TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 539
Tháng 5 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Edinburg (Scotland)

Nhà Toán học Scotland **John Napier**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10

NĂM HỌC 2022 - 2023

Chuẩn mực Khoa học Hiện đại

Theo các Quyết định số 442/QĐ-BGDĐT ngày 28/01/2022 và Quyết định số 692/QĐ-BGDĐT ngày 11/3/2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt danh mục sách giáo khoa lớp 10 sử dụng trong các cơ sở giáo dục phổ thông, các bộ sách giáo khoa lớp 10 của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam gồm *Kết nối tri thức với cuộc sống* và *Chân trời sáng tạo* sẽ được đưa vào giảng dạy trên cả nước từ năm học 2022-2023. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã thực hiện kê khai giá bán lẻ các bộ sách với Cục Quản lí Giá - Bộ Tài chính theo đúng quy định.

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Ngữ văn 10, tập một	25.000
	Ngữ văn 10, tập hai	21.000
2	Toán 10, tập một	17.000
	Toán 10, tập hai	16.000
3	Vật lí 10	22.000
4	Hóa học 10	20.000
5	Sinh học 10	24.000
6	Lịch sử 10	23.000
7	Địa lí 10	19.000
8	Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	24.000
9	Tin học 10	25.000
10	Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	22.000
	Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	23.000
11	Âm nhạc 10	18.000
12	Mĩ thuật 10 : Hội họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Kiến trúc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	7.000
	Mĩ thuật 10 : Lý luận và lịch sử mĩ thuật	6.000
	Mĩ thuật 10 : Đồ họa tranh in	6.000
	Mĩ thuật 10 : Điêu khắc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế thời trang	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế đồ họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế công nghiệp	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế mĩ thuật sân khấu điện ảnh	6.000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10	14.000
14	Giáo dục thể chất 10: Bóng đá	13.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng chuyền	12.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng rổ	11.000
	Giáo dục thể chất 10: Cầu lông	13.000
15	Giáo dục quốc phòng và an ninh 10	13.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Ngữ văn 10, tập một	24.000
	Ngữ văn 10, tập hai	20.000
2	Toán 10, tập một	21.000
	Toán 10, tập hai	17.000
3	Vật lí 10	24.000
4	Hóa học 10	21.000
5	Sinh học 10	26.000
6	Lịch sử 10	24.000
7	Địa lí 10	26.000
8	Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	27.000
9	Tin học 10	25.000
10	Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	22.000
	Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	23.000
11	Âm nhạc 10	26.000
12	Mĩ thuật 10 : Hội họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Kiến trúc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	7.000
	Mĩ thuật 10 : Lý luận và lịch sử mĩ thuật	6.000
	Mĩ thuật 10 : Đồ họa tranh in	6.000
	Mĩ thuật 10 : Điêu khắc	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế thời trang	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế đồ họa	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế công nghiệp	6.000
	Mĩ thuật 10 : Thiết kế mĩ thuật sân khấu điện ảnh	6.000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 1)	16.000
	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 2)	15.000
14	Giáo dục thể chất 10: Bóng đá	13.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng chuyền	12.000
	Giáo dục thể chất 10: Bóng rổ	11.000
	Giáo dục thể chất 10: Cầu lông	13.000
15	Giáo dục quốc phòng và an ninh 10	13.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	15.000
2	Chuyên đề học tập Toán 10	10.000
3	Chuyên đề học tập Vật lí 10	13.000
4	Chuyên đề học tập Hóa học 10	12.000
5	Chuyên đề học tập Sinh học 10	12.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	10.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 10	7.000
8	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	11.000
9	Chuyên đề học tập Tin học 10: Khoa học máy tính	13.000
	Chuyên đề học tập Tin học 10: Tin học ứng dụng	14.000
10	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	11.000
	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	13.000
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	11.000
12	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 10	12.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	16.000
2	Chuyên đề học tập Toán 10	11.000
3	Chuyên đề học tập Vật lí 10	15.000
4	Chuyên đề học tập Hóa học 10	13.000
5	Chuyên đề học tập Sinh học 10	17.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	12.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 10	8.000
8	Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 10	13.000
9	Chuyên đề học tập Tin học 10: Khoa học máy tính	13.000
	Chuyên đề học tập Tin học 10: Tin học ứng dụng	14.000
10	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	11.000
	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	13.000
11	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	12.000
12	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 10	12.000

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC TRUY HỒI

NGUYỄN TIÊN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài viết này, chúng tôi giới thiệu về ứng dụng của một hệ thức truy hồi liên quan đến nghiệm của phương trình bậc ba có dạng đặc biệt trong giải một số bài toán thường gặp trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi lớp 9 và thi tuyển sinh lớp 10 THPT.

I. MỞ ĐẦU

Cho ba số thực a,b,c có tổng bằng 0. Ta có a,b,c là ba nghiệm của phương trình:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0 \quad (*).$$

Giả sử $\alpha=ab+bc+ca$ và $\beta=abc$ thì $(*)$ trở thành $x^3+\alpha x-\beta=0$.

Đặt $S_n=a^n+b^n+c^n$, với n là số nguyên dương thì ta có hệ thức truy hồi:

$S_{n+3}+\alpha S_{n+1}-\beta S_n=0$ hay $S_{n+3}=-\alpha S_{n+1}+\beta S_n$.

Ta có: $S_1=0$;

$$S_2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2\alpha$$

và $\quad S_3=-\alpha S_1+3\beta=3\beta$.

Từ hệ thức truy hồi trên, chúng ta tính được:

$$S_4=-\alpha S_2+\beta S_1=2\alpha^2;$$

$$S_5=-\alpha S_3+\beta S_2=-5\alpha\beta;$$

$$S_6=-\alpha S_4+\beta S_3=-2\alpha^3+3\beta^2;$$

$$S_7=-\alpha S_5+\beta S_4=7\alpha^2\beta;$$

$$S_8=-\alpha S_6+\beta S_5=2\alpha^4-8\alpha\beta^2;$$

$$S_9=-\alpha S_7+\beta S_6=3\beta^3-9\alpha^3\beta;$$

$$S_{10}=-\alpha S_8+\beta S_7=15\alpha^2\beta^2-2\alpha^5;$$

$$S_{11}=-\alpha S_9+\beta S_8=11\alpha^4\beta-11\alpha\beta^3.$$

II. MỘT SỐ KẾT QUẢ

Từ những tính toán trên, với ba số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$, chúng ta có một số kết quả sau đây:

Kết quả 1. $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$.

Lưu ý. Từ kết quả này, ta có nhận xét:

Nếu $a+b+c=0$ *thì* $ab+bc+ca\le 0$.

Kết quả 2. $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Kết quả 3. $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.

Kết quả 4. $a^5+b^5+c^5=-5(ab+bc+ca)abc$.

Kết quả 5. $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2-2(ab+bc+ca)^3$

Kết quả 6. $a^7+b^7+c^7=7(ab+bc+ca)^2abc$.

Kết quả 7. $a^8+b^8+c^8=2(ab+bc+ca)^4-8a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$.

Kết quả 8.

$$a^9+b^9+c^9=3a^3b^3c^3-9abc(ab+bc+ca)^3$$

Kết quả 9. $a^{10}+b^{10}+c^{10}=15a^2b^2c^2(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)^5$.

Kết quả 10. $a^{11}+b^{11}+c^{11}=11abc(ab+bc+ca)^4-11a^3b^3c^3(ab+bc+ca)$.

III. ÁP DỤNG

Sau đây chúng ta vận dụng những kết quả trên để giải một số bài toán điển hình.

Thí dụ 1. *Cho ba số thực a,b,c có tổng bằng không. Chứng minh rằng*

a) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

b) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}$.

c) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}$.

Lời giải. a) ***Cách 1.*** Ta có $a+b+c=0$ nên $c=-(a+b)$. Do đó $c^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ và $c^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Suy ra:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$
$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2(a^2+b^2)c^2$$
$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2(a^2+b^2)(a^2+b^2+2ab)$$
$$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)$$
$$=2(a^4+b^4)+c^4+a^4+6a^2b^2+4a^3b+4ab^3+b^4$$
$$=2(a^4+b^4+c^4).$$

Cách 2. Theo kết quả 1 và kết quả 3, ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

b) Từ kết quả 1, kết quả 2 và kết quả 4, ta có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-(ab+bc+ca);$$
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=abc$$

và $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-abc(ab+bc+ca)$. Do đó:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=-abc(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

c) Từ kết quả 1, kết quả 4, kết quả 6, ta có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-(ab+bc+ca);$$
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-abc(ab+bc+ca)$$

và $\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=abc(ab+bc+ca)^2$. Do đó:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=abc(ab+bc+ca)^2$$
$$=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}.$$

Thí dụ 2. *Cho a,b,c là ba số thực đôi một phân biệt thỏa mãn $2a^3+1=5a; 2b^3+1=5b$ và $2c^3+1=5c$. Tính giá trị của các biểu thức:*

a) $M=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

b) $N=a^2+b^2+c^2$.

c) $P=a^5+b^5+c^5$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có a,b,c là ba nghiệm của phương trình:

$$2x^3+1=5x \text{ hay } x^3-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0.$$

Từ đây ta có : $a+b+c=0; ab+bc+ca=\alpha=-\frac{5}{2}$ và $abc=\beta=-\frac{1}{2}$.

a) Ta có: $M=\frac{ab+bc+ca}{abc}=5$.

b) Áp dụng kết quả 1 thì $N=-2\alpha=5$.

c) Áp dụng kết quả 4 thì

$$P=-5abc(ab+bc+ca)=-\frac{25}{4}.$$

Thí dụ 3. *Cho a,b,c là ba số thực đôi một phân biệt thỏa mãn $a^3-12a=b^3-12b=c^3-12c$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^4+b^4+c^4$.*

Lời giải. Đặt $a^3-12a=b^3-12b=c^3-12c=m$.

Nhận thấy a,b,c là ba nghiệm của phương trình:

$$x^3-12x-m=0 \text{ hay } x^3=12x+m.$$

Ta có: $a+b+c=0$ và $ab+bc+ca=-12$.

Theo kết quả 3, ta có:

$$S=2(ab+bc+ca)^2=2.(-12)^2=288.$$

Thí dụ 4. *Cho x,y,z là các số nguyên đôi một khác nhau và $A=(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7$. Chứng minh rằng A chia hết cho*

$$7(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Lời giải. Ta có $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ nên áp dụng kết quả 6, ta có:

$$A=7(x-y)(y-z)(z-x)[(x-y)(y-z)+$$
$$+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)]^2.$$

Mặt khác: $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+$
$+(z-x)(x-y)=-(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Vậy A chia hết cho $7(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$(x-3)^5+(2x-1)^5+(4-3x)^5=0.$$

Lời giải. Nhận thấy

$$(x-3)+(2x-1)+(4-3x)=0$$

và $(x-3)(2x-1)+(2x-1)(4-3x)+$

$$+(4-3x)(x-3)=-(7x^2-17x+13).$$

Do đó, áp dụng kết quả 4, ta có:

$$(x-3)^5+(2x-1)^5+(4-3x)^5$$
$$=5(x-3)(2x-1)(4-3x)(7x^2-17x+13).$$

Suy ra: $(x-3)^5+(2x-1)^5+(4-3x)^5=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-3)(2x-1)(4-3x)=0\\ 7x^2-17x+13=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x-1)(4-3x)=0$$

(do $7x^2-17x+13=0$ vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};\ x=\frac{4}{3};\ x=3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3};3\right\}$.

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^5+y^5+z^5=210\end{cases}.$$

Lời giải. Đặt $\alpha=xy+yz+zx$ và $\beta=xyz$.

Vì $x+y+z=0$ nên theo kết quả 1, kết quả 4, ta có: $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

và $x^5+y^5+z^5=-5xyz(xy+yz+zx)$.

Do đó, hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ -2(xy+yz+zx)=14\\ 5xyz(xy+yz+zx)=210\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ xy+yz+zx=-7\\ xyz=-6\end{cases}.$$

Suy ra x,y,z là các nghiệm của phương trình:

$$t^3-7t+6=0\Leftrightarrow(t-1)(t-2)(t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1;\ t=2;\ t=-3.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm là:

$(1;2;-3),(1;-3;2),(2;1;-3),(2;-3;1),(-3;1;2)$ và $(-3;2;1)$.

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. a) (*Trích trong Tạp chí Kavant, tháng 03, năm 2012*). Chứng minh rằng nếu $a+b+c=0$ thì

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

b) (*Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán, năm học 2006 – 2007, Sở GD&ĐT Ninh Bình*).

Chứng minh rằng nếu $x+y+z=0$ thì

$$2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2).$$

c) Chứng minh rằng nếu $x+y+z=0$ thì

$$2(x^7+y^7+z^7)=7xyz(x^4+y^4+z^4).$$

Bài 2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=2.\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}.\dfrac{a^4+b^4+c^4}{4}$.

b) $\dfrac{a^6+b^6+c^6}{6}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^3+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2$.

c) $a^6+b^6+c^6=4.\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.\dfrac{a^4+b^4+c^4}{4}$

$$+3.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2.$$

d) $\dfrac{a^{11}+b^{11}+c^{11}}{11}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\times$

$$\times\left[2.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\frac{a^4+b^4+c^4}{4}+\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2\right].$$

Bài 3. (*Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán, năm học 1999 – 2000, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội*)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=14\end{cases}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P=1+a^4+b^4+c^4$.

Bài 4. (*Trích đề thi HSG Toán 9, năm học 2020 – 2021, Sở GD&ĐT Thanh Hóa*)

Cho các số thực x,y,z đôi một khác nhau thỏa mãn $x^3=3x-1, y^3=3y-1$ và $z^3=3z-1$. Tính giá trị của biểu thức $S=x^2+y^2+z^2$.

Bài 5. (*Trích trong Tạp chí Kavant, tháng 8, năm 2018*). Cho x,y,z là ba số thực phân biệt, thỏa

mãn $x^3+1009=2018x;\ y^3+1009=2018y$ và $z^3+1009=2018z$. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Bài 6. (*Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán, năm học 2020 – 2021, Sở GD&ĐT Thanh Hóa*)

Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2045$ và

$$(x-18)^3+(y-7)^3+(z-2020)^3=0.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$F=(x-18)^{2021}+(y-7)^{2021}+(z-2020)^{2021}.$$

Bài 7. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $5a^3-7a^2+1=0, 5b^3-7b^2+1=0$ và $5c^3-7c^2+1=0$. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $M=\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}$; b) $N=\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}$.

Bài 8. Cho ba số nguyên a,b,c khác 0 nhưng có tổng bằng 0. Chứng minh rằng:

a) $2(a^5+b^5+c^5)$ chia hết cho $5(a^2+b^2+c^2)$.

b) $4(a^7+b^7+c^7)$ chia hết cho $7(a^4+b^4+c^4)$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số nguyên đôi một khác nhau.

a) (*Trích đề thi HSG Toán 9, năm học 2020 – 2021, Sở GD&ĐT Đắk Lắk*)

Chứng minh rằng $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

b) Chứng minh rằng $(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7$ chia hết cho $7(x-y)(y-z)(z-x)$.

c) Chứng minh rằng

$$(x-y)^{11}+(y-z)^{11}+(z-x)^{11}$$

chia hết cho $11(x-y)(y-z)(z-x)$.

d) Chứng minh rằng

$$(x-y)^{13}+(y-z)^{13}+(z-x)^{13}$$

chia hết cho $13(x-y)(y-z)(z-x)$.

Bài 10. a) Giải phương trình

$$(2x-1)^3+(3x-5)^3-(5x-6)^3=0.$$

b) Giải phương trình

$$(3x-8)^5+(2x-7)^5+(15-5x)^5=0.$$

c) (*Trích đề TS lớp 10 chuyên Toán, năm học 2020 – 2021, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội*)

Giải phương trình

$$(x-12)^7+(2x-12)^7+(24-3x)^7=0.$$

Bài 11. a) (*Trích trong Tạp chí TH&TT số 301, tháng 07/2002*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=10\\x^7+y^7+z^7=350\end{cases}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=0\\x^4+y^4+z^4=18\\x^7+y^7+z^7=126\end{cases}$.

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^2+y^2+z^2=17\\(x-1)^5+(y-1)^5+(z-1)^5=210\end{cases}.$$

Bài 12. (*Trích đề thi đề nghị Olympic 30 tháng 4*)

Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+3z=2\\(2x+1)^3+(y-1)^3=(2-3z)^3-6\end{cases}$.

Bài 13. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c=0\\a^4+b^4+c^4=288\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$a^5+b^5+c^5\le 960.$$

Bài 14. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn

$$\begin{cases}a+b+c=0\\a^4+b^4+c^4=18\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $|a^7+b^7+c^7|\le 126$.

Bài 15. Biết rằng phương trình $(x-2)(x-9)(x-1945)=2021$ có ba nghiệm là x_1,x_2,x_3. Tính giá trị của biểu thức

$$S=\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-2)^3+(x_i-9)^3+(x_i-1945)^3\right].$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, TP. HẢI PHÒNG NĂM HỌC 2021 – 2022

Bài 1. *1) Cho biểu thức*

$$A=\left(\frac{1}{x\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).\left(\sqrt{x}-4+\frac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}\right)$$

(với $x\ge 0,\ x\ne 1$).

1) Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x để $A\ge 2$.

2) Cho hai phương trình (ẩn x; tham số a, b)

$$x^2+ax+b=0\ (1);\ x^2+bx+2a=0\ (2).$$

Tìm tất cả các cặp số thực $(a;b)$ để mỗi phương trình trên đều có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_2-x_1=x_0$, trong đó x_0 là nghiệm chung của hai phương trình và x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm còn lại của phương trình (1), phương trình (2).

Lời giải. 1) $A=\left(\frac{1}{x\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$=\frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

$$A\ge 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le\sqrt{x}<1\Leftrightarrow\frac{4}{9}\le x<1 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

2) Ta có: $\begin{cases}x_0^2+ax_0+b=0\\x_0^2+bx_0+2a=0\end{cases}$

$$\Rightarrow(a-b)x_0=2a-b\Rightarrow x_0=\frac{2a-b}{a-b}$$

(vì nếu $a-b=0\Rightarrow 2a-b=0\Rightarrow a=b=0$: loại).

$x_2=x_0+x_1=-a$, thay vào (2) có: $a^2-ab+2a=0$

$$\Leftrightarrow a(a-b+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a-b+2=0\end{array}\right..$$

TH1: $a=0\Rightarrow x_0=1$, thay vào (1) có: $b=-1$ (thỏa mãn bài toán).

TH2: $a-b+2=0\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{2-a}{2}\\b=a+2\end{cases}$ thay vào (1) có:

$$a^2-4a-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a=-2;b=0 & \text{(loại)}\\a=6;b=8 & \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right..$$

Vậy có hai cặp số $(0;-1)$, $(6;8)$ thỏa mãn đề bài.

Bài 2. *1) Giải phương trình $\sqrt{3x+2}-2\sqrt{x}=2-x$.*

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy=x+4\\y^2+2xy=y-4\end{cases}$.

Lời giải. 1) ĐK: $x\ge 0$. PT $\Leftrightarrow\dfrac{2-x}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}=2-x$

$$\Leftrightarrow(2-x)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}-1\right)=0.$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1,\forall x\ge 0$ nên phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}-1=0$ vô nghiệm.

Với $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn ĐK).

2) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=x+4\\y^2+2xy=y-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y^2+3xy-x-y=0\\y^2+2xy-y+4=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2y-1)(x+y)=0\\y^2+2xy-y+4=0\quad(2)\end{cases}.$$

- $x+2y-1=0\Rightarrow x=1-2y$. Thay vào (2) có:

$$3y^2-y-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1;x=3\\y=\dfrac{4}{3};x=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right..$$

- $x+y=0\Rightarrow x=-y$. Thay vào (2) có:

$$y^2+y-4=0\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}=-x.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x;y)$ là:

$$(3;-1),\left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right),\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

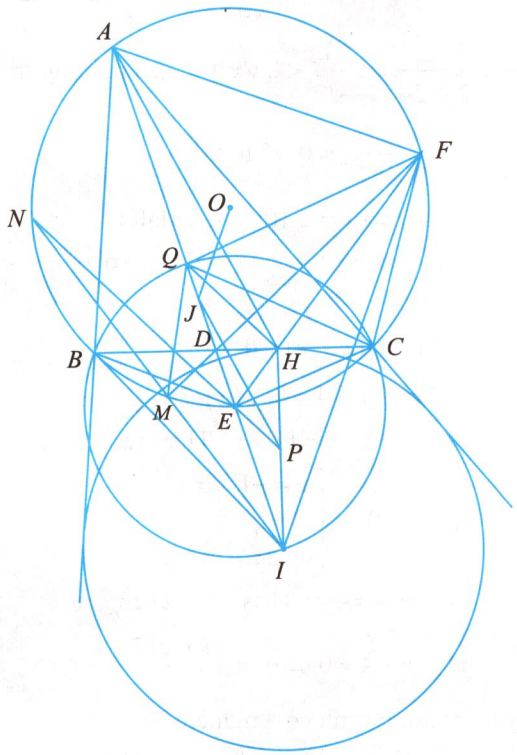
Bài 3. *Cho tam giác nhọn ABC $(AB\ne AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt BC tại D, cắt đường tròn (O) tại E $(E\ne A)$.*

a) Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) *Kẻ IH vuông góc với BC tại H. Đường thẳng EH cắt đường tròn (O) tại F $(F \neq E)$. Chứng minh $AF \perp FI$.*

c) *Đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq F)$, đường thẳng IM cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq M)$.. Đường thẳng qua O song song với FI cắt AI tại J, đường thẳng qua J song song với AH cắt IH tại P. Chứng minh ba điểm N, E, P thẳng hàng.*

Lời giải. a)



Ta có: AI là phân giác góc $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow EB = EC$ (1). Ta có:

$$\widehat{EBI} = \widehat{CBI} - \widehat{CBE} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{AEB}}{2}$$

$\Rightarrow \Delta BEI$ cân tại $E \Rightarrow EB = EI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI.

b) $\widehat{IAF} = \widehat{DHE} \left(= \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{EF} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{FC} + sđ\,\overset{\frown}{BE}\right)\right)$

$\Delta FCE \sim \Delta CHE \Rightarrow EC^2 = EF.EH$

$\Rightarrow EI^2 = EF.EH \Rightarrow \Delta EIH \sim \Delta EFI \Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{EIF}$

$\Rightarrow \widehat{IAF} + \widehat{AIF} = \widehat{DHE} + \widehat{EHI} = 90^\circ \Rightarrow AF \perp FI$.

c) $OJ \parallel FI$ nên $OJ \perp AF \Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta AFI \Rightarrow J$ là trung điểm $AI \Rightarrow P$ là trung điểm của IH. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua E. Có $DQ.DI = DM.DF (= DB.DC)$

$\Rightarrow MQFI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QFM} = \widehat{QIM}$, mà $\widehat{MNE} = \widehat{MFE} \Rightarrow \widehat{NEQ} = \widehat{QFE}$; $EQ^2 = EI^2 = EH.EF$

$\Rightarrow \Delta EQH \sim \Delta EFQ \Rightarrow \widehat{QFE} = \widehat{HQE}$.

Suy ra $\widehat{NEQ} = \widehat{HQE} \left(= \widehat{QFE}\right) \Rightarrow EN \parallel QH$. Mà E là trung điểm của IQ nên EN đi qua trung điểm P của IH hay N, E, P thẳng hàng.

Bài 4. *Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{2x+y}} + \frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{2y+z}} + \frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{2z+x}} \geq \sqrt{3xyz}.$$

Lời giải. BĐT tương đương với

$$P = \frac{x}{\sqrt{z(2x+y)}} + \frac{y}{\sqrt{x(2y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{y(2z+x)}} \geq \sqrt{3}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy và BĐT Schwarz ta có:

$$P \geq 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{3z+2x+y} + \frac{y}{3x+2y+z} + \frac{z}{3y+2z+x}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{x(3z+2x+y)} + \frac{y^2}{y(3x+2y+z)} + \frac{z^2}{z(3y+2z+x)}\right)$$

$$\geq \frac{2\sqrt{3}(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+xz)} = \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 5. 1) *Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^4 + 2y^2 - 3 = x^2 - 3x$.*

2) *Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; ...; 101\}$. Tìm số tự nhiên n $(n \geq 3)$ nhỏ nhất sao cho với mọi tập con A tùy ý gồm n phần tử của X đều tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt $a, b, c \in A$ thỏa mãn $a + b = c$.*

Lời giải. 1) PT $\Leftrightarrow 4y^4 + 8y^2 - 12 = 4x^2 - 12x$

$$\Leftrightarrow (2y^2+2)^2 - (2x-3)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (2y^2+2x-1)(2y^2-2x+5) = 7.$$

Với x, y nguyên dương thì $2y^2 + 2x - 1 > 0$ nên

$$\begin{cases}2y^2+2x-1=1\\2y^2-2x+5=7\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}2y^2+2x-1=7\\2y^2-2x+5=1\end{cases}.$$

- $\begin{cases}2y^2+2x-1=1\\2y^2-2x+5=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=-6\\2y^2+2x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=\pm1\end{cases}$ (loại)
- $\begin{cases}2y^2+2x-1=7\\2y^2-2x+5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=6\\2y^2+2x-1=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=\pm1\end{cases}$,

loại trường hợp $y=-1$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;1)$.

2) ***Cách 1.*** Dễ thấy tập hợp gồm 51 các số lẻ không thỏa mãn điều kiện của đề bài. Ta sẽ chứng minh n nhỏ nhất bằng 52.

Xét một tập $A\subset X$ và $|A|=52$ có các phần tử được sắp xếp $a_1<a_2<...<a_{52}$ $(1\le a_1\le 50)$.

Nếu $a_1=1$ thì trong 51 số còn lại của A luôn tồn tại 2 số nguyên liên tiếp, thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta chia các số $a_1+1, a_1+2,...,101$ vào các tập B_i gồm các phần tử k sao cho $k\equiv i(\bmod a_1)$,

$i=\overline{1,a_1} \Rightarrow |B_i|=\left[\dfrac{101-i}{a_1}\right]$ (ở đây ta kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực a).

Nếu $101 \not\vdots\, a_1$ và $51 \vdots\, a_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a_1=3\\a_1=17\end{array}\right.$

Ta xét trường hợp $a_1=3$, trường hợp $a_1=17$ tương tự.

$|B_1|=33, |B_2|=33, |B_3|=32$. Trong 51 số còn lại của A mỗi tập B_1, B_2 chỉ có thể chứa nhiều nhất 17 số, nếu không sẽ tồn tại hai phần tử có hiệu bằng 3. Vậy tập B_3 chứa ít nhất 17 số nên trong B_3 chứa ít nhất hai phần tử có hiệu bằng 3.

Nếu $51 \not\vdots\, a_1$, do $\left[\dfrac{51}{a_1}\right]+1>\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{101-i}{a_1}\right]$, $\forall i=\overline{1,a_1}$ nên mỗi tập $B_i\left(i=\overline{1,a_1-1}\right)$ chỉ chứa tối đa $\left[\dfrac{51}{a_1}\right]+1$ phần tử trong 51 phần tử còn lại của A.

$\Rightarrow B_{a_1}$ chứa ít nhất $51-(a_1-1)\left(\left[\dfrac{51}{a_1}\right]+1\right)$ trong 51 phần tử còn lại của A.

Ta chứng minh

$$51-(a_1-1)\left(\left[\frac{51}{a_1}\right]+1\right)>|B_{a_1}|=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{101}{a_1}\right]-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 52,5+\left[\frac{51}{a_1}\right]>\frac{1}{2}\left[\frac{101}{a_1}\right]+a_1\left[\frac{51}{a_1}\right].$$

Do $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{101}{a_1}\right]+a_1\left[\dfrac{51}{a_1}\right]<51+\dfrac{50,5}{a_1}<52,5+\left[\dfrac{51}{a_1}\right]$

nên trong B_{a_1} có quá nửa số phần tử thuộc $A \Rightarrow$ trong B_{a_1} chứa ít nhất 2 phần tử a_m, a_n thỏa mãn $a_m-a_n=a_1$, trừ trường hợp $|B_{a_1}|$ lẻ.

Nếu B_{a_1} có 3 phần tử, tồn tại tập B_j nào đó có 4 phần tử chứa ít nhất 3 phần tử của A thỏa mãn có hai phần tử có hiệu bằng a_1.

Nếu $|B_{a_1}|\ge 5$, khi đó các phần tử $2a_1, 4a_1, 6a_1\in A$ thỏa mãn $2a_1+4a_1=6a_1$.

Ta có đpcm trong mọi trường hợp $|A|=52$.

Cách 2. Bổ đề: Xét tập $A\subset X$ sao cho không tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt $a, b, c\in A$ thỏa mãn $a+b=c$. Gọi $x=\min A; k=\left[\dfrac{101}{x}\right]$. Khi đó

a) Trong tập $B_m=\{x+2mx+1; x+2mx+2;...;3x+2mx\}$ có nhiều nhất x số thuộc A (1).

b) $|A|\le 51$.

Chứng minh. a) Ta có $a\notin A$ hoặc $a+x\notin A$ suy ra (1) được chứng minh.

b) TH1: $k=2n$.

$$(1)\Rightarrow |A|\le 1+n.x=1+\frac{1}{2}.\left[\frac{101}{x}\right]\le 51,5\Rightarrow |A|\le 51.$$

TH2: $k=2n+1$.

$$(1)\Rightarrow |A|\le 1+n.x+(101-x-2nx)=102-x(1+n)$$
$$\le 102-x.\frac{101}{2x}=51,5\Rightarrow |A|\le 51.$$

Vậy $|A|\le 51$, bổ đề được chứng minh.

Suy ra n nhỏ nhất bằng 52 thỏa mãn bài toán.

TRẦN QUANG THẮNG, TRỊNH VIỆT ANH
(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9, TỈNH NAM ĐỊNH
NĂM HỌC: 2021 – 2022

Môn thi: **Toán** (*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

Câu 1. (*3,0 điểm*)

1) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}.$$

Tính tổng $m+n$.

2) Chứng minh rằng với mọi số dương a và b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{1000}$ ta luôn có

$$\sqrt{a-1000}+\sqrt{b-1000}=\sqrt{a+b}.$$

Câu 2. (*5,0 điểm*)

1) Cho phương trình

$$\left(m+\sqrt{2x^2+4x+3}\right)\left(x^2+2x+m\right)\left(|x+1|-m-1\right)=0,$$

với m là tham số.

a) Giải phương trình với $m=-1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{9(x-1)y}=y\left(2+\sqrt{\dfrac{y}{x-1}}\right).\\ y^2+xy-5x+7=0.\end{cases}$$

Câu 3. (*3,0 điểm*)

1) Cho đa thức $P(x)=x^3+6x^2+ax+b$ với a,b là các số hữu tỷ và thỏa mãn $P\left(1-\sqrt{3}\right)=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=18P(3)+3P(2)+(a-b+3)^{2022}.$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m;n)$ thỏa mãn

$$(2m+5n+1)\left(2^m+n+m^2+m\right)=105.$$

Câu 4. (*7,0 điểm*) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, có AH là đường cao. Lấy D là một điểm thuộc miền trong của tam giác AHC sao cho AH đi qua trung điểm của BD. Gọi E,F theo thứ tự là giao điểm của AH với đường thẳng CD và BD. Qua E kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn đường kính CD tại điểm M (A và M thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là CD). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn đường kính CD. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $ABCN$ nội tiếp một đường tròn và $\widehat{ANB}+\widehat{CAH}=90^0$.

2) Tam giác EMD đồng dạng với tam giác ECM và $\frac{MD.AB}{MC}=\sqrt{\frac{ED.BF.BN}{EC}}$.

3) Ba điểm A,M,N thẳng hàng.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

1) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

2) Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thay đổi và thỏa mãn $c+2b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3}{b+c-a}+\frac{5}{a+c-b}+\frac{4}{a+b-c}.$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(5/7/136 *Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

Giới thiệu

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ y = f'(x) HOẶC BẢNG XÉT DẤU f'(x)

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
(GV THPT Núi Thành, Quảng Nam)

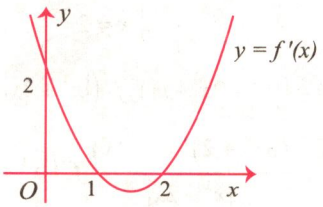
Dạng 1. Các bài toán về hàm số $g(x)=f[u(x)]$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Phương pháp.

Bước 1: Tính $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]$ và giải phương trình $g'(x)=0$.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ hoặc bảng xét dấu của $g'(x)$. Từ đó trả lời các yêu cầu của đề bài.

Thí dụ 1. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình sau.*



Hàm số $g(x)=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

Lời giải. Ta có: $g'(x)=-2f'(3-2x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3-2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2x=1\\3-2x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)=f(3-2x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Chọn **B**.

Thí dụ 2. *Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau*

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-3$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$ **D.** $x=-2$.

Lời giải. Ta có: $g'(x)=(2x+2).f'(x^2+2x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=0\\f'(x^2+2x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-2 \text{ (vô nghiệm)}\\x^2+2x=1\\x^2+2x=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}\\x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

(trong đó: $x=-1-\sqrt{2}; x=-1+\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT $g'(x)=0$).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

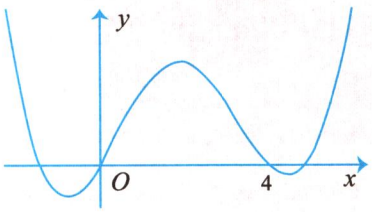
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

Chọn **B**.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$: Chọn giá trị $x=0\in(-1;-1+\sqrt{2})$, ta có $g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của $f'(x)$), suy ra:

$$g'(x)>0, \forall x\in(-1;-1+\sqrt{2})).$$

Thí dụ 3. *Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên.*



Hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 11.

Lời giải. Ta có: $g'(x) = (3x^2 + 6x).f'(x^3 + 3x^2)$.

Do đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{array}\right.$.

Ta có: $3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$;

$$f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^3 + 3x^2 = 4 \\ x^3 + 3x^3 = b > 4 \end{array}\right..$$

Ta thấy:

$x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -3;$

$x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2.$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x) = 3x^2 + 6x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$				+	0	−	0	+			
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$

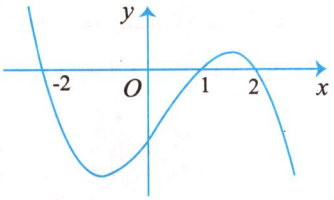
Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$, ta có:

Phương trình $x^3 + 3x^2 = a < 0$ có duy nhất một nghiệm $x_1 < -3$.

Phương trình $x^3 + 3x^2 = b > 4$ có duy nhất một nghiệm $x_2 > 1$.

Do đó, phương trình $g'(x) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt và hai nghiệm bội ba nên hàm số $y = g(x)$ có 6 điểm cực trị. Chọn **C.**

Thí dụ 4. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.*



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 2x| + m)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** Vô số

Lời giải. Từ đồ thị $f'(x)$ ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có: $g'(x) = (|x^3 + 2x| + m)' f'(|x^3 + 2x| + m)$

$$= \frac{(3x^2 + 2)(x^3 + 2x)}{|x^3 + 2x|} f'(|x^3 + 2x| + m).$$

Vì $g'(x)$ không xác định tại điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là một điểm cực trị của $g(x)$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x^3 + 2x| + m) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3 + 2x| + m = -2 \\ |x^3 + 2x| + m = 1 \\ |x^3 + 2x| + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3 + 2x| = -2 - m \\ |x^3 + 2x| = 1 - m \\ |x^3 + 2x| = 2 - m \end{array}\right..$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 2x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Bảng biến thiên của $|h(x)|$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\lvert h(x)\rvert)'$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$, ta có hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ -2-m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0\}$. Chọn **B**.

Thí dụ 5. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;15]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên $(0;2)$?*

A. 8 **B.** 21 **C.** 5 **D.** 6.

Lời giải. Ta có: $y'=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$;

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên $(0;2)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m)\ge 0, \forall x\in(0;2)$.

Vì $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$.

Do đó, $y'\ge 0, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0$

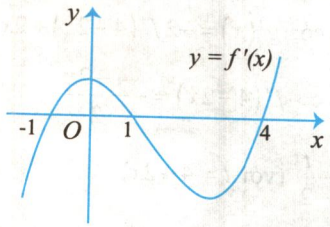
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\le -3 \\ x^2+3x-m\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge x^2+3x+3 \\ m\le x^2+3x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3) \\ m\le \min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 13 \\ m\le -1 \end{array}\right..$$

Vì $m\in[-5;15]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên

$m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;13;14;15\}$. Chọn **A**.

Thí dụ 6. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đạt cực đại tại điểm $x=2$.*



A. $m=-3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=-1$.

Lời giải. Ta có: $g'(x)=f'(x+m)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x+m)<0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m<-1 \\ 1<x+m<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1-m \\ 1-m<x<4-m \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1-n$		$1-n$		$4-n$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số $g(x)=f(x+m)$ đạt cực đại tại điểm $x=2 \Leftrightarrow 1-m=2 \Leftrightarrow m=-1$. Chọn **D**.

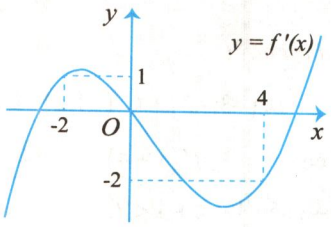
Dạng 2. Các bài toán về hàm số $g(x)=f[u(x)]+h(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

Phương pháp.

Bước 1: Tính $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]+h'(x)$.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ hoặc bảng xét dấu của $g'(x)$. Từ đó trả lời các yêu cầu của đề bài.

Thí dụ 7. *Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.*



Hàm số $g(x)=f(4-2x)+x^2-4x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

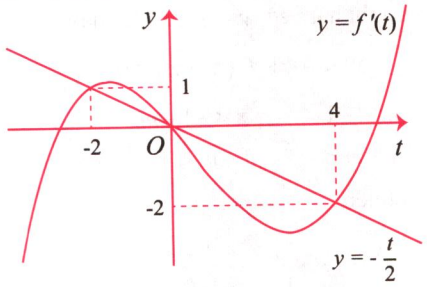
A. $(3;5)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(0;4)$

Lời giải. Ta có: $g'(x) = -2f'(4-2x) + 2x - 4$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(4-2x) = -\frac{4-2x}{2}$$

$$\Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2} \text{ (với } t = 4-2x).$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{t}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(t)$ trên cùng một hệ trục.



Vì hàm số $g(x)$ đồng biến nên $g'(x) \geq 0$, dựa vào đồ thị ta có: $f'(t) \leq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -2 \\ 0 \leq t \leq 4 \end{array}\right.$.

Với $\left[\begin{array}{l} t \leq -2 \\ 0 \leq t \leq 4 \end{array}\right.$ ta có $\left[\begin{array}{l} 4-2x \leq -2 \\ 0 \leq 4-2x \leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x) = f(4-2x) + x^2 - 4x$ đồng biến trên các khoảng $(0;2)$ và $(3;+\infty)$. Mà $(3;5) \subset (3;+\infty)$ nên hàm số

$$g(x) = f(4-2x) + x^2 - 4x$$

đồng biến trên khoảng $(3;5)$. Chọn **A**.

Thí dụ 8. *Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau*

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+4) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$ **B.** $(-3;-2)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải. Ta có: $y' = 3\left[f'(x+4) - x^2 + 4\right]$.

Vì $-3 < x < -2$ nên $1 < x+4 < 2$.

Suy ra: $f'(x+4) < 0, \forall x \in (-3;-2)$.

Lại có $-x^2 + 4 < 0, \forall x \in (-3;-2)$, do đó:

$$y' < 0, \forall x \in (-3;-2).$$

Có thể thấy rằng điều kiện $y' < 0$ không thỏa mãn với mọi x thuộc mỗi khoảng còn lại. Vậy hàm số $y = 3f(x+4) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$. Chọn **B**.

Thí dụ 9. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = \frac{7}{4}, f(-2) = 0$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau*

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f(3-x) + \sqrt{x^2+9} - x = m$ có nghiệm trên khoảng $(4;5)$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải. Xét hàm số

$$g(x) = 2f(3-x) + \sqrt{x^2+9} - x$$

trên khoảng $(4;5)$. Ta có:

$$g'(x) = -2f'(3-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1.$$

Vì $4 < x < 5$ nên $-2 < 3-x < -1$. Do đó $f'(3-x) > 0, \forall x \in (4;5)$. Suy ra:

$$-2f'(3-x) < 0, \forall x \in (4;5).$$

Mặt khác $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} < 1, \forall x \in (4;5)$, do đó:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 < 0, \forall x \in (4;5).$$

Suy ra: $g'(x) < 0, \forall x \in (4;5)$.

Ta có:

$$g(4) = 2f(-1) + \sqrt{4^2+9} - 4 = 2.\frac{7}{4} + 1 = \frac{9}{2};$$

$$g(5) = 2f(-2) + \sqrt{5^2+9} - 5 = -5 + \sqrt{34}.$$

Bảng biến thiên

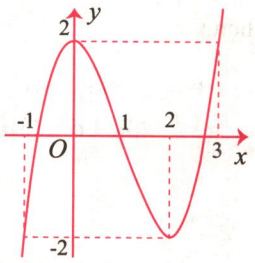
x	4		5
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(4)$	$\searrow$	$g(5)$

Phương trình $2f(3-x)+\sqrt{x^2+9}-x=m$ có nghiệm trên khoảng $(4;5)$

$$\Leftrightarrow g(5)<m<g(4)\Leftrightarrow -5+\sqrt{34}<m<\frac{9}{4}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Chọn **C**.

Thí dụ 10. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.*



Bất phương trình $18x^3+9x^2<m-2f(3x+1)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge 2f(-1)-\frac{4}{3}$ **B.** $m\ge 2f(2)+\frac{5}{3}$

C. $m\ge 2f(1)+\frac{4}{3}$ **D.** $m\ge 2f(1)$.

Lời giải. Ta có: $18x^3+9x^2<m-2f(3x+1)$

$$\Leftrightarrow m>2f(3x+1)+18x^3+9x^2.$$

Xét hàm số $g(x)=2f(3x+1)+18x^3+9x^2$, ta có:

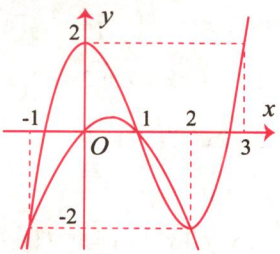
$$g'(x)=6f'(3x+1)+54x^2+18x;$$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(3x+1)+3x(3x+1)>0\ (*).$$

Đặt $t=3x+1$, khi đó (*) trở thành:

$$f'(t)+(t-1)t>0\Leftrightarrow f'(t)>-t^2+t.$$

Vẽ parabol $y=-x^2+x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)>-t^2+t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\ t>2\end{array}\right.$

Với $\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\ t>2\end{array}\right.$ ta có:

$$\left[\begin{array}{l}-1<3x+1<1\\ 3x+1>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-2}{3}<x<0\\ x>\frac{1}{3}\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{1}{3}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$

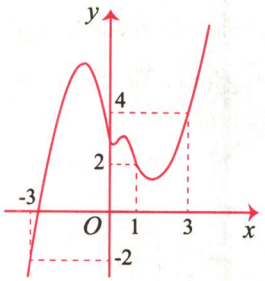
Từ bảng biến thiên ta có:

$$\max_{\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)} g(x)=g(0)=2f(1).$$

Bất phương trình $18x^3+9x^2<m-2f(3x+1)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow m\ge\max_{\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)} g(x)\Leftrightarrow m\ge 2f(1).$$ Chọn **D**.

Thí dụ 11. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.*



Giá trị lớn nhất của hàm số

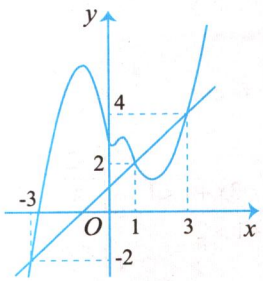
$$g(x)=2f(x)-(x+1)^2$$

trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. $2f(3)-16$ **B.** $2f(-3)-4$

C. $2f(0)-1$ **D.** $2f(1)-4$

Lời giải. Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$



Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

$\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)=2f(1)-4$. Chọn **D**.

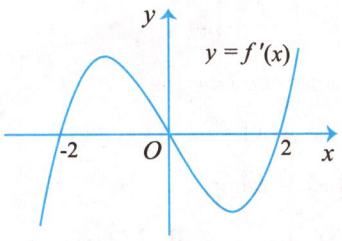
Dạng 3. Các bài toán về hàm số $g(x)=\left[f\left[u(x)\right]\right]^k$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

Phương pháp.

Bước 1: Tính $g'(x)=k.u'(x).f'\left[u(x)\right].\left[f\left[u(x)\right]\right]^{k-1}$ (với $k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$).

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ hoặc bảng xét dấu của $g'(x)$. Từ đó trả lời các yêu cầu của đề bài.

Thí dụ 12. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình dưới.*



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-4)\right]^3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(-2;2)$.

Lời giải. Ta có: $g'(x)=6f^2(2x-4)f'(2x-4)$.

Hàm số $g(x)=\left[f(2x-4)\right]^3$ nghịch biến

$\Leftrightarrow g'(x)\leq 0 \Leftrightarrow 6f^2(2x-4)f'(2x-4)\leq 0$

$\Leftrightarrow f'(2x-4)\leq 0$ (vì $f^2(2x-4)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có:

$$f'(2x-4)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4\leq -2 \\ 0\leq 2x-4\leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ 2\leq x\leq 3 \end{array}\right..$$

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng: $(-\infty;1)$, $(2;3)$. Chọn **C**.

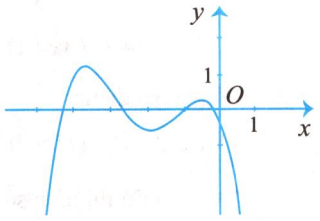
Dạng 4. Các bài toán về hàm số $g(x)=\left|f\left[u(x)\right]+v(x)\right|$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

Phương pháp.

Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left[u(x)\right]+v(x)$.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ hoặc bảng xét dấu của $g'(x)$. Từ đó trả lời các yêu cầu của đề bài.

Thí dụ 13 (*Trích đề thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2020*). *Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)+x^2\right|$ là*



A. 3 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải. Xét hàm $h(x)=f(x^4)+x^2$. Ta có:

$h'(x)=4x^3f'(x^4)+2x=2x\left[2x^2f'(x^4)+1\right]$;

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\left[2x^2f'(x^4)+1\right]=0$

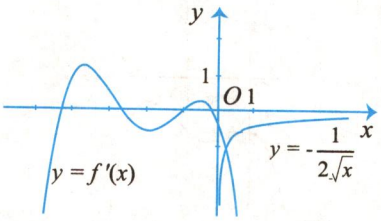
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2f'(x^4)+1=0 \quad (1) \end{array}\right..$$

$$(1) \Leftrightarrow f'(x^4) = -\frac{1}{2x^2} \quad (x \neq 0) \quad (2).$$

Đặt $x^4 = t \Rightarrow x^2 = \sqrt{t}$ $(t > 0)$, PT(2) trở thành:

$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (t > 0) \quad (3).$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'(x)$.



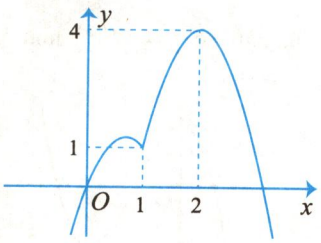
Dựa vào đồ thị ta có phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{a} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$h(x)$		↗	$f(a)+\sqrt{a}$	↘	0	↗	$f(a)+\sqrt{a}$	↘	
$g(x)$		↘	0	↗ $f(a)+\sqrt{a}$	↘	0	↗ $f(a)+\sqrt{a}$	↘	0 ↗

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $g(x) = \left|f(x^4) + x^2\right|$ có 5 điểm cực trị.Chọn **C**.

Thí dụ 14. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới.*

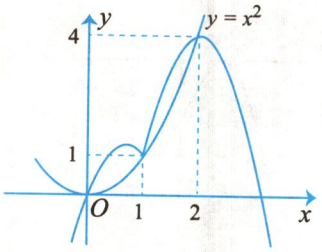


Hàm số $y = \left|12f(x) - 4x^3\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(1;2)$.

Lời giải. Đặt $g(x) = 12f(x) - 4x^3$.

Ta vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2$ trên cùng một hệ trục như hình dưới.



Ta có: $g'(x) = 12f'(x) - 12x^2$.

Do đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vì $g(0) = 12.f(0) - 4.0^3 = 0$ nên ta có BBT:

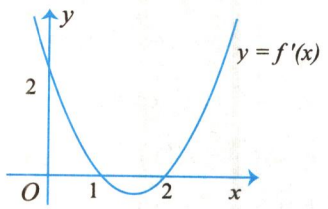
x	$-\infty$		0		1		2		a		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	+	0	−			
$\lvert g(x)\rvert$		↘	0	↗	$y = 0$	↗	$g(2)$	↘	0	↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = \left|g(x)\right|$ đồng biến trên các khoảng $(0;2),(a;+\infty)$ (với $a > 2$).

Chọn **D**.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.

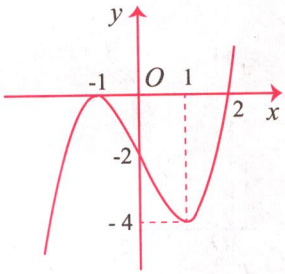


Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty;-1)$ B. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ D. $(-1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

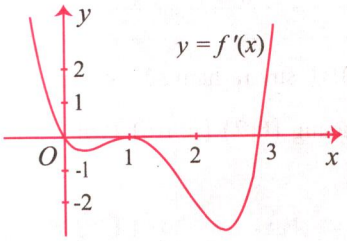


Biết S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thoả mãn $m\in(-10;10)$ sao cho hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Số phần tử của tập S là

A. 5 B. 7

C. 6 D. 4

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

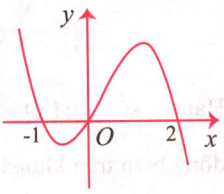


Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 2 B. 5

C. 4 D. 3

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên và $f(-1)=f(2)=0$.

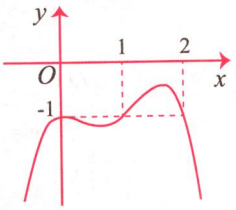


Hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-3\right)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$ B. $(0;1)$

C. $(-1;0)$ D. $(-2;-1)$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

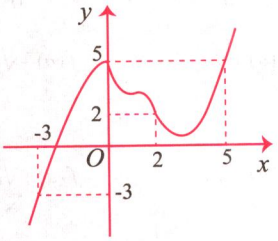


Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$ B. $x=2$

C. $x=-1$ D. $x=0$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

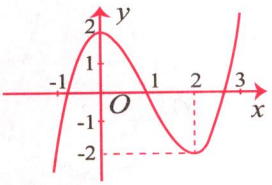


Hàm số $g(x)=f(1-2x)-2x^2+2x+4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ B. $(-\infty;-2)$

C. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2};2\right)$

Câu 7. Cho hàm $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



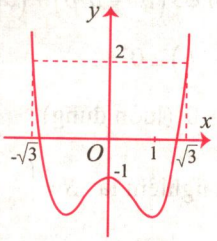
Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

Tổng các phần tử của S bằng

A. 4 **B.** 11

C. 14 **D.** 21

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(1)$ **B.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(-\sqrt{3})$

C. $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(\sqrt{3})$ **D.** $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x)=3f(0)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-6)<0$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

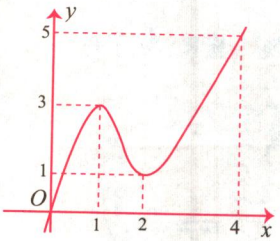
Hàm số $y=\left|3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 5

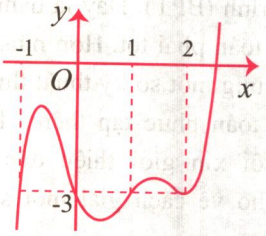
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0; f(4)>4$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0



Câu 11. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

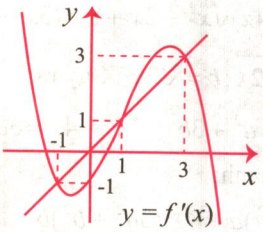


Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ là

A. 5 **B.** 6

C. 4 **D.** 3

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình

$$f(1-2\sin x)+\cos 2x+2\sin x-1>m$$

có nghiệm trên đoạn $[0;\pi]$ khi và chỉ khi

A. $m<f(-1)$ **B.** $m<f(1)$

C. $m>f(-1)$ **D.** $m>f(1)$

Câu 13. (*Trích đề tham khảo tốt nghiệp THPT năm 2022 của Bộ GD&ĐT*) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+10x, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x^4-8x^2+m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16 **B.** 9 **C.** 15 **D.** 10

MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

HUỲNH NGUYỄN LUÂN LƯU - NGUYỄN THỊ DUY AN
(Trung tâm Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Ở học kì II năm lớp 10 các em học sinh có học về bất phương trình (BPT). Đây là dạng toán đòi hỏi kỹ năng tính toán phải tốt. Hơn nữa, nếu chúng ta không nắm vững một số kỹ thuật thì khi giải ta sẽ làm cho bài toán phức tạp thêm. Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu đến các em một chuyên đề nhỏ về cách giải một số bất phương trình.

1. Kỹ thuật đặt ẩn phụ

Bài 1. *Giải bất phương trình:*

$$(x+4)\sqrt{x-2}+\frac{8}{x\sqrt{x}}\ge\sqrt{2}(3x-4)\quad(1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$.

$$(1)\Leftrightarrow(x^2+4x)\sqrt{x^2-2x}+8\ge(3x^2-4x)\sqrt{2x}.$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-2x};b=\sqrt{2x}$. Suy ra:

$$x^2+4x=a^2+3b^2;\ 3x^2-4x=3a^2+b^2.$$

BPT trên trở thành:

$$(a^2+3b^2)a+8\ge(3a^2+b^2)b$$

$$\Leftrightarrow 8\ge(b-a)^3\Leftrightarrow 2\ge b-a\Leftrightarrow\sqrt{2x}\le\sqrt{x^2-2x}+2$$

$$\Leftrightarrow 2x\le x^2-2x+4+4\sqrt{x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+4\sqrt{x^2-2x}\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là:

$$S=[2;+\infty).$$

Bài 2. *Giải bất phương trình:*

$$x^3-3x^2+5x-2\ge(x^2-3x+2)\sqrt{1-2x}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\le\frac{1}{2}$.

$$(1)\Leftrightarrow(x-1)^3-(1-2x)\ge(x^2-3x+2)\sqrt{1-2x}$$

Đặt $a=x-1;b=\sqrt{1-2x}$. Suy ra:

$$a\le 0;b\ge 0\ \text{ và }\ x^2-3x+2=a^2-a.$$

BPT trên trở thành:

$$a^3-b^2\ge(a^2-a)b\Leftrightarrow(a^3-a^2b)+(ab-b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)+b(a-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a^2+b)\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy BPT (1) có tập nghiệm là: $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

Bài 3. *Giải bất phương trình:*

$$1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3\ge 0\quad(1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $a=\sqrt{x-1};b=\sqrt{2x}$. Suy ra:

$$a\ge 0;b\ge\sqrt{2}\ \text{ và }\ \frac{b^2-2a^2}{2}=1.$$

BPT trên trở thành:

$$1+a(b-3a)^3\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{b^2-2a^2}{2}\right)^2+a(b-3a)^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2+4\frac{a}{b}\left(1-3\frac{a}{b}\right)^3\ge 0\ (2).$$

Đặt $t=\frac{a}{b}$. Điều kiện: $t\ge 0$. BPT(2) trở thành:

$$(1-2t^2)^2+4t(1-3t)^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(2t-1)\left[t(52t^2-28t+6)+1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t-1\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{1}{2}.$$

Với $t\ge\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x-1}\ge\sqrt{2x}\Leftrightarrow 4x-4\ge 2x\Leftrightarrow x\ge 2$.

Vậy BPT(1) có tập nghiệm là: $S=[2;+\infty)$.

Bài 4. *Giải bất phương trình:*

$$(2x-1)\sqrt{x+4}-(2x+1)\sqrt{x-4}\le 16.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 4$. BPT tương đương với:

$$2x\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)-\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)\le 16.$$

Đặt $t=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}>0\Rightarrow\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\dfrac{8}{t}$

$$\Rightarrow 4x=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2+\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)^2$$

$$=\frac{64}{t^2}+t^2.$$

Do đó BPT trên trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{64}{t^2}+t^2\right)t-\frac{8}{t}\le 16\Leftrightarrow t^4-32t+48\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2\left[(t+2)^2+8\right]\le 0\Leftrightarrow t=2.$$

Với $t=2$, ta có:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-16}=x-2\Leftrightarrow x=5.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\{5\}$.

Bài 5. *Giải bất phương trình:*

$$4x\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}\right)\le\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\right)^3.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}>0\Rightarrow\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}=\dfrac{6}{t}$

$$\Rightarrow 8x=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}\right)^2$$

$$=t^2+\frac{36}{t^2}.$$

Do đó BPT trên trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{36}{t^2}+t^2\right)\frac{6}{t}\le t^3\Leftrightarrow t^6-3t^4-108\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2-6\right)\left(t^4+3t^2+18\right)\ge 0\Leftrightarrow t\ge\sqrt{6}.$$

Với $t\ge\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\ge\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x^2-9}+2x-3\ge 0\ (*).$$

Do đó BPT(*) luôn đúng $\forall x\ge\dfrac{3}{2}$.

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

2. Kỹ thuật ẩn phụ không hoàn toàn

Bài 6. *Giải bất phương trình:*

$$(x+6)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)-2\sqrt{x^2+x-2}$$

$$\ge 2x^2+x-6\ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$. Điều kiện: $t>0$. Suy ra:

$$t^2=2x+1-2\sqrt{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x^2+x-2}=t^2-2x-1.$$

BPT(1) trở thành: $t^2+(x+6)t-\left(2x^2+3x-5\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (t-x+1)(t+2x+5)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow t-x+1\ge 0\ (\text{vì } t+2x+5>0\ \forall x\ge 1).$$

Với $t-x+1\ge 0\Rightarrow\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\ge x-1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}\ge(x-1)+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+2\ge(x-1)^2+2(x-1)\sqrt{x-1}+x-1$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+2\left(\sqrt{x-1}\right)^3-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\le 1\Leftrightarrow x\le 2.$$

Đối chiếu với điều kiện, ta được tập nghiệm của BPT là: $S=[1;2]$.

Bài 7. *Giải bất phương trình:*

$$2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{1-x^2}\ge 2x^2+4x-1\ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. Điều kiện: $t\ge 0$

$$\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-2}{2}.$$

BPT(1) trở thành:

$$2t+\frac{t^2-2}{2}\ge 2x^2+4x-1\Leftrightarrow t^2+4t\ge 4x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow t^2+4t\ge 4x^2+8x\Leftrightarrow(t-2x)(t+2x)+4(t-2x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(t-2x)(t+2x+4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow t-2x\ge 0\ (\text{vì } t+2x+4>0,\forall x\ge -1).$$

Với $t\ge 2x\Rightarrow\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2x\ (2)$.

TH1: $-1\le x\le 0$ (thỏa mãn bất phương trình (2)).

TH2: $0<x\le 1$.

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \ge 2x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-1<0 \\ \begin{cases} 2x^2-1 \ge 0 \\ 4x^4-3x^2 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \le x^2 \le \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

So với điều kiện, ta được: $0 < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S = \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Bài 8. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x^2+1} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+2} \ge 1-2x.$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+1} \\ b = \sqrt{x^2-2x+2} \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{a^2-b^2+1}{2}.$$

BPT trên trở thành:

$$\left[\frac{a^2-b^2+1}{2}a + \frac{a^2-b^2-1}{2}b\right] \ge b^2-a^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a+b) + (a-b) \ge 2(b^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)^2 + 2(a^2-b^2) + (a-b) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a-b \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \ge \sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow x^2+1 \ge x^2-2x+2$$

$$\Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3. Kỹ thuật nhân lượng liên hợp có đánh giá

Bài 9 (Đề thi ĐH KD năm 2014). *Giải bất phương trình:*

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \ge x^2+7x+12 \quad (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) + (x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right) \ge x^2+2x-8$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} \ge (x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4)\right] \ge 0 \quad (2).$$

Ta có:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} < \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}$$

$$< \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{3} = \frac{5x+18}{6} < x+4 \ \forall x \ge -2.$$

Suy ra: $(2) \Leftrightarrow x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$. So với điều kiện, ta nhận $-2 \le x \le 2$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S = [-2; 2]$.

Bình luận. Đây là một bài BPT đẹp, hầu như các em khá giỏi đều biến đổi được về BPT(2), đến đây thì đa số các em vướng vì không biết cách đánh giá. Một sai lầm phổ biến khi ta đánh giá $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \le \frac{x+1}{2}, \forall x \ge -2$ vì điều này không đúng khi $x+1<0$. Ở đây ta chỉ cần để ý tính chất đơn giản sau:

$$\textit{Cho } a \in \mathbb{R}; a<b; c>0 \textit{ thì } \frac{a}{c} < \frac{b}{c},$$

tính chất này dùng để đánh giá cùng mẫu dương các phân thức khi tử vừa âm vừa dương. Vận dụng để đánh giá $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} \le \frac{x+2}{2}$, đây là đánh giá mấu chốt để giải hoàn chỉnh bài toán.

Bài 10. *Giải bất phương trình:*

$$(x+1)\sqrt[3]{3x-1} + (3x-1)\sqrt{x+1} \ge 3x^2+2x-9 \quad (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt[3]{3x-1}-2\right) + (3x-1)\left(\sqrt{x+1}-2\right) \ge (x-3)(3x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{3(x-3)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3} + (3x-1)\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} \ge (x-3)(3x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}+\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}-3(x+1)\right]\geq 0 \ (2).$$

Ta có: $\dfrac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}\leq\dfrac{3(x+1)}{3}$;

$$\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+1}+2}\leq\frac{3(x+1)}{2}.$$

Suy ra:

$$\frac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}+\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{5(x+1)}{2}<3(x+1).$$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3$. So với điều kiện, ta được: $-1\leq x\leq 3$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=[-1;3]$.

Bài 11. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+7}+x^2-2x-3\leq\sqrt{4x-2}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}$. BPT đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3+\sqrt{x+7}-\sqrt{4x-2}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3+\frac{x+7-4x+2}{\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)+\frac{3(3-x)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)-3\right]\leq 0 \ (*).$$

Với $x\geq\dfrac{1}{2}$, ta có: $x+1\geq\dfrac{3}{2}$ và

$$\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)^2=5(x+1)+2\sqrt{(x+1)(4x-2)}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)^2\geq 5(x+1)\geq\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\geq\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Suy ra: $(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)\geq\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{15}{2}}>3.$

Do đó: $(*)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=\left[\dfrac{1}{2};3\right]$.

Bình luận. Khi xét hàm số

$$f(x)=(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)-3$$

ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ nên suy ra

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}-3>0,\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),$$

từ đó ta có: $(*)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3$.

Bài 12. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-x^2}\left(\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{2x-1}\right)\leq 1-x-x^2 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x-x^2}\left(-2x^2-2x+2\right)$$
$$\leq\left(1-x-x^2\right)\left(\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}-2\sqrt{x-x^2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\frac{2x^2-2x+2\sqrt{(2x-1)\left(1-2x^2\right)}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{x-x^2}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}\right)^2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{x-x^2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}\neq 0\\ 1-x-x^2\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\vee x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\leq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{hoặc}\ x\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

So với điều kiện, ta đượctập nghiệm của BPT đã cho là $S=\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

4. Kỹ thuật dùng hàm số để giải

Bài 13. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{3-x}{\sqrt{6-x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}-1\geq 0 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $-2<x<6$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3-x}{\sqrt{6-x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}-1$ liên tục trên $(-2;6)$ có:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x-9}{\left(\sqrt{6-x}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}\right)^3}\right]<0,\ \forall x\in(-2;6).$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2;6)$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow x\le 2.$$

So với điều kiện, ta được: $-2<x\le 2$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=(-2;2]$.

Bài 14. *Giải bất phương trình:*

$$(2x+2)\sqrt{2x+3}+(x+12)\sqrt{x-1}\ge 6x+2\ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$. Ta có:

$(1)\Leftrightarrow (2x+2)\sqrt{2x+3}+(x+12)\sqrt{x-1}-6x-2\ge 0.$

Xét hàm số

$$f(x)=(2x+2)\sqrt{2x+3}+(x+12)\sqrt{x-1}-6x-2$$

liên tục trên $[1;+\infty)$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{6x+8}{\sqrt{2x+1}}+\frac{3x+10}{2\sqrt{x-1}}-6$$
$$>\frac{1}{2}\left(3\sqrt{x-1}+\frac{13}{\sqrt{x-1}}\right)-6$$
$$>\sqrt{39}-6>0,\ \forall x\in[1;+\infty).$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó: $f(x)\ge f(1)=4\sqrt{5}-8>0\ \forall x\in[1;+\infty)$ $\Rightarrow$ BPT(1) đúng $\forall x\in[1;+\infty)$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=[1;+\infty)$.

Bài 15. *Giải bất phương trình:*

$$(2x+2)\sqrt{2x+1}+(x+12)\sqrt{x-1}\le 6x+4\ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, suy ra: $x=t^2+1$. BPT(1) trở thành: $(2t^2+4)\sqrt{2t^2+3}\le 10-13t+6t^2-t^3$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2t^2+3}\right)^3+\sqrt{2t^2+3}\le(2-t)^3+(2-t)\ (2).$$

Đặt $u=\sqrt{2t^2+3};v=2-t$, BPT(2) trở thành:

$$u^3+u\le v^3+v\ (3).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(3)\Leftrightarrow f(u)\le f(v)\Leftrightarrow u\le v\Leftrightarrow\sqrt{2t^2+3}\le 2-t$$
$$\Leftrightarrow t\le\sqrt{5}-2\Leftrightarrow x\le 10-4\sqrt{5}.$$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của BPT là $S=\left[1;10-4\sqrt{5}\right]$.

Bình luận. Thoạt nhìn ta cứ nghĩ bài này có thể giải giống như bài 11 nhưng thực tế lại không như vậy. Do có nghiệm xấu nên việc giải bằng kỹ thuật nhân lượng liên hợp gặp nhiều khó khăn, đặt $a=\sqrt{2x+1};b=\sqrt{x-1}$ rồi biểu diễn các biểu thức còn lại theo a,b bằng kỹ thuật hệ số bất định rất phức tạp, ta nhận thấy cách giải trên là tối ưu hơn cả.

Bài 16. *Giải bất phương trình:*

$$1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $a=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow 1=a^2-x^2+x$. BPT trên trở thành: $1+x\sqrt{x^2+1}>a\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow a^2-x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>a+a\sqrt{a^2+1}\ (1)$$
$$\Leftrightarrow -x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>-a^2+a+a\sqrt{a^2+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+t+t\sqrt{t^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có: $f'(t)=\sqrt{t^2+1}-2t+1+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

nên hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow f(x)>f(a)\Leftrightarrow x>a$$
$$\Leftrightarrow x>\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x>1.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=(1;+\infty)$.

Bài 17. *Giải bất phương trình:*

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^3\sqrt{2x-1}\ge\left(x^2-2x-1\right)\sqrt{x-2}\ (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$. *(Xem tiếp trang 25)*

CÁC LỚP THCS

Bài T1/539 (Lớp 6). Cho số $A=\overline{100...02008ab}$ (có 2008 chữ số 0 giữa hai chữ số 1 và 2). Hãy tìm các chữ số a và b để A chia hết cho 41.

ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

Bài T2/539 (Lớp 7). Nếu viết số 2108 thành tổng của các số chính phương thì phải cần ít nhất bao nhiêu số hạng?

NGUYỄN THÀNH CHƯƠNG
(GV TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, Hà Nội)

Bài T3/539. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$11x^2+2xy+16y^2+4=7z^2.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/539. Cho tam giác ABC không là tam giác cân với $AB + AC = 2BC$. Vẽ đường tròn (O) và đường tròn (I) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm khác là M. Tia MD cắt đường tròn (O) tại điểm khác là E. Tia AE cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh ba điểm K, I, O thẳng hàng

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/539. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}+\sqrt{z+3}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2(xy+yz+zx)}$.

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/539. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+y=5 \\ x^3+y^3+6xy=8 \end{cases}.$$

ĐÀO VĂN TRUNG
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T7/539. Cho hai số nguyên dương m, n. Kí hiệu: $A=(1+n)^n(1+m)^m-(1+n)^n-(1+m)^m$

và $B=(1+n)^m(1+m)^n-(1+n)^m-(1+m)^n$.

Tìm số dư khi chia $A-mnB$ cho $(mn)^2$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/539. Trong không gian cho 5 điểm A, B, C, D, E phân biệt. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh BC và DE, CD và EA, DE và AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy.

LÊ HOÀI BẮC
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đức, Bà Rịa-Vũng Tàu)

Bài T9/539. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và nội tiếp đường tròn tâm O, các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt đường tròn tâm O tại A_2, B_2, C_2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, chứng minh rằng

$$\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GB_2}+\frac{1}{GC_2}\le\frac{9}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/539. Tìm hằng số lớn nhất m sao cho với mỗi số n nguyên dương bất kỳ luôn có tổng các ước số nguyên tố (không nhất thiết phân biệt) của n sẽ không nhỏ hơn $m\ln n$.

TRẦN QUỐC HOÀN
(K50CA – Đại học Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/539. Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn: $f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

NGUYỄN TÀI CHUNG

(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Bài T12/539. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M, N lần lượt là trung điểm của AH, BC. Đường tròn đường kính AH cắt AN tại điểm thứ hai là U khác A. EF cắt AH tại T. K là điểm đối xứng với U qua BC. Chứng minh KH, NT cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC.

TRẦN ĐẠI LỘ

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên)

Bài L1/539. Một con lắc lò xo đặt trên mặt phẳng nằm ngang gồm lò xo nhẹ có độ cứng 20 N/m và vật nhỏ khối lượng 400 g. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng ngang là 0,1. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị dãn 6 cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy $g = 10$ m/s^2. Kể từ lúc buông vật cho đến thời điểm tốc độ của vật bắt đầu giảm, thế năng của con lắc lò xo đã giảm một lượng bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/539. Đặt điện áp xoay chiều $U_0 = 100\sqrt{2}$ V không đổi vào hai đầu đoạn mạch RLC nối tiếp, cuộn dây thuần cảm. Khi nối tắt tụ điện C thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở R tăng 2 lần và dòng điện trong hai trường hợp vuông pha với nhau. Điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở khi chưa nối tắt với tụ điện là bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/539 (For 6th grade). Given $A = \overline{100...02008ab}$ (there are 2008 digits 0's between the digits 1 and 2). Find the digits a and b so that A is divisible by 41.

Problem T2/539 (For 7th grade). Find the least possible number n so that we can write 2108 as a sum of n perfect squares.

Problem T3/539. Find integral solutions of the equation $11x^2 + 2xy + 16y^2 + 4 = 7z^2$.

Problem T4/539. Given a scalene triangle ABC with $AB + AC = 2BC$. Let (O) and (I) respectively be the circumcircle and the incircle of ABC. (I) is tangent to BC at D. The ray AI intersects (O) at the second point M. The ray MD intersects (O) at the second point E. The ray AE intersects BC at K. Show that K, I, O are collinear.

Problem T5/539. Given positive numbers x, y, z satisfying $x + y + z = 3$. Find the minimum value of the expression

$$P = \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2(xy+yz+zx)}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/539. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y = 5 \\ x^3 + y^3 + 6xy = 8 \end{cases}.$$

Problem T7/539. Given two positive integers m, n. Let $A = (1+n)^n(1+m)^m - (1+n)^n - (1+m)^m$ and $B = (1+n)^m(1+m)^n - (1+n)^m - (1+m)^n$. Find $A - mnB \mod (mn)^2$.

Problem T8/539. Given 5 different points A, B, C, D, E on the space. Let M, N, P respectively be the midpoints of the line segments connecting the

midpoints of the pairs BC and DE, CD and EA, DE and AB. Show that the lines AM, BN, CP are concurrent.

Problem T9/539. Given a triangle ABC with $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. The medians AA_1, BB_1, CC_1 respectively intersect the circumcircle (O) at A_2, B_2, C_2. Let G be the centroid of ABC. Show that

$$\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GB_2}+\frac{1}{GC_2}\le\frac{9}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/539. Find the largest possible number m so that for each positive integer n, the sum of the prime divisors (not necessarily different) of n is not less than $m\ln n$.

Problem T11/539. Find all functions f: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ satisfying

$$f(x+yf(x))=f(x)+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Problem T12/539. Given an acute triangle ABC ($AB<AC$). The altitudes BE, CF meet at H. Let M and N respectively be the midpoints of AH and BC. The circle with the diameter AH intersects AN at the second point U. EF intersects AH at T. Suppose that K is the reflection point of U in BC. Show that KH, NT meet together at some point on the circumcircle of MBC.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

MỘT SỐ KỸ THUẬT ... *(Tiếp theo trang 22)*

Cách 1. Viết lại BPT(1) về dạng:

$$\frac{(2x-2)\sqrt{2x-1}}{2x}\ge\frac{(x^2-2x-1)\sqrt{x^2-2x}}{x^2-2x+1}\quad(2).$$

Đặt $\begin{cases}a=2x-2\\ b=x^2-2x-1\end{cases}$. Điều kiện: $a,b>0$.

BPT (2) thành: $\dfrac{a\sqrt{a+1}}{a+2}\ge\dfrac{b\sqrt{b+1}}{b+2}$ (3).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t\sqrt{t+1}}{t+2}$ liên tục trên $(0;+\infty)$

có: $f'(t)=\dfrac{t^2+6t+4}{2(t+2)^2\sqrt{t+1}}>0\ \forall t\in(0;+\infty)$

nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(3)\Leftrightarrow f(a)\ge f(b)$

$\Leftrightarrow a\ge b$

$\Leftrightarrow x^2-4x+1\le 0$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}\le x\le 2+\sqrt{3}.$

So với điều kiện ta được tập nghiệm của BPT là

$S=\left[2;2+\sqrt{3}\right).$

Cách 2.

$(1)\Leftrightarrow(x-1)^3\sqrt{2x-1}\ge(x^3-2x^2+x)\sqrt{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow(x-1)^3\sqrt{2x-1}\ge(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}$
$+(x^2-4x+1)\sqrt{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow(x^2-4x+1)\left(\sqrt{x^2-2x}+\dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-2x}}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+1\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 2+\sqrt{3}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các bất phương trình sau:

1. $(x-3)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)^2\ge(x-1)^2$

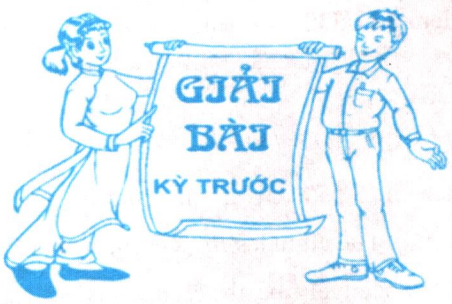
2. $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{2-x+\dfrac{3}{2-x}}\le 4$

3. $\dfrac{x^2+x-2\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}-3}=\sqrt{x+2}$

4. $3\sqrt{2x+5}+2\sqrt{x+2}\ge x^3-8x^2+25x-13$

5. $(2x+4)\sqrt{5-x^2}+(x-1)\sqrt{5+x^2}\le 7x+5$

6. $(x^2-x-6)\sqrt{x-1}+(x-2)\sqrt{x+1}\ge 3x^2-9x+2.$



Bài T1/535 (Lớp 6). *Cho a, b là các số tự nhiên lẻ nguyên tố cùng nhau. Tìm tất cả các giá trị có thể có của* $\gcd\left(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1;\ 2^b+2^{\frac{b+1}{2}}+1\right)$, *ở đây* gcd(*x*; *y*) *kí hiệu là ước chung lớn nhất của hai số x và y.*

Lời giải. *Nhận xét* 1. Với các số tự nhiên dương, n, p mà $m = n + p$ thì $\gcd(m\,;n) = \gcd(n\,;p)$.

Thật vậy, đặt $e = \gcd(m\,;n)$ và $f = \gcd(n\,;p)$ thì e là ước số chung của m và n nên e là ước số chung của n và $p = m - n$ do đó

$$e \le f = \gcd(n\,;p),$$

còn $f = \gcd(n\,;p)$ thì f là ước số chung của n và p nên f là ước số chung của n và $m = n + p$ do đó $f \le e = \gcd(m\,;n)$, suy ra $e = f$.

Nhận xét 2. Giả sử có các số tự nhiên dương m, n, p mà $m = n + p$, xét cặp số n, p. Nếu $n > p$ mà $n = p + q$ ta lập dãy số dương $m > n > p > q$ khi $p > q$, hoặc lập dãy số dương $m > n > q > p$ khi $q > p$. Làm tương tự nếu $p > n$. Tiếp tục xét cặp số nhỏ nhất trong mỗi dãy số sắp thứ tự như thế, do các số hạng đều là số tự nhiên dương sắp thứ tự nhỏ dần nên ta được dãy số sắp thứ tự nhỏ dần với không quá m số hạng. Giả sử với dãy số $m > n > p > q$ ta được các số hạng dương nhỏ nhất là u, v với $s > t > u = v > 0$ $(t = u + v = 2u)$.

Theo *Nhận xét* 1 có: $\gcd(m\,;n) = \gcd(n\,;p)$
$= \gcd(p\,;q) = \ldots = \gcd(s\,;t) = \gcd(t\,;u)$
$= \gcd(2u; u) = u$.

Tương tự với các dãy số khác cũng có $\gcd(m\,;n) = u$ với u là số hạng dương cuối cùng của dãy số đó.

Trở lại bài toán với giả sử rằng $a > b$. Đặt

$$e = \gcd\left(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1; 2^b+2^{\frac{b+1}{2}}+1\right)$$

thì e là ước số của $2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1$ nên là ước số của

$$\left(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1\right)\left(2^a-2^{\frac{a+1}{2}}+1\right)$$
$$= (2^a+1)^2 - 2^{a+1} = 2^{2a}+1 = 4^a+1,$$

từ đó e là ước số của

$$(4^a+1)(4^a-1) = 4^{2a}-1 = 16^a-1.$$

Lập luận tương tự thì e là ước số của $16^b - 1$. Từ đó e là ước số của

$$16^a - 1 - (16^b - 1) = 16^a - 16^b = 16^b(16^{a-b} - 1).$$

Số $4^a + 1$ là số lẻ, không chia hết cho 3 nên e là số lẻ và khác 3, do đó e là ước số của $16^{a-b} - 1$ và khác 3. Đặt $a - b = c$ thì e là ước số của $16^c - 1$.

Theo *Nhận xét* 2 xét cặp số b, c ta có dãy số dương sắp thứ tự $a > b > c > d$ khi $b = c + d$ hoặc có dãy số dương $a > c > b > d$ khi $c = b + d$. Tiếp tục xét cặp số nhỏ nhất trong mỗi dãy số trên, giả sử số dương cuối cùng (nhỏ nhất) trong dãy số đó là $u = v$ thì $\gcd(a\,;b) = u$, mà $\gcd(a\,;b) = 1$ nên $u = 1$. Tương ứng với dãy số dương sắp thứ tự đó, e là ước số chung của $16^a - 1$ và $16^b - 1$, e là ước số chung của $16^b - 1$ và $16^c - 1$, ... nên cuối cùng (do $u = v$) e là ước số của

$$16^u - 1 = 16 - 1 = 15.$$

Vì e khác 3 nên chỉ có thể e bằng 1 hoặc 5.

Chẳng hạn, khi $a = 3$, $b = 1$ thì

$$e = \gcd(2^3 + 2^2 + 1; 2 + 2 + 1) = \gcd(13\,;5) = 1,$$

khi $a = 7$, $b = 1$ thì

$$e = \gcd(2^7 + 2^4 + 1\,; 2 + 2 + 1) = \gcd(145\,;5) = 5.$$

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh được rằng với các số tự nhiên dương a, b, c và $d = \gcd(a; b)$ thì $\gcd(c^a - 1; c^b - 1) = c^d - 1$.

2) Hoan nghênh bạn *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên** đã giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/535. *Biết N là số chẵn không chia hết cho 10, hãy tìm chữ số hàng chục của số* N^{20} *và chữ số hàng trăm của* N^{200}.

Lời giải. • Vì N là số chẵn nên N chia hết cho 2, suy ra N^2 chia hết cho 4. Do đó $N^{20} = (N^2)^{10}$ chia hết cho 4.

Vì N là số chẵn không chia hết cho 10 nên N không chia hết cho 5, suy ra $N = 5k \pm 1$ hoặc $5k \pm 2$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có:

$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20.(5k)^{19} + \ldots \pm 20.(5k) + 1$

suy ra: $(5k \pm 1)^{20}$ chia cho 25 dư 1;

$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20.(5k)^{19}.2 + \ldots \pm 20.(5k).2^{19} + 2^{20}$

suy ra $(5k \pm 2)^{20}$ chia cho 25 dư 1.

Vì thế N^{20} chia cho 25 dư 1, suy ra N^{20} có hai chữ số tận cùng là 01, 26, 51, 76. Mặt khác, N^{20} chia hết cho 4 nên trong các số trên chỉ chọn được 76. Vậy chữ số hàng chục của N^{20} là 7.

• Vì N là số chẵn nên N chia hết cho 2, suy ra N^3 chia hết cho 8. Do đó $N^{200} = N^3.N^{197}$ chia hết 8.

Do N^{20} chia cho 25 dư 1 nên

$$N^{20} = 25m + 1 \ (m \in \mathbb{N}).$$

Ta có: $N^{200} = (25m+1)^{10} = (25m)^{10} + 10.(25m)^9 + \ldots + 10.25m + 1$,

suy ra N^{200} chia cho 125 dư 1.

Do đó N^{200} có ba chữ số tận cùng là 001, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Mặt khác N^{200} chia hết cho 8 nên trong các số trên chỉ chọn được 376.

Vậy N^{200} có chữ số hàng trăm là 3.

Nhận xét. Bài này rất ít bạn tham gia giải. Tuyên dương hai bạn *Bùi Thị Thuỳ Linh*,6A, *Nguyễn Văn Lâm*, 7A,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T3/535. *Cho trước số nguyên tố p. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn*

$$x^2 - (p+2)x + 2p + 1 = p^y.$$

Lời giải. Nhận xét

$$x^2 - (p+2)x + 2p + 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \geq 0.$$

Nếu $y = 0$, phương trình tương đương với

$x^2 - (p+2)x + 2p + 1 = 1$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - (p+2)x + 2p = (x^2 - px) - (2x - 2p)$

$= (x-2)(x-p)$

$\Leftrightarrow x = 2$ nếu $p = 2$; $x \in \{2, p\}$ nếu $p \neq 2$.

Xét trường hợp $y \geq 1$ ta có:

$x^2 - (p+2)x + 2p + 1$

$= [x^2 - (p+1)x] - (x - p - 1) + p$

$= (x-1)(x-p-1) + p.$

Chú ý $(x-1) - (x-p-1) = p$. Do đó nếu trong hai số $x-1$, $x-p-1$ có một số chia hết cho p thì số còn lại cũng chia hết cho p, hệ quả là nếu $(x-1)(x-p-1)$ chia hết cho p thì suy ra $(x-1)(x-p-1)$ chia hết cho p^2.

Ta lại có $(x-1)(x-p-1) + p = p^y$, p không chia hết cho p^2 nên p^y không chia hết cho p^2 suy ra $y = 1$. Khi đó phương trình tương đương với

$(x-1)(x-p-1) + p = p \Leftrightarrow (x-1)(x-p-1) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1, p+1\}$.

Như vậy tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn bài toán là: $\{(2,0),(1,1),(3,1)\}$ nếu $p = 2$,

$\{(2,0),(p,0),(1,1),(p+1,1)\}$ nếu $p \neq 2$.

Nhận xét. Lý luận như trong lời giải trên không phải là mới. Lý luận đó đã xuất hiện trong nhiều bài toán thuộc phần "*ứng dụng của phân tích thành nhân tử trong số học*" của lớp 8. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Ngân Hà*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 6C, *Nguyễn Hải Triều*, 8B, *Nguyễn Tất Quân*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Cao Thị Khánh Chi, Cao Long, Hồ Hoàng Vũ*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/535. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. OM cắt BC tại I, AM cắt đường tròn (O) tại N, kẻ đường kính NP. Các đường thẳng PA và BC cắt nhau tại E và Q là giao điểm của PC và BN. Chứng minh rằng ME tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác OIQ.*

Lời giải. Gọi D là giao điểm của MO và PC. Vì PN là đường kính đường tròn (O) nên $\widehat{PBN} = \widehat{PAN} = 90°$.

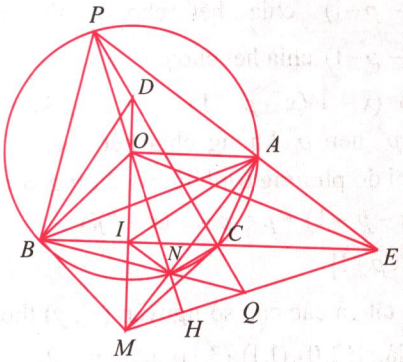
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$\widehat{BMD} = 90° - \widehat{BOM} = 90° - \widehat{BPC} = \widehat{BQD}.$$

Suy ra tứ giác $BMQD$ nội tiếp. Từ đó:

$\widehat{MQB} = \widehat{MDB} = \widehat{MBN}$, suy ra $MQ = MB = MC$.

Theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{MQC} = \widehat{MCQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PNC}$.



Gọi H là giao điểm của PN và MQ, suy ra tứ giác $QCNH$ nội tiếp, do đó $NH \perp MQ$.

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông và do $\Delta BMN \sim \Delta AMB$ ta có $MI.MO = MB^2 = MN.MA$, suy ra tứ giác $ANIO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AIO} = \widehat{ANO}$ (1).

Lại có $\widehat{MIE} = \widehat{MAE} = 90°$, nên tứ giác $MEAI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AIO}$ (2).

Từ (1), (2) ta có $\widehat{ANO} = \widehat{AEM}$, gọi H' là giao điểm của PN và ME thì tứ giác $AEH'N$ nội tiếp, dẫn tới $NH' \perp ME$, do đó $H' \equiv H$. Vậy M, Q, E thẳng hàng.

Mặt khác, $MQ^2 = MI.MO$ nên MQ là tiếp tuyến của đường tròn (OIQ), do đó ME là tiếp tuyến của đường tròn (OIQ).

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Ngọc Tú*, thôn Bản Tùy, xã Ngọc Đường, **Hà Giang** sử dụng tính chất của tứ giác điều hòa $ABNC$ và tính chất cực – đối cực để giải bài toán. Ngoài ra, bạn *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh** cũng cho lời giải tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/535. *Cho các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)} + \frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)} + \ldots + \frac{x_1}{x_n(x_n+x_1)} \geq \frac{1}{x_1+x_2} + \frac{1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n+x_1}.$$

Lời giải. (Của một số bạn) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ cho các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{4}{x_1+x_2}; \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{4}{x_2+x_3}; \ldots;$$

$$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1} \geq \frac{4}{x_n+x_1}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức, ta thu được:

$$2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{4}{x_1+x_2} + \frac{4}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{4}{x_n+x_1}.$$

Chia 2 vế cho 2 và đem trừ vào 2 vế tổng $\frac{1}{x_1+x_2} + \frac{1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n+x_1}$, ta có bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_{+2})} + \frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)} + \ldots + \frac{x_1}{x_n(x_n+x_1)} \geq \frac{1}{x_1+x_2} + \frac{1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n+x_1}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Quảng Trị**: *Thái Phạm Thu Uyên*, THPT Cam Lộ; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An**: *Hồ Hoàng Vũ*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Thị Thảo Trang*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đà Sơn, Đô Lương; **Hà Giang**: *Nguyễn Ngọc Tú*, thôn Bản Tùy, Ngọc Đường, TP. Hà Giang.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/535. *Biết rằng phương trình*

$$(x-15)(x-10)(x-1964) = 2021$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-15)^3 + (x_i-10)^3 + (x_i-1964)^3\right]$.

Lời giải. Xét phương trình tổng quát

$$(x-a)(x-b)(x-c) = m \quad (1)$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3. Tính giá trị biểu thức

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-a)^3 + (x_i-b)^3 + (x_i-c)^3\right].$$

Phương trình (1) có thể viết thành

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc-m=0.$$

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a+b+c & (2) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=ab+bc+ca & (3). \\ x_1x_2x_3=abc+m & (4) \end{cases}$$

Từ (2), (3) suy ra: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2+b^2+c^2$.

Sử dụng đẳng thức quen thuộc, ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad (4).$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$$
$$=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1) \quad (5).$$

Vì các vế phải của (4) và (5) bằng nhau nên:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3(abc+m).$$

Suy ra: $x_1^3+x_2^3+x_3^3=a^3+b^3+c^3+3m.$

Dùng khai triển $(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ với tất cả 9 số hạng trong S, ta có:

$$S=\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-a)^3+(x_i-b)^3+(x_i-c)^3\right]$$
$$=3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3(a+b+c)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$+3(a^2+b^2+c^2)(x_1+x_2+x_3)-3(a^3+b^3+c^3)$$
$$=9m.$$

Với $m=2021$ ta được $S=9m=9.2021=18189$.

Vậy $S=18189$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là tính $x_1+x_2+x_3$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ sau đó biểu diễn S qua các biểu thức này. Trong kết quả, S không phụ thuộc a, b, c.

2) Nếu phương trình bậc ba $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3 thì ta có phân tích

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3.$$

Đồng nhất hệ số hai vế, suy ra định lý Viète với phương trình bậc ba mà ta đã sử dụng trong lời giải trên.

3) Áp dụng đẳng thức

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{ ta có:}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca\right].$$

Từ đó suy ra (4).

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy, Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, *Đoàn Vân Hoàng Lân*, 10 Toán 1, THPT Chuyên Quốc Học Huế; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 11A1, THPT Yên Phong 2, H. Yên Phong; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** *Trần Hữu Dương*, 10 Toán 1, *Đoàn Hoàng Quân*, 11 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Hán Vũ Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Hoàng Yến Nhi*, 11CT, THPT Gia Định, Q. Bình Thạnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/535. *Cho hàm số nhận giá trị thực f xác định trên tập hợp các số nguyên dương ($f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$) thoả mãn điều kiện: Với mọi số nguyên dương $n>1$, tồn tại một ước nguyên tố p của n sao cho $f(n)=f\left(\frac{n}{p}\right)-f(p)$. Biết rằng f(2022) = 1, hãy tính f(2024).*

Lời giải. Nhận xét rằng với mọi số nguyên tố p ta có: $f(p)=f(1)-f(p)$, suy ra: $f(p)=\frac{f(1)}{2}$.

Với n là tích của hai số nguyên tố p, q tức là: $n=pq$, ta có:

$$f(n)=f(p)-f(q) \text{ hoặc } f(n)=f(q)-f(p).$$

Kết hợp với nhận xét trên ta suy ra trong trường hợp này thì $f(n)=0$. Tương tự, nếu n là tích của 3 số nguyên tố, theo giả thiết phải có ước nguyên tố p của n sao cho:

$$f(n)=f\left(\frac{n}{p}\right)-f(p)=0-f(p)=-\frac{f(1)}{2}.$$

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh được nếu n là tích của k số nguyên tố thì $f(n)=(2-k)\frac{f(1)}{2}$.

Đặc biệt, do $1=f(2022)=f(2.3.337)=(2-3)\frac{f(1)}{2}$,

suy ra: $f(1)=-2$. Do đó:

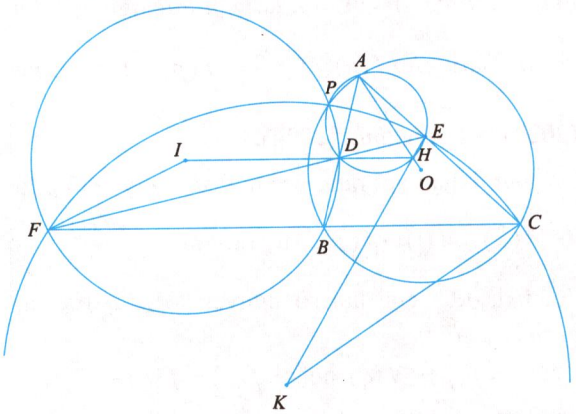
$$f(2024)=f(2.2.2.11.23)=(2-5)\frac{f(1)}{2}=-3.\frac{-2}{2}=3.$$

Nhận xét. Đây là bài toán không khó nhưng khá hay. Có 5 bạn giải đúng bài này, danh sách 5 bạn là: **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Sóc Trăng:** *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế sách, H. Kế Sách.

NHƯ HOÀNG

Bài T8/535. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (J) đi qua A cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E; cắt lại (O) tại P. Gọi I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDP, CEP. Chứng minh rằng ID, KE, AO đồng quy tại một điểm nằm trên (J).*

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).



Xét trường hợp $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ đều là góc nhọn, trường hợp một trong hai góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ là góc tù ta giải tương tự.

Gọi H là giao điểm thứ hai của OA với đường tròn (J), F là giao điểm của ED với BC, giả sử B nằm giữa F và C.

Vì P là giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn (J) nên P là *điểm Miquel* của *tứ giác toàn phần CEDB.AF*. Suy ra (B, D, P, F) cùng thuộc một đường tròn và (C, E, P, F) cùng thuộc một đường tròn. Ta có:

$$\widehat{HEC}=\widehat{OAC}+\widehat{AHE}=90^0-\widehat{ABC}+\widehat{ADE}$$
$$=90^0-(\widehat{ABC}-\widehat{BDF})=90^0-\widehat{EFC}=\widehat{KEC}.$$

Từ đó ba điểm E, H, K thẳng hàng. Mặt khác

$$\widehat{ADH}=180^0-\widehat{OAB}-\widehat{AHD}$$
$$=180^0-90^0+\widehat{ACB}-\widehat{AED}$$
$$=90^0-(\widehat{AED}-\widehat{ACB})=90^0-\widehat{DFB}=\widehat{IDB}.$$

Suy ra ba điểm I, D, H thẳng hàng. Vậy ID, KE, AO đồng quy tại điểm H thuộc đường tròn (J).

Trường hợp C nằm giữa F và B ta làm tương tự.

Nhận xét. Kết quả của bài toán này là một tính chất đặc trưng của *tứ giác toàn phần* có liên quan đến *điểm Miquel* của tứ giác đó (tứ giác toàn phần *CEDB.AF*). Ngoài bạn *Huy*, các bạn học sinh sau cũng có lời giải đúng: **Hà Giang**: *Nguyễn Ngọc Tú*, thôn Bản Tuỳ, xã Ngọc Dương, TP. Hà Giang; **Phú Thọ**: *Hán Vũ Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hà Nội**: *Bùi Tiến Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Nguyễn Văn Khiêm*, *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam**: *Nguyễn Thế Hiếu*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng**: *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế Sách, huyện Kế Sách.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/535. *Cho p là một số nguyên tố bất kì, q là một số nguyên thoả mãn $0\le q\le p-1$. Chứng minh rằng $q!(p-q-1)!+(-1)^q\equiv 0 \pmod p$, trong đó kí hiệu $n!=1.2.3....n$.*

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$q!(p-q-1)!+(-1)^q\equiv 0 \pmod p$$
$$\Leftrightarrow q!(p-q-1)!\equiv -(-1)^q \pmod p$$
$$\Leftrightarrow q!(p-1)!\equiv -(-1)^q(p-q)...(p-1) \pmod p \quad (1).$$

Ta cũng có:

$$VP(1)\equiv -(-1)^q(-q)...(-1) \pmod p\equiv (-1)q! \pmod p.$$

Theo định lý Wilson ta có:

$$(p-1)!\equiv(-1) \pmod p$$

nên $\quad VT(1)\equiv(-1)q! \pmod p.$

Do đó (1) đúng, suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Trước tiên ta cần một bổ đề.

Bổ đề. *Cho p là số nguyên tố. Đặt*

$$X = \{1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Khi đó với bất kỳ $a \in X$ *thì tồn tại* $a' \in X$ *sao cho* $aa' \equiv 1 \pmod p$ và $a = a' \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = p-1$.

Chứng minh. Xét phần tử bất kỳ $a \in X$, ta thực hiện $p-1$ phép chia $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ cho p, và gọi $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ là các số dư tương ứng $(1 \le b_i \le p-1)$.

+ Do $1 \le b_i \le p-1$, $1 \le i \le p-1$ và p là số nguyên tố nên $a.i \not\vdots\, p$ với $i = 1, 2, \ldots, p-1$

$\Rightarrow b_i \ne 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, p-1.$

+ Giả sử tồn tại $i \ne j$ (giả sử $i > j$) sao cho $b_i = b_j$. Khi đó: $i.a \equiv j.a \pmod p \Leftrightarrow (i-j)a \equiv 0 \pmod p$ hay $(i-j)a \vdots\, p$. Do $(a, p) = 1$ nên $i - j \vdots\, p$ (1).

Mặt khác do $i, j \in X$, $i > j$ nên $i - j \in X$, điều này mâu thuẫn với (1). Vậy $b_i \ne b_j$, $\forall i \ne j$.

Từ hai nhận xét trên, tồn tại $b_i = 1$ $\Rightarrow i.a \equiv 1 \pmod p$. Đặt $a' = i$ thì ta có: $aa' \equiv 1 \pmod p$. Theo lập luận trên thì sự tồn tại a' là duy nhất. Bây giờ nếu $a = a'$ thì

$$a^2 \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod p$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 \vdots\, p \\ a+1 \vdots\, p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = p-1 \end{array}\right. \text{(do } a \in X\text{)}.$$

Bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán.

• Với $q = 0$, ta cần chứng minh:

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Với $p = 2$ ta có: $(2-1)! + 1 = 2 \equiv 0 \pmod 2$, mệnh đề đúng.

Với $p = 3$ ta có: $(3-1)! + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3$, mệnh đề đúng.

Với $p \ge 5$ ta có: $(p-1)! = (p-1)(p-2)\ldots.2.1$.

Theo bổ đề trên, ta có trong tập hợp

$$\{p-2, p-3, \ldots, 2\}$$

gồm $\dfrac{p-3}{2}$ cặp a, a' sao cho $aa' \equiv 1 \pmod p$.

Do đó: $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p$

$$\Leftrightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Vậy ta chứng minh được bài toán với $q = 0$.

• Với $1 \le q \le p-1$, theo trên ta có:

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p-2)\ldots(p-q).(p-q-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$\equiv (-1)^q q!(p-q-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$\equiv q!(p-q-1)! + (-1)^q \equiv 0 \pmod p.$$

Nhận xét. Bài toán trên có thể xem như phát biểu tổng quát của định lý Wilson trong số học. Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải tương tự như cách 1 (sử dụng định lý Wilson). Cách giải 2 là của tác giả đề toán. Cách 2 tuy dài hơn nhưng ý tưởng chứng minh là hay và nội dung bổ đề là một kiến thức cần biết khi giải các bài toán liên quan đến số nguyên tố. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Tuyên Quang:** *Phạm Mai Uyên*, 10 Toán, THPT chuyên Tuyên Quang; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Hán Vũ Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, *Đoàn Văn Hoàng Lân*, 10 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Nguyễn Quang Huy*, *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Vũ Tiến Đạt*, 11T, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Hoàng Yến Nhi*, 11CT, THPT Gia Định; **Sóc Trăng:** *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế sách, H. Kế Sách.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/535. *Tìm tất cả các hàm số liên tục* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *biết f đơn điệu tăng trên* $\mathbb{R}$ *và thỏa mãn* $f(f(x)) = f(x) + 1$ (1), $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**)

Giả sử $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$ thì từ giả thiết f liên tục và đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ suy ra $f(x) \le q, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + 1 > q$, mâu thuẫn.

Vậy nên $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Trường hợp khi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Khi đó miền giá trị $D_f = (-\infty, +\infty)$ nên từ (1) suy ra:

$$f(t) = t + 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

- Trường hợp khi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$D_f=[a,+\infty)$. Từ (1) suy ra $f(t)=t+1,\forall t\in D_f$.

Do đó, khi $x\in[a,+\infty)$ thì $f(x)=x+1$.

Khi $x\le a$ thì $f(x)=g(x)$ trong đó $g(x)$ là hàm liên tục đơn điệu tăng trên $(-\infty,a)$ với $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a+1$.

Thử lại, ta thấy các hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra. Ví dụ, chẳng hạn khi $a=0$ ta có thể chọn hàm số dạng $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x>0 \\ \dfrac{1}{1-x} \text{ khi } x\le 0 \end{cases}$.

Kết luận. Các hàm số thỏa mãn các điều kiện bài ra là $f(x)=x+1$ và $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x\ge a \\ g(x) \text{ khi } x\le a \end{cases}$

trong đó $g(x)$ là hàm liên tục đơn điệu tăng trên $(-\infty,a)$ với $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a+1$.

Nhận xét. Đây là dạng toán khó về phương trình hàm trong lớp hàm hợp. Đa số các bạn gửi bài giải chỉ tìm được một nghiệm hàm $f(x)=x+1$.

NGUYỄN VĂN MẬU

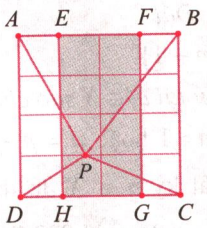
Bài T11/535. *Tìm số thực dương $a>1$ nhỏ nhất thoả mãn điều kiện: Với mọi điểm P nằm trong hình vuông ABCD (có thể trên cạnh hình vuông) thì luôn tồn tại hai trong bốn tam giác PAB, PCD, PDA, PBC (tam giác có thể suy biến) có tỉ số diện tích thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{a};a\right]$.*

Lời giải 1 (của tác giả *Lê Xuân Đại*). Không hạn chế tổng quát, coi hình vuông $ABCD$ có cạnh độ dài bằng 1 (đơn vị dài). Kí hiệu $d(M,\Delta)$ là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.

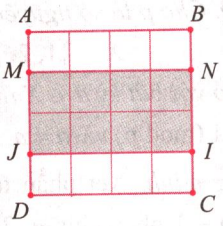
Một miền nằm trong hình vuông $ABCD$ được gọi là *miền tốt* nếu với mọi điểm P của miền đó luôn tồn tại hai trong bốn tam giác PAB, PCD, PDA, PBC có tỉ số diện tích thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{a};a\right]$.

Lấy hai điểm E,F thuộc cạnh AB và hai điểm G,H thuộc cạnh CD sao cho (h.1):

$$AE=BF=CG=DH=\frac{1}{a+1}.$$



Hình 1



Hình 2

Giả sử P là một điểm trong hình vuông $ABCD$. Kí hiệu $t:=d(P;AD)$. Khi ấy $d(P;BC)=1-t$.

Ta có: $AF=AB-BF=1-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a}{a+1}$ và

$$\frac{S_{PAD}}{S_{PBC}}\le a\Leftrightarrow\frac{d(P;AD)}{d(P;BC)}\le a\Leftrightarrow\frac{t}{1-t}\le a$$

$$\Leftrightarrow t\le(1-t)a\Leftrightarrow t(1+a)\le a\Leftrightarrow t\le\frac{a}{1+a}$$

$\Leftrightarrow$ P nằm trong hình chữ nhật $AFGD$.

Tương tự:

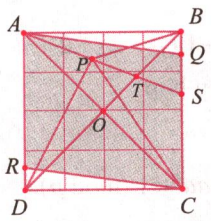
$$\frac{S_{PAD}}{S_{PBC}}\ge\frac{1}{a}\Leftrightarrow\frac{d(P;AD)}{d(P;BC)}\ge\frac{1}{a}\Leftrightarrow\frac{t}{1-t}\ge\frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow at\ge 1-t\Leftrightarrow t(a+1)\ge 1\Leftrightarrow t\ge\frac{1}{a+1}.$$

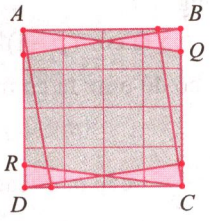
$\Leftrightarrow$ P nằm trong hình chữ nhật $BEHC$.

Như vậy, $\dfrac{1}{a}\le\dfrac{S_{PAD}}{S_{PBC}}\le a\Leftrightarrow$ P nằm trong hình chữ nhật $EFGH$ hay $EFGH$ là một miền tốt.

Tương tự, ta xác định $MNIJ$, trong đó $AM=JD=IC=BN=\dfrac{1}{a+1}$, cũng là một miền tốt (h.2). Mặt khác, bây giờ lấy Q trên cạnh BC và R trên cạnh AD sao cho $BQ=DR=\dfrac{1}{a}$ (h.3).



Hình 3



Hình 4

Lấy P là điểm bất kì nằm trong tam giác ACQ. AP cắt BD tại T và cắt BC tại S. Hai tam giác

PAB và PAD có chung đáy PA nên

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAD}} = \frac{d(B;PA)}{d(D;PA)} = \frac{TB}{TD} = \frac{BS}{AD} = BS \geq BQ = \frac{1}{a}.$$

Mặt khác,

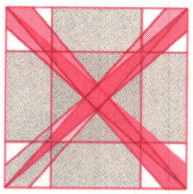
$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAD}} = \frac{d(B;PA)}{d(D;PA)} = \frac{TB}{TD} \leq \frac{OB}{TD} \leq 1 < a.$$

Vậy $\frac{1}{a} \leq \frac{S_{PAB}}{S_{PAD}} < a$, hay P là điểm thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Tương tự, nếu P là điểm bất kì nằm trong tam giác ACR thì P là điểm thỏa mãn điều kiện đầu bài. Vậy hình bình hành $AQCR$ là một miền tốt.

Tương tự, ta có thêm ba hình bình hành là các miền tốt (h.4).

Số a thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi điểm P nằm trong hợp của sáu miền tốt, tức là sáu miền tốt trùm toàn bộ hình vuông $ABCD$. Để điều này xảy ra thì $CQ \geq CI$ (h.5).



Hình 5: 6 miền tốt không trùm toàn bộ

Vì $CQ = BC - BQ = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$ nên

$$CQ \geq CI \Leftrightarrow \frac{a-1}{a} \geq \frac{1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Vậy số a nhỏ nhất là $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

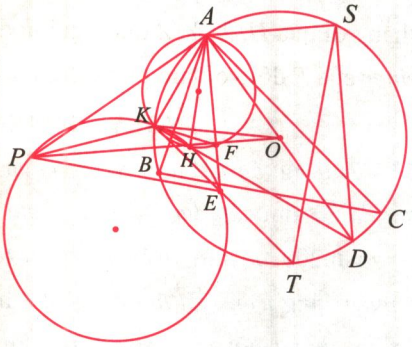
Nhận xét. Đây là bài toán khó nhưng rất hay. Đề bài và lời giải của tác giả có thể coi nó thuộc dạng toán Hình học tổ hợp. Chỉ có ba bạn gửi bài và ba bạn này đã thể hiện khả năng nghiên cứu toán học tốt. Vì hạn chế của trang báo nên không thể trình bày chứng minh của các bạn. Hi vọng các bạn có thể mở rộng chứng minh của mình cho bài toán trong không gian. Các bạn dưới đây đã gửi bài và giải đúng (mặc dù có một số sơ suất trong trình bày):

Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T12/535. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại K khác A. OH cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại P. Trên (O) lấy điểm S sao cho AS // OH. Đường thẳng qua S vuông góc với BC cắt (O) tại T. Chứng minh rằng KT đi qua trực tâm tam giác APH.*

Lời giải. (Của bạn *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**).



Gọi D là giao điểm thứ hai của AO và (O); E là trực tâm của tam giác APH; F là giao điểm của AE và PH. Dễ thấy K, H, D thẳng hàng và F thuộc đường tròn đường kính AH.

Vì $OK = OA$ và $\widehat{OAP} = 90°; AF \perp PH$ nên

$$OK^2 = OA^2 = \overline{OP}.\overline{OF}.$$

Do đó OK tiếp xúc với đường tròn (KPF).

Vậy, chú ý rằng $PH \equiv HF$; $OK = OD; DK \perp AK$; $DO \equiv DA \perp AP$; E là trực tâm của tam giác APH, ta có: $(PK, HK) \equiv (PK, PH) + (PH, HK)$

$\equiv (KO, KF) + (HF, KD) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv (KO, KD) + (HF, KF) \equiv (DK, DO) + (HA, KA) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv (AK, AP) + (HA, KA) \equiv (AH, AP)$

$\equiv (AH, PE) + (PE, PA) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2} + (PE, PA) \equiv (PA, HE) + (PE, PA)$

$\equiv (PE, HE) (\text{mod}\, \pi)$.

Do đó P, K, H, E cùng thuộc một đường tròn.

Dễ thấy $SD \perp SA // OH \equiv PH$. Do đó $SD \perp PH$.

Dễ thấy $ST \perp BC, AH \perp BC, AH \perp PE$. Do đó $ST \perp PE$. Vậy $(KD, KT) \equiv (SD, ST) \equiv (PH, PE)$

$\equiv (KH, KE) \equiv (KD, KE) (\text{mod}\, \pi)$.

Điều đó có nghĩa là K, E, T thẳng hàng.

Nhận xét. Ngoài cách giải trên của bạn *Hoàng*, bạn *Nguyễn Gia Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đã sử dụng bổ đề dưới đây cũng đi đến kết quả cần chứng minh.

Bổ đề: *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Điểm P thuộc (O). X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của P qua BC, CA, AB. Khi đó H, X, Y, Z thẳng hàng.*

(Đường thẳng đi qua *H, X, Y, Z* được gọi là đường thẳng *Steiner* của *P* đối với tam giác *ABC*).

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/535. *Hai nguồn kết hợp S_1, S_2 cách nhau một khoảng là 50 mm đều dao động theo phương trình $u = a\sin 200\pi t$ (mm) trên mặt nước. Biết vận tốc truyền sóng trên mặt nước $v = 0,8$ m/s và biên độ sóng không đổi khi truyền đi. Hỏi điểm gần nhất dao động cùng pha với nguồn trên đường trung trực của S_1S_2 cách nguồn S_1 bao nhiêu?*

Lời giải. Theo đề bài ta xác định được bước sóng:

$$\lambda = v.T = v.\frac{2\pi}{\omega} = 0,8.\frac{2\pi}{200\pi} = 0,008 \text{ m} = 8 \text{ mm}.$$

Tại một điểm bất kì ở trên mặt nước sẽ nhận được các sóng do S_1 và S_2 gửi tới:

$$u_{1M} = a\sin\left(200\pi t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right), u_{2M} = a\sin\left(200\pi t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right).$$

Nên dao động tại M là: $u_{1M} = u_{2M}$

$$= 2a\cos\frac{\pi(d_1 - d_2)}{\lambda}\sin 200\pi t - \frac{\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} \text{ (mm)}.$$

Vì M nằm trên đường trung trực của S_1S_2. Suy ra:

$$d_1 = d_2 = d \Rightarrow \cos\frac{\pi(d_1 - d_2)}{\lambda} = 1 > 0.$$

Nên độ lệch pha của điểm M so với nguồn là:

$$\Delta\varphi_M = \frac{\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Điểm M dao động cùng pha với các nguồn khi:

$$\Delta\varphi_M = 2k\pi \Rightarrow \frac{2\pi d}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow d = k\lambda = 8k \text{ (mm)}$$

$(k \in \mathbb{Z})$. Do M nằm trên đường trung trực nên:

$$d \geq \frac{S_1S_2}{2} \Rightarrow 8k \geq 25 \Rightarrow k \geq 3,125.$$

$$\Rightarrow k_{\min} = 4 \Rightarrow d_{\min} = 4.8 = 32 \text{ (mm)}.$$

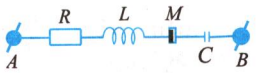
Nhận xét. Chúc mừng bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Ngọc Long*, 12T1; THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

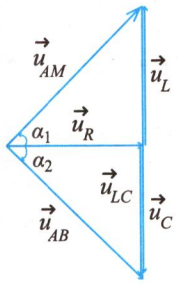
Bài L2/535. *Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn AM có điện trở $R = 200\ \Omega$ và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu của đoạn mạch một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U và có tần số thay đổi được. Điều chỉnh tần số để cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại thì thấy điện áp trên đoạn mạch AM lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với cường độ dòng điện. Tính tổng trở của đoạn mạch lúc đó.*

Lời giải. Sơ đồ mạch điện được mô tả như hình a). Ta có giản đồ vectơ điện áp hiệu dụng như hình b).

a)



b)



Để U_C cực đại

$$\Leftrightarrow \omega_C = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}}$$

$$\Rightarrow Z_L = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{Z_L Z_C - \frac{R^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_L}{R}\frac{Z_C - Z_L}{R} = \tan\alpha_1.\tan\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (1).$$

Vì $\varphi_{U_{AM}/i} = \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{Z_L}{R} = \tan\alpha_1 = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $Z_L - Z_C = \frac{R}{2}$.

Tổng trở: $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = 223,6\ \Omega$.

Nhận xét. Bạn *Phạm Ngọc Long*, 12T1; THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ GIẢI NHANH PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

TRẦN MINH VŨ (*GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai*)
NGUYỄN VĂN TRÍ (*GV THPT Nguyễn Trường Tộ, Bình Định*)
TRẦN THỊ THANH MINH (*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Gia Lai*)

1. Định nghĩa và dấu hiện nhận diện hàm số đơn điệu trên một khoảng

1.1. Định nghĩa hàm số đơn điệu trên một khoảng

Cho K là một khoảng của $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K. Ta nói:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$, $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$, $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K.

1.2. Dấu hiệu nhận diện hàm số đơn điệu trên một khoảng

1) Dựa vào định nghĩa

Xét $T=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}, \forall x_1,x_2\in K, x_1\neq x_2$.

Nếu $T>0$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $T<0$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

2) Dựa vào mối liên hệ giữa tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x)\geq 0, \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x)\leq 0, \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý rằng phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm trên K.

1.3. Một số tính chất

1) Tổng các hàm đồng biến (nghịch biến) trên K là một hàm đồng biến (nghịch biến) trên K.

2) Tích của hai hàm số dương đồng biến (nghịch biến) trên K là một hàm đồng biến (nghịch biến) trên K.

3) Nếu $y=f(x)$ đồng biến và dương trên K thì

- $y=\sqrt[n]{f(x)}, n\in\mathbb{N}, n>1$ đồng biến trên K.
- $y=\dfrac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên K.
- $y=-f(x)$ nghịch biến trên K.

4) Nếu $y=f(x)$ nghịch biến và dương trên K thì

- $y=\sqrt[n]{f(x)}, n\in\mathbb{N}, n>1$ nghịch biến trên K.
- $y=\dfrac{1}{f(x)}$ khi $f(x)$ đồng biến trên K.
- $y=-f(x)$ đồng biến trên K.

2. Số nghiệm của hai dạng phương trình

2.1. Vế trái là hàm số đơn điệu, vế phải là hằng số

Định lý 2.1. *Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên khoảng K thì phương trình $f(x)=m$ có không quá một nghiệm trên khoảng K, trong đó m là tham số.*

Thí dụ 1. *Tìm các nghiệm của phương trình*

$$7^x=4^x+3^x+\left(2\sqrt{6}\right)^x.$$

Hướng dẫn giải. Để đưa về một vế là hằng số thì thông thường ta thực hiện phép chia cả hai vế cho hàm mũ với lũy thừa cao nhất xuất hiện trong đề bài, với lưu ý rằng hàm mũ luôn nhận giá trị dương nên không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình.

Ta chia cả hai vế phương trình trên cho 7^x, ta được phương trình tương đương

$$1=\left(\frac{4}{7}\right)^x+\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^x.$$

Lúc này vế phải là hàm giảm do nó là tổng của các hàm giảm và vế trái là hàm hằng, do đó nghiệm của phương trình đã cho nếu có là duy nhất. Bằng cách nhẩm nghiệm, ta thấy $x=2$ thỏa mãn nên nó là nghiệm của phương trình đã cho.

2.2. Vế trái là hàm số đơn điệu tăng, vế phải là hàm số đơn điệu giảm

Định lý 2.2. *Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng K và hàm số $y=g(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng K thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng K.*

Thí dụ 2. *Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $4^x=7-3x$.*

Hướng dẫn giải. Dễ dàng thấy được vế trái của phương trình là hàm tăng và vế phải là hàm giảm, cho nên nghiệm của phương trình đã cho nếu có là duy nhất. Bằng cách nhẩm nghiệm ta thấy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3. Kỹ thuật đưa phương trình về sử dụng hàm số để giải

Trong xuyên suốt bài viết, chúng tôi viết ngắn gọn t và u thay vì $t(x)$ và $u(x)$ để các biểu thức bớt nặng nề về mặt ký hiệu.

3.1. Chỉ xuất hiện hàm đa thức

Cần biến đổi đưa về $f(u)=f(t)$, trong đó $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên tập xác định của nó.

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình*

$$e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$$

có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x\in[-1;1]$.

Xét hàm số $y=x+\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;1]$. Ta có:

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y'=0\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=x\Rightarrow 1-x^2=x^2\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thử lại ta chỉ chọn $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ là nghiệm của đạo hàm. Tiếp tục tính

$$y(1)=1;\ y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2};y(-1)=-1.$$

Vì vậy với $x\in[-1;1]$ thì $y\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $y^2=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2=1+2x\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\frac{y^2-1}{2}.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$e^{3m}+e^m=y^3+y.$$

Xét hàm số $f(u)=u^3+u$.

Vì $f'(u)=3u^2+1>0,\forall u$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có:

$$e^{3m}+e^m=y^3+y\Leftrightarrow f\left(e^m\right)=f(y)\Leftrightarrow e^m=y.$$

Vì vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1\le e^m\le\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}.$$

Thí dụ 4. *Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2022 để phương trình $m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}$ có nghiệm thực.*

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}\Leftrightarrow m+2^x+\sqrt{m+2^x}=2^x+2^{2x}.$$

Dễ thấy khi $m>0$ thì $\sqrt{m+2^x}>0$.

Vì hàm số $f(t)=t^2+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên phương trình đã cho tương đương với: $f\left(\sqrt{2^x+m}\right)=f\left(2^x\right)$

$$\Leftrightarrow 2^x+m=2^{2x}\Leftrightarrow m=2^{2x}-2^x.$$

Đặt $2^x=a$ và khảo sát hàm số $g(a)=a^2-a$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{(0;+\infty)}g(a)=-\frac{1}{4}$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{1}{4}$. Vậy có 2021 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

3.2. Chỉ xuất hiện hàm số mũ và đa thức

Cần biến đổi đưa về

$$a^u + f(u) = a^t + f(t),$$

trong đó $f(x)$ là hai hàm số đơn điệu tăng nếu $a > 1$ và đơn điệu giảm nếu $0 < a < 1$.

Dạng toán này thường xuất hiện dưới dạng

$$a^u - a^t = h(x).$$

Việc làm của chúng ta là biến đổi để thấy được $h(x) = \alpha(t-u), \alpha > 0$.

Thí dụ 5. *Cho phương trình:*

$$2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải. Ta biến đổi đưa về dạng trên, vì $-x^3 + 3x - m = x^2 + x - (x^3 + x^2 - 2x + m)$

nên phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x^3+x^2-2x+m} + x^3 + x^2 - 2x + m = 2^{x^2+x} + x^2 + x \ (*).$$

Rõ ràng $f(t) = 2^t + t$ là hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình $(*)$ ta suy ra $x^3 + x^2 - 2x + m = x^2 + x$, vì vậy ta được phương trình: $x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x$.

Bằng cách khảo sát hàm số $h(x) = -x^3 + 3x$ trên $\mathbb{R}$ và xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = h(x)$ và đường thẳng $y = m$, ta kết luận: Để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì $-2 < m < 2$.

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos^3 x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\cos x} = \cos 3x.$$

Hướng dẫn giải. Ta có:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos^3 x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\cos x} = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x - \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cos x} = 4\cos^3 x - \left(\frac{1}{2}\right)^{4\cos^3 x} \ (*).$$

Vì hàm số $f(t) = t - \left(\frac{1}{2}\right)^t$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ trở thành:

$$3\cos x = 4\cos^3 x \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Thí dụ 7. *Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để tồn tại đúng bốn cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$ đồng thời thỏa mãn*

$$4^{x^2+2y-1} - m.2^{x^2+2y} + 3m - 2 = 0.$$

Hướng dẫn giải. Vì

$$x + y - 1 = (3x + 2y) - (2x + y + 1)$$

nên ta biến đổi tương đương:

$$e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+y+1} + (2x + y + 1) = e^{3x+2y} + (3x + 2y).$$

Tới đây ta có kết quả

$$2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x.$$

Thế vào phương trình còn lại ta được:

$$4^{x^2+2(1-x)-1} - m.2^{x^2+2(1-x)} + 3m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(x-1)^2} - 2m.2^{(x-1)^2} + 3m - 2 = 0.$$

Đặt $t = 2^{(x-1)^2}$, $t \geq 1$, phương trình trở thành:

$$t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3} \ (*)$$

(do $t = \frac{3}{2}$ không là nghiệm).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$ trên $D = [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ta có:

$$f'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 4}{(2t-3)^2}; \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

t	1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(t)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1 ↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

Nhận xét rằng, mỗi nghiệm $t>1$ sẽ sinh ra hai nghiệm x và mỗi nghiệm x ứng với một cặp số $(x;y)$ theo yêu cầu. Dựa vào bảng biến thiên ta có tập hợp các giá trị cần tìm của tham số là $m>2$. Vậy có 8 giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ thỏa mãn.

Thí dụ 8. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình*

$$\left(x^4+1\right)3^{x^4-(x+m)^2}=x^2+2mx+m^2+1$$

có bốn nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải. Ta biến đổi như sau:

$$\left(x^4+1\right)3^{x^4-(x+m)^2}=x^2+2mx+m^2+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^4+1\right)3^{x^4}}{3^{(x+m)^2}}=(x+m)^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+1\right).3^{x^4}=\left[(x+m)^2+1\right].3^{(x+m)^2}\ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=(t+1).3^t$ với $t\ge 0$, hàm số $f(t)$ là tích của hai hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó phương trình (*) có dạng

$$f\left(x^4\right)=f\left((x+m)^2\right)\Leftrightarrow x^4=(x+m)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=x+m \\ x^2=-x-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-m=0\ \ (1) \\ x^2+x+m=0\ \ (2) \end{array}\right..$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt đồng thời chúng không có nghiệm chung.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_1=1+4m>0\Leftrightarrow m>-\frac{1}{4}$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_2=1-4m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{4}$.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của phương trình (1) và phương trình (2), khi đó ta có $x_0^2-x_0=m=-x_0^2-x_0\Leftrightarrow x_0=0$. Suy ra $m=0$ thì phương trình (1) và (2) có nghiệm chung.

Vậy giá trị m cần tìm là $m\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\setminus\{0\}$.

3.2. Chỉ xuất hiện hàm số mũ và đa thức

Cần biến đổi đưa về

$$\log_a u+f(u)=\log_a t+f(t),$$

trong đó $f(x)$ là hàm số đơn điệu tăng nếu $a>1$ và đơn điệu giảm nếu $0<a<1$.

Dạng toán này thường xuất hiện dưới dạng

$$\log_a\left(\frac{u}{t}\right)=h(t).$$

Việc làm của chúng ta cũng thông thường như trên là biến đổi để kiểm tra được đẳng thức $h(x)=\alpha(t-u),\alpha>0$ có đúng hay không?

Thí dụ 9. *Tìm nghiệm của phương trình*

$$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x.$$

Hướng dẫn giải. $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge 0$ nên điều kiện của phương trình là $x>0, x\ne\frac{1}{2}$.

Ta biến đổi: $-4x^2+6x-1=2x-\left(4x^2-4x+1\right)$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7(2x)+2x.$$

Vì hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ đơn điệu tăng với $t>0$ nên phương trình đã cho trở thành:

$$4x^2-4x+1=2x\Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}.$$

So sánh với điều kiện ban đầu, ta nhận nghiệm $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$\ln\frac{x^2+3x+4}{-x+2}+x^2+4x+2=0.$$

Hướng dẫn giải. Tương tự như thí dụ trên, ta có điều kiện $x<2$ và biến đổi tương đương:

$$\ln\left(x^2+3x+4\right)+x^2+3x+4=\ln(-x+2)-x+2.$$

Ta suy ra $x^2+3x+4=-x+2$, giải ra và so sánh với điều kiện ta nhận nghiệm $x=-2\pm\sqrt{2}$.

Thí dụ 11. *Giải phương trình*

$$\log_2\left(\frac{x^2+2}{2x+5}\right)=-x^2+4x+9.$$

Hướng dẫn giải. Vì $x^2+2>0$ nên ta có điều kiện $2x+5>0\Leftrightarrow x>\frac{-5}{2}$. Nhưng ta kiểm tra được $-x^2+4x+9\neq 2x+5-\left(x^2+2\right)$, như vậy chúng ta phải làm sao? Tới đây, cần lưu ý:

$$\log_2\left(\frac{x^2+2}{2x+5}\right)=\log_2\left(\frac{x^2+2}{2(2x+5)}\right)+1.$$

Và khi đó $4x$ xuất hiện, vì vậy ta cần biến đổi thêm như sau: với $x>\frac{-5}{2}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2\left(\frac{x^2+2}{2(2x+5)}\right)=-x^2+4x+8.$$

Khi đó ta có: $-x^2+4x+8=4x+10-\left(x^2+2\right)$, do đó ta biến đổi phương trình ban đầu thành

$$\log_2\left(x^2+2\right)+x^2+2=\log_2(4x+10)+4x+10.$$

Từ đó ta được $x^2+2=4x+10\Leftrightarrow x=2\pm2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Thí dụ 12. *Giải phương trình*

$$\log_2\frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3.$$

Hướng dẫn giải. Vì $3x^2-5x+8>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện của phương trình là

$$x^2+3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>-1\end{array}\right..$$

Vì $x^2-4x+3=\frac{1}{2}\left[\left(3x^2-5x+8\right)-\left(x^2+3x+2\right)\right]$ nên phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2\left(x^2+3x+2\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+3x+2\right)$$
$$=\log_2\left(3x^2-5x+8\right)+\frac{1}{2}\left(3x^2-5x+8\right).$$

Vì hàm số $f(t)=\log_2 t+\frac{1}{2}t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên ta được:

$$\left(3x^2-5x+8\right)=\left(x^2+3x+2\right)\Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0$$
$$\Leftrightarrow x=1;x=3.$$

Kết hợp với điều kiện, ta thấy nghiệm của phương trình là $x=1;x=3$.

Thí dụ 13. *Tìm điều kiện của tham số m để phương trình*

$$\log_2\left(\frac{3x^2-2x+3}{x^2+m^2}\right)=-x^2+2x+2m^2-2$$

luôn có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Vì $3x^2-2x+3>0$ nên ta có điều kiện $x^2+m^2>0$. Để ý rằng nếu ngay từ đầu chúng ta chọn $t=3x^2-2x+3$ và $u=x^2+m^2$ thì mọi việc lại trở nên phức tạp khi $t-u\neq-x^2+2x+2m^2-2$.

Do đó với để ý rằng $\log_2 2=1$, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(3x^2-2x+3\right)-\log_2\left[2\left(x^2+m^2\right)\right]$$
$$=2\left(x^2+m^2\right)-\left(3x^2-2x+3\right).$$

Ta suy ra:

$$\log_2\left(3x^2-2x+3\right)+\left(3x^2-2x+3\right)$$
$$=\log_2\left[2\left(x^2+m^2\right)\right]+2\left(x^2+m^2\right).$$

Ta được:

$$3x^2-2x+3=2\left(x^2+m^2\right)\Leftrightarrow x^2-2x+3=2m^2.$$

Để phương trình có nghiệm thì $2m^2\geq 2\Leftrightarrow|m|\geq 1$.

Tương tự như thí dụ trên, ta cũng có hướng xử lý tương tự cho thí dụ sau.

Thí dụ 14. *Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn* $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T=a^2+b^2$.

Hướng dẫn giải. Trong điều kiện đã cho của đề bài, các biểu thức đều có nghĩa, ta biến đổi:

$$\log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)$$
$$=\log_5\left[5(a+b)\right]+5(a+b) \quad (*).$$

Phương trình (*) tương đương với:

$$4a+2b+5=5(a+b)\Leftrightarrow a+3b=5.$$

Ta có: $5^2=(a+3b)^2\le(1^2+3^2).(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow T=a^2+b^2\ge\frac{5}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{1}=\frac{b}{3}\Rightarrow b=3a$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{5}{2}$ khi $a=\frac{1}{2};b=\frac{3}{2}$.

Thí dụ sau cũng có một hướng xử lý tương tự.

Thí dụ 15. *Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình*

$$\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1?

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$. Ta thêm bớt hằng số vào trong lôgarit như sau:

$$\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1=x^2-5x+1-m.$$

Tới đây mọi biến đổi thuận lợi hơn

$$\log_2(3x^2+3x+m+1)+(3x^2+3x+m+1)$$
$$=\log_2(4x^2-2x+2)+(4x^2-2x+2).$$

Ta được: $4x^2-2x+2=3x^2+3x+m+1$

$$\Leftrightarrow x^2-5x=m-1.$$

Xét hàm số $g(x)=x^2-5x$ trên $\mathbb{R}$ và sử dụng bảng biến thiên của nó. ta kết luận: để phương trình $x^2-5x=m-1$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi:

$$-\frac{25}{4}<m-1<-4\Leftrightarrow-\frac{21}{4}<m<-3.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4\}$.

3.4. Xuất hiện cả mũ và logarit

Cần biến đổi đưa về

$$\log_a t+b^{f(t)}=\log_a u+b^{f(u)},$$

trong đó $f(x)$ là hàm số đơn điệu tăng nếu $a, b>1$ và đơn điệu giảm nếu $0<a, b<1$. Dạng toán này thường được biến đổi khác đi một tí so với dạng trên, tuy nhiên dấu hiệu phát hiện ra nó đó là $a^t;\log_a u$ có xuất hiện trong bài toán. Học sinh cần lưa ý kết quả $t=a^{\log^a t}$ hay được dùng ở dạng toán này.

Thí dụ 16. *Giải phương trình*

$$\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5.$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x>0$. Khi đó

$$\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(x+\frac{1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{2x}$, phương trình trở thành $\log_2 t+2^t=5$. Từ đó phương trình trên có nhiều nhất một nghiệm t. Ta nhận thấy $t=2$ là nghiệm, và đây là nghiệm duy nhất của phương trình. Suy ra: $x+\frac{1}{2x}=2\Rightarrow 2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $x>0$, nên đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Thí dụ 17. *Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$ với $x;y\in\mathbb{Z};-6<x<6;y\ne0$ và thỏa mãn phương trình $3^{9y^2}-\frac{3^{36}}{3^{x^2}}+2=\log_3\left(\frac{36-x^2}{y^2}\right)$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa yêu cầu nêu trên?*

Hướng dẫn giải. Ta có biến đổi sau:

$$3^{9y^2}-3^{36-x^2}=\log_3\left(\frac{36-x^2}{y^2}\right)-2$$

$$\Leftrightarrow 3^{9y^2}-3^{36-x^2}=\log_3\left(\frac{36-x^2}{9y^2}\right).$$

Trong điều kiện đã cho thì $36-x^2>0;\ y^2>0$ nên ta thêm một lần biến đổi tương đương ta có:

$$3^{9y^2}-3^{36-x^2}=\log_3\left(36-x^2\right)-\log_3 9y^2$$

$$\Leftrightarrow 3^{9y^2}+\log_3 9y^2=3^{36-x^2}+\log_3\left(36-x^2\right).$$

Khi đó ta được $9y^2=36-x^2 \Leftrightarrow x^2+9y^2=36$. Vì $9;36$ đều chia hết cho 9 nên từ phương trình này suy ra x chia hết cho 3. Vì $x;y\in\mathbb{Z};-6<x<6;y\neq 0$ nên ta nhận được $x=0;y=\pm 2\Rightarrow M_1(0;2);M_2(0;-2)$. Vậy có hai điểm cần tìm.

Thí dụ 18. *Cho phương trình*

$$5^x+m=\log_5(x-m) \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

Hướng dẫn giải. Đặt $t=5^x+m$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$t=\log_5(x-m)\Leftrightarrow x-m=5^t\Leftrightarrow x=5^t+m.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} t=5^x+m \\ x=5^t+m \end{cases}\Rightarrow t-x=5^x-5^t$

$$\Leftrightarrow x+5^x=t+5^t \ (1).$$

Khi đó ta được $x=5^x+m\Leftrightarrow x-5^x=m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-5^x$ và đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng trục hoành. Xét $y=x-5^x$ có $y'=1-5^x\ln 5;\ y'=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\le f\left(\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)\right)\in(-1;0)$. Vì $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-20;20) \end{cases}$ nên $m\in\{-19;-18;...;-1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 19. *Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{x-1}=\log_4(x+2m)+m$ có nghiệm trong khoảng $(-3;3)$.*

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x+2m>0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$2^x+x=\log_2(x+2m)+2^{\log_2(x+2m)}.$$

Xét hàm số $y=f(t)=2^t+t$ với $\forall t\in\mathbb{R}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta suy ra:

$$x=\log_2(x+2m)\Leftrightarrow 2m=2^x-x \ (*).$$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=2^x-x$ và đường thẳng $y=2m$, rõ ràng rằng nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện đầu tiên.

Xét hàm số $y=g(x)=2^x-x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x)=2^x\ln 2-1\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right).$$

$g(-3)=\dfrac{25}{8}$, $g(3)=5$. Ta có bảng biến thiên:

x	-3		$\log_2\dfrac{1}{\ln 2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{25}{8}$	$\searrow$	$g\left(\log_2\dfrac{1}{\ln 2}\right)$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi

$$5>2m\ge g\left(\log_2\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5>m\ge\frac{1}{2}g\left(\log_2\frac{1}{\ln 2}\right)\approx 0,456.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m là 1, 2, 3, 4 để phương phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng $(-3;3)$.

Thí dụ 20. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^{x^2-3|x-m|}=\log_{x^2+3}(3|x-m|+3)$ có nghiệm.*

Hướng dẫn giải. Ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

$$3^{x^2+3}.\log_3\left(x^2+3\right)=3^{3|x-m|+3}.\log_3\left(3|x-m|+3\right) \ (1).$$

Hàm số $f(t)=3^t.\log_3 t,(t\ge 3)$ là tích của hai hàm đơn điệu tăng và không âm nên nó là hàm đơn điệu tăng. Do đó (1) tương đương với:

$$x^2+3=3|x-m|+3\Leftrightarrow x^2=3|x-m|.$$

Ta chia ra hai trường hợp sau để phá dấu giá trị tuyệt đối.

- TH1: $x \ge m$, ta được phương trình $x^2 - 3x + 3m = 0$. Để phương trình này có nghiệm thì $\Delta = 9 - 12m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{3}{4}$ (1). Khi đó nghiệm của nó là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{9-12m}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{9-12m}}{2} \end{array}\right.$ sẽ có một nghiệm lớn hơn $\frac{3}{2}$ nên thỏa mãn điều kiện $x \ge m$.
- TH2: $x < m$, ta được phương trình $x^2 + 3x - 3m = 0$. Để phương trình này có nghiệm thì $\Delta = 9 + 12m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{4}$ (2). Khi đó nghiệm của nó là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-3-\sqrt{9+12m}}{2} \\ x = \frac{-3+\sqrt{9+12m}}{2} \end{array}\right.$.

Ta kiểm tra điều kiện $x < m$, ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{-3-\sqrt{9+12m}}{2} < m \\ \frac{-3+\sqrt{9+12m}}{2} < m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{9+12m} > -2m-3 \\ \sqrt{9+12m} < 2m+3 \end{array}\right..$$

- $\sqrt{9+12m} > -2m-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2m-3 \ge 0 \\ 9+12m > (-2m-3)^2 \end{cases} \\ -2m-3 < 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \le -\frac{3}{2} \\ 4m^2 < 0 \end{cases} : \text{vô nghiệm} \\ m > -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$. Kết hợp với điều kiện (2) ta có: $m \ge -\frac{3}{4}$.

- $\sqrt{9+12m} < 2m+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ 9+12m < (2m+3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \ne 0 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện (2) ta có: $m \ge -\frac{3}{4}, m \ne 0$.

Kết luận: Từ các trường hợp trên suy ra: với mọi m phương trình đã cho luôn có nghiệm.

CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho phương trình:

$$e^{m.\sin x - \cos x} - e^{2(1-\cos x)} = 2 - \cos x - m.\sin x (*),$$

với m là tham số thực. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in (-5;10)$ để phương trình (*) có nghiệm.

Bài 2. Tìm tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình

$$2020^{\sin^2 x} - 2020^{\cos^2 x} = \cos 2x.$$

Bài 3. Cho $0 \le x \le 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

Bài 4. Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

Bài 5. Có bao nhiêu số nguyên a $(a \ge 1)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $(a^{\ln x} + 5)^{\ln a} = x - 5$?

Bài 6. Có bao nhiêu số nguyên dương $x, x \le 2021$ sao cho tồn tại số nguyên y thỏa mãn $x(2^y + y - 1) = 2 - \log_2 x^x$?

Bài 7. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \le 10$ để phương trình:

$$3^{1+\sqrt{1-x^2}} + (2m+1).3^{-1-\sqrt{1-x^2}} - m - 2 = 0$$

có nghiệm thực.

Bài 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2 \frac{x^2 - 2mx + 2m - 5}{2} + x^2 - 2mx + 2m - 7 = 0$$

có hai nghiệm trái dấu.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$4^{x^2+(m-3)x} - 2^{x^2-2(m-3)x-m} + \frac{1}{4}x^2 + (m-3)x + \frac{m}{4} = 0$$

có 2 nghiệm dương phân biệt.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 80

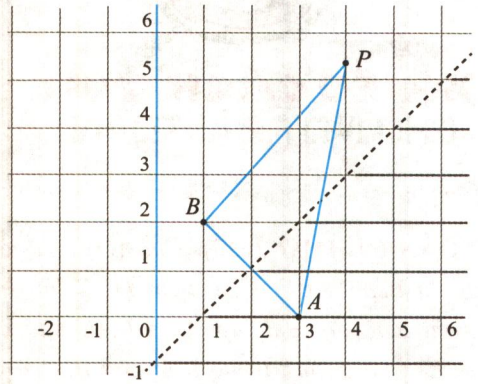
PROBLEM. *On the Argand diagram, sketch the locus of z defined by* $|z - 3| > |z - 1 - 2i|$.

Solution. Let P be the point representing z. Hence $|z - 3|$ is the distance from P to the point $A(3; 0)$ and $|z - 1 - 2i|$ is the distance from P to the point $B(1; 2)$.

Thus we need to find the locus of P so that

$$PA > PB.$$

It is a half-plane, without boundary, determined by the perpendicular bisector of AB.



TỪ VỰNG

Argand diagram : *mặt phẳng phức (lược đồ Argand)*

sketch : *vẽ (phác họa)*

half-plane : *nửa mặt phẳng*

perpendicular bisector : *đường trung trực*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 78

BÀI TOÁN. *Một điểm thu hút khách du lịch ở một trung tâm thành phố là một bánh xe lớn thẳng đứng mà hành khách có thể đi trên đó. Bánh xe quay theo cách sao cho độ cao h(m) của một hành khách trên mặt đất được tính theo công thức* $h = 60(1 - \cos kt)$. *Trong công thức này, k là một hằng số, t là thời gian tính bằng phút đã trôi qua kể từ khi hành khách bắt đầu chuyến đi trên mặt đất và kt được đo bằng radian. Một vòng quay hoàn thành của bánh xe mất 30 phút. Tính k.*

Lời giải. Một vòng quay hoàn thành của bánh xe mất 30 phút có nghĩa là chu kỳ của hàm số

$$h = 60(1 - \cos kt) \text{ là 30 phút.}$$

Mặt khác hàm số

$$h = 60(1 - \cos kt)$$

là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{k}$.

Do đó $\frac{2\pi}{k} = 30$ và $k = \frac{\pi}{15}$.

Lưu ý: Bài toán trên được trích từ một đề thi môn toán khối A vừa qua.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định.**

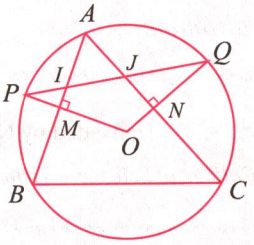
HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 59 (IMO 2018). *Cho (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Các điểm D, E lần lượt nằm trong các đoạn thẳng AB và AC sao cho AD = AE. Các đường trung trực của BD và CE cắt các cung nhỏ AB và AC của (O) tại các điểm F, G. Chứng minh rằng DE song song với FG.*

Cách 1. Để giải bài toán trên ta xét hai bổ đề nhỏ sau đây:

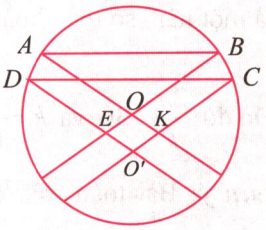
Bổ đề 1. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Đường trung trực AB, AC lần lượt cắt cung nhỏ AB, AC tại P, Q; PQ cắt AB, AC lần lượt tại I, J. Chứng minh tam giác AIJ cân tại A.*



Thật vậy, từ ΔOQP cân tại O suy ra:

$$\widehat{OPQ} = \widehat{OQP} \Rightarrow \widehat{AIJ} = \widehat{AJI} \text{ (đpcm).}$$

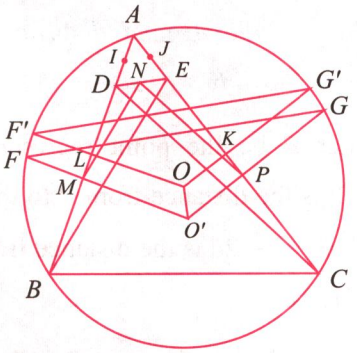
Bổ đề 2. *Cho các điểm như hình vẽ bên (OA // O'D; OB // O'C; khoảng cách từ OA, OB lần lượt tới O'D, O'C là bằng nhau). Khi đó AB // CD.*



(Bạn đọc tự chứng minh, bằng cách kéo dài OA, OB cắt $O'C$ và $O'D$ tại K, E. Dễ dàng chứng minh được tứ giác $EOKO'$ là hình thoi, suy ra OO' là phân giác của góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{DO'C}$).

Quay trở lại bài toán 59:

Gọi I, L, M, J, K, P, N lần lượt là trung điểm của AD, AB, BD, AE, AC, CE, DE. Gọi O' là giao điểm của FM và GP; OL, OK cắt cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ lần lượt tại F', G'.



Trước tiên ta chứng minh $LM = KP$.

Theo cách dựng ta có: $MN \parallel BE$; $LJ \parallel BE$; $MN = \dfrac{BE}{2} = LJ \Rightarrow MN$ song song và bằng LJ

$\Rightarrow$ tứ giác $MLJN$ là hình bình hành

$\Rightarrow LM = NJ = \dfrac{AD}{2}$ (1).

Tương tự ta cũng chứng minh được tứ giác $NPKI$ cũng là hình bình hành, suy ra:

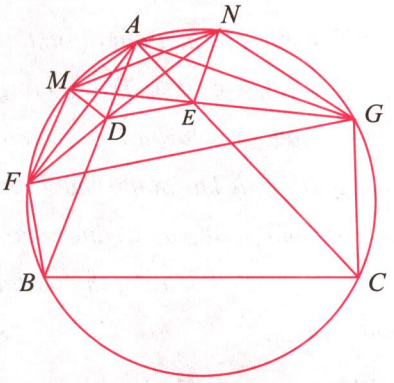
$$PK = NI = \frac{AE}{2} = \frac{AD}{2} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $PK = LM$. Áp dụng bổ đề 2 suy ra $FG \parallel F'G'$.

Từ bổ đề 1, bổ đề 2 suy ra:

$F'G' \parallel DE \Rightarrow FG \parallel DE$ hoặc FG trùng với DE (bài toán được chứng minh hoàn toàn).

Cách 2.



Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của D, E qua AF và AG. Khi đó $FM = FD = FB$; $\widehat{MAF} = \widehat{BAF}$.

Dễ thấy $\widehat{AMF} = \widehat{ADF}$, mà $\widehat{ADF} + \widehat{BDF} = 180^0$; $\widehat{BDF} = \widehat{FBD}$, suy ra:

$$\widehat{FBD} + \widehat{ADF} = 180^0 \Rightarrow \widehat{FBD} + \widehat{AMF} = 180^0$$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABFM$ nội tiếp đường tròn tâm O $\Rightarrow$ $M \in (O)$. Tương tự: $N \in (O)$. Suy ra:

$$AM = AD = AE = AN$$

$\Rightarrow$ tứ giác $MDEN$ nội tiếp đường tròn tâm A

$\Rightarrow \widehat{MND} = \widehat{MED}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MD}$);

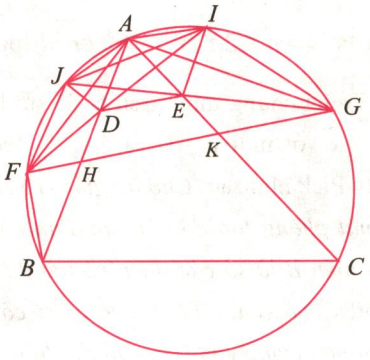
$\widehat{EGA} = \widehat{AGN} = \widehat{AGM}$

$\Rightarrow G, E, M$ thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{MNF} = \widehat{MGF} = \widehat{MND} = \widehat{MED}$

$\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{MGF}$ $\Rightarrow DE$ song song hoặc trùng với FG (đpcm).

Cách 3.



Gọi I, J là hai điểm lần lượt thuộc cung nhỏ AG và AF sao cho $GI = GC$; $FB = FJ$. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của AB, AC với GF. Dễ thấy $\Delta AJF = \Delta ADF$ (tứ giác $ABFJ$ nội tiếp suy ra:

$\widehat{FBA} + \widehat{AJF} = 180^0$; $\widehat{ABF} = \widehat{BDF} \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{AJF}$;

$\widehat{JAF} = \widehat{FAD}$; $\widehat{JFA} = \widehat{DFA}$; $FJ = FB = FD$)

$\Rightarrow AJ = AD$. Tương tự có $AI = AE \Rightarrow AJ = AI$.

Lại có $\widehat{AHK} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BF} + \text{sđ}\overset{\frown}{AG})$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BF} + \text{sđ}\overset{\frown}{IG} + \text{sđ}\overset{\frown}{IA}).$$

$$\widehat{AKH} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{CG} + \text{sđ}\overset{\frown}{FA})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{CG} + \text{sđ}\overset{\frown}{FJ} + \text{sđ}\overset{\frown}{AJ}).$$

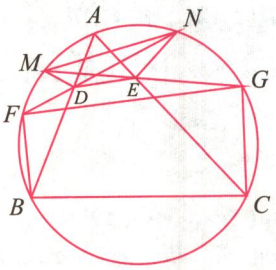
(Số đo các cung ở trên là số đo các cung nhỏ)

Vì $BF = FJ$; $CG = GI$, $IA = AJ$, suy ra:

$\widehat{AHK} = \widehat{AKH} \Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A

$\Rightarrow DE$ song song hoặc trùng với FG (đpcm).

Cách 4.



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của GE, FD với đường tròn (O). Ta có ΔBFD cân tại F, ΔGEC cân tại G nên: $\widehat{FBD} = \widehat{FDB} = \widehat{ADN} = \widehat{ANF}$

$$\Rightarrow \Delta ADN \text{ cân tại } A \Rightarrow AD = AN.$$

Tương tự: ΔAME cân tại A $\Rightarrow AM = AE \Rightarrow AM = AN = AD = AE$. Do đó tứ giác $MDEN$ nội tiếp đường tròn tâm A bán kính AD, suy ra $\widehat{MND} = \widehat{MED}$, mà $\widehat{MND} = \widehat{MNF} = \widehat{MGF} = \widehat{EGF} = \widehat{MED}$, vậy DE song song hoặc trùng với FG.

Lời bình: + Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \geq AC$, khi đó nếu $D \equiv B$ thì $DE \equiv FG$, ngược lại nếu $AB < AC$ thì khi đó $E \equiv C$ thì $DE \equiv FG$.

+ Trường hợp F, G nằm trên các cung lớn thì bài toán vẫn đúng.

+ Bài toán 1, IMO 2018 phát biểu thật ngắn gọn và thú vị. Cách giải 1 có phần hơi dài nhưng phù hợp với học sinh THCS, hấp dẫn cho những người muốn khám phá!

NGUYỄN VĂN BẢN

*(GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**)*

Nhận xét. Kỳ này chỉ có bạn *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi** đóng góp một cách giải tương tự như cách 4 của bạn *Nguyễn Văn Bản*. Xin hoan nghênh bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 61 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2022.

BÀI TOÁN 61. *Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). D và E lần lượt là trung điểm của AB và Ac. G là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh GO vuông góc với DC.*

TRẦN THANH HƯNG

(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

BÀI TOÁN 68 (Iran MO, 1999, vòng 2). *Giả sử $n(r)$ là số tất cả các điểm có tọa độ nguyên trên một đường tròn có bán kính $r > 1$. Chứng minh rằng*

$$n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

Lời giải. Xét đường tròn bán kính r có chứa n điểm có tọa độ nguyên trên đó. Ta cần chứng minh $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Vì r > 1 và $6\sqrt[3]{\pi r^2} > 8$ nên ta có thể giả sử n > 8.

Gọi n điểm có tọa độ nguyên nói trên là $P_1, P_2, ..., P_n$ nằm theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Do tổng số đo của các cung $\overset{\frown}{P_1P_3}, \overset{\frown}{P_2P_4}, ..., \overset{\frown}{P_nP_2}$ bằng 4π nên tồn tại một cung $\overset{\frown}{P_iP_{i+2}}$ có số đo lớn nhất là $\frac{4\pi}{n}$, không mất tính tổng quát ta giả sử đó là cung $\overset{\frown}{P_1P_3}$.

Xét tam giác ABC nội tiếp trong cung $\overset{\frown}{P_1P_3}$. Diện tích tam giác này lớn nhất khi hai điểm A, C trùng với hai đầu cung và điểm B là giao điểm của trung trực của AC với cung $\overset{\frown}{P_1P_3}$ (khi ấy, khoảng cách từ B đến đường thẳng AC lớn nhất). Khi đó ta có:

$$\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \alpha \le \frac{\pi}{n}, \ \widehat{ACB} = 180^0 - 2\alpha.$$

Gọi ba cạnh tam giác ABC có độ dài là a, b, c. Khi đó ta có:

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4r} = \frac{(2r\sin A)(2r\sin B)(2r\sin C)}{4r}$$
$$= \frac{2r\sin\alpha.2r\sin 2\alpha.2r\sin\alpha}{4r}$$
$$\le \frac{2r\frac{\pi}{n}.2r\frac{\pi}{n}.2r\frac{2\pi}{n}}{4r} = \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

Vì tam giác $P_1P_2P_3$ nội tiếp trong cung chứa góc $\overset{\frown}{P_1P_3}$ nên theo kết quả trên ta có:

$$S_{P_1P_2P_3} \le S_{ABC} \le \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

Mà P_1, P_2, P_3 là các điểm có tọa độ nguyên nên theo định lý Pick, ta có: $S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}$.

Vì vậy: $\frac{1}{2} \le S_{ABC} \le \frac{4r^2\pi^3}{n^3}$. Suy ra:

$$n^3 \le 8r^2\pi^3 \Rightarrow n \le 2\pi\sqrt[3]{r^2} < 6\sqrt[3]{\pi r^2} \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét. Trong chứng minh trên ta đã sử dụng kết quả: $\sin x < x$ với mọi $x > 0$ và định lý Pick. Nội dung định lý Pick như sau: *Cho đa giác (P) không tự cắt trong mặt phẳng tọa độ với các đỉnh có tọa độ nguyên. Ký hiệu B là số các điểm có tọa độ nguyên nằm trên biên của (P), I là số các điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong của (P). Khi đó diện tích của đa giác (P) là:* $S_{(P)} = I + \frac{1}{2}B - 1$.

Kỳ này chỉ có bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** giải đúng bài này với cách giải tương tự như trên. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2022.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 70. *Cho dãy số nguyên không âm $a_1 < a_2 < ... < a_k$ thỏa mãn:*

$$\frac{2^{289}+1}{2^{17}+1} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_k}.$$

Giá trị của k là bao nhiêu?

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 535, tháng 1 năm 2022)

Phân tích sai lầm.

Trong lời giải học sinh đã chưa xét xem trên đoạn $[-4\pi;6\pi]$ hai họ nghiệm $\frac{k2\pi}{5}$ và $\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}$ có nghiệm trùng nhau không và có nghiệm nào có dạng $m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ cần loại không? Phương án học sinh chọn không là phương án đúng.

Lời giải đúng sau khi tìm được nghiệm phương trình lượng giác cần bổ sung như sau:

• Trước tiên ta ta xét xem hai họ nghiệm $x=\frac{k2\pi}{5}$ và $x=\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}$ có giá trị nào trùng nhau không.

Giả sử $\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}=\frac{k2\pi}{5}$ $\Leftrightarrow 14k=5+10l\Rightarrow$ vô lí vì $14k$ là số nguyên chẵn và $5+10l$ là số nguyên lẻ. Như vậy hai họ nghiệm không có nghiệm trùng nhau.

• Ta xét các nghiệm có dạng $m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$

Với $\begin{cases} x=\frac{k2\pi}{5} \\ x\neq m\pi \\ x\in[-4\pi;6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\in\{-10;-9;-8;...14;15\} \\ k\notin\{-10;-5;0;5,10,15\} \end{cases}$

$\Rightarrow$ các giá trị x cần loại là: -4π, -2π, 0, 2π, 4π, 6π. Tổng các giá trị này là 6π.

Với $\begin{cases} x=\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7} \\ x\neq m\pi \\ x\in[-4\pi;6\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\in\{-14;-13;-12;...19;20\} \\ l\notin\{-4;-11;3;10;17\} \end{cases}$

$\Rightarrow$ các giá trị x cần loại là: $-\pi$, -3π, π, 3π, 5π. Tổng các giá trị này là 5π. Khi đó tổng nghiệm

$$S=\left[\sum_{k=-10}^{15}\left(\frac{k2\pi}{5}\right)-(6\pi)\right]+\left[\sum_{l=-14}^{20}\left(\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}\right)-5\pi\right]=50\pi.$$

Vậy phương án chọn là C.

Nhận xét. Chỉ có ba bạn phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Đó là các bạn: *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**, *Trần Thị Thanh* Thư, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**. Xin hoan nghênh ba bạn.

KIHIVI

GIÁ TRỊ NÀO ?

Bài toán. Cho $\sin\alpha-2\cos\alpha=2$. Tính $\sin 2\alpha$.

Lời giải của bạn Ngân.

Đặt $\cos\alpha=t$ với $-1\le t\le 1$. Do $\sin\alpha-2\cos\alpha=2$ nên $\sin\alpha=2t+2$. Ta có:

$$-1\le 2t+2\le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le t\le -\frac{1}{2}.$$

Suy ra điều kiện của t là $-1\le t\le -\frac{1}{2}$.

Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $(2t+2)^2+t^2=1$

$\Leftrightarrow 5t^2+8t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=-\frac{3}{5}$

(thoả mãn điều kiện $-1\le t\le -\frac{1}{2}$). Với $t=-1$ thì $\cos\alpha=-1$. Mà $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin\alpha=0$.

Suy ra: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=0$. Với $t=-\frac{3}{5}$ thì $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. Mà $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$. Suy ra $\sin\alpha=\pm\frac{4}{5}$.

Nếu $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ thì $\sin 2\alpha=2.\frac{4}{5}.\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

Nếu $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ thì $\sin 2\alpha=2.\left(-\frac{4}{5}\right).\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$.

Vậy $\sin 2\alpha=0$ hoặc $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$ hoặc $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$.

Các bạn có tính ra kết quả như của bạn Ngân không?

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 539 (5.2022)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Sau đây là một số hình ảnh sản phẩm mẫu thiết bị dạy học lớp 10 mang thương hiệu NXBGDVN sản xuất theo Chương trình GDPT 2018:

1. Môn Toán

Conic

Hộp xác suất thống kê

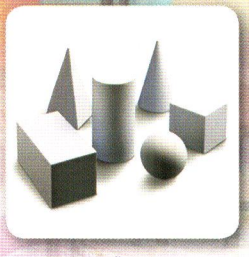
Compa

Thước thẳng

2. Môn Mĩ thuật

Bàn ghế học mĩ thuật

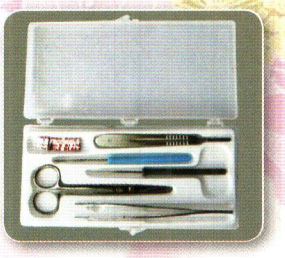
Bảng vẽ



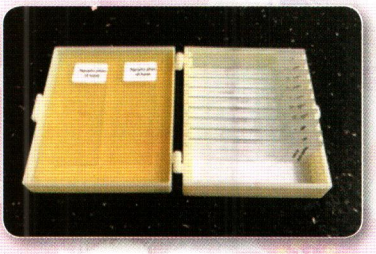
Mẫu vẽ

3. Môn Sinh học

Máy cất nước 1 lần

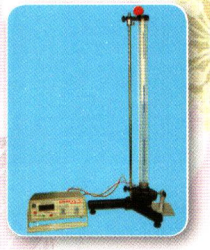


Bộ đồ mổ



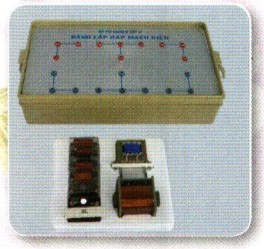
Tiêu bản

4. Môn Vật lí



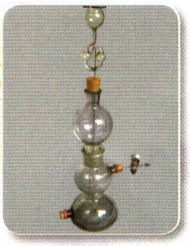
Truyền âm

Điện tích

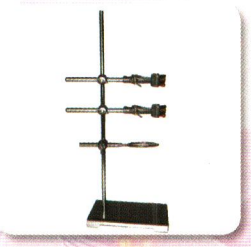


Xoay chiều

5. Môn Hóa học



Bộ thiết bị đo gia tốc rơi tự do



Bộ giá đỡ cơ bản

Khay mang dụng cụ và hóa chất

GIỚI THIỆU THIẾT BỊ DẠY HỌC LỚP 10

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam là đơn vị trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo có nhiệm vụ tổ chức biên soạn, in ấn, sản xuất và phát hành các sản phẩm sách giáo khoa, sách tham khảo, sách điện tử, thiết bị giáo dục phục vụ giảng dạy, học tập ở các cấp, bậc học trên toàn quốc.

Với bề dày hơn 60 năm thực hiện nhiệm vụ chính trị phục vụ ngành Giáo dục, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ trong các lần đổi mới chương trình và thay sách giáo khoa do Bộ Giáo dục và Đào tạo phân công. Các sản phẩm giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam luôn có được sự tín nhiệm, tin cậy của nhiều thế hệ học sinh, phụ huynh và giáo viên trên mọi miền tổ quốc.

Thực hiện nhiệm vụ đổi mới chương trình sách giáo khoa giáo dục phổ thông, bên cạnh việc biên soạn các bộ sách giáo khoa đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt; Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam căn cứ vào quy định Thông tư về Danh mục thiết bị dạy học tối thiểu cấp THPT của Bộ Giáo dục và Đào tạo, căn cứ vào triết lí, nội dung, đặc điểm của các bộ sách giáo khoa để tổ chức thiết kế và sản xuất các sản phẩm Thiết bị dạy học lớp 10 mới dùng chung cho các bộ sách giáo khoa.

Để chuẩn bị phục vụ công tác dạy và học cho GV và HS trên mọi miền tổ quốc năm học 2022 – 2023 và những năm tiếp theo. NXBGDVN với hơn 35 năm kinh nghiệm trong sản xuất và kinh doanh thiết bị giáo dục, cùng với đội ngũ chuyên gia giàu kinh nghiệm, họa sĩ thiết kế chuyên nghiệp và quy trình sản xuất thiết bị hiện đại đã và đang tổ chức nghiên cứu, xây dựng, sản xuất các sản phẩm TBDH theo danh mục TBDH tối thiểu dành cho các cấp học bậc học nói chung và lớp 10 nói riêng.

Lớp 10 với 15 môn học, trong đó có hoạt động trải nghiệm hướng nghiệp là môn học hoàn toàn mới mẻ với nhiều nội dung chủ đề hấp dẫn, bước đầu giáo dục hướng nghiệp cho các em học sinh chập chững bước vào bậc học THPT và đây cũng điều kiện để các em được khám phá bản thân, khám phá khả năng của chính mình. Để giúp môn học này thật bổ ích đã có rất nhiều thiết bị dạy học hỗ trợ đi kèm để GV và HS hứng thú và yêu thích hơn. Ngoài ra với hàng trăm loại sản phẩm thiết bị dạy học phục vụ, hỗ trợ cho các môn học khác nằm trong danh mục thiết bị dạy học tối thiểu lớp 10 do Bộ GDĐT quy định.

Năm học 2022 – 2023 là năm đầu tiên triển khai thực hiện thay SGK theo chương trình GDPT 2018 đối với lớp 10, đi đôi với SGK là các loại thiết bị dạy học tương ứng hỗ trợ cho các bài học của từng môn học giúp cho GV và HS tương tác với nhau nhiều hơn, khai thác và truyền tải nội dung dạy học một cách sinh động, chân thực và chất lượng, đồng thời thông qua thực hành giúp HS phát huy năng lực làm việc nhóm tạo sự say mê, hứng thú đối với môn học qua đó phát triển năng lực và sự sáng tạo, tư duy và trí nhớ được tốt hơn, các em biết vận dụng lí thuyết đưa vào thực hành trong cuộc sống. Đây là hiệu quả to lớn do thiết bị dạy học đem lại.

Với việc xác định đúng đắn hiệu quả to lớn mà TBDH đem lại cho công tác giảng dạy, học tập của GV và HS trong nhà trường. NXBGDVN đã đầu tư nhân lực, trí lực, vật lực để sản xuất TBDH phục vụ cho các cấp học, bậc học. Bộ TBDH của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đảm bảo mục đích dạy học, có tính thẩm mĩ, thân thiện với môi trường, an toàn cho người dùng, giá thành đảm bảo cạnh tranh, sản phẩm được dán tem công nghệ tích hợp chống hàng giả, hàng nhái, truy xuất nguồn gốc và hướng dẫn sử dụng thiết bị giáo dục trên bản điện tử.

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT5M22
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2022
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng