



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 540
Tháng 6 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghienCUSACHGD.com



Nhà Toán học Đức
Heinrich Eduard Heine
(1821-1881)



Berlin (Đức)



<https://tieulun.hopto.org>

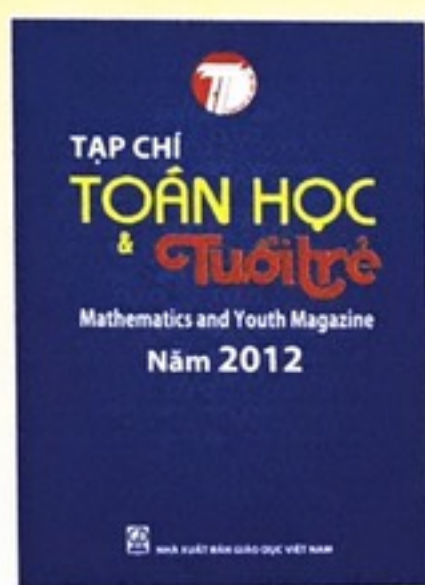
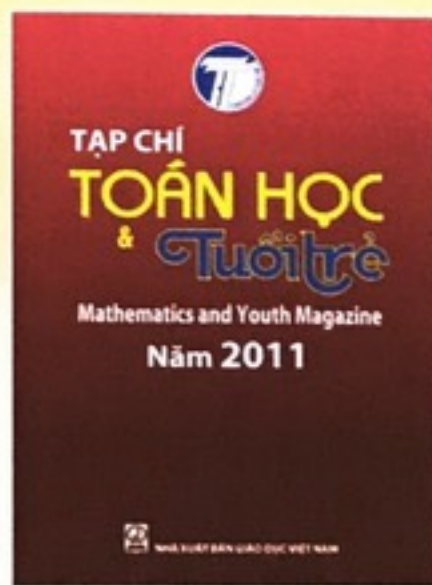
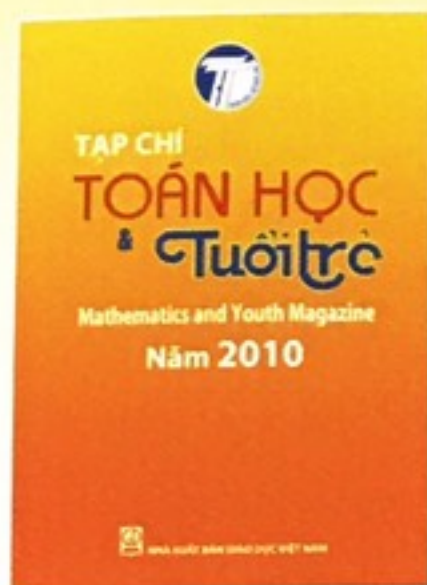


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020

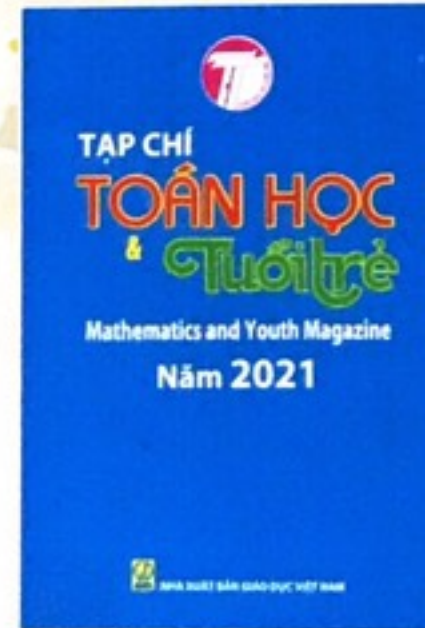
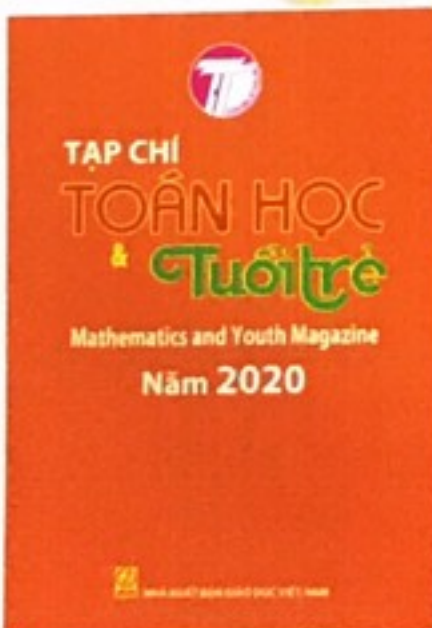
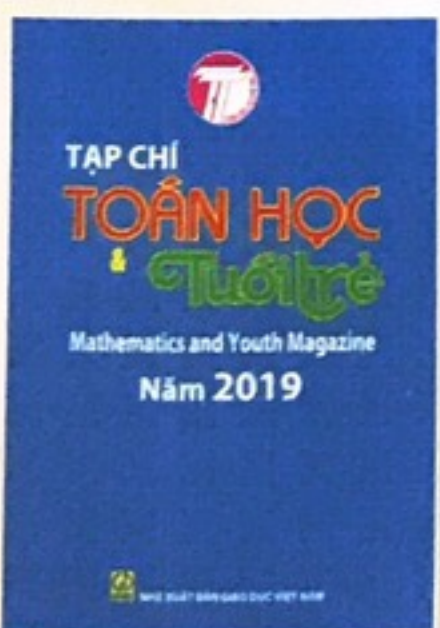
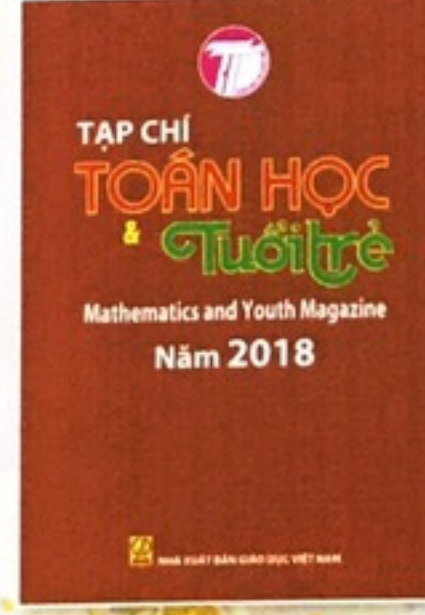
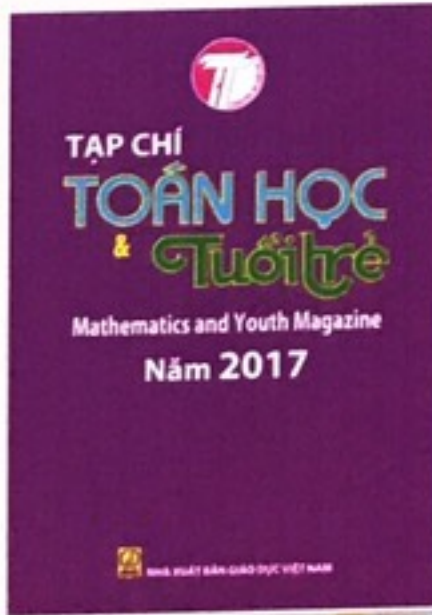
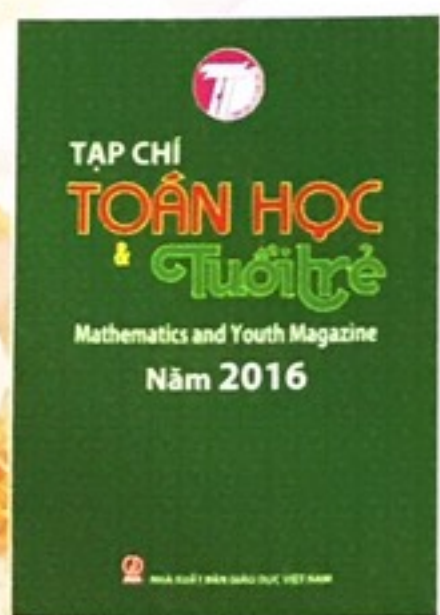
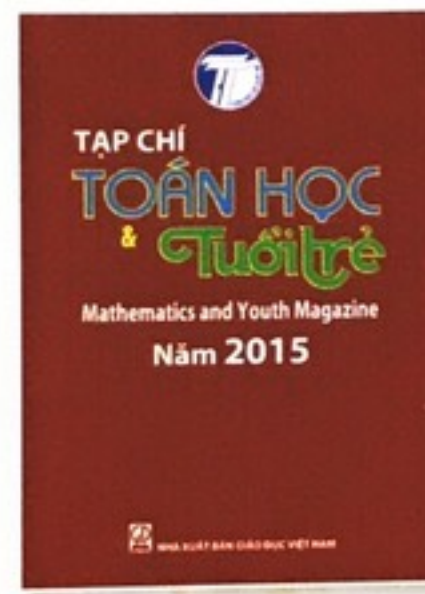
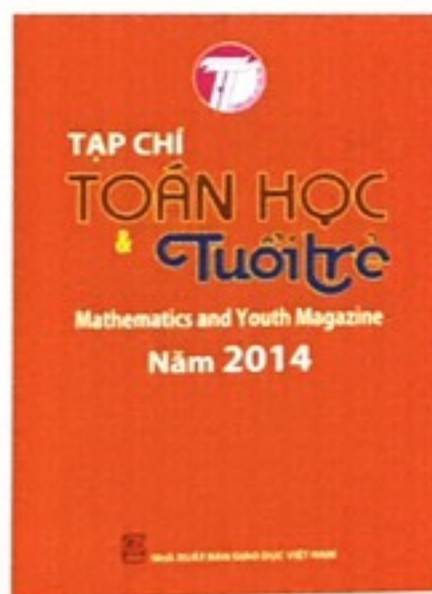
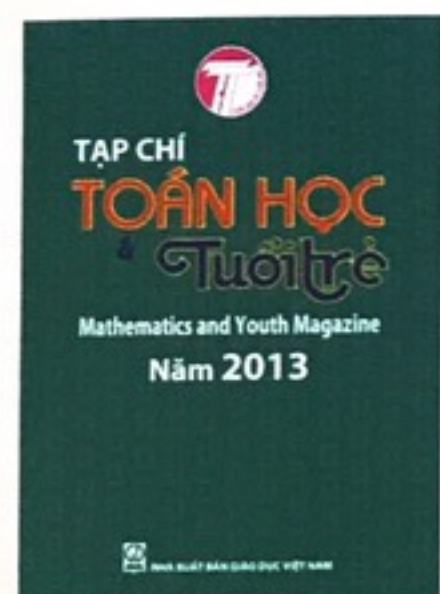
Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 240.000 đồng



Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội

• Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607

• Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

<https://tieulun.hopto.org>



TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU TRONG MỘT ĐƯỜNG TRÒN

NGUYỄN ANH TUẤN

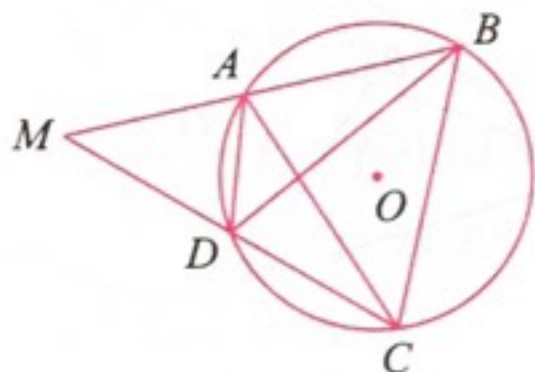
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Trong quá trình giải toán, nếu biết vận dụng một số tính chất cơ bản sẽ giúp cho người học có một định hướng rõ ràng hơn. Bài viết này tôi muốn giới thiệu với bạn đọc một số tính chất của hai cát tuyến cắt nhau trong một đường tròn.

I. TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến MAB và MCD với đường tròn. Khi đó $\frac{MD}{MC} = \frac{DA \cdot DB}{CA \cdot CB}$.

Chứng minh.



Ta có: $\triangle MBD \sim \triangle MCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{DB}{CA}$;

$\triangle MAD \sim \triangle MCB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{CB}$.

Do đó: $\frac{MD}{MA} \cdot \frac{MA}{MC} = \frac{DB}{CB} \cdot \frac{DA}{CA}$ hay

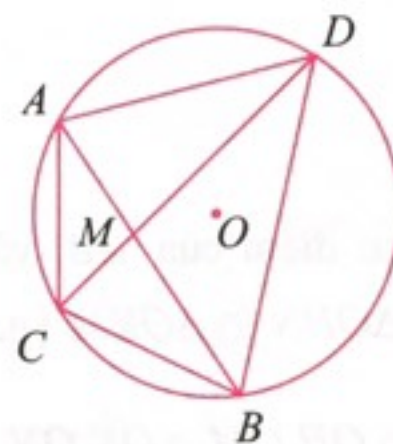
$$\frac{MD}{MC} = \frac{DA \cdot DB}{CB \cdot CA}.$$

Tính chất 2. Từ điểm M nằm bên trong đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến AMB và CMD với đường tròn. Khi đó $\frac{AM}{BM} = \frac{AD \cdot AC}{BC \cdot BD}$.

Chứng minh. Ta có:

$$\triangle MBD \sim \triangle MCA$$

$$\triangle MAD \sim \triangle MCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{BC}.$$

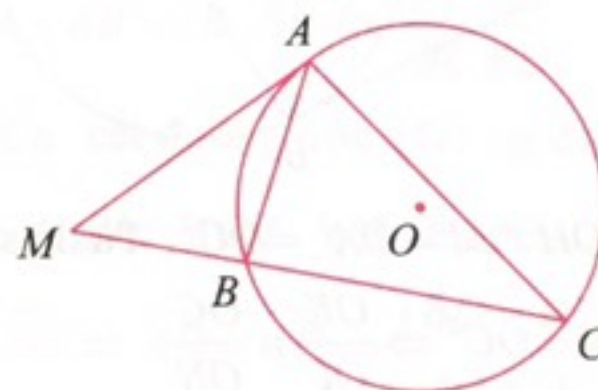


$$\text{Suy ra: } \frac{AM}{DM} \cdot \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{AC}{DB}$$

$$\text{hay } \frac{MA}{MB} = \frac{AD \cdot AC}{BC \cdot BD}.$$

Tính chất 3. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC với đường tròn. Khi đó $\frac{MB}{MC} = \frac{BA^2}{CA^2}$.

Chứng minh.



Ta có: $\triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} = \frac{BA}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} \cdot \frac{MA}{MA} = \left(\frac{BA}{CA} \right)^2$$

$$\text{hay } \frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{CA} \right)^2.$$

II. VẬN DỤNG

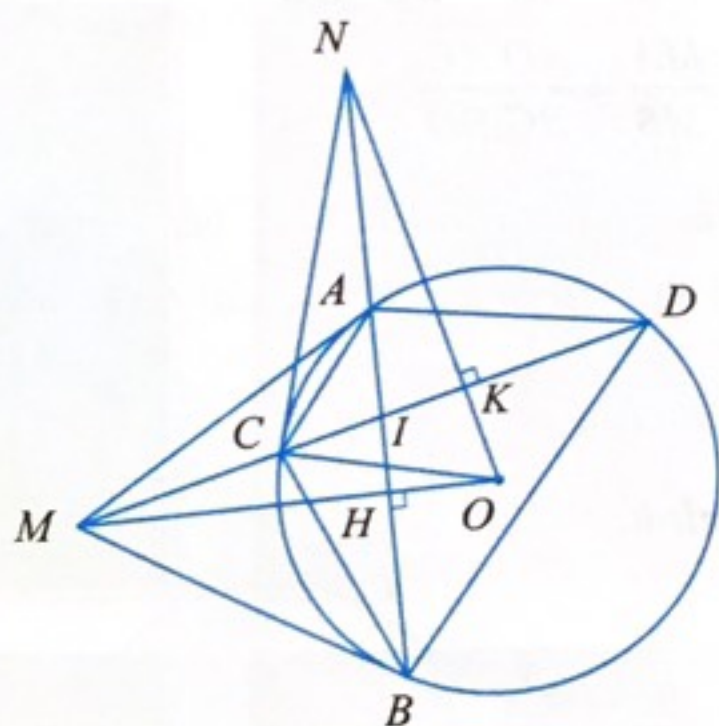
Bài 1. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm, MC nằm giữa hai tia MA, MO và $MC < MD$). Gọi K là trung điểm của CD , tia OK cắt đường thẳng AB tại N .

- a) Chứng minh rằng NC là tiếp tuyến của (O) .
b) Gọi I là giao điểm của AB và CD , chứng minh rằng $\frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB}$.

Lời giải.

- a) Gọi H là giao điểm của AB và OM , ta có $OM \perp AB$ nên $\triangle OHN \sim \triangle OKM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{ON}{OM} \Rightarrow OH \cdot OM = OK \cdot ON.$$



Mặt khác: $OH \cdot OM = OA^2 = OC^2$. Từ đó suy ra:

$$OK \cdot ON = OC^2 \Rightarrow \frac{OK}{OC} = \frac{OC}{ON}$$

$$\Rightarrow \triangle KOC \sim \triangle CON \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{OKC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow OC \perp NC$, nên NC là tiếp tuyến của (O) .

$$\text{b) Ta có } \triangle MCA \sim \triangle MAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{MC}{MA}.$$

Tương tự: $\frac{BC}{BD} = \frac{MC}{MB}$. Từ đó ta có:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} \text{ (1) (do } MA = MB \text{)}.$$

Xét đường tròn (O) có hai cát tuyến AB và CD cắt nhau tại I nên theo tính chất 2 ta có:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} \text{ (2).}$$

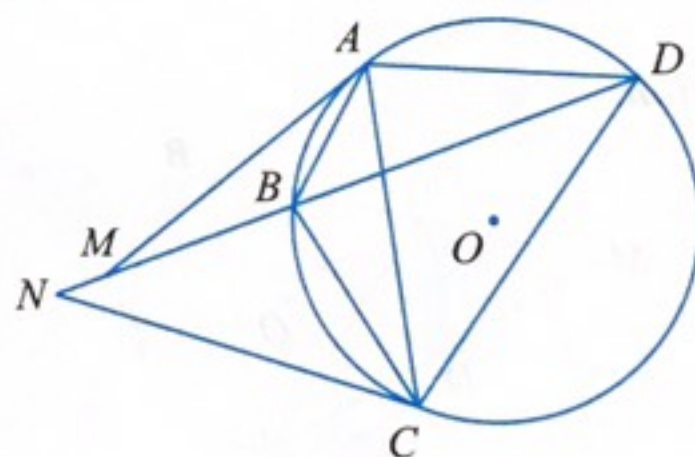
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{IA}{IB} = \frac{AC^2}{BC^2} \text{ (3).}$$

Xét đường tròn (O) có cát tuyến NAB và tiếp tuyến NC cắt nhau tại N nên theo tính chất 1 ta

$$\text{có } \frac{NA}{NB} = \frac{AC^2}{BC^2} \text{ (4). Từ (3) và (4) suy ra } \frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB}.$$

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng nếu $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ thì các tiếp tuyến của đường tròn (O) ở A và C cắt nhau tại một điểm (nếu có) nằm trên đường thẳng BD .

Lời giải.



Gọi M là giao điểm của BD với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A ; N là giao điểm của BD với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm C . Xét đường tròn (O) có tiếp tuyến AM và cát tuyến BD cắt nhau tại M nên theo tính chất 3 ta

$$\text{có: } \frac{MB}{MD} = \frac{BA^2}{DA^2} \text{ (1). Tương tự } \frac{NB}{ND} = \frac{CB^2}{CD^2} \text{ (2).}$$

Mặt khác: $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ (gt), suy ra:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{BC^2}{CD^2} \text{ (3).}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

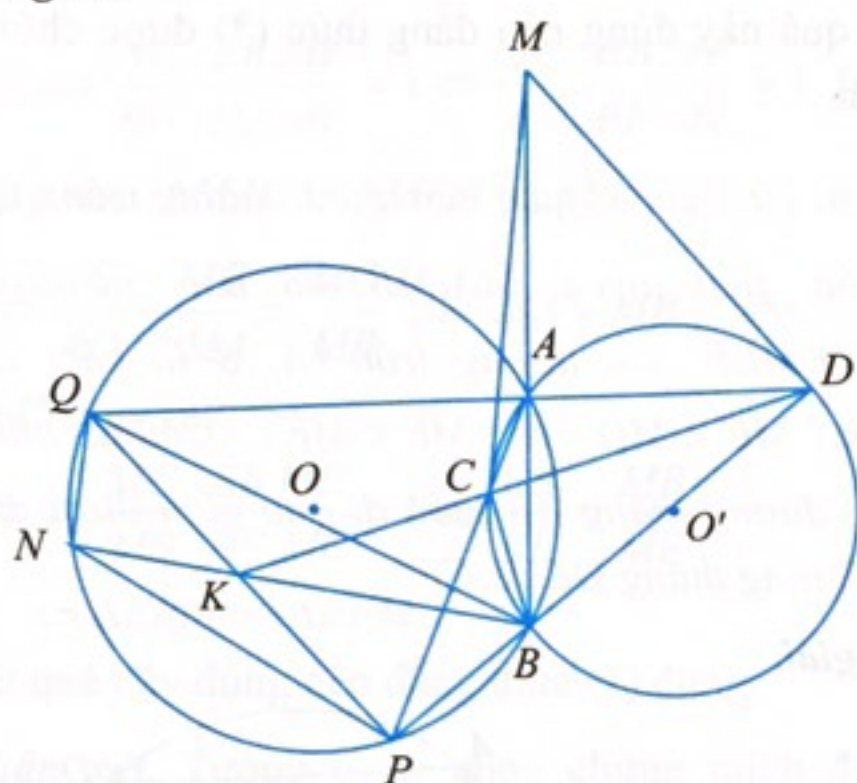
$$\frac{MB}{MD} = \frac{NB}{ND} \Rightarrow \frac{MB}{MD - MB} = \frac{NB}{ND - NB}$$

$$\text{hay } \frac{MB}{BD} = \frac{NB}{BD} \Rightarrow MB = NB \Rightarrow M \equiv N.$$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Trên tia đối của tia AB lấy M khác A . Qua M vẽ các tiếp tuyến MC, MD với (O') (C, D là các tiếp điểm và C nằm ngoài đường tròn (O)). Đường thẳng AC cắt (O) tại P khác A , đường thẳng AD cắt (O) tại Q khác A . Gọi K là giao điểm của CD và PQ . Chứng minh rằng $KP = KQ$.

Lời giải.



Kéo dài BK cắt đường tròn (O) tại N . Xét đường tròn (O) có hai cát tuyến PQ và BN cắt nhau tại K nên theo tính chất 2 ta có:

$$\frac{KQ}{KP} = \frac{QN \cdot QB}{PN \cdot PB} \quad (1).$$

Ta có $\widehat{BDK} = \widehat{BAP} = \widehat{BQP}$ nên tứ giác $BKQD$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{QBK} = \widehat{QPN}$.

Tứ giác $QNPA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PNQ} = \widehat{DAC}$.

$$\text{Do đó } \triangle PNQ \sim \triangle DAC \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{QN}{PN} = \frac{AC}{AD} \quad (2).$$

Các tứ giác $AQPB$, $BKQD$ nội tiếp

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BQP} = \widehat{BDC} \\ \widehat{QPB} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle QPB \sim \triangle DCB \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{QB}{PB} = \frac{DB}{CB} \quad (3).$$

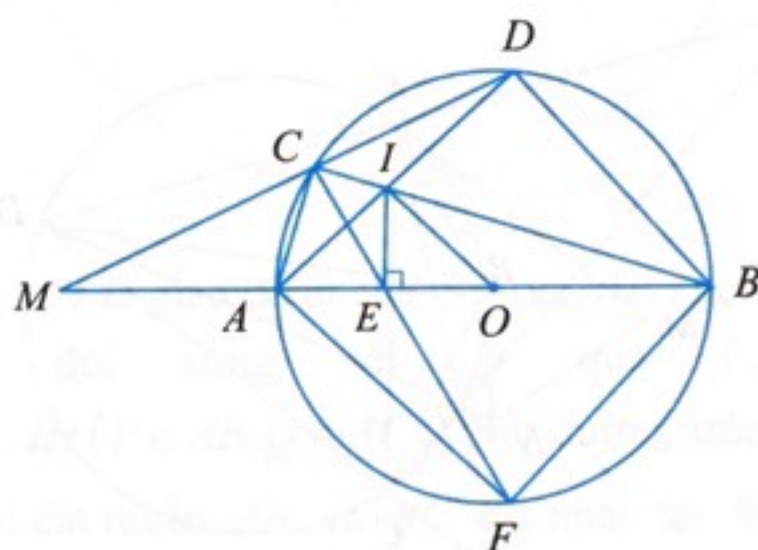
$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra: } \frac{KQ}{KP} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{DB}{CB} \quad (4).$$

Mặt khác: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \quad (5)$ (chứng minh tương tự như bài 1). Từ (4) và (5) suy ra:

$$\frac{KQ}{KP} = 1 \Rightarrow KQ = KP.$$

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . M là điểm đối xứng của O qua A . Đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn (O) tại C và D (C nằm giữa M và D). AD cắt BC tại I . Chứng minh rằng $\triangle IOA$ cân.

Lời giải.



Kẻ $IE \perp AB$ ($E \in AB$), xét đường tròn (O) có hai cát tuyến CD và AB cắt nhau tại M nên theo tính chất 1 ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD}$.

Theo đề bài ta có $MA = AO = R$ và $MB = MA + AB = 3R$. Suy ra $\frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} = \frac{1}{3} \quad (1).$

Kéo dài CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Vì tứ giác $ACIE$ nội tiếp nên $\widehat{ICE} = \widehat{IAE} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DF} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AF} \Rightarrow \begin{cases} BD = BF \\ AD = AF \end{cases} \quad (2).$

Xét đường tròn (O) có hai cát tuyến CF và AB cắt nhau tại E nên theo tính chất 2 ta có:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC \cdot AF}{BC \cdot BF} \quad (3).$$

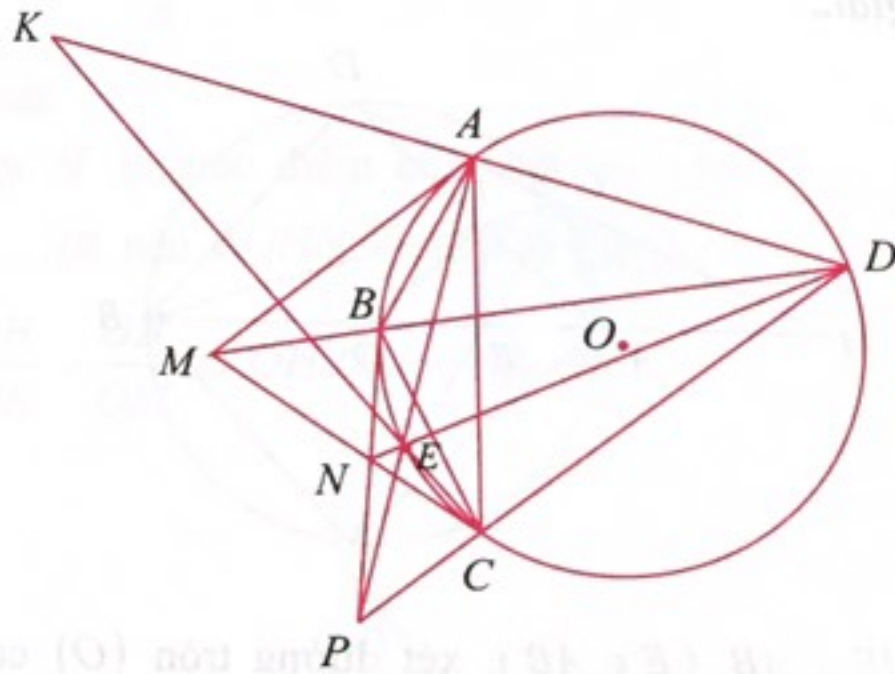
Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, kết hợp với

$$AE + EB = 2R \text{ ta có: } AE = \frac{R}{2} \Rightarrow AE = EO.$$

Xét $\triangle IAO$ có $IE \perp AB$ và $AE = EO$ nên $\triangle IAO$ cân tại I .

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , điểm M nằm trên tia đối của tia BD sao cho MA, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt MC tại N và cắt CD tại P , ND cắt đường tròn (O) tại E . Chứng minh ba điểm A, P, E thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi K là giao điểm của CE và AD , ta chứng minh ba điểm A, E, P thẳng hàng bằng cách áp dụng định lý Menelaus đảo vào tam giác CKD . Tức là cần chứng minh:

$$\frac{CP}{DP} \cdot \frac{DA}{KA} \cdot \frac{KE}{CE} = 1 \quad (*)$$

Xét đường tròn (O) có tiếp tuyến PB và cát tuyến CD cắt nhau tại P nên theo tính chất 3 ta có: $\frac{CP}{DP} = \frac{CB^2}{DB^2}$ (1).

Ta có $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ (chứng minh tương tự như bài 1) $\Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot BC$ (2).

Mặt khác tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên theo định lý Ptolemy ta có:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$AD \cdot BC = \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{2AD} \quad (4).$$

$$\text{Tương tự: } CE \cdot BD = \frac{BC \cdot DE}{2} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{2CE}{DE} \quad (5).$$

Từ (1), (4) và (5) ta có:

$$\frac{CP}{DP} = \frac{AC}{2AD} \cdot \frac{2CE}{DE} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{CE}{DE}.$$

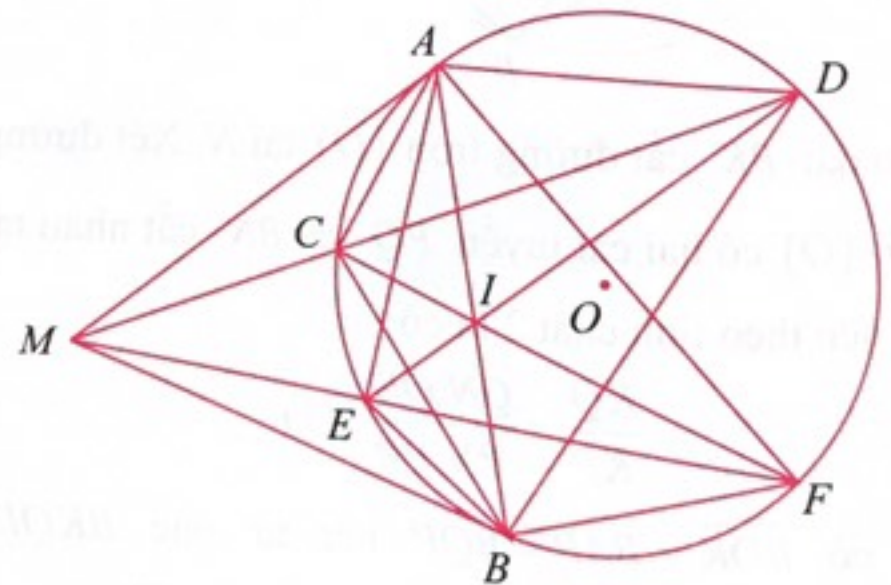
$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} \cdot \frac{CE}{DE} \cdot \frac{DA}{KA} \cdot \frac{KE}{CE} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{KA} \cdot \frac{KE}{DE} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{KA} = \frac{DE}{KE} \Leftrightarrow \triangle CAK \sim \triangle DEA.$$

Kết quả này đúng nên đẳng thức $(*)$ được chứng minh.

Bài 6. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB và hai cát tuyến MCD, MEF với đường tròn (A, B là các tiếp điểm, $MC < MD$ và $ME < MF$). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua giao điểm của hai đường thẳng DE và CF .

Lời giải.



Gọi giao điểm của DE và AB là I . Ta sẽ chứng minh ba điểm C, I, F thẳng hàng bằng cách sử dụng định lý Menelaus đảo vào tam giác MED . Tức là cần chứng minh:

$$\frac{EI}{DI} \cdot \frac{DC}{MC} \cdot \frac{MF}{EF} = 1 \quad (1).$$

Xét đường tròn (O) có hai cát tuyến AB và DE cắt nhau tại I nên theo tính chất 2 ta có:

$$\frac{EI}{DI} = \frac{EA \cdot EB}{DA \cdot DB}.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \frac{EA \cdot EB}{DA \cdot DB} \cdot \frac{DC}{MC} \cdot \frac{MF}{EF} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{EF} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{EB \cdot MF}{DA \cdot MC} = 1 \quad (2).$$

Chứng minh tương tự như bài 5 ta có:

$$\begin{cases} AE \cdot BF = \frac{AB \cdot EF}{2} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{2BF} \\ BD \cdot AC = \frac{AB \cdot CD}{2} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{2AC}{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EF} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BF} \quad (3).$$

Từ (3) suy ra:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{AC}{BF} \cdot \frac{EB \cdot MF}{DA \cdot MC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} \cdot \frac{EB \cdot MF}{BF \cdot MC} = 1 \quad (4).$$

Mặt khác: $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MC}{MB} \quad (\text{do } MA = MB) \quad (5).$$

Từ (5) suy ra:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} \cdot \frac{EB \cdot MF}{BF \cdot MC} = 1 \Leftrightarrow \frac{EB}{BF} = \frac{MB}{MF}$$

$$\Leftrightarrow \triangle EBM \sim \triangle BFM.$$

Kết quả này đúng nên đẳng thức (1) đúng.

Nhận xét. Tương tự ta cũng chứng minh được đường thẳng AB luôn đi qua giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng CE và DF .

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) , D là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC . Đường thẳng qua I vuông góc với IA cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Đường thẳng KD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai R . Chứng minh rằng:

a) $\frac{KB}{KC} = \left(\frac{BI}{CI}\right)^2$;

b) RA đi qua trung điểm của BC .

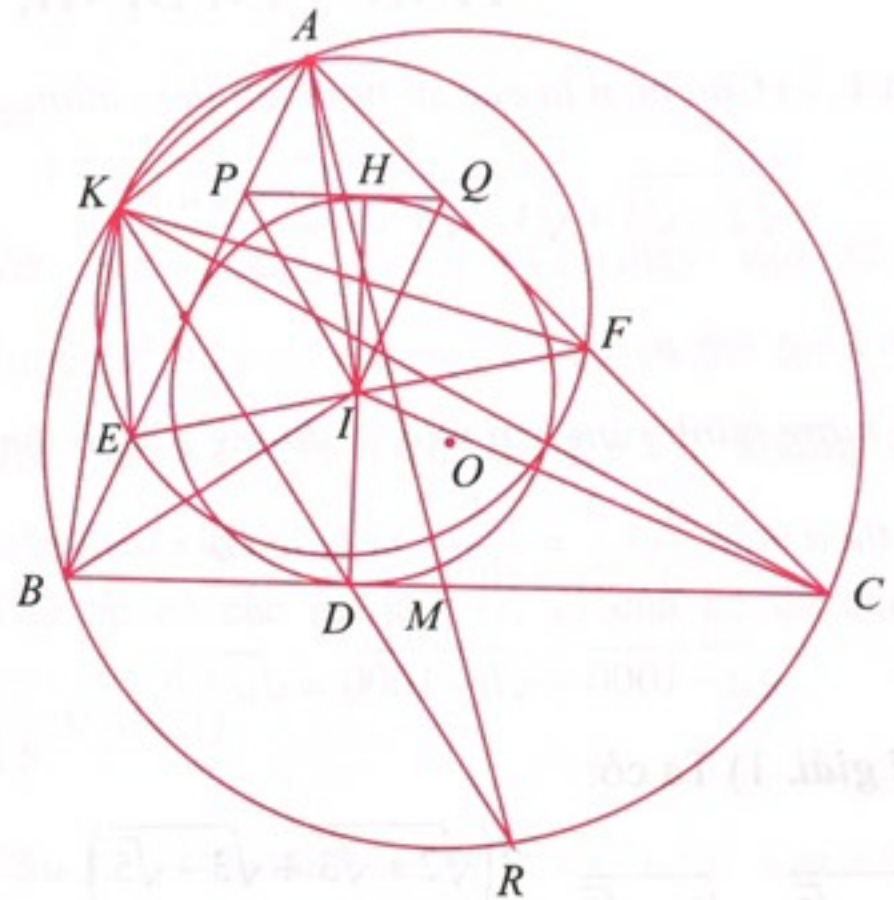
Lời giải. a) $\triangle BEK \sim \triangle CFK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{BE}{CF}$ (1);

$$\triangle BEI \sim \triangle BIC; \triangle BIC \sim \triangle IFC$$

$$\Rightarrow \triangle BEI \sim \triangle IFC \Rightarrow \frac{BE}{IF} = \frac{EI}{FC} = \frac{BI}{IC}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{IF} \cdot \frac{EI}{FC} = \left(\frac{BI}{IC}\right)^2 \quad \text{Hay} \quad \frac{BE}{FC} = \left(\frac{BI}{IC}\right)^2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{KB}{KC} = \left(\frac{BI}{CI}\right)^2 \quad (3).$



b) Gọi M là giao điểm của BC và AR , gọi H là điểm đối xứng với D qua I , kẻ $PQ \perp IH$ ($P \in AB, Q \in AC$). Xét đường tròn (O) có hai cát tuyến AR và BC cắt nhau tại M nên theo tính chất 2 ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BA \cdot BR}{CA \cdot CR} \quad (4).$$

Tương tự: $\frac{BD}{CD} = \frac{BK \cdot BR}{CK \cdot CR} \quad (5).$

Ta có: $\triangle BDI \sim \triangle BIP \Rightarrow \frac{BI}{BP} = \frac{BD}{BI}$
 $\Rightarrow BI^2 = BD \cdot BP$

Tương tự: $CI^2 = CQ \cdot CD.$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{BI}{CI}\right)^2 = \frac{BD \cdot BP}{CQ \cdot CD} \quad (6).$

Từ (3), (5) và (6) suy ra:

$$\frac{KB}{KC} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{BP}{CQ} = \frac{BK \cdot BR}{CK \cdot CR} \cdot \frac{BP}{CQ}$$

$$\Rightarrow \frac{BR}{CR} = \frac{CQ}{BP} \quad (7).$$

Từ (4) và (7) suy ra:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CQ}{BP} = 1 \quad (\text{vì } PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{CQ})$$

$$\Rightarrow BM = CM.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9, TỈNH NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2021 – 2022

Câu 1. 1) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{2}.$$

Tính tổng $m+n$.

2) Chứng minh rằng với mọi số dương a và b thay

đổi thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{1000}$ ta luôn có

$$\sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} = \sqrt{a+b}.$$

Lời giải. 1) Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} &= \frac{2(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{12-4\sqrt{5}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{10}-\sqrt{2})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta có $m=6, n=10$ hoặc $m=10, n=6$ nên $m+n=16$.

Chú thích thêm: Xét $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

Bình phương hai vế được:

$$\sqrt{mn} - \sqrt{60} = \frac{16-m-n}{2} \Leftrightarrow \sqrt{60}(\sqrt{k}-1) = \frac{16-m-n}{2} \quad (*)$$

với $mn = k.60, k \in \mathbb{Q}$.

+ Nếu $\sqrt{k} = a \in \mathbb{Q}, a \neq 1; (*) \Leftrightarrow \sqrt{60} = \frac{16-m-n}{2(a-1)} \in \mathbb{Q}$

điều này vô lý do $\sqrt{60}$ là số vô tỷ.

+ Nếu $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}; (*) \Leftrightarrow \sqrt{k}-1 = \frac{16-m-n}{2\sqrt{60}}$.

Bình phương được $\sqrt{k} = b \in \mathbb{Q}$ vô lý.

Vậy $k=1; (*) \Rightarrow m+n=16, mn=60$ nên

$$(m;n) = (6;10) \text{ và } (m;n) = (10;6).$$

2) Từ giả thiết ta có $1000 = \frac{ab}{a+b}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} &= \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b}. \end{aligned}$$

Câu 2. 1) Cho phương trình

$$(m + \sqrt{2x^2 + 4x + 3})(x^2 + 2x + m)(|x+1| - m - 1) = 0,$$

với m là tham số.

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{9(x-1)y} = y \left(2 + \sqrt{\frac{y}{x-1}} \right) & (1) \\ y^2 + xy - 5x + 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. 1) a) ĐK: $2x^2 + 4x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 1 \geq 0 \text{ thỏa mãn với mọi } x.$$

Khi đó, với $m = -1$ thay vào phương trình ta

$$\text{được: } (-1 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3})(x^2 + 2x - 1)(|x+1|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 4x + 3} - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \\ |x+1| = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } \sqrt{2x^2 + 4x + 3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Với } x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{Với } |x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = -1, x = -1 + \sqrt{2}, x = -1 - \sqrt{2}.$$

b) Ta có: phương trình tương đương với

$$\left[m + \sqrt{2(x+1)^2 + 1} \right] \left[(x+1)^2 + m - 1 \right] (|x+1| - m - 1) = 0.$$

$$\text{Đặt } t = |x+1|, t \geq 0$$

$$\Rightarrow (m + \sqrt{2t^2 + 1})(t^2 + m - 1)(t - m - 1) = 0 \quad (*).$$

Giả sử $t_0 > 0$ là một nghiệm của phương trình (*) khi đó phương trình $|x+1| = t_0$ có hai nghiệm phân biệt là $x = -1 + t_0, x = -1 - t_0$.

Còn $t_0 = 0$ là một nghiệm của phương trình (*) khi đó phương trình $|x+1| = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Từ đó nếu (*) có k nghiệm $t > 0$ phân biệt thì phương trình đã cho có $2k$ nghiệm phân biệt.

Do vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có nghiệm $t = 0$, thay vào ta được $m = -1, m = 1$. Thử lại: Các trường hợp đều thỏa mãn.

Vậy tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -1, m = 1$.

$$2) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 9(x-1)y \geq 0 \\ \frac{y}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó từ phương trình (1) ta có $y \geq 0, x > 1$.

TH1: Nếu $y = 0$ thì $x = \frac{7}{5}$ thỏa mãn hệ.

TH2: Nếu $y > 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y} \left(2 + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1) = \sqrt{y} (2\sqrt{x-1} + \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) = (x-1) + 2\sqrt{x-1}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y} \\ 2\sqrt{x-1} = -\sqrt{x-1} - \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{y} \\ 3\sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 0 \end{cases}$$

Với $\sqrt{x-1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y+1$ thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$.

Với $3\sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy tất cả các nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho là $\left(\frac{7}{5}; 0\right), (2; 1)$.

Câu 3. 1) Cho đa thức $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$

với a, b là các số hữu tỷ và thỏa mãn $P(1-\sqrt{3}) = 0$.

Tính giá trị của biểu thức

$$Q = 18P(3) + 3P(2) + (a-b+3)^{2022}.$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ thỏa mãn

$$(2m+5n+1)(2^m+n+m^2+m) = 105.$$

Lời giải. 3) Từ giả thiết ta có:

$$(1-\sqrt{3})^3 + 6(1-\sqrt{3})^2 + a(1-\sqrt{3}) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+18)\sqrt{3} = a+b+34.$$

$$\text{Nếu } a+18 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a+b+34}{a+18}.$$

Vì a, b là các số hữu tỷ nên $\frac{a+b+34}{a+18}$ là số hữu

tỷ mâu thuẫn với $\sqrt{3}$ là một số vô tỷ.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a+18=0 \\ a+b+34=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-18 \\ b=-16 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Vậy } P(x) = x^3 + 6x^2 - 18x - 16$$

$$\Rightarrow P(2) = -20, P(3) = 11 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$Q = 18.11 + 3.(-20) + (-18 + 16 + 3)^{2022} \\ = 198 - 60 + 1 = 139.$$

2) Ta có 105 là số lẻ nên từ phương trình suy ra $2m + 5n + 1$ lẻ $\Rightarrow 5n$ chẵn tức là n cũng chẵn.

Tương tự $2^m + n + m^2 + m = 2^m + n + m(m+1)$ lẻ, nhưng do $n, m(m+1)$ đều chẵn nên 2^m lẻ tức là $2^m = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi $m = 0$ thay vào phương trình ta được:

$$\begin{cases} n = 4 \\ n = -\frac{26}{5} \end{cases}$$

Vậy cặp số tự nhiên duy nhất thỏa mãn bài toán là $(m; n) = (0; 4)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có AH là đường cao. Lấy D là một điểm thuộc miền trong của tam giác AHC sao cho AH đi qua trung điểm của BD . Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của AH với đường thẳng CD và BD . Qua E kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn đường kính CD tại điểm M (A và M thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là CD). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn đường kính CD . Chứng minh rằng:

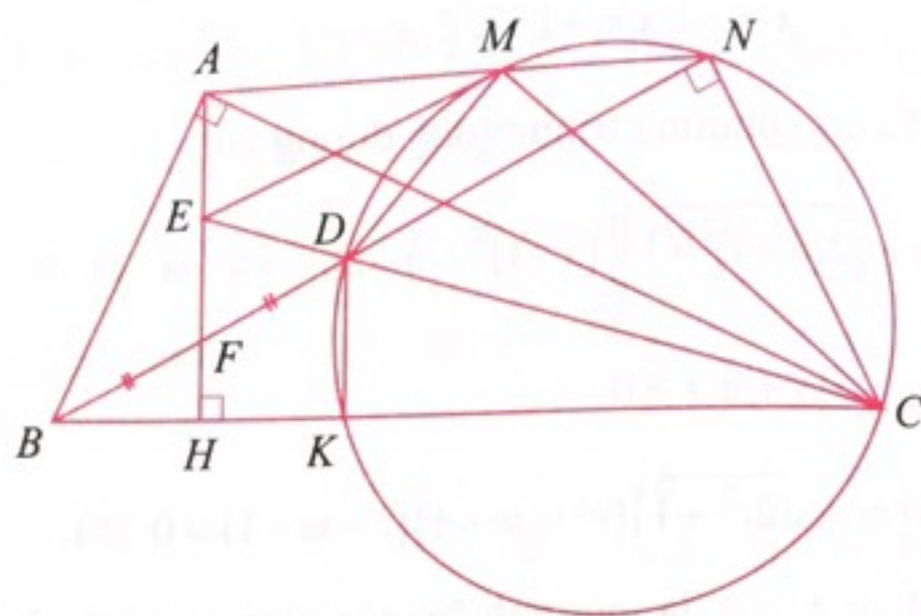
1) Tứ giác $ABCN$ nội tiếp một đường tròn và $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$.

2) Tam giác EMD đồng dạng với tam giác ECM

$$\text{và } \frac{MD \cdot AB}{MC} = \sqrt{\frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}}.$$

3) Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải.



1) Theo giả thiết ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$.

Suy ra A và N cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên A, B, C, N cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác $ABCN$ nội tiếp một đường tròn.

Do $\widehat{ACB}, \widehat{ANB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$ của đường tròn đường kính BC nên

$$\widehat{ACH} = \widehat{ACB} = \widehat{ANB} \quad (1).$$

Trong tam giác vuông AHC (vuông tại H) có $\widehat{ACH} + \widehat{CAH} = 90^\circ$. Nên từ (1) ta được

$$\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ.$$

2) Xét hai tam giác EMD và ECM có góc $\widehat{CEM}$ chung (2). Hơn nữa $\widehat{EMD} = \widehat{ECM}$ (3) (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\widehat{MD}$ của đường tròn đường kính CD) nên từ (2) và (3) ta có $\triangle EMD \sim \triangle ECM$.

$$\text{Do đó: } \frac{EM}{EC} = \frac{ED}{EM} = \frac{MD}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{MD^2}{MC^2} = \frac{ED}{EC} \quad (4).$$

Xét hai tam giác BHF và BNC có $\widehat{CBN}$ chung và $\widehat{BHF} = \widehat{BNC} = 90^\circ$ nên $\triangle BHF \sim \triangle BNC$.

Từ đó suy ra $BH \cdot BC = BF \cdot BN$ cùng với tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC = BF \cdot BN$ (5).

Nhân theo vế (4) và (5) ta được:

$$\frac{MD^2 \cdot AB^2}{MC^2} = \frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MD \cdot AB}{MC} = \sqrt{\frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}}$$

3) Trong tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC$ nên kết hợp với (5) ta

$$\text{được: } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{HB}{HC} \quad (6).$$

Gọi K là giao điểm thứ hai của BC và đường tròn đường kính $CD \Rightarrow AH \parallel DK$ (cùng vuông góc với BC). Kết hợp với giả thiết $FB = FD$ suy ra $HB = HK$ (7). Từ (6) và (7) suy ra:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HK}{HC} \text{ cùng với } \frac{HK}{HC} = \frac{ED}{EC} \text{ (do } AH \parallel DK \text{)}$$

ta được: $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{ED}{EC}$ (8). Từ (4) và (8) ta được:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{MD^2}{MC^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{MD}{MC}.$$

Kết hợp với $\widehat{BAC} = \widehat{DMC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle MCD \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DCM} = \widehat{ECM}$

hay $\widehat{ECM} = \widehat{BNA}$ (9) (do (1)). Mặt khác $\widehat{ECM} = \widehat{BNM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\widehat{MD}$ của đường tròn đường kính CD) nên từ (9) ta được $\widehat{BNA} = \widehat{BNM}$ hay ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Câu 5. 1) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

2) Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thay đổi và thỏa mãn $c + 2b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}.$$

Lời giải. 1) Lượt chơi thứ nhất có 10 đồng xu mặt xanh được ngửa thành mặt đỏ. Do đó sau lượt chơi thứ nhất có 2011 đồng xu mặt xanh và 10 đồng xu mặt đỏ được ngửa lên phía trên.

Giả sử trong lượt chơi thứ hai có x đồng xu mặt xanh được lật thành màu đỏ, như vậy sẽ có $(10 - x)$ đồng xu màu đỏ thành màu xanh (với x là số tự nhiên thỏa mãn $0 \leq x \leq 10$).

Khi đó số đồng xu màu xanh ngửa lên phía trên sẽ là $(2011 - x) + (10 - x) = 2021 - 2x$.

Cứ như vậy sau bao nhiêu lần đi nữa thì trên mặt bàn số đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên phía trên luôn luôn là số lẻ. Vậy sau 2022 lượt chơi không thể nhận được 2021 đồng xu có mặt màu đỏ được ngửa lên phía trên.

2) Với hai số $x, y > 0$ ta có:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} > 0.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} > 0.$$

Từ đó suy ra:

$$(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}.$$

$$\text{Vậy với mọi } x, y > 0 \text{ ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{3}{b+c-a} + \frac{5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c} \\ &= \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} \right) + 2 \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} \right) \\ &\quad + 3 \left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \right). \end{aligned}$$



**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ LỚP 9,
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM HỌC: 2021 – 2022**

Môn thi: **Toán** (Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1 (3 điểm).

Cho các số a, b thỏa mãn các điều kiện:

$$2a^2 + 7ab - 3b^2 = 0, b \neq 2a, b \neq -2a.$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{8a-3b}{2a-b} - \frac{2a-5b}{2a+b}$.

Bài 2 (3 điểm).

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$ab + bc + ca = 2022.$$

Chứng minh

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2.$$

Bài 3 (3 điểm). Giải phương trình:

$$\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x.$$

Bài 4 (5 điểm). Cho đường tròn (O) , đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O) (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F . Gọi H

là trung điểm của đoạn thẳng BF ; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH .

a) Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ECDF$. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O) .

Bài 5 (3 điểm). Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Bài 6 (3 điểm).

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ với $m \geq n$ sao cho $A = (m+n)^3$ là ước của

$$B = 2n(3m^2 + n^2) + 8.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Giới thiệu



Với mọi tam giác ABC ta luôn có $b+c-a > 0, a+c-b > 0, a+b-c > 0$ nên áp dụng kết quả trên vào ta được:

$$P \geq \frac{4}{2b} + \frac{8}{2c} + \frac{12}{2a} = \frac{2}{b} + \frac{4}{c} + \frac{6}{a} = 2 \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c} + \frac{3}{a} \right).$$

Theo giả thiết $2b+c=abc \Leftrightarrow \frac{2}{c} + \frac{1}{b} = a$ suy ra:

$$P \geq 2 \left(a + \frac{3}{a} \right) \geq 2.2\sqrt{a \cdot \frac{3}{a}} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy min } P = 4\sqrt{3} \text{ khi } \begin{cases} a=b=c \\ \frac{2}{c} + \frac{1}{b} = a \\ a = \frac{3}{a} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$ hay tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

Giới thiệu



5 PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHO BÀI TOÁN

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳnh Châu, Nghệ An)

Trước một bài toán chứng minh BĐT lượng giác chúng ta có thể đưa ra năm phương pháp giải chính như sau.

Cách 1 (phương pháp tam diện vuông).

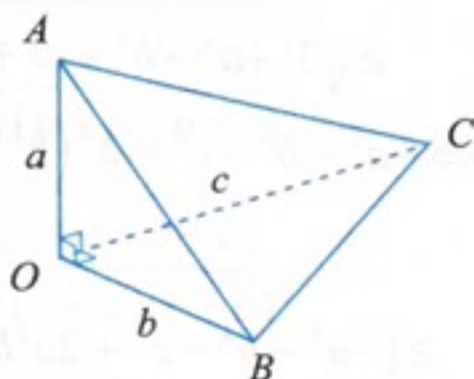
Xét tam diện vuông $OABC$ với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ như hình vẽ.

Ta có: $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$,

$CA = \sqrt{c^2 + a^2}$.

Áp dụng định lý côsin cho tam giác ABC ta có:



$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}.$$

Tương tự, ta có: $\cos B = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + c^2)(b^2 + a^2)}}$,

$$\cos C = \frac{c^2}{\sqrt{(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)}}.$$

Từ đó ta chuyển bài toán BĐT lượng giác về BĐT đại số ba biến a, b, c với a, b, c là ba cạnh của một tam diện vuông.

Cách 2 (đưa về ba cạnh của một tam giác).

Phương pháp này cũng sử dụng định lý côsin trong tam giác để chuyển bài toán BĐT lượng giác về BĐT ba cạnh của một tam giác, cụ thể:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Từ đó chúng ta cũng tính được các đại lượng lượng giác khác thông qua các cạnh a, b, c của tam giác, chẳng hạn:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}.$$

Tương tự: $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+a-c)}{4ca}},$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab}}.$$

Cách 3 (phương pháp chứng minh trực tiếp).

Trong phương pháp này chúng ta sẽ vận dụng các tính chất thuần túy của lượng giác để giải quyết chứng minh trực tiếp bài toán.

Cách 4 (phương pháp đại số).

Cơ sở của phương pháp là chúng ta sử dụng các đẳng thức sau: Với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1;$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1.$$

Và ta cũng có đẳng thức:

$$\frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1.$$

Từ đó ta có cách đặt ẩn phụ như sau:

$$\cos A = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}; \cos B = \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}};$$

$$\cos C = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \quad (a, b, c > 0).$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}; \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}};$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \quad (a, b, c > 0).$$

Từ đó ta chuyển bài toán BĐT lượng giác về bài toán BĐT đại số.

Cách 5 (phương pháp dồn biến).

Cơ sở của phương pháp là chúng ta xét BĐT có dạng $f(A, B, C) \geq 0$ (*).

Bước 1: Chứng minh

$$f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) \geq 0.$$

Bước 2: Chứng minh $f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) \geq 0$.

Từ đó ta kết luận BĐT (*) là đúng.

Sau đây là một số thí dụ minh họa cho các phương pháp trên.

Thí dụ 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có:

$$1 + \cos A \cos B \cos C \geq \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C.$$

Lời giải.

Cách 1 (phương pháp tam diện vuông).

Xét tam diện vuông $OABC$ đỉnh O với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Ta có:

$$\begin{aligned} \text{BĐT} &\Leftrightarrow 1 + \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \\ &\geq \frac{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \sqrt{3(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \\ &\geq (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \sqrt{3(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2. \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $a^4 + b^4 \geq 2a^2 b^2$,

$$b^4 + c^4 \geq 2b^2 c^2, \quad b^4 + c^4 \geq 2b^2 c^2.$$

Cộng theo vế các BĐT cùng chiều trên ta có BĐT cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ hay tam giác ABC là tam giác đều.

Cách 2 (phương pháp đưa về ba cạnh của tam giác).

Xét tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Theo cách đổi biến trên ta có:

$$\begin{aligned} \text{BĐT} &\Leftrightarrow 1 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{8a^2 b^2 c^2} \\ &\geq \frac{\sqrt{3[-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2]}^3}{8a^2 b^2 c^2} \\ &\Leftrightarrow 8a^2 b^2 c^2 + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \\ &\geq \sqrt{3[-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2]}^3 \\ &\Leftrightarrow -a^6 - b^6 - c^6 + a^4(b^2 + c^2) + b^4(c^2 + a^2) \\ &\quad + c^4(a^2 + b^2) + 6a^2 b^2 c^2 \\ &\geq (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2) \times \\ &\quad \times \sqrt{3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2)} \\ &\Leftrightarrow (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2) \times \\ &\quad \times \sqrt{3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2)} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2)} \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Cách 3 (phương pháp chứng minh trực tiếp).

$$\begin{aligned} \text{BĐT} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \cot A \cot B \cot C \geq \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(\cot^2 A + 1)(\cot^2 B + 1)(\cot^2 C + 1)} \\ &\quad + \cot A \cot B \cot C \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ta có: $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ nên

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \\ &\quad + \cot A \cot B \cot C \geq \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C) \times \\ &\quad \times (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) \geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \quad (1). \text{ BĐT(1) đúng vì:}$$

$$(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 3$$

$$\Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}.$$

Cách 4 (phương pháp đại số). Đặt:

$$\cos A = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}, \cos B = \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}},$$

$$\cos C = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}. \text{ Ta có:}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)}} = \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \sin B = \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+a)(b+c)}},$$

$$\sin C = \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}}.$$

$$\text{Khi đó: } \text{BĐT} \Leftrightarrow 1 + \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a+b+c)\sqrt{3abc(a+b+c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Cách 5 (phương pháp dồn biến).

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$A \geq B \geq C \Rightarrow A \geq \frac{\pi}{3}.$$

Đặt:

$$f(A, B, C) = 1 + \cos A \cos B \cos C - \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

$$\Rightarrow f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) = 1 + \cos A \sin^2 \frac{A}{2} - \sqrt{3} \sin A \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$\text{Ta có: } f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \cos A \left(\cos B \cos C - \sin^2 \frac{A}{2} \right) - \sqrt{3} \sin A \left(\sin B \sin C - \cos^2 \frac{A}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos A [\cos(B-C) - \cos A - 1 + \cos A] + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A [1 + \cos A - \cos(B-C) - \cos A]$$

$$= \frac{1}{2} \cos A [1 - \cos(B-C)] (\sqrt{3} \tan A - 1) \geq 0$$

$$(\text{do } A \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan A \geq \sqrt{3}).$$

$$\text{Ta chứng minh: } f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right)$$

$$= 1 + \cos A \sin^2 \frac{A}{2} - \sqrt{3} \sin A \cos^2 \frac{A}{2} \geq 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{A}{2}, \text{ ta có:}$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+t^2)^2 + t^2(1-t^2) - 2\sqrt{3}t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}t - 1)^2 \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + 16 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Lời giải.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$+ 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C.$$

• Nếu tam giác ABC là tam giác tù hoặc vuông thì ta có ngay BĐT cần chứng minh.

• Xét tam giác ABC là tam giác nhọn.

Cách 1 (phương pháp tam diện vuông).

Xét tam diện vuông OABC đỉnh O với OA = a, OB = b, OC = c. Ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\leq 2 + 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C).$$

Theo cách đổi biến ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \leq 2 + 2 \prod_{\text{cyc}} \left(1 - \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \right) \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \geq \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}.$$

$$\text{Do đó: VP(1)} \geq 2 + \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}.$$

$$\text{Mặt khác ta có: } 2 + \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) + a^2b^2c^2.$$

Vậy BĐT(1) được chứng minh.

Cách 2 (phương pháp đưa về ba cạnh của tam giác).

Xét tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \geq \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{8a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{8a^2b^2c^2} \leq \frac{(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2}{8a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \leq (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \quad (2).$$

Ta có:

$$(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) \leq (a + b - c)^2(b + c - a)^2$$

$$\Leftrightarrow b^4 - (c^2 - a^2)^2 \leq [b^2 - (c - a)^2]^2$$

$$\Leftrightarrow (c - a)^4 + (c^2 - a^2)^2 - 2b^2(c - a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c - a)^2[(c - a)^2 + (c + a)^2 - 2b^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c - a)^2(c^2 + a^2 - b^2) \geq 0$$

(BĐT cuối đúng do tam giác ABC nhọn).

Tương tự cho các trường hợp còn lại, sau đó nhân theo về các BĐT cùng chiều ta được BĐT(2).

Cách 3 (phương pháp chứng minh trực tiếp).

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos A} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos B} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos C} - 1 \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) \left(\frac{1 + \tan^2 \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} - 1 \right) \left(\frac{1 + \tan^2 \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} - 1 \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} \right) \left(\frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} \right) \left(\frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} \right) \geq \frac{1}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad (3).$$

$$\text{Ta có: } \tan A + \tan B = \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin C}{\cos(A - B) - \cos C} \geq 2 \cot \frac{C}{2}.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2},$$

$$\tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}.$$

Cộng theo về các BĐT cùng chiều trên ta được BĐT(3).

Cách 4 (phương pháp đại số).

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq 1$$

$$\begin{aligned}\text{Đặt: } \cos A &= \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}, \\ \cos B &= \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}, \\ \cos C &= \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}, \quad (a, b, c > 0).\end{aligned}$$

Khi đó:

$$\text{BDT} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + 2 \prod_{\text{cyc}} \left(1 - \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\right) \geq 1 \quad (4).$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } 1 - \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} &= \\ &= \frac{\sqrt{(a+b)(a+c)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \geq \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}.\end{aligned}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại và ta có:

$$\begin{aligned}\text{VT}(4) &\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + 2 \prod_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \\ &= \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= 1 \quad (\text{đpcm}).\end{aligned}$$

Cách 5 (phương pháp dồn biến).

$$\text{BDT} \Leftrightarrow 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C.$$

$$\text{Đặt: } f(A, B, C) = (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) - \cos A \cos B \cos C.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \leq B \leq C$, suy

$$\text{ra: } \cos A \geq \frac{1}{2} \text{ và } f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) =$$

$$= (1 - \cos A) \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 - \cos A \sin^2 \frac{A}{2}.$$

$$\text{Ta có: } f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) =$$

$$= (1 - \cos A) \left[(1 - \cos B)(1 - \cos C) - \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 \right]$$

$$- \cos A \left(\cos B \cos C - \sin^2 \frac{A}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}&= (1 - \cos A) \left(-\cos B - \cos C + 2 \sin^2 \frac{A}{2} + \cos B \cos C - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \\ &\quad - \cos A \left(\cos B \cos C - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \\ &\geq [1 - \cos(B - C)] \left(\cos A - \frac{1}{2} \right) \geq 0.\end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$(1 - \cos A) \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 - \cos A \sin^2 \frac{A}{2} \geq 0 \quad (5).$$

$$\text{Ta có: } (5) \Leftrightarrow 2 \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 - \cos A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{A}{2} - 4 \sin^2 \frac{A}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{A}{2} - 1\right)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm}).$$

Qua các thí dụ trên ta thấy nếu biết khai thác và vận dụng khéo léo, sáng tạo các kiến thức cơ bản ở nhiều góc độ khác nhau thì ta có được nhiều lời giải hay và đẹp. Sau đây là một số bài tập áp dụng dành cho độc giả.

BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức lượng giác sau theo năm phương pháp.

$$1. \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

$$3. \frac{\cot A \cot B \cot C}{\sin A \sin B \sin C} \leq \frac{8}{27}.$$

$$4. \sin A + \sin B + \sin C \geq 12\sqrt{3} \cos A \cos B \cos C.$$

$$5. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{3}{2} \quad (\Delta ABC \text{ nhọn}).$$

$$6. \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{3}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \quad (\Delta ABC \text{ nhọn}).$$



NGỌN NGUỒN CỦA KHÁI NIỆM GIỚI HẠN

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Khái niệm trực giác về giới hạn đã được nghiên cứu và vận dụng bởi các nhà bác học Hy Lạp cổ đại khi tính diện tích và thể tích của các hình khác nhau. Về cơ bản, các phương pháp giải những bài toán đó đã được phát triển bởi *Archimedes* - một trong những nhà bác học vĩ đại nhất của lịch sử nhân loại.



Archimedes
(284-212 tr. CN)

1. Tiền thân của khái niệm giới hạn. Nhà toán học và triết học Hy Lạp cổ đại *Antifont* (thế kỷ V tr.CN) đã nghiên cứu phương pháp tính diện tích hình - giới hạn bởi đường cong (chẳng hạn: hình tròn). Nội dung của phương pháp đó là như sau:

Đầu tiên cần nội tiếp trong đường cong một đa giác sao cho bằng cách nhiều lần liên tiếp gấp đôi số cạnh của nó, người ta thu được một dãy đa giác

nội tiếp đường cong với diện tích xấp xỉ diện tích hình cong. Nếu diện tích các đa giác trong mỗi bước gấp đôi (số cạnh) là tính được thì có thể cho rằng diện tích hình cong bằng diện tích đa giác trong lần gấp đôi (số cạnh) sau cùng, tức là khi độ dài các cạnh đa giác bé đến mức trùng với các phần tử bất khả phân tạo nên đường cong. Để không đối diện với nghịch lý chia vô cùng đoạn thẳng người ta giả thiết rằng *số bước xấp xỉ cần thiết phải hữu hạn*.

Phương pháp Antifont về sau được hoàn thiện về mặt logic bởi *Eudoxus* và *Archimedes* và đi vào lịch sử toán học với tên gọi "*Phương pháp vét kiệt*" (PPVK). Tên gọi này được dùng đầu tiên vào thế kỷ XVII bởi nhà toán học người Bỉ là *S.V. Gregorius* (1584-1667).

Cơ sở của phương pháp vét kiệt là Bổ đề sau đây:

"Giả sử cho hai đại lượng a và b , $a > b$. Nếu bớt đi từ a hơn một nửa, còn lại bao nhiêu lại bớt đi từ đó hơn một nửa ... thì sau một số hữu hạn bước như vậy có thể đạt tới một lượng dư còn lại bé hơn đại lượng cho trước bất kỳ cùng loại".

Bổ đề này được phát biểu và chứng minh trong mệnh đề X.1 của bộ "*Các nguyên lý*" (CNL) của *Euclid*. Chứng minh đó là như sau. Theo tiên đề *Eudoxus* - *Archimedes*, đại lượng b có thể gấp lên một số lần để được $Nb > a$, $n \in \mathbb{N}$. Tiếp đó, lặp lại N lần quy trình "*bớt đi hơn một nửa*" từ đại lượng a và từ các phần dư liên tiếp $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ ta thu được:

$$\alpha_1 = a - a_1 < \frac{a}{2};$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - a_2 < \frac{\alpha_1}{2} < \frac{a}{4};$$

.....

$$\alpha_{N-1} = \alpha_{N-2} - a_{N-1} < \frac{\alpha_{N-2}}{2} < \frac{a}{2^{N-1}};$$

$$\alpha_N = \alpha_{N-1} - a_N < \frac{\alpha_{N-1}}{2} < \frac{a}{2^N}.$$

Như vậy $2^N \alpha_N < a$. Nhưng khi đó

$$N\alpha_N < 2^N \alpha_N < a$$

và do đó $N\alpha_N < a < Nb \Rightarrow \alpha_N < b$.

Từ đó người ta cho rằng PPVK của các nhà toán học cổ đại là học thuyết đầu tiên về giới hạn.

II. Thời kỳ Phục Hưng thế kỷ XV-XVII

Giai đoạn mới trong sự phát triển khái niệm giới hạn bắt nguồn từ thời kỳ kiến tạo Phép tính vi phân (PTVP) và Phép tính tích phân (PTTP) với sự góp sức của các nhà toán học hàng đầu như: *G. Galilei* (1564 - 1642), *J. Kepler* (1571 - 1630), *B. Cavalieri* (1598 - 1647), *P. Fermat* (1601 - 1665), *B. Pascal* (1623 - 1662), *C. Huygens* (1629 - 1695), *I. Newton* (1643 - 1727), *G. Leibniz* (1646 - 1716), ...

Bên cạnh PPVK, khi tính diện tích và thể tích các hình người ta còn đưa ra các phương pháp khác sau đây:

1. *Phương pháp bất khả phân* (không phân chia tiếp được) đề xuất bởi học trò của *Galilei* là nhà toán học - thầy tu Italy *B. Cavalieri*. *Cavalieri* đã



B. Cavalieri
(1598-1647)

gọi các dây cung song song với nhau của hình phẳng hay các thiết diện phẳng song song của vật thể là các bất khả phân. "*Cavalieri* đã trình bày nội dung của phương pháp một cách hình tượng bằng cách đề nghị độc giả hình dung

con nhện chăng tơ tạo thành các khoang bằng những yếu tố bất khả phân"(*). Tập hợp các yếu tố bất khả phân do *Cavalieri* đưa ra về thực chất là

* *Rupnikop K.A. Lịch sử toán học, tập II, Hà Nội-1967 (tr.127)*

dẫn đến khái niệm tích phân xác định.

2. *Phương pháp các vô cùng bé hiện thực*, tức là những vô cùng bé mà theo cách biểu diễn của



J. Kepler
(1571-1630)

chúng thì đó là *những đại lượng bất biến, không bằng zero và đồng thời có giá trị tuyệt đối bé hơn những đại lượng hữu hạn bất kỳ*.

Chẳng hạn, khi tính diện tích hình tròn *J. Kepler* đã xem hình tròn gồm từ một số vô cùng lớn hình quạt vô cùng bé hiện

thực rất hẹp giống như tam giác cân với cạnh đáy là cung hình quạt và với một đỉnh chung là tâm hình tròn.

3. *Phương pháp vô cùng bé tiềm năng* là phương pháp mà trong đó các vô cùng bé hiện thực được *I. Newton* đề nghị thay bởi khái niệm vô cùng bé có tính chất tiềm năng: đó là *những vô cùng bé mà chỉ trong quá trình thay đổi và biến thiên của mình nó mới có giá trị tuyệt đối trở nên bé hơn một đại lượng dương hữu hạn bất kỳ*.



I. Newton
(1643 - 1727)

Một điều kỳ lạ là các nhà toán học thời này đã sử dụng một cách hết sức tinh vi cái vô hạn của lý thuyết tập hợp mặc dù phải đến những năm 1879 - 1884 *G. Cantor* mới trình bày một cách hệ thống các nguyên lý của lý thuyết của ông về vô hạn. Họ cũng đã nhận thức một cách sâu sắc rằng *cơ sở của lý thuyết mới về giới hạn phải là khái niệm vô hạn tiềm năng được thể hiện dưới hai hình thức vô cùng bé và vô cùng lớn*. Đồng thời họ cũng nhận ra rằng trong GTVCB cũng cần có khái niệm vô hạn hiện thực mà hình ảnh là các tập hợp vô hạn với tất cả các

phần tử đã được cho một cách hoàn chỉnh và được quan niệm như là tồn tại cùng một lúc. Chẳng hạn khi xét một hình hình học hay khi bổ sung cho tập hợp số thực các "số vô cùng lớn" mở rộng $+\infty$ và $-\infty$ thì đó là cái vô hạn hiện thực.

Lịch sử phát triển toán học của giai đoạn này cũng chứng tỏ rằng trước khi A. Cauchy (1789-1857) khẳng định thắng lợi của khái niệm vô cùng bé (VCB) đã có một số nhà toán học tiếp cận với phép qua giới hạn, chẳng hạn J. Wallis (1616 - 1703) trong "Số học các đại lượng VCB" (1655) hay G. L'Hospital (1661 - 1704) trong cuốn sách giáo khoa "Giải tích các VCB" (1696).

Đặc biệt trong "Các nguyên lý toán học của triết học tự nhiên" (1687) của mình I. Newton đã đề cập đến lý thuyết giới hạn với tên gọi "Phương pháp các tỷ số đầu và tỷ số cuối" mà về sau trở thành cơ sở của phương pháp fluxio (đạo hàm!) của ông. Người ta đánh giá đây là bước tiến căn bản trong sự phát triển của khái niệm giới hạn.

Cũng trong tác phẩm này Newton đã đưa vào chính thuật ngữ "Giới hạn" (limes), còn ký hiệu "lim" đang dùng hiện nay là do nhà toán học Thụy Sĩ L'Huiller (1750 - 1840) đưa ra năm 1786. Đáng tiếc là mọi khái niệm liên quan đến giới hạn đều không được Newton định nghĩa hay mô tả. Toàn bộ lý thuyết giới hạn của Newton được gói gọn trong 11 bổ đề với nội dung hình học. (**)

Khái niệm giới hạn đã được hình thành từng bước trong thế kỷ XVII đã tiếp tục được luận giải, phân tích và chính xác hóa trong thế kỷ XVIII bởi L. Euler (1707 - 1783), J. D'Alembert (1717 - 1783), ... Chẳng hạn trong bài báo - mục từ "Giới hạn" viết cho Bách khoa toàn thư Pháp J. D'Alembert đã định nghĩa giới hạn như sau:

** G.M. Fichtengon, Cơ sở GTTH, Hà Nội - 1972, tr. 364

"Người ta nói rằng: một đại lượng là giới hạn của một đại lượng khác nếu đại lượng thứ hai có thể dần đến gần đại lượng thứ nhất đến mức nó chỉ khác đại lượng thứ nhất một đại lượng bé hơn đại lượng cho trước bất kỳ bé bao nhiêu tùy ý mặc dù đại lượng dần đến đại lượng khác không bao giờ được vượt qua đại lượng đó".

Trong định nghĩa này có một chỗ mà về sau A. Cauchy đã bác bỏ là nhận xét rằng đại lượng dần đến a không thể vượt qua a : nghĩa là theo D'Alembert thì $x \rightarrow a$ phải kéo theo điều kiện $x - a$ không đổi dấu.

III. Lý thuyết giới hạn hiện đại. Định nghĩa và minh họa

Vào đầu thế kỷ XIX A. Cauchy đã nổi tiếng như một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế giới. Ông đã có một quyết định cực kỳ sáng suốt là xây dựng GTVCB trên nền tảng giới hạn mặc dù lý thuyết này từng đắm chìm trong cuộc khủng hoảng kéo dài mấy trăm năm ...

Tác phẩm "Giải tích đại số" (1821) và các tác phẩm tiếp theo của Cauchy đã tạo nên bước ngoặt trong quá trình xây dựng GTVCB. Trong lời nói đầu của tác phẩm này Cauchy đã thể hiện một cách dứt khoát:

"Nếu nói đến phương pháp thì tôi đã cố gắng bổ sung cho nó một mức độ chặt chẽ mà toán học có thể đạt đến".

Gần một trăm năm sau I. Newton và G. Leibniz, nhờ Cauchy người ta mới nhận thức được một cách rõ ràng cơ sở của Định nghĩa tích phân và đạo hàm là khái niệm giới hạn chứ không phải cái gì khác.

Bên cạnh A. Cauchy còn phải nhắc đến công lao của linh mục, nhà triết học người Séc là B. Bolzano (1781 - 1848). Đáng tiếc là người ta biết được các thành tựu của ông chỉ qua các di cảo mà

ông để lại. Ngày nay trong GTVCB người ta thường gặp những cụm từ: Phương pháp chia đôi Bolzano, Bổ đề Bolzano - Weierstrass về sự hội tụ của dãy con, các Định lý Bolzano - Cauchy về hàm liên tục, ...



Bolzano
(1781-1848)



Đầu tiên khái niệm giới hạn được định nghĩa cho dãy số là hàm của đối số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$. Điều này sẽ làm giản đơn hóa việc nhập môn vào khái niệm giới hạn của hàm với đối số x biến thiên liên tục trên đường thẳng số. Thật vậy, việc theo dõi quá trình chuyển từ một số hạng đến một số hạng tiếp theo của dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ là không khó vì số hiệu n của các số hạng của dãy chạy trên tập hợp số tự nhiên. Trong trường hợp biến liên tục x chạy trên một khoảng của trục số, cần luận giải thế nào về câu nói: "*biến liên tục x dần đến giá trị cho trước α* " (?) khi ta không hình dung được đâu là điểm liền kề trước hoặc sau điểm cho trước.

Định nghĩa giới hạn của dãy số (B. Bolzano năm 1816, A. Cauchy năm 1821).

Dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ có giới hạn bằng a khi n tăng vô hạn (ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$) nếu với mỗi số dương ε bé tùy ý đều có thể tìm được số nguyên dương $N_0 = N_0(\varepsilon)$ (phụ thuộc vào ε) sao cho bất đẳng thức $|x_n - a| < \varepsilon$ thỏa mãn với mọi số hiệu $n \geq N_0$.

Dãy số có giới hạn bằng zero được gọi là dãy vô cùng bé (VCB). Định nghĩa vừa phát biểu thường được gọi là " $\varepsilon - N$ " - định nghĩa; còn ký hiệu giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ là do G. Hardy (1877 - 1947) đưa ra năm 1908. Bên cạnh ký hiệu này người ta còn dùng ký hiệu:

$$x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty).$$

Thí dụ 1. Áp dụng " $\varepsilon - N$ " - định nghĩa, chứng

minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Giải. Cho trước số $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta cần tìm số nguyên dương $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tương ứng sao cho bất đẳng thức

$$\left| x_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

thỏa mãn $\forall n > N_0$.

Vì $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 2(2n+1) > \frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ nên

ta có thể lấy $N_0(\varepsilon) = \left[\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right] + 1$, trong đó $[\beta]$ là ký hiệu phần nguyên của số β (tức là số mà $[\beta] \leq \beta < [\beta] + 1$). Thật vậy, theo định nghĩa phần nguyên ta có:

$N_0 = N_0(\varepsilon) > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Do đó $\forall n > N_0$ ta có:

$$\left| x_n - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n+1)} < \frac{5}{2 \left\{ 2 \left(\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right) + 1 \right\}} = \frac{5}{2 \left\{ 2 \cdot \frac{5}{4\varepsilon} \right\}} = \varepsilon.$$

Định nghĩa giới hạn của hàm với đối số liên tục được Cauchy phát biểu lần đầu tiên vào khoảng năm 1820 (***) trong "*Giải tích đại số*". Ở đó ông giả thiết hàm $f(x)$ xác định trong một lân cận nào đó của điểm a , có thể trừ ra chính điểm a .

Định nghĩa giới hạn (theo Cauchy).

Hàm $f(x)$ có giới hạn (hay giá trị giới hạn) A khi x dần đến giá trị a (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$) nếu với mỗi số dương ε bé bao nhiêu tùy ý đều tìm được số dương tương ứng $\delta = \delta(\varepsilon)$ (phụ thuộc ε) sao cho bất đẳng thức $|f(x) - A| < \varepsilon$ thỏa mãn với mọi x mà $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$.

*** R. Couraut, H. Robbins, *Toán học là gì?* Hà Nội - 1985

Ngắn gọn: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Định nghĩa này có tên gọi " $\varepsilon - \delta$ " - định nghĩa.

Về sau nhà toán học nổi tiếng Đức H. Heine (1820 - 1881) đã phát biểu định nghĩa tương đương với định nghĩa theo Cauchy dựa vào ngôn ngữ dãy số làm giảm đi phần nào độ khó của khái niệm giới hạn.

Định nghĩa giới hạn (theo Heine).

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ có thể trừ ra điểm $x_0 \in (a; b)$. Số A được gọi là giới hạn (hay giá trị giới hạn) của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 (hay khi $x \rightarrow x_0$) nếu đối với dãy bất kỳ các giá trị $(x_n)_{n \geq 1}$ của đối số hội tụ đến x_0 sao cho $x_n \in (a; b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ thì dãy tương ứng $(f(x_n))_{n \geq 1}$ các giá trị của hàm hội tụ đến A và

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow x_0 \\ x_n \neq x_0}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Cả hai định nghĩa đều toát lên một điều là: khi biến x tiến gần đến a theo bất cứ quy luật nào nhưng vẫn không bằng a thì giá trị tương ứng $f(x)$ tiến gần đến A , nghĩa là trở nên gần A bao nhiêu tùy ý.

Cần nói thêm, khi buộc x dần tới a thì ta có thể

xem x hoặc lớn hơn, hoặc bé hơn a nhưng do $x \rightarrow a$ nên khả năng $x = a$ bị loại trừ (do hàm có thể không xác định tại a): tức là x dần đến a nhưng không nhận giá trị a .

Thí dụ 2. Chứng minh đẳng thức $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

bằng cách:

1) Dùng định nghĩa giới hạn theo Heine.

2) Dùng " $\varepsilon - \delta$ " định nghĩa theo Cauchy.



H. Heine
(1821-1881)

Giải. 1) Ta xét hàm đã cho trong lân cận nào đó của điểm $a = 4$, chẳng hạn đó là khoảng đối xứng qua tâm $a = 4$ (và không chứa điểm $x = 0$). Để đơn giản, đó là khoảng $(3; 5)$. Ta lấy một cách tùy ý dãy $x_n \in (3; 5)$ nào đó sao cho $x_n \neq 4, \forall n$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4. \text{ Khi đó:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 4}{x_n} = 2.$$

Vì dãy $x_n \in (3; 5)$ là tùy ý nên theo định nghĩa của

$$\text{Heine ta có: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2.$$

2) Xét hàm $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ trong một lân cận nào

đó của điểm $a = 4$, chẳng hạn trong khoảng $(2; 5)$ (không chứa điểm $x = 0$). Ta lấy số $\varepsilon > 0$ bất kỳ và biến đổi biểu thức $|f(x) - 2|$ khi $x \neq 4$ như sau:

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| = \left| \frac{x + 4}{x} - 2 \right| = \frac{|x - 4|}{x}.$$

Vì $x \in (2; 5)$ nên

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \frac{|x - 4|}{2}.$$

Từ đó, nếu lấy $\delta = 2\varepsilon$ thì $\forall x \in (2; 5)$ và thỏa mãn điều kiện $0 < |x - 4| < \delta$ thì

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Do đó theo " $\varepsilon - \delta$ " - định nghĩa ta có $A = 2$ là giới hạn của hàm đã cho.

Đối với định nghĩa theo Heine cần lưu ý rằng: đòi hỏi $\lim f(x_n) = A$ đối với dãy bất kỳ $x_n \rightarrow x_0$ là rất cốt yếu vì có thể xảy ra trường hợp là: đối với một dãy các giá trị của đối số giới hạn đó tồn tại và bằng A nhưng đối với dãy khác nào đó giới hạn lại không tồn tại hoặc tồn tại nhưng khác A .



CÁC LỚP THCS

Bài T1/540 (Lớp 6). Chứng minh rằng

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}} > 2(\sqrt{2023} - 1).$$

LƯƠNG VĂN BÁ

(GV THCS Nghĩa Phương, H. Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/540 (Lớp 7). Cho

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3^2}(1+2+3)^2 + \dots + \frac{1}{n^{n-1}}(1+2+\dots+n)^{n-1} + \dots + \frac{1}{2021^{2020}}(1+2+\dots+2021)^{2020}.$$

Hãy so sánh A với $(2^{2020})^{20}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH

(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T3/540. Tính tổng

$$S = \frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} + \dots + \frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}}$$

với $a = \sqrt[n]{2}$, $n = 2022$.

NGUYỄN ĐỨC THỤY

(SV K28B Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T4/539. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm D trên cạnh BC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}.$$

Chứng minh rằng D là trung điểm cạnh BC hoặc D là chân đường phân giác góc A .

PHẠM HUY THÔNG

(49 Bạch Mai, Hà Nội)

Bài T5/540. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$9x^2 - 6x - 3 + 32\sqrt{3x+1} = 64.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/540. Gọi $(x; y; z)$ là một hoán vị của ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} + \frac{y^2}{\sqrt{bc(b+2a)(c+2a)}} + \frac{z^2}{\sqrt{ca(c+2b)(a+2b)}} \geq 1.$$

ĐÀO VĂN NAM

(GV TH, THCS&THPT Everest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

Bài T7/540. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn

$$p^3 - 127 = q^6 - 121q^3.$$

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/540. Cho tam giác ABC và điểm M trên cạnh AB . Đường thẳng qua M và song song với BC cắt AC tại N . Đường thẳng qua N và song song với AB cắt CM tại I . Chứng minh

$$S_{IMN} \leq \frac{4}{27} S_{ABC}.$$

LỤC BÌNH

(GV Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T9/540. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}.$$

CAO HẢI VÂN

(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

TIỀN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/540. Cho p là số nguyên tố dạng $2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$). Đặt $S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{p-2}$.

Chứng minh rằng

1) Với mọi h nguyên dương, $h < p$ và h không là ước của $p - 1$ thì $3^h + 1$ không chia hết cho p .

2) $S + 1 \vdots p$.

TRỊNH VĂN SỬ

(GV Học Viện Biên phòng, khoa Chiến thuật, Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T11/540. Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $0 \leq a_i < 1, \forall i = \overline{1, n}, n \geq 2$. Tìm hằng số dương k bé nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-a_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{k} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 1.$$

LÊ QUANG KHANH

(GV THPT Trần Quang Diệu, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T12/540. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Điểm D thuộc BC . K là giao điểm của đường thẳng qua D vuông góc với IB và phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. L là giao điểm của đường thẳng qua D vuông góc với IC và phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Các điểm P, Q theo thứ tự

thuộc IB, IC sao cho $\widehat{PDQ} = 90^\circ$. Chứng minh $KP \perp LQ$.

NGUYỄN MINH HÀ (Hà Nội)
LÊ VIỆT AN (TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/540. Một con lắc lò xo gồm vật nhỏ khối lượng $m = 0,2$ kg, lò xo nhẹ có độ cứng $k = 20$ N/m được đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nằm ngang là $\mu = 0,01$. Từ vị trí lò xo không bị biến dạng, truyền cho vật vận tốc ban đầu có độ lớn $v_0 = 1$ m/s dọc theo trục lò xo. Con lắc dao động tắt dần trong giới hạn đàn hồi của lò xo (Lấy $g = 10$ m/s²). Độ lớn lực đàn hồi cực đại của lò xo trong quá trình dao động bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

Bài L2/540. Đặt điện áp $u_1 = 100\cos 100\pi t$ (V) vào hai đầu cuộn cảm thuần L thì cường độ dòng điện tức thời chạy qua cuộn cảm là i_1 . Đặt điện áp $u_2 = 120\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (V) vào hai đầu tụ điện C thì cường độ dòng điện tức thời chạy qua tụ điện là i_2 . Mối quan hệ về giá trị tức thời giữa cường độ dòng điện qua hai mạch trên là $4i_1^2 + 9i_2^2 = 64$ (A)². Khi mắc cuộn cảm nối tiếp với tụ điện rồi mắc vào điện áp $u_3 = 80\cos(100\pi t)$ (V) thì điện áp cực đại giữa hai bản tụ điện là bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/540 (For 6th grade). Prove that

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}} > 2(\sqrt{2023} - 1).$$

Problem T2/540 (For 7th grade). Let

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3^2}(1+2+3)^2 + \dots + \frac{1}{n^{n-1}}(1+2+\dots+n)^{n-1}$$

$$+ \dots + \frac{1}{2021^{2020}} (1 + 2 + \dots + 2021)^{2020}.$$

Compare A with $(2^{2020})^{20}$.

Problem T3/540. Compute the sum

$$S = \frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} + \dots + \frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}}$$

with $a = \sqrt[n]{2}$, $n = 2022$.

Problem T4/539. Given a right triangle ABC with the right angle A . Let D be a point on the side BC satisfying $\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}$. Show that either D is the midpoint of BC or D is the intersection between the angle bisector of A and BC .

Problem T5/540. Find the integral solutions of the equation $9x^2 - 6x - 3 + 32\sqrt{3x+1} = 64$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/540. Let $(x; y; z)$ be a permutation of 3 positive numbers a, b, c . Show that

$$\frac{x^2}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} + \frac{y^2}{\sqrt{bc(b+2a)(c+2a)}} + \frac{z^2}{\sqrt{ca(c+2b)(a+2b)}} \geq 1.$$

Problem T7/540. Find all pairs of prime numbers $(p; q)$ satisfying

$$p^3 - 127 = q^6 - 121q^3.$$

Problem T8/540. Given a triangle ABC and a point M on the side AB . The line through M and parallel to BC intersects AC at N . The line through N and parallel to AB intersects CM at I . Show that

$$S_{IMN} \leq \frac{4}{27} S_{ABC}.$$

Problem T9/540. Given a triangle ABC with $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Let I be the incenter of ABC . Show that

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/540. Let p be a prime number in the form $2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$). Let

$S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{p-2}$. Show that

- 1) For any positive integer h with $h < p$ and h is not a divisor of $p - 1$ then $3^h + 1$ is not divisible by p .
- 2) $S + 1 \vdots p$.

Problem T11/540. Given n real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ satisfying $0 \leq a_i < 1, \forall i = \overline{1, n}, n \geq 2$. Find the least positive constant k so that the following inequality holds

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-a_i)} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{k} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 1.$$

Problem T12/540. Given a triangle ABC and its incenter I , and D is a point on BC . Let K be the intersection between the line through D and perpendicular to IB with the external angle bisector of $\widehat{BAC}$. Let L be the intersection between the line through D and perpendicular to IC with the external angle bisector of $\widehat{BAC}$. The points P, Q respectively are on IB, IC so that $\widehat{PDQ} = 90^\circ$. Prove that $KP \perp LQ$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)



Bài T1/536 (Lớp 6). Gọi m là tổng các chữ số của số 9^{2022} , n là tổng các chữ số của m và k là tổng các chữ số của n . Tìm số k .

Lời giải. Số 9^{2022} chia hết cho 9 nên theo dấu hiệu chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của số 9^{2022} phải chia hết cho 9, do đó số m chia hết cho 9. Tương tự như thế, tổng các chữ số của số m phải chia hết cho 9, do đó số n chia hết cho 9 và tổng các chữ số của số n phải chia hết cho 9, do đó số k chia hết cho 9.

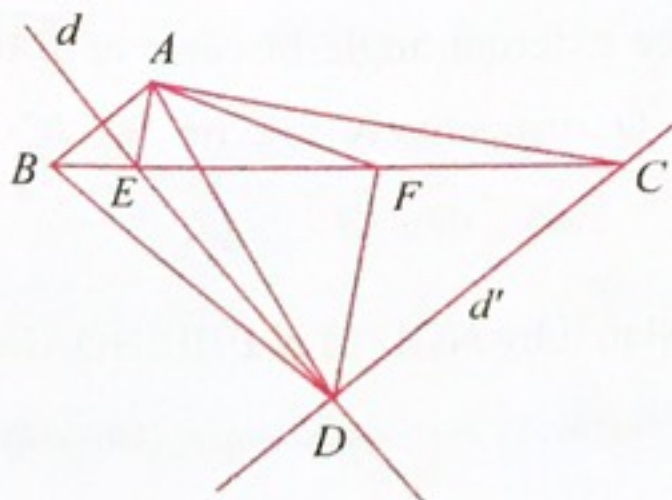
Số $9^{2022} < 10^{2022}$ nên có không quá 2022 chữ số thập phân, do đó $m \leq 9 \cdot 2022 = 18198 < 19999$. Từ đó $n \leq 1 + 9 \cdot 4 = 37$, suy ra $k < 3 + 9 = 12$. Số nguyên dương k chia hết cho 9 nên $k = 9$.

Nhận xét. Bạn Lê Tuấn Hiệp, 6C THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Hưng Yên và bạn Nguyễn Quốc Anh, 8A1, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, Hà Nội đã giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/536. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^\circ$, $\widehat{ACB} = 10^\circ$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB là d , d' là đường thẳng qua C và vuông góc với d . Gọi D là giao điểm của d và d' . Tính số đo góc BDA .

Lời giải.



Ký hiệu E là giao điểm của d và AB , F là trung điểm của EC . Do d là trung trực AB , cho nên $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 40^\circ$. Ta có: $\widehat{CEA} = \widehat{EAB} + \widehat{EBA} = 80^\circ$. Tam giác EAC vuông tại A do $\widehat{CEA} + \widehat{ECA} = 90^\circ$. Vì $d \perp d'$ và d vuông góc với AB , cho nên $d' \parallel AB$ và tam giác EDC vuông tại D . Do trung tuyến trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền, cho nên $AF = EF = FC = DF$. Từ $d' \parallel AB$ ta có $\widehat{DCF} = \widehat{CBA} = 40^\circ$. Do $FD = FC$, cho nên $\widehat{EFD} = 2\widehat{DCF} = 80^\circ$.

Tương tự $\widehat{AFE} = 2\widehat{ACF} = 20^\circ$. Trong tam giác cân AFD , ta có $\widehat{FDA} = \frac{180^\circ - \widehat{AFD}}{2} = 40^\circ$. Suy ra $\widehat{CDA} = \widehat{CDF} + \widehat{FDA} = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$. Do đó, $\widehat{ADE} = \widehat{CDE} - \widehat{CDA} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$. Vì d là trục đối xứng của AB , cho nên $\widehat{BDA} = 2\widehat{ADE} = 20^\circ$.

Nhận xét. Có một bạn gửi lời giải đúng bài toán này là bạn Nguyễn Quốc Anh, 8A1, THCS-THPT Archimedes, Đông Anh, Hà Nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/536. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt{1-x} = -x^2 + 3x - 1.$$

Lời giải. ĐK: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Với điều kiện trên có:

$$0 \leq 2x-1 \leq 1; \quad 0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2}.$$

Do đó: $\sqrt[4]{2x-1} \geq 2x-1$; $\sqrt{1-x} \geq 1-x$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2x-1} + \sqrt{1-x} \geq 2x-1 + 1-x = x \quad (1).$$

Mặt khác, ta có:

$$-x^2 + 3x - 1 = -(x-1)^2 + x \leq x \quad (2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Từ (1), (2) suy ra:

$$\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt{1-x} \geq x \geq -x^2 + 3x - 1.$$

Với $x = 1$ các dấu đẳng thức trong dãy bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra và thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh dãy BĐT

$$\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt{1-x} \geq x \geq -x^2 + 3x - 1.$$

2) Tổng quát:

- nếu $0 < a < 1, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ có BĐT

$$\sqrt[n]{a} > a \Leftrightarrow a > a^n \Leftrightarrow a^{n-1} < 1 \text{ đúng};$$

- nếu $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ có $\sqrt[n]{a} = a$.

Vậy $0 \leq a \leq 1, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ có $\sqrt[n]{a} \geq a$. Dấu đẳng

thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$.

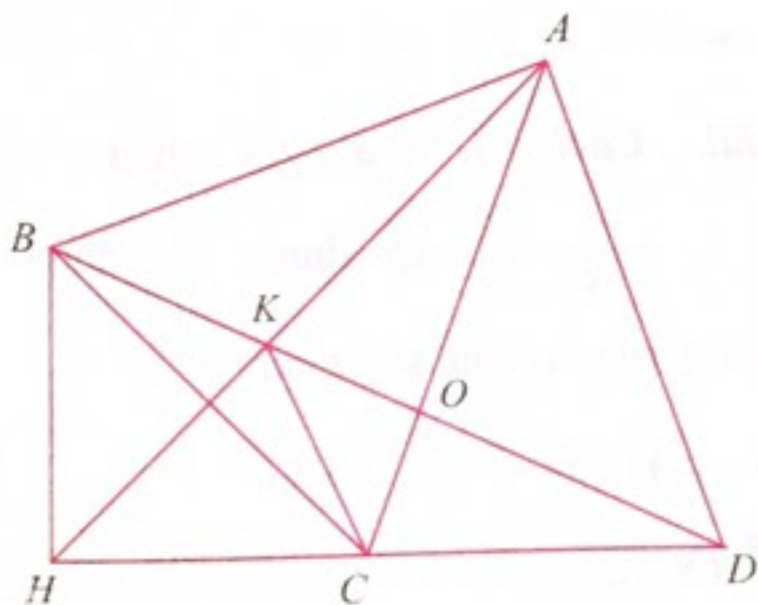
Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Tĩnh: Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Trần Diệu Linh, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS&THPT Archimedes Đông Anh; **Phú Thọ:** Trần Lan Anh, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/536. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{CAD} = 40^\circ$, $\widehat{BAC} = 50^\circ$, $\widehat{CBD} = 20^\circ$ và $\widehat{CDB} = 25^\circ$. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của tứ giác.

Lời giải.



Cách 1. Kẻ đường cao BH của tam giác BCD . Gọi K là giao điểm của BD và AH ; O là giao điểm của AC và BD . Suy ra $\widehat{HBD} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{CBH} = 45^\circ$.

Do đó tam giác HBC vuông cân tại H .

Tứ giác $ABHD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BHD} = 90^\circ$ nên $ABHD$ là tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{HAB} = \widehat{HDB} = 25^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{KAC} = \widehat{KDC} = 25^\circ$, dẫn tới tứ giác $ADCK$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{CKD} = \widehat{CAD} = 40^\circ$.

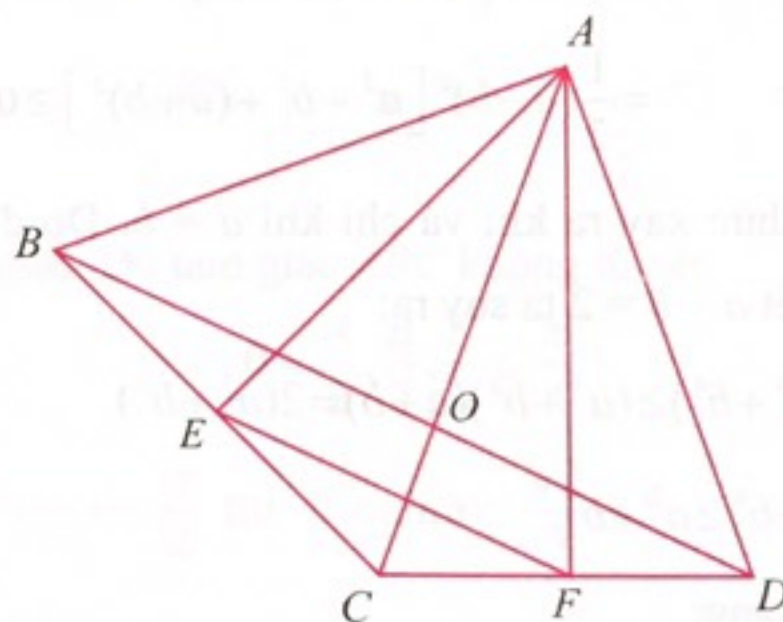
Vậy $\widehat{KCB} = \widehat{CKD} - \widehat{KBC} = 20^\circ$, nên tam giác BKC cân tại K . Từ $HC = HB, KC = KB$ suy ra $\triangle HBK = \triangle HCK$, từ đó suy ra HK là phân giác của $\widehat{BHC}$, ta có: $\widehat{BHK} = 45^\circ$. Lại có, tứ giác $ABHD$ nội tiếp nên $\widehat{ABD} = \widehat{AHD} = 45^\circ$.

Tam giác AOB có:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{ABO} - \widehat{BAO} = 85^\circ$$

Vậy góc nhọn tạo bởi hai đường chéo bằng 85° .

Cách 2 (Theo bạn Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh).



Kẻ các đường phân giác trong AE, AF của tam giác ABC, ACD tương ứng.

Ta có: $\widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAF} = 45^\circ$;

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{CBD} - \widehat{CDB} = 135^\circ.$$

Từ đó ta có $\widehat{EAF} + \widehat{ECF} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AECF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EAC} = 25^\circ = \widehat{CDB}$.

Do đó $EF \parallel BD$. Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{EC}{EB} = \frac{FC}{FD}.$$

Lại theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{EC}{EB} = \frac{AC}{AB}; \frac{FC}{FD} = \frac{AC}{AD}.$$

Từ đó suy ra $AB = AD$. Từ đó, $\widehat{ABD} = 45^\circ$. Lập luận theo cách 1, ta có $\widehat{AOB} = 85^\circ$.

Nhận xét. Ngoài bạn Hoàng, các bạn sau cũng cho lời giải tốt: **Hung Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Tĩnh:** Trần Diệu Linh, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/536. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab + \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} - \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^4 + b^4 + 1}.$$

Lời giải. **Nhận xét:** Với mọi các số thực a, b ta có:

$$\begin{aligned} 2(a^4 + b^4) - (a^3 + b^3)(a + b) &= (a - b)(a^3 - b^3) \\ &= (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \\ &= \frac{1}{2}(a - b)^2[a^2 + b^2 + (a + b)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Do đó từ giả thiết $a + b = 2$ ta suy ra:

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)(a + b) = 2(a^3 + b^3)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3.$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 1 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 1 \\ &= 2(a^2 - ab + b^2) + 1 \\ &= a^2 + b^2 + (a - b)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Từ đó: $a^4 + b^4 + 1 \geq a^3 + b^3 + 1 > 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^4 + b^4 + 1} \leq 0 \quad (*).$$

Lại nhận xét với mọi các số thực a, b ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab; 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Do đó từ giả thiết $a + b = 2$ ta suy ra:

$$1 \geq ab; a^2 + b^2 \geq 2.$$

Từ (*) suy ra:

$$\begin{aligned} P &= ab + \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} - \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{a^4 + b^4 + 1} \\ &\leq ab + \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} \leq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$P = \frac{4}{3}$ khi và chỉ khi $a = b = 1$. Vậy giá trị lớn nhất

của P bằng $\frac{4}{3}$.

Nhận xét. Lời giải bài toán này sử dụng nhiều bất đẳng thức cơ bản, hay. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** Nguyễn Quốc Anh, 8A1, Trần Việt Anh, 8C1, THCS Archimedes Đông Anh; **Hung Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** Nguyễn Hải Triều, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Diệu Linh, Nguyễn Hà Trang, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **TP. Hồ Chí Minh:** Dương Hoàng Long, 9/1, THCS Âu Lạc; **Sóc Trăng:** Tiết Trọng Nhân, 9/10, THCS Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T6/536. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$). Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$(S - a_1)^{a_1} (S - a_2)^{a_2} \dots (S - a_n)^{a_n} \leq \left(\frac{n-1}{n} S \right)^S.$$

Lời giải. Cách 1. Từ giả thiết suy ra $\frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{S} + \dots + \frac{a_n}{S} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng (có hệ số), ta có:

$$\begin{aligned} &(S - a_1)^{\frac{a_1}{S}} (S - a_2)^{\frac{a_2}{S}} \dots (S - a_n)^{\frac{a_n}{S}} \\ &\leq \frac{a_1}{S} (S - a_1) + \frac{a_2}{S} (S - a_2) + \dots + \frac{a_n}{S} (S - a_n) \end{aligned}$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{S}$$

$$= S - \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{S}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} = \frac{S^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{S} \geq \frac{S}{n}.$$

Từ đó suy ra:

$$(S - a_1)^{\frac{a_1}{S}} (S - a_2)^{\frac{a_2}{S}} \dots (S - a_n)^{\frac{a_n}{S}} \leq S - \frac{S}{n} = \frac{n-1}{n} S$$

$$\text{hay } (S - a_1)^{a_1} (S - a_2)^{a_2} \dots (S - a_n)^{a_n} \leq \left(\frac{n-1}{n} S \right)^S.$$

Do đó BĐT đã được chứng minh. Dấu “=” xảy ra

$$\text{khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{S}{n}.$$

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a_1 \ln(S - a_1) + a_2 \ln(S - a_2) + \dots + a_n \ln(S - a_n) \leq S \ln \left(\frac{n-1}{n} S \right) (*).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

suy ra $S - a_1 \geq S - a_2 \geq \dots \geq S - a_n$. Do đó:

$$\ln(S - a_1) \geq \ln(S - a_2) \geq \dots \geq \ln(S - a_n).$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev với hai dãy đơn điệu ngược chiều, ta có:

$$a_1 \ln(S - a_1) + a_2 \ln(S - a_2) + \dots + a_n \ln(S - a_n) \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} [\ln(S - a_1) + \ln(S - a_2) + \dots + \ln(S - a_n)]$$

$$= \frac{S}{n} \ln[(S - a_1)(S - a_2) \dots (S - a_n)] \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(S - a_1)(S - a_2) \dots (S - a_n) \leq \left(\frac{S - a_1 + S - a_2 + \dots + S - a_n}{n} \right)^n$$

$$= \left(\frac{nS - S}{n} \right)^n = \left(\frac{n-1}{n} S \right)^n \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a_1 \ln(S - a_1) + a_2 \ln(S - a_2) + \dots + a_n \ln(S - a_n) \leq \frac{S}{n} \ln \left(\frac{n-1}{n} S \right)^n = S \ln \left(\frac{n-1}{n} S \right).$$

Do đó bất đẳng thức (*) đã được chứng minh. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời tốt:

Hà Nội: Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes, Đông Anh; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Phương Thảo, 11A1, THPT Yên Phong số 2; **Bình Định:** Vũ Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Nguyễn Thanh Hải, 11A1, THPT Tây Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Hoàng Yến Nhi, 11CT, THPT Gia Định; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Ngọc Long, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/536. Cho tam giác ABC không tù. Chứng minh rằng

$$\left(\sin \frac{A}{2} \right)^{\sin \frac{A}{2}} + \left(\sin \frac{B}{2} \right)^{\sin \frac{B}{2}} + \left(\sin \frac{C}{2} \right)^{\sin \frac{C}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Do tam giác ABC không tù nên

$$0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Với $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ thì $0 < \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

Xét hàm số: $y = f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{4} \right]$.

Suy ra: $\ln y = \sin x \cdot \ln \sin x$. Ta có:

$$y' = y(\cos x \cdot \ln \sin x + \cos x);$$

$$y'' = y(\cos x \cdot \ln \sin x + \cos x)^2$$

$$+ y \cdot \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x} \right).$$

Do đó: $y'' > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$. Vậy hàm số $y = f(x)$

lồi trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$. Do đó, theo BĐT Jensen, với

$x_1, x_2, x_3 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ ta có:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right).$$

Lấy $x_1 = \frac{A}{2}, x_2 = \frac{B}{2}, x_3 = \frac{C}{2}$ ta được:

$$\left(\sin \frac{A}{2}\right)^{\sin \frac{A}{2}} + \left(\sin \frac{B}{2}\right)^{\sin \frac{B}{2}} + \left(\sin \frac{C}{2}\right)^{\sin \frac{C}{2}} \geq 3 \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ hay ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Lời giải trên đã sử dụng tính chất:

Hàm f có đạo hàm cấp 2 trên khoảng $(a; b)$ là lồi trên $(a; b)$ nếu $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.

2) Các bạn tham gia đều có cách giải tương tự lời giải trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Hoàng Yến Nhi, 11CT, THPT Gia Định.

TRẦN HỮU NAM

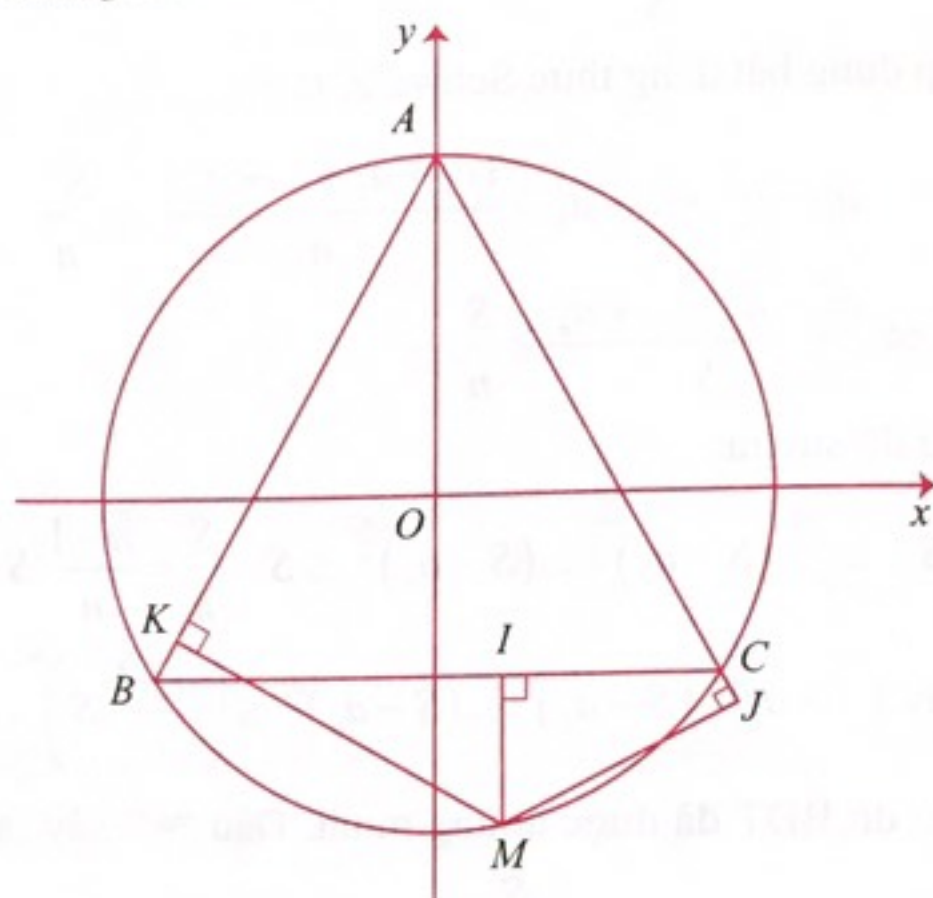
Bài T8/536. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm M di động trên đường tròn (O) . Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4MI^2 + MJ^2 + MK^2$.

Lời giải. (Dựa theo bạn Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh, Hà Nội).

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Gọi I, J, K là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB tương ứng. Khi đó

$$MI^2 + MJ^2 + MK^2 = \frac{9}{4}R^2.$$

Chứng minh.



Xây dựng hệ toạ độ như hình vẽ. Gốc toạ độ trùng với tâm O của đường tròn. Khi đó

$$A(O; R); B\left(\frac{-R\sqrt{3}}{2}; \frac{-R}{2}\right); C\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}; \frac{-R}{2}\right).$$

Ta dễ dàng lập được phương trình các đường thẳng: $AB: x\sqrt{3} - y + R = 0$;

$$AC: x\sqrt{3} + y - R = 0; BC: y + \frac{R}{2} = 0.$$

Lấy điểm $M(x; y)$ thuộc đường tròn (O) . Khi đó:

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ và } MI = \left|y + \frac{R}{2}\right|;$$

$$MJ = \left|\frac{x\sqrt{3} + y - R}{2}\right|; MK = \left|\frac{x\sqrt{3} - y + R}{2}\right|.$$

Từ đó: $MI^2 + MJ^2 + MK^2 =$

$$\begin{aligned} &= \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{[x\sqrt{3} - (y - R)]^2 + [x\sqrt{3} + (y - R)]^2}{4} \\ &= \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{2[3x^2 + (y - R)^2]}{4} = \frac{6x^2 + 6y^2 + 3R^2}{4} \\ &= \frac{9}{4}R^2. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, gọi R là bán kính đường tròn (O) , đặt $MI = x$; $MJ = y$; $MK = z$ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4}R^2.$$

Sử dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} P = 4x^4 + y^4 + z^4 &\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{\frac{1}{4} + 1 + 1} \\ &= \frac{\frac{81}{4}R^4}{\frac{9}{4}} = \frac{9}{4}R^4 = \frac{a^4}{4}. \end{aligned}$$

Do đó $\min P = \frac{a^4}{4}$ đạt được khi $2x = y = z$, dễ

thấy lúc đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , hay AM là đường kính của đường tròn (O) .

Nhận xét. Có thể chỉ ra biểu thức P không thể đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp M thuộc cung nhỏ CA hoặc M thuộc cung nhỏ AB . Ngoài bạn **Trần Việt Anh**, các bạn học sinh sau cũng có lời giải đúng:

TP. Hồ Chí Minh: Thái Hoàng Yến Nhi, 11CT, THPT Gia Định, Quận Bình Thạnh; **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Ngọc Long, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

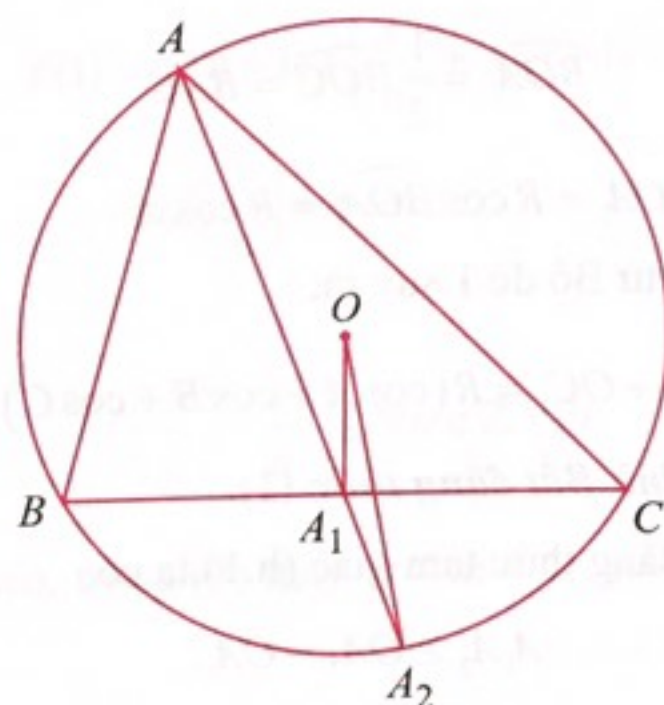
HỒ QUANG VINH

Bài T9/536. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R , các đường trung tuyến AA_1 , BB_1 , CC_1 lần lượt cắt đường tròn tâm O tại A_2 , B_2 , C_2 . Chứng minh rằng

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \geq \frac{3R}{2} \quad (1).$$

Lời giải. (Của bạn **Trần Việt Anh**)

Trước tiên ta chứng minh hai Bổ đề quen thuộc (h.1).



Hình 1.

Bổ đề 1. Với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - \frac{3}{2} &= \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} - \frac{3}{2} \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} - \frac{3}{2} \\ &= -2 \left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Nhận xét. Một số chứng minh khác, thí dụ, nhờ Phương trình bậc ba, có thể xem trong:

Tạ Duy Phương, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2017 (Bài 4.2.1, trang 283-284).

Bổ đề 2. Với mọi tam giác ta có:

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 \leq \frac{3R}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Chứng minh. (h.1) Do $OA_1 \perp BC$ và

$$\widehat{BOA_1} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \widehat{BAC}$$

nên ta có $OA_1 = R \cos \widehat{BOA_1} = R \cos A$.

Từ đây và từ Bổ đề 1 suy ra:

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R(\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{3R}{2}.$$

Chứng minh Bất đẳng thức (1).

Theo bất đẳng thức tam giác (h.1) ta có:

$$A_1A_2 \geq OA_2 - OA_1.$$

Tương tự: $B_1B_2 \geq OB_2 - OB_1$; $C_1C_2 \geq OC_2 - OC_1$.

Từ đây và từ Bổ đề 2 suy ra:

$$\begin{aligned} A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 &\geq (OA_2 + OB_2 + OC_2) - (OA_1 + OB_1 + OC_1) \\ &= 3R - (OA_1 + OB_1 + OC_1) \\ &\geq 3R - \frac{3R}{2} = \frac{3R}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Các bạn dưới đây đã làm đúng:

Hà Nội: Trần Việt Anh 8C1, THCS & THPT Archimedes Đông Anh; **Hưng Yên:** Trần Văn Quân

12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên**

Huế: Phạm Ngọc Long 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

TẠ DUY PHƯƠNG

Bài T10/536. Cho p là số nguyên tố và n là số nguyên lớn hơn 4. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = x^n - px^2 + px + p^2$$

không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn Trần Thị Thanh Thư, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế và bạn Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh, Hà Nội)

Giả sử trái lại $f(x) = g(x)h(x)$ trong đó

$$g(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

$$h(x) = b_tx^t + b_{t-1}x^{t-1} + \dots + b_1x + b_0.$$

với a_i, b_j là các số nguyên, $m, t \geq 1$. Ta có

$a_mb_t = 1$. Không giảm tính tổng quát giả sử

$$a_m = b_t = 1.$$

Ta có $a_0b_0 = p^2$. Xảy ra hai trường hợp sau:

• Trường hợp 1: Chỉ có duy nhất một trong hai số

a_0, b_0 chia hết cho p . Giả sử $a_0 \vdots p, b_0 \nmid p$.

Gọi k là chỉ số bé nhất mà $a_k \nmid p$ tức là

$$a_0 \vdots p, \dots, a_{k-1} \vdots p \text{ và } a_k \nmid p.$$

Ta có $k \leq m \leq n-1$. Gọi c_i là hệ số của $f(x)$. Với

$c_i \leq n-1$ ta có $c_i \vdots p$. Vậy

$$c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \dots + a_0b_k \vdots p \Rightarrow a_kb_0 \vdots p.$$

Mâu thuẫn.

• Trường hợp 2: Cả hai số a_0, b_0 chia hết cho p .

Gọi r là chỉ số bé nhất mà $a_r \nmid p$ và s là chỉ số bé nhất mà $b_s \nmid p$, tức là:

$$a_0 \vdots p, \dots, a_{r-1} \vdots p, a_r \nmid p \text{ và } b_0 \vdots p, \dots, b_{s-1} \vdots p, b_s \nmid p.$$

Đặt $v = r + s$. Ta có:

$$c_v = a_rb_s + \sum_{i+j=v} a_ib_j, \text{ trong đó } (i, j) \neq (r, s).$$

Ta có với $c_i \leq n-1$ thì $c_i \vdots p$. Tổng $\sum_{i+j=v} a_ib_j$

trong đó $(i, j) \neq (r, s)$ chia hết cho p nên suy ra

$v = n$. Vậy $r + s = n$. Suy ra $r = m, s = t$.

Như vậy:

$$a_0 \vdots p, \dots, a_{m-1} \vdots p, b_0 \vdots p, \dots, b_{t-1} \vdots p.$$

Giả sử $m, t \geq 2$. Ta có $p = c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \vdots p^2$.

Mâu thuẫn. Vậy phải có $m = 1$ hoặc $t = 1$.

Giả sử $m = 1$. Khi đó $g(x)$ có nghiệm nguyên $h \in \mathbb{Z}$. Suy ra $f(x)$ có nghiệm nguyên $h \in \mathbb{Z}$.

Ta có $h^n = ph^2 - ph - p^2 \Rightarrow h \neq 0, h \neq p \Rightarrow |h| \geq p$.

Vì $n > 4, |h| \geq p$ suy ra:

$$|h|^n > |h|^4 \geq p^2 h^2 \Rightarrow p^2 h^2 < |h|^n = |ph^2 - ph - p^2| \leq ph^2 + p|h| + p^2.$$

$$\Rightarrow p < 1 + \frac{1}{|h|} + \frac{p}{h^2} \leq 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{2}{p} \leq 2.$$

Mâu thuẫn.

Nhận xét. Đây là bài toán tương đối khó. Ngoài hai bạn trên, chỉ có thêm hai bạn nữa tham gia giải nhưng lời giải chưa hoàn chỉnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/536. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$f(xy - y) = f(x)f(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thỏa mãn bài toán.

Thay $y = 1$ vào (1) và sử dụng điều kiện $f(1) = 0$ ta được:

$$f(x - 1) = f(x) - 1$$

hay

$$f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp:

$$f(x + n) = f(x) + n, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $f(x + k) = f(x) + k$. Khi đó, với $n = k + 1$ thì

$$f(x + k + 1) = f(x + 1) + k = f(x) + k + 1.$$

Tương tự, ta nhận được (bằng chứng minh quy nạp):

$$f(x + n) = f(x) + n, \forall n \in \mathbb{Z}^-.$$

Vậy nên $f(x + n) = f(x) + n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Do đó:

$$f(x) = f(1 - (1 - x))$$

$$= f(1) - (1 - x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Từ (1) thay $x - 1 = n, y = \frac{1}{n}$ với $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ và sử

dụng hệ thức $f(n + 1) = n$, ta thu được:

$$f(1) = f(n + 1)f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n + 1) - 1$$

$$= nf\left(\frac{1}{n}\right) + n - 1$$

hay

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - 1, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Tiếp theo, trong (1) thay $x = m + 1, y = \frac{1}{n}$, ta thu được:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m + 1)f\left(\frac{1}{n}\right) + f(m + 1) - 1$$

$$= m\left(\frac{1}{n} - 1\right) + m - 1 = \frac{m}{n} - 1, \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra:

$$f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Kết luận. Các hàm số thỏa mãn các điều kiện bài ra là $f(x) = x - 1$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm cơ bản với cặp biến tự do trên tập số hữu tỷ. Đa số các bạn gửi bài giải đều giải theo cách đã trình bày ở trên.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Định: Vũ Tiến Đạt, 11T, Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Thành Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn; **Lâm Đồng:** Nguyễn Đình Lê Vũ, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đà Nẵng:** Nguyễn Ngọc Thạch, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Lư Gia Hưng, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12T, THPT chuyên Hưng Yên; **Sóc Trăng:** Lê Hà Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/536. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại E và cắt lại (O) tại P . P' là điểm đối xứng với P qua BC . AP' cắt BC tại K ; L là trực tâm tam giác AEK . Chứng minh đường tròn đường kính AL tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC .

Lời giải. (Theo bạn Lê Hồ Trọng Tín, THPT Kế Sách, Sóc Trăng).

Gọi (O_e) là đường tròn Euler của tam giác ABC ; H là trực tâm của tam giác ABC ; M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AP' ; T là giao điểm của EL và AK ; Q là điểm đối xứng của N qua O_e .

Dễ thấy NO_e là đường trung bình của hình thang $AHOP'$ ($AH \parallel P'O$).

Dễ thấy O, M thuộc PP' và $\overline{AH} = 2\overline{OM}$. Vậy

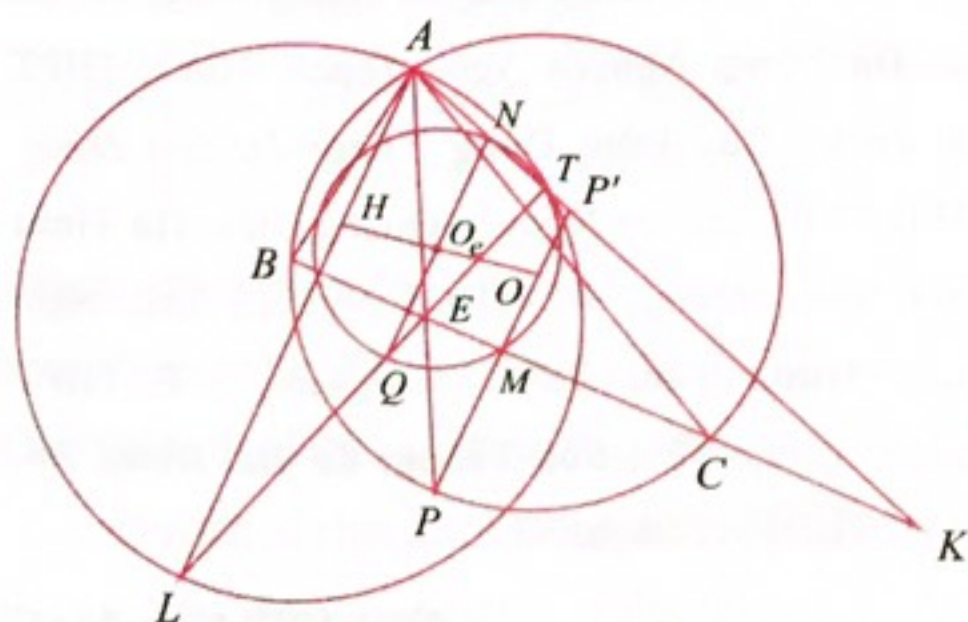
$$\begin{aligned}\overline{NO_e} &= \frac{1}{2}(\overline{AH} + \overline{P'O}) = \frac{1}{2}(2\overline{OM} + \overline{P'M} + \overline{MO}) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{MP}) = \frac{1}{2}\overline{OP}.\end{aligned}$$

Do đó $NO_e = |\overline{NO_e}| = \frac{1}{2}|\overline{OP}| = \frac{1}{2}R$.

Điều đó có nghĩa là $N \in (O_e)$. Do đó $TN \perp TQ$.

Kết hợp với $TN \equiv AK \perp TL$, suy ra $Q \in TL$.

Vậy, chú ý rằng $N \in TA$ và $NQ \equiv NO_e \parallel AH \equiv AL$, suy ra (O_e) tiếp xúc với đường tròn đường kính AL tại T .



Nhận xét. Bài toán này không khó, nhưng ngoài bạn Tín, chỉ có bảy bạn tham gia giải: **Hưng Yên:** Nguyễn Văn Khiêm, 10T1, Trần Văn Quân, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Đỗ Đại Phong, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Nguyễn Đình Lê Vũ; 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Sóc Trăng:** Phạm Nguyên Khang, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/536. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, theo thứ tự xa dần nguồn âm. Mức cường độ âm tại A, B, C lần lượt là 40 dB; 35,9 dB và 30 dB. Biết khoảng cách giữa A và B là 30 m, Tính khoảng cách giữa B và C .

Lời giải. Ta có:

$$L_A = 10 \lg \frac{I_A}{I_0} = 40$$

$$\Leftrightarrow I_A = 10^{-12} \cdot 10^4 = 10^{-8} \text{ W/m}^2;$$

$$\begin{aligned}L_B &= 10 \lg \frac{I_B}{I_0} = 35,9 \Leftrightarrow I_B = 10^{-12} \cdot 10^{3,59} \\ &= 3,89 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_C &= 10 \lg \frac{I_C}{I_0} = 30 \Leftrightarrow I_C = 10^{-12} \cdot 10^3 \\ &= 10^{-9} \text{ W/m}^2;\end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_A = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_A^2} = 10^{-8} \\ I_B = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_B^2} = 0,389 \cdot 10^{-8} \\ R_B - R_A = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_B - R_A = 30 \\ 0,6237R_B - R_A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_B = 79,72 \text{ m} \\ R_A = 49,72 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_A = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_A^2} = 10^{-8} \\ I_C = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_C^2} = 0,1 \cdot 10^{-8} \\ R_A = 49,72 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0,3162R_C = R_A \Leftrightarrow R_C = 157,24 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa B và C là:

$$BC = R_C - R_B \approx 78 \text{ m}.$$

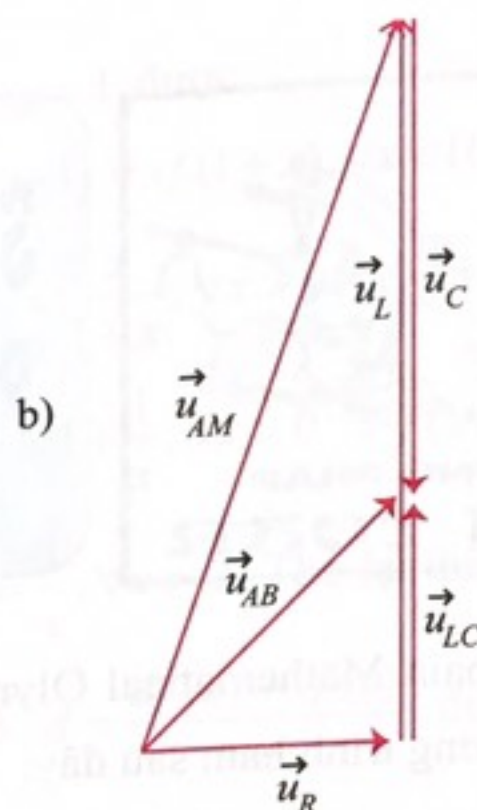
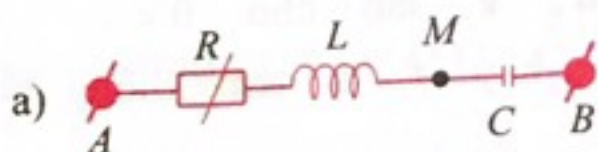
Nhận xét. Chúc mừng bạn duy nhất có câu trả lời đúng cho đề ra kì này: Nguyễn Huy Hoàng, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/536. Đoạn mạch điện AB gồm đoạn mạch AM mắc nối tiếp với đoạn mạch MB . Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn MB chứa tụ điện. Mắc vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có tần số góc ω (với $2\omega^2 LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại, và điện áp giữa hai đầu đoạn mạch AM có biểu thức là: $u_{AM} = 240\sqrt{2} \cos \omega t$ (V). Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu của đoạn mạch AB .

Lời giải.

Sơ đồ mạch điện được biểu diễn như hình a). Ta có giản đồ vec tơ hình b).



$$\text{Với } 2\omega^2 LC = 3 \Rightarrow Z_L = 1,5Z_C \quad (1).$$

Khi công suất trên mạch AB cực đại:

$$R_0 = Z_L - Z_C = 0,5Z_C \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có quan hệ:

$$Z_L = 3R_0; \quad Z_L = 1,5Z_C = 3R_0.$$

Theo giản đồ vectơ, độ lệch pha giữa u_{AM} và u_R là φ_{AM} :

$$\tan \varphi_{AM} = \frac{Z_L}{R} = 3 \Rightarrow \varphi_{AM} \approx 72^\circ.$$

Độ lệch pha giữa u_{AB} và u_R là φ_{AB} :

$$\tan \varphi_{AB} = \frac{Z_L - Z_C}{R} = 1 \Rightarrow \varphi_{AB} = 45^\circ;$$

Vậy u_{AB} trễ pha hơn u_{AM} góc $27^\circ = \frac{3\pi}{20}$ (rad)

$\Rightarrow$ pha của u_{AB} là φ_{AB} :

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AM} - \frac{3\pi}{20} = \omega t - \frac{3\pi}{20} \text{ (rad)}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{U_{AB}}{U_{AM}} = \sqrt{\frac{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R^2 + Z_L^2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

$$\text{suy ra: } U_{0AB} = U_{0AM} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 240 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 48\sqrt{10} \text{ (V)}.$$

Phương trình của điện áp giữa hai đầu đoạn mạch

$$AB: u_{AB} = 48\sqrt{10} \cos \left(\omega t - \frac{3\pi}{20} \right) \text{ (V)}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG



SÁU LỜI GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

NGUYỄN TÀI CHUNG (GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Trong đề thi Spain Mathematical Olympiad 2018 có bài toán phương trình hàm sau đây:

BÀI TOÁN. *Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:*

$$f(f(x) + y) = xf(1 + xy), \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Đây là một bài toán hay và khó. Bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày sáu lời giải cho bài toán phương trình hàm trên. Qua đó; nhằm mục đích giới thiệu với bạn đọc những kỹ năng, kỹ thuật cơ bản khi giải phương trình hàm; đó là thực hiện các phép thế đơn giản cũng như các phép thế tinh tế; chứng minh hàm số tuần hoàn; chứng minh hàm số đơn điệu; chứng minh hàm số đơn ánh, toàn ánh; vận dụng tính đơn ánh, toàn ánh; chứng minh hàm số là hàm hằng; kỹ thuật tạo ra dãy số và vận dụng giới hạn; mối liên hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục của hàm số. Đồng thời qua bài viết này; chúng tôi cũng muốn nhấn nhủ với bạn đọc rằng; đứng trước một bài toán phương trình hàm; chúng ta cần quan sát, xem xét thật kỹ đề bài; chẳng hạn như tập xác định, giá trị của hàm số, phương trình hàm, tính chẵn lẻ, tính đơn điệu,...; đề từ đó chúng ta thực hiện các phép thế từ đơn giản đến phức tạp để tạo ra các hệ quả; dự đoán và chứng minh các tính chất của hàm số; rồi cố gắng kết hợp các kết quả thu được với nhau để tìm ra hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Hơn thế nữa, việc giải xong bài toán chưa phải là kết thúc; mà việc tìm tòi, suy nghĩ thêm, vận dụng sáng tạo các kiến thức đã có để tiếp cận bài toán; sẽ giúp chúng ta có được những lời giải mới, làm phong phú

thêm kiến thức, kỹ năng cũng như phương pháp giải toán.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = xf(1 + xy), \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (1).$$

Lời giải 1. Ta chứng minh f là hàm không tăng. Giả sử tồn tại hai số u, v sao cho $0 < u < v$ và $f(u) < f(v)$.

Đặt $d = \frac{vf(v) - uf(u)}{v - u}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} d - f(v) &= \frac{vf(v) - uf(u)}{v - u} - f(v) \\ &= \frac{u[f(v) - f(u)]}{v - u} > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $d > f(v)$. Vì thế $d > f(v) > f(u)$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(d) &= f(f(u) + [d - f(u)]) \\ &= uf(1 + u[d - f(u)]) \\ &= uf\left(1 + u\left[\frac{vf(v) - uf(u)}{v - u} - f(u)\right]\right) \\ &= uf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)]}{v - u}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } f(d) = vf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)]}{v - u}\right).$$

Suy ra:

$$vf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)]}{v - u}\right) = uf\left(1 + \frac{uv[f(v) - f(u)]}{v - u}\right).$$

Do đó $u = v$. Đến đây ta gặp mâu thuẫn, vì thế, với mọi u, v sao cho $0 < u < v$ ta có $f(u) \geq f(v)$, hay f là hàm không tăng trên $(0; +\infty)$.

Tiếp theo ta tính $f(1)$. Giả sử $f(1) \neq 1$. Thay $x = 1$ vào (1) được:

$$f(f(1) + y) = f(1 + y), \forall y > 0 \quad (2).$$

Từ (2) thay y bởi $y - 1$ ta được:

$$f(y) = f(y + [f(1) - 1]), \forall y > 1 \quad (3).$$

Từ (2) thay y bởi $y - f(1)$ ta được:

$$f(y) = f(y + [1 - f(1)]), \forall y > f(1) \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(u + |f(1) - 1|) = f(u), \forall u > \max\{1, f(1)\}.$$

Đặt $x_0 = \max\{1, f(1)\}$ và $T = |f(1) - 1|$. Khi đó $f(x) = f(x + T), \forall x > x_0$. Quy nạp ta được:

$$f(x) = f(x + nT), \forall x > x_0, \forall n = 1, 2, \dots \quad (5).$$

Từ (5) và do f là hàm không tăng trên $(x_0; +\infty)$, suy ra f là hàm hằng trên $(x_0; +\infty)$ (thật vậy, với $a > b > x_0$, tồn tại số nguyên dương n đủ lớn để $x_0 < b < a < b + nT$, suy ra:

$$f(b) \geq f(a) \geq f(b + nT) = f(b).$$

Do đó $f(a) = f(b)$, vậy f là hàm hằng trên $(x_0; +\infty)$). Tuy nhiên khi đó, với mọi x, y thuộc $(x_0; +\infty)$ ta có vế trái của (1) là $f(f(x) + y)$ trở thành hằng số, còn vế phải của (1) là $xf(1 + xy)$ thì không thể bằng hằng số, ta gặp mâu thuẫn. Vậy $f(1) = 1$. Với $x > 1$, thay $y = 1 - \frac{1}{x}$ vào (1) được:

$$f\left(f(x) + 1 - \frac{1}{x}\right) = xf(x), \forall x > 1 \quad (6).$$

Nếu $f(x) > \frac{1}{x}$ thì

$$f(x) + 1 - \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow f\left(f(x) + 1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(1) = 1,$$

điều này mâu thuẫn với vế phải của (6) là $xf(x) > 1$. Tương tự, nếu $f(x) < \frac{1}{x}$ thì cũng dẫn

đến mâu thuẫn. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1 \quad (7).$

Từ (1) cho $y = 1$ được:

$$f(f(x) + 1) = xf(1 + x), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x) + 1} = \frac{x}{1 + x}, \forall x > 0 \text{ (do (7))}$$

$$\Rightarrow f(x) + 1 = 1 + \frac{1}{x}, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Chú ý. Số $d = \frac{uf(u) - vf(v)}{u - v}$ được tìm ra như

sau: Ta có:

$$f(d) = f(f(u) + [d - f(u)]) \stackrel{(1)}{=} uf(1 + du - uf(u)),$$

$$f(d) = f(f(v) + [d - f(v)]) \stackrel{(1)}{=} vf(1 + dv - vf(v)).$$

Khi đó:

$$uf(1 + du - uf(u)) = vf(1 + dv - vf(v)).$$

Vậy để tạo ra mâu thuẫn là $u = v$, ta cần chọn d sao cho $1 + du - uf(u) = 1 + dv - vf(v)$

$$\Rightarrow du - uf(u) = dv - vf(v)$$

$$\Rightarrow d(u - v) = uf(u) - vf(v)$$

$$\Rightarrow d = \frac{uf(u) - vf(v)}{u - v}.$$

Còn việc kiểm chứng $d > f(v)$ được tiến hành như ở lời giải.

Lời giải 2. Thay $x = 1$ vào phương trình ban đầu ta được $f(f(1) + y) = f(1 + y), \forall y \in (0; +\infty)$. Từ đẳng thức này ta hướng đến việc chỉ ra hàm số f là đơn ánh hoặc chỉ ra hàm số này là đơn điệu. Để chỉ ra hàm số f có một trong các tính chất đó ta làm như sau: lấy hai số phân biệt $a > b > 0$, ta cần so sánh $f(a), f(b)$. Từ (1) ta có:

$$f(x + f(a)) = af(ax + 1), \forall x \in (0; +\infty);$$

$$f(y + f(b)) = bf(by + 1), \forall y \in (0; +\infty).$$

Ta sẽ chọn x, y sao cho:

$$\begin{cases} x + f(a) = y + f(b) \\ 1 + ax = 1 + by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + f(b) - f(a) \\ 1 + a(y + f(b) - f(a)) = 1 + by \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + f(b) - f(a) \\ y = \frac{a(f(a) - f(b))}{a - b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b(f(a) - f(b))}{a - b} \\ y = \frac{a(f(a) - f(b))}{a - b} \end{cases} \quad (*).$$

Do $x, y > 0$ nên nếu ta có $a > b > 0$ thì việc chọn được $x, y > 0$ chỉ làm được khi $f(a) > f(b)$. Từ phân tích ở trên ta thấy với $a > b > 0$; khi đó nếu $f(a) > f(b)$ thì với cách chọn x, y như trong (*) ta được:

$$\begin{cases} x + f(a) = y + f(b) \\ 1 + ax = 1 + by \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x + f(a)) = f(y + f(b)) \\ f(1 + ax) = f(1 + by) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} af(1 + ax) = bf(1 + by) \\ f(1 + ax) = f(1 + by) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b \text{ (vô lý)}.$$

Do đó nếu $a > b$ thì $f(a) \leq f(b)$. Như vậy f là hàm số không tăng. Đến đây ta trình bày tương tự như lời giải 1.

Chú ý. Ta còn có thể chứng minh hàm f giảm bằng cách khác như sau:

Giả sử tồn tại $x > z > 0$ để $f(x) > f(z)$. Ta xét

$$y = \frac{zx(f(x) - f(z))}{x - z} > 0.$$

Khi đó $xy - yz = zxf(x) - zxf(z)$

$$\Rightarrow zxf(z) + xy = zxf(x) + yz$$

$$\Rightarrow f(z) + \frac{y}{z} = f(x) + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow f\left(f(z) + \frac{y}{z}\right) = f\left(f(x) + \frac{y}{x}\right)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} zf(1 + y) = xf(1 + y) \Rightarrow z = x.$$

Ta gặp mâu thuẫn. Vậy f giảm.

Lời giải 3. Giả sử tồn tại $x > y > 0$ sao cho

$$f(x) > f(y). \text{ Khi đó } z = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \text{ và}$$

$$zx - zy = f(x) - f(y) \Leftrightarrow f(x) + yz = f(y) + xz$$

$$\Rightarrow f(f(x) + yz) = f(f(y) + xz)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} xf(1 + xyz) = yf(1 + xyz);$$

suy ra $x = y$, ta gặp mâu thuẫn. Do đó, nếu $x > y > 0$ thì $f(x) \leq f(y)$ hay f giảm.

Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử f không phải là đơn ánh. Khi đó tồn tại $b > a > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$. Từ (1) lần lượt cho $x = a$, $x = b$ ta

$$\text{suy ra: } af(ay + 1) = f(y + f(a)) =$$

$$= f(y + f(b)) = bf(by + 1), \forall y \in (0; +\infty) \quad (8).$$

Từ (8) ta có:

$$f(1 + bx) = \delta f(1 + ax), \forall x > 0 \quad (\delta = \frac{a}{b} \in (0; 1)).$$

Từ đây thay x bởi $\frac{x}{b}$, ta được:

$$f(1 + x) = \delta f(1 + \delta x), \forall x > 0.$$

Áp dụng kết quả này liên tiếp, ta được:

$$f(1 + x) = \delta^n f(1 + \delta^n x), \forall x > 0, n = 1, 2, \dots$$

Từ đây cho $x = 1$ ta được:

$$f(2) = \delta^n f(1 + \delta^n), \forall n = 1, 2, \dots$$

Do f giảm nên $f(1 + \delta^n) \leq f(1)$, suy ra:

$$f(2) \leq \delta^n f(1), \forall n = 1, 2, \dots \quad (9).$$

Mà $0 < \delta < 1$ nên ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta^n f(1)) = 0$; do đó

khi cho số nguyên dương n đủ lớn thì $\delta^n f(1) < f(2)$, mâu thuẫn với (9). Vậy f là đơn

ánh. Ta có: $f\left(f(x) + \frac{f(z)}{x}\right) \stackrel{(1)}{=} xf(1 + f(z))$

$$\stackrel{(1)}{=} xzf(1 + z), \forall x, z > 0.$$

Từ đây, thay x bởi $\frac{x}{z}$ ta được:

$$f\left(f\left(\frac{x}{z}\right) + \frac{zf(z)}{x}\right) = xf(1 + z) = xf\left(1 + x \cdot \frac{z}{x}\right)$$

$$\stackrel{(1)}{=} f\left(f(x) + \frac{z}{x}\right), \quad \forall x, z > 0.$$

Mà f đơn ánh nên

$$f\left(\frac{x}{z}\right) + \frac{zf(z)}{x} = f(x) + \frac{z}{x}, \quad \forall x, z > 0 \quad (10).$$

Từ (10) thay x bởi zx ta được:

$$f(x) + \frac{f(z)}{x} = f(zx) + \frac{1}{x}, \quad \forall x, z > 0 \quad (11).$$

Từ (11) đổi vị trí z và x ta suy ra:

$$f(x) + \frac{f(z)}{x} - \frac{1}{x} = f(z) + \frac{f(x)}{z} - \frac{1}{z}, \quad \forall x, z > 0.$$

Từ đây, cho $z = 2$ ta được:

$$f(x) + \frac{f(2)}{x} - \frac{1}{x} = f(2) + \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}f(x) = \frac{1-f(2)}{x} + f(2) - \frac{1}{2}, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2-2f(2)}{x} + 2f(2) - 1, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\beta}{x} + 1 - \beta, \quad \forall x > 0 \quad (\beta = 2 - 2f(2)).$$

Thay vào (1) ta được $\beta = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Chú ý. Có thể chứng minh f đơn ánh bằng cách lập luận khác như sau: Từ (8) ta có:

$$f(1+ax) = \alpha f(1+bx), \quad \forall x > 0 \quad (\alpha = \frac{b}{a} > 1).$$

Từ đây thay x bởi $\frac{x}{a}$, ta được:

$$f(1+x) = \alpha f(1+\alpha x), \quad \forall x > 0.$$

Áp dụng kết quả này liên tiếp, ta được:

$$f(1+x) = \alpha^n f(1+\alpha^n x), \quad \forall x > 0, n = 1, 2, \dots$$

Từ đây, thay x bởi $\frac{1}{\alpha^n}$, ta được:

$$f\left(1 + \frac{1}{\alpha^n}\right) = \alpha^n \cdot f(2), \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (9j).$$

Mà f giảm nên kết hợp với (9j) ta có:

$$f(1) \geq f\left(1 + \frac{1}{\alpha^n}\right) = \alpha^n f(2), \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (10j).$$

Do $\alpha > 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^n f(2)) = +\infty$, vì thế từ (10j) cho số nguyên dương n đủ lớn ta nhận được điều mâu thuẫn. Như thế, f đơn ánh. Sau khi chứng minh được f là đơn ánh, ta còn có thể giải bằng cách khác như sau:

$$\text{Ta có: } f(f(x)+1) = xf(x+1), \quad \forall x > 0.$$

Kết hợp với (1), suy ra với mọi $x > 0, y > 0$ ta có:

$$yf(f(x)+y) = xyf(xy+1) = f(f(xy)+1).$$

Từ (1) thay y bởi $\frac{f(y)-1+x}{x}$ ta được:

$$f\left(f(x) + \frac{f(y)-1+x}{x}\right) = xf(f(y)+x)$$

$$\stackrel{(1)}{=} xyf(xy+1) = f(f(xy)+1), \quad \forall x > 1, y > 0.$$

Mà f đơn ánh nên

$$f(x) + \frac{f(y)-1+x}{x} = f(xy) + 1, \quad \forall x > 1, y > 0.$$

Đặt $g(x) = xf(x) - 1$. Khi đó với mọi $x > 1, y > 1$ ta có:

$$\frac{g(x)+1}{x} + \frac{g(y)+1}{y} - 1 + x = \frac{g(xy)+1}{xy} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)+1}{x} + \frac{g(y)+1-y}{xy} = \frac{g(xy)+1}{xy}$$

$$\Leftrightarrow yg(x) + y + g(y) + 1 - y = g(xy) + 1$$

$$\Leftrightarrow yg(x) + g(y) = g(xy).$$

Đổi chỗ x và y ta được: $xg(y) + g(x) = g(xy)$.

Do đó: $yg(x) + g(y) = xg(y) + g(x)$.

Vậy: $2g(x) + g(2) = xg(2) + g(x)$

$$\Rightarrow g(x) = C(x-1) \quad (C = g(2))$$

$$\Rightarrow f(x) = C + \frac{1-C}{x}.$$

Thay vào (1) ta được $C = 0$ hay $f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 1$.

Đến đây ta làm tương tự như cách 1.

Lời giải 4. Ta có:

$$f(f(x)+y) = xf(xy+1), \quad \forall x, y > 0 \quad (1).$$

Giả sử tồn tại $x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ sao cho $\frac{f(x)-1}{x-1} > 0$, khi đó từ (1) thay y bởi $\frac{f(x)-1}{x-1}$ ta

$$\text{được: } f\left(\frac{xf(x)-1}{x-1}\right) = xf\left(\frac{xf(x)-1}{x-1}\right) \Rightarrow x=1;$$

đến đây ta gặp mâu thuẫn.

$$\text{Vậy } \frac{f(x)-1}{x-1} \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \setminus \{1\} \quad (i).$$

Tính chất (i) có nghĩa là: nếu $x > 1$ thì $f(x) \leq 1$;
nếu $0 < x < 1$ thì $f(x) \geq 1$.

Xét $x > 1$; từ (1) cho $y = \frac{x-1}{x}$ ta được:

$$f\left(1 - \frac{1}{x} + f(x)\right) = xf(x) \quad (2i).$$

Nếu $f(x) > \frac{1}{x}$ thì $1 + f(x) - \frac{1}{x} > 1$, suy ra:

$$f\left(1 + f(x) - \frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{do (2i)}}{=} xf(x) > 1, \text{ mâu thuẫn với tính chất (i).}$$

Nếu $f(x) < \frac{1}{x}$ thì $0 < 1 + f(x) - \frac{1}{x} < 1$

$$\Rightarrow f\left(1 + f(x) - \frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{do (ii)}}{=} xf(x) < 1,$$

mâu thuẫn với tính chất (i).

Từ hai trường hợp trên dẫn tới

$$f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1 \quad (3i).$$

Bây giờ xét $x > 0$, ta có:

$$\frac{1}{1+f(x)} \stackrel{\text{do (3i)}}{=} f\left(1+f(x)\right) \stackrel{\text{do (1)}}{=} xf(x+1)$$

$$\stackrel{\text{do (3i)}}{=} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow 1+f(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Thử lại thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Chú ý. Từ "kết cấu" của phương trình hàm (1) ta dự đoán $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

Để $f(y+f(x)) = f(xy+1)$, ta xét phương trình:

$$y+f(x) = xy+1 \Rightarrow y = \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

Do dự đoán được $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ nên ta cần chứng minh

$xf(x) = 1$. Để $xf(xy+1) = xf(x)$, cần có

$$xy+1 = x \Rightarrow y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Lời giải 5. Ta có:

$$f(y+f(x)) = xf(xy+1), \forall x, y > 0 \quad (1).$$

Với $x > 1$; từ (1) ta cho $y = \frac{x-1}{x}$ (để cho

$xy+1 = x$), ta được:

$$f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) = xf(x), \forall x > 1 \quad (2t).$$

Từ (1) thay x bởi $\frac{x-1}{x} + f(x)$ và thay y bởi x ,

$$\begin{aligned} \text{ta được: } f\left(f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) + x\right) \\ = \left[\frac{x-1}{x} + f(x)\right] f(x + xf(x)), \forall x > 1 \quad (3t). \end{aligned}$$

Từ (2t) và (3t) suy ra: $\frac{x-1}{x} + f(x) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x-1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1 \quad (4t).$$

Từ (1) cho $y=1$ ta được:

$$f(f(x)+1) = xf(1+x), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)+1} = \frac{x}{1+x}, \forall x > 0 \quad (\text{do (4t)})$$

$$\Rightarrow f(x)+1 = 1 + \frac{1}{x}, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Chú ý. Lời giải 5 rất ngắn gọn, chỉ dùng các phép thế, có thể là lời giải ngắn gọn nhất. Tuy nhiên, để tìm được lời giải đó là điều không dễ. Bài toán này; đã được chúng tôi giảng cho nhiều đội tuyển học sinh giỏi của các tỉnh, thành phố, có những

đội rất mạnh; nhưng cũng chưa thấy em học sinh nào đưa ra được lời giải này. Tiếp theo, chúng ta cùng đi đến lời giải 6. Lời giải 6 này dài dòng và phức tạp nhưng chứa những lập luận hay và khó; qua lời giải 6 này chúng ta sẽ thấy được mối liên hệ đẹp giữa tính đơn điệu và tính liên tục của hàm số; lời giải 6 này đã thực sự sử dụng các kỹ thuật của giải tích.

Lời giải 6. Từ (1) cho $y = \frac{1}{x}$ ta được:

$$f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = xf(2); \forall x > 0.$$

Từ đây thay x bởi $\frac{x}{f(2)}$ ta suy ra f là toàn ánh.

Tương tự như lời giải 4, ta chứng minh được: nếu $x > 1$ thì $f(x) \leq 1$;

nếu $0 < x < 1$ thì $f(x) \geq 1$.

Ta chứng minh được f đơn ánh và $f(1) = 1$. Như vậy nếu $x > 1$ thì $f(x) < 1$; nếu $0 < x < 1$ thì $f(x) > 1$. Nếu tồn tại $x > 0$ sao cho $f(f(x)) < x$, thì từ (1) thay x bởi $f(x)$ và thay y bởi $x - f(f(x))$ ta được:

$$f(x) = f(x)f(1 + f(x)(x - f(f(x))));$$

suy ra $f(1 + f(x)(x - f(f(x)))) = 1$; ta gặp mâu thuẫn. Do đó $f(f(x)) \geq x, \forall x > 0$.

Với $x > 0$ và $y > 0$ ta có $1 + xy > 1$ nên $f(1 + xy) < 1$; do đó:

$$f(f(x) + y) = xf(xy + 1) < x \leq f(f(x)).$$

Vậy $f(f(x) + y) < f(f(x)), \forall x, y > 0$; từ đây và f toàn ánh suy ra:

$f(x + y) < f(x), \forall x, y > 0$; do đó f giảm nghiêm ngặt.

Bổ đề. Nếu $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là toàn ánh và là hàm số giảm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}^+$ thì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Giả sử $a > 0$.

Với mỗi dãy số dương (x_n) sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ ta

cần chứng minh: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$. Đặt

$$u_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, v_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Khi đó ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ lần lượt là giới hạn

trên và giới hạn dưới của dãy số (x_n) , suy ra:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$. Dễ thấy (u_n) là dãy giảm,

(v_n) là dãy tăng và $v_n \leq x_n \leq u_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Do f là hàm số giảm nên:

$$f(v_n) \geq f(x_n) \geq f(u_n), \forall n = 1, 2, \dots \quad (1h).$$

Do (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới (bởi v_1) và f là hàm giảm nên $(f(u_n))$ là dãy tăng và bị chặn trên (bởi $f(v_1)$):

$$f(u_1) \leq \dots \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq \dots \leq f(v_1);$$

do đó dãy $(f(u_n))$ hội tụ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b \geq f(u_1) > 0.$$

Mặt khác do f là toàn ánh nên $\exists z \in \mathbb{R}^+ : f(z) = b$.

Từ đó ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(z), f(u_n) \leq f(z)$$

$$\Rightarrow u_n \geq z, \forall n = 1, 2, \dots \quad (2h).$$

Do (v_n) là dãy tăng và bị chặn trên (bởi u_1) và f là hàm giảm nên dãy $(f(v_n))$ giảm và bị chặn dưới (bởi $f(u_1)$):

$$f(v_1) \geq \dots \geq f(v_n) \geq f(v_{n+1}) \geq \dots \geq f(u_1);$$

do đó dãy $(f(v_n))$ hội tụ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = c \geq f(u_1) > 0.$$

Mặt khác do f là toàn ánh nên $\exists t \in \mathbb{R}^+ : f(t) = c$.

Từ đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(t), f(v_n) \geq f(t)$

$$\Rightarrow v_n \leq t, \forall n = 1, 2, \dots \quad (3h).$$

Mặt khác, $f(v_n) \geq f(u_n), \forall n = 1, 2, \dots$ nên chuyển qua giới hạn ta được:

$$f(t) \geq f(z) \Rightarrow t \leq z \quad (4h).$$

Từ (2h), (3h), (4h) ta thu được:

$$v_n \leq t \leq z \leq u_n, \forall n = 1, 2, \dots \quad (5h).$$

Từ (5h) chuyển qua giới hạn, ta được:

$z = t = a$, suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(a) \quad (6h).$$

Kết hợp (6h) và (1h) ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a).$$

Như vậy f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^+$. Bỏ đề được chứng minh.

Do f giảm ngặt và là toàn ánh nên theo bỏ đề suy ra f liên tục. Với $x > 0$ và $y > 0$ ta có:

$$f(f(x) + y) = xf(xy + 1) < x.$$

Vậy $f(f(x) + y) < x, \forall x, y > 0$. Từ đây (để ý rằng f liên tục trên $(0; +\infty)$), cho $y \rightarrow 0^+$ ta được $f(f(x)) \leq x, \forall x > 0$. Như vậy:

$$f(f(x)) = x, \forall x > 0.$$

Từ (1) thay x bởi $f(x)$ và thay y bởi $\frac{y-1}{f(x)}$ thì với mọi $x > 1, y > 1$ ta có:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{y-1}{f(x)}\right) &= f(x)f(y) \\ \Rightarrow f\left(y + \frac{x-1}{f(y)}\right) &= f(y)f(x) \\ \Rightarrow f\left(x + \frac{y-1}{f(x)}\right) &= f\left(y + \frac{x-1}{f(y)}\right). \end{aligned}$$

Mà f giảm ngặt nên

$$x + \frac{y-1}{f(x)} = y + \frac{x-1}{f(y)}, \forall x > 1, y > 1.$$

Từ đây, cho $y = 2$ ta được:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{f(x)} &= 2 + \frac{x-1}{f(2)}, \forall x > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} &= 2 - x + \frac{x-1}{f(2)}, \forall x > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} &= \frac{(1-f(2))x + 2f(2)-1}{f(2)}, \forall x > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} &= dx + e, \forall x > 1. \\ (d = \frac{1-f(2)}{f(2)}, e = \frac{2f(2)-1}{f(2)}) \end{aligned}$$

Thay vào (1), suy ra với mọi $x > 1, y > 1$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(f(x) + y) + e} &= \frac{x}{d(xy + 1) + e} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{d\left(\frac{1}{dx + e} + y\right) + e} &= \frac{x}{d(xy + 1) + e} \\ \Leftrightarrow d(xy + 1) + e &= dx\left(\frac{1}{dx + e} + y\right) + ex \\ \Leftrightarrow d(xy + 1)(dx + e) + e(dx + e) &= dx + dxy(dx + e) + ex(dx + e). \end{aligned}$$

Do f giảm ngặt nên $d \neq 0$. So sánh hệ số của x^2 ở hai vế suy ra $ed = 0$, do đó $e = 0$. Vậy:

$$d^2x(xy + 1) = dx + d^2x^2y, \forall x > 1, y > 1.$$

Từ đây suy ra $d^2 = d$, do đó $d = 1$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1$.

Từ đây, tương tự như lời giải 1, ta suy ra

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0. \text{ Thử lại đúng.}$$

Chú ý. Tương tự như bỏ đề trên, ta chứng minh được những kết quả sau:

Nếu $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là toàn ánh và là hàm số tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}^+$ thì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Nếu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là toàn ánh và là hàm số đơn điệu nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Như vậy, chúng tôi đã trình bày 6 lời giải cho một bài toán phương trình hàm. Đến đây, chắc hẳn bạn đọc đã nhận ra rằng; để giỏi toán, nhiều khi cũng không cần chạy theo số lượng bài toán giải được, mà phải tiếp cận bài toán, giải toán một cách sâu sắc và thận trọng, lật đi lật lại vấn đề, biết vận dụng và tổng hợp nhiều kiến thức để khai thác các đặc trưng của từng bài toán; mạnh dạn phân tích để tìm ra các tính chất tiềm ẩn của bài toán. Làm được những điều này, sẽ giúp chúng ta có được những lời giải mới, làm phong phú thêm kiến thức, kỹ năng cũng như phương pháp giải toán.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 81

PROBLEM. For $t \geq 0$, the position of a particle moving along the x - axis is given by $x(t) = \sin t - \cos t$. What is the acceleration of the particle at the point where the velocity is first equal to 0?

Solution. The velocity and the acceleration are the first and the second derivatives of the displacement $x(t) = \sin t - \cos t$.

Hence $v(t) = \cos t + \sin t$

And $a(t) = -\sin t + \cos t$.

It is clear that $v(t)$ is first equal to 0 at $t = \frac{3\pi}{4}$.

At that point, the acceleration

$$a\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}.$$

TỪ VỰNG

position

: vị trí

particle

: hạt

acceleration

: gia tốc

velocity

: vận tốc

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)



BÀI DỊCH SỐ 79

BÀI TOÁN. Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau

1, 7, 17, 31, 49, ...

Lời giải. Các khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp của dãy số trên lần lượt là

6, 10, 14, 18, ...

Đó là một cấp số cộng với công sai bằng 4.

Ta viết lại dãy số khoảng cách trên dưới dạng:

6, 6 + 4, 6 + 4 + 4, 6 + 4 + 4 + 4, ...

Từ đó ta có mô hình:

$$49 = a_5 = 1 + 6(5 - 1) + 4[1 + 2 + (5 - 2)].$$

Và số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$a_n = 1 + 6(n - 1) + 4[1 + 2 + \dots + (n - 2)]$$

$$= 1 + 6(n - 1) + 4 \frac{(n - 2)(n - 2 + 1)}{2}$$

$$= 1 + 6(n - 1) + 2(n - 2)(n - 1)$$

$$= 1 + (n - 1)[6 + 2(n - 2)]$$

$$= 1 + 2(n - 1)(n + 1) = 2n^2 - 1.$$

Nhận xét. Bạn Trần Thị Thanh Thư, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI (Hà Nội)



Bài toán 60 là một câu trong Đề thi học sinh giỏi toán tỉnh Quảng Trị, lớp 12, năm học 2021-2022. Đây là một bài rất hay về phương trình vô tỷ. Xin giới thiệu với các bạn về bài toán này cùng 6 cách giải.

BÀI TOÁN 60. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{5} - 1 \quad (*).$$

Lời giải. Rõ ràng với $x \leq 0$ thì ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \leq 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ (*) vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$. Do đó chúng ta chỉ cần giải quyết (*) trên $(0; +\infty)$.

Với nhận xét như trên thì có khá nhiều cách để giải quyết bài này, có thể nêu ra đây một số cách giải như sau.

Cách 1. (Biến đổi tương đương).

Ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 6 - 2\sqrt{5} + 2(\sqrt{5} - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x^2 - 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow 2x + \sqrt{5} - 3 = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \quad (\text{ĐK: } 2x + \sqrt{5} - 3 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 4(\sqrt{5} - 3)x + 14 - 6\sqrt{5} = (6 - 2\sqrt{5})(x^2 - 2x + 2) \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{5} - 2)x^2 + 2 - 2\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases} \text{ Tóm lại, phương trình đã}$$

cho có đúng 1 nghiệm là $x = 1$.

Cách 2 (Vận dụng tính đơn điệu của hàm số).

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} - \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}.$$

$$\text{Rõ ràng } f'(1) = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \text{ và với } x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned} \text{thì ta có: } f'(x) &\geq \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} - \frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x+1)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x-1)^2}}} > 0 \end{aligned}$$

(Lưu ý: $(x+1)^2 > (x-1)^2$ với $x > 0$).

Điều này chứng tỏ $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Cách 3 (Chuyển về hệ).

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + \alpha \text{ và}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - \beta \text{ với điều kiện } \alpha > 1 > \beta.$$

$$(\text{Lưu ý là: } \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x+1)^2 + 1} > x+1$$

$$\text{và } \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} > x-1).$$

$$\text{Khi đó ta suy ra được: } x = \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha - 2} \text{ và}$$

$$x = \frac{\beta^2 - 2}{2\beta - 2}.$$

$$\text{Do đó ta có hệ: } \begin{cases} \alpha + \beta = \sqrt{5} - 1 & (1) \\ \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha - 2} = \frac{\beta^2 - 2}{2\beta - 2} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
 (2 - \alpha^2)(\beta - 1) &= (\beta^2 - 2)(\alpha - 1) \\
 \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - \alpha\beta(\alpha + \beta) - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha\beta[\alpha + \beta + 2] &= (\alpha + \beta + 1)^2 - 5 \quad (3).
 \end{aligned}$$

Thay (1) vào (3) thì ta suy ra được:

$$\alpha\beta = 0 \stackrel{\alpha > 1 > \beta}{\Leftrightarrow} \beta = 0.$$

Vậy nên ta suy ra được $\alpha = \sqrt{5} - 1$. Khi đó ta

$$\text{có hệ: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + \sqrt{5} - 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Cách 4 (Chứng minh tính duy nhất của nghiệm).

Rõ ràng (*) có nghiệm $x = 1$. Ta sẽ chứng minh (*) có đúng 1 nghiệm.

Giả sử (*) có 2 nghiệm là $x = a, x = b$ với $a > b > 0$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 + 2a + 2} - \sqrt{a^2 - 2a + 2} &= \sqrt{b^2 + 2b + 2} - \sqrt{b^2 - 2b + 2} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 2a + 2} - \sqrt{b^2 + 2b + 2} &= \sqrt{a^2 - 2a + 2} - \sqrt{b^2 - 2b + 2} \\
 \Leftrightarrow \frac{a + b + 2}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} + \sqrt{b^2 + 2b + 2}} &= \frac{a + b - 2}{\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 2b + 2}} \quad (**).
 \end{aligned}$$

Rõ ràng nếu $a + b - 2 \leq 0$ thì

$$VT(**) > 0 \geq VP(**).$$

Nếu $a + b - 2 > 0$ thì ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{a + b + 2}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} + \sqrt{b^2 + 2b + 2}} &> \frac{a + b - 2}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} + \sqrt{b^2 + 2b + 2} - 4} \quad (1).
 \end{aligned}$$

(Lưu ý: $\frac{M}{N} > \frac{M-r}{N-r}$ với $N > M > 0$ và $r > 0$).

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}
 &\left[\sqrt{a^2 + 2a + 2} - \sqrt{a^2 - 2a + 2} \right] \\
 &\quad + \left[\sqrt{b^2 + 2b + 2} - \sqrt{b^2 - 2b + 2} \right] \\
 &= \frac{4a}{\sqrt{(a+1)^2 + 1} + \sqrt{(a-1)^2 + 1}} + \frac{4b}{\sqrt{(b+1)^2 + 1} + \sqrt{(b-1)^2 + 1}} \\
 &< \frac{4a}{(a+1) + (a-1)} + \frac{4b}{(b+1) + (b-1)} = 4.
 \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ:

$$\begin{aligned}
 0 < \sqrt{a^2 + 2a + 2} + \sqrt{b^2 + 2b + 2} - 4 \\
 < \sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 2b + 2} \quad (2).
 \end{aligned}$$

Từ (1), (2) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
 \frac{a + b + 2}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} + \sqrt{b^2 + 2b + 2}} &> \frac{a + b - 2}{\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{b^2 - 2b + 2}}.
 \end{aligned}$$

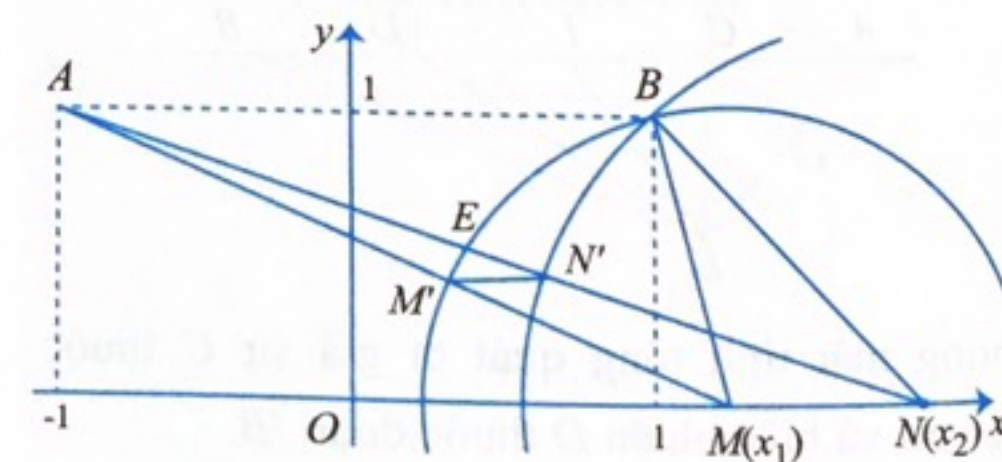
Suy ra $VT(**) > VP(**)$. Do đó phương trình (*) không thể có 2 nghiệm phân biệt. Hay nói cách khác là (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 5 (Vận dụng hình học phẳng).

Xét hệ trục Oxy với $A(-1;1)$, $B(1;1)$ như hình vẽ. Với $K(x;0)$ thì:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = KA - KB.$$

Giả sử $M(x_1;0)$, $N(x_2;0)$ với $x_2 > x_1 > 0$.



$$- \text{Ta có: } AM - BM = \sqrt{x_1^2 + 2x_1 + 2} - \sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 2}$$

$$\text{và } AN - BN = \sqrt{x_2^2 + 2x_2 + 2} - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 2}.$$

- Đường tròn (M, MB) cắt đoạn thẳng AM tại M' . Khi đó ta có: $AM' = AM - BM$.

- Đường tròn (N, NB) cắt đoạn thẳng AN tại N' . Khi đó ta có: $AN' = AN - BN$.

Gọi E là giao điểm của đường tròn $(M; MB)$ và đoạn thẳng AN . Khi đó hiển nhiên E thuộc đoạn AN' . Vì $\widehat{AM'E} > 90^\circ$ nên $\widehat{AM'N'} > 90^\circ$. Suy ra $AM' < AN' \Leftrightarrow AM - BM < AN - BN$.

Từ đây ta suy ra được:

Nếu $x > 1$ thì $f(x) > f(1) = \sqrt{5} - 1$ hay là (*) vô nghiệm trên $(1; +\infty)$.

Nếu $0 < x < 1$ thì $f(x) < f(1) = \sqrt{5} - 1$, hay là (*) vô nghiệm trên $(0; 1)$.

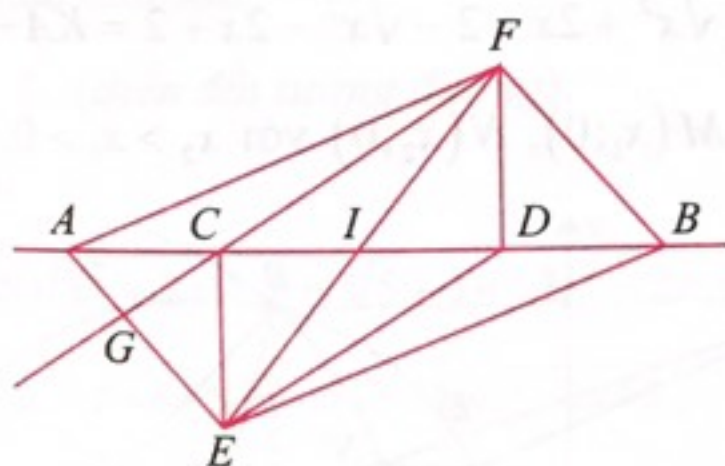
Từ những kết quả trên thì ta suy ra (*) có đúng 1 nghiệm là $x = 1$.

Cách 6 (Dựa vào một bổ đề hình học).

Bổ đề. Cho 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng và AB, CD cùng chung trung điểm I .

Chứng minh: $EA + EB = EC + ED \Leftrightarrow AB = CD$ với mọi điểm E .

Chứng minh.



Không mất tính tổng quát ta giả sử C thuộc đoạn IA và hiển nhiên D thuộc đoạn IB .

Gọi F là điểm đối xứng E qua I . Khi đó ta có:

$$EC + ED = EC + FC \leq (EG + GC) + FC = EG + GF$$

$$\leq EG + (AG + AF) = EA + AF = EA + EB.$$

Điều này chứng tỏ $EC + ED \leq EA + EB$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $C \equiv A, D \equiv B$.

Điều này cũng giúp chúng ta kết thúc chứng minh cho bổ đề.

Quay trở lại phương trình (*) đã cho, ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} + \sqrt{0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + 1^2}. \end{aligned}$$

Trong hệ trục Oxy , ta đặt $A(x+1; 1), B(0; 1), C(x-1; 1), D(2; 1)$.

Rõ ràng A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng $y = 1$. Ngoài ra các đoạn thẳng AB, CD cùng

chung trung điểm $I\left(\frac{x+1}{2}; 1\right)$. Theo bổ đề trên

thì $OA + OB = OC + OD$ tương ứng với $A \equiv D, B \equiv C$. Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} + \sqrt{0^2 + 1^2} &= \sqrt{(1-x)^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x-1=0 \end{cases} &\Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải trên của bạn La Đại Cương, Tòa soạn không nhận được thêm cách giải nào khác từ các bạn đọc gửi về.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 62 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2022.

BÀI TOÁN 62. Cho ba số thực dương a, b, c và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\alpha}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\alpha}{a^\beta + b^\beta} \geq \frac{3(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)}{2(a^\beta + b^\beta + c^\beta)}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)



BÀI TOÁN 69 (USAMO, 1978). Giả sử x là nghiệm của phương trình

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3.$$

Chứng minh khi đó x cũng là nghiệm của phương trình

$$(\sqrt{2} + 1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}.$$

Lời giải. Giả sử x là nghiệm của phương trình

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)^{2x} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^x} + 3 \quad (*).$$

Đặt $2t = (\sqrt{2} + 1)^x > 0$. Khi đó (*) trở thành

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \quad (**).$$

Trước hết ta tìm các nghiệm $t \in (-1; 1)$ của phương trình (**). Do $t \in (-1; 1)$ nên có thể đặt $t = \cos \alpha$ với $\alpha \in (0; \pi)$. Từ đó ta nhận được:

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $\alpha \in (0; \pi)$ nên $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}$.

Từ đó ta có các nghiệm $t \in (-1; 1)$ của phương trình (**) là:

$$t_1 = \cos \frac{\pi}{9}, t_2 = \cos \frac{5\pi}{9}, t_3 = \cos \frac{7\pi}{9}.$$

Ta thấy (**) là phương trình bậc 3, đã có đủ 3 nghiệm t_1, t_2, t_3 trong khoảng $(-1; 1)$ nên ta không cần xét các nghiệm ngoài khoảng đó nữa.

Vậy tập hợp các nghiệm của phương trình (**) là:

$$\{t_1, t_2, t_3\}.$$

Do t_2, t_3 không thỏa mãn điều kiện $t > 0$ nên

$$(\sqrt{2} + 1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}.$$

Điều này nghĩa là x cũng là nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} + 1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}$.

Nhận xét. Bạn Lê Ngô Nhật Huy, 111A, khu phố 1, phường 7, đường Hùng Vương, TP. Bến Tre, Bến Tre sử dụng các kết quả:

$$3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2;$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1};$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

như ở lời giải trên và các phép biến đổi lôgarit, lượng giác, cũng cho lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.7.2022.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 71. Cho elip có phương trình:

$$\frac{(x-19)^2}{19} + \frac{(y-98)^2}{98} = 1998.$$

Gọi R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt diện tích các phần của elip nằm trong các góc phần tư thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư tương ứng trên đồ thị. Hãy xác định giá trị $R_1 - R_2 + R_3 - R_4$.

KHÁNH HỮU (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 536, tháng 2 năm 2022)

Phân tích sai lầm. Học sinh đã mắc sai lầm khi đưa một biểu thức vào trong căn bậc chẵn $\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}} = \sqrt[6]{(a + \sqrt{2 - a^2})^2}$ (chỉ có số không âm mới đưa được vào căn bậc chẵn).

Học sinh còn mắc sai lầm ở bước biến đổi

$$\sqrt[6]{(1 - a^2)^2} = \sqrt[3]{1 - a^2}$$

(phép biến đổi chỉ đúng khi $1 - a^2 \geq 0$).

Lời giải đúng như sau. Sau khi tìm điều kiện $1 \neq |a| \leq \sqrt{2}$ để P xác định. Biến đổi

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}} \cdot \sqrt[6]{1 - a\sqrt{2 - a^2}}}{\sqrt[3]{1 - a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}} \cdot \sqrt[6]{2 - 2a\sqrt{2 - a^2}}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}} \cdot \sqrt[6]{(a - \sqrt{2 - a^2})^2}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}} \cdot \sqrt[3]{|a - \sqrt{2 - a^2}|}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}}. \end{aligned}$$

Ta có: $a - \sqrt{2 - a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - a^2} \leq a$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \sqrt{2} (a \neq 1) \\ a^2 \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \sqrt{2} (a \neq 1) \\ a \leq -1; a \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 1 < a \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$P = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{(a + \sqrt{2 - a^2})(a - \sqrt{2 - a^2})}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} & \text{khi } 1 < a \leq \sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt[3]{(a + \sqrt{2 - a^2})(a - \sqrt{2 - a^2})}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} & \text{khi } -\sqrt{2} \leq a < 1; a \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2(a^2 - 1)}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} & \text{khi } 1 < a \leq \sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt[3]{2(a^2 - 1)}}{\sqrt[6]{2} \sqrt[3]{1 - a^2}} & \text{khi } -\sqrt{2} \leq a < 1; a \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sqrt[6]{2} & \text{khi } 1 < a \leq \sqrt{2} \\ \sqrt[6]{2} & \text{khi } -\sqrt{2} \leq a < 1; a \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = \begin{cases} -\sqrt[6]{2} & \text{khi } 1 < a \leq \sqrt{2} \\ \sqrt[6]{2} & \text{khi } -\sqrt{2} \leq a < 1; a \neq -1 \end{cases}$$

Nhận xét. Các bạn tham gia đều phát hiện đúng sai lầm, nhưng khi đưa ra lời giải thì các bạn đều có kết quả

$$P = \begin{cases} -\sqrt[6]{2} & \text{khi } |a| \leq 1 \\ \sqrt[6]{2} & \text{khi } 1 \leq |a| < \sqrt{2} \end{cases}$$

Mặc dù giá trị P là đúng nhưng P nhận những giá trị đó với các giá trị của a là không đúng.

KIHIVI

LỜI GIẢI MỘT HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ!



Trong một kỳ thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 12 có bài toán sau:

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} |x - 6| \geq |x^2 - 5x + 9| \\ \left((x + 1 - \sqrt{x^2 + 3})(-7x^2 + 2x - 23) \leq m\sqrt{(x^2 + 3)^3} \right) \end{cases}$$

Khi chấm bài thì thầy cô thấy một lời giải của thí sinh như sau:

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Ta bình phương hai vế của bất phương trình thứ nhất được bất phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}(x-6)^2 &\geq (x^2-5x+9)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2-5x+9+x-6)(x^2-5x+9-x+6) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2-6x+15) &\leq 0 (*)\end{aligned}$$

Vì $x^2-6x+15 = (x-3)^2 + 6 \geq 6 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình (*) tương đương với

$$x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Trong điều kiện $1 \leq x \leq 3$, bằng cách nhân cả hai vế của bất phương trình thứ hai của hệ cho một đại lượng không âm là $x+1+\sqrt{x^2+3}$, ta được:

$$\begin{aligned}(x+1-\sqrt{x^2+3})(-7x^2+2x-23) &\leq m\sqrt{(x^2+3)^3} \\ \Leftrightarrow \left[(x+1)^2 - (\sqrt{x^2+3})^2\right](-7x^2+2x-23) &\leq m\sqrt{(x^2+3)^3}(x+1+\sqrt{x^2+3}) \\ \Leftrightarrow 2(x-1)[-7(x^2+3)+2(x-1)] &\leq m\sqrt{(x^2+3)^3}(x+1+\sqrt{x^2+3}) \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-1)[-7(x^2+3)+2(x-1)]}{\sqrt{(x^2+3)^3}(x+1+\sqrt{x^2+3})} &\leq m \\ \Leftrightarrow \frac{-14\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)+4\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^2}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+1} &\leq m.\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = t(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, x \in [1;3].$$

$$\text{Ta có: } t' = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2};$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vì thế cho nên khi } x \in [1;3] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{6}\right].$$

Xét hàm số

$$f(t) = 4t^2 - 14t$$

$$\Rightarrow f'(t) = 8t - 14 < 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{6}\right].$$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0; \frac{1}{6}\right]$.

Vì thế cho nên khi

$$\begin{aligned}t \in \left[0; \frac{1}{6}\right] &\Rightarrow f\left(\frac{1}{6}\right) \leq f(t) \leq f(0) \\ \Rightarrow -\frac{20}{9} \leq f(t) \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq -f(t) \leq \frac{20}{9}.\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}} + 1, \forall x \in [1;3]$.

Ta có:

$$g'(x) = \frac{3-x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}; g'(x) \geq 0, \forall x \in [1;3].$$

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[1;3]$. Vì vậy với $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(3)$ hay

$$2 \leq g(x) \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{2}.$$

Ta đặt $h(x) = -14\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right) + 4\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^2$ thì

$$\begin{aligned}0 \leq -h(x) &\leq \frac{20}{9} \\ \Rightarrow 0 \leq \frac{-h(x)}{g(x)} &\leq \frac{10}{9} \\ \Rightarrow -\frac{10}{9} \leq \frac{h(x)}{g(x)} &\leq 0\end{aligned}$$

Kết luận hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $\frac{h(x)}{g(x)} \leq m$ có nghiệm

$$x \in [1;3] \Leftrightarrow m \geq -\frac{10}{9}.$$

Theo em lời giải trên có đúng không?

TRẦN MINH VŨ

(GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 540 (6.2022)

Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội

ĐT Biên tập: 024.35121607,

ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701

Email: toanhocluotvietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VINH THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư ký Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯỜNG

TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Anh Tuấn – Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau trong một đường tròn.

6 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, lớp 9, tỉnh Nam Định, năm học 2021 - 2022.

10 Đề thi chọn học sinh giỏi cấp thành phố, lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2021 - 2022.

11 Diễn đàn dạy học toán

Phạm Duy Khánh – 5 phương pháp giải cho bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

16 Lịch sử toán học

Nguyễn Thủy Thanh – Ngọn nguồn của khái niệm giới hạn.

21 Đề ra kỳ này

T1/540, ..., T12/540, L1/540, L2/540.

Problem in This Issue

24 Giải bài kì trước

T1/536, ..., T12/536, L1/536, L2/536.

Solutions to Previous Problems

34 Phương pháp giải toán

Nguyễn Tài Chung – Sáu lời giải cho một bài toán phương trình hàm.

41 Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 81.

Bài dịch số 79.

44 Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 60. Đề bài toán 62.

45 Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 69. Đề bài toán 71.

46 Sai lầm ở đâu?

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯƠNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10

NĂM HỌC 2022 - 2023

Chuẩn mực
Khoa học
Hiện đại

Theo các Quyết định số 442/QĐ-BGDĐT ngày 28/01/2022 và Quyết định số 692/QĐ-BGDĐT ngày 11/3/2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt danh mục sách giáo khoa lớp 10 sử dụng trong các cơ sở giáo dục phổ thông, các bộ sách giáo khoa lớp 10 của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam gồm *Kết nối tri thức với cuộc sống* và *Chân trời sáng tạo* sẽ được đưa vào giảng dạy trên cả nước từ năm học 2022-2023. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã thực hiện kê khai giá bán lẻ các bộ sách với Cục Quản lý Giá - Bộ Tài chính theo đúng quy định.

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Ngữ văn 10, tập một	25.000
	Ngữ văn 10, tập hai	21.000
2	Toán 10, tập một	17.000
	Toán 10, tập hai	16.000
3	Vật lí 10	22.000
4	Hóa học 10	20.000
5	Sinh học 10	24.000
6	Lịch sử 10	23.000
7	Địa lí 10	19.000
8	Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	24.000
9	Tin học 10	25.000
10	Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	22.000
	Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	23.000
11	Âm nhạc 10	18.000
12	Mĩ thuật 10 : Hội họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Kiến trúc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế kĩ thuật đa phương tiện	7.000
	Mĩ thuật 10 : Lý luận và lịch sử kĩ thuật	6.000
	Mĩ thuật 10 : Đồ họa tranh in	6.000
	Mĩ thuật 10 : Điêu khắc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế thời trang	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế đồ họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế công nghiệp	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế kĩ thuật sân khấu điện ảnh	6.000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10	14.000
14	Giáo dục thể chất 10: Bóng đá	13.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng chuyền	12.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng rổ	11.000
	Giáo dục thể chất 10: Cầu lông	13.000
15	Giáo dục quốc phòng và an ninh 10	13.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Ngữ văn 10, tập một	24.000
	Ngữ văn 10, tập hai	20.000
2	Toán 10, tập một	21.000
	Toán 10, tập hai	17.000
3	Vật lí 10	24.000
4	Hóa học 10	21.000
5	Sinh học 10	26.000
6	Lịch sử 10	24.000
7	Địa lí 10	26.000
8	Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	27.000
9	Tin học 10	25.000
10	Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	22.000
	Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	23.000
11	Âm nhạc 10	26.000
12	Mĩ thuật 10 : Hội họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Kiến trúc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế kĩ thuật đa phương tiện	7.000
	Mĩ thuật 10 : Lý luận và lịch sử kĩ thuật	6.000
	Mĩ thuật 10 : Đồ họa tranh in	6.000
	Mĩ thuật 10 : Điêu khắc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế thời trang	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế đồ họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế công nghiệp	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế kĩ thuật sân khấu điện ảnh	6.000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 1)	16.000
	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 2)	15.000
14	Giáo dục thể chất 10: Bóng đá	13.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng chuyền	12.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng rổ	11.000
	Giáo dục thể chất 10: Cầu lông	13.000
15	Giáo dục quốc phòng và an ninh 10	13.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	15.000
2	Chuyên đề học tập Toán 10	10.000
3	Chuyên đề học tập Vật lí 10	13.000
4	Chuyên đề học tập Hóa học 10	12.000
5	Chuyên đề học tập Sinh học 10	12.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	10.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 10	7.000
8	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	11.000
9	Chuyên đề học tập Tin học 10: Khoa học máy tính	13.000
	Chuyên đề học tập Tin học 10: Tin học ứng dụng	14.000
10	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	11.000
	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	13.000
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	11.000
12	Chuyên đề học tập Mỹ thuật 10	12.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	16.000
2	Chuyên đề học tập Toán 10	11.000
3	Chuyên đề học tập Vật lí 10	15.000
4	Chuyên đề học tập Hóa học 10	13.000
5	Chuyên đề học tập Sinh học 10	17.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	12.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 10	8.000
8	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	13.000
9	Chuyên đề học tập Tin học 10: Khoa học máy tính	13.000
	Chuyên đề học tập Tin học 10: Tin học ứng dụng	14.000
10	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	11.000
	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	13.000
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	12.000
12	Chuyên đề học tập Mỹ thuật 10	12.000



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

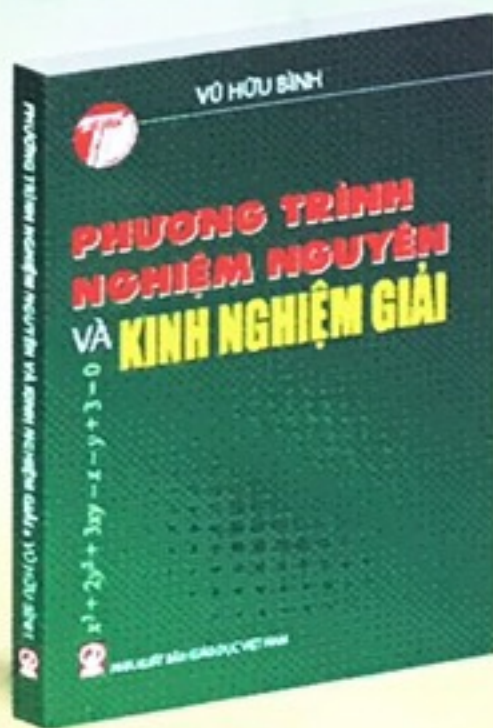
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 55.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài

toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách "đưa khó về dễ, đưa lạ về quen", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND Vũ Hữu Bình sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA SẢN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT6M22

In tại: Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2022

Giá: 18.000 đồng

<https://tietulunghopto.org>