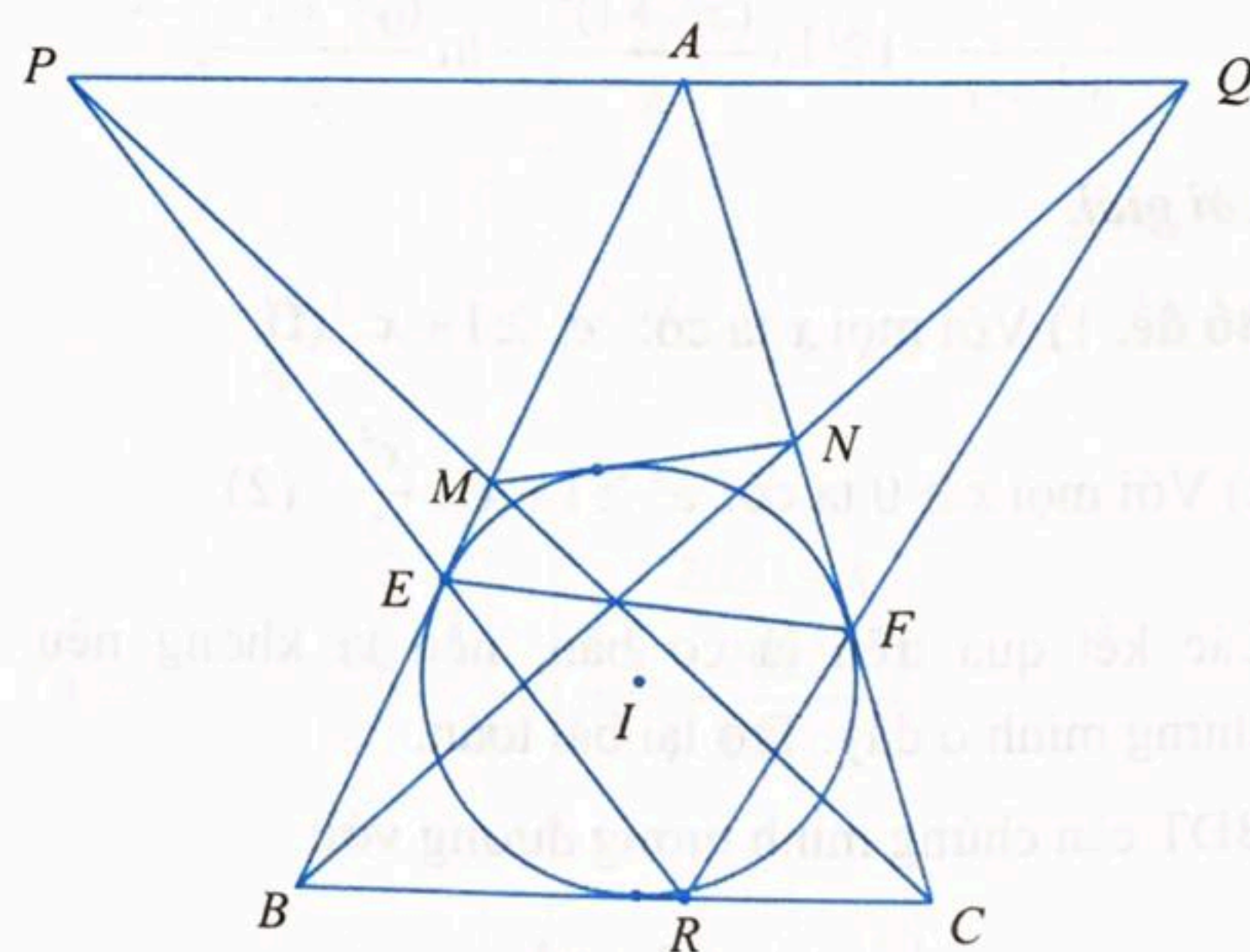
Từ các đẳng thức này cũng có thể suy ra nhiều bất đẳng thức tương tự như bất đẳng thức (1).

TẠ DUY PHƯƠNG

Bài T8/537. Cho tam giác ABC , (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, AC . Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các đoạn AB, AC sao cho MN tiếp xúc với (I) . Chứng minh rằng

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{MA}{MB} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1.$$

Lời giải.



Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của CM, BN và đường thẳng qua A song song với BC ; R là giao điểm của EP và FQ .

Ta có EF, CM, BN đồng quy (đây là kết quả quen thuộc. Có thể chứng minh kết quả này bằng cách

sử dụng định lý La Hire; tính chất cực – đối cực (xét đối với đường tròn (I)) và định lý Pascal).

Do đó từ phép biến đổi tỷ số kép:

$$P(BCRQ) = (BMEA) = (NCFA) = Q(BCRP),$$

ta suy ra ba điểm B, C, R thẳng hàng. Từ đó

$$\begin{aligned} \frac{EB}{EA} \cdot \frac{MA}{MB} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC} &= \frac{RB}{PA} \cdot \frac{PA}{BC} + \frac{RC}{QA} \cdot \frac{QA}{BC} \\ &= \frac{RB}{BC} + \frac{RC}{BC} = \frac{RB+RC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1. \end{aligned}$$

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Bình Định: Nguyễn Thành Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn, Nguyễn Hữu Trí, 10A1, THPT Số 2 Phù Cát, huyện Phù Cát; **Sóc Trăng:** Phạm Nguyên Khang, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/537. Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3+y}{y^3+x} - 1 \geq \ln \frac{(x^2+1)^2}{x} - \ln \frac{(y^2+1)^2}{y}.$$

Lời giải.

Bổ đề. 1) Với mọi x ta có: $e^x \geq 1+x$ (1).

2) Với mọi $x \geq 0$ ta có: $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$ (2).

Các kết quả trên là cơ bản, nên ta không nêu chứng minh ở đây. Trở lại bài toán.

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$e^{\frac{x^3+y}{y^3+x}-1} \geq \frac{(x^2+1)^2 y}{(y^2+1)^2 x} \quad (3).$$

Ta có:

$$(x^3+y)-(y^3+x)=(x-y)(x^2+xy+y^2-1).$$

Xét hai trường hợp:

TH1: $1 \leq x \leq y$. Áp dụng (1) ta được:

$$e^{\frac{x^3+y}{y^3+x}-1} \geq \frac{x^3+y}{y^3+x}.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{x^3+y}{y^3+x} \geq \frac{(x^2+1)^2 y}{(y^2+1)^2 x} \quad (4).$$

Thật vậy,

$$(4) \Leftrightarrow x(x^3+y)(y^2+1)^2 \geq y(y^3+x)(x^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3(x+y)(1-xy) \geq 0,$$

BĐT cuối luôn đúng với mọi $1 \leq x \leq y$.

TH2: Nếu $x > y$, thì theo (2) ta có:

$$e^{\frac{x^3+y}{y^3+x}-1} \geq 1 + \left(\frac{x^3+y}{y^3+x} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3+y}{y^3+x} - 1 \right)^2.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{x^3+y}{y^3+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3+y}{y^3+x} - 1 \right)^2 \geq \frac{(x^2+1)^2 y}{(y^2+1)^2 x}.$$

Biến đổi tương đương BĐT này ta được:

$$\begin{aligned} (x^2+xy+y^2-1)^2 x(y^2+1) \\ \geq 2(x+y^3)(x^2-y^2)(xy-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VT &\geq x^2(x+y)^2(x+y^3) \\ &\geq (x+y^3)(x+y)(x-y)(xy-1) = VP. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài toán có những biến đổi phức tạp. Ngoài cách giải trên, bạn Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh dùng phương pháp đạo hàm cũng giải đúng bài này. Xin hoan nghênh bạn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/537. Cho số nguyên dương $n > 1$. Chứng minh rằng nếu $4^n - 2^n + 1$ là số nguyên tố thì tất cả các ước nguyên tố của n phải nhỏ hơn 5.

Lời giải (của bạn Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh).

Bổ đề. Cho x, a, b là các số nguyên dương ($x > 1$). Khi đó nếu $x^b + 1 \mid x^a + 1$ thì $b \mid a$.

Chứng minh bổ đề. Đặt $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$).

Theo modulo $x^b + 1$ ta có:

$$0 \equiv x^a + 1 = x^{bq+r} + 1 = (x^b)^q \cdot x^r + 1 \equiv (-1)^q x^r + 1$$

$$\Rightarrow x^b + 1 \mid (-1)^q x^r + 1.$$

Vì $0 \leq r < b$ nên $\mid (-1)^q x^r + 1 \mid < x^b + 1$.

Vậy $(-1)^q x^r + 1 = 0 \Rightarrow r = 0$. Vậy $b \mid a$.

Bỏ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Đặt $p = 4^n - 2^n + 1$, giả sử trái lại n có ước nguyên tố lớn hơn 5. Khi đó

$n = 2^\alpha 3^\beta m = Am$ ở đó $m > 1, (m, 2) = (m, 3) = 1$.
Ta có:

$p(2^n + 1) = 2^{3n} + 1 = 2^{3Am} + 1$ chia hết cho $2^{3A} + 1$
vì $(m, 2) = 1$.

Nếu $(p, 2^{3A} + 1) = 1$ thì $2^{3A} + 1 \mid 2^n + 1$. Theo bổ đề suy ra $3A \mid n = Am$ hay $3 \mid m$, vô lý vì $(m, 3) = 1$. Vậy $(p, 2^{3A} + 1) > 1$.

Do p là số nguyên tố nên

$$p \mid 2^{3A} + 1 = (2^A + 1)(4^A - 2^A + 1).$$

Nếu $p \mid 2^A + 1 \Rightarrow 2^A + 1 \geq p = 4^n - 2^n + 1$

$$\Rightarrow 2^A \geq 2^n(2^n - 1) > 2^n \Rightarrow A > n, \text{ vô lý.}$$

Nếu $p \mid 4^A - 2^A + 1 \Rightarrow 4^A - 2^A + 1 \geq p = 4^n - 2^n + 1$
 $\Rightarrow 2^A(2^A - 1) \geq 2^n(2^n - 1)$.

Vì $A < n$ nên $2^A < 2^n, 2^A - 1 < 2^n - 1 \Rightarrow$
 $2^A(2^A - 1) < 2^n(2^n - 1)$, mâu thuẫn, ta có đpcm.

Nhận xét. Bài toán này chỉ có hai bạn tham gia giải là bạn Hoàng và bạn Nguyễn Văn Khiêm, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên. Bạn Khiêm cũng có lời giải đúng nhưng bằng một cách khác.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/537. Cho hàm số $f(x) = \frac{2033 \cdot 25^x}{25^x + 5}, x \in \mathbb{R}$.

Tính tổng $S = \sum_{k=1}^{2020} \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right]$, với $[x]$ là số

nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Lời giải. Để ý rằng

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{2033 \times 25^x}{25^x + 5} + \frac{2033 \times 25^{1-x}}{25^{1-x} + 5} \\ &= 2033 \times \left[\frac{5^{2x}}{5^{2x} + 5} + \frac{5^{2-2x}}{5^{2-2x} + 5} \right] = 2033. \end{aligned}$$

Ta sử dụng các nhận xét sau

1) Khi $a, b \notin \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$ thì $a + b = [a] + [b] + 1$.

Thật vậy, $a = [a] + \{a\}, b = [b] + \{b\}$ với $\{a\}, \{b\} \in (0, 1)$ nên $a + b \in \mathbb{Z}$ khi $\{a\} + \{b\} = 1$.

2) Khi $m \in \mathbb{Z}^+$ thì $\left[\frac{[a]}{m} \right] = \left[\frac{a}{m} \right], \forall a \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, đặt $\left[\frac{a}{m} \right] = b \in \mathbb{Z}$ thì $b \leq \frac{a}{m} < b + 1$ nên

$bm \leq a < (b + 1)m$. Suy ra $bm \leq [a] \leq a < (b + 1)m$

hay $b \leq \frac{[a]}{m} \leq \frac{a}{m} < b + 1$ (đpcm).

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2020} \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right] = \sum_{k=1}^{2020} \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right] \\ &= \left[\frac{f\left(\frac{1}{2021}\right)}{19} \right] + \left[\frac{f\left(\frac{2}{2021}\right)}{19} \right] + \dots + \left[\frac{f\left(\frac{2020}{2021}\right)}{19} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right] + \left[\frac{f\left(\frac{2021-k}{2021}\right)}{19} \right]$$

$$= \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right] + \left[\frac{f\left(1 - \frac{k}{2021}\right)}{19} \right]$$

$$= \frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} + \frac{f\left(1 - \frac{k}{2021}\right)}{19} - 1$$

$$= \frac{2033}{19} - 1 = 106, \forall k \in \{1, 2, \dots, 1010\}.$$

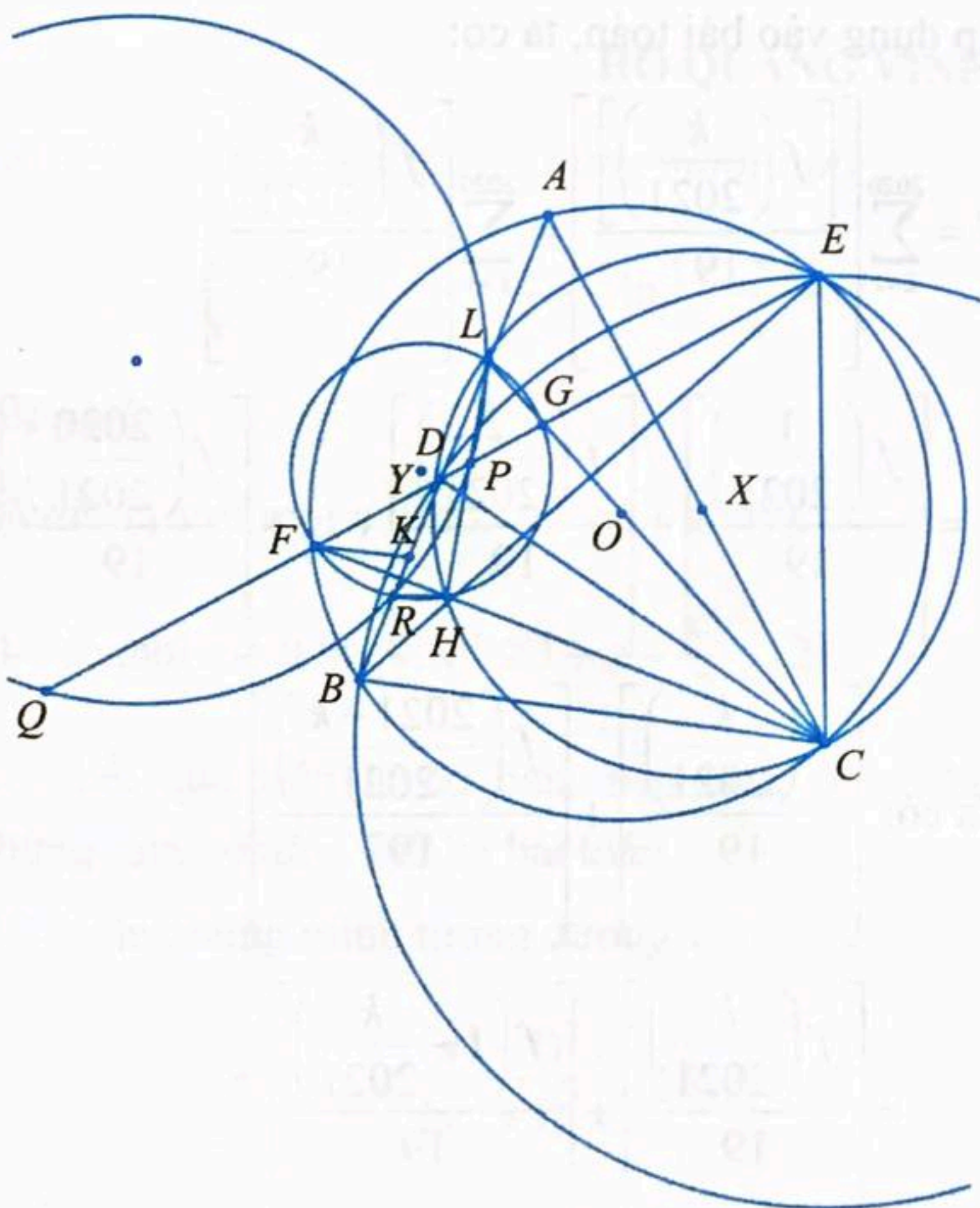
Suy ra $S = 106 \times 1010 = 107060$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về ước lượng tổng với các kỹ thuật sử dụng phần nguyên tương đối phức tạp nên có rất ít bạn gửi bài giải đến Tòa soạn. Chỉ có hai bạn giải đúng là Nguyễn Huy Hoàng, 12T, Vũ Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/537. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn tâm C bán kính CB cắt BA tại D khác B và cắt (O) tại E khác B . DE cắt (O) tại F khác E . CO cắt DE , AB lần lượt tại G , L . Gọi Q là điểm đối xứng với E qua trung điểm của GF . P thuộc EF sao cho PL vuông góc với BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác LPQ cắt AB tại R khác L . K là điểm đối xứng với R qua CF . Chứng minh rằng $FK \parallel BC$.

Lời giải.



Bổ đề 1. Nếu các điểm A, B, C, K thẳng hàng thì

$$(ABCD) = (CDK) \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AK}.$$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC , (O) là đường tròn ngoại tiếp, $AH \perp BC$. Khi đó H là trực tâm của

tam giác ABC khi và chỉ khi điểm đối xứng của H qua BC thuộc (O) .

Bổ đề 1 được gọi là hệ thức Maclaurin mở rộng.

Phép chứng minh hai bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán trên. Gọi H là giao điểm của BE và CF . Dễ thấy $\widehat{FCB} = \widehat{FEB} = \widehat{DEB} = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$.

Do đó CF là phân giác của góc BCD . Vậy

$$\widehat{HCD} = \widehat{HCB} = \widehat{FCB} = \widehat{FEB} = \widehat{DEH} = \widehat{HED}.$$

Nói cách khác tứ giác $CHDE$ nội tiếp (1).

Dễ thấy B, E đối xứng với nhau qua $OC \equiv LC$. Từ đó, chú ý rằng B, D đối xứng với nhau qua CF , suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{DBC} = \widehat{LBC} = \widehat{LEC}$. Do đó tứ giác $CDLE$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) suy ra C, D, E, H, L cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là (X) .

Kết hợp với $CB = CE$, suy ra:

$$\begin{aligned} \widehat{HLG} &= \widehat{HLC} = \widehat{HEC} = \widehat{BEC} = \widehat{EBC} \\ &= \widehat{EFC} = \widehat{GFH} = \widehat{HFG}. \end{aligned}$$

Do đó F, H, G, L cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là (Y) . Dễ thấy H là trực tâm của tam giác LBC . Kết hợp với $LP \perp BC$, suy ra P thuộc HL .

Từ đó, chú ý rằng HL là trục đẳng phương của (X) , (Y) , suy ra $\overline{PG} \cdot \overline{PF} = \overline{PD} \cdot \overline{PE}$.

Vậy, theo bổ đề 1, chú ý rằng E, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của GF , ta có:

$$(DPFG) = (PDGF) = (GFE) = (FGQ).$$

Từ đó, lại theo bổ đề 1, chú ý rằng P, Q, L, R cùng thuộc một đường tròn, suy ra:

$$\overline{DF} \cdot \overline{DG} = \overline{DP} \cdot \overline{DQ} = \overline{DR} \cdot \overline{DL}.$$

Do đó R thuộc (Y) . Kết hợp với $LR \perp FH$ và K là điểm đối xứng của R qua FH , theo bổ đề 2, suy ra K là trực tâm của tam giác LFH .

Vậy $FK \parallel BC$ (vì $LH \perp BC$).

Nhận xét. Bài toán này khó, chỉ có ba bạn tham gia giải: **Nghệ An:** Phạm Gia Huy, 10A1, THPT Phan Thúc Trục; **Sóc Trăng:** Phạm Nguyên Khang, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh.

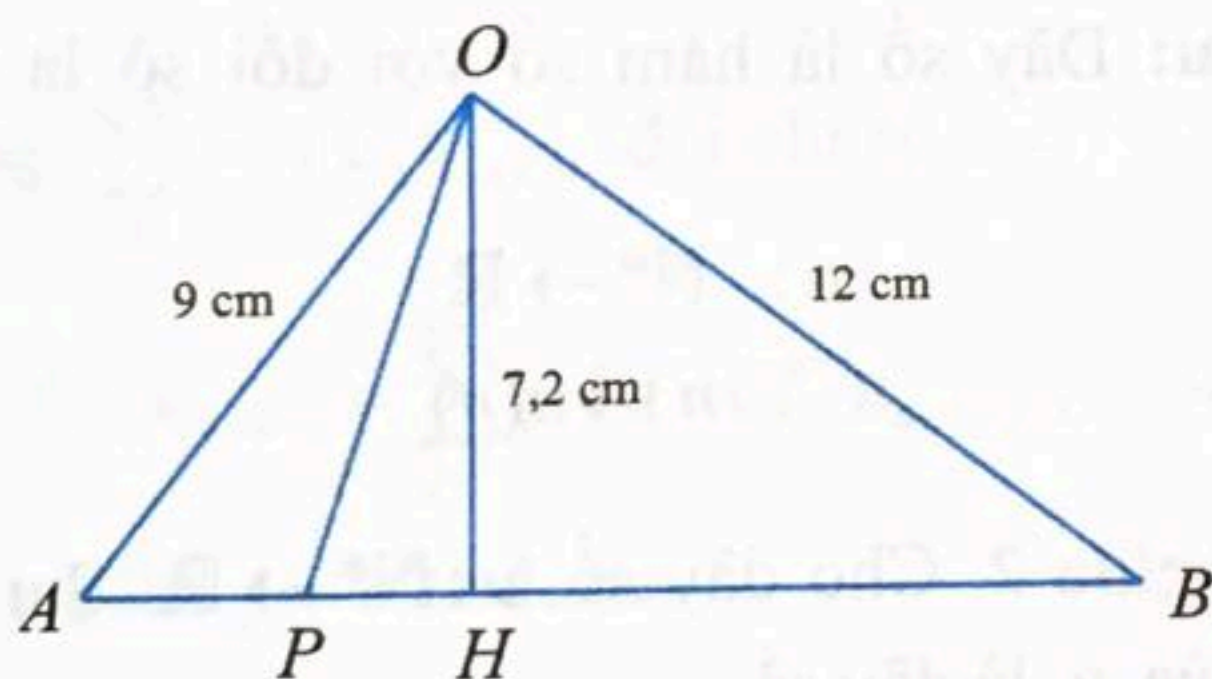
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/537. Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số $f = 80$ Hz, tốc độ truyền sóng là $1,6$ m/s. Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O . Biết $OA = 9$ cm; $OB = 12$ cm. Số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA là bao nhiêu?

Lời giải. $\lambda = \frac{160}{80} = 2$ cm. Đường cao của tam

giác hạ từ O : $OH = 7,2$ cm. Ta có:

$$OA = 9 \text{ cm} = 4,5\lambda.$$



$\Rightarrow A$ dao động ngược pha với O . Gọi P là điểm thuộc AB thỏa mãn P dao động cùng pha với A
 $\Rightarrow P$ dao động ngược pha với O

$$\Rightarrow OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Xét trên AH :

$$OH < OP < OA \Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 < 9$$

$\Rightarrow$ không có giá trị nào của k thỏa mãn.

Xét trên HB :

$$OH < OP \leq OB \Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 \leq 12$$

$$\Rightarrow 3,1 < k \leq 5,5 \Rightarrow \text{có 2 giá trị của } k \text{ thỏa mãn.}$$

Nhận xét. Chúc mừng bạn duy nhất có câu trả lời đúng cho đề ra kì này: Nguyễn Huy Hoàng, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/536. Điện năng được truyền từ nơi phát đến nơi tiêu thụ bằng đường dây một pha với tổng chiều dài là 160 km. Vì công suất hao phí trên đường dây bằng 5% công suất đưa lên nên nơi nhận công suất chỉ còn 47500 kW và điện áp nhận được là 190 kV. Hệ số công suất đường dây bằng 1 . Nếu dùng dây đồng có điện trở suất $1,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, khối lượng riêng của đồng là 8800 kg/m³ thì khối lượng đồng dùng làm đường dây này bằng bao nhiêu?

Lời giải. Phần trăm công suất hao phí trên đường dây được tính theo công thức:

$$h = \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_n + \Delta \mathcal{P}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{100} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{47500 \cdot 10^3 + \Delta \mathcal{P}}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathcal{P} = 25 \cdot 10^5 \text{ W};$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_n + \Delta \mathcal{P} = 5 \cdot 10^7 \text{ W}$$

$$h = \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \frac{RI^2}{UI} = \frac{RI}{U} = \frac{U - U_n}{U}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{100} = \frac{U - 190 \cdot 10^3}{U} \Rightarrow U = 2 \cdot 10^5 \text{ V.}$$

$$\text{Mà } \Delta \mathcal{P} = RI^2 = \frac{\mathcal{P}^2 R}{U^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta \mathcal{P} U^2}{\mathcal{P}^2} = \frac{25 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{10}}{25 \cdot 10^{14}} = 40 \Omega.$$

$$\text{Mặt khác: } R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l^2}{Sl} = \rho \frac{l^2}{VD} = \rho \frac{l^2}{m}$$

$$m = \rho \frac{l^2 D}{R} = \frac{1,6 \cdot 10^{-8} (160 \cdot 10^3)^2 \cdot 8800}{40} = 90112 \text{ kg.}$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG



TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ (DẠNG ĐA THỨC) KHI BIẾT MỘT SỐ SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN

NGUYỄN THỊ TÂM
(GV THPT Hưng Đạo, Hải Dương)

LỜI NÓI ĐẦU

Người yêu ơi, nếu em là dãy số
Anh xin làm giới hạn của đời em
Tình yêu ta truy hồi bao sóng gió
Khảo sát rồi lại hội tụ bên nhau!

Đúng là như thế từ trước đến nay, dãy số là một chủ đề vô cùng thú vị trong toán học. Ngay từ thời Ấn Độ cổ, dãy số đã xuất hiện trong bài toán về số thóc trên bàn cờ. Dãy số còn tồn tại ở khắp nơi, trong tự nhiên, trong hội họa, kiến trúc, tài chính, khoa học... Hay như dãy số Fibonacci được tìm thấy trong cách tính điện trở mạch điện vật lý, trong kiến trúc cổ như Kim Tự Tháp - Ai Cập, điện Parthenon ở Hy Lạp hay trong các bức tượng cổ và các bức tranh thời kỳ Phục hưng. Nó biểu hiện quan niệm về cái đẹp và sự cân xứng, sự ưa nhìn. Không chỉ vậy, dãy số còn ứng dụng trong biểu đồ giá cả của một mã chứng khoán hay những chỉ số chứng khoán. Bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số cho bởi công thức truy hồi là một bài toán khó đối với học sinh phổ thông. Khi nghiên cứu các bài toán về xác định công thức tổng quát của dãy số không ít học sinh thường thắc mắc “Tại sao lại có được như vậy” hay “Sao lại có kết quả đó”...; nhiều em không tìm được mối liên hệ giữa các bài toán, không tự xây dựng được một lớp các bài toán cùng dạng và quy trình để giải các bài toán đó.

Nhằm giúp học sinh có cái nhìn mới và dễ hiểu hơn trong quá trình giải các bài toán xác định công thức tổng quát của dãy số khi biết một số số hạng đầu tiên, bài viết này giới thiệu với bạn đọc phương pháp ứng dụng sai phân để xác định công thức tổng quát của dãy số.

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n) .

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

Kí hiệu: Dãy số là hàm số với đối số là số tự nhiên

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n)$$

Định nghĩa 2. Cho dãy số $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Sai phân cấp 1 của u là dãy số

$$\Delta u(n) = u(n+1) - u(n).$$

Định nghĩa 3. Ta gọi sai phân cấp hai của dãy số $u(n)$ là sai phân của sai phân cấp 1 của u_n và nói chung sai phân cấp k của dãy u_n là sai phân của sai phân cấp $k-1$ của nó. Từ đó ta có:

Sai phân cấp hai của dãy $u(n)$ là

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= \Delta(\Delta u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n \\ &= (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n. \end{aligned}$$

Sai phân cấp ba của dãy $u(n)$ là

$$\begin{aligned} \Delta^3 u_n &= \Delta(\Delta^2 u_n) = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n \\ &= (u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}) - (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) \\ &= u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

Tổng quát sai phân cấp k của dãy u_n là

$$\Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n) = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}, \text{ với } C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

Các tính chất của sai phân

Tính chất 1. Sai phân các cấp đều có thể biểu diễn qua các giá trị của dãy số theo công thức

$$\Delta^k u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}.$$

Chứng minh. Thật vậy với $k=1$ thì $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Giả sử công thức đúng với $n=k$

$$\text{nghĩa là } \Delta^k u_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}.$$

Ta cần chứng minh cho công thức đúng với $k+1$.

$$\Delta^{k+1} u_n = \Delta^k u_{n+1} - \Delta^k u_n$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k+1-i} - \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}.$$

Ở tổng $\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}$ đổi chỉ số $i = j-1$ ta có:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} C_k^{j-1} u_{n+k-j+1}, \text{ sau đó}$$

lại thay biến $j = i$ ta được:

$$\Delta^{k+1} u_n = \Delta^k u_{n+1} - \Delta^k u_n =$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i+1} - \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} C_k^{i-1} u_{n+k-i+1}$$

$$= (-1)^0 C_k^0 u_{n+k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^i C_k^i u_{n+k-i+1}$$

$$- \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} C_k^{i-1} u_{n+k-i+1} - (-1)^k C_k^k u_n$$

$$= (-1)^0 C_k^0 u_{n+k+1} + (-1)^{k+1} C_k^k u_n$$

$$+ \sum_{i=1}^k (-1)^i (C_k^i - C_k^{i-1}) u_{n+k-i+1}$$

$$= (-1)^0 C_k^0 u_{n+k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^i C_{k+1}^i u_{n+k-i+1} + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1} u_n$$

(do $C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1}$ và $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$)

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i C_{k+1}^i u_{n+k-i+1}.$$

Do đó ta có điều chứng minh.

Tính chất 2. Sai phân mọi cấp của dãy số là một toán tử tuyến tính.

Chứng minh. Ta cần phải chứng minh

$$\Delta^k (ax_n + by_n) = a\Delta^k x_n + b\Delta^k y_n; \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy theo tính chất 1 ta có:

$$\Delta^k (ax_n + by_n) = \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i (ax_{n+k-i} + by_{n+k-i})$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i ax_{n+k-i} + \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i by_{n+k-i}$$

$$= a \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i x_{n+k-i} + b \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{n+k-i}$$

$$= a\Delta^k x_n + b\Delta^k y_n.$$

Tính chất 3. Sai phân cấp k của đa thức bậc m là

- 1) Đa thức bậc $m-k$ nếu $k < m$.
- 2) Hằng số nếu $k = m$.
- 3) Bằng 0 khi $k > m$.

Chứng minh. Do tính chất 2, sai phân mọi cấp của dãy số là một toán tử tuyến tính nên ta chỉ việc chứng minh cho đa thức $P_m(n) = n^m$ là đủ.

1) Ta có:

$$\Delta n^m = (n+1)^m - n^m = C_m^0 + C_m^1 n + \dots + C_m^m n^m - n^m$$

$$= C_m^0 + C_m^1 n + \dots + C_m^{m-1} n^{m-1} = P_{m-1}(n).$$

Giả sử tính chất đúng với $k = s < n$. Ta chứng minh cho $k = s+1 < n$.

$$\text{Ta có: } \Delta^{s+1} n^m = \Delta(\Delta^s n^m) = \Delta^s (n+1)^m - \Delta^s n^m$$

$$= \Delta P_{m-s}(n) = P_{m-s-1}(n)$$

nên tính chất đúng với $k = s+1 < n$. Do đó tính chất 1) được chứng minh.

2) Nếu $k = m$ thì $\Delta^m n^m = P_{m-m}(n) = c$ (là hằng số)

3) Nếu $k > m$ ta có:

$$\Delta^k n^m = \Delta^{k-m} (\Delta^m n^m) = \Delta^{k-m} c = \Delta^{k-m-1} (\Delta c) = 0.$$

Tính chất 4.

$$\sum_{n=a}^N \Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{N+1} - \Delta^{k-1} u_a, \text{ với } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh. Ta có: $\sum_{n=a}^N \Delta^k u_n = \sum_{n=a}^N \Delta(\Delta^{k-1} u_n)$

$$= \Delta^{k-1} u_{a+1} - \Delta^{k-1} u_a + \Delta^{k-1} u_{a+2} - \Delta^{k-1} u_{a+1} + \dots + \Delta^{k-1} u_{N+1} - \Delta^{k-1} u_N$$

$$= \Delta^{k-1} u_{N+1} - \Delta^{k-1} u_a \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Phương pháp giải (Sử dụng ứng dụng của sai phân).

Với bài toán “Tìm số hạng tổng quát của dãy số (dạng đa thức) khi biết các số hạng đầu tiên” để tìm ra quy luật biểu diễn là rất khó. Để giải bài

toán bằng phương pháp sử dụng ứng dụng của sai phân ta làm như sau:

Đặt: $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$

$$\Delta^2 u_k = \Delta u_{k+1} - \Delta u_k$$

$$\Delta^3 u_k = \Delta^2 u_{k+1} - \Delta^2 u_k$$

.....

Ta lập bảng các giá trị $\Delta u_k, \Delta^2 u_k, \Delta^3 u_k, \dots$ nếu đến hàng nào có giá trị không đổi thì dừng lại, sau đó kết luận u_n là đa thức bậc 1, 2, 3, ... và ta đi tìm đa thức đó.

MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. Cho dãy số (u_n) có dạng khai triển sau: 1; -1; -1; 1; 5; 11; 19; 29; 41; 55;

Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát và tìm số tiếp theo?

Lời giải. Bảng giá trị ban đầu:

u_k	1		-1		-1		1		5		11		19		29		41		55
Δu_k		-2		0		2		4		6		8		10		12		14	
$\Delta^2 u_k$			2		2		2		2		2		2		2		2		

Ta thấy hàng của $\Delta^2 u_k$ không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc hai giả sử $u_n = an^2 + bn + c$ ($a \neq 0$) (1) trong đó n là số thứ tự của các số hạng trong dãy.

Tìm a, b, c như sau: Cho $n = 1; 2; 3$ thay vào công thức (1) ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow u_n = n^2 - 5n + 5. \text{ Số hạng tiếp theo } u_{11} = 71.$$

Thí dụ 2. Cho dãy số (u_n) có dạng khai triển sau: -5; -3; 11; 43; 99; 185; 307; 471; Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát và 2 số hạng tiếp theo.

Lời giải. Bảng giá trị ban đầu:

u_k	-5		-3		11		43		99		185		307		471
Δu_k		2		14		32		56		86		122		164	
$\Delta^2 u_k$			12		18		24		30		36		42		
$\Delta^3 u_k$				6		6		6		6		6			

Ta thấy hàng của $\Delta^3 u_k$ không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc ba giả sử $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ ($a \neq 0$) (2) trong đó n là số thứ tự của các số hạng trong dãy.

Tìm a, b, c, d như sau: Cho $n = 1; 2; 3; 4$ thay vào công thức (2) ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-5 \\ 8a+4b+2c+d=-3 \\ 27a+9b+3c+d=11 \\ 64a+16b+4c+d=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=-5 \\ 7a+3b+c=2 \\ 26a+8b+2c=16 \\ 63a+15b+3c=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-5 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow u_n = n^3 - 5n - 1.$$

Hai số hạng tiếp theo là: $u_9 = 683$; $u_{10} = 949$.

Bài tập tương tự: Với mỗi dãy số sau đây, hãy tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số

1. 8;14;20;26;32;.....
2. 1;-2;-2;1;7;16;28;43;61;...
3. 1;6;17;34;57;86;121;.....
4. 2;3;7;14;24;37;.....
5. 3;5;10;18;29;.....
6. 2;1;5;14;28;47;71;100;134;173;217;....
7. 2;2;8;26;62;122;212;338;....

Chúng ta tiếp tục xét bài toán đơn giản được trình bày ở nhiều sách bài tập như sau:

Thí dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy?

Nhận xét. Việc giải quyết bài toán trên không có gì khó khăn. Học sinh có thể giải theo 3 cách như sau:

Cách 1. Ta có: $u_1 = 1, u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 2, \dots, u_n = u_{n-1} + 2$.

Cộng vế với vế các hệ thức trên ta được: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + 2(n-1)$
 $\Rightarrow u_n = 1 + 2(n-1) \Rightarrow u_n = 2n - 1$.

Cách 2. Dựa vào công thức truy hồi ta tính được dạng khai triển của dãy (u_n) là: 1;3;5;7;9;11;13;....

Ta có bảng giá trị ban đầu:

u_k	1		3		5		7		9		11		13
Δu_k		2		2		2		2		2		2	

$\Rightarrow$ công thức tổng quát của dãy (u_n) có dạng là hàm đa thức bậc nhất theo n giả sử $u_n = an + b$ ($a \neq 0$) (3). Thay $n=1$ và $n=2$ thay vào (3) ta được:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow u_n = 2n - 1.$$

Cách 3. (Tạm gọi là phương pháp đơn giản từng số hạng)

Từ giả thiết ta có: $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

Thí dụ 4. Tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải. Cách 1. Vì $u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -1 + 3(n-1) = 3n - 4$.

Cách 2. Ta có: $u_1 = -1, u_2 = u_1 + 3, u_3 = u_2 + 3, \dots, u_n = u_{n-1} + 3$.

Cộng vế với vế các hệ thức trên ta được: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = -1 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + 3(n-1)$
 $\Rightarrow u_n = -1 + 3(n-1) \Rightarrow u_n = 3n - 4$.

Cách 3. Dựa vào công thức truy hồi ta tính được dạng khai triển của dãy (u_n) là: $-1; 2; 5; 8; 11; 14; 17; \dots$

u_k	-1		2		5		8		11		14		17
Δu_k		3		3		3		3		3		3	

$\Rightarrow u_n = an + b$ ($a \neq 0$) (1). Thay $n=1$ và $n=2$ thay vào (1) ta được:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow u_n = 3n - 4.$$

Thí dụ 5. Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải. Cách 1. Ta có: $u_1 = 5, u_2 = u_1 + 3 \cdot 1 - 2, u_3 = u_2 + 3 \cdot 2 - 2,$

$$u_4 = u_3 + 3 \cdot 3 - 2, u_5 = u_4 + 3 \cdot 4 - 2, \dots, u_n = u_{n-1} + 3 \cdot (n-1) - 2.$$

Cộng vế với vế ta được: $\Rightarrow u_n = 5 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 3 \cdot (n-1) - 2(n-1)$

$$= 5 + \frac{3(n-1)n}{2} - 2(n-1) = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}.$$

Cách 2. Ta có dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $5; 6; 10; 17; 27; 40; 56; 75; \dots$

u_k	5		6		10		17		27		40		56		75
Δu_k		1		4		7		10		13		16		19	
$\Delta^2 u_k$			3		3		3		3		3		3		

$\Rightarrow u_n = an^2 + bn + c$ (*). Thay $n=1, n=2, n=3$ vào (*) ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 7 = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}.$$

Bài tập tương tự: Tìm công thức của số hạng tổng quát của các dãy (u_n) biết:

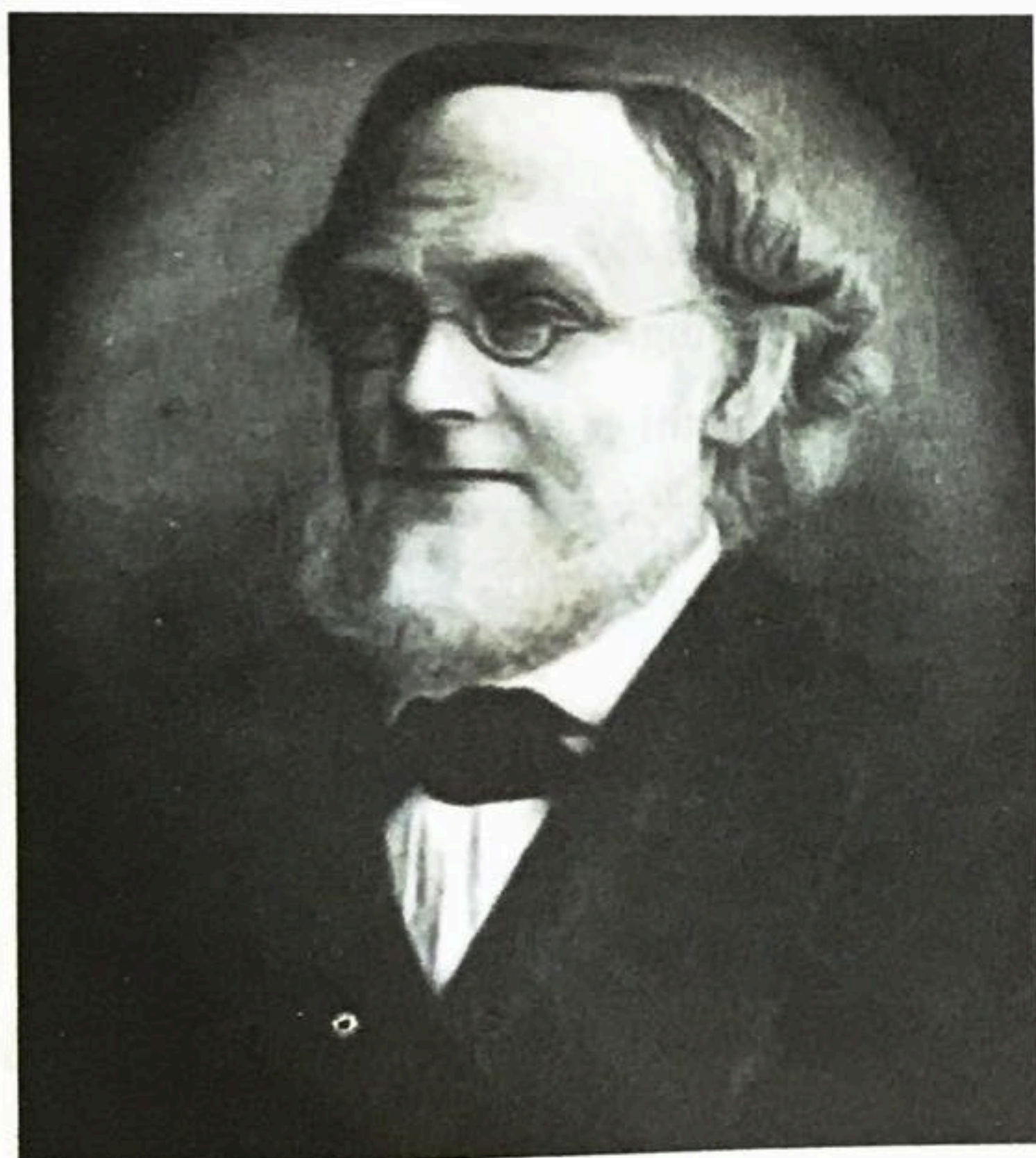
1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, n \geq 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, n \geq 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, n \geq 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^2, n \geq 1 \end{cases}$



XUNG QUANH BÀI TOÁN GOLDBACH

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Ngày 7 tháng 6 năm 1742 nhà toán học Phổ (nay thuộc nước Đức) Goldbach (Christian Goldbach 1690- 1764) viết thư cho nhà toán học Thụy Sĩ Euler (Leonhard Euler 1707- 1783), trong đó nêu giả thuyết rằng:

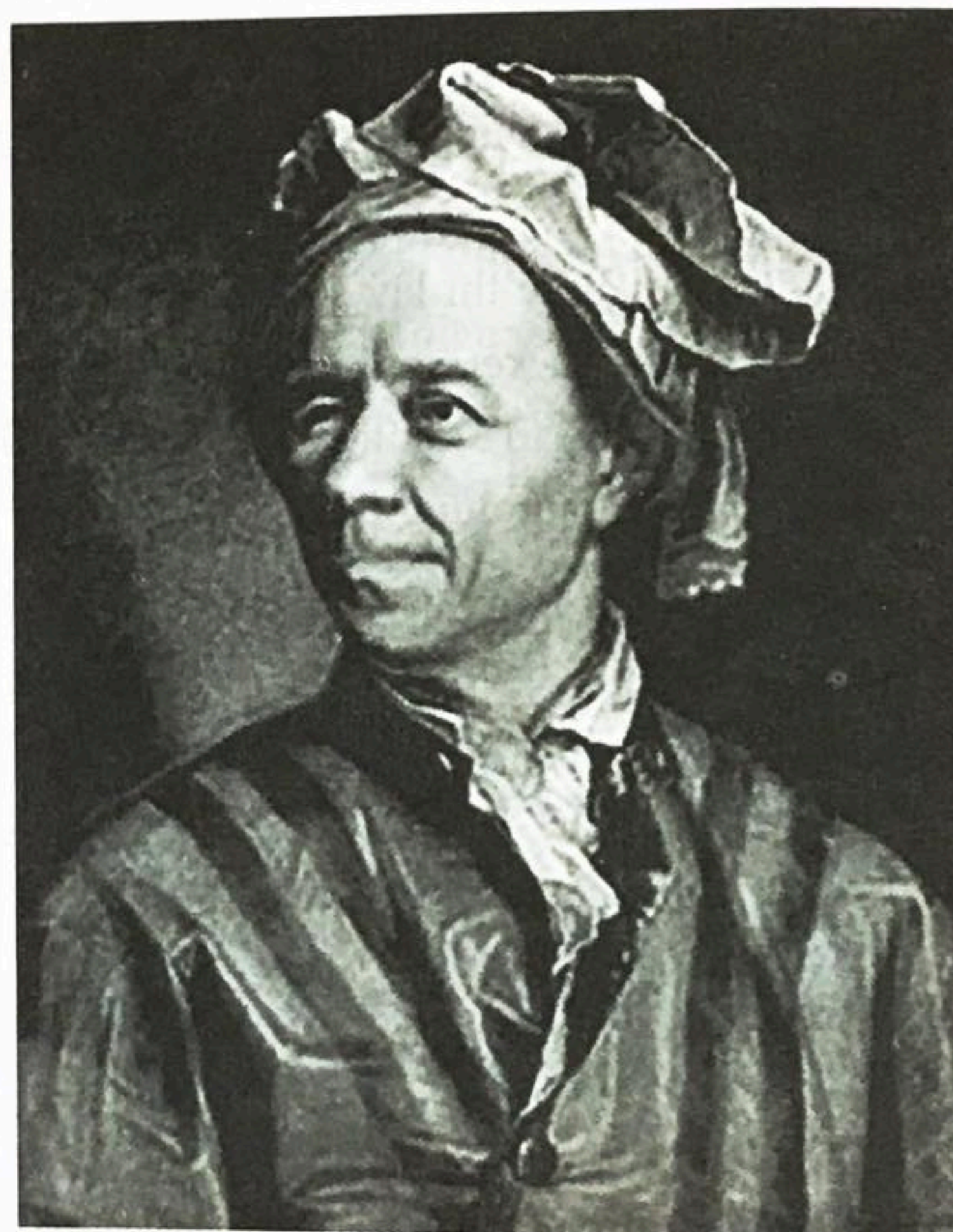


Christian Goldbach (1690-1764)

Mỗi số lẻ (lớn hơn 5) biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố (giả thuyết Goldbach yếu, the weak Goldbach Conjecture, the ternary Goldbach Conjecture, viết tắt là GC-3).

Trong thư trả lời ngày 30 tháng 6 năm 1742, nhà toán học L. Euler cho rằng:

Mỗi số chẵn (lớn hơn 2) biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố (giả thuyết Euler hay giả thuyết Goldbach mạnh, the strong Goldbach Conjecture, the binary Goldbach Conjecture, viết tắt là GC-2).



Leonhard Euler (1707-1783)

Các giả thuyết trên (đã viết cho gọn và rõ ràng hơn bản gốc) lôi cuốn sự nghiên cứu của rất nhiều nhà toán học và người yêu toán. Xin trình bày một số kết quả liên quan đến các giả thuyết này.

Định lý 1. Một số chẵn biểu diễn được thành dạng $2n = p + q$ với p, q là các số lẻ ($1 \leq p \leq q$) khi và chỉ khi tồn tại số nguyên k với $0 \leq k \leq n - 1$, thỏa mãn k khác tính chẵn lẻ với n và $n - k = p$; $n + k = q$.

Chứng minh. Giả sử $2n = p + q$ với p, q là các số lẻ, $p \leq q$ thì $2p \leq 2n \leq 2q$ nên $p \leq n \leq q$.

Đặt $k = n - p$ thì $0 \leq k = n - p \leq n - 1$ và $n - k = p$ nên $n + k = 2n - p = q$. Vì p, q là các số lẻ nên k khác tính chẵn lẻ với n .

Đảo lại, nếu $n - k = p$ và $n + k = q$ thì p, q là các số lẻ do k khác tính chẵn lẻ với n và $2n = p + q$.

Từ định lí 1 ta có thuật toán đơn giản xác minh tính đúng đắn của giả thuyết GC-2.

Dễ thấy $2n = 4 = 2 + 2$, xét $2n \geq 6$.

- Nếu n là số nguyên chẵn thì lấy số k lần lượt bằng 1; 3; 5;... đến $n - 1$ và xét xem $n - k$ và $n + k$ có đều là số nguyên tố không, nếu đúng thì $2n = p + q$, nếu không đúng thì xét tiếp với số k lẻ lớn hơn.

- Nếu n là số nguyên lẻ thì lấy số k lần lượt bằng 0; 2; 4;... đến $n - 1$ và xét xem $n - k$ và $n + k$ có đều là số nguyên tố không, nếu đúng thì $2n = p + q$, nếu không đúng thì xét tiếp với số k chẵn lớn hơn.

Ví dụ. 1) $6 = 2 \cdot 3 = 3 + 3$; $8 = 2 \cdot 4 = 3 + 5$;

$$10 = 2 \cdot 5 = 5 + 5 = 3 + 7; 12 = 2 \cdot 6 = 5 + 7.$$

$$2) 24 = 2 \cdot 12 = 11 + 13 = 7 + 17 = 5 + 19.$$

$$3) 26 = 2 \cdot 13 = 13 + 13 = 7 + 19 = 3 + 23.$$

$$4) 30 = 2 \cdot 15 = 13 + 17 = 11 + 19 = 7 + 23.$$

Định lí 2. a) Nếu giả thuyết Euler GC-2 đúng với số chẵn bất kì lớn hơn 2 thì giả thuyết GC-3 đúng với số lẻ bất kì lớn hơn 5.

b) Nếu giả thuyết Euler GC-2 đúng đến số chẵn $2n$ ($n \geq 2$) thì giả thuyết GC-3 đúng với các số lẻ $3n$ và $3n - 2$ khi n là lẻ và đúng với số lẻ $3n + 1$ khi n là chẵn.

Chứng minh. a) Với $4 = 2 + 2$, tức là GC-2 đúng với số chẵn $2n = 4$, ta có: $7 = 2 + 2 + 3$, tức là GC-3 đúng với số lẻ 7.

Nếu $2n = p + q \geq 6$ ($n \geq 3$) với p, q là các số nguyên tố thì $2n + 3 = p + q + 3 \geq 9$, tức là GC-3 đúng với mọi số lẻ lớn hơn 7.

b) Ta thấy giả thuyết Euler GC-2 đúng với số chẵn 4 ($n = 2$), 6 ($n = 3$), 8 ($n = 4$) và 10 ($n = 5$) ở ví dụ trên. Tương ứng, ta có:

$$\text{Với } n = 2 \text{ thì } 3n + 1 = 7 = 2 + 2 + 3.$$

$$\text{Với } n = 3 \text{ thì } 3n = 9 = 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3;$$

$$3n - 2 = 7 = 2 + 2 + 3.$$

$$\text{Với } n = 4 \text{ thì } 3n + 1 = 13 = 3 + 5 + 5;$$

$$\text{Với } n = 5 \text{ thì } 3n = 15 = 5 + 5 + 5 = 3 + 5 + 7;$$

$$3n - 2 = 13 = 3 + 5 + 5.$$

Giả sử giả thuyết Euler GC-2 đúng đến số chẵn $2n$, tức là có $2n = p + q$ với p, q là các số nguyên tố và $p \leq n \leq q$.

Khi n là số lẻ, lấy số lẻ k với $1 \leq k \leq n$ có

$$2n + k = p + q + k \leq 3n.$$

Do số chẵn $p + k \leq n + n = 2n$ (khi $k = n - 2$ thì $p + k \leq n + n - 2 = 2n - 2 < 2n$) nên theo giả thiết GC-2 đúng thì $p + k = r + s$ với r, s là các số nguyên tố, lúc đó

$$2n + k = q + p + k = q + r + s,$$

giả thuyết GC-3 đúng.

Khi n là số chẵn thì $p \leq n - 1$, lấy số lẻ k với $1 \leq k \leq n + 1$ có $2n + k = p + q + k \leq 3n + 1$. Do số chẵn $p + k \leq n - 1 + n + 1 = 2n$ nên theo giả thiết GC-2 đúng thì $p + k = r + s$ với r, s là các số nguyên tố, lúc đó

$$2n + k = q + p + k = q + r + s,$$

giả thuyết GC-3 đúng.

Vậy giả thuyết GC-3 đúng với các số lẻ $3n$ và $3n - 2$ khi n là số lẻ và đúng với số lẻ $3n + 1$ khi n là số chẵn.

Định lí 3. Tồn tại vô hạn hợp số lẻ biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố khác nhau nhưng số đó không thể biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố.

Chứng minh. Mỗi số nguyên tố lớn hơn 30 (không là bội của 2, 3, 5) có dạng $30k + r$ với k là số tự nhiên và r là một trong các số 1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29. Vì các số nguyên tố là vô hạn nên ít nhất với một số r_0 nào đó ở trên thì dãy số dạng $30k + r_0$, với k là số tự nhiên, phải chứa vô hạn số nguyên tố.

Số $n = 30k + r_0$ là số lẻ nên nếu nó biểu diễn được thành tổng của hai số nguyên tố thì một số hạng phải là 2, còn số kia là $n - 2$, ta sẽ chỉ ra rằng số $n - 2$ đó là hợp số.

• Nếu có vô hạn số nguyên tố dạng $p = 30k + 1$ thì có vô hạn hợp số lẻ dạng

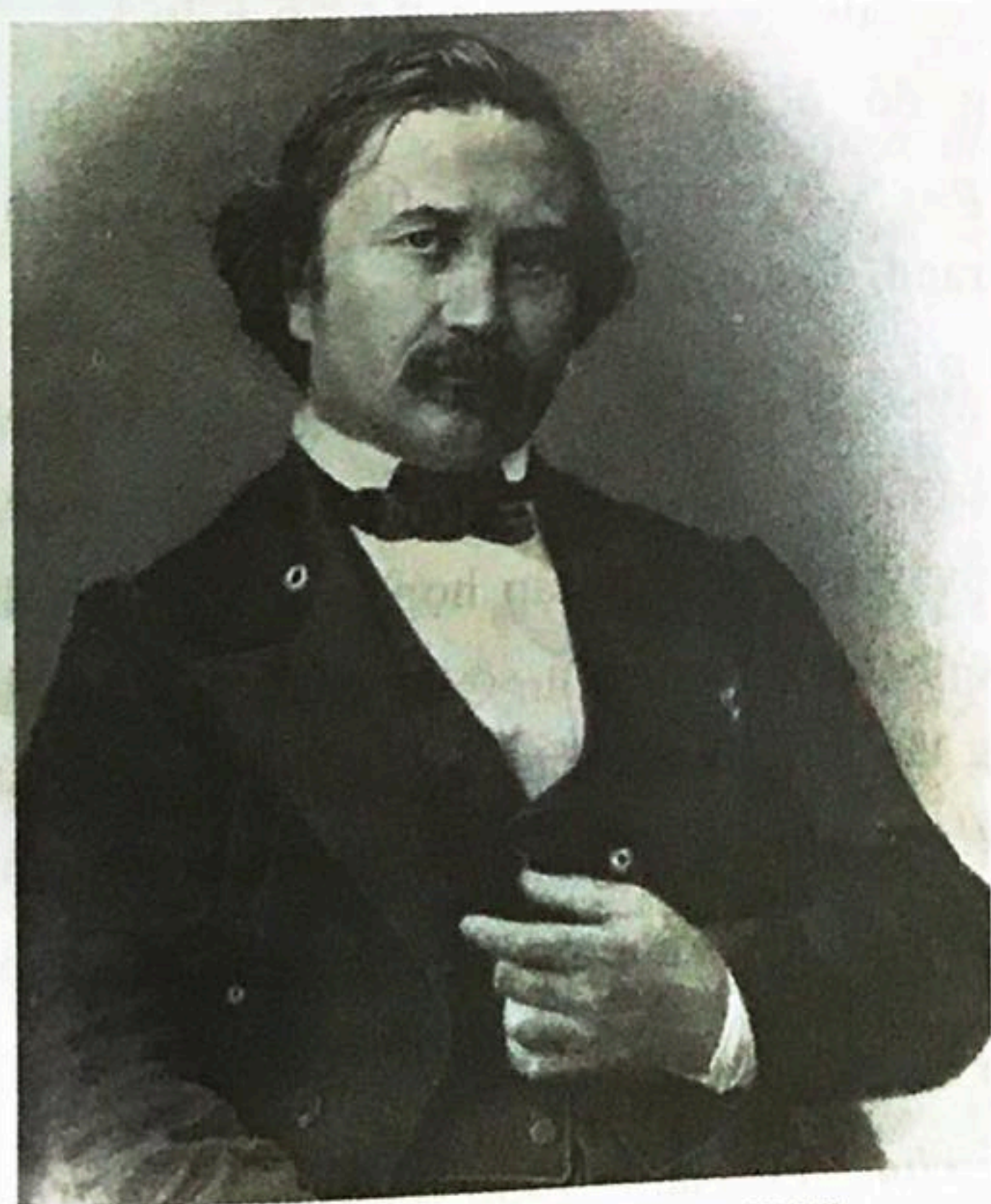
$$n = 7 + 19 + p = 3(10k + 9),$$

và khi đó $n - 2 = 5(6k + 5)$ là hợp số.

Tương tự như thế trong các trường hợp sau:

- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 7$ thì $n = 7 + 13 + p = 3(10k + 9)$ và $n - 2 = 5(6k + 5)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 11$ thì $n = 11 + 13 + p = 5(6k + 7)$ và $n - 2 = 3(10k + 11)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 13$ thì $n = 3 + 11 + p = 3(10k + 9)$ và $n - 2 = 5(6k + 5)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 17$ thì $n = 3 + 7 + p = 3(10k + 9)$ và $n - 2 = 5(6k + 5)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 19$ thì $n = 3 + 5 + p = 3(10k + 9)$ và $n - 2 = 5(6k + 5)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 23$ thì $n = 5 + 7 + p = 5(6k + 7)$ và $n - 2 = 3(10k + 11)$.
- Nếu có vô hạn số nguyên tố $p = 30k + 29$ thì $n = 5 + 31 + p = 5(6k + 13)$ và $n - 2 = 3(10k + 21)$.

Định đề Bertrand.

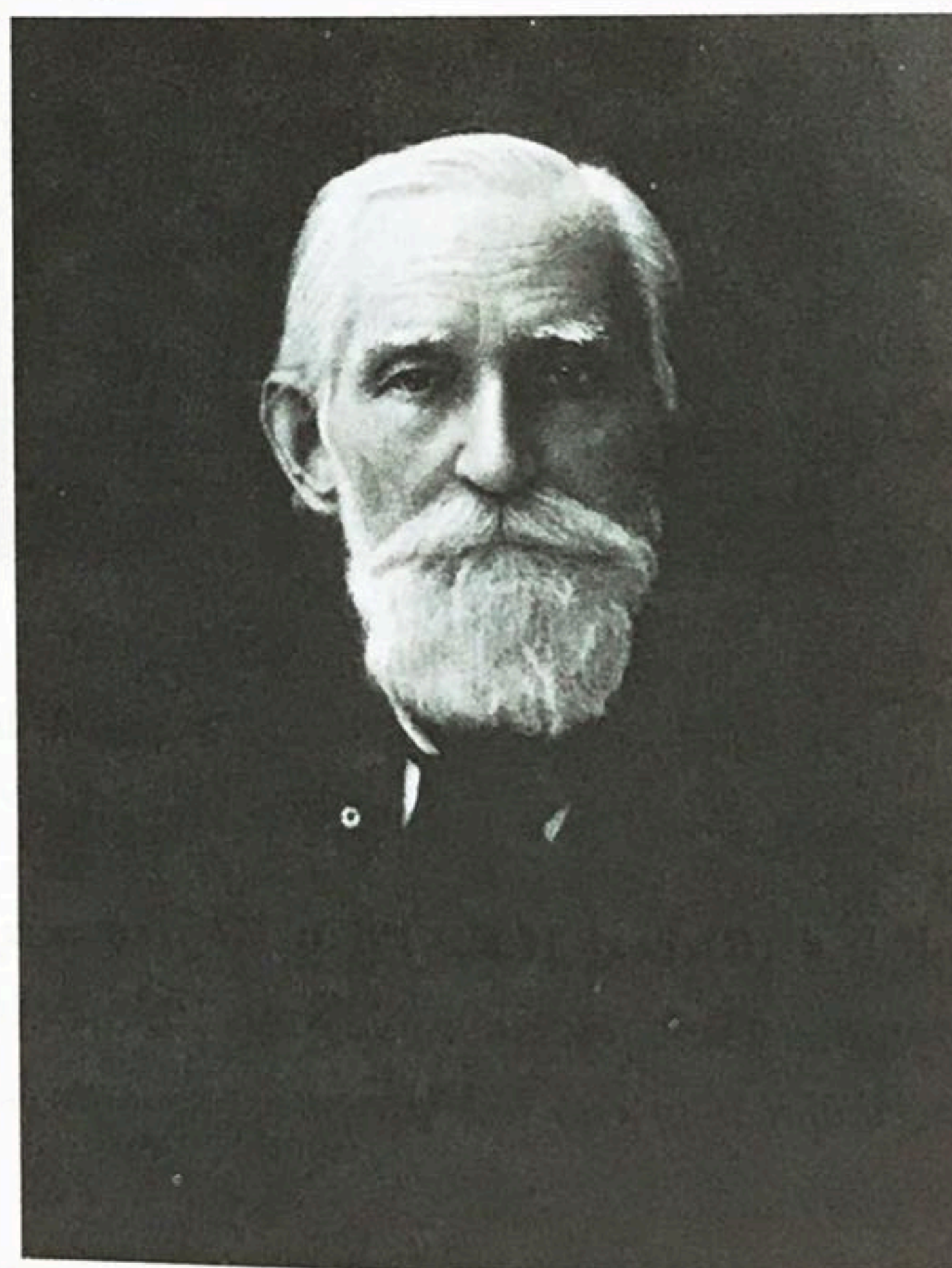


Joseph. Bertrand (1822 – 1900)

Năm 1845 nhà toán học người Pháp *J. Bertrand* đã công bố một mệnh đề như sau.

Định đề Bertrand. Với bất kì số nguyên dương n thì giữa hai số n và $2n$ luôn tồn tại ít nhất một số nguyên tố.

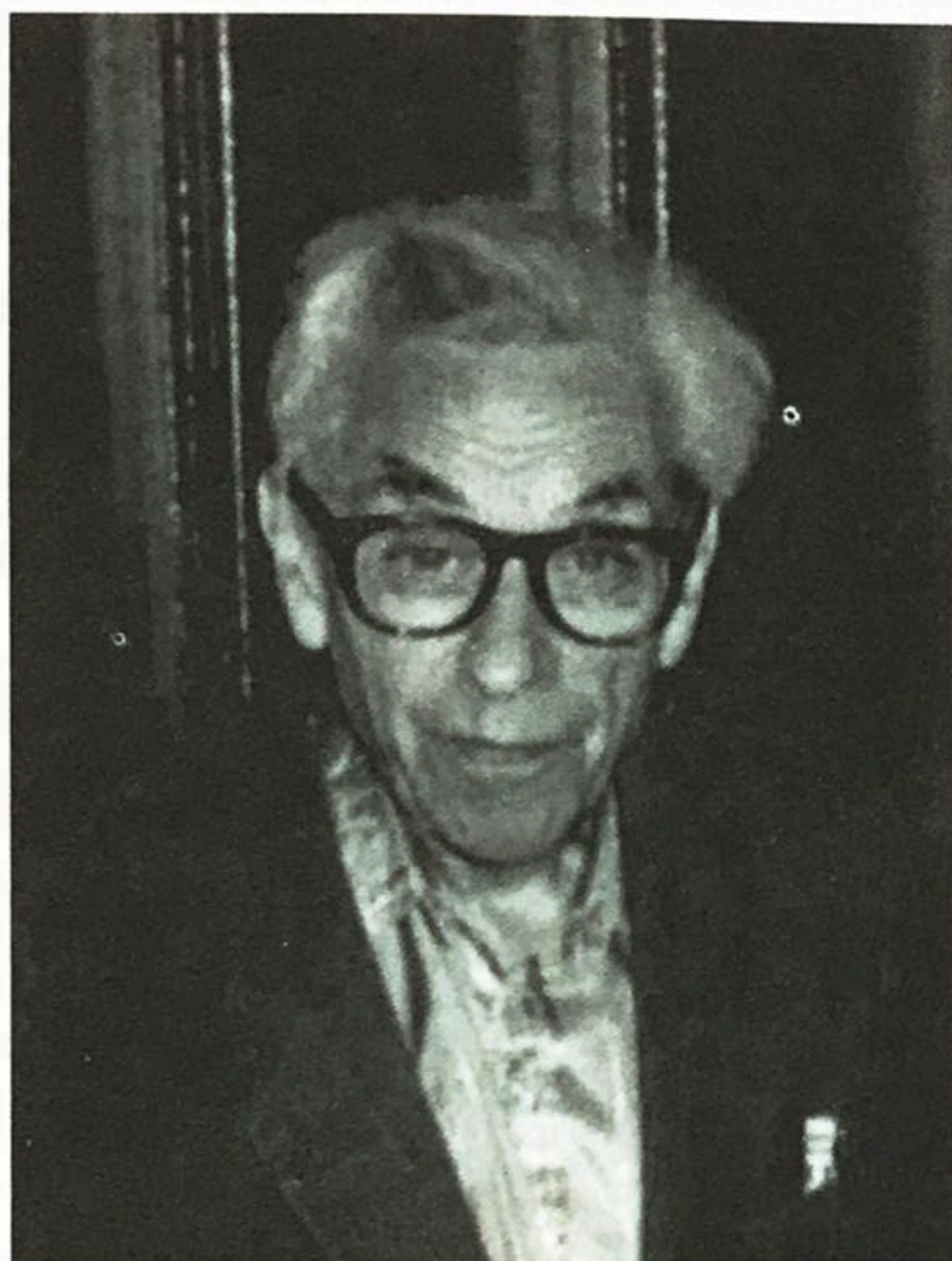
Chú ý: Khi $n = 1$ thì tồn tại số nguyên tố $p = 2 \leq 2 \cdot 1$, còn với $n > 1$ thì theo mệnh đề trên tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn $n < p < 2n$. Ông đã thử thấy khẳng định này đúng với mọi số nguyên dương $n < 3000000$, nhưng chưa chứng minh được đúng với các số nguyên lớn hơn nữa, vì thế mệnh đề trên được gọi là định đề (postulate).



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821 – 1894)

Vào năm 1850 nhà toán học người Nga *Chebyshev* (П.Л.Чебышев, *P. L. Chebyshev*) đã chứng minh được định đề trên bằng cách đánh giá C_{2n}^n và xét hàm số giải tích, sau đó cách chứng minh sơ cấp định đề này (dựa vào một số kết quả của *Chebyshev*) được công bố bởi nhà toán học người Ấn Độ *S. Ramanujan* năm 1919 và bởi nhà toán học người Hungary *P. Erdos* năm 1932 (khi *Erdos*

mới 19 tuổi). Chứng minh Định đề Bertrand dựa theo cách của Erdos do Laslo Kalmar viết, có trong sách của W.Sierpinski ([6] tr.137 – 145).



Paul Erdos (1913 – 1996)

Một cách chứng minh Định đề Bertrand đã đăng trên tạp chí TH&TT số 432 tháng 6 năm 2013.

Định lí 4 (Richert H.E., 1950). *Mỗi số nguyên dương $n \geq 11$, kể cả các số 7; 8; 9; 10; biểu diễn được thành tổng của hai hay nhiều số nguyên tố khác nhau.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh: *Mỗi số nguyên dương $n \geq 7$ là số nguyên tố 11 hoặc biểu diễn được thành tổng nhiều số nguyên tố khác nhau, rồi loại bỏ số 11.*

Chứng minh sơ cấp của Erdos.

Nhận xét. Khẳng định trên đúng với mọi số tự nhiên liên tiếp n từ 7 đến 19 và biểu diễn được (không kể số 11) thành tổng nhiều số nguyên tố khác nhau với tập các số nguyên tố là

$$P_5 = \{2; 3; 5; 7; 11\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}.$$

Thực vậy $7 = 2 + 5$; $8 = 3 + 5$; $9 = 2 + 7$; $10 = 3 + 7 = 2 + 3 + 5$; 11 là số nguyên tố; $12 = 5 + 7$; $13 = 2 + 11$; $14 = 3 + 11 = 2 + 5 + 7$; $15 = 3 + 5 + 7$; $16 = 5 + 11$; $17 = 2 + 3 + 5 + 7$; $18 = 7 + 11$, $19 = 3 + 5 + 11$.

Trở lại chứng minh định lí. Ta thấy $7 = 6 + 1$; $8 = 7 + 2, \dots$ đến $19 = 6 + 13$ với $13 = p_6$.

Gọi $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t, \dots$ là dãy các số nguyên tố liên tiếp. Đặt $S_t = \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_t\}$ với số tự nhiên a xác định. Với $t = 6$ thì

$$S_6 = \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_6\} = \{7; 8; \dots; 19\}$$

mà mỗi số của tập hợp S_6 đều biểu diễn được thành tổng nhiều số nguyên tố khác nhau trong tập các số nguyên tố P_5 . Giả sử khẳng định của Định lí trên đúng với số tự nhiên t khi $t \geq 6$ và tương ứng với tập hợp $S_t = \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_t\}$ với giả thiết rằng mỗi số của tập hợp S_t đều biểu diễn được thành tổng nhiều số nguyên tố khác nhau trong tập các số nguyên tố P_{t-1} . Vì $p_t < p_{t+1}$ nên có tập hợp

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_{t+1}\} \\ &= \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_t; 6 + 1 + p_t; \dots; 6 + p_{t+1}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } R_t &= \{b + p_t\} \\ &= \{6 + 1 + p_t; 6 + 2 + p_t; \dots; 6 + 2p_t\}, \end{aligned}$$

trong đó b là số trong tập hợp S_t thì có $p_t < p_{t+1} < 2p_t$ nên $6 + p_{t+1} < 6 + 2p_t$ theo Định đề Bertrand, do đó S_{t+1} thuộc tập

$$\begin{aligned} S_t \cup R_t &= \{6 + 1; 6 + 2; \dots; 6 + p_{t+1}; 6 + 1 + p_{t+1}; \\ &\quad 6 + 2 + p_t; \dots; 6 + p_{t+1}; \dots; 6 + 2p_t\}. \end{aligned}$$

Như vậy mỗi số của tập hợp S_{t+1} đều biểu diễn được thành tổng nhiều số nguyên tố khác nhau trong tập các số nguyên tố P_t , khẳng định đúng với $t + 1$. Do tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 6 bằng $\bigcup_{t \geq 6} S_t$ nên khẳng định của Định lí đúng với số tự nhiên bất kì lớn hơn 6.

Ghi chú. 1) Năm 1950 nhà toán học Đức H.E.Richert sử dụng định đề Bertrand cũng chứng

minh được: Mỗi số nguyên $n \geq 10$ hoặc là số nguyên tố, hoặc biểu diễn được thành tổng của nhiều số nguyên tố lẻ phân biệt (có nhiều cách biểu diễn được như thế) ([6] tr. 152, 153).

Năm 1972 nhà toán học R.E.Dressler sử dụng phương pháp Erdos đã chứng minh được:

Mỗi số nguyên $n \geq 10$ biểu diễn được thành tổng của nhiều số nguyên tố lẻ phân biệt.

2) Nhà toán học Ba Lan A.Makowski năm 1960 đã chứng minh được được:

a) Mỗi số nguyên $m \geq 56$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $4k - 1$.

b) Mỗi số nguyên $m \geq 122$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $4k + 1$.

c) Mỗi số nguyên $m \geq 162$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $6k - 1$.

d) Mỗi số nguyên $m \geq 206$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $6k + 1$.

3) Năm 1974 các nhà toán học R.Dressler, A.Makowski, T.Parker đã chứng minh được:

a) Mỗi số nguyên $m \geq 1970$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $12k + 1$.

b) Mỗi số nguyên $m \geq 1350$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $12k + 5$.

c) Mỗi số nguyên $m \geq 1388$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $12k + 7$.

d) Mỗi số nguyên $m \geq 1476$ biểu diễn được thành tổng của các số nguyên tố phân biệt dạng $12k + 11$. ([6] tr. 153).

4) Giả thuyết GC-2 (GC mạnh) đã được kiểm tra đúng từ 4 đến $2n$ như sau.

- Với $2n \leq 10^5$ bởi nhà thiên văn Phần Lan Nils Pipping năm 1940;

- Với $2n \leq 33 \cdot 10^6$ bởi nhà toán học Shen Mok Kong năm 1964.

- Với $2n \leq 10^8$ bởi các nhà toán học M.L.Stein, P.R.Stein năm 1965.

- Với $2n \leq 2 \cdot 10^{10}$ bởi các nhà toán học A.Granville, J.van de Lune, H.J.J.Te Riele năm 1989.

- Với $2n \leq 4 \cdot 10^{11}$ bởi các nhà toán học M.K.Sinisalo năm 1993.

- Với $2n \leq 10^{14}$ bởi các nhà toán học J.M.Deshouillers, Y.Saouter, H.J.J.Te Riele năm 1991.

- Với $2n \leq 4 \cdot 10^{14}$ bởi các nhà toán học J.Richstein năm 2001.

- Với $2n \leq 4 \cdot 10^{18}$ bởi các nhà toán học T.Oliveira e Silva, S.Herzog, S.Pardi tháng 5 năm 2012.

5) Giả thuyết GC-3 (GC yếu) đã được kiểm tra đúng từ 7 đến $2n + 1$ như sau.

- với $2n \leq 10^{20}$ bởi các nhà toán học Y.Saouter năm 1998.

- với $2n \leq 837 \cdot 10^{24}$ bởi các nhà toán học T.Oliveira e Silva, S.Herzog, S.Pardi tháng 5 năm 2012.

- với $2n \leq 887 \cdot 10^{28}$ bởi các nhà toán học H.A.Helfgott, D.J.Platt tháng 5 năm 2013.

6) Năm 1930 nhà toán học Nga Schnirelmann (Лев Генрихович Шнирельман, L.G.Shnirelmann hoặc L.G.Schnirelmann) đã chứng minh định lí sau.

Định lí Schnirelmann. Tồn tại hằng số k để mỗi số nguyên $n > 1$ đều biểu diễn được thành tổng của không nhiều hơn k số nguyên tố.

• Năm 1969 nhà toán học Nga Klimov (Климов Н.И., Klimov N.I.) đã chứng minh được định lí Schnirelmann với $k = 6 \cdot 10^9$.

• Năm 1983 nhà toán học Thụy Điển Riesel (Riesel H.1929- 2014), và nhà toán học Anh Vaughan (Vaughan R.C. sinh năm 1945) đã chứng minh được định lí Schnirelmann với $k = 19$.

• Năm 1995 nhà toán học Pháp Ramare (Olivier Ramaré) đã cải tiến chứng minh của

Shnirelmann, cho kết quả: Mỗi số nguyên chẵn đều biểu diễn được thành tổng của không nhiều hơn 6 số nguyên tố.

- Năm 2012 nhà toán học Đào Triết Hiên (Terence Tao, sinh năm 1975), đã chứng minh được: Mỗi số nguyên lẻ $n > 1$ đều biểu diễn được thành tổng của nhiều nhất là 5 số nguyên tố.

7) Năm 1934 nhà toán học Nga Vinogradov (Ivan Matveevich Vinogradov, Иван Матвеевич Виноградов) đã chứng minh định lí sau.

Định lí Vinogradov. Tồn tại hằng số nguyên dương m để mỗi số nguyên lẻ $n > m$ đều biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố.

- Nhiều nhà toán học tìm cách làm giảm số m trong định lí Vinogradov. Học trò của Vinogradov là Borozdin (К.Бороздин, K.Borozdin) năm 1956 đã tính được $m \geq 3^{315} \approx 3,25 \cdot 10^{6846168}$ (số này gồm khoảng 7 tỉ chữ số thập phân).

- Năm 1989 Chen J.R. và Wang T.Z. đã tính được $m \geq 3,3334 \cdot 10^{43000}$, năm 2002 Liu M.C. và Wang T.Z. đã tính được $m \geq e^{3100} \approx 2 \cdot 10^{1346}$.

8) Vào tháng 5 năm 2013 nhà toán học Pêru Helfgott (Harald Andrés Helfgott, sinh năm 1977), làm việc tại Đại học Princeton (Hoa Kỳ) và Trung tâm Quốc gia nghiên cứu Khoa học Pháp, đã tính được $m \geq 10^{27}$ trong định lí Vinogradov và kiểm tra giả thuyết G yếu là đúng với mọi số $m \leq 887 \cdot 10^{28}$ (xem ghi chú 5), như thế Helfgott đã chứng minh được giả thuyết Goldbach yếu.

Định lí. Mỗi số nguyên lẻ $n > 5$ biểu diễn được thành tổng của ba số nguyên tố.

Hệ quả. Mỗi số nguyên chẵn $2n > 2$ biểu diễn được thành tổng của nhiều nhất là bốn số nguyên tố.

Chứng minh. Với $n = 2$ thì $2n = 4 = 2 + 2$, với $n = 3$ thì $2n = 6 = 3 + 3$, với $n = 4$ thì $2n = 8 = 3 + 5$, với $n \geq 5$ thì $2n - 3 > 5$ nên theo định lí trên viết được $2n - 3 = p + q + r$ với p, q, r là các số nguyên tố nên số chẵn

$$2n = 3 + p + q + r.$$

8) Năm 1973 nhà toán học Trung Quốc Trần Cảnh Nhuận (Chen Jingrun) đã chứng minh được định lí sau.

Định lí Chen 2. Mỗi số nguyên chẵn n lớn hơn một số v đều viết được thành dạng $n = p + q$, trong đó p là số nguyên tố, còn q hoặc là số nguyên tố hoặc là tích của hai số nguyên tố.

- Năm 1975 chứng minh của Chen đã được P.M.Ross rút gọn khá nhiều.

- Năm 2002 nhà toán học Trung quốc Chun Ying Cai đã CM được $p^{100} \leq n^{95}$ trong DL Chen, và đến năm 2015 nhà toán học Nhật Bản Tomohiro Yamada tính được $v = e^{e^{36}} \approx 1,7 \cdot 10^{1872344071119348}$.

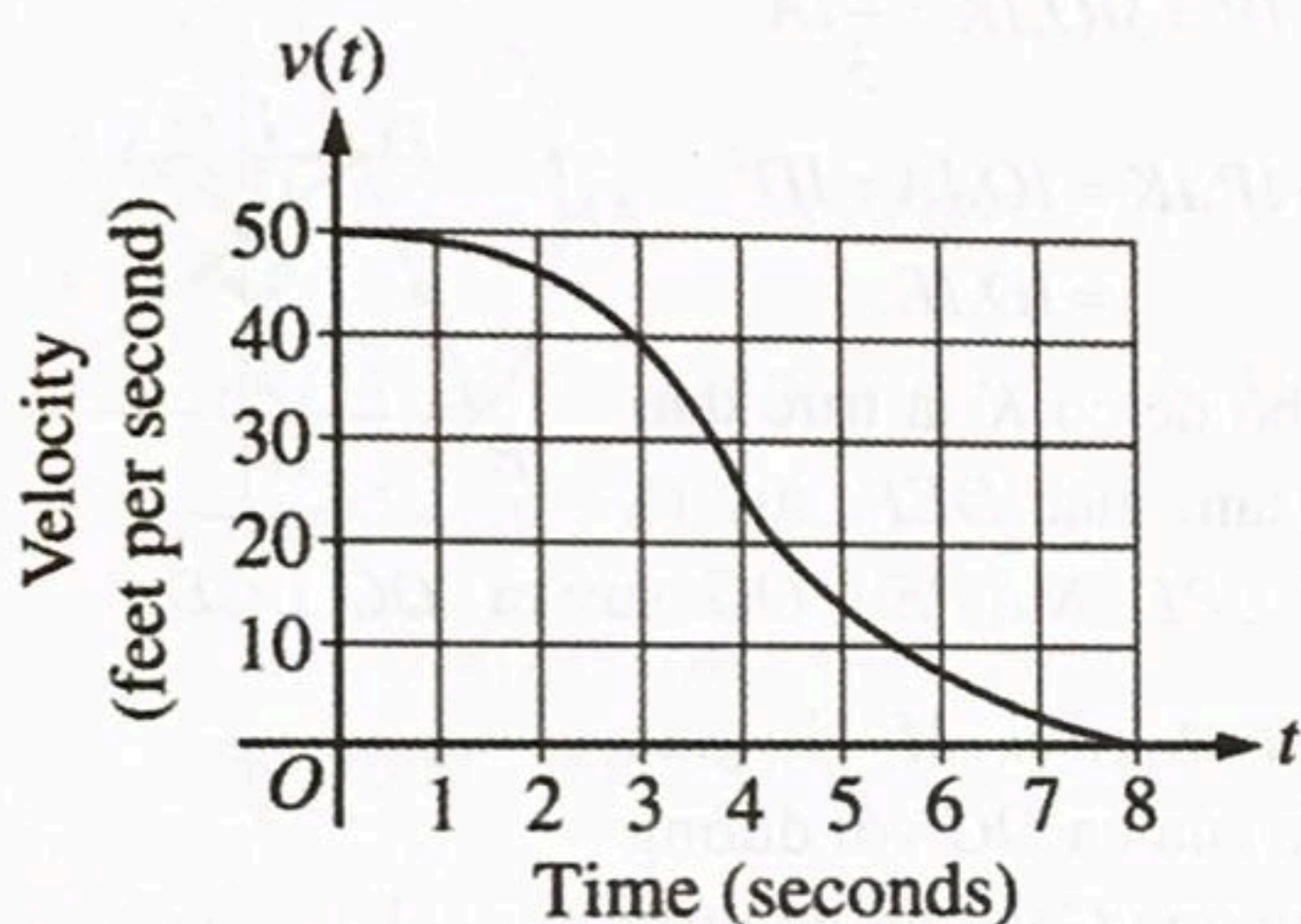
TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Goldbach Conjecture. Wikipedia.
- [2] Hardig J. Goldbach Conjecture. U.U.D.M. Project Report 2020. Uppsala Universitet.
- [3] Helfgott. H.A. The Ternary Goldbach Problem. arXiv: 1404.2224v2 [math.NT] 12 Apr 2014;
- [4] Helfgott. H.A. La Conjecture de Goldbach ternaire. Société Mathématique de France (SMF) Gazette. No 140 Avril 2014.
- [5] Oliveira e Silva. Goldbach Conjecture Verification. Universidade de Aveiro. Portugal. 12.2015.
- [6] Sierpinski W. Elementary Theory of Numbers. North- Holland. Amsterdam, PWN- Polish Scientific Publishers. Warszawa. (1964), 1988.
- [7] Wang Y. Goldbach Conjecture. The Goldbach Conjecture. 2ed. 2002. Series in Pure Mathematics. Vol 4. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 82

PROBLEM. The graph below gives the velocity, v , in ft/sec, of a car for $0 \leq t \leq 8$, where t is the time in seconds. Give a reasonable estimate of the distance traveled by the car from $t = 0$ until the car comes to a complete stop.



Solution. In this case the distance traveled by

the car from $t = 0$ until the car comes to a complete stop is the area under the curve and is bounded by coordinates axes.

From the graph, we can see that that area is about one half of the rectangle. Hence a reasonable estimate of the distance traveled is $0.5 \times 50 \times 8 = 200$ ft.

Remark: The problem is based on an exercise from a practice test for the US college entrance examination.

TỪ VỰNG

estimate : ước lượng
velocity : vận tốc

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

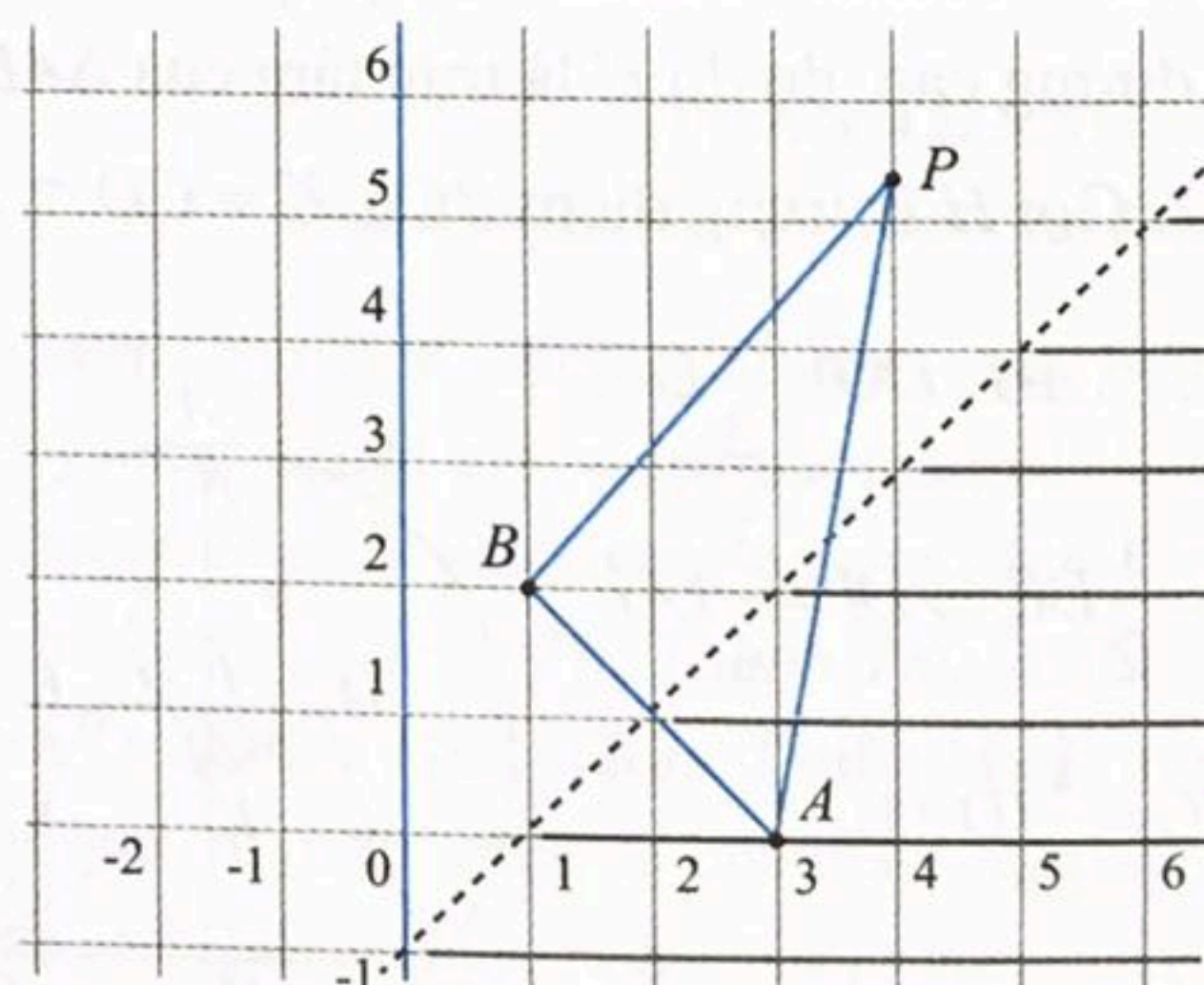
BÀI DỊCH SỐ 80

BÀI TOÁN. Trên mặt phẳng phức, hãy vẽ phác họa quỹ tích của những điểm biểu diễn số phức z được xác định bởi

$$|z - 3| > |z - 1 - 2i|.$$

Lời giải. Gọi P là điểm biểu diễn số phức z . Từ đó $|z - 3|$ là khoảng cách từ P đến điểm $A(3; 0)$ và $|z - 1 - 2i|$ là khoảng cách từ P đến điểm $B(1; 2)$.

Vì vậy ta cần tìm quỹ tích các điểm P sao cho $PA > PB$. Đó là nửa mặt phẳng không kể biên, được giới hạn bởi đường trung trực của đoạn thẳng AB .



Nhận xét. Các bạn: Nguyễn Văn Lâm, Thái Bá Nhân, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Trần Thị Thanh Thư, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế, Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định có bài dịch tốt.

HỒ HẢI (Hà Nội)



BÀI TOÁN 61 (trích Đề thi vô địch Vương quốc Anh). Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC . G là trọng tâm của tam giác ADC . Chứng minh GO vuông góc với DC .

Bổ đề. Cho tam giác ABC có H là điểm thuộc đường cao CE . Điểm H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi xảy ra hệ thức $EA.EB = EH.EC$.

Chứng minh. Nếu H là trực tâm ΔABC thì

$\Delta BEH \sim \Delta CEA$, suy ra:

$$EA.EB = EH.EC.$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EH} = \frac{EC}{EB}$$

$\Rightarrow \Delta BEH \sim \Delta CEA \Rightarrow \widehat{EHB} = \widehat{A} \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$ hay BD là đường cao, do đó H là trực tâm của ΔABC .

Cách 1. Gọi H là trung điểm BC , $K = CD \cap AH$,

$$I = DE \cap AH, DG = \frac{2}{3}DE.$$

$$\Rightarrow DI = \frac{1}{2}DE \Rightarrow DI = \frac{3}{4}DG$$

$$\text{hay } IG = \frac{1}{3}ID \quad (1).$$

$$AK = \frac{2}{3}AH, AI = \frac{1}{2}AH$$

$$\Rightarrow AI = \frac{3}{4}AK \text{ hay } IK = \frac{1}{3}IA \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) có:}$$

$$\frac{IG}{IK} = \frac{ID}{IA} = \frac{IO}{ID} \Rightarrow IG.ID = IO.IK. \text{ Vậy theo bổ đề,}$$

O là trực tâm của tam giác DKG hay $OG \perp DK$.

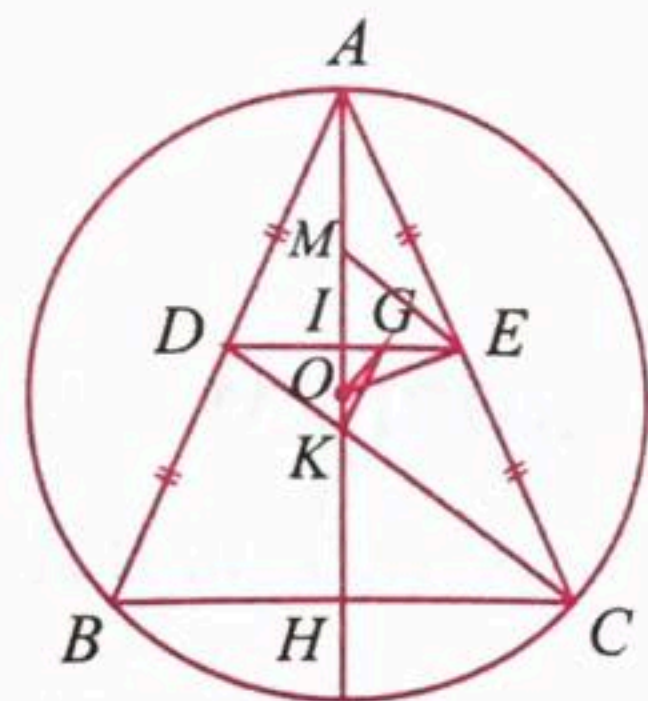
Cách 2. Gọi M là trung điểm của AK , ta có:

$$IM = \frac{1}{3}IA, IG = \frac{1}{3}IE.$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{IG} = \frac{IA}{IE} = \frac{IE}{IO}$$

$$\Rightarrow IM.IO = IE.IG.$$

Từ bổ đề có G là trực tâm của tam giác EOM hay $OG \perp EM$. Mà $EM \parallel CK$ dẫn đến $OG \perp CK$.



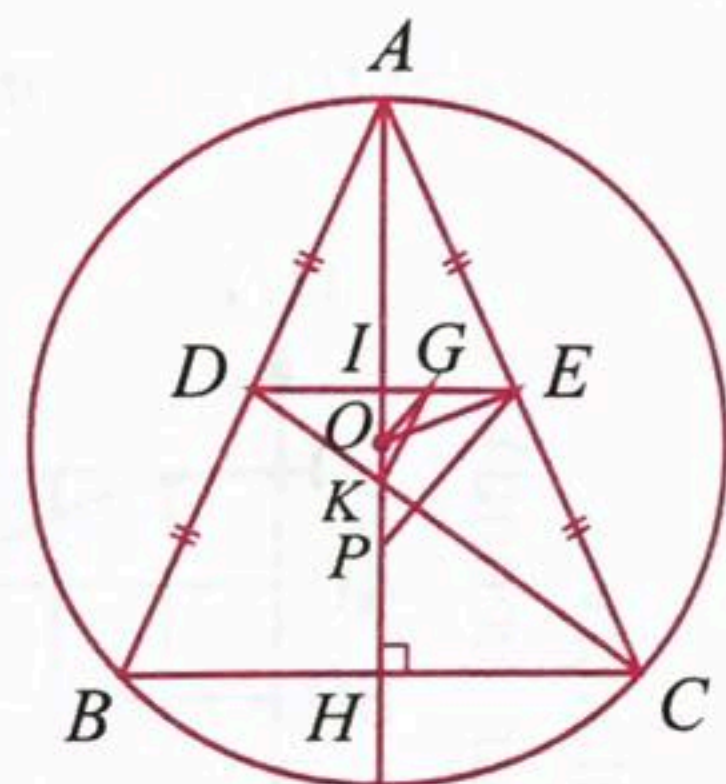
Cách 3. Gọi P là điểm thuộc IH sao cho $IP = 3IO$, ta có:

$$IP = 3IO, IK = \frac{1}{3}IA$$

$$\Rightarrow IP.IK = IO.IA = ID^2 = ID.IE.$$

Từ bổ đề có K là trực tâm của tam giác DEP , suy ra

$DK \perp PE$. Mà $PE \parallel OG$ suy ra $OG \perp CD$.



Cách 4. Gọi M là giao điểm của tia OG với đường thẳng qua C vuông góc với BC ; N là giao điểm của DE và MC , ta có: $IA = CN$, $DI = IE = EN$, $DN = 9IG$.

Do $MN \parallel OI$ nên

$$\frac{NM}{IO} = \frac{NG}{IG} \Rightarrow \frac{NM.NC}{IO.IA} = \frac{NG}{IG} \Rightarrow \frac{NM.NC}{IE^2} = \frac{NG}{IG}$$

$$\Rightarrow NM.NC = \frac{IE^2.NG}{IG} = \left(\frac{ND}{3}\right)^2.NG = ND.NG.$$

Vậy theo bổ đề G là trực tâm của tam giác DCM dẫn đến $OG \perp DC$.

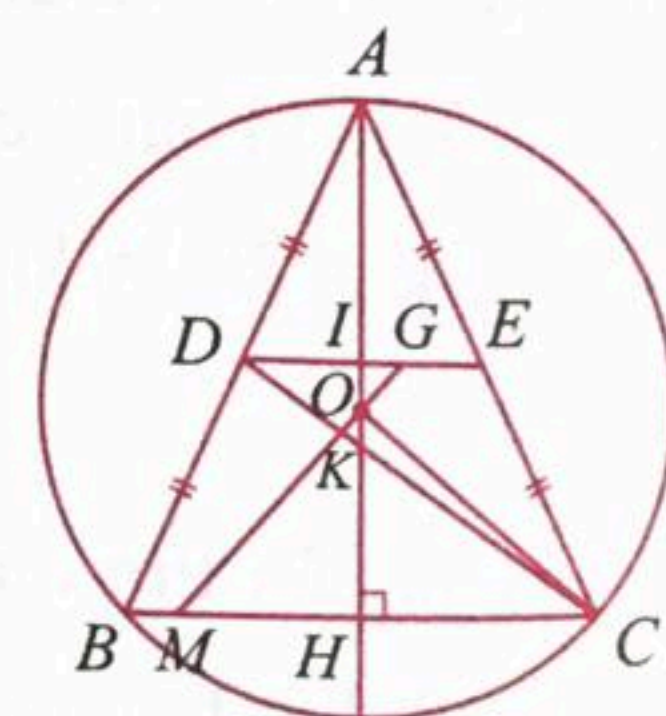
Cách 5. Gọi M là giao điểm của OG và BC , ta có:

$$\frac{HM}{IG} = \frac{HO}{IO}, \frac{HC}{ID} = \frac{HK}{IK}.$$

Nhân theo vế hai đẳng thức trên ta được:

$$\frac{HM.HC}{IG.ID} = \frac{HO.HK}{IO.IK} \quad (1).$$

Mặt khác, $IG = \frac{1}{3}ID, IK = \frac{1}{3}IA \Rightarrow \frac{IG}{IK} = \frac{ID}{IA} = \frac{IO}{ID} \Rightarrow IG.ID = IO.IK \quad (2).$ Từ (1) và (2) suy ra:



$MH.MC = HO.HK$. Vậy theo bổ đề K là trực tâm của tam giác OMC suy ra $CK \perp OM$ hay $GO \perp CD$.

Cách 6. Từ

$$\begin{aligned} EG &= \frac{1}{3}ED, AK = \frac{2}{3}AH \\ \Rightarrow \frac{EG}{AK} &= \frac{1}{2} \frac{ED}{AH} = \frac{EI}{AH} \\ &= \frac{EI}{2AI} = \frac{EO}{2EA} = \frac{EO}{AC}. \end{aligned}$$

$\triangle OEG$ và $\triangle CAK$ có:

$$\frac{EG}{AK} = \frac{EO}{AC}, \widehat{OEG} = \widehat{CAK} \Rightarrow \triangle OEG \sim \triangle CAK$$

$$\Rightarrow \widehat{GOE} = \widehat{KCA} \Rightarrow OG \perp CD.$$

Cách 7. Chứng minh $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Ta có:

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).$$

Vì G là trọng tâm tam giác ACD nên

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}). \text{ Do đó:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AO} \right] \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3}(AD^2 - AC^2) - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} \quad (1). \end{aligned}$$

Theo công thức hình chiếu ta lại có:

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 \quad (2).$$

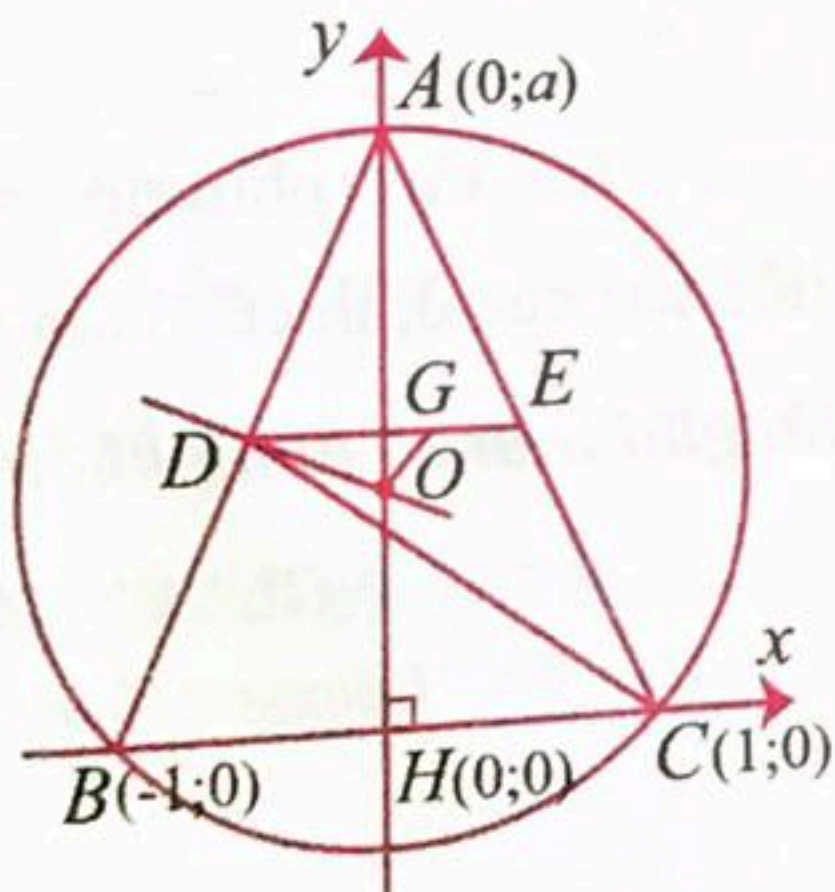
$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AC^2 \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{3}(AD^2 - AC^2) - AD^2 + \frac{1}{2} AC^2 \\ &= \frac{1}{6}(AC^2 - 4AD^2) = 0. \end{aligned}$$

Cách 8.



Không mất tính tổng quát, ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Do D là trung điểm AB nên $D\left(-\frac{1}{2}; \frac{a}{2}\right)$; G là trọng tâm $\triangle ADC$ nên

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_C + x_D}{3} = \frac{1}{6} \\ y_G = \frac{y_A + y_C + y_D}{3} = \frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{1}{6}; \frac{a}{3}\right).$$

Đường thẳng DO nhận $\overrightarrow{AB}(-1; -a)$ làm vector pháp tuyến có phương trình:

$$1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) + a \left(y - \frac{a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2ay + 1 - a^2 = 0.$$

Vì $O = DO \cap Oy$ nên tọa độ điểm O là nghiệm

$$\text{của hệ: } \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2ay + 1 - a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a^2 - 1}{2a} \end{cases}$$

Vậy $O\left(0; \frac{a^2 - 1}{2a}\right)$. Ta có:

$$\overrightarrow{GO} = \left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{2a}\right); \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow GO \perp CD.$$

TRẦN THANH HÙNG

(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

Nhận xét. Ngoài 8 cách giải trên của bạn Trần Thanh Hùng, người giới thiệu bài toán 61, Tòa soạn nhận được hai cách giải tương tự như cách 1 và cách 7 ở trên, của bạn Trần Thị Thanh Thu, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; một cách giải tương tự như cách 8 của bạn Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, tỉnh Bình Định. Xin hoan nghênh hai bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 63 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2022.

BÀI TOÁN 63. Giải phương trình

$$4x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - 2\sqrt{3x - 1} = 0.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



BÀI TOÁN 70 (AMC, 2020). Cho dãy số nguyên không âm $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ thỏa mãn

$$\frac{2^{289} + 1}{2^{17} + 1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}.$$

Giá trị của k là bao nhiêu?

Lời giải. Để ý rằng yêu cầu bài toán tương đương với việc xác định số chữ số khác 0 trong biểu diễn nhị phân của số

$$\frac{2^{289} + 1}{2^{17} + 1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k} \quad (1).$$

Đặt $m = 2^{17}$, khi đó ta có thể viết lại vế trái của (1) dưới dạng:

$$\frac{2^{289} + 1}{2^{17} + 1} = \frac{m^{17} + 1}{m + 1} = m^{16} - m^{15} + m^{14} - m^{13} + \dots + m^2 - m + 1.$$

Ta sẽ đánh giá từng cặp hai số hạng liên tiếp:

$$\begin{aligned} m^{16} - m^{15} &= m^{15}(m - 1) \\ &= m^{15}(2^{17} - 1) \\ &= (2^{17})^{15}(2^{16} + 2^{15} + 2^{14} + \dots + 2^1 + 2^0) \\ &= 2^{17 \cdot 15 + 16} + 2^{17 \cdot 15 + 15} + \dots + 2^{17 \cdot 15 + 1} + 2^{17 \cdot 15 + 0}. \end{aligned}$$

Bằng các phép biến đổi tương tự, ta thấy rằng mỗi hiệu $(m^{2i} - m^{2i-1})$ đều có thể viết dưới dạng tổng 17 lũy thừa của 2, hơn nữa các số hạng đó đôi một phân biệt.

Lần lượt thay $i = 8, 7, 6, \dots, 1$, ta thấy rằng có thể biểu diễn $\frac{2^{289} + 1}{2^{17} + 1}$ dưới dạng tổng

$17 \times 8 = 136$ lũy thừa đôi một phân biệt với số mũ nguyên dương của cơ số 2.

Lưu ý rằng ta cũng cần quan tâm đến số hạng $2^0 = 1$. Như vậy, số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của $\frac{2^{289} + 1}{2^{17} + 1}$ hay giá trị của k là:

$$136 + 1 = 137.$$

Nhận xét. Các bạn: Trần Thị Thanh Thu, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế, Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định, có lời giải đúng cho bài toán này. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.8.2022.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 72. Hãy tìm số dư khi chia $1776^{1492!}$ cho 2000.

KHÁNH HỮU (Hà Nội)

SAI LÂM ...

(Tiếp theo trang 47)

$$\Rightarrow D = (-\infty; 0) \cup (10; +\infty).$$

$$\text{Ta có: } 3^x \cdot 4^{\frac{x^2+2}{3}} = 144 \Leftrightarrow 3^x \cdot 4^{\frac{x^2+2}{3}} = 3^2 \cdot 4^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^2 \\ 4^{\frac{x^2+2}{3}} = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x^2+2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Khi đó $x = 2 \notin D$. Vậy phương trình không có nghiệm thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

Theo em lời giải trên có đúng không?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 537, tháng 3 năm 2022)

Phân tích sai lầm. Sai lầm của bạn Minh chính là sử dụng công thức $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ với A, B là các tập có hữu hạn phần tử. Công thức này sai vì những phần tử thuộc $A \cap B$ được tính 2 lần (1 lần trong A và 1 lần trong B). Công thức đó chỉ đúng nếu có thêm giả thiết $A \cap B = \emptyset$. Còn trong trường hợp tổng quát, với A, B là các tập có hữu hạn phần tử thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Do đó, số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau, là $180 - (60 + 60 - a)$, với a là số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau và các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau.

Lời giải đúng như sau. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần. Mỗi phần tử của A là một hoán vị 6 chữ số 1, 1, 2, 2, 3, 4. Có $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ hoán vị. Do đó,

$n(A) = 180$. Gọi B_1 là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau. Ta có

$n(B_1) = \frac{5!}{2!} = 60$. Gọi B_2 là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau. Ta có

$n(B_2) = \frac{5!}{2!} = 60$. Khi đó, $B_1 \cap B_2$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số

xuất hiện 1 lần, và các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau, đồng thời các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau. Ta có $n(B_1 \cap B_2) = 4! = 24$. Tập $B_1 \cup B_2$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau hoặc các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau. Lúc này

$$\begin{aligned} n(B_1 \cup B_2) &= n(B_1) + n(B_2) - n(B_1 \cap B_2) \\ &= 60 + 60 - 24 = 96. \end{aligned}$$

Ta thấy $(B_1 \cup B_2) \subset A$ nên

$$n(A \setminus (B_1 \cup B_2)) = n(A) - n(B_1 \cup B_2) = 180 - 96 = 84.$$

Tập $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau. Vậy số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau là $n(A \setminus (B_1 \cup B_2)) = 84$ số.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Trần Cẩm Tú*, 8B, THCS Trần Phú, H. Nông Công, **Thanh Hóa** phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THUỘC TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ KHÔNG?



Bài toán. Tìm nghiệm của phương trình

$$3^x \cdot 4^{\frac{x^2+2}{3}} = 144 \text{ thuộc tập xác định của hàm số } y = \lg(x^2 - 10x).$$

Một học sinh đã giải bài toán như sau:

Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \lg(x^2 - 10x)$. Ta có:

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 - 10x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 10 \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 46)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VĨNH THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư ký Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập: CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Vũ Hữu Chín – Nhìn nhận phép quay để vẽ thêm hình trong giải toán hình học lớp 7.

11 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi cấp thành phố lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2021 - 2022.

14 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, năm học 2022 - 2023.

15 Phương pháp giải toán

Phạm Ngọc Châu – Nghiệm phức của đa thức.

20 Đề ra kỳ này

T1/541, ..., T12/541, L1/541, L2/541.

Problem in This Issue

23 Giải bài kỳ trước

T1/537, ..., T12/537, L1/537, L2/537.

Solutions to Previous Problems

32 Diễn đàn dạy học toán

Nguyễn Thị Tâm – Tìm số hạng tổng quát của dãy số (dạng đa thức) khi biết một số số hạng đầu tiên.

37 Lịch sử toán học

Nguyễn Việt Hải – Xung quanh bài toán Goldbach.

43 Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 82.

Bài dịch số 80.

44 Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 61. Đề bài toán 63.

46 Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 70. Đề bài toán 72.

47 Sai lầm ở đâu?

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

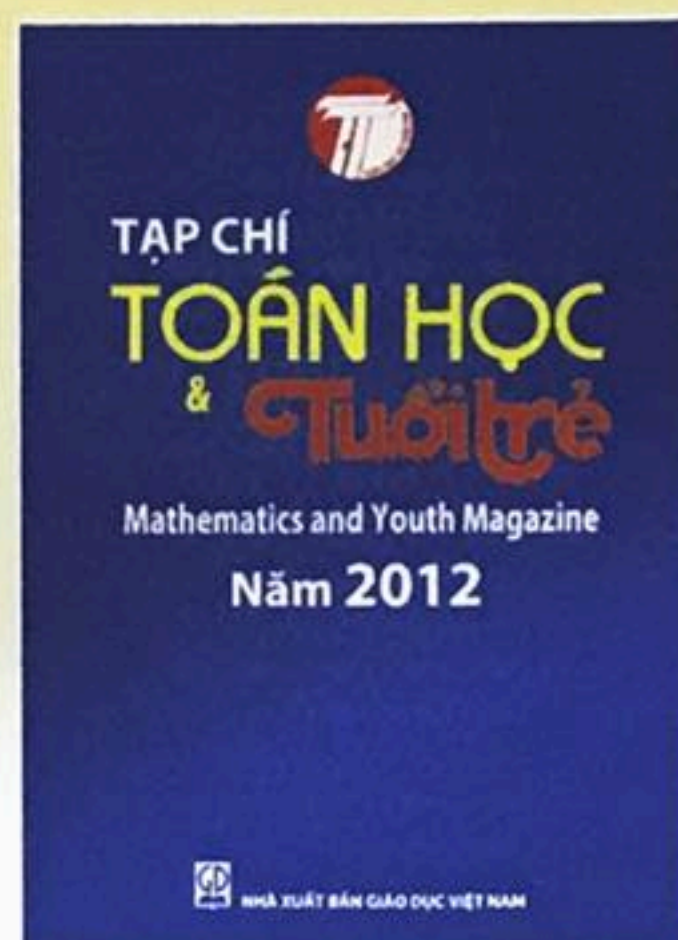
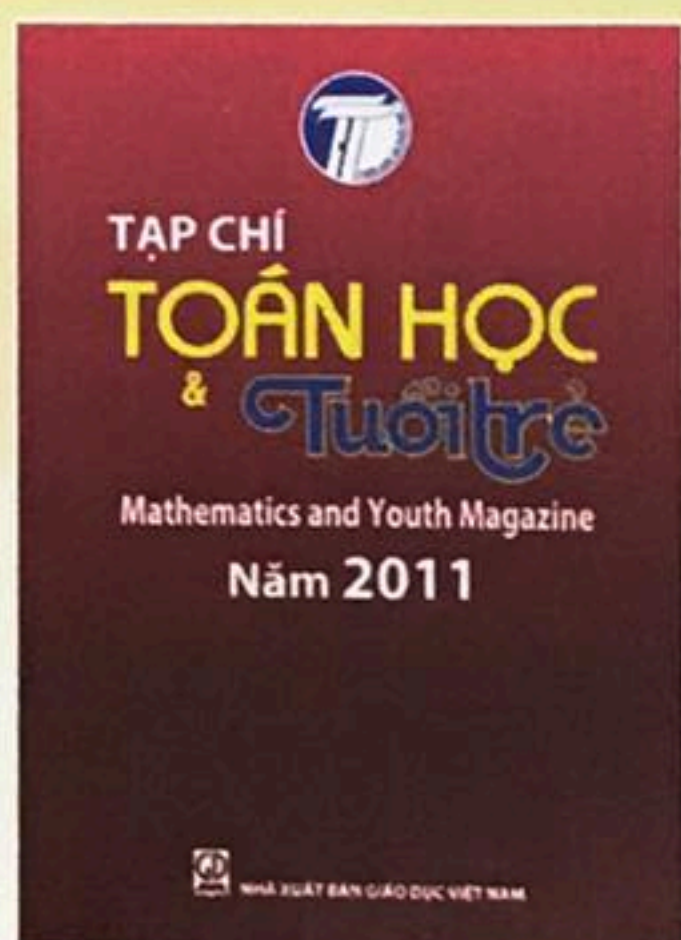
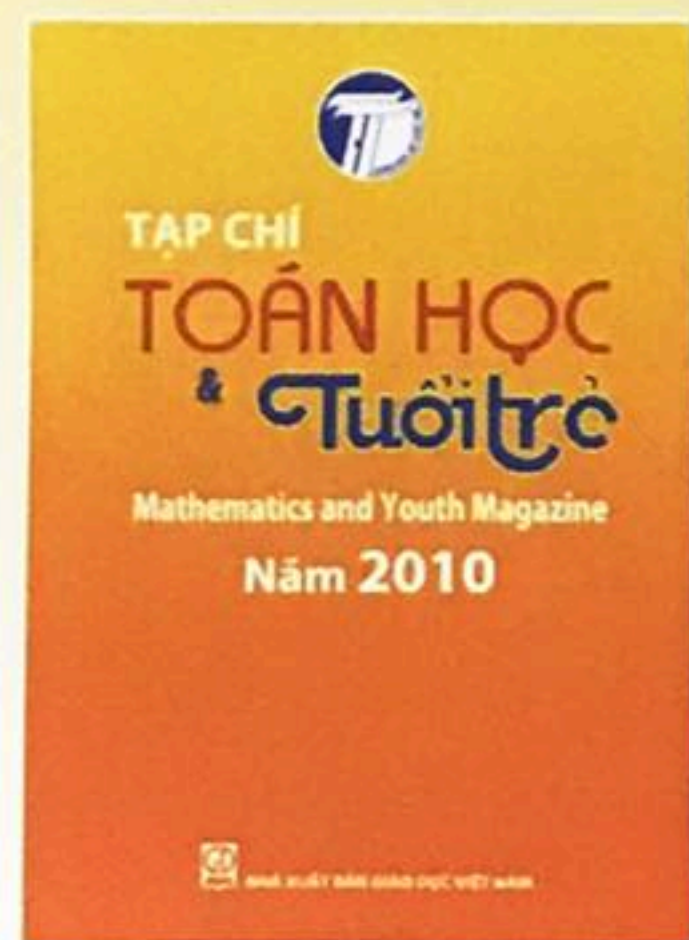


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020

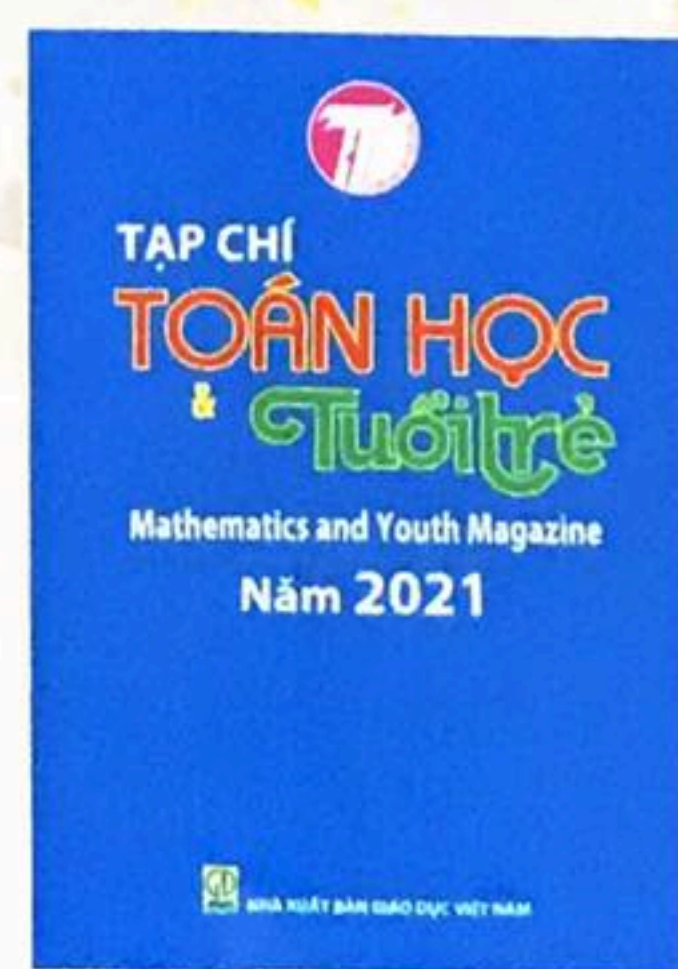
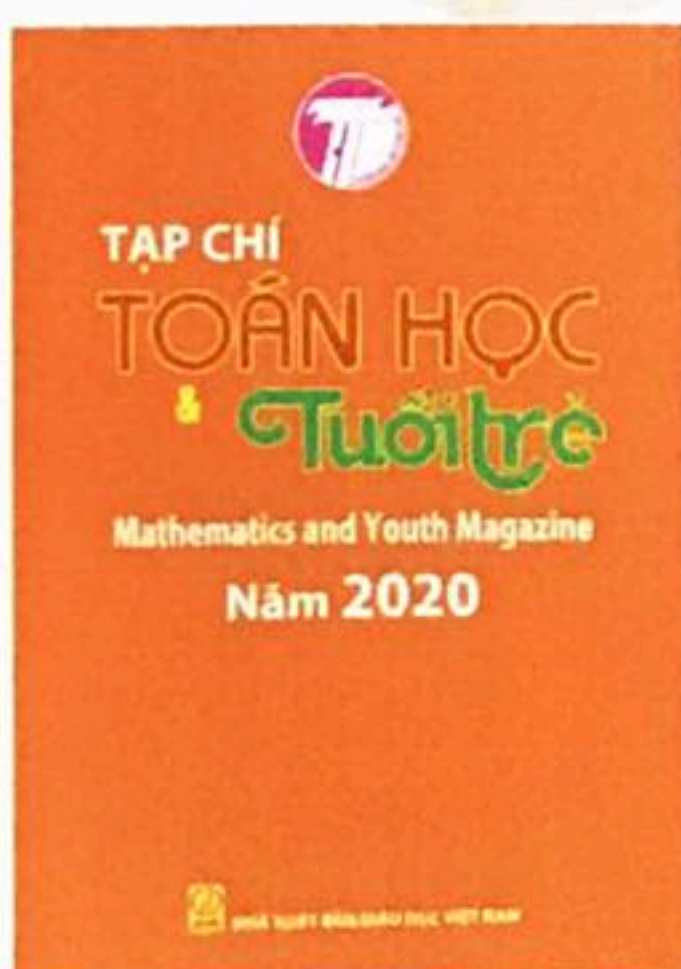
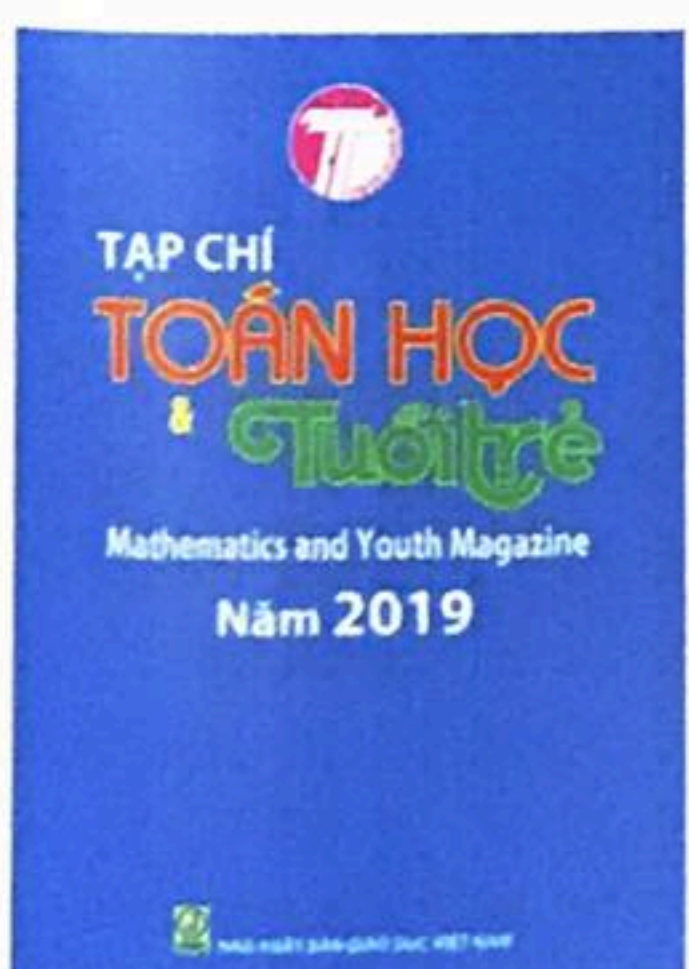
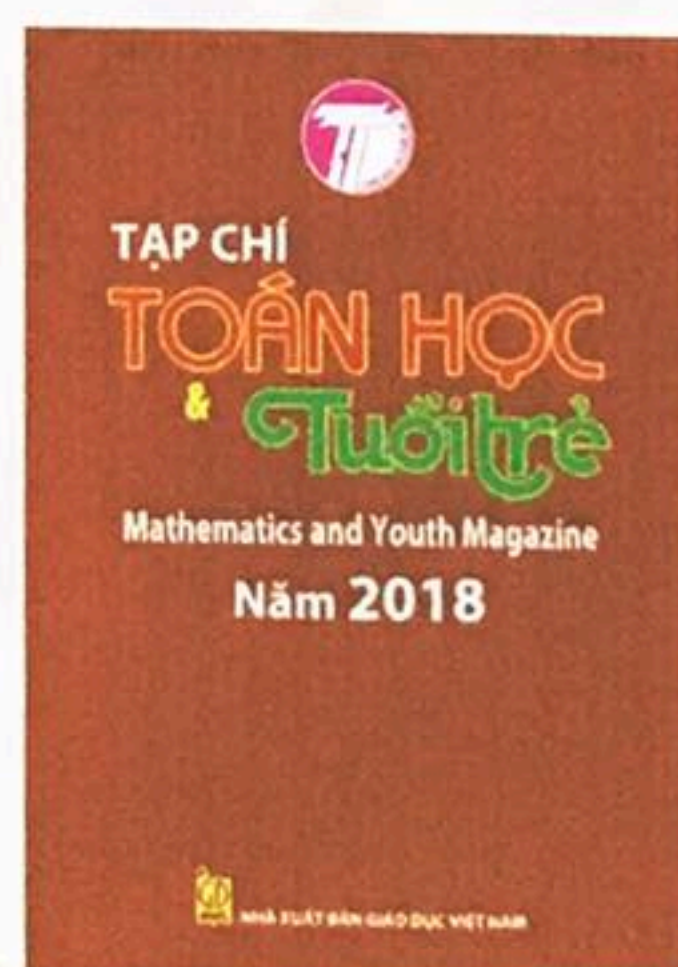
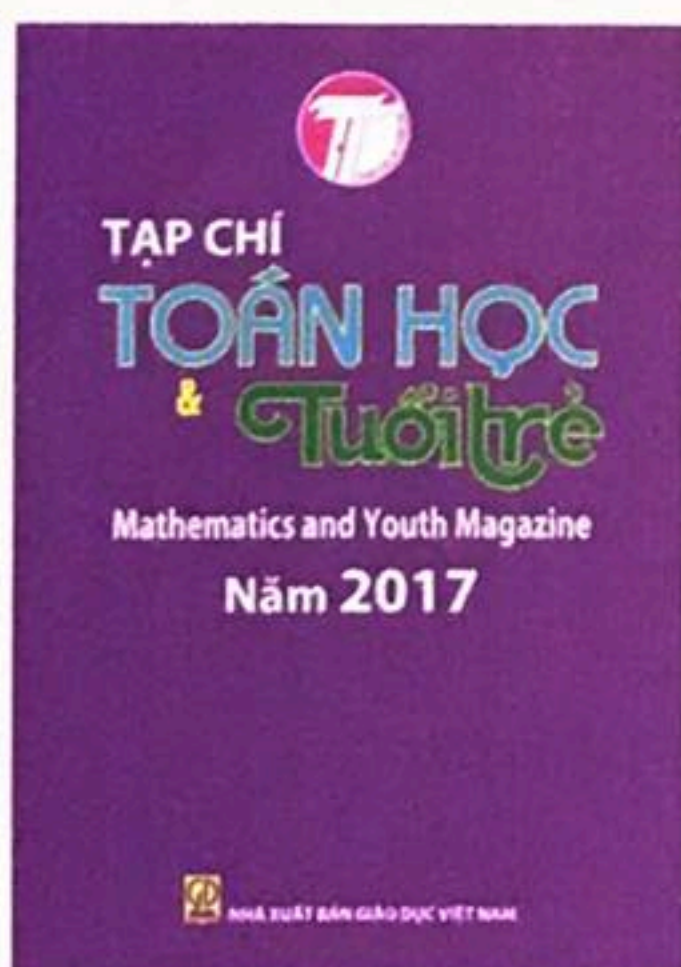
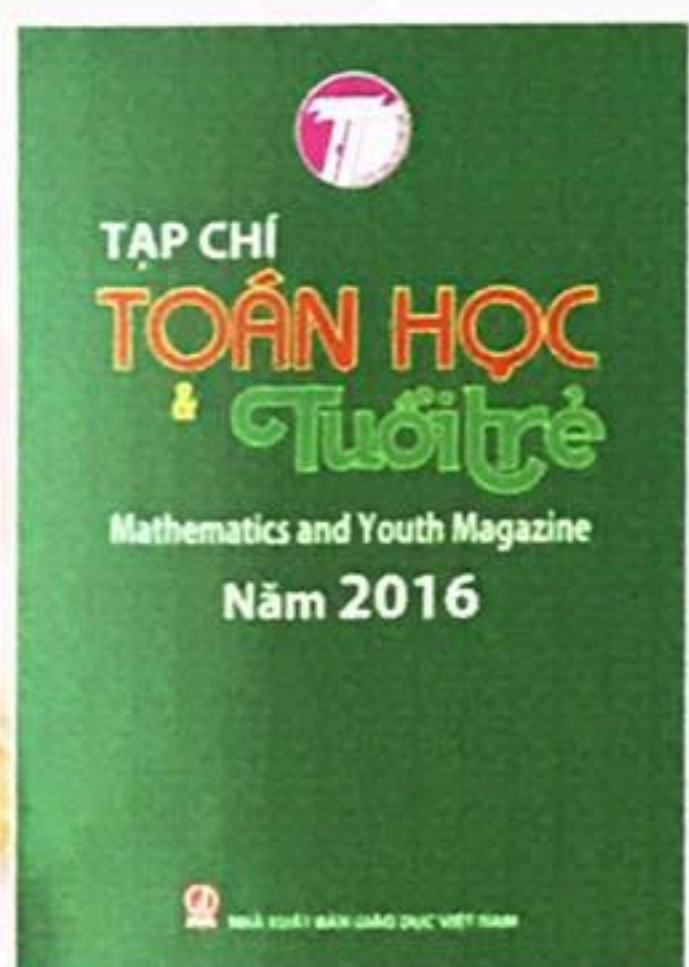
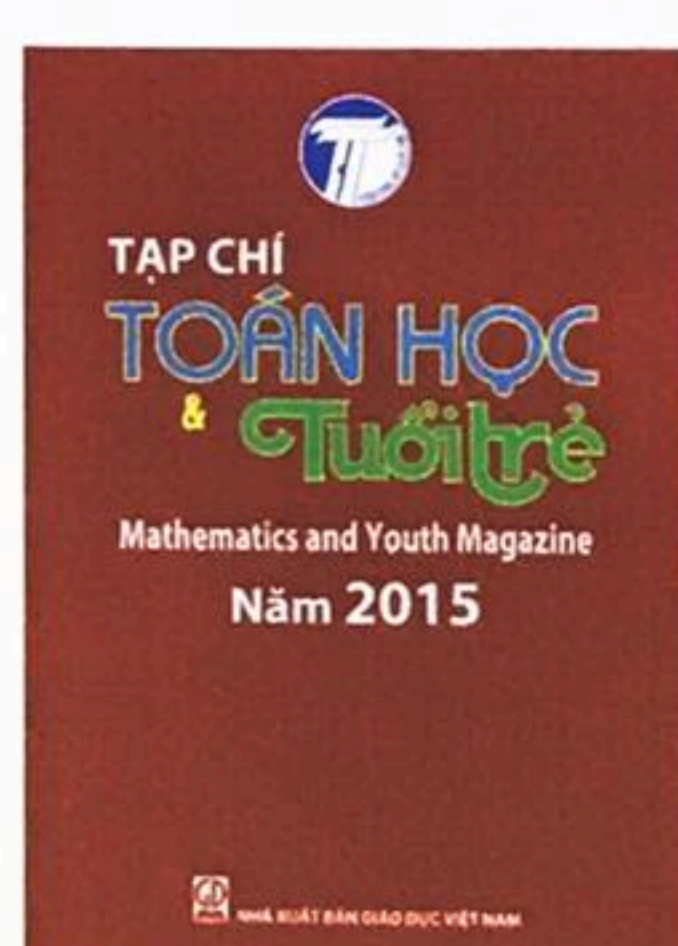
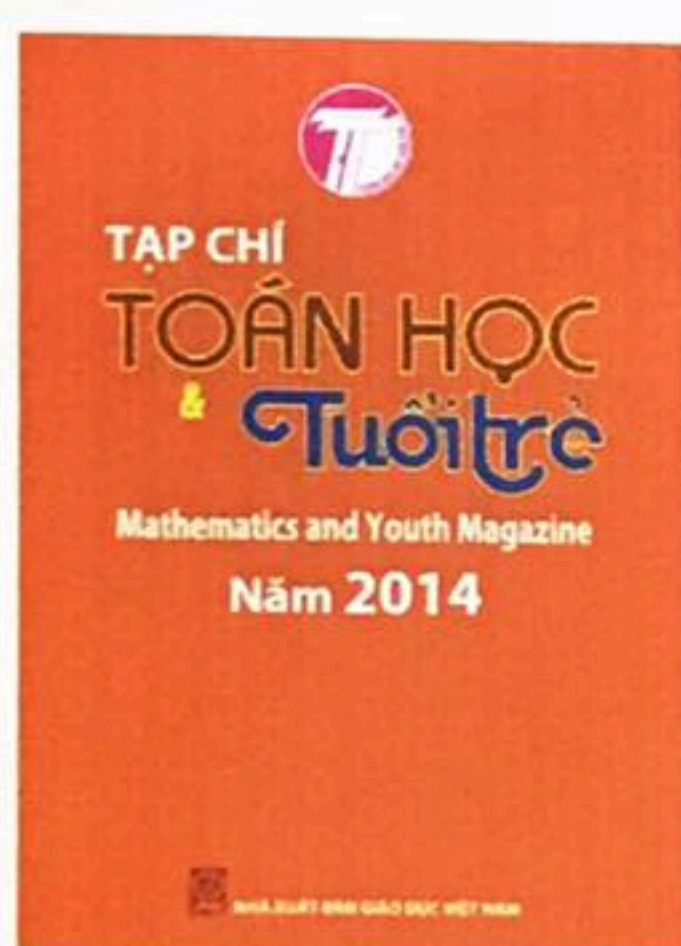
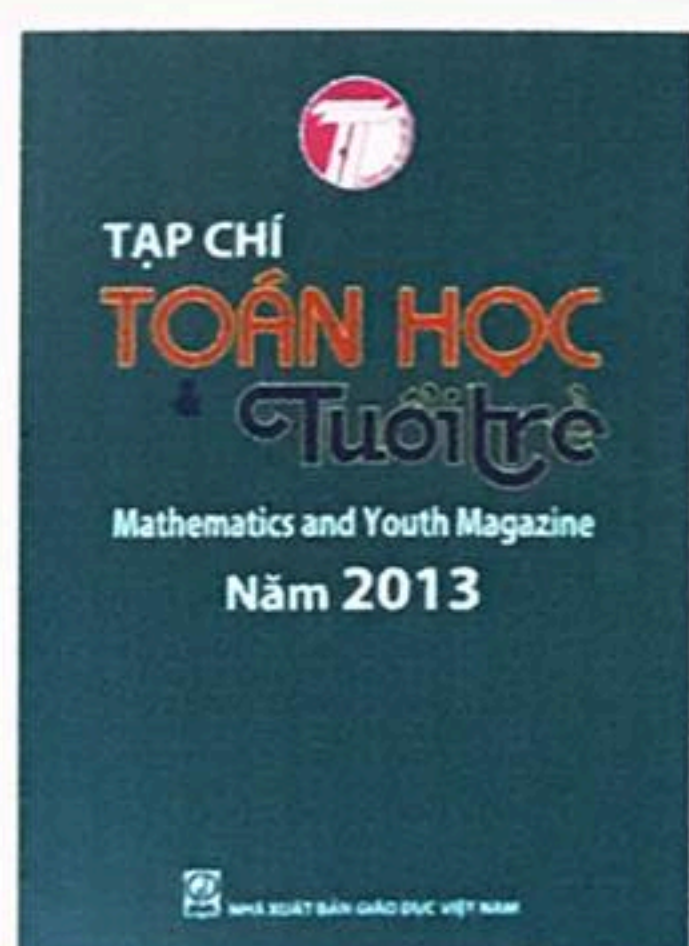
Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 240.000 đồng



Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội

• Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607

• Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

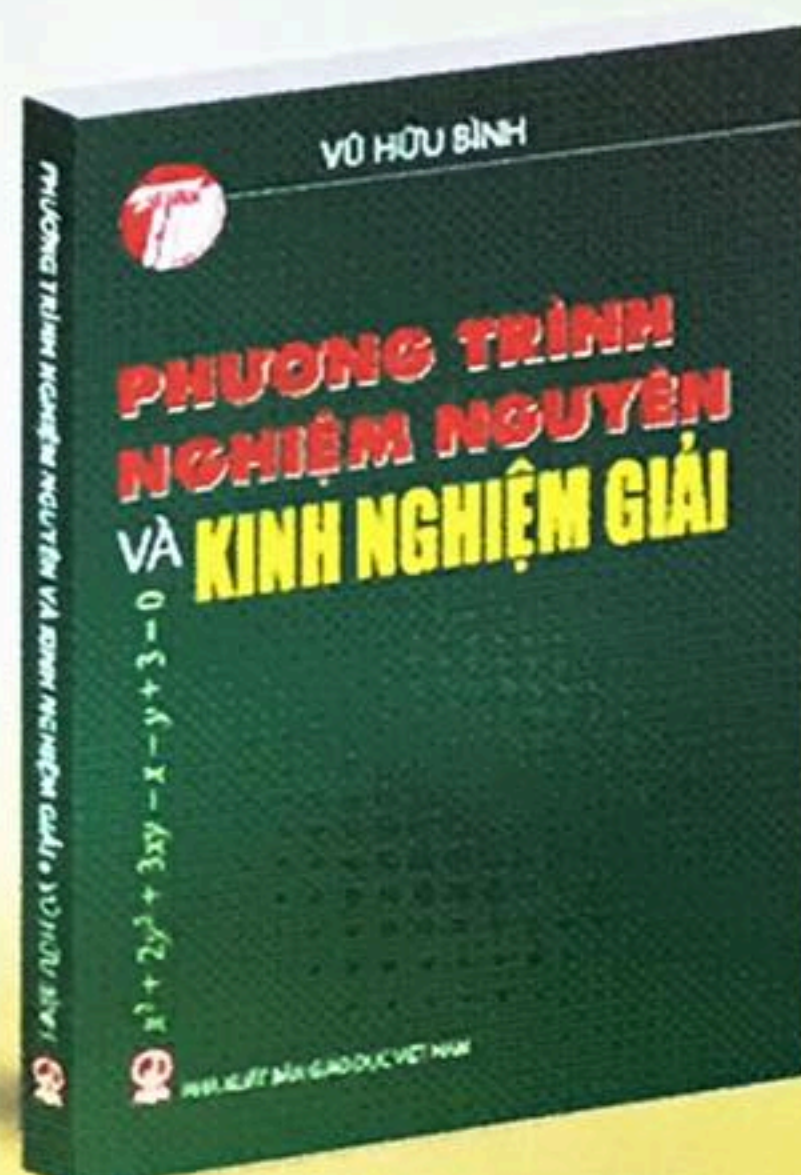
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Quyển sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài

toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách “đưa

khó về dễ, đưa lạ về quen”, cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND Vũ Hữu Bình sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA SẢN PHẨM TRÊN TẠI:
TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT7M22

In tại: Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2022

Giá: 18.000 đồng

Mười tám nghìn đồng

<https://tieulun.hopto.org>