



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 538  
Tháng 4 - 2022  
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghienCUSACHGD.com

413.



Nhà Toán học Pháp  
Augustin-Louis Cauchy



Basel-Stadt (Thụy Sĩ)

<https://tieulun.hopto.org>

# GIA HẠN THỜI GIAN NHẬN BÀI DỰ THI CUỘC THI SÁNG TÁC “TRANG SÁCH TÔI YÊU”

Hướng tới chào mừng kỉ niệm 65 năm thành lập Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN), cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”** được tổ chức để nhằm khẳng định giá trị, thương hiệu, thành tựu 65 năm của NXBGDVN. Cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”** đã được tổ chức phát động từ ngày 07/12/2021 và hiện thu hút sự quan tâm của nhiều độc giả yêu mến xuất bản phẩm của NXBGDVN.

NXBGDVN đã trải qua chặng đường 65 năm xây dựng và phát triển với nhiệm vụ tổ chức biên soạn, xuất bản, phát hành sách giáo khoa, tài liệu, học liệu và thiết bị giáo dục cho các cấp học, bậc học trên toàn quốc. NXBGDVN luôn giữ vững vị trí hàng đầu trong ngành Xuất bản nói chung và trong lĩnh vực biên soạn, xuất bản sách giáo dục nói riêng.

bảo của những cán bộ công nhân viên đã và đang công tác tại NXBGDVN. Chúng tôi trân trọng từng tác phẩm dự thi và chúng tôi cũng tin tưởng rằng những truyện ngắn, bài thơ, bài kí, những giai điệu viết về NXBGDVN với sự thể hiện các giá trị nhân văn từ sách của NXBGDVN sẽ tạo nên thành công cho Cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”**.

Để cuộc thi đảm bảo tính công bằng, NXBGDVN đã chia hệ thống giải thưởng thành 2 bảng A và B dành cho các đối tượng dự thi khác nhau. Cụ thể:

- Bảng A: Dành cho các nhà văn, nhà thơ, nhà khoa học, nhà giáo, sinh viên, học sinh... không giới hạn độ tuổi, nghề nghiệp, có quốc tịch Việt Nam.
- Bảng B: Dành cho các cán bộ, công nhân viên đã và đang công tác tại NXBGDVN.

Nội dung tác phẩm dự thi bày tỏ suy nghĩ, nhận xét, đánh giá... về sách giáo khoa, sách bài tập, sách tham khảo, chuyên khảo, nâng cao dân trí, từ điển, sách giáo dục... đối với nhà trường, với việc giảng dạy - học tập của giáo viên và học sinh, đối với sự nghiệp giáo dục nói chung; Tác phẩm dự thi viết về sách giáo khoa, sách tham khảo và sách nói chung của NXBGDVN đã định hướng, ảnh hưởng, tác động, tạo nên những thay đổi tích cực như thế nào đến cuộc sống, sự nghiệp của những người học sinh, sinh viên, thầy giáo, cô giáo nhiều thế hệ; Tác phẩm dự thi viết về con người và công việc của những tác giả viết sách cho NXBGDVN; Tác phẩm dự thi viết về con người và công việc của những người đã và đang công tác tại nhà NXBGDVN; Tác phẩm dự thi phải đảm bảo tính chân thực, khách quan, có tác động tích cực, truyền cảm hứng đối với ngành Giáo dục và với cộng đồng xã hội.

Theo Ban Tổ chức Cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”** thời gian nhận tác phẩm dự thi được điều chỉnh: Từ ngày phát động Cuộc thi đến hết ngày 15/4/2022 qua địa chỉ email: [trangsaachtotieu@nxbgd.vn](mailto:trangsaachtotieu@nxbgd.vn). Thời gian công bố và trao giải dự kiến trong tháng 5/2022 với tổng giá trị giải thưởng lên tới 200 triệu đồng.

Đặc biệt, những bài dự thi đạt giải ngoài việc được trao Giấy chứng nhận, Kỷ niệm chương của Ban Tổ chức còn sẽ được in trong Tuyển tập kỉ yếu **“Trang sách tôi yêu”** do NXBGDVN xuất bản.



Cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”** được tổ chức với sự tham dự của các nhà thơ, nhà văn, nhạc sĩ, nhà giáo, nhà báo, những người yêu mến văn hoá đọc sẽ góp phần thắp sáng, lan toả tình yêu đối với sách báo, góp phần đắc lực phát triển văn hoá đọc trong cộng đồng xã hội và đặc biệt là góp phần vào sự nghiệp giáo dục đào tạo của nước nhà.

Chia sẻ về cuộc thi, PGS.TS. Nguyễn Văn Tùng – Phó Tổng biên tập NXBGDVN cho biết: Cuộc thi sáng tác **“Trang sách tôi yêu”** đã nhận được rất nhiều bài dự thi với chất lượng cao, đa dạng về thể loại cũng như đề tài. Có những bài hát, bài thơ, tản văn, bút kí... viết về những kỉ niệm cùng trang sách giáo khoa tuổi thơ, có những bài bình luận sâu sắc về sách giáo khoa, sách tham khảo, sách tham khảo đặc biệt của NXBGDVN. Bên cạnh đó, cũng có rất nhiều tâm sự, hoài niệm, hoài



# KHAI THÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG ĐỀ THI TST VIỆT NAM 2015

NGUYỄN ANH TUẤN

(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

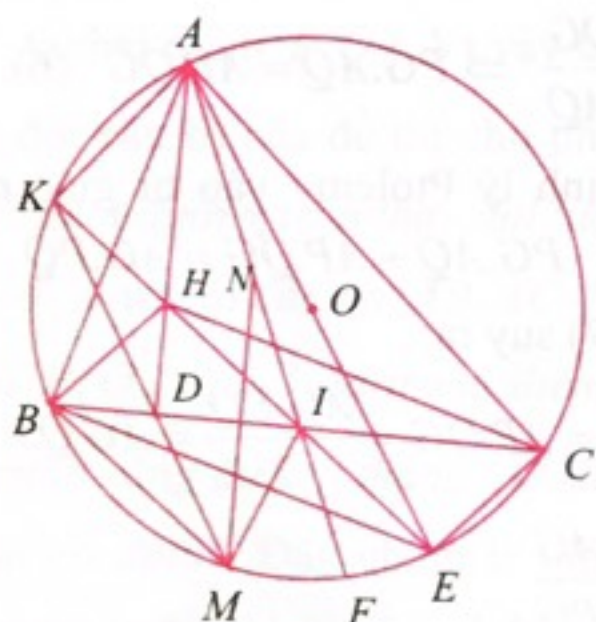
Trong kì thi chọn Đội tuyển Việt Nam dự thi học sinh giỏi Toán Quốc tế IMO (International Mathematical Olympiad) ngày thứ nhất có bài toán hình học hay, phù hợp với đối tượng học sinh lớp 9 như sau:

**Bài toán 1.** Cho đường tròn  $(O)$  có dây  $BC$  cố định và không phải là đường kính. Xét điểm  $A$  di chuyển trên cung lớn  $BC$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB < AC$ . Gọi  $I, H$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $BC$ , trực tâm tam giác  $ABC$ . Tia  $IH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$ , đường thẳng  $AH$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $D$  và đường thẳng  $KD$  cắt lại đường tròn  $(O)$  tại  $M$ . Từ điểm  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt  $AI$  tại điểm  $N$ .

a) Chứng minh rằng điểm  $N$  luôn thuộc đường tròn cố định khi  $A$  thay đổi.

b) Đường tròn tiếp xúc với  $AK$  ở  $A$  và đi qua  $N$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $P, Q$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $PQ$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AJ$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải.** a) **Cách 1** (h.1)



Hình 1

Vẽ đường kính  $AE$  của đường tròn  $(O)$  và kéo dài  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $F$ , ta dễ dàng chứng minh được tứ giác  $BHCE$  là hình bình hành nên ba điểm  $E, I, H$  thẳng hàng. Mà ba điểm  $I, H, K$  thẳng hàng nên suy ra bốn điểm  $K, H, I, E$  thẳng hàng và  $\widehat{AKI} = \widehat{AKE} = 90^\circ$ . Ta có  $\widehat{AKI} = \widehat{ADI} = 90^\circ \Rightarrow AKDI$  là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{KAI}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\text{sđ} \widehat{BK} + \text{sđ} \widehat{MC}) = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{KBF}$$

$$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{MC} = \text{sđ} \widehat{FB} \Rightarrow \text{sđ} \widehat{MB} = \text{sđ} \widehat{FC}$$

$$\Rightarrow BF = MC \text{ và } BM = FC$$

$$\Rightarrow \triangle BIM = \triangle CIF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{CIF}$$

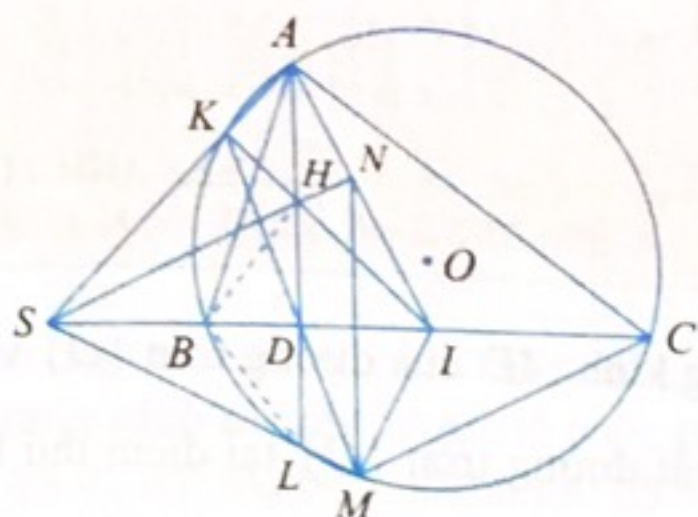
$$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BIN} \text{ (do } \widehat{BIN} = \widehat{CIF}).$$

Xét  $\triangle IMN$  có  $ID \perp MN$  và  $\widehat{BIM} = \widehat{BIN} \Rightarrow ID$  là đường trung trực của  $MN \Rightarrow M$  và  $N$  đối xứng với nhau qua  $BC \Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$  (không đổi)  $\Rightarrow N$  nằm trên cung chứa góc  $180^\circ - \widehat{BAC}$  dựng trên đoạn thẳng  $BC$  là cung tròn cố định. Vậy điểm  $N$  luôn thuộc đường tròn cố định khi  $A$  thay đổi.

**Cách 2** (h.2). Tương tự cách 1 ta chứng minh được  $IK \perp AK$  và tứ giác  $AKDI$  nội tiếp đường tròn.

Gọi  $S$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AK$  và  $BC$ . Vì  $AD \perp BC$  và  $IK \perp AK$  nên  $H$  là

trực tâm của  $\triangle SAI \Rightarrow \widehat{DAS} = \widehat{DIH}$   
 $\Rightarrow \tan \widehat{DAS} = \tan \widehat{DIH}$  (1).



Hình 2

Vì H là trực tâm  $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{DHB}$   
 $\Rightarrow \tan \widehat{DCA} = \tan \widehat{DHB} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{HD}$   
 $\Rightarrow AD.HD = CD.BD$  (2).

Ta lại có:  $\triangle BDK \sim \triangle MDC$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{MD} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow BD.DC = MD.DK$$
 (3).

Từ (1); (2) và (3)  $\Rightarrow SD.DI = MD.DK$

$\Rightarrow SKIM$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{SKD}$  (4).  
 Mặt khác  $AKDI$  là tứ giác nội tiếp  
 $\Rightarrow \widehat{SKD} = \widehat{DIN}$  (5).

Từ (4) và (5)  $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{DIN}$ . Từ đó suy ra được M và N đối xứng với nhau qua BC  $\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$  (không đổi)  $\Rightarrow N$  nằm trên cung chứa góc  $180^\circ - \widehat{BAC}$  dựng trên đoạn thẳng BC là cung tròn cố định. Vậy điểm N luôn thuộc đường tròn cố định khi A thay đổi.

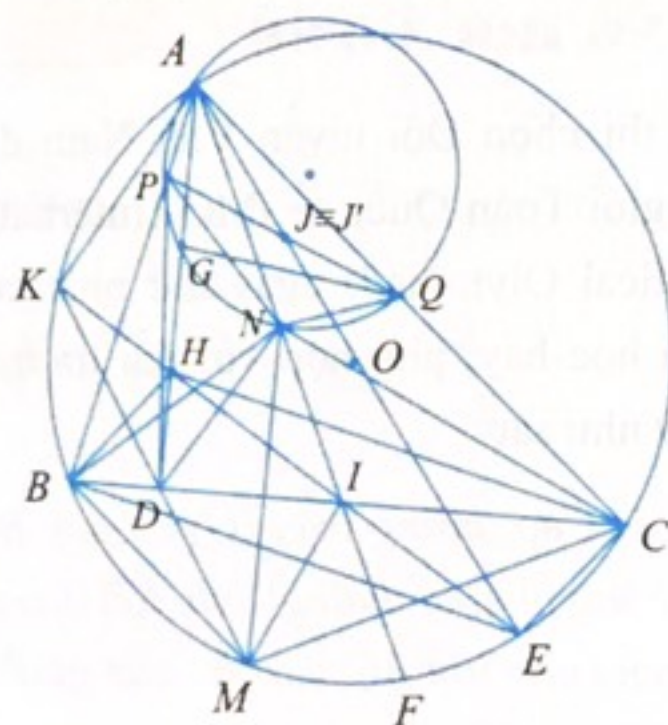
**Chú ý.** Chúng ta có thể chứng minh  $DS.DI = MD.DK$  như sau (h.2):

Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là L, ta có  $\widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \widehat{HBD}$   
 $\Rightarrow \triangle HBD = \triangle LBD$  (g.c.g)  $\Rightarrow H$  và L đối xứng với nhau qua đường thẳng BC

$\Rightarrow \widehat{DIL} = \widehat{DIH} = \widehat{DAS} \Rightarrow ASLI$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow DL.DA = DS.DI$ .

Ta lại có  $DM.DK = DL.DA$  nên suy ra  $SD.DI = MD.DK$ .

b) **Cách 1** (h.3)



Hình 3

Ta có  $\widehat{NQA} = \widehat{NAK} = \widehat{KDB} = \widehat{MDC} = \widehat{NDC}$  nên DNQC là tứ giác nội tiếp. Vì  $\widehat{CF} = \widehat{BM} \Rightarrow \widehat{QAN} = \widehat{BCM} = \widehat{BCN} = \widehat{DQN} \Rightarrow DQ$  là tiếp tuyến của đường tròn (APNQ). Tương tự DP là tiếp tuyến của đường tròn (APNQ).

Gọi G là giao điểm của AD với đường tròn (APNQ), ta có:

$$\begin{aligned} \triangle DPG &\sim \triangle DAP \text{ và } \triangle DQG \sim \triangle DAQ \\ \Rightarrow \frac{DP}{DA} &= \frac{PG}{AP} \text{ và } \frac{DQ}{DA} = \frac{QG}{AQ} \\ \Rightarrow \frac{PG}{AP} &= \frac{QG}{AQ} \Rightarrow PG.AQ = AP.QG \end{aligned}$$
 (6).

Áp dụng định lý Ptolemy vào tứ giác nội tiếp APNQ có:  $PG.AQ + AP.QG = AG.PQ$  (7).

Từ (6) và (7) suy ra:

$$\begin{aligned} PG.AQ &= AP.QG = \frac{AG.PQ}{2} = AG.QJ \\ \Rightarrow \frac{AQ}{QJ} &= \frac{AG}{PG} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta AQJ \simeq \Delta AGP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{QAJ} = \widehat{GAP} \text{ (8).}$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAO} \quad (9).$$

Từ (8) và (9) suy ra:  $\widehat{QAJ} = \widehat{CAO} \Rightarrow$  ba điểm  $A, O, J$  thẳng hàng.

Vậy đường thẳng  $AJ$  luôn đi qua điểm cố định  $O$ .

**Cách 2.** Gọi  $J'$  là giao điểm của  $AE$  và  $PQ$ .

Ta có:  $\widehat{PQA} = \widehat{PAK} = \widehat{IEB}$ ;  $\widehat{QAJ}' = \widehat{EBI}$

$$\Rightarrow \Delta QAJ' \sim \Delta EBI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{QJ'}{AJ'} = \frac{EI}{BI} \text{ (*)}$$

Vì  $\widehat{PQA} = \widehat{PAK} = \widehat{IEB}$ ;  $\widehat{QAJ'} = \widehat{EBI}$  nên áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác vào các tam giác  $APJ'$  và  $CEI$  ta có:

$$\widehat{AJ'P} = \widehat{PQA} + \widehat{QAJ'} = \widehat{IEB} + \widehat{EBI} = \widehat{CIE}.$$

Mặt khác:  $\widehat{ECI} = \widehat{PAJ'}$ , từ đó suy ra:

$$\Delta APJ' \sim \Delta CEI \Rightarrow \frac{PJ'}{AJ'} = \frac{EI}{CI} (**).$$

Kết hợp (\*), (\*\*) và  $CI = BI$  suy ra:

$$\frac{QJ'}{AJ'} = \frac{PJ'}{AJ'} \Rightarrow QJ' = PJ' \Rightarrow J' \text{ là trung điểm}$$

của  $PQ \Rightarrow J \equiv J'$  nên ba điểm  $A, J, O$  thẳng hàng.

**Nhận xét 1.** Cách giải thứ hai không cần sử dụng đến điểm  $N$ , có nghĩa là câu b) của đề thi đúng trong trường hợp tổng quát (tức là đường tròn này chỉ cần tiếp xúc với  $AK$  và cắt các tia  $AB, AC$  tại hai điểm  $P, Q$ ). Vì vậy chúng ta có thể thay đổi câu b) của đề thi cho phù hợp hơn như sau: “Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với  $AK$  ở  $A$  và cắt các tia  $AB, AC$  lần lượt tại hai điểm  $P, Q$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $PQ$ .

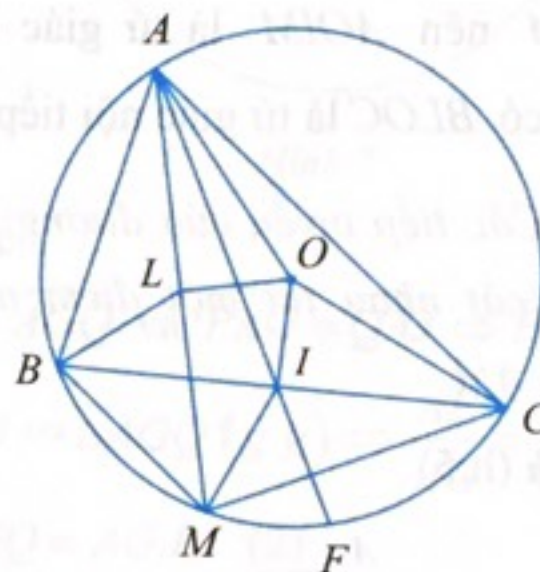
*Chứng minh rằng đường thẳng AJ luôn đi qua một điểm cố định". Đây chính là nội dung của câu 4c trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10*

Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Tỉnh Nghệ An, năm học 2021 - 2022.

**Nhận xét 2.** Gọi  $L$  là trung điểm của  $AM$ , từ bài toán 1 chúng ta thu được một số kết quả sau:

**Kết quả 1.**  $BC, AM$  lần lượt là đường phân giác của  $\widehat{AIM}$  và  $\widehat{BLC}$ .

**Chứng minh (h.4)**



Hình 4

$$\begin{aligned} \forall i \quad \widehat{BM} = \widehat{CF} &\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAM} \\ &\Rightarrow \Delta ABI \sim \Delta AMC \text{ (g.g)} \end{aligned}$$

$$\widehat{BIA} = \widehat{MCA} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{AM} = \frac{BI}{MC} \Rightarrow AB \cdot MC = AM \cdot BI \quad (2) \end{array} \right.$$

Vi  $\widehat{BAM} = \widehat{CAI}$  và  $\widehat{BMA} = \widehat{ICA}$

$$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta AIC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BM}{IC} \Rightarrow AC \cdot BM = AM \cdot IC$$

$$\Rightarrow AC.BM = AM.IC \quad (3).$$

Từ (1); (3) và  $BI = CI$  suy ra:

$$AC.BM = AB.MC = AM.BI \quad (*)$$

$$\Rightarrow AC.BM = AM.BI \Rightarrow \frac{BI}{BM} = \frac{AC}{AM}$$

$$\Rightarrow \Delta IBM \sim \Delta CAM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{ACM} \quad (4).$$

Từ (1) và (4)  $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BIA} \Rightarrow BC$  là đường phân giác của  $\widehat{AIM}$ . Tương tự ta có  $AM$  là đường phân giác của  $\widehat{BLC}$ .

**Kết quả 2.** Các tứ giác  $AOIM$  và  $BLOC$  nội tiếp đường tròn.

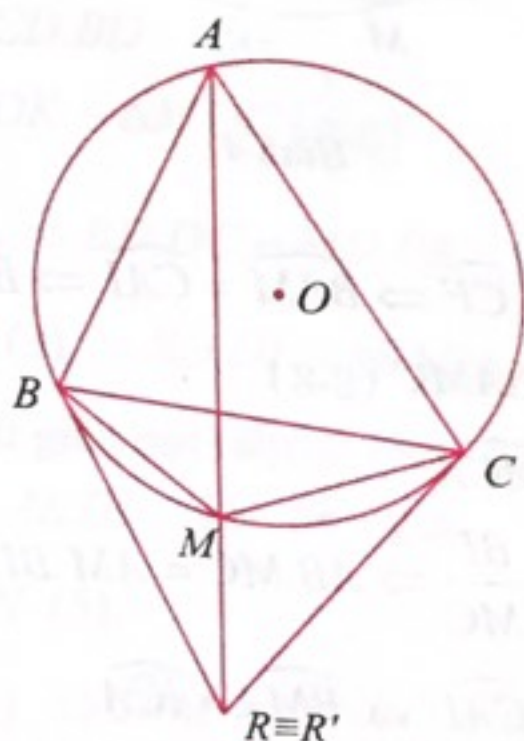
**Chứng minh** (h.4)

Từ  $\widehat{BIA} = \widehat{MCA}$  và  $\widehat{BIM} = \widehat{ACM}$  (theo phần chứng minh ở kết quả 1)  $\Rightarrow \widehat{AIM} = 2\widehat{MCA}$ .

Mặt khác  $\widehat{AOM} = 2\widehat{MCA}$ . Từ đó ta có  $\widehat{AIM} = \widehat{AOM}$  nên  $AOIM$  là tứ giác nội tiếp. Tương tự ta có  $BLOC$  là tứ giác nội tiếp.

**Kết quả 3.** Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng  $AM$ .

**Chứng minh** (h.5)



Hình 5

Gọi  $R$  là giao điểm của tia  $AM$  với tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$ ; Gọi  $R'$  là giao điểm của tia  $AM$  với tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $C$ . Ta có  $\triangle RMB \sim \triangle RBA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{RM}{RB} = \frac{RB}{RA} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{RM}{RA} = \left(\frac{BM}{AB}\right)^2 \quad (1).$$

Tương tự:  $\triangle R'MC \sim \triangle R'CA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{R'M}{R'C} = \frac{R'C}{R'A} = \frac{CM}{AC} \Rightarrow \frac{R'M}{R'A} = \left(\frac{MC}{AC}\right)^2 \quad (2).$$

Mặt khác từ đẳng thức (\*) ở kết quả 1

$$\Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{MC}{AC} \quad (3).$$

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$\frac{RM}{RA} = \frac{R'M}{R'A} \Rightarrow \frac{RA - RM}{RA} = \frac{R'A - R'M}{R'A}$$

$$\text{hay } \frac{AM}{RA} = \frac{AM}{R'A} \Rightarrow RA = R'A \Rightarrow R \equiv R'.$$

**Chú ý.** Tương tự ta chứng minh được các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A$  và  $M$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng  $BC$ .

**Kết quả 4.**  $BL$  và  $BC$  đối xứng với nhau qua đường phân giác của  $\widehat{ABM}$ .

**Chứng minh** (h.4)

Từ đẳng thức (\*) ở kết quả 1 suy ra:

$$AB \cdot MC = AM \cdot BI = AM \cdot \frac{BC}{2} = BC \cdot \frac{AM}{2} = BC \cdot AL$$

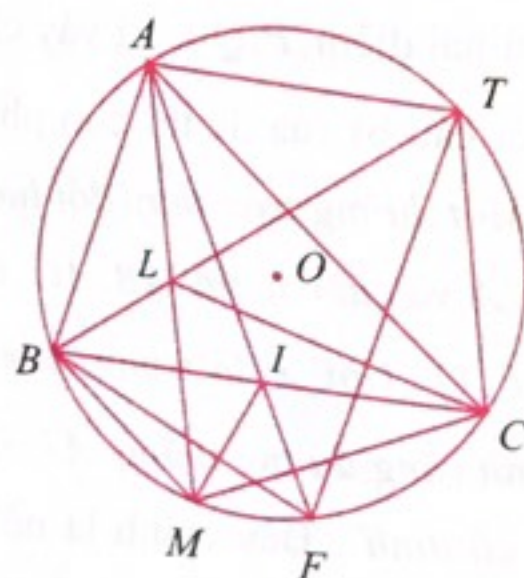
$$\Rightarrow \frac{AB}{AL} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow \triangle BAL \sim \triangle BCM \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{ABL} = \widehat{CBM}$  suy ra  $BL$  và  $BC$  đối xứng với nhau qua đường phân giác của  $\widehat{ABM}$ .

**Chú ý.** Vì  $\widehat{BAM} = \widehat{CAI}$  nên ta cũng có  $AM$  và  $CI$  đối xứng với nhau qua đường phân giác của  $\widehat{BAC}$ .

**Kết quả 5.**  $BL + LC = AI + MI$ .

**Chứng minh** (h.6)



Hình 6

Gọi  $T$  là giao điểm thứ hai của  $BL$  và đường tròn  $(O)$ . Theo kết quả 3 ta có  $\widehat{ABL} = \widehat{CBM}$   
 $\Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{MC}$ . Mà theo bài toán 1 ta có  $\widehat{BM} = \widehat{CF} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{CM}$ . Suy ra  $\widehat{AT} = \widehat{BF}$   
 $\Rightarrow AB \parallel FT \Rightarrow ATFB$  là hình thang cân  
 $\Rightarrow BT = AF$  (1).

$$\text{Từ } \widehat{AT} = \widehat{MC} \Rightarrow \begin{cases} AT = MC \\ \widehat{AC} = \widehat{MT} \Rightarrow \widehat{TAL} = \widehat{CML} \end{cases}$$

Xét  $\triangle ALT$  và  $\triangle MLC$  có:

$$AT = MC; \widehat{TAL} = \widehat{CML}; AL = ML$$

$$\Rightarrow \triangle ALT = \triangle MLC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow LT = CL \Rightarrow BL + LC = BL + LT = BT \quad (2)$$

Mặt khác ở cách 1 của bài toán 1 ta có:

$$\triangle BIM = \triangle CIF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MI = IF \Rightarrow AI + MI = AI + IF = AF \quad (3).$$

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$BL + LC = AI + MI.$$

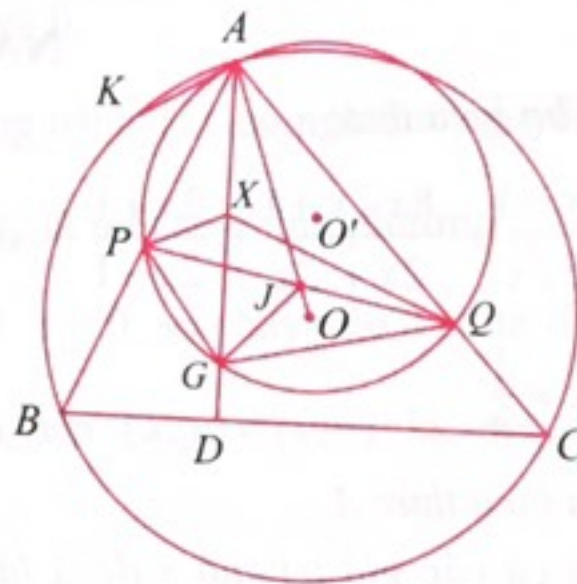
Đến đây chắc hẳn sẽ có nhiều bạn đọc vẫn có thắc mắc là tại sao lại thu được các kết quả như trên. Câu trả lời đó là do có kết quả  $\widehat{BAM} = \widehat{CAI}$  (hoặc  $\widehat{AIB} = \widehat{MIB}$ ) nên suy ra tứ giác  $ABMC$  là tứ giác điều hòa (tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau được gọi là tứ giác điều hòa).

**Nhận xét 3.** Ở câu b) của bài toán 1 ta có ba điểm  $A, J, O$  thẳng hàng (h.7)  $\Rightarrow \widehat{QAJ} = \widehat{CAO}$ , mà ta dễ dàng chứng minh được  $\widehat{BAD} = \widehat{CAO} \Rightarrow \widehat{QAJ} = \widehat{BAD}$  nên  $AJ$  và  $AD$  đối xứng với nhau qua đường phân giác của  $\widehat{PAQ}$ . Vì vậy nếu gọi  $G$  là giao điểm của tia  $AD$  với đường tròn  $(APQ)$  thì ta có  $APGQ$  là tứ giác điều hòa.

$$\text{Thật vậy ta có: } \widehat{PAG} = \widehat{QAJ} \text{ và } \widehat{PGA} = \widehat{JQA}$$

$$\Rightarrow \triangle APG \sim \triangle AJQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PG}{JQ} = \frac{AG}{AQ}$$

$$\Rightarrow PG.AQ = AG.JQ \quad (1).$$



Hình 7

Mặt khác:

$$\widehat{APJ} = \widehat{AGQ} \text{ và } \widehat{PAG} = \widehat{QAJ} \Rightarrow \widehat{PAJ} = \widehat{QAG}$$

$$\Rightarrow \triangle APJ \sim \triangle AGQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{PJ}{GQ}$$

$$\Rightarrow AP.GQ = AG.PJ \quad (2)$$

Kết hợp (1); (2) và  $PJ = QJ$

$\Rightarrow PG.AQ = AP.GQ$  nên  $APGQ$  là tứ giác điều hòa.

Vì vậy nếu kí hiệu đường tròn ngoại tiếp tam giác  $APQ$  là  $(APQ)$ ; Gọi  $O'$  là tâm đường tròn  $(APQ)$  và  $X$  là trung điểm của  $AG$ . Thì ta lại có thêm một số kết quả sau:

**Kết quả 1.1.**  $PQ, AD$  lần lượt là đường phân giác của  $\widehat{AIG}$  và  $\widehat{PXQ}$ .

**Kết quả 2.1.** Các tứ giác  $PXO'Q$  và  $AO'JG$  nội tiếp đường tròn.

**Kết quả 3.1.** Các tiếp tuyến của đường tròn  $(APQ)$  tại  $P$  và  $Q$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng  $AD$ .

**Kết quả 4.1:**  $PX$  và  $PQ$  đối xứng với nhau qua đường phân giác của  $\widehat{APG}$ .

**Kết quả 5.1:**  $BL + LC = AI + MI$ .

**Nhận xét 4.** Rõ ràng nếu thay câu b) bằng một trong năm kết quả mới này thì việc học sinh tìm ra được lời giải sẽ có phần khó hơn vì nó đã dấu đi bản chất ba điểm  $A, J, O$  thẳng hàng.

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG, NĂM HỌC 2021 – 2022

**Câu I.** 1) Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} \quad \text{với } x > 0,$$

$$x \neq \frac{1}{2} \text{ và } x \neq \frac{1}{4}.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để A là số chính phương.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình  $x^2 - 2(2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho

$$B = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1x_2) + 10} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

**Lời giải.** 1) a)

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{(2\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1} \\ &= \left[ \frac{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x}+1)(4x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1} \\ &= \left( \frac{4x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x+1}. \end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{4(2x-1)}{2x+1}$  với điều kiện  $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4}$ .

b) Do A là số chính phương nên  $A \geq 0$ , kết hợp với điều kiện suy ra  $x > \frac{1}{2}$ . Khi đó  $0 < \frac{2x-1}{2x+1} < 1 \Rightarrow 0 < A < 4$ . Vì A là số chính phương nên  $A = 1$ .

Giải ra ta tìm được  $x = \frac{5}{6}$  (thỏa mãn).

2) Ta có:  $\Delta' = (2m-1)^2 - (m^2 + m - 3)$

$$= 3m^2 - 5m + 4 = 3\left(m - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ . Theo hệ thức Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 2 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 3 \end{cases} \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) + 10} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + x_2 + 1)^2 + 9} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{(x_1 + x_2 - 2)^2}{6[(x_1 + x_2 + 1)^2 + 9]} \leq \frac{1}{6}, \forall x_1, x_2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 + x_2 = 2$ .

Kết hợp với hệ thức Viète ta được:

$$4m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

**Câu II.** 1) Giải phương trình

$$\sqrt{6-x} - \sqrt{2x+6} = x^2 - 2x - 18.$$

2) Tìm a, b để đa thức

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$$

chia cho  $x-1$  dư 3 và chia cho  $x-2$  dư 5.

**Lời giải.** 1) ĐK:  $-3 \leq x \leq 6$  (\*). Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &(\sqrt{6-x}-1) - (\sqrt{2x+6}-4) = x^2 - 2x - 15 \\ \Leftrightarrow &\frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1} - \frac{2(x-5)}{\sqrt{2x+6}+4} = (x-5)(x+3) \\ \Leftrightarrow &(x-5) \left( x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = 0 \end{cases}$$

•  $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$  (thỏa mãn (\*)).

•  $x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = 0$ : vô nghiệm khi  $-3 \leq x \leq 6$ .

So sánh điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \{5\}$ .

2) Do  $f(x)$  chia cho biểu thức  $x-1$  có số dư là 3 suy ra  $f(1) = 3 \Rightarrow a+b=2$ .

Do  $f(x)$  chia cho biểu thức  $x-2$  có số dư là 5 suy ra  $f(2) = 5 \Rightarrow 2a+b=1$ .

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}.$$

**Câu III.** 1) Chứng minh rằng  $n^5 - n$  chia hết cho 240 với  $n$  là số tự nhiên lẻ bất kì.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình  $x^2 - y^2(x + y^4 + 6y^2) = 0$ .

3) Cho hình tròn  $(O)$  có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng trong tám điểm  $A_1, A_2, \dots, A_8$  bất kì thuộc hình tròn  $(O)$ , luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

**Lời giải.** 1) Do  $n(n-1)(n+1):3$

$$\Rightarrow n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1):3.$$

Do  $n-1, n+1$  là hai số chẵn liên tiếp nên  $(n-1)(n+1):8$  và  $n^2+1:2$

$$\Rightarrow n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1):16. \text{ Mặt khác:}$$

$$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

$$= n(n-1)(n+1)[(n^2-4)+5]$$

$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5n(n-1)(n+1):5.$$

Do 3, 5 và 16 đôi một nguyên tố cùng nhau nên  $n^5 - n : 240$  (đpcm).

$$2) x^2 - y^2(x + y^4 + 6y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2x - (y^6 + 6y^4) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } \Delta_x = y^4 + 4(y^6 + 6y^4) = y^4(4y^2 + 25).$$

**Nhận xét:** Nếu  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của phương trình (1) thì  $(x_0; -y_0)$  cũng là nghiệm của

phương trình (1). Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét  $y \geq 0$ .

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên  $x$ , ta cần phải có  $\Delta_x$  là một số chính phương

TH1: Xét  $y=0$  và thay vào (1) ta được  $x=0$  thỏa mãn nên  $(x; y) = (0; 0)$  là một nghiệm của (1).

TH2: Nếu  $y > 0$ ,  $\Delta_x$  là số chính phương khi  $4y^2 + 25$  là số chính phương.

$$\text{Đặt } 4y^2 + 25 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow (m-2y)(m+2y) = 25 \quad (2).$$

Vì  $y \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$  nên  $m-2y < m+2y$  và  $m-2y; m+2y$  là các ước nguyên dương của 25

$$\text{Từ (2) ta được: } \begin{cases} m-2y=1 \\ m+2y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ y=6 \end{cases}.$$

Thay  $y=6$  vào (1), rút gọn ta được:

$$x^2 - 36x - 54432 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=252 \\ x=-216 \end{cases}.$$

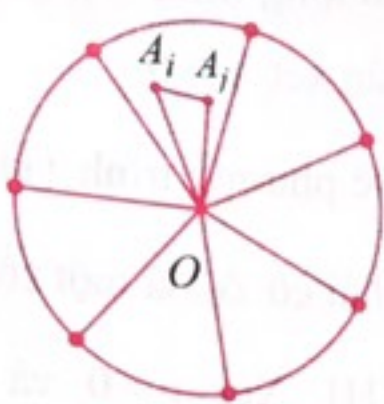
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm nguyên là  $S = \{(0; 0); (252; 6); (-216; 6); (252; -6); (-216; -6)\}$ .

3) TH1: 8 điểm đã cho có điểm  $A_i$  trùng với tâm  $O$  của đường tròn.

Nếu 7 điểm còn lại có điểm  $A_j$  nằm bên trong đường tròn  $(C)$  thì  $A_i A_j < R = 1$  (thỏa mãn).

Nếu cả 7 điểm còn lại nằm trên đường tròn thì chúng chia đường tròn thành 7 cung. Do đó có một cung trong các cung đó có số đo nhỏ hơn  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai điểm là đầu mút của cung đó nhỏ hơn  $R = 1$ .

TH2: Cả 8 điểm đã cho đều khác  $O$ . Ta chia hình tròn thành 7 hình quạt bằng nhau có góc ở tâm bằng  $\frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$  (hình vẽ).



Theo nguyên lý Dirichlet, trong 8 điểm đã cho phải có 2 điểm thuộc cùng một trong 7 hình quạt thu được (có thể nằm trên biên của hình quạt). Giả sử  $A_i, A_j$  thuộc một hình quạt.

Khi đó  $\widehat{A_i O A_j} < 60^\circ$  nên một trong hai góc  $\widehat{O A_i A_j}$  hoặc  $\widehat{O A_j A_i}$  lớn hơn  $60^\circ$  (có thể bằng  $180^\circ$ ), chẳng hạn góc  $\widehat{O A_j A_i} > 60^\circ$ . Ta có  $\widehat{A_i O A_j} < \widehat{O A_j A_i}$  nên  $A_i A_j < O A_i \leq R = 1$ . Vậy trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

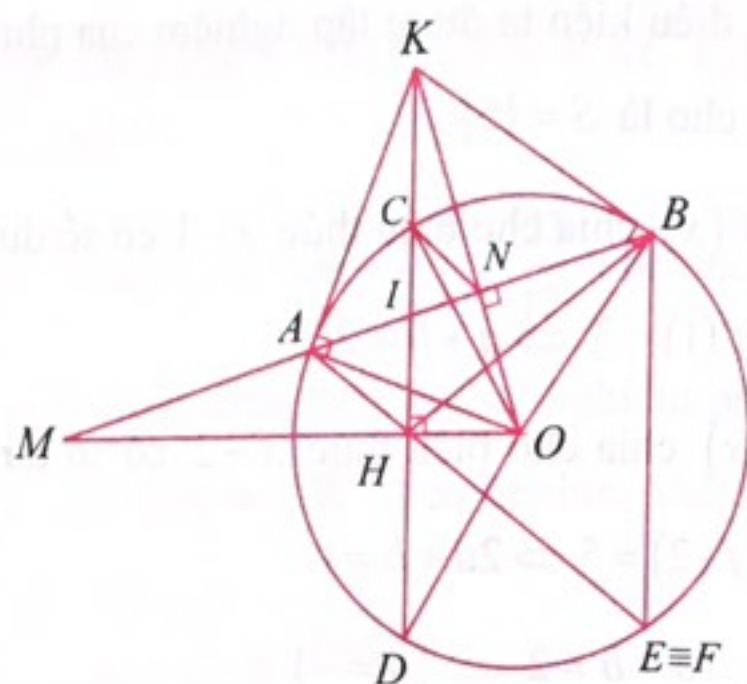
**Câu IV.** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  cố định nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Qua  $M$  kẻ cát tuyến  $MAB$  với đường tròn  $(O)$  ( $MA < MB$  và  $AB$  không đi qua  $O$ ). Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A$  và  $B$  cắt nhau tại  $K$ . Đường thẳng qua  $K$  vuông góc với  $MO$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $C, D$  phân biệt ( $KC < KD$ ). Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

1) Chứng minh rằng tứ giác  $ONCD$  nội tiếp trong một đường tròn.

2) Gọi  $I$  là giao điểm của  $CD$  với  $AB$ . Chứng minh rằng  $IA \cdot MB = IB \cdot MA$ .

3) Qua  $B$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $E$  ( $E$  khác  $B$ ). Chứng minh rằng đường thẳng  $AE$  luôn đi qua một điểm cố định khi cát tuyến  $MAB$  thay đổi.

Lời giải.



1) Theo bài ra ta thấy ba điểm  $K, N$  và  $O$  thẳng hàng. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông  $KBO$  ta được  $KB^2 = KN \cdot KO$  (1).

Chứng minh được  $KB^2 = KC \cdot KD$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $KN \cdot KO = KC \cdot KD \Leftrightarrow \frac{KC}{KN} = \frac{KO}{KD}$ . Do đó tam giác  $KNC$  đồng dạng

với tam giác  $KDO$  (c.g.c). Suy ra  $\widehat{KDO} = \widehat{KNC}$ . Vậy tứ giác  $ONCD$  nội tiếp trong một đường tròn.

2) Gọi  $H$  là giao điểm của  $CD$  và  $MO$ . Khi đó 5 điểm  $K, A, H, O$  và  $B$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $KO$ .

Ta có  $\widehat{AHK} = \widehat{ABK} = \widehat{KAB} = \widehat{KHB}$ , suy ra  $HI$  là đường phân giác trong của tam giác  $AHB \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{IA}{IB}$  (3).

Vì  $HM \perp HI$  nên  $HM$  là đường phân giác ngoài của tam giác  $AHB \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{MA}{MB}$  (4).

Từ (3) và (4) suy ra  $\frac{IA}{IB} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow IA \cdot MB = IB \cdot MA$ .

3) Từ  $OH \cdot OM = ON \cdot OK = OB^2$

$\Rightarrow OH = \frac{OB^2}{OM}$  (không đổi) suy ra  $H$  là điểm cố định. Gọi  $F$  là giao điểm của  $AH$  với đường tròn  $(O)$  ( $F \neq A$ ). Ta có:

$$\widehat{AHK} = \widehat{AOK} \quad (7), \quad \widehat{AFB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{AOK} \quad (8).$$

Từ (7) và (8)  $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AFB} \Rightarrow CD \parallel BF$ .

Suy ra  $F \equiv E$ . Vậy  $AE$  đi qua điểm  $H$  cố định (đpcm).  $\square$

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, TP. HẢI PHÒNG  
NĂM HỌC 2021 – 2022**

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Bài 1. (2 điểm)**

1) Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \left( \sqrt{x} - 4 + \frac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} \right)$$

(với  $x \geq 0, x \neq 1$ ).

Rút gọn biểu thức  $A$  và tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A \geq 2$ .

2) Cho hai phương trình (ẩn  $x$ ; tham số  $a, b$ )

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1); \quad x^2 + bx + 2a = 0 \quad (2).$$

Tìm tất cả các cặp số thực  $(a; b)$  để mỗi phương trình trên đều có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn  $x_2 - x_1 = x_0$ , trong đó  $x_0$  là nghiệm chung của hai phương trình và  $x_1, x_2$  lần lượt là hai nghiệm còn lại của phương trình (1), phương trình (2).

**Bài 2. (2 điểm)**

1) Giải phương trình  $\sqrt{3x+2} - 2\sqrt{x} = 2 - x$ .

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = x + 4 \\ y^2 + 2xy = y - 4 \end{cases}$$

**Bài 3. (3 điểm)** Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc  $\widehat{BAC}$  của tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $AI$  cắt  $BC$  tại  $D$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$  ( $E \neq A$ ).

a) Chứng minh  $E$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $IBC$ .

b) Kẻ  $IH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ . Đường thẳng  $EH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $F$  ( $F \neq E$ ).

Chứng minh  $AF \perp FI$ .

c) Đường thẳng  $FD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$  ( $M \neq F$ ), đường thẳng  $IM$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $N$  ( $N \neq M$ ). Đường thẳng qua  $O$  song song với  $FI$  cắt  $AI$  tại  $J$ , đường thẳng qua  $J$  song song với  $AH$  cắt  $IH$  tại  $P$ . Chứng minh ba điểm  $N, E, P$  thẳng hàng.

**Bài 4. (1 điểm)** Cho các số thực dương  $x, y, z$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{2x+y}} + \frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{2y+z}} + \frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{2z+x}} \geq \sqrt{3xyz}.$$

**Bài 5. (2 điểm)**

1) Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn

$$y^4 + 2y^2 - 3 = x^2 - 3x.$$

2) Cho tập hợp  $X = \{1; 2; 3; \dots; 101\}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  ( $n \geq 3$ ) nhỏ nhất sao cho với mọi tập con  $A$  tùy ý gồm  $n$  phần tử của  $X$  đều tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt  $a, b, c \in A$  thỏa mãn  $a + b = c$ .

**TRẦN QUANG THẮNG, TRỊNH VIỆT ANH**

(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

*Giới thiệu*

\*\*\*\*\*

**Câu V.** Cho hai số dương  $a, b$  thay đổi thỏa mãn  $a^3 + b^3 + 6ab \leq 8$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{3 + a^2 b^2}{ab}$ .

**Lời giải.** Ta có:  $a^3 + b^3 + 6ab \leq 8$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + (-2)^3 - 3ab(-2) \leq 0 \quad (*).$$

Ta có:  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2].$$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow (a+b-2)[(a-b)^2 + (a+2)^2 + (b+2)^2] \leq 0$$

$\Leftrightarrow 0 < a+b \leq 2$ . Theo BĐT Cauchy ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1. \text{ Khi đó:}$$

$$P = \left( \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \left( \frac{1}{ab} + ab \right) + \frac{3}{2ab} \\ \geq \frac{(1+1)^2}{(a+b)^2} + 2 + \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2}.$$

Vậy  $\min P = \frac{9}{2}$  khi  $a = b = 1$ .

**NGUYỄN ANH TUẤN**

(GV THPT chuyên Bắc Giang) *Giới thiệu*



# MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

LÊ THẾ THÔNG

(GV THPT Lê Quảng Chí, Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Bài toán về số nghiệm của PT có chứa hàm hợp xuất hiện nhiều trong các đề thi và gây không ít khó khăn cho các em học sinh khi ôn tập. Trong khuôn khổ của bài viết, chúng tôi trình bày một số dạng toán thường gặp về số nghiệm của PT có chứa hàm hợp với mong muốn giúp các em học sinh tiếp cận tốt các dạng toán này.

## DẠNG 1. Xác định số nghiệm của phương trình $f(u(x)) = a$ với $a$ là hằng số

**Cách tiếp cận.** Sử dụng tính chất sau đây mà việc chứng minh xin nhường cho bạn đọc: Giả sử  $g(x)$  là hàm số của  $x$ , xác định trên khoảng  $(a; b)$  và lấy giá trị trên khoảng  $(c; d)$ ;  $y = f(u(x))$  là hàm số của  $u(x)$ , xác định trên khoảng  $(c; d)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} \text{Nếu } f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ \dots \\ x = x_k \end{cases} \text{ thì phương trình} \\ f(u(x)) = a \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x_1 \\ u(x) = x_2 \\ \dots \\ u(x) = x_k \end{cases} \end{aligned}$$

**Thí dụ 1.** (Trích đề thi thử của Trường THPT chuyên Hà Tĩnh năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Biết  $f(0) = 0$ , số nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\right]$

của phương trình  $f(f(\sqrt{3}\sin x + \cos x)) = 1$  là

- A. 4      B. 3      C. 2      D. 5

**Lời giải.** Đặt  $t = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

Với  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\right]$  thì  $x + \frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ . Suy ra

$t = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2; 2]$ . Từ đường tròn lượng giác cho ta thấy: Với mỗi  $t \in [0; 2)$  có 3 nghiệm  $x$ , mỗi  $t \in (-2; 0) \cup \{2\}$  có 2 nghiệm  $x$ ,  $t = -2$  có 1 nghiệm  $x$ . Ta có:

$$\begin{aligned} f(f(\sqrt{3}\sin x + \cos x)) &= 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = a > 2 \\ f(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = b \in (-2; 0) \\ f(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = c < -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin x + \cos x = t_1 > 2 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = t_2 > 2 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = t_3 \in (0; 2) \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = t_4 < -2 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = t_5 < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó PT có 3 nghiệm. Chọn B.

**Thí dụ 2.** (Trích đề thi thử của Trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, lần 3, năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ

|        |           |                |     |               |           |
|--------|-----------|----------------|-----|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-1$           | $3$ | $2$           | $+\infty$ |

Hỏi phương trình  $2f(x^2 - |x|) = 5$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 4      B. 6      C. 8      D. 5.

**Lời giải.** Ta có :  $2f(x^2 - |x|) = 5$

$$\Leftrightarrow f(x^2 - |x|) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - |x| = a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \\ x^2 - |x| = b \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \\ x^2 - |x| = c \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \\ x^2 - |x| = d \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right) \end{cases}$$

Xét hàm số  $u(x) = x^2 - x$  trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $u'(x) = 2x - 1$ . Bảng biến thiên hàm số  $y = u(|x|)$

|              |           |                |     |                |           |
|--------------|-----------|----------------|-----|----------------|-----------|
| $x$          | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$  | $+\infty$ |
| $u'(x)$      |           |                |     |                |           |
| $y = u( x )$ | $+\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên hàm số  $y = u(|x|)$  ta suy ra PT đã cho có 8 nghiệm. Chọn C.

**DẠNG 2. Tìm điều kiện của tham số  $m$  để PT  $f(u(x)) = m$  có nghiệm, có  $k$  nghiệm**

**Cách tiếp cận.**

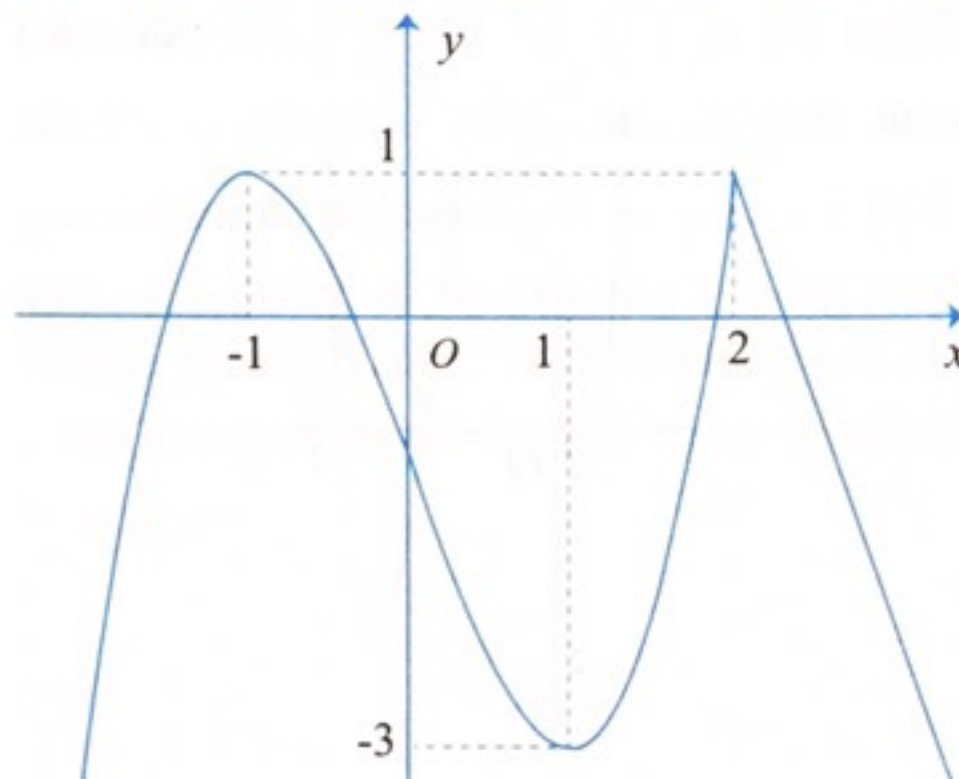
+ Đặt  $t = u(x)$ . Khảo sát hoặc đánh giá tìm miền giá trị của biến  $t$  và tìm sự tương ứng giữa  $t$  và  $x$  trong trường hợp bài toán yêu cầu có  $k$  nghiệm.

+ Lập bảng biến thiên cho hàm số  $f(u)$ .

+ Dựa vào bảng biến thiên kết luận.

**Chú ý.** Ngoài việc lập bảng biến thiên cho hàm số  $f(u)$  ta có thể đọc đồ thị  $f(u)$ .

**Thí dụ 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình  $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$  có nghiệm. Giả sử khi tham số  $a$  thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất  $m$  nghiệm và có ít nhất  $n$  nghiệm. Giá trị của  $m + n$  bằng

A. 4      B. 6      C. 3      D. 5.

**Lời giải.** Điều kiện  $x \geq 0$ . Xét hàm số  $u(x) = 1 - \sqrt{x^3 + x}$  trên  $[0; +\infty)$ . Ta có

$$u'(x) = -\frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}} < 0, \forall x > 0 \text{ và } u(0) = 1,$$

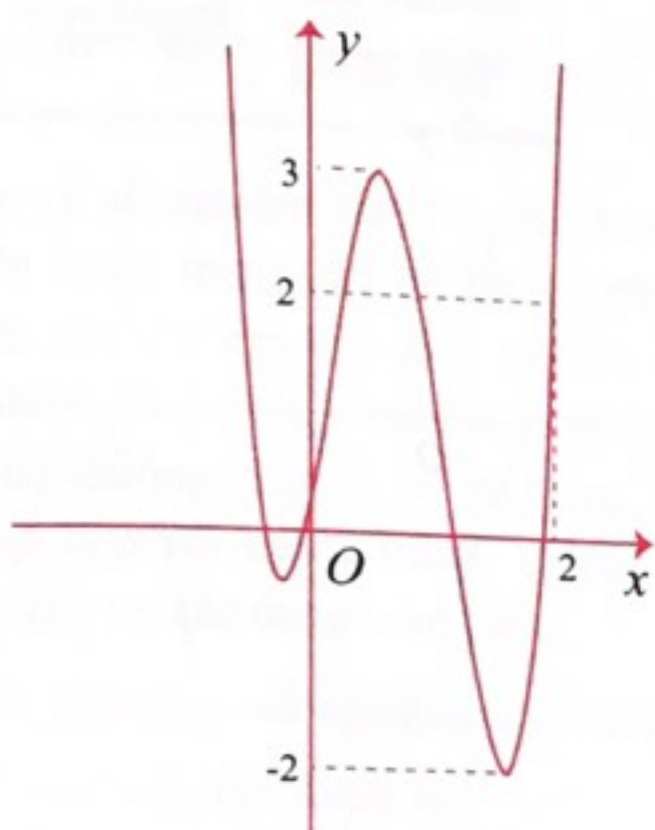
$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$ . Như vậy cứ 1 giá trị  $u \in (-\infty; 1]$

cho 1 giá trị  $x \in [0; +\infty)$ . Bảng biến thiên hàm số  $f(u)$  như sau :

|         |           |      |      |
|---------|-----------|------|------|
| $u$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  |
| $f'(u)$ | $+$       | $0$  | $-$  |
| $f(u)$  | $-\infty$ | $1$  | $-3$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra PT  $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$  có nhiều nhất 2 nghiệm, ít nhất 1 nghiệm. Chọn C.

**Thí dụ 4.** (Trích đề thi thử của Trường THPT chuyên, Đại học Vinh, lần 2, năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(|x^3 - 3x|) = m$  có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-2; 2]$ ?

A. 4      B. 3      C. 1      D. 2.

**Lời giải.** Xét hàm số  $u(x) = x^3 - 3x$  trên  $[-2; 2]$ . Ta có  $u'(x) = 3x^2 - 3$ . Bảng biến thiên hàm số  $y = |u(x)|$

|          |    |    |   |   |   |
|----------|----|----|---|---|---|
| $x$      | -2 | -1 | 1 | 2 |   |
| $u'(x)$  | +  | 0  | - | 0 | + |
| $ u(x) $ | 2  | 2  | 2 | 2 |   |

Diagram illustrating the function  $|u(x)|$  and its derivative  $u'(x)$  over the interval  $x \in [-2, 2]$ .

The function  $|u(x)|$  is shown as a piecewise linear function with vertices at  $(-2, 2)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ , and  $(2, 2)$ . The derivative  $u'(x)$  is indicated by arrows:  $u'(x) = -1$  for  $x \in [-2, -1]$ ,  $u'(x) = 1$  for  $x \in [-1, 1]$ ,  $u'(x) = -1$  for  $x \in [1, 2]$ , and  $u'(x) = 1$  for  $x \in [2, 3]$ .

Như vậy cứ 1 giá trị  $|u| \in (0; 2)$  cho 6 giá trị  $x \in [-2; 2]$ ,  $|u| = 2$  cho 4 giá trị  $x \in [-2; 2]$ ,  $|u| = 0$  cho 3 giá trị  $x \in [-2; 2]$ . Để PT  $f(|x^3 - 3x|) = m$  có 12 nghiệm thuộc đoạn  $[-2; 2]$  thì PT  $f(|u|) = m$  có 2 nghiệm  $|u|$  phân biệt thuộc khoảng  $(0; 2)$ . Dựa vào đồ thị hàm số

$f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  ta suy ra  $\begin{cases} -2 < m < 0 \\ 2 < m < 3 \end{cases}$ .

Chọn C.

Đặc biệt nếu thay  $m$  bởi  $f(m)$  ta thu được một lớp bài toán khá thú vị và cách tiếp cận cũng có những nét riêng. Sau đây là các cách tiếp cận đó.

**Cách tiếp cận 1:** Sử dụng tính đơn điệu.

Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định của phương trình thì PT  $f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ .

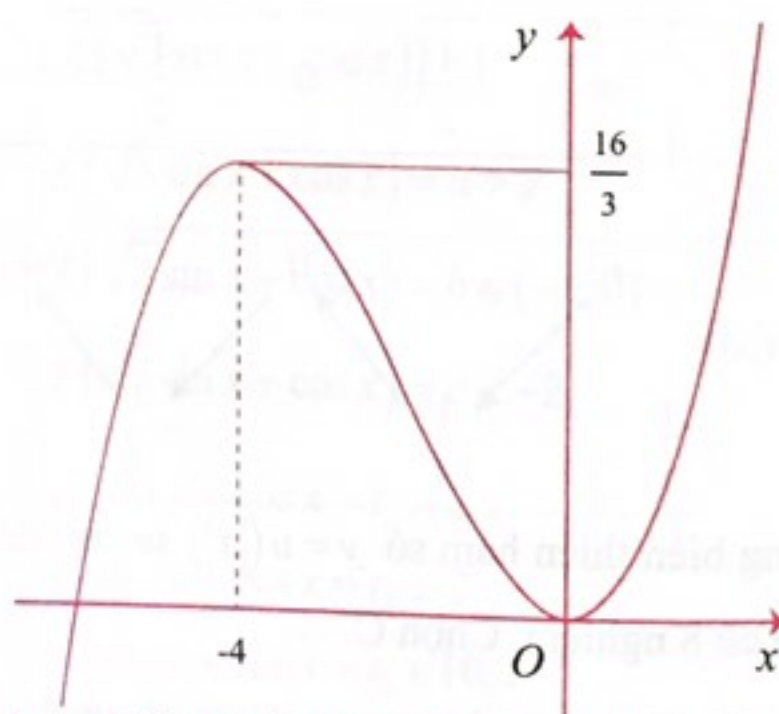
**Cách tiếp cận 2:** Đọc đồ thị.

+ Đặt  $t = u(x)$ . Khảo sát hoặc đánh giá tìm miền giá trị của biến  $t$  và tìm sự tương ứng giữa  $t$  và  $x$  nếu cần.

+ Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) coi  $u$  là biến tìm được điều kiện của  $f(u)$ , từ đó suy ra điều kiện của  $f(m)$ .

+ Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) coi  $m$  là biến tìm được điều kiện của  $m$ .

**Thí dụ 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình

$$f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$$

có nghiệm?

A. 3      B. 4      C. 5      D. Vô số.

**Lời giải.** Ta có  $m^2 + 4m + 4 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ .

Xét hàm số:  $u(x) = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}$

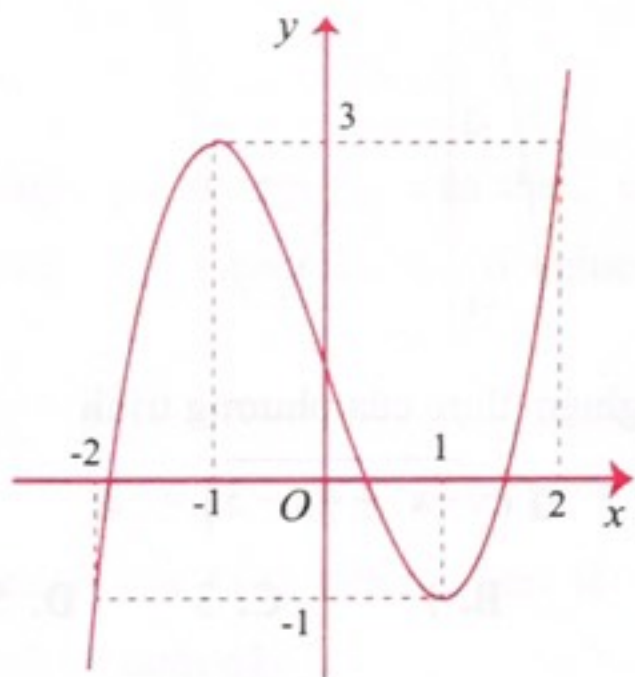
$\Rightarrow (u+3)\sin x - (2u+1)\cos x = 4u+1$ . Sử dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc nhất đối với  $\sin x$  và  $\cos x$  ta được  $-\frac{9}{11} \leq u \leq 1$ . Suy ra  $0 \leq |u| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Dễ thấy hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Do đó:

$$f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| = m^2 + 4m + 4.$$

Để PT có nghiệm thì  $0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1$ . Vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-3; -2; -1\}$ . Chọn A.

**Thí dụ 6.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình  $f(x - \sqrt{x^2 + 1}) = f(m)$  có nghiệm là:

- A. 3      B. 0      C. 2      D. 1.

**Lời giải.** Xét hàm số  $u(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ . Ta có

$$u'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và}$$

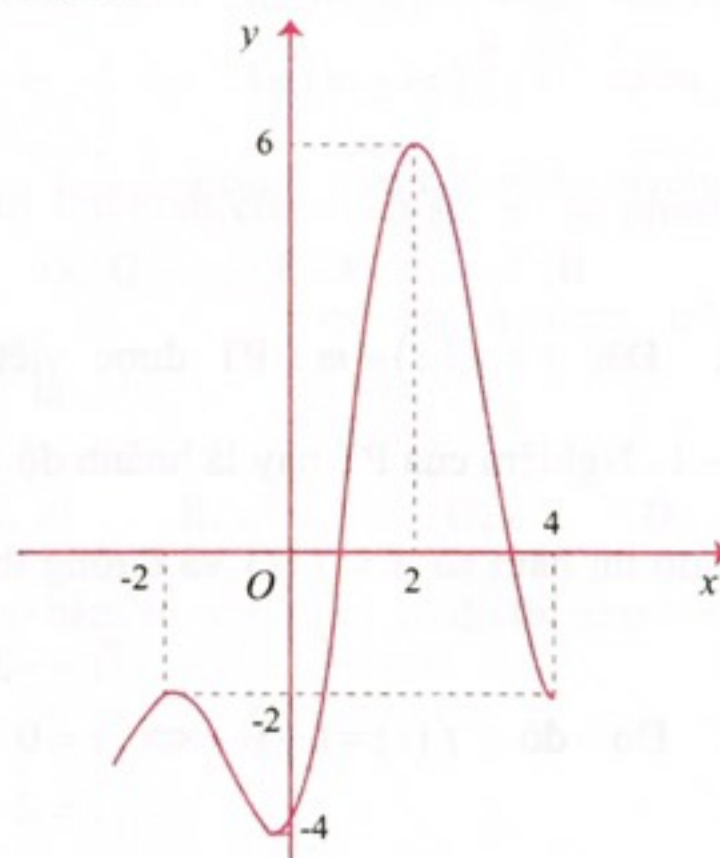
$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ . Với  $x \in \mathbb{R}$  thì  $u \in (-\infty; 0)$ . Dựa vào đồ thị ta suy ra  $f(u) \leq 3$  với mọi  $u \in (-\infty; 0)$ . Kéo theo  $f(m) \leq 3$ . Từ đồ thị ta có  $m \leq 2$ . Vì  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{1; 2\}$ . Chọn C.

**DẠNG 3. Xác định số nghiệm, tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình  $f(u(x)) = g(u(x)) + m$  có nghiệm, có  $k$  nghiệm.**

**Cách tiếp cận 1:** Đặt  $t = u(x)$  và khảo sát hàm số  $h(t) = f(t) - g(t)$  trên miền biến  $t$ .

**Cách tiếp cận 2:** Đặt  $t = u(x)$  và tìm nghiệm của PT  $f(t) = g(t)$  bằng cách sử dụng tương giao của hai đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và  $y = g(t)$ .

**Thí dụ 7. (Trích đề thi thử của Trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, lần 4, năm 2019-2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới.



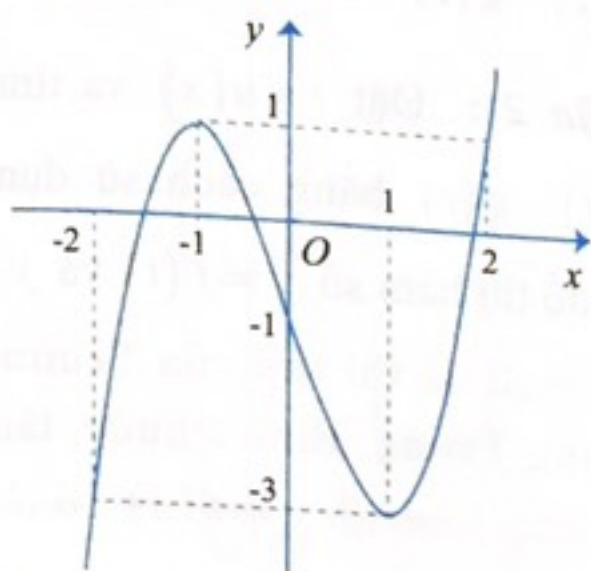
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$  có nghiệm thuộc  $[-2; 2]$ ?

- A. 7      B. 6      C. 8      D. 5.

**Lời giải.** PT được viết lại  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = m + 2$ . Đặt  $t = \frac{x}{2} + 1$ . Với  $x \in [-2; 2]$  thì  $t \in [0; 2]$ . Xét hàm số  $g(t) = \frac{1}{3}f(t) + 2t$  trên đoạn  $[0; 2]$ . Ta có  $g'(t) = \frac{1}{3}f'(t) + 2 > 0, \forall t \in [0; 2]$ . Do đó để PT đã cho có nghiệm thuộc  $[-2; 2]$  thì

$g(0) \leq m+2 \leq g(2) \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$ . Vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ . Chọn C.

**Thí dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(f(x) + m) + 1 = f(x) + m$  có đúng 3 nghiệm phân biệt trên đoạn  $[-1; 1]$ ?

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4.

**Lời giải.** Đặt  $t = f(x) + m$ . PT được viết lại  $f(t) = t - 1$ . Nghiệm của PT này là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và đường thẳng

$$y = t - 1. \text{ Do đó } f(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 0 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m - 2 \\ f(x) = -m \\ f(x) = -m + 2 \end{cases}. \text{ Trên đoạn}$$

$[-1; 1]$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến nên cứ mỗi  $y$  cho một  $x$ . Dựa vào đồ thị ta suy ra để PT đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt trên đoạn  $[-1; 1]$  thì  $m = 1$ . Chọn A.

### BÀI TẬP DÈ NGHỊ

1 (Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định, năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

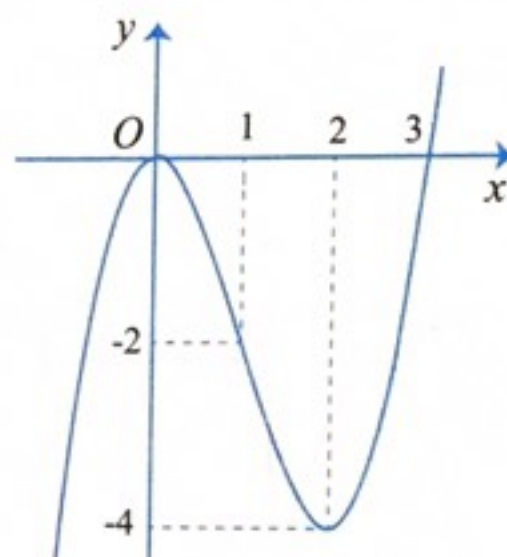
|      |           |                |   |   |           |
|------|-----------|----------------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0              | + | 0 | -         |
| $y$  | $+\infty$ |                | 2 |   | $+\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương

trình  $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$  là

- A. 11      B. 10      C. 9      D. 12.

2. Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây.

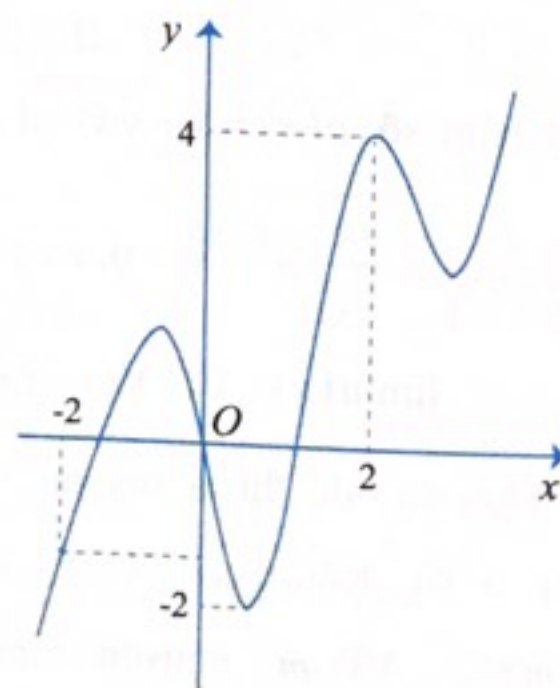


Tìm số nghiệm thực của phương trình

$$f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2.$$

- A. 4      B. 1.      C. 3      D. 5.

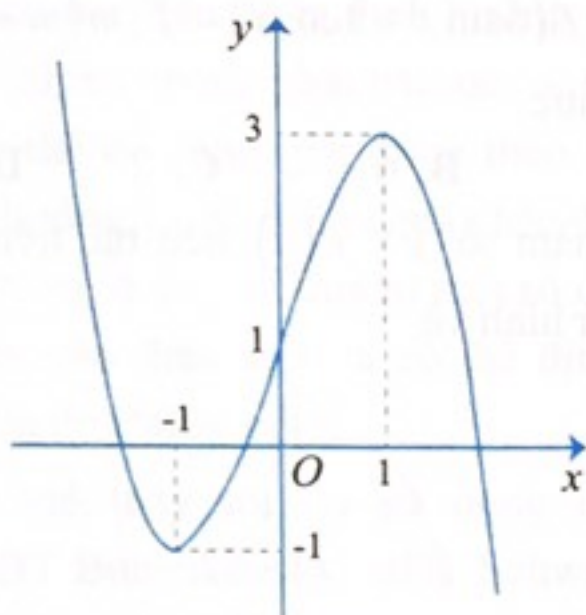
3. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$  có nghiệm thuộc nửa khoảng  $[1; 3)$ .

A. 4      B. 6      C. 21      D. 5.

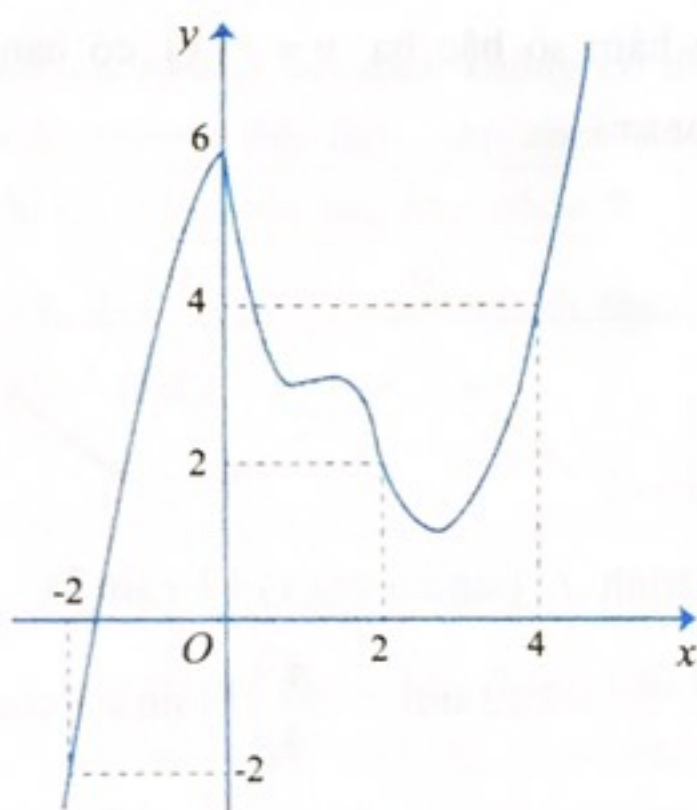
4. (Trích đề thi thử của Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(f(\cos x)) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

A. 4      B. 2      C. 3      D. 5

5. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(2\log_2 x) = m$  có nghiệm duy nhất trên  $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ .

A. 4      B. 6      C. 9      D. 5.

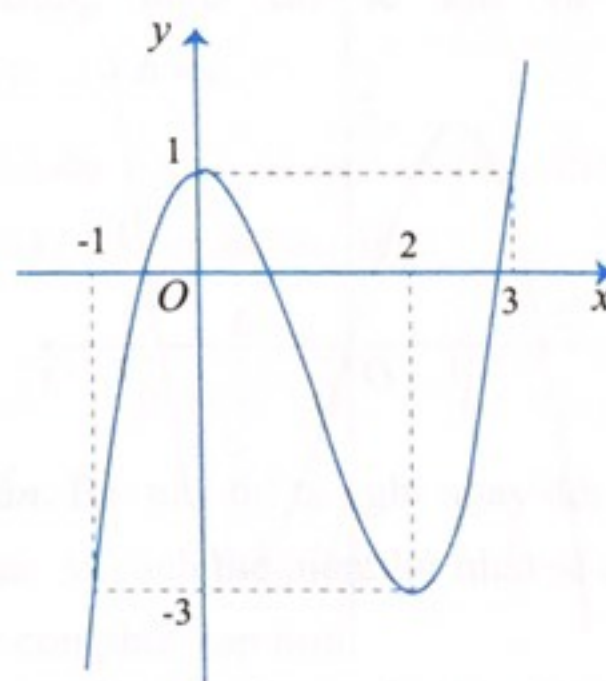
6. (Trích đề thi thử của Sở GD&ĐT Phú Thọ, lần 2, năm 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) < \frac{7}{6}$  và có bảng biến thiên như sau.

|      |           |                                                                                       |   |                                                                                       |                 |                                                                                       |           |
|------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1                                                                                     | 3 | $+\infty$                                                                             |                 |                                                                                       |           |
| $y'$ | -         | 0                                                                                     | + | 0                                                                                     | -               |                                                                                       |           |
| $y$  | $+\infty$ |  | 1 |  | $\frac{15}{13}$ |  | $-\infty$ |

Giá trị lớn nhất của tham số  $m$  để phương trình  $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 2]$  là

A.  $e^2$       B.  $e^{\frac{15}{13}}$       C.  $e^4$       D.  $e^3$ .

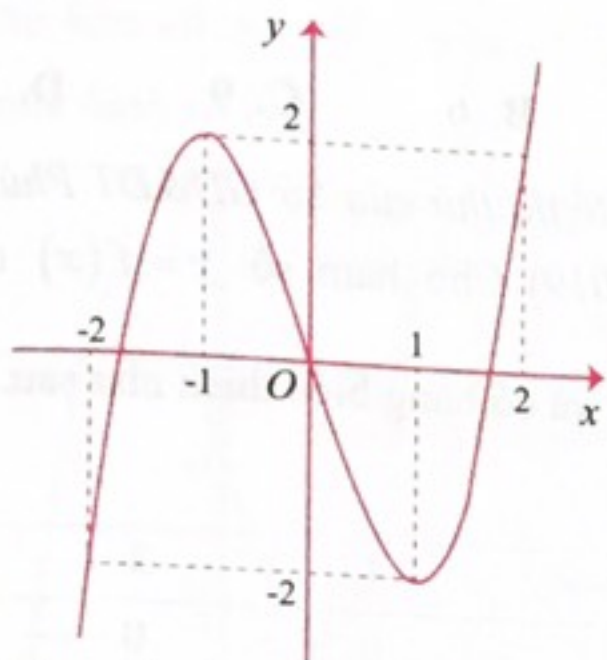
7. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(1 + \sin x) = f(m)$  có nghiệm

A.  $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$       B.  $m \in \{0; 1; 2\}$ .  
C.  $m \in \emptyset$       D.  $m \in \{0; 1\}$ .

8. (Trích đề thi thử của Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, lần 1, năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



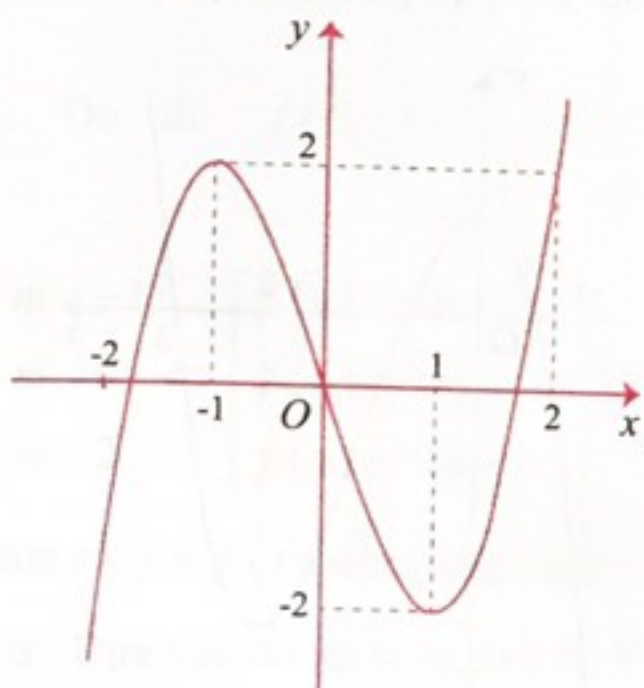
Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số  $m$  để phương trình

$$f\left(\sqrt{f(\sin 2x) + 2}\right) = f\left(\frac{m}{2}\right)$$

có nghiệm thuộc nửa khoảng  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ?

- A. 4      B. 2.      C. 3      D. 1.

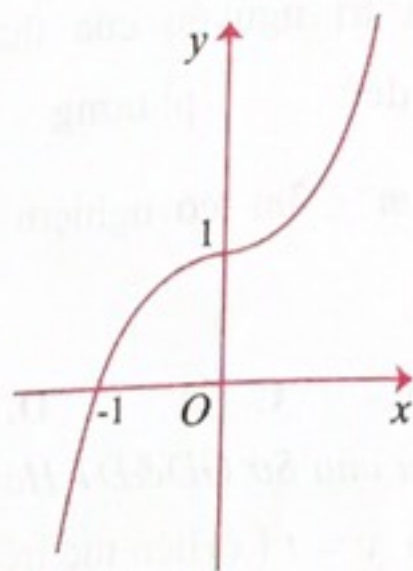
9. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$  có nghiệm thuộc  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ?

- A. 5      B. 3      C. 2      D. 4.

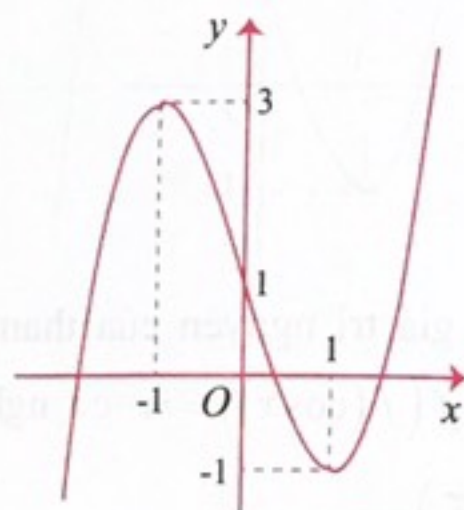
10. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$  có nghiệm thực.

- A. 5      B. 6      C. 2      D. 4.

11. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sin x) = 3\sin x + m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

- A. -5      B. -8.      C. -10      D. -6.

12. Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Phương trình  $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x$

$$= 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$$

có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ ?

- A. 1      B. 3      C. 4      D. 6.



# SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THỂ BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TRỊNH XUÂN LƯU  
(GV THPT chuyên Bình Long, Bình Phước)

Có một số bài toán bất đẳng thức mà ta có thể dựa vào điều kiện ban đầu để ta định hướng cách giải cho nó. Tất nhiên không phải bài nào có điều kiện đó cũng có thể dễ dàng giải được theo cách giải mà ta định hướng và đó cũng chưa chắc đã là cách giải hay. Nhưng ở đây tôi đưa ra một số dạng toán mà khi nhìn vào điều kiện ta có thể định hướng cách thể biến để chứng minh.

Trong bài viết này tôi có sử dụng các BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky, BĐT Schwarz, BĐT Schur là những BĐT thường gặp mà các bạn có thể thấy trong hầu hết các tài liệu bất đẳng thức nên tôi không nêu ra đây.

**Dạng 1.** Trong giả thiết bài toán có cho  $abc = 1$  khi đó ta có thể định hướng thể biến như sau:

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$$

hoặc  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}.$

Tất nhiên có những bài toán không có điều kiện đó, nhưng thường bài toán cho dưới dạng đồng bậc thì ta có thể chuẩn hóa cho  $abc = 1$ .

**Thí dụ 1.** Với  $a, b, c$  là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ac}{ac+2b^2} + \frac{ba}{ba+2c^2} + \frac{cb}{cb+a^2} \geq 1 \quad (*)$$

**Hướng dẫn.** Bài này không có điều kiện  $abc = 1$  nhưng ta thấy có thể chuẩn hóa được điều kiện đó. Còn nếu mà bạn nào chưa quen với cách chuẩn hóa thì ta có thể chia cả tử và mẫu của từng phân thức cho biểu thức thích hợp.

Thật vậy ta có:

$$VT(*) \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 2\frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} + 2\frac{c}{a}} + \frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{a} + 2\frac{a}{b}} \geq 1 \quad (**).$$

Đặt  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ . Khi đó (\*\*) trở thành:

$$\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} \geq 1.$$

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} + \frac{z^2}{z^2+2zx} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = 1 = VP \end{aligned}$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ .

**Thí dụ 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

**Hướng dẫn.** Bài này thì ta nghĩ ngay đến cách thể biến thứ hai, vì cách thể biến thứ nhất sẽ cho ta bất đẳng thức còn phức tạp hơn.

Đặt  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \Rightarrow xyz = 1$ . Khi đó BĐT đã

cho trở thành:

$$\frac{x^3}{(2y+z)^2} + \frac{y^3}{(2z+x)^2} + \frac{z^3}{(2x+y)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{x^3}{(2y+z)^2} + \frac{2y+z}{27} + \frac{2y+z}{27} \geq \frac{x}{3}.$$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại, suy ra:

$$\frac{x^3}{(2y+z)^2} + \frac{y^3}{(2z+x)^2} + \frac{z^3}{(2x+y)^2} \geq \frac{1}{9}(x+y+z) \geq \frac{1}{3}$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$ .

**Thí dụ 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc=1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{1+2ab} + \frac{b^2}{1+2bc} + \frac{c^2}{1+2ca} \geq \frac{a}{ab+b+1} + \frac{b}{bc+c+1} + \frac{c}{ca+a+1}.$$

**Hướng dẫn.** Đặt  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ . Khi đó BĐT trở thành:

$$\frac{x^2z}{y^2(2x+z)} + \frac{y^2x}{z^2(2y+x)} + \frac{z^2y}{x^2(2z+y)} \geq \frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{x+y+z}.$$

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\frac{x^2z}{y^2}}{2xz+z^2} + \frac{\frac{y^2x}{z^2}}{2xy+x^2} + \frac{\frac{z^2y}{x^2}}{2yz+y^2} \\ &\geq \frac{\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2}{(x+y+z)^2}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta cần chứng minh

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x+y+z.$$

Dễ dàng chứng minh BĐT này nhờ BĐT Bunyakovsky.

**Thí dụ 4.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ac} \geq \frac{9}{2}.$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ac} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \right) + \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} + 1} + \frac{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} + 1} + \frac{\frac{c}{a} + \frac{a}{c}}{\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} + 1} \geq \frac{9}{2} \quad (1).$$

Đặt  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \Rightarrow xyz = 1$ . Khi đó BĐT

$$(1) \text{ trở thành: } \frac{1}{2} \left( \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right) + \frac{(x^2+1)y}{x(y+z)} + \frac{(y^2+1)z}{y(z+x)} + \frac{(z^2+1)x}{z(x+y)} \geq \frac{9}{2} \quad (*).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT(*) &= \frac{1}{2} \left( \frac{x+z}{z} + \frac{x+y}{x} + \frac{y+z}{y} \right) \\ &\quad + \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{x+z} + \frac{zx}{x+y} + \frac{y}{x(y+z)} \\ &\quad + \frac{z}{y(x+z)} + \frac{x}{z(x+y)} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{x+z}{4z} + \frac{yz}{x+z} \right) + \left( \frac{x+y}{4x} + \frac{zx}{x+y} \right) \\ &\quad + \left( \frac{y+z}{4y} + \frac{xy}{y+z} \right) + \left( \frac{x+z}{4z} + \frac{z}{y(x+z)} \right) \\ &\quad + \left( \frac{x+y}{4x} + \frac{x}{z(x+y)} \right) + \left( \frac{y+z}{4y} + \frac{y}{x(y+z)} \right) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\geq \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{z}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{3}{2}$$

$$\geq 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = VP(*).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$$

**Dạng 2.** Trong bài toán có thể đưa tất cả về dạng

$$\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b} \text{ hoặc } \frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$$

hoặc trong bài toán xuất hiện điều kiện  $xyz = x + y + z + 2$  hoặc  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ .

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng nếu có:

$$x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c} \Rightarrow xyz = x + y + z + 2,$$

hoặc nghịch đảo lên ta được:

$$x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Từ đó định hướng cho ta cách thế biến cho từng bài toán.

**Thí dụ 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

Chứng minh rằng  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .

Đây là BĐT Nesbitt quá quen thuộc và có nhiều cách chứng minh. Ở đây ta thử giải theo cách thế biến vừa nêu. Đặt  $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$

$$\Rightarrow xy + yz + zx + 2xyz = 1. \text{ BĐT cần chứng minh}$$

tương đương với  $x + y + z \geq \frac{3}{2}$ . Ta có:

$$1 = xy + yz + zx + 2xyz \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} + 2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Giải bất phương trình  $\frac{2t^3}{27} + \frac{t^2}{3} \geq 1$  với

$$t = x + y + z \text{ ta được: } x + y + z \geq \frac{3}{2}.$$

**Thí dụ 2.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z).$$

**Hướng dẫn.** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$ .

BĐT trở thành:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

$$\text{Ta có: } \frac{4a}{b+c} \leq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \frac{4b}{c+a} \leq \frac{b}{c} + \frac{b}{a}, \frac{4c}{a+b} \leq \frac{c}{a} + \frac{c}{b}.$$

Cộng theo vế các BĐT này ta suy ra điều phải chứng minh.

**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng nếu  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx + xyz = 4$  thì

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

**Hướng dẫn.** Từ điều kiện ta viết lại như sau:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cdot \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{z}{2} = 1.$$

$$\text{Vậy ta đặt: } x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) \geq 2ab(a+b) + 2bc(b+c) + 2ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Đây chính là BĐT Schur's. Ta có BĐT cần chứng minh.

**Thí dụ 4.** Chứng minh rằng nếu  $x, y, z > 0$  và  $xyz = x + y + z + 2$  thì

$$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6.$$

**Hướng dẫn.** Ta có:

$$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - (x + y + z) \leq x + y + z + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2(x + y + z + 3)} \quad (*).$$

Từ điều kiện đã cho ta đặt:

$$x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}. \text{ Khi đó:}$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \leq \sqrt{2\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{c+a} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{2(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}.$$

BĐT cuối là hiển nhiên theo BĐT Bunyakovsky.

**Thí dụ 5.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn

$$xyz = x + y + z + 2.$$

Chứng minh rằng

$$xyz - 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 5.$$

**Hướng dẫn.**

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow x + y + z - 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3 \quad (*).$$

Đặt  $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$ . Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 3 \geq 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2(a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b}.$$

Đây là BĐT cơ bản vì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}, \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}.$$

**Thí dụ 6.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  ta có:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

**Hướng dẫn.** Trong bài này ta thấy có thể đưa tất cả về dạng  $\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}$  từ đó ta sẽ dùng phép thế trên.

Thật vậy BĐT tương đương với

$$\frac{\left(2 + \frac{b+c}{a}\right)^2}{2 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^2} + \frac{\left(2 + \frac{c+a}{b}\right)^2}{2 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^2} + \frac{\left(2 + \frac{a+b}{c}\right)^2}{2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2} \leq 8 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$$

$$\Rightarrow xyz = x + y + z + 2.$$

Khi đó (\*) trở thành:

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2} + \frac{(2+y)^2}{2+y^2} + \frac{(2+z)^2}{2+z^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{1}{2} \quad (**).$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\text{VT}(**) \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}.$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$2(x+y+z-3)^2 \geq x^2+y^2+z^2+6$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2+9+2xy+2xz-6x+2yz-6y-6z) \geq x^2+y^2+z^2+6$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz-12(x+y+z)+12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 12(x+y+z) + 36 + 2(xy+xz+yz) - 24 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-6)^2 + 2(xy+xz+yz) \geq 24.$$

Ta chỉ cần chứng minh:  $xy+xz+yz \geq 12$ .

$$\text{Ta có: } xyz = x + y + z + 2 \Rightarrow xyz \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 2.$$

Giải bất phương trình:  $t^3 \geq 3t + 2$  với  $t = \sqrt[3]{xyz}$  ta được:  $t = \sqrt[3]{xyz} \geq 2 \Rightarrow t = xyz \geq 8$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 12.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

(Xem tiếp trang 24)



# TỔNG QUÁT MỘT BÀI TOÁN VECTO VÀ ỨNG DỤNG

VŨ NGUYỄN DUY

(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Theo chương trình và sách giáo khoa mới, việc ưu tiên phát triển năng lực cho học sinh, đặc biệt là năng lực tư duy sáng tạo từ những bài toán gốc rất là quan trọng. Trong bài viết này, từ một bài toán đơn giản trong hình học vector lớp 10, chúng tôi xét bài toán tổng quát hơn và đặc biệt có thể áp dụng bài toán tổng quát này giải quyết cho một số bài toán khó.

## BÀI TOÁN 1 (Bài toán ban đầu).

Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  trên đoạn  $BC$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$  ( $k < 0$ ). Chứng minh

rằng:  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1 - k}$ .

**Lời giải.** Bài toán trên khá đơn giản, chỉ cần áp dụng quy tắc trừ vector và chèn điểm  $A$  vào:

Từ giả thiết:

$$\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}),$$

hay

$$(1 - k)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$$

suy ra:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1 - k}.$$

Khi điểm  $M$  trên đoạn  $BC$  và yêu cầu khó hơn là không cho trước tỷ số  $k$ , lúc này ta phải tìm tỷ

số  $k$  theo tỷ lệ đoạn thẳng trên đoạn  $BC$  và kết quả thu được một đẳng thức khá phức tạp tổng quát cả bài toán ban đầu.

## BÀI TOÁN 2 (bài toán tổng quát).

Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  trên đoạn  $BC$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

**Lời giải.** Điểm  $M$  trên đoạn  $BC$  nên ta có:

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{MB}{MC}\overrightarrow{MC} \quad (1).$$

Áp dụng quy tắc trừ vector vào (1) ta được:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -\frac{MB}{MC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}).$$

Quy đồng và thu gọn ta có điều cần chứng minh:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

## ỨNG DỤNG BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

**BÀI TOÁN 2.1.** Gọi độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ ,  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$  lần lượt là  $c, a, b$ ; điểm  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

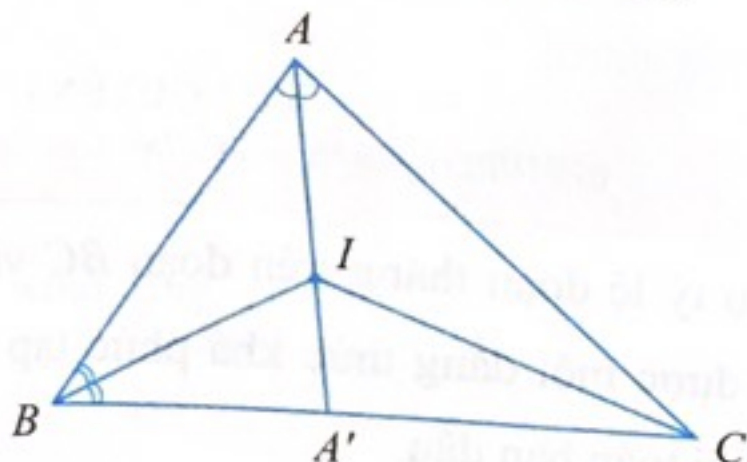
a) Chứng minh rằng:  $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

b) Đường tròn nội tiếp ( $I$ ) tiếp xúc với các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  lần lượt tại  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .

Chứng minh rằng:  $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$ .

Lời giải.

a) Gọi  $A'$  là giao điểm của  $AI$  và  $BC$ .



Áp dụng bài toán 2 trong tam giác  $IBC$ :

$$\overrightarrow{IA'} = \frac{A'C}{BC} \overrightarrow{IB} + \frac{A'B}{BC} \overrightarrow{IC} \quad (*)$$

Để giải quyết bài toán ta chỉ cần tính  $\frac{A'C}{BC}$ ,

$\frac{A'B}{BC}$  theo  $a, b, c$  và biểu diễn vector  $\overrightarrow{IA'}$  theo  $\overrightarrow{IA}$ .

Áp dụng tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

suy ra:

$$\frac{A'B}{A'C + A'B} = \frac{c}{b+c} \quad \text{hay} \quad \frac{A'B}{BC} = \frac{c}{b+c} \quad (1).$$

$$\text{Lý luận tương tự ta được} \quad \frac{A'C}{BC} = \frac{b}{b+c} \quad (2).$$

Lại áp dụng tính chất phân giác, ta có:

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \frac{A'B + A'C}{AB + AC} = \frac{a}{b+c}.$$

$$\text{Suy ra} \quad \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{b+c} \overrightarrow{IA} \quad (3).$$

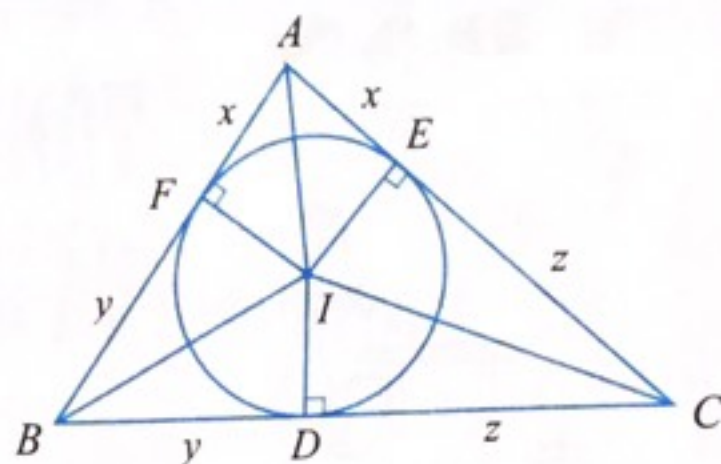
Thay (1), (2), (3) vào (\*) ta được:

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

b) Đặt

$$AE = AF = x; BF = BD = y; CD = CE = z.$$

Áp dụng bài toán 2 vào tam giác  $IBC$  ta được:



$$\overrightarrow{ID} = \frac{DC}{BC} \overrightarrow{IB} + \frac{DB}{BC} \overrightarrow{IC}$$

hay

$$a\overrightarrow{ID} = z\overrightarrow{IB} + y\overrightarrow{IC}.$$

Tương tự ta có:

$$b\overrightarrow{IE} = z\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IC};$$

$$c\overrightarrow{IF} = y\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IB}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = (y+z)\overrightarrow{IA} + (z+x)\overrightarrow{IB} + (x+y)\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}.$$

Mặt khác theo câu a thì

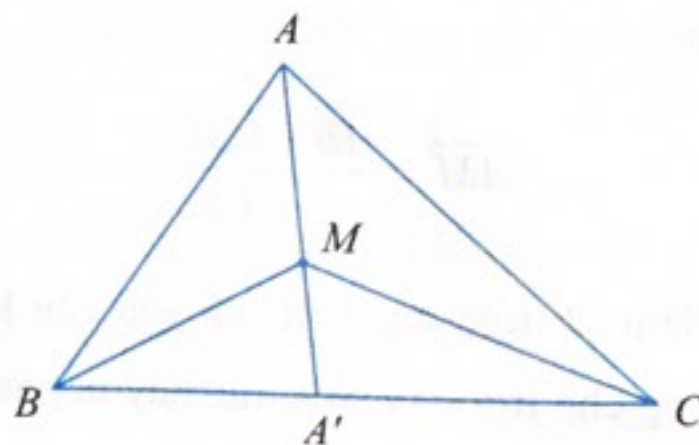
$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Vậy  $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$ .

**BÀI TOÁN 2.2.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $S_a, S_b, S_c$  theo thứ tự là diện tích các tam giác  $MBC, MCA, MAB$ . Chứng minh rằng:

$$S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Ta thấy tương tự như bài toán 2.1, yêu cầu chứng minh của bài toán 2.2 là số thực nhân với các vectơ  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ , nhưng thay vì các số thực là độ dài các cạnh của tam giác thì đó là diện tích các tam giác. Điều này làm ta liên tưởng đến tỷ số độ dài và tỷ số diện tích tam giác.

Thật vậy, trước tiên áp dụng bài toán 2 trong tam giác  $MBC$  ta được

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC} \quad (*).$$

Chú ý rằng:  $\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_b}{S_c}$

$$\Rightarrow \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \quad (1).$$

Tương tự:  $\frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c} \quad (2).$

Tiếp theo ta biểu diễn  $\overrightarrow{MA'}$  theo  $\overrightarrow{MA}$  liên quan đến các diện tích  $S_a, S_b, S_c$ .

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = -\frac{S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA} \quad (3).$$

Thay (1), (2), (3) vào đẳng thức (\*) ta được:

$$S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

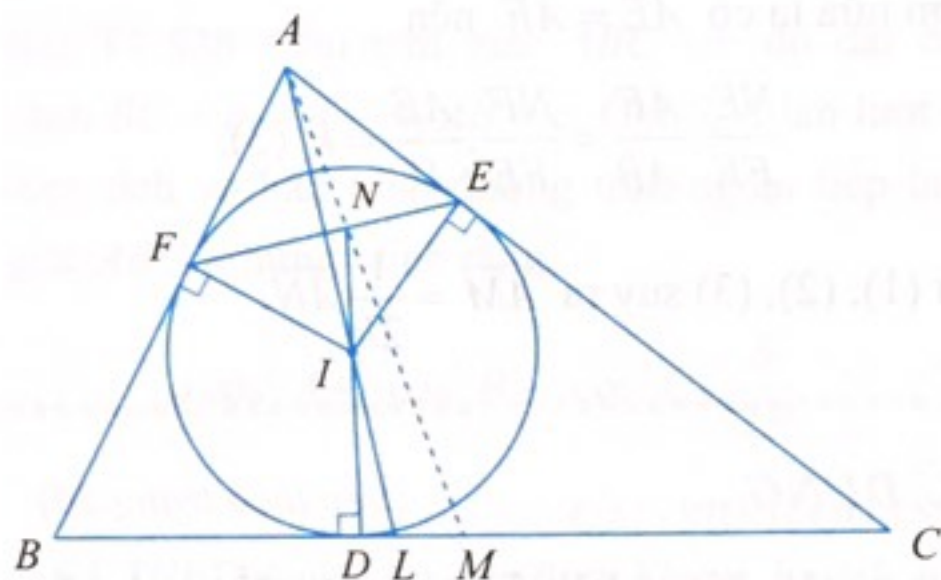
**Nhận xét.** Từ bài toán 2.2 ta có các nhận xét sau:

- Khi  $M$  trùng với trọng tâm  $G$  ta có đẳng thức quen thuộc  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .
- Khi  $M$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  ta có kết quả của bài toán 2.1 câu a là

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

**BÀI TOÁN 2.3.** Cho tam giác  $ABC$ , đường tròn nội tiếp  $(I)$  theo thứ tự tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ . Đường thẳng  $DI$  cắt  $EF$  tại  $N$ . Chứng minh đường thẳng  $AN$  đi qua trung điểm của  $BC$ .

**Lời giải.**



Một trong những thế mạnh của vectơ là giải bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng mà không quá phụ thuộc vào hình vẽ, chỉ cần chứng minh hai vectơ cùng phương.

Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  thì

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Áp dụng bài toán 2 trong tam giác  $AEF$  ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \frac{NE}{FE} \cdot \overrightarrow{AF} + \frac{NF}{FE} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= \frac{NE}{FE} \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{NF}{FE} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \quad (2). \end{aligned}$$

Gọi  $L$  là giao điểm của  $AI$  với  $BC$ .

Ta có:  $\widehat{FIN} = \widehat{FBD}$  (cùng bù với góc  $\widehat{FID}$ )

hay  $\widehat{FIN} = \widehat{ABL}$ .

Mặt khác  $\widehat{NFI} = \widehat{BAL}$  (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra  $\triangle FIN$  đồng dạng với  $\triangle ABL$ .

Tương tự ta có  $\triangle EIN$  đồng dạng với  $\triangle ACL$ .

Suy ra:

$$\frac{NF}{LA} = \frac{FI}{AB} \text{ và } \frac{NE}{LA} = \frac{EI}{AC},$$

ta được:

$$\frac{NF}{NE} = \frac{AC}{AB} \text{ hay } \frac{NE}{AB} = \frac{NF}{AC}$$

Hơn nữa ta có  $AE = AF$  nên

$$\frac{NE}{FE} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{NF}{FE} \cdot \frac{AE}{AC} = k \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\overline{AM} = \frac{1}{2k} \overline{AN}$ .

Vậy  $A, M, N$  thẳng hàng hay đường thẳng  $AN$  đi qua trung điểm của  $BC$ .

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[2] Tài liệu giáo khoa chuyên toán Hình học 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Trên đây là một vài suy nghĩ, tìm tòi của bản thân trong quá trình dạy học. Rất mong sự đóng góp của quý đồng nghiệp.

\*\*\*\*\*

## SỬ DỤNG ...

(tiếp theo trang 20)

Sau đây là một số bài tập tương tự để rèn luyện

**Bài 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{1+2ab} + \frac{b^2}{1+2bc} + \frac{c^2}{1+2ca} \geq \frac{a}{ab+b+1} + \frac{b}{bc+c+1} + \frac{c}{ca+a+1}.$$

**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4} + \frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4} + \frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4} \leq 1.$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$a) \quad xyz \leq \frac{1}{8};$$

$$b) \quad xy + yz + zx \geq \frac{3}{4}.$$

**Bài 5.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx + xyz = 4$ . Chứng minh rằng:

$$a) \quad \sqrt{\frac{x+2}{3}} + \sqrt{\frac{y+2}{3}} + \sqrt{\frac{z+2}{3}} \geq 3;$$

$$b) \quad \frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{2}}.$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c(2c+a+b)} + \frac{(b+c)^2}{a(2a+b+c)} + \frac{(c+a)^2}{b(2b+c+a)} \geq 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

**Bài 7.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xyz = x + y + z + 2$ . Chứng minh rằng:

$$a) \quad xyz(x-1)(y-1)(z-1) \leq 8;$$

$$b) \quad xy + yz + zx \geq 2(x + y + z);$$

$$c) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz}.$$

**Bài 8.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$



## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/538 (Lớp 6).** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  sao cho  $x^2 + y = y^{2023}$ .

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG  
(Pleiku, Gia Lai)

**Bài T2/538 (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC} = 75^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ .  $D$  là một điểm thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $AD = 2BD$ . Tính số đo góc  $\widehat{BCD}$ .

NGUYỄN VĂN BÀN  
(GV THCS xã Thanh Yên, Điện Biên)

**Bài T3/538.** Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa mãn: mỗi số  $\frac{n+3}{2}$ ;  $n-5$ ;  $2n+1$  là lập phương của một số nguyên.

TẠ KHÁNH HÀ  
(GV THPT chuyên Hà Nội- Amsterdam, Hà Nội)

**Bài T4/538.** Gọi  $I$  là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ;  $M$  là trung điểm của  $BC$ ;  $N$  là giao điểm của  $MI$  với  $AB$ . Biết rằng  $\widehat{BNM} = 75^\circ$ , hãy tính số đo góc  $\widehat{ABC}$ .

VŨ HỮU CHÍN  
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

**Bài T5/538.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 y^3 + 12xy^2 + 8 \leq 8y^3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2y^4}{xy^3}.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG  
(GV THPT Khoa học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/538.** Cho  $p$  là số nguyên tố,  $p > 3$  và  $n = \frac{2^{2p} - 1}{3}$ . Hãy tìm ước chung lớn nhất của hai số  $2^{2^n - 1} - 2$  và  $2^n - 1$ .

TRẦN VĂN HẠNH  
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

**Bài T7/538.** Cho tam giác  $ABC$  với độ dài các cạnh  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $S, R$  lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

$$a \cos^3 A + b \cos^3 B + c \cos^3 C \geq \frac{S}{2R}.$$

CAO MINH QUANG  
(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

**Bài T8/538.** Cho đường tròn  $(O; R)$  có hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau.  $E$  là điểm thay đổi trên cung nhỏ  $AC$ .  $BE$  cắt  $DC$  tại  $N$ ,  $DE$  cắt  $AB$  tại  $M$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{ND} \geq \frac{\sqrt{2}}{R}.$$

NGUYỄN QUANG NAM  
(GV THPT Quỳnh Hợp 2, Nghệ An)

**Bài T9/538.** Cho bốn số thực dương  $a, b, c, d$  và  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{\sqrt[n]{b^n + c^n + d^n}} + \frac{b^n}{\sqrt[n]{c^n + d^n + a^n}} + \frac{c^n}{\sqrt[n]{d^n + a^n + b^n}} + \frac{d^n}{\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}}{\sqrt[n]{3}}.$$

NGÔ VĂN THÁI  
(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/538.** Tìm các số nguyên dương  $n$  sao cho  $\frac{n^{2021n-2020} - 2021n + 2019}{2021n - 2020}$  là một số nguyên.

BÙI VĂN PHÚC  
(GV THPT chuyên Hà Giang)

**Bài T11/538.** Cho các số thực  $x, y$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sin^4 x \left( \sin^4 y + \cos^4 y + \frac{9}{8} \cos^2 x \sin^2 2y \right) + \cos^4 x.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

**Bài T12/538.** Cho tam giác  $ABC$  có  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp. Điểm  $P$  thay đổi trên  $(O)$ .  $Q$  là điểm đối xứng của  $P$  qua  $BC$ .  $E, F$  theo thứ tự là giao điểm của  $BQ, CQ$  và  $AC, AB$ . Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác  $AEF$  chạy trên một đường thẳng cố định.

DƯƠNG THỊ XUÂN AN

(GV THPT chuyên Bến Tre)

**Bài L1/538.** Hai điểm  $A, B$  nằm trên cùng một đường thẳng đi qua một nguồn âm và ở cùng phía so với nguồn âm. Biết mức cường độ âm tại  $A$  và tại trung điểm của  $AB$  lần lượt là 60 dB và 55 dB. Mức cường độ âm tại  $B$  là bao nhiêu?

VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

**Bài L2/538.** Một đoạn mạch gồm ba phần tử  $R, L, C$  mắc nối tiếp. Biết cường độ dòng điện qua đoạn mạch có biểu thức  $i = 2\cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})$  (A). Tính từ thời điểm dòng điện qua mạch triệt tiêu, sau khoảng thời gian  $\frac{1}{4}$  chu kì thì điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của đoạn mạch là bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/538 (For 6<sup>th</sup> grade).** Find all pairs of integers  $(x; y)$  so that  $x^2 + y = y^{2023}$ .

**Problem T2/538 (For 7<sup>th</sup> grade).** Given a triangle  $ABC$  with  $\widehat{BAC} = 75^\circ, \widehat{ABC} = 45^\circ$ . Let  $D$  be the point on the side  $AB$  so that  $AD = 2BD$ . Find the measurement of the angle  $\widehat{BCD}$ .

**Problem T3/538.** Find all positive integers  $n$  so that  $\frac{n+3}{2}; n-5; 2n+1$  are cube numbers.

**Problem T4/538.** Let  $I$  be the intersection of the interior angle bisectors of the right triangle  $ABC$  with the right angle at  $A$ . Let  $M$  be the midpoint of  $BC$ ; and  $N$  be the intersection between  $MI$  and  $AB$ . Given that  $\widehat{BNM} = 75^\circ$ , find the measurement of the angle  $\widehat{ABC}$ .

**Problem T5/538.** Suppose that  $x, y$  are positive numbers satisfying  $x^3 y^3 + 12xy^2 + 8 \leq 8y^3$ . Find the minimum value of the expression

$$Q = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2y^4}{xy^3}.$$

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/538.** Given a prime  $p, p > 3$  and let  $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$ . Find the greatest common divisor of  $2^{2^{n-1}}-2$  and  $2^n-1$ .

**Problem T7/538.** Given a triangle  $ABC$  with the lengths of the sides  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Let  $S, R$  respectively be the area and the radius of the circumcircle of  $ABC$ . Prove that

$$a \cos^3 A + b \cos^3 B + c \cos^3 C \geq \frac{S}{2R}.$$

(Xem tiếp trang 36)



**Bài T1/534.** Cho số tự nhiên

$$A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12,$$

trong đó  $x$  và  $y$  là các số tự nhiên. Tìm giá trị nhỏ nhất (nếu có) của tổng các chữ số của số  $A$ .

**Lời giải.** Xét tính chẵn lẻ của số

$$A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12.$$

Ta thấy  $4y + 12$  luôn là số chẵn với giá trị chẵn hay lẻ tùy ý của  $y$ . Tổng  $y^5 + 3y^4$  luôn là số chẵn với giá trị chẵn hay lẻ tùy ý của  $y$ , còn số 2021 lẻ nên  $2021^{xy}$  luôn là số lẻ với giá trị chẵn hay lẻ tùy ý của  $x$  và  $y$ .

Như vậy số  $A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12$  luôn là số lẻ với giá trị chẵn hay lẻ tùy ý của  $x$  và  $y$ . Số lẻ  $A > 12$  nên  $A$  có hai chữ số hoặc nhiều hơn hai chữ số, chữ số đầu trái ít nhất là 1 và chữ số đầu phải ít nhất là 1 nên tổng các chữ số của số lẻ  $A$  ít nhất là 2, điều này xảy ra khi số  $A$  có dạng 101, 1001, ..., (chú ý  $A > 11$ ), tức là khi tất cả các chữ số  $g$  nằm giữa chữ số 1 ở đầu trái và chữ số 1 ở đầu phải đều là  $g = 0$ . Thử thấy với  $x = 0$  và  $y = 2$  thì số  $A = 1 + 2^5 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2 + 12 = 101$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng các chữ số của số  $A$  là 2, điều này xảy ra khi  $x = 0$  và  $y = 2$ .

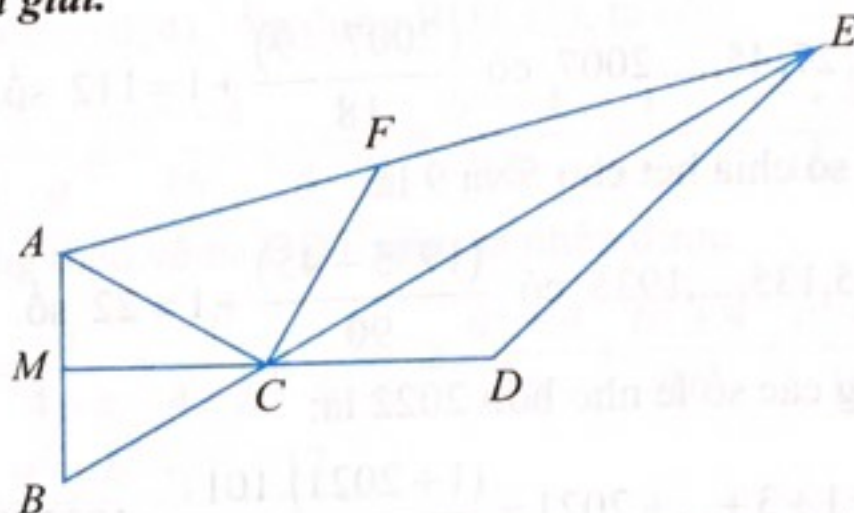
**Nhận xét.** Hoan nghênh hai bạn: Lê Tuấn Hiệp, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Hưng Yên; Đặng Ngọc Duy, 6A1, THCS Kế An, Kế Sách, Sóc Trăng đã giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

**Bài T2/534.** Cho tam giác đều  $ABC$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Trên tia đối của tia  $CM$  lấy điểm  $D$

sao cho  $CD = CA$  và trên tia  $BC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE$  là tia phân giác của góc  $\widehat{AED}$ . Tính số đo góc  $\widehat{AED}$ .

**Lời giải.**



Lấy điểm  $F$  đối xứng với  $D$  qua  $BE$ . Do  $EB$  là tia phân giác của góc  $\widehat{AED}$  cho nên  $F$  nằm trên  $AE$ . Do  $M$  là trung điểm  $AB$ , cho nên  $CM$  cũng là phân giác góc  $\widehat{ACB}$ .

Ta có góc  $\widehat{MCB} = \widehat{DCE} = 30^\circ$ . Vì  $CF$  đối xứng với  $CD$  qua  $CE$ , cho nên

$$\widehat{DCF} = 2\widehat{ECD} = 60^\circ \text{ và } \widehat{ECF} = \widehat{DCE} = 30^\circ.$$

Từ đó có  $\widehat{FCA} = 180^\circ - \widehat{ACM} - \widehat{DCF} = 90^\circ$ . Tam giác  $CFA$  cân tại  $C$  vì  $CD = AC$  theo giả thiết và  $CD = CF$  do  $CF$  đối xứng với  $CD$  qua  $BE$ .

Từ đó ta có  $\widehat{AFC} = 45^\circ$ . Suy ra:

$$\widehat{FEC} = \widehat{AFC} - \widehat{ECF} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Vì  $DE$  đối xứng với  $FE$  qua  $BE$ , cho nên

$$\widehat{FED} = 2\widehat{FEC} = 30^\circ.$$

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có đáp số đúng:

**Nghệ An:** Nguyễn Thái Triệu, Phạm Xuân Hoàng, Hoàng Thái Thượng, Nguyễn Văn Hưng, Nguyễn Văn Lâm, Nguyễn Quốc Dũng, Đinh A Na, 7A THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Vũ Đức Lộc, 7A THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; Sóc Trăng: Huỳnh Gia Bảo, 7A2, THCS Kế An, Kế Sách,

VŨ ĐÌNH HÒA

**Bài T3/534.** Tính tổng  $S$  các số lẻ nhỏ hơn 2022 không chia hết cho 5 và không chia hết cho 9.

**Lời giải.** Xét dãy các số lẻ nhỏ hơn 2022:

1, 3, 5, ..., 2021 có 1011 số.

Trong đó các số chia hết cho 5 là:

$$5, 15, 25, \dots, 2015 \text{ có } \frac{(2015-5)}{10} + 1 = 202 \text{ số.}$$

Các số chia hết cho 9 là:

$$9, 27, 45, \dots, 2007 \text{ có } \frac{(2007-9)}{18} + 1 = 112 \text{ số.}$$

Các số chia hết cho 5 và 9 là:

$$45, 135, \dots, 1935 \text{ có } \frac{(1935-45)}{90} + 1 = 22 \text{ số.}$$

Tổng các số lẻ nhỏ hơn 2022 là:

$$S_1 = 1 + 3 + \dots + 2021 = \frac{(1+2021) \cdot 1011}{2} = 1022121.$$

Tổng các số lẻ nhỏ hơn 2022 chia hết cho 5 là:

$$S_2 = 5 + 15 + \dots + 2015 = \frac{(5+2015) \cdot 202}{2} = 204020.$$

Tổng các số lẻ nhỏ hơn 2022 chia hết cho 9 là:

$$S_3 = 9 + 27 + \dots + 2007 = \frac{(9+2007) \cdot 112}{2} = 112896.$$

Tổng các số lẻ nhỏ hơn 2022 chia hết cho 5 và 9 là:

$$S_4 = 45 + 135 + \dots + 1935 = \frac{(45+1935) \cdot 22}{2} = 21780.$$

Tổng  $S$  các số lẻ nhỏ hơn 2022 không chia hết cho 5 và không chia hết cho 9 là:

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 - S_3 + S_4 \\ &= 1022121 - 204020 - 112896 + 21780 \\ &= 726985. \end{aligned}$$

(Mỗi số hạng trong  $S_4$  bị trừ hai lần trong  $-S_2 - S_3$  nên tổng phải tìm là:

$$S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4).$$

**Nhận xét.** Tất cả các bạn có lời giải đúng đều làm như trên. Về kiến thức chỉ cần lưu ý với dãy số cộng  $u_1, u_2, \dots, u_n$  công sai  $d$ , tổng các số hạng  $S$ , có các công thức mà ta đã sử dụng trong lời giải là:

$$S = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2}; n = \frac{(u_n - u_1)}{d} + 1.$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

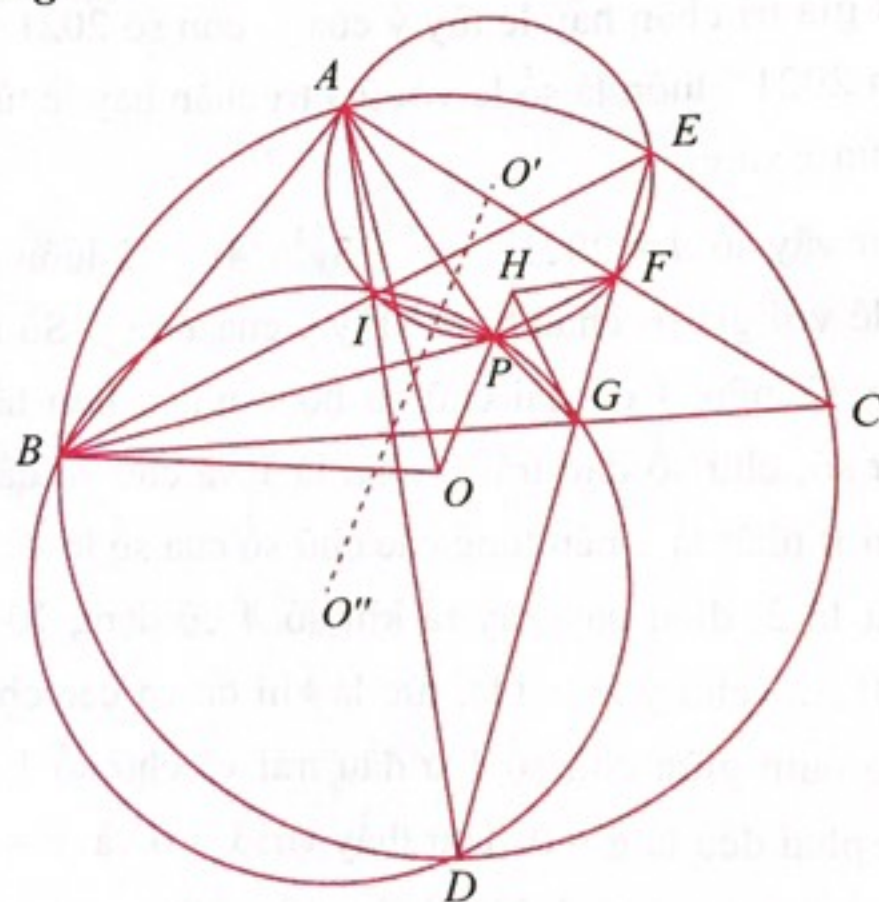
**Nghệ An:** Nguyễn Văn Lâm, Nguyễn Công Dũng, Nguyễn Quyết Thắng, Nguyễn Trọng Bảo, Nguyễn Văn Hưng, Nguyễn Quốc Dũng, Đinh A Na, Nguyễn

Quốc Hoàng Anh, Phạm Xuân Hoàng, 7A, Nguyễn Thái Hoàng Anh, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Đức Lộc, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Điện Biên:** Nguyễn Ngọc Diệp, 8C3, THCS Pom Lót, H. Điện Biên.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T4/534.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $D$  là điểm chính giữa cung  $BC$  không chứa  $A$ ,  $E$  là điểm chính giữa cung  $AC$  không chứa  $B$ .  $ED$  cắt  $AC$ ,  $BC$  lần lượt tại  $F$  và  $G$ . Đường thẳng qua  $F$  vuông góc với  $AD$  cắt đường thẳng qua  $G$  vuông góc với  $BE$  tại  $H$ . Gọi  $O', O''$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AFE$  và  $BGD$ . Chứng minh rằng  $HO \parallel O'O''$ .

**Lời giải.**



Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BE$ . Áp dụng tính chất góc có đỉnh nằm trong đường tròn ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BID} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BD} + \text{sđ } \widehat{AE}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BD} + \text{sđ } \widehat{CE}) = \widehat{BGD}. \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác  $BIGD$  nội tiếp. Tương tự, tứ giác  $AIFE$  nội tiếp. Do đó  $I$  là một giao điểm của hai đường tròn  $(O')$  và  $(O'')$ . Gọi  $P$  là giao điểm khác  $I$  của hai đường tròn  $(O')$  và  $(O'')$ .

Ta có:  $\widehat{GPF} = 360^\circ - \widehat{IPF} - \widehat{IPG} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$  (1).

Lại có:  $GH \perp BE, FH \perp AD$ , suy ra:

$$\widehat{GHF} = \widehat{BID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{GPF} = \widehat{GHF}$ , dẫn đến tứ giác  $GPHF$  nội tiếp. Tương tự, tứ giác  $APOB$  có:

$$\widehat{APB} = \widehat{API} + \widehat{BPI} = \widehat{AEB} + \widehat{ADB} = 2\widehat{ACB} = \widehat{AOB}.$$

Do đó tứ giác  $APOB$  nội tiếp. Từ đó:

$$\begin{aligned} \widehat{IPH} &= \widehat{IPF} - \widehat{FPH} = 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{HGF} \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - (90^\circ - \widehat{DEB}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra  $IP \perp PH$  (3). Tương tự:

$$\begin{aligned} \widehat{IPO} &= \widehat{APO} - \widehat{API} = 180^\circ - \widehat{ABO} - \widehat{AEI} \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} - \widehat{AEB} = 90^\circ \quad (4). \end{aligned}$$

Từ (3), (4) suy ra:

$$O, P, H \text{ thẳng hàng và } HO \perp IP \quad (5).$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau, ta có:

$$O'O'' \perp IP \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra  $O'O'' \parallel HO$ . Bài toán chứng minh xong.

**Nhận xét.** Chỉ có bạn Nguyễn Anh Thư, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách, Sóc Trăng cho lời giải đúng.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/534.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}.$$

**Lời giải.** Trước hết, ta chứng minh BĐT:

$$\text{Với } 0 < x < 4 \text{ ta có: } \frac{1}{4-x} \geq \frac{x^2+4}{16} \quad (1).$$

Thật vậy, do  $0 < x < 4$  nên  $4-x > 0$ , suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x} \geq \frac{x^2+4}{16} &\Leftrightarrow 16 \geq (4-x)(x^2+4) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 \geq 0 \quad (2). \end{aligned}$$

BĐT (2) luôn đúng, đẳng thức xảy ra khi  $x = 2$ .  
Vậy BĐT (1) được chứng minh.

Trở lại bài toán, do  $a, b, c$  là các số dương và  $a^2 + b^2 + c^2 = 12$  nên  $a, b, c \in (0; 2\sqrt{3})$ , suy ra  $a, b, c \in (0; 4)$ . Áp dụng BĐT (1), ta có:

$$\frac{1}{4-a} \geq \frac{a^2+4}{16}; \frac{1}{4-b} \geq \frac{b^2+4}{16}; \frac{1}{4-c} \geq \frac{c^2+4}{16}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \geq \frac{a^2+4}{16} + \frac{b^2+4}{16} + \frac{c^2+4}{16} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+12}{16} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 2$ .

Vậy  $\min P = \frac{3}{2}$  khi  $a = b = c = 2$ .

**Nhận xét.** Đa số các bạn gửi bài đều giải theo cách trên, một số bạn quên không dùng điều kiện của đề bài để chỉ ra  $4-a > 0$  mà lập luận luôn

$$\frac{1}{4-a} \geq \frac{x^2+4}{16} \Leftrightarrow 16 \geq (4-a)(a^2+4)$$

là không đúng. Có bạn sử dụng BĐT Cauchy để chỉ ra  $abc \leq 8$  và BĐT Schwarz:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

(với  $x, y, z$  là các số dương) để suy luận nhưng cho kết quả cũng không đúng:

$$P \geq \frac{9}{12-(a+b+c)} \geq \frac{1}{4-\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{2}.$$

Tuyên dương các bạn sau có lời tốt:

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes, Đông Anh, Đoàn Trí Anh, 7A, THCS Đan Phượng; **Nghệ An:** Lưu Trọng Phúc, 8B, THCS Đội Cung, TP. Vinh, Hoàng Gia Hưng, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Hải Triều, 8B, THCS Lý Nhật Quang; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Vĩnh Long:** Nguyễn Tấn Phúc, 9/1, THCS Nguyễn Trãi. **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách, H. Kế Sách.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T6/534. Giải phương trình**

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} = x^2-5x+3.$$

**Lời giải.** ĐK:  $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} &\leq \sqrt{2(8x^2-8x+2)} \\ &= 2|2x-1| = 2(1-2x). \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{1-2x} = \sqrt{1 \cdot (1-2x)} \leq \frac{1+1-2x}{2} = 1-x.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} \\ \leq 1-x + 2(1-2x) = -5x+3. \end{aligned}$$

Suy ra:  $x^2-5x+3 \leq -5x+3 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=0$ .

Thử lại ta thấy  $x=0$  là nghiệm của phương trình đã cho.

**Nhận xét.** Một cách giải ngắn gọn mà đa số các bạn tham gia giải phương trình vô tỷ này là dựa vào BĐT để đánh giá hai vế (tương tự như lời giải trên). Một số bạn giải bằng cách biến đổi qua biểu thức liên hợp cũng cho kết quả đúng, nhưng cách này dài hơn. Ba bạn cho kết quả sai là phương trình vô nghiệm. Các bạn có lời giải tốt là:

**Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; Trần Hữu Dương, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** Nguyễn Huy Hoàng, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông; **Điện Biên:** Nguyễn Ngọc Diệp, 8C3, THCS xã Pom Lót, H. Điện Biên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Trần Thị Thanh Thư, Văn Ngọc Bình, Nguyễn Kỳ Nam, 11T1, Võ Thị Bảo Ngọc, Võ Xuân Nhi, 10T2, Huỳnh An Phú, 10T1, Phạm Ngọc Long, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách, H. Kế Sách.

TRẦN HỮU NAM

**Bài T7/534. Cho  $a_k, b_k > 0, k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .**

**Chứng minh rằng**

$$\frac{1}{\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}}.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ .

Với  $n=2$  ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{b_1+b_2}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}} - \frac{1}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}} \\ &= \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{a_1+a_2+b_1+b_2} - \left( \frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2b_2}{a_2+b_2} \right) \\ &= \frac{F}{a_1+a_2+b_1+b_2}, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} F &= (a_1+a_2)(b_1+b_2) - (a_1+a_2+b_1+b_2) \left( \frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2b_2}{a_2+b_2} \right) \\ &= a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 - a_1b_1 - a_1b_1 \cdot \frac{a_2+b_2}{a_1+b_1} - a_2b_2 - a_2b_2 \cdot \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2} \\ &= a_2 \left( b_1 - b_2 \cdot \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2} \right) + a_1 \left( b_2 - b_1 \cdot \frac{a_2+b_2}{a_1+b_1} \right) \\ &= (a_2b_1 - a_1b_2) \left( \frac{a_2}{a_2+b_2} - \frac{a_1}{a_1+b_1} \right) = \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{(a_2+b_2)(a_1+b_1)} \geq 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Giả sử khẳng định đã đúng với  $n=k \geq 2$ , tức là với mọi các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  ta có:

$$\frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^k a_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k b_i}} \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}}.$$

Ta chứng minh khẳng định đúng với  $n=k+1$ . Thật vậy với mọi các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}, b_1, b_2, \dots, b_{k+1}$ , dùng bất đẳng thức với  $n=2$  và dùng giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k+1} a_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k+1} b_i}} &\geq \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^k a_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k b_i}} + \frac{1}{\frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{b_{k+1}}} \\ &\geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}} + \frac{1}{\frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{b_{k+1}}} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh.

**Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức thuộc kiến thức lớp 8 hay (kết quả chủ yếu là hằng đẳng thức (1)). Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS Archimedes, Đông Anh, Nguyễn Huy Hoàng, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng, 10T1, Phạm Ngọc Long, Nguyễn Quang Huy, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng:** Trần Công Minh, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Hoàng Yến Nhi, 11CT, THPT Gia Định, Bình Thạnh; **Bình Định:** Vũ Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng:** Trần Minh Hiếu Học, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

#### NGUYỄN MINH ĐỨC

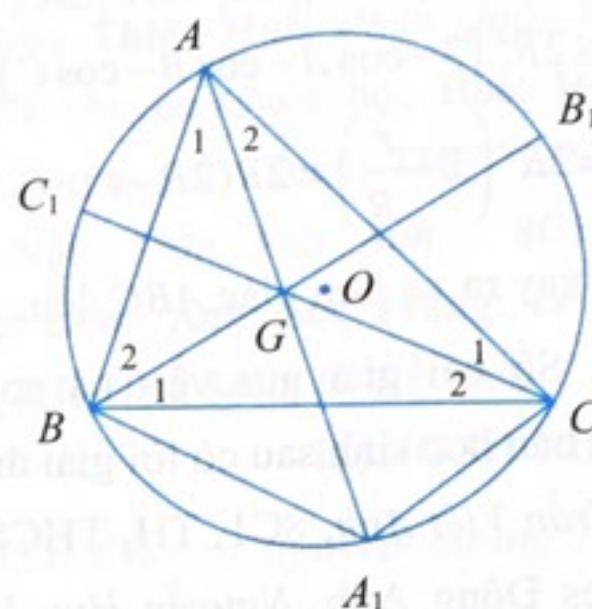
**Bài T8/534.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Các đường thẳng  $AG, BG, CG$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tương ứng tại  $A_1, B_1, C_1$ . Chứng minh

a)  $AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \cdot CB_1 \leq 4R^4 r^2$ ;

b)  $BA_1 \cdot CA_1 + CB_1 \cdot AB_1 + AC_1 \cdot BC_1 \leq 2R(2R - r)$ .

(Ở đây  $R, r$  thứ tự là kí hiệu các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác  $ABC$ ).

**Lời giải.**



a) Sử dụng định lý hàm số sin cho tam giác  $BAA_1$  và tam giác  $CAA_1$  ta có

$$\begin{aligned} BA_1 \cdot CA_1 &= 4R^2 \sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin \widehat{CAA_1} \\ &= 2R^2 \left[ \cos(\widehat{BAA_1} - \widehat{CAA_1}) - \cos(\widehat{BAA_1} + \widehat{CAA_1}) \right] \\ &= 2R^2 \left[ \cos(\widehat{BAA_1} - \widehat{CAA_1}) - \cos A \right] \leq 2R^2 (1 - \cos A). \end{aligned}$$

Tương tự có:

$$CB_1 \cdot AB_1 \leq 2R^2 (1 - \cos B); \quad AC_1 \cdot BC_1 \leq 2R^2 (1 - \cos C).$$

Từ đó:  $AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \cdot CB_1$

$$\leq 8R^6 (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)$$

$$= 64R^6 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ , áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác  $ABC$  ta thấy:

$$\begin{aligned} r &= \frac{bc \sin A}{a + b + c} = \frac{2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{Do đó } AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \cdot CB_1 \leq 4R^4 r^2.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow$  tam giác  $ABC$  đều.

b) Để ý đến hệ thức:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R},$$

từ phép chứng minh trên ta có:

$$\begin{aligned} & BA_1 \cdot CA_1 + CB_1 \cdot AB_1 + AC_1 \cdot BC_1 \\ & \leq 2R^2 (3 - \cos A - \cos B - \cos C) \\ & = 2R^2 \left( 2 - \frac{r}{R} \right) = 2R(2R - r). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow$  tam giác  $ABC$  đều.

**Nhận xét.** Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh, Nguyễn Huy Hoàng, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông;

**Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Ngọc Long, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế

### HỒ QUANG VINH

**Bài T9/534.** Cho  $a, b, c$  là số đo ba cạnh của một tam giác có nửa chu vi  $p$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{bc}}{p-a} + \frac{\sqrt{ca}}{p-b} + \frac{\sqrt{ab}}{p-c} \geq 6 \quad (1).$$

**Lời giải.** (Của Trần Việt Anh, Trần Minh Hoàng và đa số các bạn khác)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$0 < \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{c}{2};$$

$$0 < \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-b) + (p-c)}{2} = \frac{a}{2};$$

$$0 < \sqrt{(p-c)(p-a)} \leq \frac{(p-c) + (p-a)}{2} = \frac{b}{2}.$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) \quad (2).$$

Kết hợp (2) và bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{bc}}{p-a} + \frac{\sqrt{ca}}{p-b} + \frac{\sqrt{ab}}{p-c} & \geq 3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}\sqrt{ca}\sqrt{ab}}{(p-a)(p-b)(p-c)}} \\ & = 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}} \geq 3 \sqrt[3]{8} = 6. \end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow ABC$  là tam giác đều.

**Lời bình.** Bất đẳng thức Padoa:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$$

đã được dùng làm đề thi vào trường Đại học Luật thành phố Hồ Chí Minh, 1995. Cách phát biểu khác của bất đẳng thức Padoa cũng đã được dùng làm đề thi vào trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, 1996: “Chứng minh rằng nếu

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{abc}{8}$$

thì  $ABC$  là tam giác đều.”

Có thể tìm thấy nhiều bất đẳng thức thú vị trong tam giác trên mạng hoặc trong cuốn sách:

Tạ Duy Phương, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2017.

**Nhận xét.** Ngoài các bạn các lớp chuyên Toán, một số học sinh THCS và trường THPT không chuyên đã tham gia giải bài này. Các bạn dưới đây đã làm đúng:

**Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Phương Thảo, 11A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong; **Bình Định:** Vũ Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn;

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS & THPT Archimedes Đông Anh; Nguyễn Huy Hoàng, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi,

Nghi Xuân; **Hưng Yên:** Doãn Hà Anh, Trần Hữu Dương, Nguyễn Gia Khánh, Nguyễn Văn Khiêm, 10 Toán 1, Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên;

**Lâm Đồng:** Trần Công Minh, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; **Nghệ An:** Lê Tiến Hợp, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Lưu Trọng Phúc, 8B, THCS Đội Cung, TP. Vinh, Nguyễn Hải Triều, 8B, THCS Lý Nhật Quang, huyện Đô Lương;

**Quảng Trị:** Hoàng Đình Bảo, Nguyễn Thị Thúy Hằng, 10A1, THPT Hướng Hóa, huyện Hướng Hóa; **Sóc Trăng:** Dương Vĩnh Khang, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Lê Hồ Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách, huyện Kế Sách; **Thừa Thiên Huế:** Phan Thị Minh Châu, Lê Ngọc Cương, Lê Thị Thanh Tâm, Nguyễn Thị Hương Thủy, 11 Toán 2,

Nguyễn Quang Huy, Phạm Ngọc Long, 12 Toán 1, Đoàn Văn Hoàng Lâm, Huỳnh An Phú, Trần Thành Tài, Phan Quốc Thắng, 10 Toán 1, Hoàng Thị Phương Nga, Võ Thị Bảo Ngọc, Huỳnh Công Tâm, Nguyễn Đăng Anh Tuấn, Đặng Quỳnh Bảo Uyên, 10 Toán 2, Trần Thị Thanh Thư, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

### TẠ DUY PHƯỢNG

**Bài T10/534.** Tìm tất cả các số nguyên không âm  $a, b, c$  sao cho  $a^2 + 1, b^2 + 2$  là các số nguyên tố,  $c$  là số không chia hết cho 5, và thỏa mãn

$$(a^2 + 1)(b^2 + 2) = c^2 + 9.$$

**Lời giải.** (Của bạn Nguyễn Văn Khiêm, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

• Nếu  $b = 0$ , khi đó  $(a^2 + 1)2 = c^2 + 9$  (1).

Vì  $c$  không chia hết cho 5 nên  $c^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ . Suy ra:

$$c^2 + 9 \equiv 0 \pmod{5} \text{ hoặc } c^2 + 9 \equiv 3 \pmod{5} \quad (2).$$

Nếu  $a$  không chia hết cho 5 thì  $a^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ . Suy ra:

$$(a^2 + 1)2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ hoặc } (a^2 + 1)2 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Nếu  $a$  chia hết cho 5 thì  $(a^2 + 1)2 \equiv 2 \pmod{5}$ .

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(a^2 + 1)2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow (a^2 + 1) \equiv 0 \pmod{5}.$$

Do  $a^2 + 1$  là số nguyên tố nên  $a^2 + 1 = 5$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow c = 1. \text{ Vậy } (a, b, c) = (2, 0, 1).$$

• Nếu  $b > 0$ . Khi đó  $b^2 + 2$  là số nguyên tố dạng  $4k + 3$ . Ta có  $b^2 + 2 \mid c^2 + 3^2$ .

Áp dụng bổ đề quen biết: “Nếu  $p$  là số nguyên tố dạng  $4k + 3$ ,  $x$  và  $y$  là hai số nguyên dương sao cho  $p \mid x^2 + y^2$  thì  $p \mid x$  và  $p \mid y$ ”.

Suy ra  $b^2 + 2 \mid 3$ . Mà  $b^2 + 2$  là số nguyên tố nên  $b^2 + 2 = 3$ . Lại có  $3 = b^2 + 2 \mid c$  nên

$$(a^2 + 1)3 = c^2 + 9 \text{ chia hết cho 9.}$$

Suy ra  $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . Do  $a^2 + 1$  là số nguyên tố nên  $a^2 + 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 2$ . Điều này không xảy ra. **Kết luận:**  $(a, b, c) = (2, 0, 1)$ .

**Nhận xét.** Ngoài bạn Khiêm, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** Phan Quốc Thắng, 10 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** Trần Hữu Dương, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS Acchimedes Đông Anh; **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách, H. Kế Sách.

### ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T11/534.** Cho số nguyên dương chẵn  $n$  và  $p > n^n$  là số nguyên tố. Chứng minh đa thức

$$Q(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) + p$$

là đa thức bất khả quy (theo nghĩa không là tích của hai đa thức hệ số nguyên khác hằng).

**Lời giải.** Giả sử  $Q(x) = f(x).g(x)$  với  $f, g$  là các đa thức với hệ số nguyên bậc  $\geq 1$ .

Nhận xét rằng do  $n$  chẵn nên khi  $x > n$  hoặc  $x < 0$  thì  $Q(x) > 0$ . Khi  $x \in [0, n]$ , theo giả thiết thì  $p > n^n$  nên

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) + p \geq -n^n + p > 0.$$

Suy ra  $Q(x) = f(x)g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Không mất tính tổng quát, coi  $f(x)$  và  $g(x)$  là hai đa thức dương trên  $\mathbb{R}$ .

Từ giả thiết, ta có:

$$f(k)g(k) = p, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Suy ra:  $f(k), g(k) \in \{1, p\}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

và  $f(k) + g(k) = p + 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Vậy đa thức  $P(x) := f(x) + g(x) - p - 1$  có  $0 < \deg P \leq n - 1$  và có ít nhất  $n$  nghiệm, mâu thuẫn. **Kết luận:** Đa thức

$$Q(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) + p$$

là đa thức bất khả quy.

**Nhận xét.** Đây là dạng toán về đa thức nguyên của các tác giả Titu A., Navid S., Alessandro V. Đa số các bạn đều giải theo phương pháp đã trình bày ở trên. Một số bạn sử dụng định lý Viète cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

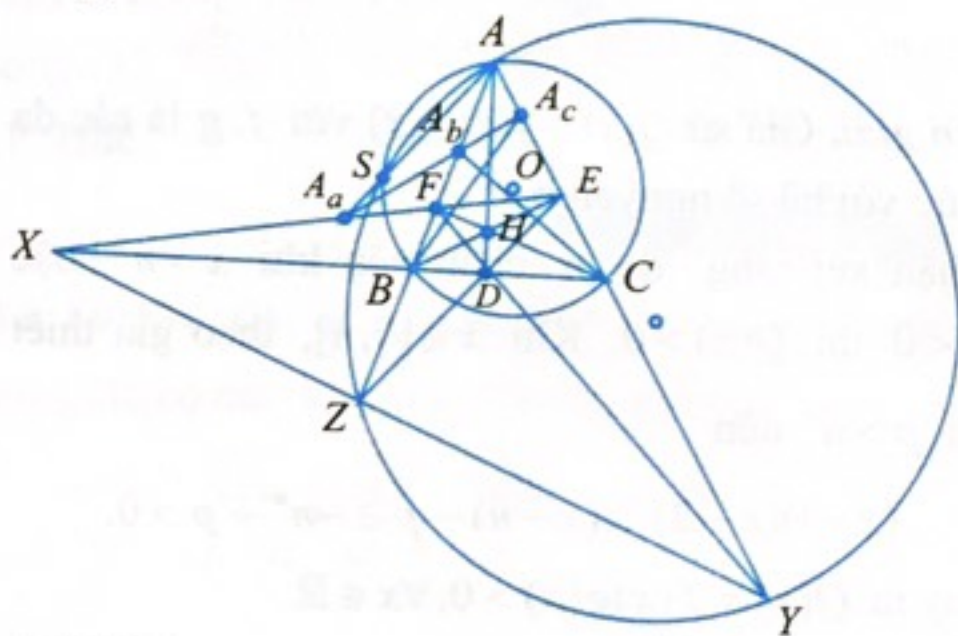
**Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS

Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Lâm Đồng:** Trần Công Minh, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc; **Bình Định:** Vũ Tiến Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/534.** Cho tam giác không vuông  $ABC$ ,  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác.  $AD, BE, CF$  là các đường cao.  $A_b, A_c$  theo thứ tự là điểm đối xứng của  $B, C$  qua  $F, E$ .  $A_a$  là giao điểm của  $EF$  và  $A_bA_c$ . Các điểm  $B_b, C_c$  được xác định tương tự. Chứng minh rằng  $AA_a, BB_b, CC_c$  đồng quy tại một điểm thuộc  $(O)$ .

**Lời giải.**



Gọi  $X, Y, Z$  theo thứ tự là giao điểm của  $BC, CA, AB$  và  $EF, FD, DE$ .

Vì  $AD, BE, CF$  đồng quy (tại  $H$ ) nên, theo định lý Desargues,  $X, Y, Z$  thẳng hàng.

Do đó, theo kết quả về điểm Miquel, các đường tròn  $(O), (AYZ), (BZX), (CXY)$  cùng đi qua một điểm, kí hiệu là  $S$ .

Vì  $B, A_b$  đối xứng với nhau qua  $CF$  và  $BC \perp HA; BA \perp HC$  nên:

$$(A_bA, A_bC) \equiv (A_bB, A_bC) \equiv (BC, BA_b) \equiv (BC, BA) \equiv (HA, HC) \pmod{\pi}.$$

Do đó  $A_b$  thuộc đường tròn  $(HAC)$  (1).

Tương tự  $A_c$  thuộc đường tròn  $(HAB)$  (2).

Dễ thấy  $\overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AC} \cdot \overline{AE} = \overline{AH} \cdot \overline{AD} = k$ . Qua phép nghịch đảo  $N_A^k$ , các điểm  $H, B, C$  theo thứ tự biến thành các điểm  $D, F, E$ ; các đường tròn

$(HAC), (HAB)$  theo thứ tự biến các đường thẳng  $DE, DF$  (3). Từ (1) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned} N_A^k(\{A_b, A\}) &= N_A^k(AB \cap (HAC)) \\ &= N_A^k(AB) \cap N_A^k((HAC)) \\ &= AB \cap DE = \{Z, \infty\}. \end{aligned}$$

Do đó  $N_A^k(A_b) = Z$ . Từ (2) và (3), tương tự như trên,  $N_A^k(A_c) = Y$ . Vậy:

$$\begin{aligned} N_A^k(\{A_a, \infty\}) &= N_A^k(EF \cap A_bA_c) \\ &= N_A^k(EF) \cap N_A^k(A_bA_c) \\ &= (ACB) \cap (AZY) = \{S, A\}. \end{aligned}$$

Do đó  $N_A^k(A_a) = S$ . Điều đó có nghĩa là  $S, A, A_a$  thẳng hàng.

Tương tự  $S, B, B_b$  thẳng hàng và  $S, C, C_c$  thẳng hàng. Vậy  $AA_a, BB_b, CC_c$  đồng quy tại một điểm thuộc  $(O)$ , điểm  $S$ .

**Nhận xét.** Bài toán này tương đối khó, chỉ có bốn bạn tham gia giải: Bạn **Trần Minh Hoàng**, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**, có lời giải tương tự như lời giải trên. Ba bạn còn lại có lời giải dài và phụ thuộc hình vẽ. Tuy nhiên, vẫn nêu tên cả ba bạn: **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12T, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** Mai Trung Nguyên, 12T, THPT chuyên Bảo Lộc; **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách, H. Kế Sách.

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/354.** Ba con lắc đơn cùng chiều dài, cùng khối lượng và cùng được treo trong điện trường đều có phương thẳng đứng. Con lắc thứ nhất và thứ hai tích điện lần lượt là  $q_1$  và  $q_2$ , con lắc thứ 3 không tích điện. Biết  $|qE| < mg$ , Chu kỳ dao động nhỏ của ba con lắc lần lượt là  $T_1, T_2, T_3$  sao cho  $T_1 = \frac{T_3}{3}, T_2 = \frac{5T_3}{3}$ . Tính tỉ số  $\frac{q_1}{q_2}$ .

**Lời giải.** Theo đề bài ta nhận thấy:

$T_1 < T_3$  nên gia tốc tăng,  $T_2 > T_3$  nên gia tốc giảm.

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{|q_1|E}{m}}} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \frac{|q_2|E}{m}}} \\ T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{T_3}{T_1} = \sqrt{1 + \frac{|q_1|E}{mg}} \Rightarrow \frac{|q_1|E}{mg} = 8 \\ 0,6 = \frac{T_3}{T_2} = \sqrt{1 - \frac{|q_2|E}{mg}} \Rightarrow \frac{|q_2|E}{mg} = 0,64 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = 12,5 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -12,5.$$

**Nhận xét.** Chúc mừng bạn duy nhất có câu trả lời đúng cho đề ra kì này: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

#### ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

**Bài L2/354.** Cho đoạn mạch điện xoay chiều AMNB. Đoạn mạch AM chỉ chứa điện trở thuần  $R = 120\sqrt{3} \Omega$ , đoạn mạch MN chỉ chứa cuộn cảm có độ tự cảm  $L$  và điện trở hoạt động  $r = 30\sqrt{3} \Omega$ , đoạn mạch NB chỉ chứa tụ điện có điện dung  $C$ . Hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch có biểu thức:  $u_{AB} = U_0 \cos 100\pi t$  (V), hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm A, N là  $U_{AN} = 300$  V, và giữa hai điểm M, B là  $U_{MB} = 60\sqrt{3}$  (V). Hiệu điện thế tức thời  $u_{AN}$  lệch pha so với  $u_{MB}$  là  $\frac{\pi}{2}$ . Xác định  $U_0$ , độ tự cảm  $L$ , tụ điện  $C$ . Viết biểu thức dòng điện trong mạch.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{cases} Z_{AN} = \frac{U_{AN}}{I} \\ Z_{MB} = \frac{U_{MB}}{I} \\ \tan \varphi_{AN} \cdot \tan \varphi_{MB} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(R+r)^2 + Z_L^2} = \frac{U_{AN}}{I} \\ \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U_{MB}}{I} \\ \frac{Z_L}{R+r} \cdot \frac{Z_L - Z_C}{r} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(R+r)^2 + Z_L^2}}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U_{AN}}{U_{MB}} \\ \frac{Z_L}{R+r} \cdot \frac{Z_L - Z_C}{r} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(150\sqrt{3})^2 + Z_L^2}}{\sqrt{(30\sqrt{3})^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{300}{60\sqrt{3}} \\ \frac{Z_L}{R+r} \cdot \frac{Z_L - Z_C}{r} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_L = 150 \Omega \\ Z_C = 240 \Omega \end{cases} \Rightarrow I = \frac{U_{AN}}{Z_{AN}} = 1 \text{ A};$$

$$L = \frac{1,5}{\pi} \text{ (H)}; C = \frac{10^{-3}}{24\pi} \text{ (F)};$$

$$U_0 = I Z_{AB} \sqrt{2} = \sqrt{2} \sqrt{(150\sqrt{3})^2 + (90)^2} = 60\sqrt{42} \text{ (V)}.$$

Độ lệch pha  $\varphi_{AB}$  giữa  $u_{AB}$  so với dòng điện được tính theo công thức:

$$\begin{aligned} \tan \varphi_{AB} &= \frac{Z_L - Z_C}{R + r} = \frac{150 - 240}{120\sqrt{3} + 30\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \varphi_{AB} \approx -1,06\pi. \end{aligned}$$

Mặt khác:  $\varphi_{AB} = \varphi_u - \varphi_i$

$$\Rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi_{AB} = 0 - (-0,106\pi) = 0,106\pi.$$

Suy ra biểu thức của dòng điện là:

$$i = \sqrt{2} \sin(100\pi t + 0,106\pi) \text{ (A)}.$$

**Nhận xét.** Một số bạn tham gia giải bài này nhưng kết quả bị sai.

NGUYỄN XUÂN QUANG

## PROBLEMS ...

(tiếp theo trang 26)

**Problem T8/538.** Given a circle  $(O; R)$  with two perpendicular diameters  $AB$  and  $CD$ . Let  $E$  be a moving point on the minor arc  $AC$ .  $BE$  intersects  $DC$  at  $N$ ,  $DE$  intersects  $AB$  at  $M$ . Show that

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{ND} \geq \frac{\sqrt{2}}{R}.$$

**Problem T9/538.** Given positive numbers  $a, b, c, d$  and a positive integer  $n$ . Show that

$$\frac{a^n}{\sqrt[n]{b^n + c^n + d^n}} + \frac{b^n}{\sqrt[n]{c^n + d^n + a^n}} + \frac{c^n}{\sqrt[n]{d^n + a^n + b^n}} + \frac{d^n}{\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}}{\sqrt[n]{3}}.$$

## TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/538.** Find all positive integers  $n$  so that

$$\frac{n^{2021n-2020} - 2021n + 2019}{2021n - 2020}$$

is an integer.

**Problem T11/538.** Suppose that  $x, y$  are real numbers. Find the minimum value of the expression

$$P = \sin^4 x \left( \sin^4 y + \cos^4 y + \frac{9}{8} \cos^2 x \sin^2 2y \right) + \cos^4 x.$$

**Problem T12/538.** Given a triangle  $ABC$  and its circumcircle  $(O)$ . A point  $P$  is moving on  $(O)$ . Let  $Q$  be the reflection point of  $P$  in  $BC$ . Let  $E, F$  respectively be the intersections between  $BQ, CQ$  and  $AC, AB$ . Show that the center of the Euler circle of  $AEF$  belongs to a fixed line.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

## NHIỀU CÁCH GIẢI ... (Tiếp theo trang 45)

Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương và  $2 < \alpha < 3, k > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^\alpha}{x^2 + kxy + y^2} + \frac{y^\alpha}{y^2 + kyz + z^2} + \frac{z^\alpha}{z^2 + kzx + x^2} \geq \frac{x^{\alpha-2} + y^{\alpha-2} + z^{\alpha-2}}{k+2}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

**Nhận xét.** Ngoài 7 cách giải trên của bạn Ngô Văn Thái, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cũng nhận được nhiều cách giải tương tự như bài viết từ các bạn: Đào Văn Nam, GV TH, THCS & THPT Everrest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội; Phạm Minh

Tuấn, khu 10 xã Tứ Hiệp, huyện Hạ Hòa, Phú Thọ; Cao Thị Khánh Chi, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An; Trần Thị Thanh Thư, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; Lê Ngô Nhật Huy, 111A, khu phố 1, đường Hùng Vương, phường 7, TP. Bến Tre, Bến Tre. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 60 Về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2022

**BÀI TOÁN 60.** Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{5} - 1.$$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)



# CHỨNG MINH CAUCHY CHO BÀI TOÁN BASEL

HOÀNG NGUYỄN HUÂN

(GV Trường Đại học Mỏ - Địa chất Hà Nội)

Chúng ta sẽ xem xét bài toán tính tổng các số nghịch đảo cấp bốn của các số tự nhiên bằng phương pháp Cauchy. Phương pháp này được Cauchy áp dụng đầu tiên là để giải trường hợp riêng của nó: Bài toán Basel. Sau khi nghiên cứu kỹ, nhận thấy có thể mở rộng phương pháp Cauchy để giải bài toán tính tổng chuỗi các số nghịch đảo của số tự nhiên bậc bốn mà không cần sử dụng tới khai triển chuỗi thành tích vô hạn. Trong bài báo có xuất hiện một số công thức lượng giác được sử dụng để tính tổng các chuỗi đã cho.

**Từ khóa:** Bài toán Basel, bài toán Basel tổng quát, số Bernoulli, tổng chuỗi vô hạn, Euler, Cauchy, tổng nghịch đảo bậc bốn của các số tự nhiên.

## 1. Bài toán Basel

Nhà toán học Italy – Pietro Mengoli (1625-1686) đi vào lịch sử toán học như là người đầu tiên vào năm 1644 đã thử tính, nhưng không thành công, tổng của chuỗi các nghịch đảo bình phương các số tự nhiên:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (1).$$

Sau đó, tham gia vào việc giải bài toán trên có thêm hai nhà toán học là hai anh em: Jakob Bernoulli (1654 - 1705) và Johann Bernoulli (1667 - 1748) nhưng cũng không thành công trong việc tính tổng. Tới năm 1704 đã có nhiều nhà toán học châu Âu chú ý tới vấn đề. Và từ đây bài toán tính tổng chuỗi (1) mang tên Bài

toán Basel (Basel Problem), lấy theo tên của thành phố Basel ở Thụy Sĩ, thành phố quê hương của hai anh em nhà Bernoulli.

Bài toán Basel được giải vào năm 1734 – 1735 tại thành phố Saint-Peterburg bởi học trò của của Johann Bernoulli, người cũng sinh ra tại Basel. Đó là nhà toán học xuất chúng người Thụy Sĩ Leonard Euler (1707 - 1786), phần lớn cuộc đời, ông sống tại Nga. Euler tìm ra kết quả của tổng của chuỗi (1) bằng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (2).$$

Sự xuất sắc của phương pháp mà Euler áp dụng nằm ở khai triển chuỗi lũy thừa

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

thành tích vô hạn

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \dots \end{aligned}$$

Phá ngoặc của chuỗi trên, ta thu được chuỗi mới với hệ số của số hạng chứa  $x^2$  là

$$-\left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right) \frac{1}{\pi^2}.$$

Vì khai triển thành chuỗi có tính duy nhất, nên hệ số của số hạng chứa  $x^2$  phải bằng  $-\frac{1}{3!}$ .

Từ đây ta thu được đẳng thức

$$-\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots\right) \frac{1}{\pi^2} = -\frac{1}{3!}.$$

Từ đây ta thu được đẳng thức (2).

Phương pháp của *Euler* là không chặt chẽ ngay cả ở trình độ toán học thời bấy giờ và đòi hỏi cần phải có chứng minh. Tuy nhiên, phương pháp đã mang đến cho *Euler* niềm vinh quang lớn – Nhà toán học xuất sắc nhất châu Âu, dựa vào phương pháp này, *Euler* tìm thêm được tổng mũ bốn các nghịch đảo của các số tự nhiên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_k \quad (3).$$

Trong đó:  $k \geq 1$  là số tự nhiên;  $B_k$  là các số Bernoulli (số Bernoulli  $B_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) là những hệ số thỏa mãn khai triển chuỗi:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

$$\left( B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, \dots \right),$$

$$\left( B_1 = \frac{1}{2}, B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0 \right).$$

Đây là những số mà *Jakov Bernoulli* đưa ra để tính tổng lũy thừa của các số tự nhiên.

Bài toán tính tổng của chuỗi điều hòa tổng quát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots \quad (4)$$

với  $m$  là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2, được gọi là bài toán tổng quát của bài toán Basel. *Euler* đã giải được một phần của bài toán này: *Tìm tổng của chuỗi (4) đối với  $m$  là số tự nhiên chẵn* (xem công thức (3)).

Đối với  $m$  lẻ, thì bài toán vẫn chưa có lời giải.

## 2. Chứng minh của Cauchy cho bài toán Basel

Năm 1821 *Cauchy* đưa ra hai lời giải cho bài toán Cauchy trong cuốn sách nổi tiếng (nhưng hiện nay ít nhà toán học biết đến) của mình “*Khóa học giải tích đại số*” [7, 8]. Lời giải thứ hai về bản chất cũng không khác mấy dưới góc độ chứng minh chặt chẽ so với của *Euler*. Chính vì thế, chúng ta không dự định bàn luận về nó. Thế nhưng lời giải thứ hai lại hoàn toàn chuẩn xác. *Cauchy* xuất phát từ đẳng thức lượng giác:

$$\frac{(m+2)(m-2)}{3!}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}, \quad (5)$$

Trong đó  $m$  là số tự nhiên chẵn. Nhân cả vế phải và vế trái của đẳng thức (5) với  $\frac{\pi^2}{m^2}$ ,

*Cauchy* thu được:

$$\frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{4}{m^2} \right) = \frac{\left( \frac{\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left( \frac{2\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} +$$

$$\dots + \frac{1}{\left( \frac{m}{2} - 1 \right)^2} \frac{\left( \frac{(m/2-1)\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{(m/2-1)\pi}{m}} \quad (6).$$

Vì  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} \left( 1 - \frac{4}{m^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$ , từ đây ta suy ra:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left( \frac{\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left( \frac{2\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{\left( \frac{m}{2} - 1 \right)^2} \frac{\left( \frac{(m/2-1)\pi}{m} \right)^2}{\sin^2 \frac{(m/2-1)\pi}{m}} \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \quad (7).$$

Cauchy hiểu rằng mặc dù các số hạng đầu tiên của (7) có giới hạn tiến tới nghịch đảo bình phương:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \frac{\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} = \frac{1}{k^2}, k=1,2,\dots,n,$$

theo giới hạn của hàm siêu việt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ , nhưng vẫn cần chứng minh rằng

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} \frac{\left(\frac{(m/2-1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{(m/2-1)\pi}{m}} \right] = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (8).$$

Để chứng minh công thức (8), Cauchy tách tổng ở vế trái thành hai phần:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}} \quad (9)$$

và

$$\frac{1}{(n+1)^2} \frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{(n+1)\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} \frac{\left(\frac{(m/2-1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{(m/2-1)\pi}{m}} \quad (10).$$

Để đánh giá tổng (9), Cauchy chọn số tự nhiên  $n$  từ điều kiện  $n < \frac{m}{2}$  (11).

Và sử dụng bất đẳng thức

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (12).$$

Nâng các vế lên lũy thừa bậc hai:

$$1 < \frac{x^2}{\sin^2 x} < \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Lấy các giá trị  $x = x_k = \frac{k\pi}{m}$ ,  $k=1,2,\dots,n$  và lưu ý rằng  $\cos^2 \frac{k\pi}{m} \geq \cos^2 \frac{n\pi}{m}$ , Cauchy thu được đánh giá cho tổng (9) như sau:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ & < \frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}} \\ & < \frac{1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}{\cos^2 \frac{n\pi}{m}} \quad (13). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra: với giá trị  $n$  được chọn

$$1 < \frac{\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}}{1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}} < \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}.$$

Vì thế ta tìm được số  $M\left(1, \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}\right)$  từ

khoảng  $\left(1, \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}\right)$  bằng

$$\begin{aligned} & M\left(1, \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}\right) \\ & = \frac{\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}}{1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Tức là

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{n^2} \frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) M\left(1, \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}\right) \quad (14).$$

Để đánh giá tổng (10), Cauchy giữ lại điều kiện (11) và biến đổi dạng của bất đẳng thức (12):

$$0 < 1 < \frac{x}{\sin x} = \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} < \frac{1}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} < \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Từ đây đánh giá cho tổng (10) ta thu được:

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{(n+1)\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} \frac{\left(\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}} < \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{4}{(n+2)^2} + \dots + \frac{4}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} < \frac{4\left(\frac{m}{2}-n-1\right)}{(n+1)^2} < \frac{2m}{n^2}.$$

Khi đó, ta tìm được số  $M(0,1)$  từ khoảng  $(0,1)$  sao cho:

$$\frac{1}{(n+1)^2} \frac{\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{(n+1)\pi}{m}} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} \frac{\left(\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}\right)^2}{\sin^2 \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}} = \frac{2m}{n^2} M(0,1).$$

Từ đây, ta có thể viết lại đẳng thức (6) dưới dạng

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{3m^2} + \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) M\left(1, \cos^{-2} \frac{n\pi}{m}\right) + \frac{2m}{n^2} M(0,1) \quad (15).$$

Và nếu tính tới bất đẳng thức

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \text{ thì}$$

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{2\pi^2}{3m^2} + 2 \tan^2 \frac{n\pi}{m} + \frac{2m}{n^2} \quad (16).$$

Đặt  $n = k^2$ ,  $m = k^4$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Điều kiện

$\frac{m}{2} > n$  được thỏa mãn với  $k > 2$ . Khi đó

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \right| \leq \frac{2\pi^2}{3k^8} + 2 \tan^2 \frac{\pi}{k} + \frac{2}{k^2} \quad (17).$$

Vì  $\frac{2\pi^2}{3k^8} + 2 \tan^2 \frac{\pi}{k} + \frac{2}{k^2} \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ , nên

với số thực  $\varepsilon > 0$  tùy ý luôn tồn tại số  $K_\varepsilon$  sao cho với số  $k > K_\varepsilon$  bất đẳng thức sau được thỏa

$$\text{mãn } \left| \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(k^3)^2}\right) \right| < \varepsilon.$$

Vì tổng  $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  đơn điệu tăng, nên với

số  $n > k^3 > K_\varepsilon$  bất kỳ, bất đẳng thức sau được thỏa mãn:

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \right| < \left| \frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(k^3)^2}\right) \right| < \varepsilon.$$

Từ đây suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \quad (18).$$

**Chú ý.** Trong công trình [7] của Cauchy không có chứng minh giới hạn cuối như trên. Nó được tìm ra bởi I. V. Tereshchenko. Đối với Cauchy, từ đẳng thức (16) suy ra giới hạn (18) là hiển nhiên nếu ngoài điều kiện  $\frac{m}{2} > n$ , ta chọn thêm  $m = [n^\alpha] + 1, 1 < \alpha < 2$ .

Bây giờ ta sẽ chứng minh đẳng thức lượng giác (5). Giả sử  $m = 2k$ , với  $k$  là số tự nhiên. Khi đó bằng cách sử dụng đẳng thức quen thuộc:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

ta có thể viết lại đẳng thức (5) như sau:

$$\begin{aligned} & \frac{2(k+1)(k-1)}{3} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2k}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2k}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}} \quad (19), \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} & \frac{(2k-1)(k-1)}{3} \\ &= \cot^2 \frac{\pi}{2k} + \cot^2 \frac{2\pi}{2k} + \dots + \cot^2 \frac{(k-1)\pi}{2k} \quad (20). \end{aligned}$$

Các số  $\cot^2 \frac{\pi}{2k}, \cot^2 \frac{2\pi}{2k}, \dots, \cot^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}$  sẽ được coi như là nghiệm của phương trình bậc  $k-1$ :

$$P_{k-1}(x) = \left(x - \cot^2 \frac{\pi}{2k}\right) \left(x - \cot^2 \frac{2\pi}{2k}\right) \times \dots \times \left(x - \cot^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}\right).$$

Để tìm đa thức này, ta sử dụng thêm một công thức lượng giác nữa [7]:

$$\begin{aligned} \sin 2kx &= C_{2k}^1 \cos^{2k-1} x \sin x - C_{2k}^3 \cos^{2k-3} x \sin^3 x + \\ & \dots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-1} \cos x \sin^{2k-1} x \end{aligned}$$

hay là

$$\frac{\sin 2kx}{\sin^{2k} x \cot x} = C_{2k}^1 (\cot^2 x)^{k-1} - C_{2k}^3 (\cot^2 x)^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-1}.$$

Nếu  $x = x_s = \frac{s\pi}{2k}, s = 1, 2, 3, \dots, k-1$  thì

$$\frac{\sin 2kx_s}{\sin^{2k} x_s \cot x_s} = 0.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} & C_{2k}^1 (\cot^2 x_s)^{k-1} - C_{2k}^3 (\cot^2 x_s)^{k-2} + \\ & \dots + (-1)^{k-2} C_{2k}^{2k-3} (\cot^2 x_s) + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-1} = 0. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra  $\cot^2 x_s$  là nghiệm của đa thức

$$\begin{aligned} P_{k-1}(x) &= x^{k-1} - \frac{C_{2k}^3}{C_{2k}^1} x^{k-2} + \dots \\ &+ (-1)^{k-2} \frac{C_{2k}^{2k-3}}{C_{2k}^1} x + (-1)^{k-1} \frac{C_{2k}^{2k-1}}{C_{2k}^1} = 0 \quad (21). \end{aligned}$$

Khi đó, theo hệ thức Viète tổng các nghiệm bằng

$$\begin{aligned} & \cot^2 \frac{\pi}{2k} + \cot^2 \frac{2\pi}{2k} + \dots + \cot^2 \frac{(k-1)\pi}{2k} \\ &= \frac{C_{2k}^3}{C_{2k}^1} = \frac{(2k-1)(k-1)}{3}. \end{aligned}$$

Đẳng thức (20) được chứng minh.

### 3. Phương pháp Cauchy và mở rộng để tính tổng các nghịch đảo mũ bốn các số tự nhiên

Tiếp theo, tác giả xin trình bày cách mở rộng phương pháp Cauchy để tính tổng các nghịch đảo mũ bốn các số tự nhiên. Trước tiên ta phải

chú ý tới đẳng thức  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ , lấy bình

phương đẳng thức (19) và cùng nhân hai vế của

nó với  $\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4$ :

$$\frac{4(k^2-1)^2}{9} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\left(\frac{\pi}{2k}\right)^4}{\sin^4 \frac{n\pi}{2k}} + 2 \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{p=n+1}^{k-1} \left(1 + \cot^2 \frac{n\pi}{2k}\right) \left(1 + \cot^2 \frac{p\pi}{2k}\right)$$

$$\text{hay là } \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4 \sin^4 \frac{n\pi}{2k}} = \frac{4(k^2-1)^2}{9} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 (k^2 - 3k + 2) - 2 \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{p=n+1}^{k-1} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 \left(\cot^2 \frac{n\pi}{2k} + \cot^2 \frac{p\pi}{2k}\right) - 2 \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{p=n+1}^{k-1} \left(\frac{\pi}{2k}\right)^4 \left(\cot^2 \frac{n\pi}{2k} \cot^2 \frac{p\pi}{2k}\right).$$

Theo định lý Viète, nghiệm của đa thức (21) thỏa mãn đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{k-2} \sum_{p=n+1}^{k-1} \left(\cot^2 \frac{n\pi}{2k} \cot^2 \frac{p\pi}{2k}\right) = \frac{C_{2k}^5}{C_{2k}^1} = \frac{(k-1)(k-2)(2k-1)(2k-3)}{30}.$$

Từ đẳng thức (19) có:

$$0 < \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{p=n+1}^{k-1} \left(\cot^2 \frac{n\pi}{2k} + \cot^2 \frac{p\pi}{2k}\right) < \frac{2k(2k-1)(k-1)}{3}.$$

Khi đó, ta thu được:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4 \sin^4 \frac{n\pi}{2k}} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{2 \cdot 30} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Mặt khác cũng theo như những lập luận khi tính giới hạn (8), ta thu được:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\left(\frac{n\pi}{2k}\right)^4}{n^4 \sin^4 \frac{n\pi}{2k}} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$$

**Kết luận.** Phương pháp Cauchy giải bài toán Basel được đưa ra vào năm 1821 và có mở rộng để tìm tổng nghịch đảo mũ bốn. Hi vọng rằng, trong tương lai phương pháp Cauchy có thể được thay đổi và đơn giản hóa nhằm mục đích tìm được tổng nghịch đảo với bậc bất kỳ.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Stillwell J., Mathematics and Its History. 3<sup>rd</sup> ed. N. Y.: Springer Science + Business Media, LLC, 2010. 660p.
2. Euler L., "De summis serierum reciprocarum," Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 7 (1734/35) 1740, pp. 123-134.
3. Eyler L., Differentsialnoe ischislenie (Differential calculus). Moscow, Leningrad, 1949. 580p.
4. Eyler L., Vvedenie v analiz beskonечnykh (Introduction to the analysis of the infinite), Vol. 1, Moscow, 1961, 315p.
5. Bernoulli J., Ars Conjectandi, Basel: Thurneysen Brothers, 1713.
6. Kudryavtsev V. A., Summirovaniye stepeney chisel naturalnogo ryada i chisla Bernulli (The summation of powers of natural numbers and Bernoulli numbers), Moscow, Leningrad, 1936, 73p.
7. Cauchy A. L., Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique I.re partie: Analyse algebrique. Paris: Impr. Royale Debure freres, 1821. 576 p.
8. Bradley R. E., Sandifer C. E., (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences) Cauchys Cours danalyse. An Annotated Translation. Springer, 2009, 411 p.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 79

**PROBLEM.** Find the general term of the following sequence

1, 7, 17, 31, 49, ...

**Solution.** The gaps are 6, 10, 14, 18, ... which is arithmetic progression with the common difference 4.

We can rewrite the gap sequence in the form 6, 6 + 4, 6 + 4 + 4, 6 + 4 + 4 + 4, ...

Hence we get the pattern

$$49 = a_5 = 1 + 6 * (5 - 1) + 4 * [1 + 2 + (5 - 2)].$$

And the general term

$$a_n = 1 + 6 * (n - 1) + 4 * [1 + 2 + ... + (n - 2)].$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 6(n - 1) + 4 \frac{(n - 2)(n - 2 + 1)}{2} \\ &= 1 + 6(n - 1) + 2(n - 2)(n - 1) \\ &= 1 + (n - 1)[6 + 2(n - 2)] \\ &= 1 + 2(n - 1)(n + 1) = 2n^2 - 1. \end{aligned}$$

### TỪ VỰNG

general term : số hạng tổng quát  
arithmetic progression : cấp số cộng  
gap : khoảng cách,  
khoảng trống (giữa 2 số hạng)  
common difference : công sai

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

## BÀI DỊCH SỐ 77

**BÀI TOÁN.** Trên một dây chuyền sản xuất thiết bị điện tử, xác suất ngẫu nhiên của một thiết bị không đạt tiêu chuẩn là 0,045. Kiểm tra ngẫu nhiên một mẫu chọn gồm 200 thiết bị. Tìm xác suất để có hơn 190 thiết bị đạt tiêu chuẩn.

**Lời giải.** Gọi  $X$  là số thiết bị đạt tiêu chuẩn trong mẫu chọn. Ta cần tìm  $P(X > 190)$ .

Ta có :

$$P(X > 190) = P(X = 191) + P(X = 192) + \dots + P(X = 200)$$

$$\begin{aligned} &= C_{200}^{191} \times (0,045)^9 \times (0,955)^{191} \\ &\quad + C_{200}^{192} \times (0,045)^8 \times (0,955)^{192} + \dots \end{aligned}$$

$$+ C_{200}^{199} \times (0,045) \times (0,955)^{199} + (0,955)^{200}.$$

**Lưu ý:** Trên thực tế, việc tính trực tiếp một tổng có nhiều số hạng như trên có thể không thuận tiện. Chúng ta có một phương pháp gọi là phân bố chuẩn xấp xỉ để ước tính các tổng như vậy.

**Nhận xét.** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: Cao Thị Khánh Chi, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Văn Lâm, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên; Trần Thị Thanh Thư, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế.

HỒ HẢI (Hà Nội)



**BÀI TOÁN 58.** Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương.  
Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{x + y + z}{3}.$$

**Lời giải.** Đặt

$$P = \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2}.$$

**Cách 1.** Đặt

$$N = \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^2z + yz^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^2x + zx^2}{z^2 + zx + x^2}.$$

Ta có:

$$P + N = \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + y^2z + yz^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + z^2x + zx^2}{z^2 + zx + x^2} = x + y + z \quad (1).$$

Sử dụng BĐT Cauchy để đánh giá từng mẫu thức của  $N$  ta được:

$$N \leq \frac{xy(x+y)}{3xy} + \frac{yz(y+z)}{3yz} + \frac{zx(z+x)}{3zx} = \frac{2}{3}(y+z+x) \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra:  $P \geq \frac{1}{3}(x+y+z)$ .

Đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ . Bài toán được chứng minh.

**Cách 2.** Đặt

$$Q = \frac{xy^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{yz^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{zx^2}{z^2 + zx + x^2}.$$

Ta có:

$$P + Q = \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + yz^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + zx^2}{z^2 + zx + x^2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy đánh giá từng mẫu thức của  $P + Q$  ta được:

$$P + Q \geq \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + y^2} + \frac{y(y^2 + z^2)}{y^2 + \left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) + z^2} + \frac{z(z^2 + x^2)}{z^2 + \left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) + x^2}$$

$$\text{hay } P + Q \geq \frac{2}{3}(x + y + z) \quad (3).$$

Lại sử dụng BĐT Cauchy cho hai số để đánh giá từng mẫu thức của  $Q$  thì:

$$Q \leq \frac{xy^2}{3xy} + \frac{yz^2}{3yz} + \frac{zx^2}{3zx} = \frac{1}{3}(y + z + x) \quad (4).$$

Từ (3), (4) suy ra  $P \geq \frac{1}{3}(x + y + z)$ .

**Cách 3.** Sử dụng BĐT Cauchy đánh giá mẫu thức của biểu thức sau

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x^3}{x^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + y^2} = \frac{2x^3}{3(x^2 + y^2)}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{2y^3}{3(y^2 + z^2)};$$

$$\frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{2z^3}{3(z^2 + x^2)}.$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \right).$$

Sử dụng kỹ thuật BĐT Cauchy ngược dấu thì:

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = x - \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2xy} = x - \frac{y}{2}.$$

Xây dựng 2 BĐT tương tự rồi cộng vế với vế của ba bất đẳng thức đó lại sẽ được

$$P \geq \frac{2}{3} \left( x - \frac{y}{2} + y - \frac{z}{2} + z - \frac{x}{2} \right) = \frac{x + y + z}{3}$$

**Cách 4.** Dễ thấy:

$$P = \frac{x^4}{x^3 + x^2y + xy^2} + \frac{y^4}{y^3 + y^2z + yz^2} + \frac{z^4}{z^3 + z^2x + zx^2}.$$

Theo BĐT Schwarz thì

$$P \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + y^2z + yz^2 + z^3 + z^2x + zx^2}.$$

Mặt khác sử dụng BĐT quen thuộc

$$(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$$

suy ra:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &\geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 = \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + y^2z + yz^2 + z^3 + z^2x + zx^2)(x + y + z). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{1}{3}(x + y + z).$$

**Cách 5.** Sử dụng kỹ thuật BĐT Cauchy ngược dấu ta được:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} &= x - \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + xy + y^2} \geq x - \frac{xy(x + y)}{3xy} \\ &= \frac{2x - y}{3}. \end{aligned}$$

Xây dựng 2 BĐT tương tự rồi cộng vế với vế của ba BĐT đó ta được:

$$P \geq \frac{2x - y + 2y - z + 2z - x}{3} = \frac{x + y + z}{3}.$$

**Cách 6.** Ta thấy:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} - \frac{x}{3} &= \frac{3x^3 - x^3 - x^2y - xy^2}{3(x^2 + xy + y^2)} \\ &= \frac{x - y}{3} + \frac{(x + y)(x - y)^2}{3(x^2 + xy + y^2)} \\ &\geq \frac{x - y}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2x - y}{3}.$$

Xây dựng 2 BĐT tương tự rồi cộng vế với vế của ba bất đẳng thức đó thì

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2x - y + 2y - z + 2z - x}{3} \\ &= \frac{x + y + z}{3}. \end{aligned}$$

**Cách 7.** Theo BĐT Cauchy thì

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(x + y) &\geq 2xy(x + y) \Leftrightarrow 3x^3 \\ &\geq x^3 - y^3 + x^3 + x^2y + xy^2 \end{aligned}$$

$$\text{hay } 3x^3 \geq (x - y)(x^2 + xy + y^2) + x(x^2 + xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2x - y}{3}.$$

Xây dựng 2 BĐT tương tự rồi cộng vế với vế của ba BĐT đó sẽ được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2x - y + 2y - z + 2z - x}{3} \\ &= \frac{x + y + z}{3}. \end{aligned}$$

**Nhận xét.**

1) Bài toán 58 là một bài toán đẹp nó có mặt trong nhiều tài liệu toán sơ cấp, với cách giải chủ yếu sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

2) Tác giả chỉ mới đưa ra được có bốn cách giải 1, 2, 3, 4. Cách 5, 6, 7 là của một số bạn trên mạng, hy vọng các bạn đọc khác cũng sẽ đưa ra thêm những cách giải mới cho bài toán này.

3) Cuối cùng đề nghị bạn đọc tham gia giải bài toán tổng quát đúng sau:

Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương và  $\alpha \geq 3, k > 0$ .

Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{x^2 + kxy + y^2} + \frac{y^\alpha}{y^2 + kyz + z^2} + \frac{z^\alpha}{z^2 + kzx + x^2} \\ \geq \frac{x^{\alpha-2} + y^{\alpha-2} + z^{\alpha-2}}{k + 2}. \end{aligned}$$

4) Hiện tại tác giả vẫn chưa giải được bài toán sau đây, tác giả rất vui khi nhận được lời giải từ bạn đọc.

(Xem tiếp trang 36)



**BÀI TOÁN 67 (IMO, 1994).** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(m; n)$  sao cho  $\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$  là số nguyên.

**Lời giải. Cách 1.** Nhận xét rằng:  $mn - 1$  và  $m^3$  là nguyên tố cùng nhau. Ta có:

$$mn - 1 \mid n^3 + 1 \Rightarrow mn - 1 \mid m^3(n^3 + 1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1 \\ \Rightarrow mn - 1 \mid m^3 + 1.$$

• Nếu  $m = n$  ta có:  $\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1}$

$$= \frac{(n+1)(n^2 - n + 1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2 - n + 1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}$$

là số nguyên khi và chỉ khi  $n = 2$ .

• Xét  $m > n$ . Nếu  $n = 1$  thì  $\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = \frac{2}{m-1} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow m-1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\} \Rightarrow m = 2, m = 3.$$

Xét  $n \geq 2$ . Ta có:  $n^3 + 1 \equiv 1 \pmod{n}$  và  $mn - 1 \equiv -1 \pmod{n}$ . Do đó:  $\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = kn - 1$  với  $k$

nguyên dương nào đó. Ta có:

$$kn - 1 < \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} = n + \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow (k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Suy ra:  $k = 1 \Rightarrow n^3 + 1 = (n-1)(mn-1)$

$$\Rightarrow m = \frac{n^2 + 1}{n-1} = n + 1 + \frac{2}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 2, n = 3.$$

Trong mỗi trường hợp ta đều có  $m = 5$ . Vậy ta có 9 cặp số  $(m; n)$  cần tìm là:  $(2; 2), (2; 1), (3; 1), (5; 2), (5; 3), (1; 2), (1; 3), (2; 5), (3; 5)$ .

(4 cặp số sau có được là do tính đối xứng).

**Cách 2** (Theo bạn *Trần Việt Anh*, 8C1, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh, **Hà Nội**)

Đặt  $\frac{n^3 + 1}{mn - 1} = k \Rightarrow k(mn - 1) = n^3 + 1$

$$\Rightarrow k + 1 \mid n \Rightarrow k = nx - 1 \quad (k, x \in \mathbb{Z}^+). \text{ Khi đó:}$$

$$n^3 + 1 = (nx - 1)(mn - 1) \Rightarrow n^2 - mxn + m + x = 0.$$

Ta thấy PT bậc hai  $t^2 - mxt + m + x = 0$  có một nghiệm  $n$  nên nó có nghiệm thứ hai là  $p$ . Theo định lý Viète thì:  $\begin{cases} n + p = mx \\ np = m + x \end{cases} \quad (1).$  Suy ra  $p \in \mathbb{Z}^+$ .

Dễ thấy  $m = n = p = x = 2$  thỏa mãn (1).

Nếu 4 số  $m, n, p, x$  lớn hơn 1 thì  $np > n + p$  và  $mx > m + x \Rightarrow n + p = mx > m + x = np$ : vô lý.

Vậy trong 4 số  $m, n, p, x$  có ít nhất một số bằng 1.

TH1: một trong hai số  $m, x$  bằng 1, giả sử  $x = 1$ .

Từ (1) suy ra:  $np = n + p + 1 \Rightarrow (n-1)(p-1) = 2$ .

Ta tìm được  $(n; p)$  bằng  $(2; 3); (3; 2) \Rightarrow m = 5$ .

Do  $m$  và  $x$  bình đẳng nên ta cũng có  $m = 1, x = 5$ .

TH2: Một trong hai số  $n, p$  bằng 1, giả sử  $n = 1$ .

Từ (1) suy ra:  $mx = m + x + 1 \Rightarrow (m-1)(x-1) = 2$ .

Ta tìm được  $(m; x)$  bằng  $(2; 3); (3; 2) \Rightarrow p = 5$ .

Do  $n$  và  $p$  bình đẳng nên ta cũng có  $p = 1, n = 5$ .

Vậy ta tìm được 9 cặp số như trên.

**Nhận xét.** Ngoài bạn *Trần Việt Anh*, bạn *Trần Thị Thanh Thu*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** cũng giải đúng bài này.

**NHƯ HOÀNG**

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2022.

### BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI TOÁN 69.** Giả sử  $x$  là nghiệm của phương trình  $(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$ .

Chứng minh rằng khi đó  $x$  cũng là nghiệm phương trình  $(\sqrt{2} + 1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9}$ .

**KHÁNH HỮU (Hà Nội)**



## GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 532, tháng 10 năm 2021)

### Phân tích sai lầm.

Lời giải của học sinh xét thiếu trường hợp  $x = 3$  có thể thoả mãn bất phương trình. Ở đây học sinh đã hiểu khi xét 2 trường hợp  $x - 3 > 0$  hoặc  $x - 3 \leq 0$  đã đủ các trường hợp có thể xảy ra. Do đó lời giải làm mất nghiệm  $x = 3$ .

$$\text{Lưu ý: } f(x)g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

**Lời giải đúng.** Lời giải cho trường hợp 2 phải sửa lại như sau:

• Nếu  $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$  ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} \leq x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{-5}{6}.$$

Kết hợp với  $x \geq 3$  ta có nghiệm của bất phương trình là  $x \geq 3$ . Khi đó tập nghiệm bất phương trình là

$$S = \left(-\infty; \frac{-5}{6}\right] \cup [3; +\infty).$$

**Nhận xét.** Các bạn tham gia bài này đều phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Tòa soạn hoan nghênh các bạn sau: **Bình Định:** Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn; **Thừa Thiên Huế:** Huỳnh An Phú, 10 Toán 1, Nguyễn Đình Khai Nguyên, Nguyễn Thị Nhật Thảo, Hoàng Thị Phương Nga, Nguyễn Đăng Anh Tuấn, 10 Toán 2, Trần Duy Anh, 10 Anh 1, Nguyễn Kỳ Nam, Văn Ngọc Bình, Trần Thị Thanh Thư, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

KIHIVI

## BIỂU THỨC CÓ BAO NHIÊU SỐ HẠNG?



Trong một đề kiểm tra có câu hỏi trắc nghiệm sau: Sau khi sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton và rút gọn

$$P = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} - 400x^{14}$$

thì biểu thức  $P$  sẽ có bao nhiêu số hạng?

A. 28      B. 29      C. 30      D. 31

Một học sinh đã chọn đáp án **C** và giải thích như sau: Đặt  $Q = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20}$ ;  $R = \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ , ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k}, \end{aligned}$$

khai triển có 21 số hạng.

$$\begin{aligned} R &= \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{m=0}^{10} C_{10}^m (x^3)^{10-m} \left(-\frac{1}{x}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{10} (-1)^m C_{10}^m x^{30-4m}, \end{aligned}$$

khai triển có 11 số hạng.

Trong khai triển  $Q$  số hạng chứa  $x^{14}$  ứng với  $k$  thoả mãn  $20 - 3k = 14 \Leftrightarrow k = 2$  và có hệ số là  $C_{20}^2 = 190$ . Trong khai triển  $R$  số hạng chứa  $x^{14}$  ứng với  $m$  thoả mãn  $30 - 4m = 14 \Leftrightarrow m = 4$  và có hệ số là  $C_{10}^4 = 210$ . Trong khai triển  $Q + R$  số hạng chứa  $x^{14}$  có hệ số là  $190 + 210 = 400$ . Do đó khai triển và rút gọn  $P$  hệ số của số hạng chứa  $x^{14}$  là  $C_{20}^2 + C_{10}^4 - 400 = 190 + 210 - 400 = 0 \Rightarrow P$  không có số hạng chứa  $x^{14}$ .

Do đó khai triển  $P$  có  $21 + 11 - 2 = 30$  số hạng.

**Theo bạn kết quả khai triển và rút gọn biểu thức  $P$  có 30 số hạng có đúng không?**

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)



**BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

**CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VĨNH THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD

PHAN XUÂN THÀNH

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

**TRONG SỐ NÀY**

**1 Dành cho Trung học Cơ sở**

*For Lower Secondary School*

Nguyễn Anh Tuấn – Khai thác bài toán hình học trong đề thi TST Việt Nam 2015.

**6 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Giang, năm học 2021 - 2022.**

**9 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng, năm học 2021 - 2022.**

**10 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia**

Lê Thế Thông – Một số dạng toán về số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp.

**17 Phương pháp giải toán**

Trịnh Xuân Lưu – Sử dụng phương pháp thế biến để chứng minh bất đẳng thức.

**21 Diễn đàn dạy học toán**

Vũ Nguyên Duy – Tổng quát một bài toán vector và ứng dụng.

**25 Đề ra kỳ này**

T1/538, ..., T12/538, L1/538, L2/538.

*Problem in This Issue*

**27 Giải bài kì trước**

T1/534, ..., T12/534, L1/534, L2/534.

*Solutions to Previous Problems*

**37 Lịch sử toán học**

Hoàng Ngự Huân – Chứng minh Cauchy cho bài toán Basel.

**43 Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 79.**

Bài dịch số 77.

**44 Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 58. Đề bài toán 60.**

**46 Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 67. Đề bài toán 69.**

**47 Sai lầm ở đâu?**

**Biên tập:** LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

**Trị sự, phát hành:** HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

**Mỹ thuật:** QUỐC HIỆP, THANH LONG

**Thiết kế, chế bản:** MINH HÒA

# MỘT SỐ HÌNH ẢNH VỀ HOẠT ĐỘNG CỦA KHOA TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HUẾ



Đội tuyển Olympic Toán học sinh viên năm 2016



Bộ môn Phương pháp giảng dạy



Giao lưu giữa GS. Ngô Bảo Châu và Khoa Toán



Bộ môn Giải tích



Chương trình Văn nghệ



Bộ môn Đại số <https://tieulun.hopto.org>



# KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HUẾ 65 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



PGS. TS. **Trần Kiêm Minh**  
Trưởng Khoa Toán



Tập thể khoa Toán – Trường ĐHSPh Huế

Khoa Toán – Trường Đại học Sư phạm Huế được thành lập năm 1957, với tiền thân là Ban Toán trực thuộc phân khoa Sư phạm của Viện Đại học Huế. Trải qua 65 năm xây dựng và phát triển, Khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm Huế hiện nay đã trở thành một trong những địa chỉ đào tạo giáo viên toán trung học phổ thông có uy tín và chất lượng hàng đầu của đất nước.

Khoa Toán hiện có tổng cộng 26 cán bộ, trong đó có 1 Giáo sư, 4 Phó Giáo sư, 17 Tiến sĩ và khoảng 500 sinh viên. Phần lớn giảng viên trẻ được đào tạo Tiến sĩ và sau Tiến sĩ ở những nước tiên tiến như Hoa Kỳ, Pháp, Đức, Nhật, Úc. Khoa đã đào tạo, bồi dưỡng hàng nghìn giáo viên toán trung học cho các tỉnh Miền Trung, Tây Nguyên, đáp ứng sự nghiệp phát triển giáo dục chung của đất nước.

Bên cạnh chương trình đào tạo Cử nhân sư phạm toán truyền thống, Khoa còn đào tạo Cử nhân Sư phạm toán giảng dạy bằng tiếng Anh. Khoa hiện có 5 chuyên ngành đào tạo Thạc sĩ trong nước, 1 chuyên ngành đào tạo Thạc sĩ Toán giải tích liên kết với Đại học Chiao Tung (Đài Loan), 2 chuyên ngành đào tạo Tiến sĩ (Đại số - Lý thuyết số và Phương

pháp dạy học toán). Trong năm năm vừa qua, Khoa đã đào tạo được khoảng 250 Thạc sĩ và 10 nghiên cứu sinh Tiến sĩ.

Đến nay, giảng viên của Khoa đã chủ trì 15 đề tài nghiên cứu cơ bản Nafosted và nhiều đề tài cấp Bộ, cấp cơ sở. Công bố quốc tế của giảng viên ngày càng tăng về số lượng và chất lượng. Năm học 2020 – 2021, có 15 bài báo của giảng viên được công bố trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục *Web of science* và *Scopus*, trong đó có 9 bài trên các tạp chí được xếp hạng Q1. Khoa Toán thường xuyên đón tiếp các giáo sư nổi tiếng trong và ngoài nước đến trao đổi khoa học với giảng viên và sinh viên như Giáo sư Ngô Bảo Châu, Giáo sư Ngô Việt Trung, Giáo sư Martin Kreuzer, ... Đội tuyển Olympic toán của Khoa thường xuyên đạt giải cao tại các kỳ thi *Olympic toán học sinh viên toàn quốc*. Hằng năm, Khoa Toán trao các suất học bổng khuyến khích học tập cho sinh viên xuất sắc và sinh viên có hoàn cảnh khó khăn với thành tích học tập tốt. Tổng giá trị học bổng hằng năm khoảng 90 triệu đồng. Đây là quỹ học bổng do cựu sinh viên và giảng viên thành lập, đã được duy trì liên tục hơn 10 năm qua.

Với những thành tích đó, Khoa Toán – Trường Đại học Sư phạm Huế đã hai lần nhận được *Bằng khen* của Thủ tướng chính phủ (năm 2005 và 2016) và nhiều *Cờ thi đua* cấp Bộ, cấp cơ sở, danh hiệu *Tập thể Lao động xuất sắc*. Trong định hướng phát triển sắp tới, Khoa Toán sẽ không ngừng nâng cao chất lượng đào tạo, mở thêm chương trình đào tạo Cử nhân Toán ứng dụng - chuyên ngành Thống kê và Phân tích dữ liệu, nhằm đáp ứng nhu cầu và sự phát triển nguồn nhân lực của khu vực Miền Trung – Tây Nguyên và cả nước.

(Xem tiếp bìa 3)