



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



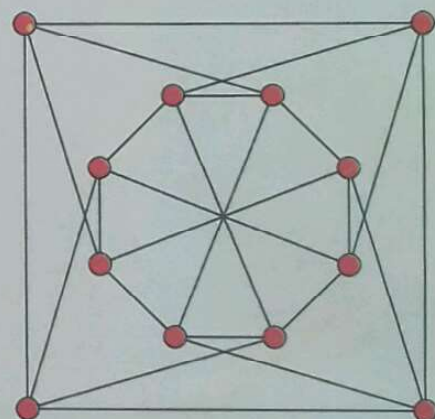
Số 537
Tháng 3 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghienctuusachgd.com



Biểu đồ Chvátal

- Giải thưởng Beale – Orchard-Hays (2000)
- Docteur Honoris Causa, Université de la Méditerranée (2003)
- Giải thưởng Frederick III Lancheester (2007)
- Giải thưởng Lý thuyết John von Neumann (2015)



Nhà Toán học Václav Chvátal sinh ngày 20/7/1946 tại Praha

<https://tieulun.hopto.org>

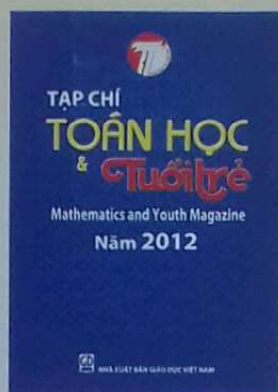
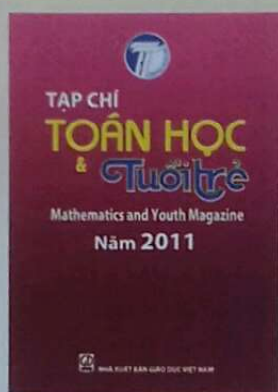
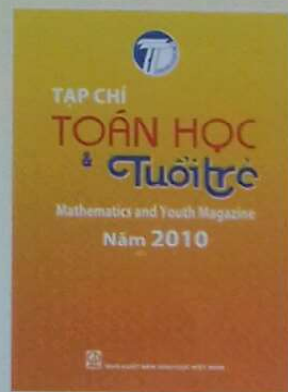


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đông tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020

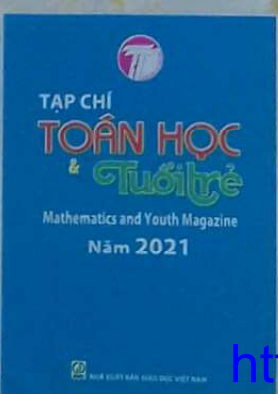
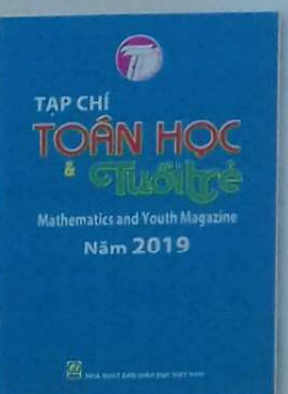
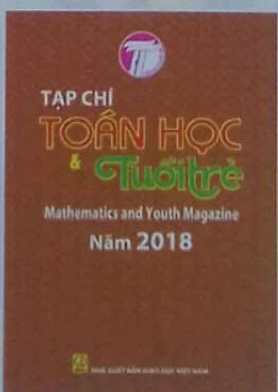
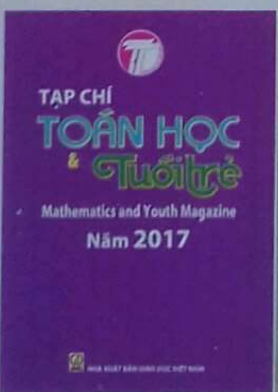
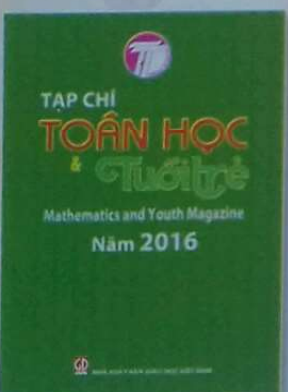
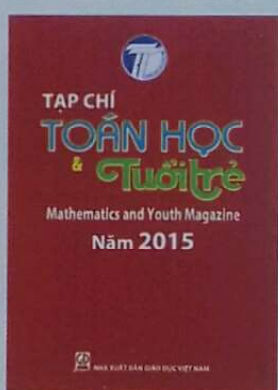
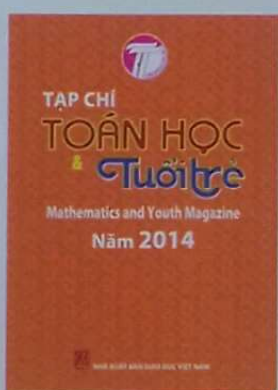
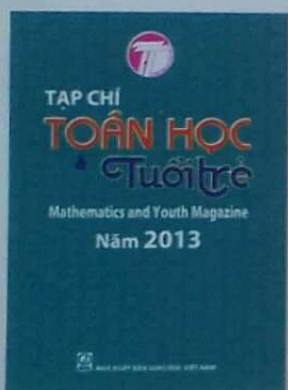
Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021

Khổ 19 x 26,5

Giá bìa: 240.000 đồng



Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội

Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607

Email: toanhocvuotruetvietnam@gmail.com

<https://tieuulun.hopto.org>



KHAI THÁC HẰNG ĐẲNG THỨC BÌNH PHƯƠNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

LÊ VIỆT ÂN

(GV THPTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Ta đã biết hai hằng đẳng thức bình phương quen thuộc sau: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (*)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad (**).$$

Sử dụng (*), (**) chúng ta sẽ quy phương trình (PT) vô tỷ về một trong ba trường hợp sau:

$$(i) [f(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

$$(ii) [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x).$$

$$(iii) [f(x)]^2 + [g(x)]^2 + \dots + [h(x)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) = \dots = h(x) = 0.$$

Bài viết này giới thiệu tới bạn đọc một số kỹ năng để biến đổi một PT vô tỷ về một trong ba trường hợp trên.

1. Phương pháp sử dụng tham số

Sử dụng tham số hay còn gọi là tham số hóa là một kỹ năng suy luận có lý chưa biết đúng hay sai, nhưng khả năng đúng rất lớn. Nếu sử dụng tham số thường dẫn đến một PT hay một hệ PT (ẩn là tham số) đơn giản để có thể suy ra giá trị của tham số cần chọn, rồi từ đó ta đi đến được lời giải bài toán.

Trước hết ta có mệnh đề sau

Mệnh đề. Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) có

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad (\text{hoặc} \quad \Delta' = b'^2 - ac = 0 \quad \text{với}$$

$$b' = \frac{b}{2}) \text{ thì } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Để chứng minh mệnh đề này, chỉ cần dựa vào

$$\text{đẳng thức } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4} \text{ và } \Delta' = \frac{\Delta}{4}.$$

Bây giờ sử dụng mệnh đề này, ta xét một số dạng toán PT vô tỷ thường gặp.

$$\text{Dạng 1. } ax^2 + bx + c = (kx + h)\sqrt{px^2 + qx + r} \quad (I^*)$$

trong đó $a, b, c, k, h, p, q, r \in \mathbb{R}$.

Cách giải. Nhân cả hai vế của PT(I*) cho 2 thì ta thu được PT:

$$2ax^2 + 2bx + 2c = 2(kx + h)\sqrt{px^2 + qx + r}$$

rồi sau đó cộng cả hai vế PT này cho

$$\frac{(kx + h)^2}{m} + m(px^2 + qx + r) \quad (\text{với } m \text{ là một tham}$$

số mà ta sẽ chọn) và sử dụng hằng đẳng thức bình phương để biến đổi thì PT(I*) trở thành:

$$\left(2a + mp + \frac{k^2}{m} \right) x^2 + \left(2b + mq + \frac{2kh}{m} \right) x + \left(2c + mr + \frac{h^2}{m} \right) = m \left(\frac{kx + h}{m} + \sqrt{px^2 + qx + r} \right)^2 \quad (I^{**})$$

Nếu xem vế trái của PT(I**) là một tam thức bậc hai theo biến x thì sử dụng mệnh đề ở đầu bài viết, ta sẽ chọn $m \neq 0$ sao cho:

$$\Delta = \left(2b + mq + \frac{2kh}{m} \right)^2 - 4 \left(2a + mp + \frac{k^2}{m} \right) \times \left(2c + mr + \frac{h^2}{m} \right) = 0 \quad (I^{***})$$

Quy đồng và biến đổi (I***) ta được một PT đa thức bậc ba (ẩn m):

$$(q^2 - 4pr)m^3 + 4(bq - 2ar - 2cp)m^2 + 4(b^2 + khq - 4ac - k^2r - h^2p)m + 8(bkh - ah^2 - ck^2) = 0 \quad (I)$$

Đến đây, ta có nhận xét sau:

Nếu $(q^2 - 4pr)(bkh - ah^2 - ck^2) \neq 0$ thì PT(I) không nhận $m = 0$ làm nghiệm hay PT(I) luôn có nghiệm khác 0 là $m = m_0$.

Như vậy, ta có kết quả: PT(I*) có thể đưa về được một trong ba dạng (i), (ii), (iii).

Để thuận tiện trong trình bày, ta gọi PT(I) là PT tham số (PTTS) của PT(I*).

Chú ý. Vì PT(I) là một PT bậc ba nên có khả năng có ba nghiệm phân biệt, tuy nhiên trong thực hành thì chúng ta chỉ cần chọn một nghiệm khác 0 là $m = m_0$ đẹp nhất để trình bày lời giải và hơn nữa nếu không nhân hai vế PT(I*) cho 2 thì ta cộng cả

hai vế của PT(I*) với $\frac{(kx+h)^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2}(px^2+qx+r)$

với m_0 là nghiệm của PTTS của PT(I*).

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$x^2 + 5\sqrt{5x-2} + 2 = 0 \quad (1).$$

Phân tích. Viết lại PT(1): $x^2 + 2 = -5\sqrt{5x-2}$, ở đây $a=1$, $b=0$, $c=2$, $k=0$, $h=-5$, $p=0$, $q=5$ và $r=-2$ nên PTTS của PT(1) là

$$25m^3 + 16m^2 - 32m - 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(25m^2 + 66m + 100) = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Do đó PT(1) có thể đưa về (i) hoặc (ii) hoặc (iii).

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{2}{5}$. Khi đó nhân cả hai vế của

PT(1) với 2 ta thu được PT: $2x^2 + 4 = -10\sqrt{3x-1}$; sau đó cộng cả hai vế của PT này cho $\frac{25}{2} + 2(5x-2)$ thì ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + \frac{25}{2} = \frac{25}{2} - 10\sqrt{5x-2} + 2(5x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{5x-2} - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2} = \sqrt{5x-2} - \frac{5}{2} \\ x + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \sqrt{5x-2} \end{cases}$$

Giải các PT này ta thấy PT(1) vô nghiệm.

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$x^4 - 3 = 2\sqrt{2x^2 + 3} \quad (2).$$

Phân tích. Nếu đặt $t = x^2$ thì PT(2) có dạng (I*) và ở đây $a=1$, $b=0$, $c=-3$, $k=0$, $h=2$,

$p=0$, $q=2$ và $r=3$ nên PTTS của PT(2) là $4m^3 - 24m^2 + 48m - 32 = 0 \Leftrightarrow 4(m-2)^3 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Hơn nữa ở trước biểu thức chứa căn là số chẵn nên ta không cần nhân hai vế PT(2) cho 2.

Lời giải. Cộng $1 + (2x^2 + 3)$ vào hai vế của PT(2),

ta có: $(2) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 3 + 1 + 2\sqrt{2x^2 + 3}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (\sqrt{2x^2 + 3} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{2x^2 + 3} + 1 \\ x^2 + 1 = -(\sqrt{2x^2 + 3} + 1) \end{cases}$$

Giải các PT này ta được nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (3).$$

Phân tích. Ở đây $a=1$, $b=-3$, $c=1$, $k=0$, $h=1$, $p=0$, $q=2$ và $r=-1$ nên PTTS của

PT(3) là: $4m^3 - 16m^2 + 20m - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$. Khi đó, nhân cả hai vế của

PT(3) cho 2 ta được PT: $2x^2 - 6x + 2 = 2\sqrt{2x-1}$.

Cộng cả hai vế của PT này cho biểu thức $1 + (2x-1)$, và biến đổi được:

$$(3) \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = (1 - \sqrt{2x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(x-1) = 1 - \sqrt{2x-1} \\ \sqrt{2}(x-1) = \sqrt{2x-1} - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2x-1} = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Giải PT này ta được nghiệm: $x = 1; x = 2 - \sqrt{2}$.

Chú ý. Trong lời giải trên ta đã dùng nghiệm ($m=1$) của PTTS để đưa (3) về trường hợp (ii).

Nếu dùng nghiệm ($m=2$) của PTTS thì ta cũng đưa (3) về (ii) như sau:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\right)^2,$$

và từ đây ta cũng tìm được nghiệm của PT(3).

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10} \quad (4).$$

Phân tích. Ở đây $a=1$, $b=9$, $c=20$, $k=0$, $h=2$, $p=0$, $q=3$ và $r=10$ nên PTTS của PT(4) là: $9m^3 + 28m^2 + 4m - 32 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2(9-8m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{9}{8} \end{cases}.$$

Vậy PT(4) có thể giải như sau:

Lời giải. ĐK: $x \geq -\frac{10}{3}$. Khi đó cộng

$-1-(3x+10)$ vào cả hai vế của PT(4) thì ta được:

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = -(1 - 2\sqrt{3x+10} + (3x+10))$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10} - 1)^2 = -(x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10} - 1)^2 + (x+3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Giải hệ PT này được nghiệm là $x = -3$.

Chú ý. Trong lời giải trên ta đã dùng nghiệm ($m = -2$) của PTTS để đưa (4) về (iii). Nếu dùng nghiệm $\left(m = \frac{9}{8}\right)$ của PTTS thì ta cũng đưa (4) về (ii) và tìm được nghiệm của PT(4).

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$3x^2 - 15x + 8 = 2x\sqrt{3x+1} \quad (5).$$

Phân tích. Ở đây $a=3$, $b=-15$, $c=8$, $k=2$, $h=0$, $p=0$, $q=3$ và $r=1$ nên PTTS của PT(5)

là: $9m^3 - 204m^2 + 500m - 256 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-2)(9m^2 - 186m + 128) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{31 \pm 7\sqrt{17}}{9} \end{cases}.$$

Vậy PT(5) có thể giải như sau:

Lời giải. ĐK: $x \geq -\frac{1}{3}$. Khi đó cộng vào hai vế của

PT(5) cho biểu thức $x^2 + (3x+1)$ thì ta được:

$$(5) \Leftrightarrow (2x-3)^2 = (x + \sqrt{3x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = x-3 \\ \sqrt{3x+1} = 3-3x \end{cases}.$$

Giải PT này ta được các nghiệm:

$$x = 8; x = \frac{7 - \sqrt{17}}{6}.$$

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1 \quad (6).$$

Phân tích. Ở đây $a=2$, $b=2$, $c=1$, $k=4$, $h=-1$, $p=1$, $q=3$ và $r=1$ nên PTTS của

PT(6) là: $-4m^3 - 24m^2 - 84m - 208 = 0$

$$\Leftrightarrow -4(m+4)(m^2 + 2m + 13) = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Do đó PT(6) có thể giải được như sau:

Lời giải. Nhân cả hai vế của PT(6) cho 2 rồi cộng tiếp hai vế cho $(4x-1) + (x^2+1)$ ta được:

$$(6) \Leftrightarrow \left[\frac{4x-1}{2} - 2\sqrt{x^2+1} \right]^2 = \left(2x - \frac{3}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+1} = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = 2x-1 \end{cases}.$$

Giải PT này ta được nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$4x^2 - 7x + 3 = (x+1)\sqrt{2x^2 + 4x - 3} \quad (7).$$

Phân tích. Ở đây $a=4$, $b=-7$, $c=3$, $k=1$, $h=1$, $p=2$, $q=4$ và $r=-3$ nên PTTS của

PT(7) là: $40m^3 - 64m^2 + 24m - 112 = 0$

$$\Leftrightarrow 8(m-2)(5m^2 + 2m + 7) = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Lời giải. ĐK: $x \leq \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$.

Khi đó nhân cả hai vế của PT(7) cho 2 rồi cộng tiếp cả hai vế cho $\frac{(x+1)^2}{2} + 2(2x^2 + 4x - 3)$ ta được:

$$\begin{aligned}
 (7) &\Leftrightarrow \frac{25}{2}x^2 - 5x + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} + \\
 &\quad + 2(x+1)\sqrt{2x^2+4x-3} + 2(2x^2+4x-3) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(5x-1)^2 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2x^2+4x-3} + x+1\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+4x-3} = 2x-1 \\ \sqrt{2x^2+4x-3} = -3x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Giải PT này được nghiệm $x = 2 + \sqrt{2}$.

Thí dụ 8. Giải phương trình

$$5x^2 - 36x + 64 = 4(4-x)\sqrt{x^2 - 4x + 7} \quad (8).$$

Phân tích. Ở đây $a=5$, $b=-36$, $c=64$, $k=-4$, $h=16$, $p=1$, $q=-4$ và $r=7$ nên PTTS của PT(8) là: $-12m^3 - 216m^2 - 384m = 0$

$$\Leftrightarrow -12m(m^2 + 18m + 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -16 \end{cases}$$

(ta loại nghiệm $m=0$).

Vậy ta có thể giải như sau:

Lời giải. Cộng vào cả hai vế của PT(8) với $-(8-2x)^2 - (x^2 - 4x + 7)$ ta được:

$$(8) \Leftrightarrow 0 = -\left[(16-4x)^2 - 4(4-x)\sqrt{x^2 - 4x + 7} + (2x^2 - 4x + 7)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(8-2x) - \sqrt{x^2 - 4x + 7}\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 7} = 2x - 8.$$

Giải PT này ta được nghiệm $x = \frac{19}{3}$.

Nhận xét. Trong lời giải trên chúng ta đã dùng nghiệm ($m=-2$) của PTTS để đưa (8) về (i). Còn với nghiệm ($m=-16$) của PTTS thì ta sẽ đưa (8) về (iii) và cũng tìm được nghiệm của PT(8).

Dạng 2. $kx + h + p\sqrt{ax+b} + q\sqrt{cx+d} = 0$ (II*) trong đó $a, b, c, k, h, p, q \in \mathbb{R}$ và $ac \neq 0$.

Cách giải. Nhân cả hai vế của PT(II*) với 2 thì ta được PT: $2kx + 2h + 2p\sqrt{ax+b} + 2q\sqrt{cx+d} = 0$ rồi sau đó thêm bớt vào vế trái của PT(II*) biểu

thức $\frac{p^2}{m} + m(ax+b)$ và sử dụng hằng đẳng thức bình phương (*) để biến đổi thì PT(II*) trở thành:

$$\begin{aligned}
 &m\left(\frac{p^2}{m} + \sqrt{ax+b}\right)^2 + \left[\frac{2k-ma}{c}(cx+d) + \right. \\
 &\quad \left. + 2q\sqrt{cx+d} + \left(2h-mb - \frac{p^2}{m} - \frac{(2k-ma)d}{c}\right)\right] = 0.
 \end{aligned}$$

Xem biểu thức trong ngoặc [...] là một tam thức theo biến $\sqrt{cx+d}$ thì sử dụng mệnh đề ở đầu bài viết, ta sẽ chọn tham số $m \neq 0$ sao cho

$$\Delta' = q^2 - \frac{2k-ma}{c}\left(2h-mb - \frac{p^2}{m} - \frac{(2k-ma)d}{c}\right) = 0.$$

Quy đồng và biến đổi PT này ta thu được một PT đa thức bậc ba (ẩn m) như sau:

$$\begin{aligned}
 &a(ad-bc)m^3 + 2(ach-2adk+bck)m^2 + \\
 &\quad + (c^2q^2 - 4ckh + 4dk^2 - acp^2)m + 2ckp^2 = 0
 \end{aligned}$$

(II).

Và như dạng trước, ta cũng gọi PT(II) là PTTS của PT(II*).

Đến đây nếu $acpk(ad-bc) \neq 0$ thì PT(II) có nghiệm khác 0 là $m = m_0$.

Chú ý. Nếu không nhân hai vế PT(II*) cho 2 thì ta thêm bớt vế trái của PT(II*) với

$\frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2}\sqrt{ax+b}$ với m_0 là nghiệm của PTTS của PT(II*).

Thí dụ 9. Giải phương trình

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \quad (9).$$

Phân tích. Ở đây $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$, $k=-16$, $h=0$, $p=13$, $q=9$ nên PTTS của PT(10) là: $2m^3 + 96m^2 + 936m - 5408 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(m-4)(m+26)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -26 \end{cases}$$

Từ đây ta có thể giải như sau:

Lời giải. ĐK: $x \geq 1$. Khi đó nhân hai vế của PT(9) cho 2 rồi sau đó thêm bớt $\frac{13}{-2} - 26(x-1)$ và biến đổi ta được:

$$(9) \Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải PT này được nghiệm là $x = \frac{5}{4}$.

Chú ý. Trong lời giải trên ta đã dùng nghiệm ($m = -26$) của PTTS của (9) để đưa (10) về dạng (iii). Nếu dùng nghiệm ($m = 4$) của PTTS thì ta cũng đưa (9) về dạng (ii) như sau:

$$4\left(\frac{13}{4} + \sqrt{x-1}\right)^2 = \left(6\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2$$

và từ đây ta cũng tìm được lại nghiệm của PT(9).

Thí dụ 10. Giải phương trình

$$x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11 \quad (10).$$

Phân tích. Ở đây $a = 1, b = 3, c = -2, d = 3, k = 1, h = -11, p = 4, q = 2$ nên PTTS của PT(10) là: $9m^3 + 20m^2 - 28m - 64 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2(9m-16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Từ đây ta có lời giải như sau:

Lời giải. ĐK: $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Thêm bớt vào

$-4 - (x+3)$ về trái của PT(10) và sau đó chuyển về trái sang về phải ta được:

$$(10) \Leftrightarrow (2 - \sqrt{x+3})^2 + 4 - 2x - 2\sqrt{3-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{x+3})^2 + (1 - \sqrt{3-2x})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 1 \end{cases}$$

Giải PT này được nghiệm: $x = 1$.

Chú ý. Trong lời giải trên ta đã dùng nghiệm ($m = -2$) của PTTS của (10) để đưa (10) về dạng (iii).

2. Phương pháp nhận xét phương trình

Khi sử dụng phương pháp này, chúng ta cần có những suy luận hợp lý để có thể đưa một PT vô tỉ về một trong trường hợp (i), (ii), (iii) được hay không!. Khi suy luận ta thường sử dụng nhận xét sau: Thông thường trong các PT vô tỉ thì các số hạng căn bậc hai thường đóng vai trò như số hạng $\pm 2ab$ trong (*) và (**).

Thí dụ 11. Giải phương trình

$$x^2 + 8 = \sqrt{8(x^3 + 8)} \quad (11).$$

Phân tích. Số hạng chứa căn bậc hai $\sqrt{8(x^3 + 8)} = 2\sqrt{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$ gợi ý cho ta đến số hạng $\pm 2ab$ trong (*) và (**). Do đó để làm xuất hiện hằng đẳng thức, vấn đề còn lại là có thể làm xuất hiện a^2 và b^2 . Trước hết ta phải có $a^2 + b^2 = x^2 + 8$ là một đa thức bậc hai. Do đó quan sát các số dưới dấu căn trong PT(11) thì cặp $(a^2; b^2)$ có thể là một trong hai cặp $(2(x+2); x^2 - 2x + 4)$ và $(2(x^2 - 2x + 4); x+2)$, nhưng chỉ có cặp đầu tiên thỏa mãn bởi vì $2(x+2) + x^2 - 2x + 4 = x^2 + 8$

Do đó, PT(11) có thể giải được như sau:

Lời giải. ĐK: $x \geq -2$. Thêm bớt 4 ở hai vế của PT(11) để làm xuất hiện hằng đẳng thức, ta có:

$$(11) \Leftrightarrow 2(x+2) + (x^2 - 2x + 4) -$$

$$-2\sqrt{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2(x+2)} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 2x+4 = x^2 - 2x + 4.$$

Giải PT này được nghiệm $x = 0; x = 4$.

Chú ý. Cần lưu ý đến các khai triển và biến đổi sau: $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp xa + a^2)$

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2 - \sqrt{2}xa)(x^2 + a^2 + \sqrt{2}xa)$$

$$4x^4 + a^4 = (2x^2 + a^2 - 2xa)(x^2 + a^2 + 2xa)$$

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = (x^2 + a^2 + xa)(x^2 + a^2 - xa).$$

Thí dụ 12. Giải phương trình

$$x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}=x^2+x+3 \quad (12).$$

Phân tích. Đề ý trước biểu thức $x\sqrt{x^2-x+1}$ chưa có số 2, nên đề xuất hiện $\pm 2ab$ thì ta nhân hai vế PT(12) cho 2, ta được $2x\sqrt{x^2-x+1}$, ta thấy ngay PT(12) có thể gom được $(x \pm \sqrt{x^2-x+1})^2$. Do đó ta sẽ giải bài toán theo hướng này.

Lời giải. ĐK: $x \geq -\frac{1}{3}$. Khi đó

$$(12) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2-x+1}+4\sqrt{3x+1}=2x^2+2x+6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-x+1}-x)^2 + (\sqrt{3x+1}-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}=x \\ \sqrt{3x+1}=2 \end{cases}$$

Giải hệ PT này được nghiệm là $x=1$.

Thí dụ 13. Giải phương trình

$$4x^2-4x\sqrt{3x+1}=2\sqrt{3x^2+2x-1}-7x-1 \quad (13).$$

Phân tích. Đề ý $3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$, từ đây ta có thể giải như sau

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{3}$. Khi đó $x+1>0$ và

$3x-1>0$. Do đó biến đổi PT(13) khéo léo bằng cách “gom bình phương đúng” ta được:

$$(13) \Leftrightarrow (2x-\sqrt{3x+1})^2 + (\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1}=2x \\ \sqrt{3x-1}=\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Giải hệ PT này ta được nghiệm $x=1$.

Nhận xét. Để biến đổi PT vô tỉ về được (i), (ii), (iii) đòi hỏi người giải phải có kỹ năng “gom bình phương đúng” thành thạo.

Thí dụ 14. Giải phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1}+2\sqrt{5-x^2}+2\sqrt{(2x-1)(5-x^2)} \\ = -x^3+6x+4 \end{aligned} \quad (14).$$

Phân tích. Nhận xét rằng trước biểu thức $\sqrt{2x-1}$

chưa có số 2 nên ta nhân cả hai vế của PT(14) cho 2. Hơn nữa vế phải là đa thức bậc ba và trong căn cũng là một đa thức bậc ba, và chú ý

$$(2x-1)(5-x^2)=-2x^3+10x-5.$$

Vậy PT(14) có thể giải như sau:

Lời giải. ĐK: $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{5}$. Khi đó nhân cả hai vế của PT(14) cho 2 rồi biến đổi ta được:

$$(14) \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}-1)^2 + (\sqrt{5-x^2}-2)^2 + (\sqrt{(2x-1)(5-x^2)}-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ \sqrt{5-x^2}=2 \\ \sqrt{(2x-1)(5-x^2)}=2 \end{cases}$$

Giải hệ PT này được nghiệm $x=1$.

Thí dụ 15. Giải phương trình

$$\frac{x+1}{2} = \sqrt{\frac{x^2+6}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}} \quad (15).$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$. Khi đó, 2 vế PT(15) đều dương nên bình phương hai vế, ta có:

$$(15) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{x^2+x+6}{6} + \frac{\sqrt{x(x^2+6)}}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)+4x-4\sqrt{x(x^2+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2\sqrt{x}.$$

Giải PT này được nghiệm $x=2 \pm \sqrt{3}$.

Nhận xét. Có thể qua một vài bước nâng lũy thừa thì PT ban đầu có thể sử dụng được (*) hoặc (**).

Thí dụ 16. Giải phương trình

$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2 \quad (16).$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -\frac{9}{4}$. Khi đó

$$(16) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -3\sqrt{10-3x}=x^2-4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left(\sqrt{10-3x} - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{10-3x} = x-2 \\ \sqrt{10-3x} = 5-x \end{cases}$$

Giải hệ PT này ta được nghiệm $x=3$.

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^3 + 1}$.

HD. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-x+1})^2 = 0$.

2. $\sqrt{2x^2+3x-2} = \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x-1}$.

HD. Bình phương hai vế và biến đổi về $(\sqrt{x} - \sqrt{x^2-1})^2 = 0$.

3. $\sqrt{8x+4} = 1-x^2$.

4. $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$.

5. $2\sqrt{2x^2-1} = x^4 - 2x^2$.

6. $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$.

7. $\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22$.

8. $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x+1}$.

9. $4x^2 + \sqrt{2x+3} = 8x+1$.

10. $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2-2x}$.

11. $(x^2+3)\sqrt{(2-x)(2+x)(12+x^2)} = 28-x^2$.

HD. PT $\Leftrightarrow (x^2+3)\sqrt{(4-x^2)(12+x^2)} = 28-x^2$

và đặt $t = x^2$.

12. $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} = x^2-2x+3$.

13. $(x+2)\sqrt{x^2-2x+2} = x^2+x+1$.

14. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

15. $4\sqrt{x+1} = x^2-5x+14$.

16. $x^2-x+6 = 4\sqrt{1-3x}$.

17. $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3x+1} = \frac{5x+5}{2}$.

HD. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}-1)^2 + (\sqrt{3x+1}-4)^2 = 0$.

18. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{6x+1} = 12+16x$.

HD. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}-2)^2 + (\sqrt{6x+1}-2)^2 = 0$.

19. $\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2+4}$.

HD. Bình phương hai vế.

20. $4x^2+3x+3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$.

HD. PT $\Leftrightarrow (2x-\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1}-1)^2 = 0$.

21. $1+x-2x^2 = \sqrt{4x^2-1} - \sqrt{2x+1}$.

HD. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}+1)^2 = (\sqrt{4x^2-1}+1)^2$.

22. $x^4 - 2x^2\sqrt{x^2-2x+16} + 2x^2 - 6x + 20 = 0$.

HD. PT $\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{x^2-2x+16})^2 + (x-2)^2 = 0$.

23. $x^4 - x^2 + 3x + 5 - 2\sqrt{x+2} = 0$.

HD. PT $\Leftrightarrow (x^2-1)^2 + (x+1)^2 + (\sqrt{x+2}-1)^2 = 0$.

24. $2x\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2x^2 + x + 2$.

HD. Nhân hai vế PT cho 2 rồi biến đổi PT thành

$$(2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{x}-1)^2 = 0$$

25. $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$

HD. PT $\Leftrightarrow (2x-\sqrt{5x-1})^2 + (\sqrt{9-5x}-2)^2 + \sqrt{x-1} = 0$.

26. $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$.

HD. PT $\Leftrightarrow (\sqrt{28x+63}+1)^2 = (14x+8)^2$.

27. $x^2 + 4x + \frac{5}{2} = \sqrt{2x^2+5x-2} + (x+1)\sqrt{3x+1}$.

HD. Nhân hai vế cho 2 và biến đổi:

PT $\Leftrightarrow (x+1-\sqrt{3x+1})^2 + (\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})^2 = 0$.

28. $2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)} = -x^3 - 2x^2 + 10x + 38$.

HD. $(\sqrt{x+1}-1)^2 + (\sqrt{9-x^2}-3)^2 + (\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3)^2 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH BÌNH ĐỊNH, NĂM HỌC 2020 – 2021

Bài 1. 1) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên.

2) Cho phương trình: $2x^2 - 3x + 2m = 0$ (1). Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1$.

Lời giải. 1) ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{3\sqrt{x}+7-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} = 2 - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

Đề $P \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{N}, x \neq 1$ thì $\sqrt{x}-1 \in \mathbb{U}(2)$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1 \in \{-1; 1; 2\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{0; 2; 3\}$$

$$\Rightarrow x \in \{0; 4; 9\}.$$

Vậy $x \in \{0; 4; 9\}$ thì P có giá trị nguyên.

2) Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 là $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 16m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{16}.$$

Ta có: $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} - \frac{2}{x_1 x_2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_1 x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 0 \quad (2).$$

Theo hệ thức Viète ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1 x_2 = \frac{2m}{2} = m \quad (3).$$

Thay (3) vào (2): $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - m^2 - 4m = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 16m - 9 = 0.$$

$$\Delta' = 64 + 36 = 100, \text{ do đó:}$$

$$m_1 = \frac{-8+10}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn ĐK}).$$

$$m_2 = \frac{-8-10}{4} = \frac{-9}{2} \quad (\text{thỏa mãn ĐK}).$$

Vậy $m = \frac{1}{2}; m = \frac{-9}{2}$.

Bài 2. 1) Giải phương trình:

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - x} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{3x+2y} = -1 \\ \sqrt{x+y} = y-x \end{cases}$$

Lời giải. 1) ĐK: $x^3 + 3x^2 - x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0; x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Biến đổi: (1) $\Leftrightarrow 2(x^4 - x^2 + 1) = x^3 + 3x^2 - x$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0 \quad (2).$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (2) nên chia hai vế phương trình (2) cho x^2 ta được:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \quad (3). \end{aligned}$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình (3) trở thành:

$$\begin{aligned} 2(t^2 + 2) - t - 5 &= 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Với $t = 1$ thì $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

- Với $t = -\frac{1}{2}$ thì $x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm:

$$S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \right\}.$$

2) ĐK: $x + y \geq 0, y \geq x, 3x + 2y \geq 0$.

Đặt: $a = x + y; b = 3x + 2y$ ($a \geq 0, b \geq 0$)

$$\Rightarrow x = b - 2a, y = 3a - b.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = -1 \\ \sqrt{a} = (3a - b) - (b - 2a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = -1 \\ \sqrt{a} = 5a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = \sqrt{a} + 1 \\ b = \frac{5a - \sqrt{a}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 = \frac{5a - \sqrt{a}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4\sqrt{a} + 2 = 5a - \sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow 3a - 5\sqrt{a} - 2 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt{a}$ ($t \geq 0$), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0, \text{ có:}$$

$$\Delta = 49 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ (chọn); } t_2 = -\frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

- Với $t = 2$ thì $\sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$

$$\Rightarrow b = \frac{5.4 - \sqrt{4}}{2} = 9.$$

Khi đó: $x = b - 2a = 9 - 2.4 = 1;$

$$y = 3a - b = 3.4 - 9 = 3.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x, y) = (1; 3)$.

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là một số chính phương.

Lời giải. Đặt $p^2 + 3pq + q^2 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$), ta có:

$$(p + q)^2 + pq = a^2 \Leftrightarrow a^2 - (p + q)^2 = pq$$

$$\Leftrightarrow (a - p - q)(a + p + q) = pq \quad (1).$$

Vì p, q là các số nguyên tố và hai thừa số ở vế trái của (1) là hai số nguyên dương phân biệt nên suy ra các trường hợp:

$$\bullet \begin{cases} a - p - q = q \\ a + p + q = p \end{cases} \Rightarrow 2p + 2q = p - q$$

$$\Leftrightarrow p = -3q < 0: \text{ loại.}$$

$$\bullet \begin{cases} a - p - q = p \\ a + p + q = q \end{cases} \Rightarrow 2p + 2q = q - p$$

$$\Leftrightarrow q = -3p < 0: \text{ loại.}$$

$$\bullet \begin{cases} a - p - q = 1 \\ a + p + q = pq \end{cases} \Rightarrow 2p + 2q = pq - 1$$

$$\Leftrightarrow pq - 2p - 2q = 1 \Leftrightarrow p(q - 2) - 2(q - 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (q - 2)(p - 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q - 2 = 1 \\ p - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ p = 7 \end{cases}$$

Vậy $p = 3; q = 7$ hoặc $p = 7; q = 3$.

Khi đó: $p^2 + 3pq + q^2 = 3^2 + 3.3.7 + 7^2 = 121$
 $= 11^2$ (thỏa mãn ĐK).

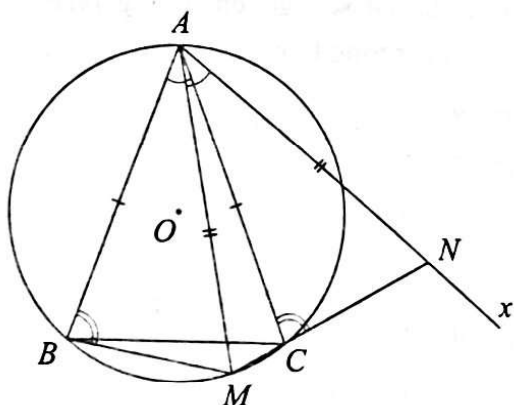
Bài 4. 1) Cho tam giác ABC cân tại A (với $\widehat{BAC} < 60^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ $\widehat{BC}$. Chứng minh rằng $MA > MB + MC$.

2) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi D là trung điểm cạnh BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AC và AB . Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AO và BC theo thứ tự tại M và N .

a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của AB và ED , L là giao điểm của AC và FD , H là trung điểm của KL và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh $HI \perp EF$.

Lời giải. 1)



Trên nửa mặt phẳng bờ là AB có điểm C , vẽ tia Ax sao cho $\widehat{MAx} = \widehat{BAC}$ và trên tia Ax lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

Ta có: $\triangle ACN = \triangle ABM$ (c.g.c) $\Rightarrow CN = MB$; $\widehat{ACN} = \widehat{ABM}$. Mặt khác tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$, do đó:

$\widehat{ACN} + \widehat{ACM} = 180^\circ \Leftrightarrow M, C, N$ thẳng hàng, suy ra: $MN = MC + CN \Leftrightarrow MN = MC + MB$.

Xét $\triangle AMN$ cân tại A có $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} < 60^\circ$ nên: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} > 60^\circ \Rightarrow \widehat{ANM} > \widehat{MAN}$
 $\Leftrightarrow MA > MN \Leftrightarrow MA > MB + MC$.

Vậy $MA > MB + MC$.

2) a) Vẽ đường kính AJ của (O) , ta có:

$\widehat{ACJ} = 90^\circ$. Mặt khác, $\widehat{AJC} = \widehat{ABD} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} \right)$

nên $\triangle ACJ \sim \triangle DFB$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{CAJ} = \widehat{BDF}$ (1).

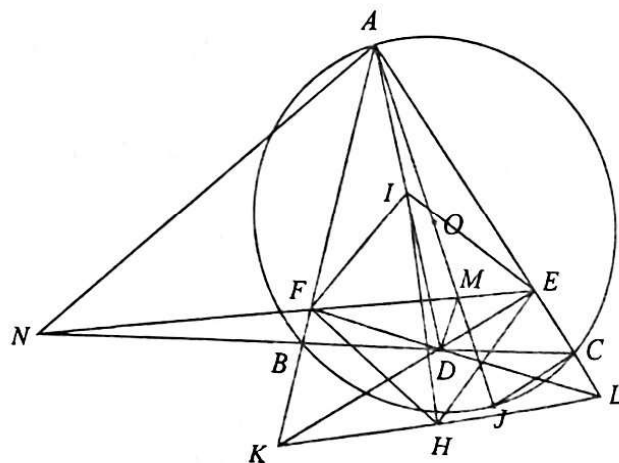
Ta lại có: $\widehat{AMF} = \widehat{CAJ} + \widehat{AEF}$ (2),

$\widehat{ADB} = \widehat{ADF} + \widehat{BDF}$ (3).

Vì $\widehat{AED} + \widehat{AFD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{AEF} = \widehat{ADF}$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$\widehat{AMF} = \widehat{ADB} \Leftrightarrow$ tứ giác $AMDN$ nội tiếp.



b) Ta có: $IE = IF$ (1). Tứ giác $EFKL$ có $\widehat{KEL} = \widehat{KFL} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm H đường kính $KL \Rightarrow HE = HF$ (2).

Từ (1), (2) suy ra IH là đường trung trực của EF , do đó $HI \perp EF$.

Bài 5. Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

Lời giải. Biến đổi:



**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG
NĂM HỌC 2021 – 2022**

(Thời gian làm bài: 150 phút; Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin học)

Câu I (5,0 điểm). 1) Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$$

với $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để A là số chính phương.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$B = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1x_2) + 10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu II (4,0 điểm). 1) Giải phương trình

$$\sqrt{6-x} - \sqrt{2x+6} = x^2 - 2x - 18.$$

2) Tìm a, b để đa thức

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$$

chia cho $x-1$ dư 3 và chia cho $x-2$ dư 5.

Câu III (4,0 điểm). 1) Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với n là số tự nhiên lẻ bất kì.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - y^2(x + y^4 + 6y^2) = 0.$$

3) Cho hình tròn (O) có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng trong tám điểm $A_1, A_2, \dots, A_8$ bất kì

thuộc hình tròn (O) , luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Câu IV (6,0 điểm). Cho đường tròn (O) và điểm M cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Qua M kẻ cát tuyến MAB với đường tròn (O) ($MA < MB$ và AB không đi qua O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại K . Đường thẳng qua K vuông góc với MO , cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D phân biệt ($KC < KD$). Gọi N là trung điểm của đoạn AB .

1) Chứng minh rằng tứ giác $ONCD$ nội tiếp trong một đường tròn.

2) Gọi I là giao điểm của CD với AB . Chứng minh rằng $IA \cdot MB = IB \cdot MA$.

3) Qua B kẻ đường thẳng song song với CD và cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác B). Chứng minh rằng đường thẳng AE luôn đi qua một điểm cố định khi cát tuyến MAB thay đổi.

Câu V (1,0 điểm). Cho hai số dương a, b thay đổi thỏa mãn $a^3 + b^3 + 6ab \leq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{3 + a^2b^2}{ab}$.

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Bắc Giang)
Giới thiệu



$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} \\ &= 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} + 2 + \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ &= 3 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy}. \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$A \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy}} + \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$\geq 3 + 2 + 1 = 6. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = y.$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 6 khi $x = y$.

BÙI VĂN CHI
(21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)
Giới thiệu



PHÁT TRIỂN TƯ DUY CỦA HỌC SINH QUA VIỆC KHAI THÁC LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN

LÊ QUANG HÀO

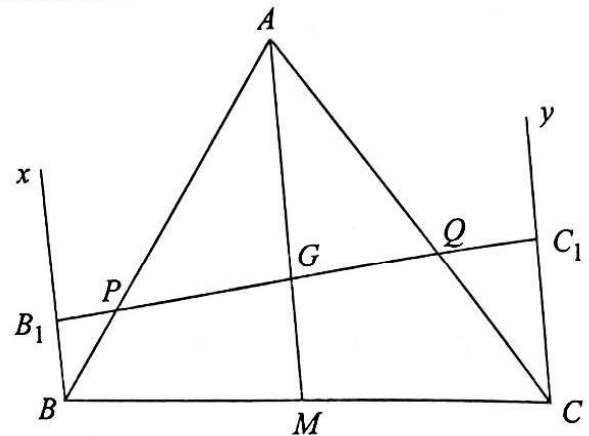
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Trong tình hình hiện nay, khi mà các loại sách tham khảo của các bộ môn khác nói chung và của bộ môn Toán nói riêng phát hành nhiều, điều này phần nào giúp học sinh củng cố, nâng cao kiến thức nhưng cũng có mặt trái của nó là làm cho học sinh ỷ lại, chây lười trong học tập, trong đó có một bộ phận không nhỏ là học sinh khá, giỏi. Thường khi đọc xong một đề toán, các em ít chịu khó suy nghĩ để tìm tòi lời giải mà các em đọc lời giải có sẵn, chính vì vậy tư duy của các em ít được phát triển. Trong quá trình giảng dạy ở cấp THPT và đặc biệt là những lớp chuyên, lớp chọn tôi thường yêu cầu các em tự tìm tòi lấy lời giải của bài toán nêu ra. Sau mỗi bài toán tôi hay đặt câu hỏi cho học sinh: Bài toán này còn có cách giải nào khác không? Bài toán này có thể tổng quát được không?

Từ những câu hỏi như thế này mà học sinh có ý thức hơn trong việc tìm tòi các lời giải của một bài toán, từ đó gây hứng thú cho học sinh trong việc học bộ môn Toán và phần nào phát triển tư duy của các em. Sau đây là một số bài toán minh chứng cho điều tôi trình bày ở trên.

Bài toán 1. Qua trọng tâm G của tam giác ABC ta kẻ đường thẳng (d) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Cách giải 1. Sử dụng phương pháp vẽ đường phụ và tính chất của tam giác đồng dạng.

Qua B, C ta kẻ các đường thẳng B_x, C_y song song với AG . Gọi M là trung điểm của BC , $B_1 = (d) \cap B_x$, $C_1 = (d) \cap C_y$. Ta có:

$$\triangle BB_1P \sim \triangle AGP \Rightarrow \frac{BB_1}{AG} = \frac{BP}{PA} \quad (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\triangle CC_1Q \sim \triangle AGQ \Rightarrow \frac{CC_1}{AG} = \frac{CQ}{QA} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} = \frac{BB_1 + CC_1}{AG} \quad (3).$$

Mặt khác, do GM là đường trung bình của hình thang BB_1C_1C nên

$$BB_1 + C_1C = 2GM = AG \quad (4).$$

Thay (4) vào (3) ta được đpcm.

Cách giải 2. Sử dụng phương pháp vector.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\frac{BP}{PA} = m$, $\frac{CQ}{QA} = n$, $\frac{PG}{PQ} = l$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \quad (1).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AB} + l(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AB} + \frac{l}{n+1}\overrightarrow{AC} - \frac{l}{m+1}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1-l}{m+1}\vec{u} + \frac{l}{n+1}\vec{v} \quad (2). \end{aligned}$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế, ta có:

$$\left(\frac{1-l}{m+1} - \frac{1}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{l}{n+1} - \frac{1}{3}\right)\vec{v} = \vec{0},$$

do $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ và chúng không cùng phương

$$\text{nên ta có: } \begin{cases} \frac{1-l}{m+1} = \frac{1}{3} \\ \frac{l}{n+1} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Từ hệ ta được:

$$m+n=1 \text{ hay } \frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Cách giải 3. Sử dụng tỉ số diện tích của hai tam giác.

Đặt $S = S_{ABC}$, $S' = S_{APQ}$, $S_1 = S_{ABM}$,

$$S'_1 = S_{APG}, S_2 = S_{AMC}, S'_2 = S_{AQG}.$$

Nhận xét: $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}S$; $S'_1 + S'_2 = S'$.

Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}b.c \sin A$, ta có:

$$\frac{S'}{S} = \frac{AP.AQ}{AB.AC} \quad (1), \quad \frac{S'_1}{S_1} = \frac{AP.AG}{AB.AM} = \frac{2}{3} \frac{AP}{AB},$$

$$\frac{S'_2}{S_2} = \frac{AQ.AG}{AC.AM} = \frac{2}{3} \frac{AQ}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S'_1}{S_1} + \frac{S'_2}{S_2} = \frac{2}{3} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} \right).$$

Từ nhận xét trên ta có:

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{3} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} \right) \quad (2).$$

So sánh (1) và (2) ta được:

$$\frac{AP.AQ}{AB.AC} = \frac{1}{3} \left(\frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} \right)$$

$$\Leftrightarrow 3AP.AQ = AP.AC + AQ.AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} = 1 \text{ (đpcm).}$$

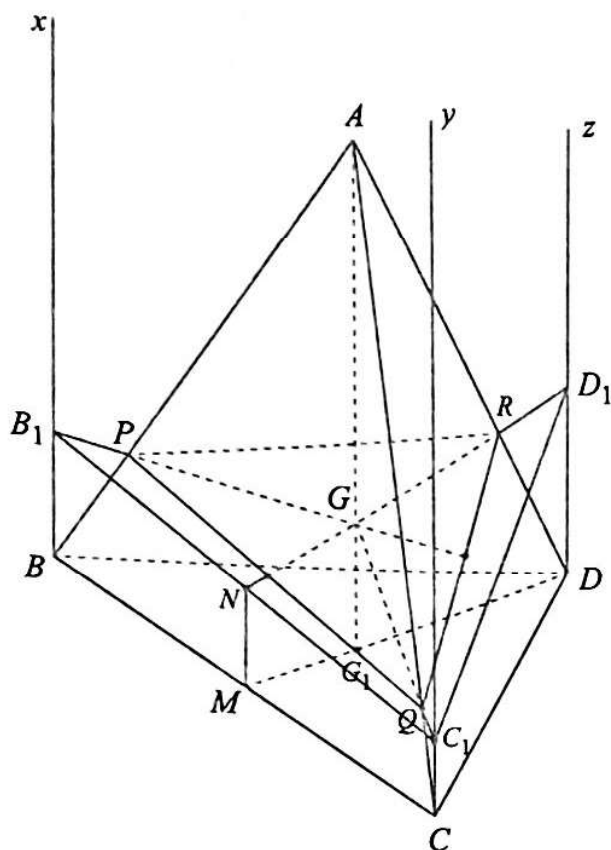
Từ chỗ tìm tòi được các lời giải của bài toán 1, tôi đặt câu hỏi cho học sinh: liệu bài toán trên còn có thể mở rộng được trong không gian hay không? Tôi đã hướng dẫn và cho các em khá, giỏi làm bài toán sau:

Bài toán 2. Qua trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ vẽ mặt phẳng (α) cắt các cạnh AB , AC , AD lần lượt tại P , Q , R . Chứng minh rằng:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA} = 1.$$

Cách giải 1. Sử dụng phương pháp vẽ đường phụ và tính chất của tam giác đồng dạng.

Qua B , C , D kẻ các đường thẳng B_x, C_y, D_z song song với AG . Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác BCD và $B_1 = GP \cap B_x$, $C_1 = GQ \cap C_y$, $D_1 = GR \cap D_z$, $N = GR \cap B_1C_1$, $M = BC \cap DG_1$.



Do G_1 là trọng tâm của tam giác BCD nên M là trung điểm của BC , mặt khác từ cách dựng trên suy ra $MN \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Từ đó suy ra N là trung điểm của B_1C_1 và $\frac{DG_1}{DM} = \frac{D_1G}{D_1N} = \frac{2}{3}$.

Ta có: $\triangle BB_1P \sim \triangle AGP \Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BB_1}{AG}$ (1).

Tương tự: $\frac{CQ}{QA} = \frac{CC_1}{AG}$ (2),

$$\frac{DR}{RA} = \frac{DD_1}{AG} \quad (3).$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA} = \frac{BB_1 + CC_1 + DD_1}{AG} \quad (4).$$

Dễ dàng chứng minh được:

$$GG_1 = \frac{1}{3}DD_1 + \frac{2}{3}MN = \frac{1}{3}DD_1 + \frac{1}{3}(BB_1 + CC_1)$$

$$\Rightarrow BB_1 + CC_1 + DD_1 = 3GG_1 = AG \quad (5).$$

Thay (5) vào (4) ta có:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA} = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Cách giải 2. Sử dụng phương pháp vector.

Gọi $E = GP \cap QR$, G_1 là trọng tâm của tam giác BCD .

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$,

$$\frac{BP}{PA} = m, \frac{CQ}{QA} = n, \frac{DR}{RA} = l,$$

$$\frac{PG}{PE} = k, \frac{QE}{QR} = r.$$

$$\text{Do } \frac{BP}{PA} = m \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{PA}{AB} = \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{m+1} \vec{u}.$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{n+1} \vec{v}, \overrightarrow{AR} = \frac{1}{l+1} \vec{w}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \quad (1). \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AP} + k \overrightarrow{PE} \\ &= \overrightarrow{AP} + k (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}) \\ &= (1-k) \overrightarrow{AP} + k \overrightarrow{AE} \\ &= (1-k) \overrightarrow{AP} + k (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QE}) \\ &= (1-k) \overrightarrow{AP} + k \overrightarrow{AQ} + k \overrightarrow{QE} \quad (2). \end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{QE} = r \overrightarrow{QR} = r \overrightarrow{AR} - r \overrightarrow{AQ}$ (3), thay (3) vào (2) ta được:

$$\overrightarrow{AG} = (1-k) \overrightarrow{AP} + (k - kr) \overrightarrow{AQ} + kr \overrightarrow{AR}$$

$$= \overline{AG} = \frac{1-k}{m+1} \overline{u} + \frac{k-kr}{n+1} \overline{v} + \frac{kr}{l+1} \overline{w} \quad (4).$$

So sánh (1) và (4) ta được:

$$\left(\frac{1-k}{m+1} - \frac{1}{4}\right) \overline{u} + \left(\frac{k-kr}{n+1} - \frac{1}{4}\right) \overline{v} + \left(\frac{kr}{l+1} - \frac{1}{4}\right) \overline{w} = \overline{0},$$

do $\overline{u} \neq \overline{0}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, $\overline{w} \neq \overline{0}$ và chúng không đồng

phẳng nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{1-k}{m+1} - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{k-kr}{n+1} - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{kr}{l+1} - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Từ hệ ta được:

$$m+n+l=1 \text{ hay } \frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Cách giải 3. Sử dụng tỉ số thể tích của hai khối đa diện.

$$\text{Đặt } V_1 = V_{APQG}, V_2 = V_{AQRG}, V_3 = V_{ARPG},$$

$$V = V_{APQR}, V'_1 = V_{ABCG_1}, V'_2 = V_{ACDG_1},$$

$$V'_3 = V_{ADBG_1}, V' = V_{ABCD}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_1}{V'_1} = \frac{AP.AQ.AG}{AB.AC.AG_1} = \frac{3}{4} \frac{AP.AQ}{AB.AC} \quad (1),$$

$$\frac{V_2}{V'_2} = \frac{AR.AQ.AG}{AD.AC.AG_1} = \frac{3}{4} \frac{AR.AQ}{AD.AC} \quad (2),$$

$$\frac{V_3}{V'_3} = \frac{AP.AR.AG}{AB.AD.AG_1} = \frac{3}{4} \frac{AP.AR}{AB.AD} \quad (3),$$

$$V'_1 = V'_2 = V'_3 = \frac{1}{3} V',$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = V,$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{AP.AQ.AR}{AB.AC.AD} \quad (4).$$

Cộng (1), (2), (3) theo từng vế ta có:

$$\frac{V_1}{V'_1} + \frac{V_2}{V'_2} + \frac{V_3}{V'_3} = \frac{3}{4} \left(\frac{AP.AQ}{AB.AC} + \frac{AQ.AR}{AC.AD} + \frac{AR.AP}{AD.AB} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{1}{4} \left(\frac{AP.AQ}{AB.AC} + \frac{AQ.AR}{AC.AD} + \frac{AR.AP}{AD.AB} \right) \quad (5).$$

So sánh (4) và (5) ta được:

$$\frac{AP.AQ.AR}{AB.AC.AD} = \frac{1}{4} \left(\frac{AP.AQ}{AB.AC} + \frac{AQ.AR}{AC.AD} + \frac{AR.AP}{AD.AB} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} + \frac{AD}{AR} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA} = 1.$$

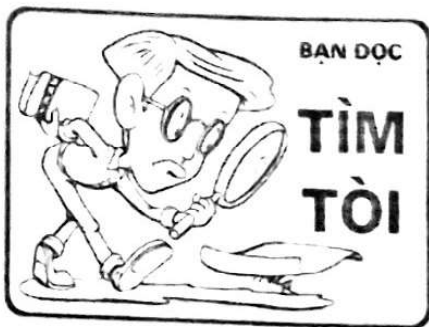
BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Qua điểm I cố định trên đoạn AM ta kẻ đường thẳng (d) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh tỉ số $\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA}$ không đổi.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và I là điểm cố định trên đoạn AG . Mặt phẳng (α) qua I cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại P, Q, R . Chứng minh tỉ số $\frac{BP}{PA} + \frac{CQ}{QA} + \frac{DR}{RA}$ không đổi.

Qua việc tìm tòi các lời giải và tổng quát hóa của một bài toán giúp cho học sinh hứng thú hơn trong việc học tập bộ môn Toán; từ đó tỉ lệ học sinh giỏi, học sinh đậu đại học của những học sinh mà tôi giảng dạy ngày càng cao. Đặc biệt bài toán 2) được chọn làm đề thi học sinh giỏi Đồng bằng sông Cửu Long.

Trên đây là một vài suy nghĩ, tìm tòi của bản thân trong quá trình dạy học. Rất mong sự đóng góp của quý đồng nghiệp.



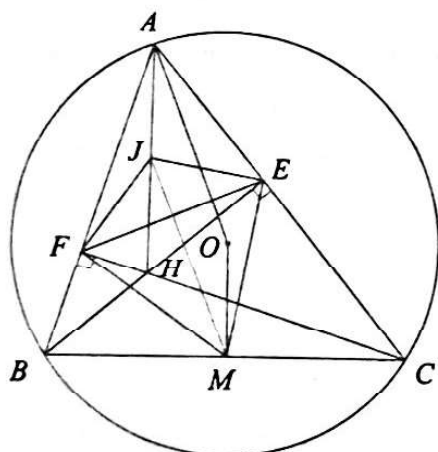
MỘT TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Các bài toán về trục tâm trong tam giác là các bài toán được khai thác nhiều trong các đề thi học sinh giỏi. Nghiên cứu kỹ các tính chất của trục tâm tam giác giúp ta có nhiều kỹ năng làm hình học phẳng. Sau đây tôi xin giới thiệu một tính chất đẹp của đường cao trong tam giác có nhiều ứng dụng thú vị sau đây

Tính chất. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BE, CF . Khi đó $OA \perp EF$.

Chứng minh.



Để thấy tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$,
mà $\widehat{OAF} = 90^\circ - \widehat{ACB}$ suy ra $\widehat{OAF} + \widehat{AFE} = 90^\circ$,
do đó $OA \perp EF$.

Nhận xét. Từ tính chất trên suy ra các tính chất khác như:

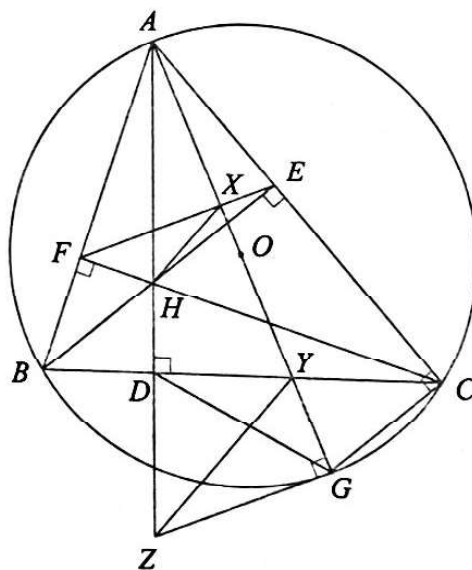
i) Gọi M, J lần lượt là trung điểm BC, AH thì MJ đi qua trung điểm EF và $AJMO$ là hình bình hành;

ii) $\widehat{JEM} = \widehat{JFM} = 90^\circ$.

Các tính chất nêu ở nhận xét trên khá đơn giản, xin dành bạn đọc tự chứng minh. Sau đây là một số bài toán ứng dụng tính chất nói trên.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H . Đường kính AG của (O) cắt EF, BC lần lượt tại X, Y . Tiếp tuyến của (O) tại điểm G cắt AD tại điểm Z . Chứng minh $XH \parallel YZ$.

Lời giải.



Ta có các tứ giác $CDHE$ và $CGXE$ nội tiếp nên

$$AH \cdot AD = AE \cdot AC = AX \cdot AG$$

Dẫn đến $DH \cdot XG$ là tứ giác nội tiếp. Chú ý rằng $DY \cdot GZ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HXG} = \widehat{ZDG} = \widehat{ZYG}$ từ đó suy ra điều phải chứng minh.

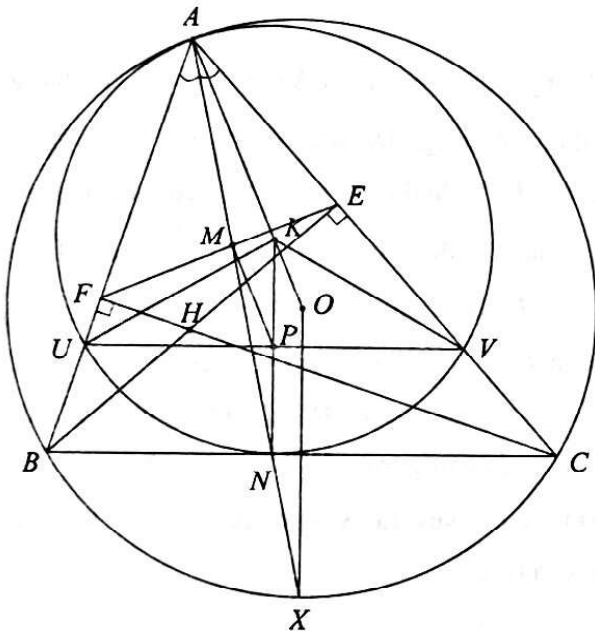
Nhận xét. Bài toán trên còn có thể tổng quát như sau: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

Điểm M thuộc cung nhỏ BC . AM cắt EF , BC lần lượt tại K , N . Đường thẳng qua M và vuông góc với AM cắt AH tại điểm L . Chứng minh rằng $HK \parallel NL$.

Lời giải xin dành cho bạn đọc.

Bài 2. Cho tam giác ABC có hai đường cao BE , CF cắt nhau tại H . Đường phân giác AN của tam giác cắt EF tại M , đường thẳng qua M vuông góc với EF cắt đường thẳng qua N vuông góc với BC tại P . Chứng minh AP đi qua trung điểm của BC .

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , AN cắt (O) tại điểm thứ hai là X thì X là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa A của đường tròn (O) .

Do $EF \perp OA$, $EF \perp MP \Rightarrow OA \parallel MP$, $NP \perp BC$, $OX \perp BC \Rightarrow OX \parallel NP$, suy ra tam giác PMN cân tại P . Do đó gọi K là giao điểm của NP và AO thì tam giác KAN cân tại K .

Gọi U là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (K, KN) ; V là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (K, KN) . Ta có:

$$\frac{KP}{KU} = \frac{KN}{KN} = \frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AB} \quad (\text{do } \triangle ABC \sim \triangle AEF),$$

Mà $\widehat{PKU} = 2\widehat{UAN} = \widehat{EAB} \Rightarrow \triangle PKU \sim \triangle EAB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KPU} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{KPV} = 90^\circ$, suy ra ba điểm U, P, V thẳng hàng và P là trung điểm của UV . Do $UV \parallel BC$ có P là trung điểm UV nên AP đi qua trung điểm BC .

Nhận xét. Ta có bài toán tương tự: Cho tam giác ABC có hai đường cao BE , CF cắt nhau tại H . Đường phân giác AN cắt (O) tại X , cắt EF tại M . Lấy $U \in AB, V \in AC$ sao cho $NU \parallel BX, NV \parallel CX$. Gọi P là trung điểm UV . Chứng minh rằng $PM = PN$.

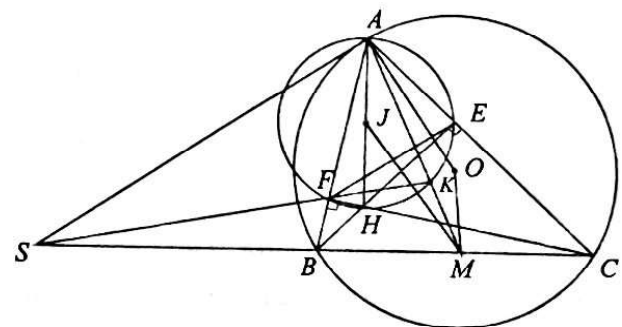
Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BE , CF cắt nhau tại H . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S . Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt đường tròn đường kính AH tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh tam giác SAK cân tại S .

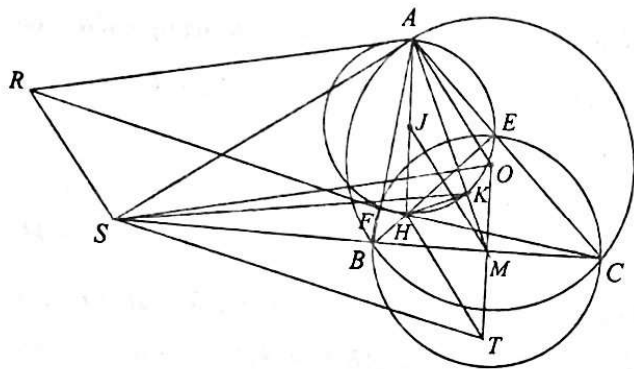
b) Gọi R là đỉnh của hình bình hành $AOSR$. Chứng minh hai tam giác ARH và ASK đồng dạng.

Lời giải.

a)

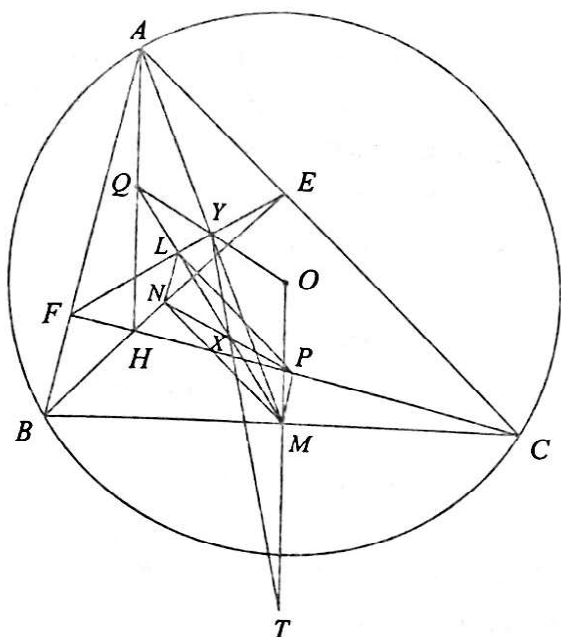


b)


$$= 90^\circ - \widehat{AMS} = \widehat{HAM} \Rightarrow \widehat{RAH} = \widehat{SAK},$$

Lời giải. Kẻ các đường cao BE , CF của $\triangle ABC$. Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Do $ABA'C$ là hình bình hành và $BH \perp AC$ nên $\widehat{HBA'} = 90^\circ$ suy ra

Lời giải. Gọi H là trực tâm tam giác ABC ; Q, L lần lượt là trung điểm AH và EF . Theo tính chất i) thì $AQMO$ là hình bình hành nên Y là trung điểm OQ . Dễ thấy $MNLP$ là hình bình hành nên Q, L, M, X thẳng hàng.



Gọi T là giao điểm của XY với OM . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác QOM với ba điểm X, Y, T thẳng hàng ta có:

$$\frac{YQ}{YO} \cdot \frac{TO}{TM} \cdot \frac{XM}{XQ} = 1 \Rightarrow \frac{TO}{TM} = \frac{XQ}{XM}.$$

Vì độ dài các đoạn thẳng OM, BC không đổi nên

$$MQ = \sqrt{QF^2 + FM^2} = \sqrt{OM^2 + \frac{BC^2}{4}} \text{ không đổi.}$$

$$\text{Lại có } \widehat{QFM} = 90^\circ \text{ nên } ML = \frac{MF^2}{MQ} = \frac{BC^2}{4MQ^2}$$

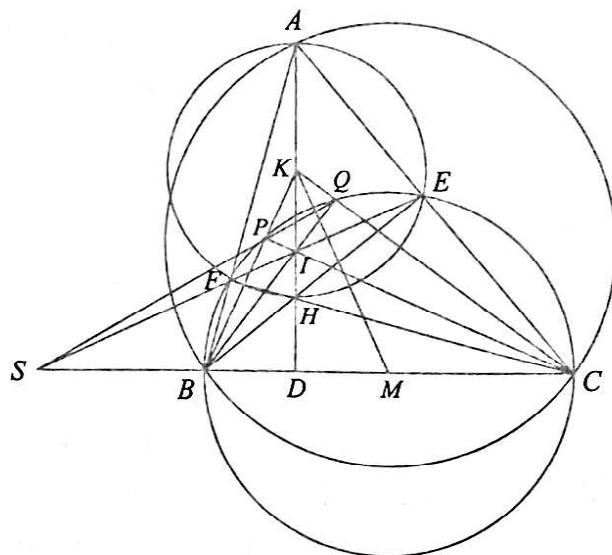
không đổi, suy ra XM không đổi, do đó $XQ = MQ - MX = OA - MX$ không đổi. Vậy

$$\frac{TO}{TM} \text{ không đổi, do } O, M \text{ cố định nên } T \text{ là điểm}$$

cố định.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm AH ; I là giao điểm của AH và EF . Chứng minh I là trực tâm tam giác KBC .

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường tròn đường kính BC với KB, KC ; M là trung điểm BC .



Gọi I' là giao điểm của BQ và CP thì I' là trực tâm tam giác KBC nên $I' \in AD$.

Ta chứng minh $I' \in EF$.

Gọi S, S' lần lượt là giao điểm của BC với EF và PQ . Ta có $(S, D, B, C) = -1$ và $(S', D, B, C) = -1$ (hàng điều hòa cơ bản của tam giác ABC và KBC) suy ra $S' \equiv S$. Tức là PQ, EF, BC đồng quy tại điểm S .

Theo định lý Brocard thì I' là trực tâm tam giác SKM nên $SI' \perp KM$. Theo tính chất trên thì $EF \perp KM \Rightarrow SE \perp KM$ nên S, E, F, I' là bốn điểm thẳng hàng suy ra $I' \equiv I$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AO cắt EF và đường trung bình ứng với đỉnh D của tam giác DEF lần lượt tại G, K . Chứng minh hai đường tròn (K, KG) và (DEF) tiếp xúc nhau.

Bài 2. Cho tam giác ABC , ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, EF . Gọi X là giao điểm của AO và EF .

(Xem tiếp trang 22)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/537 (Lớp 6). Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a^3 + a + 2 = 2^b$ và $a^2 = 2^c + 1$.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳnh Hợp 2, Nghệ An)

Bài T2/537 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 30^\circ, \widehat{CBA} = 100^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Tính số đo góc $\widehat{CDB}$.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T3/537. Cho các số nguyên dương a, b, n thỏa mãn $\frac{a^n - 1}{b^n - 1}$ và $\frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $n = 1$.

NGUYỄN VĂN QUÝ

(Hà Nội)

Bài T4/537. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung BC (không chứa A). Các điểm D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC . Xác định vị trí điểm M để tổng

$$MA + MB + MC + MD + ME$$

đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/537. Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; k]$ với k là số thực dương cho trước sao cho $a + b + c = 2k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = ab(a + k) + bc(b + k) + ca(c + k).$$

ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/537. Có bao nhiêu tập A mà các phần tử của nó gồm 2020 số dương phân biệt, trong đó có hai số 1, 2 và thỏa mãn tính chất: Với hai phần tử phân biệt bất kỳ x và y thuộc tập A thì ít nhất một trong hai số $|x - y|$ và $x + y$ cũng thuộc tập A ?

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T7/537. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC thì

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4R + r}{R}},$$

trong đó $a = BC, b = AC, c = AB; R, r, r_a, r_b, r_c$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, các bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/537. Cho tam giác $ABC, (I)$ là đường tròn nội tiếp tam giác. E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, AC . Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các đoạn AB, AC sao cho MN tiếp xúc với (I) . Chứng minh rằng

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{MA}{MB} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1.$$

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T9/537. Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3 + y}{y^3 + x} - 1 \geq \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x} - \ln \frac{(y^2 + 1)^2}{y}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/537. Cho số nguyên dương $n > 1$. Chứng minh rằng nếu $4^n - 2^n + 1$ là số nguyên tố thì tất cả các ước nguyên tố của n phải nhỏ hơn 5.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/537. Cho hàm số $f(x) = \frac{2033 \cdot 25^x}{25^x + 5}, x \in \mathbb{R}$.

Tính tổng
$$S = \sum_{k=1}^{2020} \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right],$$
 với $[x]$ là số

nguyên lớn nhất không vượt quá x .

ĐÀO XUÂN LUYỆN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/537. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn tâm C bán kính CB cắt BA tại D khác B và cắt (O) tại E khác B . DE cắt (O) tại F khác E . CO cắt DE , AB lần lượt tại G , L . Gọi Q là điểm đối xứng với E qua trung điểm của GF . P thuộc EF sao cho PL vuông góc với BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác LPQ cắt AB tại R khác L . K là điểm đối xứng với R qua CF . Chứng minh rằng $FK \parallel BC$.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/537. Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số $f = 80$ Hz, tốc độ truyền sóng là $1,6$ m/s. Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O . Biết $OA = 9$ cm; $OB = 12$ cm. Số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

Bài L2/536. Điện năng được truyền từ nơi phát đến nơi tiêu thụ bằng đường dây một pha với tổng chiều dài là 160 km. Vì công suất hao phí trên đường dây bằng 5% công suất đưa lên nên nơi nhận công suất chỉ còn 47500 kW và điện áp nhận được là 190 kV. Hệ số công suất đường dây bằng 1 . Nếu dùng dây đồng có điện trở suất $1,6 \cdot 10^{-3} \Omega \text{m}$, khối lượng riêng của đồng là 8800 kg/m^3 thì khối lượng đồng dùng làm đường dây này bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/537 (For 6th grade). Find all natural numbers a, b, c satisfying $a^3 + a + 2 = 2^b$ and $a^2 = 2^c + 1$.

Problem T2/537 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{CAB} = 30^\circ, \widehat{CBA} = 100^\circ$. On the line segment AB choose the point D so that $CD = AB$. Find the measurement of the angle $\widehat{CDB}$.

Problem T3/537. Suppose that a, b, n are positive integers satisfying $\frac{a^n - 1}{b^n - 1}$ and $\frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$ are prime numbers. Prove that $n = 1$.

Problem T4/537. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A inscribed in the circle $(O; R)$. M is a point moving on the arc BC which does not contain A . The points D and E respectively are the perpendicular projections of

M on AB and AC . Determine the position of M so that the sum

$$MA + MB + MC + MD + ME$$

obtains its maximum value.

Problem T5/537. Given a positive number k and three numbers a, b, c in the interval $[0; k]$ so that $a + b + c = 2k$. Find the minimum value of the expression

$$A = ab(a + k) + bc(b + k) + ca(c + k).$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/537. How many sets A are there so that A has 2020 distinct positive numbers including 1, 2 and satisfies: For any two different elements x and y belong to A then either $|x - y|$ or $x + y$ also belongs to A ?

Problem T7/537. For any triangle ABC , show that

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4R + r}{R}},$$



where $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; R, r, r_a, r_b, r_c respectively are the circumradius, inradius, exradii corresponding to A, B, C of the triangle.

Problem T8/537. Given a triangle ABC and let (I) be its incircle. Let E, F respectively be the points of tangency between (I) and AB, AC . Let M, N respectively be the points of the line segments AB, AC so that MN is tangent to (I) . Prove that

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{MA}{MB} + \frac{FC}{FA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1.$$

Problem T9/537. Given $x, y \geq 1$. Show that

$$\frac{x^3 + y}{y^3 + x} - 1 \geq \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x} - \ln \frac{(y^2 + 1)^2}{y}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/537. Given an integer $n > 1$. Show that if $4^n - 2^n + 1$ is a prime number then all the prime factors of n must be less than 5.

Problem T11/537. Consider the function

$$f(x) = \frac{2033 \cdot 25^x}{25^x + 5}, x \in \mathbb{R}. \text{ Compute the sum}$$

$$S = \sum_{k=1}^{2020} \left[\frac{f\left(\frac{k}{2021}\right)}{19} \right],$$

where $[x]$ is the largest integer which does not exceed x .

Problem T12/537. Given an acute, scalene triangle ABC inscribed in the circle (O) . The circle with center C and radius CB intersects BA at D (which is different from B) and intersects (O) at E (which is different from B). DE intersects (O) at F (which is different from E). CO intersects DE, AB respectively at G, L . Let Q be the reflection point of E in the midpoint of GF . The point P belongs to EF so that PL perpendicular to BC . The circumcircle of LPQ intersects AB at R (which is different from L). Let K be the reflection point of R in CF . Show that $FK \parallel BC$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

MỘT TÍNH CHẤT ... (Tiếp theo trang 19)

a) Chứng minh $HN \parallel DX$.

b) Gọi P là giao điểm của KM và DX . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM nằm trên đường thẳng OP .

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là J ; AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G ; GJ cắt BC tại K . Chứng minh rằng KH chia đôi EF .

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Lấy K, L lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $HK \perp DE, HL \perp DF$. Gọi T là trung điểm KL . Chứng minh $AT \perp EF$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường phân giác

của hai góc $\widehat{ABH}, \widehat{ACH}$ cắt nhau tại điểm K .

a) Chứng minh K thuộc đường tròn đường kính BC .

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BF, CE ; X, Y lần lượt là giao điểm thứ hai của KP, KQ với đường tròn đường kính BC ; KT là đường kính của đường tròn đường kính BC . Tiếp tuyến tại T của đường tròn đường kính BC cắt XY tại S . Chứng minh $PQ \parallel MS$.

Bài 6. Cho tam giác ABC không cân, không vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ đỉnh B, C của tam giác ABC . Gọi P là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (O) tại A . Gọi Q là giao điểm thứ hai của (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF , R là giao điểm của AQ và EF . Chứng minh $PR \perp OH$.



Bài T1/533. Cho

$$A = \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \dots + \frac{1}{8082} + \frac{1}{8083}$$

trong đó mẫu số của các phân số lấy các giá trị nguyên liên tiếp từ 2021 đến 8083. Hãy so sánh A với $\frac{11}{6}$.

Lời giải. Tổng A có 6063 số hạng.

Cách 1. Đặt

$$A = \left(\frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{4041} \right) + \left(\frac{1}{4042} + \dots + \frac{1}{6062} \right) + \left(\frac{1}{6063} + \dots + \frac{1}{8083} \right)$$

$$= B + C + D,$$

trong đó mỗi tổng B, C, D có 2021 số hạng, theo thứ tự như trên. Đánh giá mỗi số hạng trong các tổng trên như sau:

$$B = \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{4041} < \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{2021} = \frac{2021}{2021} = 1;$$

$$C = \frac{1}{4042} + \dots + \frac{1}{6062} < \frac{1}{4042} + \dots + \frac{1}{4042} = \frac{2021}{4042} = \frac{1}{2};$$

$$D = \frac{1}{6063} + \dots + \frac{1}{8083} < \frac{1}{6063} + \dots + \frac{1}{6063} = \frac{2021}{6063} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Như vậy } A = B + C + D < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

$$\text{Cách 2. Đặt } A = \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{3029} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3030} + \dots + \frac{1}{4039} \right) + \left(\frac{1}{4040} + \dots + \frac{1}{5049} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{5050} + \dots + \frac{1}{6059} \right) + \left(\frac{1}{6060} + \dots + \frac{1}{7069} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{7070} + \dots + \frac{1}{8079} \right) + \left[\left(\frac{1}{8080} + \dots + \frac{1}{8083} \right) - \frac{1}{2020} \right]$$

$$= E + F + G + H + K + M + N,$$

trong đó mỗi tổng E, F, G, H, K, M có 1010 số hạng, tổng cuối cùng N có 5 số hạng, theo thứ tự như trên. Đánh giá mỗi số hạng trong các tổng trên như sau:

$$E = \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{3029}$$

$$< \frac{1}{2020} + \dots + \frac{1}{2020} = \frac{1010}{2020} = \frac{1}{2};$$

$$F = \frac{1}{3030} + \dots + \frac{1}{4039}$$

$$< \frac{1}{3030} + \dots + \frac{1}{3030} = \frac{1010}{3030} = \frac{1}{3};$$

$$G = \frac{1}{4040} + \dots + \frac{1}{5049}$$

$$< \frac{1}{4040} + \dots + \frac{1}{4040} = \frac{1010}{4040} = \frac{1}{4};$$

$$H = \frac{1}{5050} + \dots + \frac{1}{6059}$$

$$< \frac{1}{5050} + \dots + \frac{1}{5050} = \frac{1010}{5050} = \frac{1}{5};$$

$$K = \frac{1}{6060} + \dots + \frac{1}{7069}$$

$$< \frac{1}{6060} + \dots + \frac{1}{6060} = \frac{1010}{6060} = \frac{1}{6};$$

$$M = \frac{1}{7070} + \dots + \frac{1}{8079}$$

$$< \frac{1}{7070} + \dots + \frac{1}{7070} = \frac{1010}{7070} = \frac{1}{7};$$

$$N = \left(\frac{1}{8080} + \dots + \frac{1}{8083} \right) - \frac{1}{2020}$$

$$< \frac{4}{8080} - \frac{1}{2020} = 0.$$

$$\text{Như vậy } A = E + F + G + H + K + M + N$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$= 1 + \frac{83}{140} < 1 + \frac{84}{140} = 1 + \frac{3}{5} < 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}.$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt. **Hưng Yên:** Lê Tuấn Hiệp, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** Hoàng Văn Nhân, Nguyễn Thị Băng Tâm, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/533. Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn: $p + 4q$ và $q + 4p$ đều là các số chính phương.

Lời giải. Dễ thấy $p=2$ hoặc $q=2$ thì $p+4q$ hoặc $q+4p$ là số chẵn chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, không thể là số chính phương. Vậy, cả p và q đều là số nguyên tố lẻ. Do đó $p+4q$ và $q+4p$ đều là các số chính phương lẻ, cho nên $p \equiv 1 \pmod{4}$, $q \equiv 1 \pmod{4}$ và do đó $p > 4$, $q > 4$ (*).

Đặt $p+4q = x^2$ và $q+4p = y^2$, ta có:

$$(p+4q)(q+4p) = (xy)^2.$$

Biến đổi ta có: $4p^2 + 4q^2 + 17pq = a^2$, $a = xy$

$$\Rightarrow (2p+2q)^2 + 9pq = a^2$$

$$\Rightarrow 9pq = [a - (2p+2q)][a + (2p+2q)].$$

Do $a + (2p+2q) > a - (2p+2q)$ và tích của cả hai đều là $9pq$, cho nên $a + (2p+2q)$ chỉ có thể là ước lớn của $9pq$. Không mất tổng quát giả sử $p > q$. Khi đó $a + (2p+2q)$ chỉ có thể là:

$$9pq, 3pq, pq, 9p, 9q, 3p, p.$$

Xét các trường hợp:

$$1) \begin{cases} a + (2p+2q) = 9pq \\ a - (2p+2q) = 1 \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có:

$$9pq - 1 = 4(p+q) \Rightarrow (p-4)(q-4) + (8pq-17) = 0$$

là điều không xảy ra vì $p > 4$, $q > 4$ theo (*).

$$2) \begin{cases} a + (2p+2q) = 3pq \\ a - (2p+2q) = 3 \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có:

$$3pq - 3 = 4(p+q) \Rightarrow (p-4)(q-4) + (2pq-19) = 0$$

là điều không xảy ra vì $p > 4$, $q > 4$ theo (*).

$$3) \begin{cases} a + (2p+2q) = pq \\ a - (2p+2q) = 9 \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có:

$$pq - 9 = 4(p+q) \Rightarrow (p-4)(q-4) = 25.$$

Ta có $p = 5$, $q = 29$ hoặc có $p = 29$, $q = 5$. Kiểm tra lại ta thấy hai nghiệm này thỏa mãn bài toán.

$$4) \begin{cases} a + (2p+2q) = 9p \\ a - (2p+2q) = q \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có:

$$9p - q = 4(p+q) \Rightarrow p = q, \text{ ta lại thu lại nghiệm trong 5).}$$

$$5) \begin{cases} a + (2p+2q) = 9q \\ a - (2p+2q) = p \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có $9q - p = 4(p+q) \Rightarrow q = p$. Trong trường hợp này $p+4q = q+4p = 5p$ là chính phương khi và chỉ khi $p = q = 5$.

$$6) \begin{cases} a + (2p+2q) = 3p \\ a - (2p+2q) = 3q \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có $3p - 3q = 4(p+q) \Rightarrow p + 7q = 0$ là điều vô lý.

$$7) \begin{cases} a + (2p+2q) = p \\ a - (2p+2q) = 9q \end{cases}$$

Lấy vế trên trừ đi vế dưới ta có $p - 9q = 4(p+q) \Rightarrow 3p + 13q = 0$ là điều vô lý.

Tóm lại, tất cả nghiệm của bài toán là $(5, 5)$, $(5, 29)$ và $(29, 5)$.

Nhận xét: Nhiều bạn gửi bài giải tới Tòa soạn, nhưng chỉ tìm được nghiệm $(5, 5)$. Các bạn sau đây có đáp số đầy đủ: **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C2 THCS-THPT Archimedes Đông Anh; **Nghệ An:** Đinh Ana, 7A THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/533. Tìm tất cả các số (x, y, p) thỏa mãn phương trình $x^5 + x^4 + 1 = p^y$, trong đó x, y là hai số nguyên dương và p là số nguyên tố.

Lời giải. Với $x=1$ ta có $p^y = 3 \Rightarrow p=3, y=1$.

Bộ số $(x, y, p) = (1, 1, 3)$ thỏa mãn phương trình.

Với $x \geq 2$, ta có:

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1).$$

Mà $(x^3 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = x(x^2 - x - 2) \geq 0$ nên $x^3 - x + 1 \geq x^2 + x + 1$. Vì p là số nguyên tố, từ $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = p^y$ suy ra:

$$\begin{cases} x^3 - x + 1 = p^a \\ x^2 + x + 1 = p^b \end{cases} \quad (a \geq b; a + b = y; a, b \in \mathbb{N}^*).$$

Vì $p^a : p^b$ nên $x^3 - x + 1 : x^2 + x + 1$. Ta có:

$$x^3 - x + 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - (x-2) : x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow x-2: x^2+x+1.$$

Mà $0 \leq x-2 < x^2+x+1$ nên $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Thay vào giả thiết, ta được:

$$49 = p^y \Rightarrow p=7, y=2.$$

Bộ số $(x, y, p) = (2, 2, 7)$ thỏa mãn phương trình.

Vậy các bộ số phải tìm là:

$$(x, y, p) \in \{(1, 1, 3); (2, 2, 7)\}.$$

Nhận xét. Với $x \geq 2$ điều then chốt của lời giải là phân tích: $x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$ và có

$x^3 - x + 1 \geq x^2 + x + 1$, suy ra: $x^3 - x + 1: x^2 + x + 1$;

Từ $x^3 - x + 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - (x-2)$

$\Rightarrow x-2: x^2 + x + 1$; có thể tiếp như sau:

Từ $x^2 + x + 1 = (x-2)(x+3) + 7: x^2 + x + 1$

$\Rightarrow 7: x^2 + x + 1$; suy ra: $x^2 + x + 1 = 7$.

Ta cũng tìm được $x = 2$.

Một số bạn đã giải bài toán theo trình tự: xét các trường hợp $x=1$; $x=2$ sau đó chứng minh khi $x \geq 3$ bài toán không thỏa mãn.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

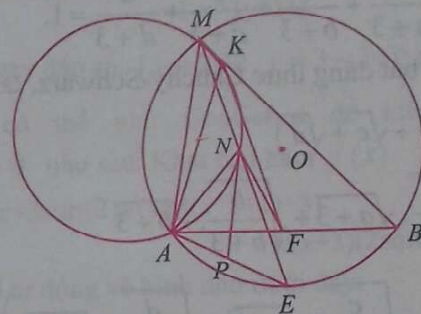
Thanh Hóa: Trần Tuấn Tú, 8B, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Tuấn Dũng, 8B, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** Phạm Xuân Hoàng, Đinh A Na, 7A, Nguyễn Hải Triều, Thái Minh Quân, Nguyễn Đăng Quang, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Cao Thị Khánh Chi, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/533. Cho AB là dây cung cố định của đường tròn $(O; R)$ (AB khác $2R$). M là điểm di động trên cung lớn AB ($MA < MB$), N là hình chiếu vuông góc của O trên tia phân giác của góc AMB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MB tại K , cắt AB tại D . Chứng minh rằng đường thẳng qua K và song song với MN đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Gọi E là giao điểm thứ hai của MN với đường tròn (O) ; gọi F, P lần lượt là trung điểm AB, AE .

Dễ thấy F là điểm cố định khi M thay đổi.



Theo tính chất đường kính-dây cung, điểm N là trung điểm của ME . Tứ giác $AMKN$ nội tiếp nên

$\widehat{ANM} = \widehat{AKM}$, suy ra $\widehat{ANE} = \widehat{AKB}$.

Lại có $\widehat{AEM} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$). Từ đó suy ra $\triangle ANE \sim \triangle AKB$ (g.g).

Vì P, F tương ứng là trung điểm AE và AB nên $\triangle PNE \sim \triangle FKB \Rightarrow \widehat{PNE} = \widehat{FKB}$ (1). Mặt khác, $PN \parallel AM$ (tính chất đường trung bình), nên $\widehat{PNE} = \widehat{AME}$ (đồng vị) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AME} = \widehat{FKB}$. Mà hai góc ở vị trí đồng vị, do đó $KF \parallel MN$. Vậy đường thẳng qua K , song song với MN luôn đi qua điểm F cố định.

Nhận xét. 1) Giả thiết điểm D là thừa.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghệ An:** Thái Minh Quân, Nguyễn Hải Triều, 8B, Võ Ánh Dương, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** Đỗ Ngọc Tiến, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Phan Đức Đạt, 9A1, THCS Vĩnh Yên; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/533. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa

mãn $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} + \frac{1}{d+3} = 1$ (*). Chứng

minh $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq 6$.

Lời giải. Cách 1. Nhận thấy

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} + \frac{3}{d+3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{a+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{b+3}\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{3}{c+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{d+3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+3} + \frac{c}{c+3} + \frac{d}{d+3} = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \\ &= \left(\sqrt{\frac{a}{a+3}} \cdot \sqrt{a+3} + \sqrt{\frac{b}{b+3}} \cdot \sqrt{b+3} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{c}{c+3}} \cdot \sqrt{c+3} + \sqrt{\frac{d}{d+3}} \cdot \sqrt{d+3} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+3} + \frac{c}{c+3} + \frac{d}{d+3} \right) (a+b+c+d+12) \\ &= a+b+c+d+12. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \leq a+b+c+d+12$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{ad} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{bd} + 2\sqrt{cd} \leq 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{a+3} = \frac{\sqrt{b}}{b+3} = \frac{\sqrt{c}}{c+3} = \frac{\sqrt{d}}{d+3} \\ \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} + \frac{1}{d+3} = 1 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=1.$$

Cách 2. Do điều kiện (*) nên tồn tại các số dương

$$x, y, z, t \text{ sao cho: } a = \frac{3x}{y+z+t}; b = \frac{3y}{z+t+x};$$

$$c = \frac{3z}{t+x+y}; d = \frac{3t}{x+y+z}. \text{ Khi đó}$$

$$\sqrt{ab} = 3 \sqrt{\frac{xy}{(y+z+t)(z+t+x)}} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{x}{z+t+x} + \frac{y}{y+z+t} \right) \quad (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\sqrt{ac} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{x}{t+x+y} + \frac{z}{y+z+t} \right) \quad (2);$$

$$\sqrt{ad} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x+y+z} + \frac{t}{y+z+t} \right) \quad (3);$$

$$\sqrt{bc} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{y}{t+x+y} + \frac{z}{z+t+x} \right) \quad (4);$$

$$\sqrt{bd} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{y}{x+y+z} + \frac{t}{z+t+x} \right) \quad (5);$$

$$\sqrt{cd} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{z}{x+y+z} + \frac{t}{t+x+y} \right) \quad (6).$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3), (4), (5), (6) và biến đổi, ta nhận được:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq 6.$$

Nhận xét. Đây là bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện. Các bạn gửi bài giải đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Phan Đức Đạt, 9A1, THCS Vĩnh Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/533. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = y + 2\sqrt{2} & (1) \\ 9y^2(x+3y) = 1 - x^3y^3 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Lời giải. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 9y^2x + 27y^3 - 1 + x^3y^3 = 0 \quad (2').$$

Đặt $a = xy, b = 3y$. Khi ấy (2') trở thành:

$$a^3 + b^3 + 3ab - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3ab - 1 - 3a^2b - 3ab^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 1 - 3ab(a+b-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1) \left[(a+b)^2 + (a+b) + 1 - 3ab \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)(a^2 + b^2 - ab + a + b + 1) = 0.$$

• TH1: $a^2 + b^2 - ab + a + b + 1 = 0 \quad (2a).$

Coi (2a) như phương trình bậc hai của a :

$$(2a) \Leftrightarrow a^2 - a(b-1) + b^2 + b + 1 = 0.$$

$$\text{Vì } \Delta = (b-1)^2 - 4(b^2 + b + 1)$$

$$= -3(b^2 + 2b + 1) = -3(b+1)^2 \leq 0$$

nên (2a) $\Leftrightarrow b = -1, a = -1$ hay

$$xy = a = -1, 3y = b = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}, x = 3$$

không thỏa mãn phương trình (1).

• TH2: $a + b - 1 = 0$ hay

$$xy + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y(x+3) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+3}.$$

Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{x+3} + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3=\frac{1}{x+3}+2\sqrt{2}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+1)-9}{\sqrt{x^2+1}+3}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2\sqrt{2}+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-8}{\sqrt{x^2+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}-x}{(x+3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2\sqrt{2})\left(\frac{x+2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+3}+\frac{1}{(x+3)(2\sqrt{2}+3)}\right)=0.$$

Với $x=2\sqrt{2}$ thì $y=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$.

Vậy cặp $x=2\sqrt{2}, y=3-2\sqrt{2}$ là nghiệm của (I).

Xét $f(x)=\frac{x+2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+3}+\frac{1}{(x+3)(2\sqrt{2}+3)}$.

Nếu $x < -3$ thì $x+3 < 0$ và $x+2\sqrt{2} < x+3 < 0$ nên $f(x) < 0$.

Nếu $x > -3$ thì $x+2\sqrt{2} > 2\sqrt{2}-3$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &> \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{x^2+1}+3} + \frac{1}{(x+3)(2\sqrt{2}+3)} \\ &= \frac{(x+3)(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3) + (\sqrt{x^2+1}+3)}{(\sqrt{x^2+1}+3)(x+3)(2\sqrt{2}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+3)(x+3)(2\sqrt{2}+3)} > 0. \end{aligned}$$

Do $\sqrt{x^2+1}-x > \sqrt{x^2}-x = |x|-x \geq 0$, vậy với mọi $x \neq -3$ thì $f(x) \neq 0$.

Kết luận: Hệ (I) có duy nhất nghiệm $(x; y)$ là $(2\sqrt{2}; 3-2\sqrt{2})$.

Nhận xét 1. Có thể nhờ *GeoGebra* (dễ dàng lấy miễn phí trên mạng) để giải phương trình

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{x+3}+2\sqrt{2}$$

như sau: Sau khi mở *GeoGebra*, khai báo lệnh solve (giải phương trình hoặc hệ phương trình), khai báo phương trình ($\sqrt{x^2+1}=1/(x+3)+2\sqrt{2}$):

$$\bullet \text{ solve}(\sqrt{x^2+1}=1/(x+3)+2\sqrt{2})$$

được ngay đáp số $x=2\sqrt{2}$.

Thậm chí có thể giải ngay hệ ban đầu:

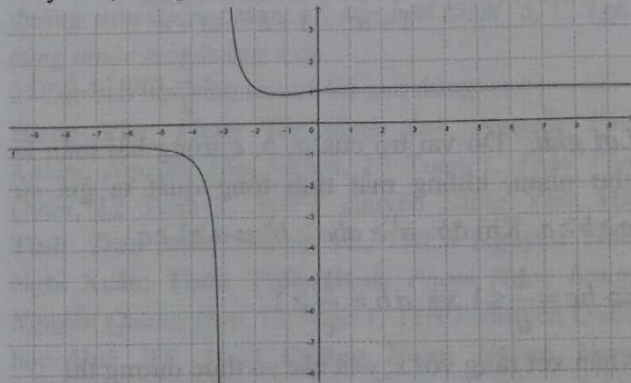
$$\bullet \text{ solve}(\{\sqrt{x^2+1}=y+2\sqrt{2}, 9y^2(x+3y)=1-x^3y^3\})$$

được ngay đáp số: $(x=2\sqrt{2}, y=3-2\sqrt{2})$.

Cũng có thể nhờ *GeoGebra* để kiểm chứng $f(x) \neq 0$ như sau: Khai báo hàm $f(x)$:

$$f(x)=(x+2\sqrt{2})/(\sqrt{x^2+1}+3)+1/(x+3)(2\sqrt{2}+3)$$

Máy sẽ tự động vẽ hình như dưới đây:



Rõ ràng đồ thị hàm số $y=f(x)$ không cắt trục hoành hay $f(x) \neq 0$ với mọi $x \neq -3$.

Tạ Duy Phương cảm ơn ThS. Nguyễn Hoàng Vũ đã hướng dẫn cách đưa đồ thị ra màn hình.

Nhận xét 2. Đây là dạng “phương trình hỗn hợp” (Đại số + Căn thức) không quá khó (cho các bạn lớp chuyên lớp chọn). Đa số các bạn làm như đã trình bày trên. Các bạn dưới đây đã làm đúng:

Bà Rịa-Vũng Tàu: Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Nông:** Đinh Cao Tuyệt Như, 11A1, THPT Đắk Mil, huyện Đắk Mil; **Hà Nội:** Trần Việt Anh 8C1, THCS & THPT Archimedes, Đông Anh; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, huyện Nghi Xuân; **Nguyễn Thị Thùy Linh**, 12A1, THPT Cù Huy Cận, huyện Vũ Quang; **Hưng Yên:** Phạm Thị Minh Ánh, 10 Toán 1, Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kon Tum:** Nguyễn Đức Sơn, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Quảng Nam:** Lê Bá Khang, 10/1 THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín 10A1, THPT Kế Sách, huyện Kế Sách; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Hoàng Yến Nhi, 11 CT, THPT Gia Định, quận Bình Thạnh; **Thừa Thiên Huế:** Trần Duy Anh, 10 Anh 1, Nguyễn Quang Huy, 12 Toán 1, Hoàng Thị Phương Nga, Võ Thị Bảo Ngọc, Nguyễn

Đình Khải Nguyên, Nguyễn Thị Nhật Thảo, Nguyễn Đăng Anh Tuấn, 10 Toán 2, Phạm Ngọc Long, 12 Toán 1, Huỳnh An Phú, 10 Toán 1, Trần Thị Thanh Thư, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

TẠ DUY PHƯƠNG

Bài T7/533. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2} \cdot \max\{a, b, c\} \geq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2} \cdot \min\{a, b, c\}.$$

Lời giải. Do vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó: $a^3 \geq abc \geq b^3 \Rightarrow a \geq 1 \geq c$

$$\Rightarrow bc = \frac{1}{a} \leq 1 \text{ và } ab = \frac{1}{c} \geq 1.$$

Nhận xét rằng với x, y là các số thực dương thì

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{1+xy} = \frac{F}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)},$$

trong đó

$$\begin{aligned} F &= (1+y^2)(1+xy) + (1+x^2)(1+xy) - 2(1+x^2)(1+y^2) \\ &= (1+y^2)(1+xy-1-x^2) + (1+x^2)(1+xy-1-y^2) \\ &= -(1+y^2)x(x-y) + (1+x^2)y(x-y) \\ &= (x-y)[(x^2y-xy^2)-(x-y)] = (x-y)^2(xy-1). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \text{ nếu } xy \geq 1,$$

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} \text{ nếu } xy \leq 1.$$

Từ các kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+ab} + \frac{1}{2} = \frac{2}{1+\frac{1}{c}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2c}{c+1} + \frac{1}{2} \geq c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2},$$

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{1+bc} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1+\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2a}{a+1} \leq \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}.$$

BĐT thứ nhất trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $(a-b)(ab-1)=0, c=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

BĐT thứ hai trở thành đẳng thức khi và chỉ khi

$$(b-c)(bc-1)=0, a=1 \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: Nguyễn Thị Phương Thảo, 11A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 8C1, THCS Archimedes, Đông Anh; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Phạm Thị Minh Ánh, 10T1, Trần Văn Quân, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Hoàng Thị Phương Nga, Võ Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Đình Khải Nguyên, Võ Xuân Nhi, Nguyễn Thị Nhật Thảo, Nguyễn Đăng Anh Tuấn, Đặng Quỳnh Bảo Uyên, 10T2, Trần Thị Thanh Thư, 11T1, Phạm Ngọc Long, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng:** Trần Công Minh, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Đình Minh Quân, 11CT, THPT Gia Định, Bình Thạnh; **Kon Tum:** Nguyễn Đức Sơn, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Yên:** Nguyễn Thị Bảo Liên, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** Nguyễn Thanh Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn, Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín, 10A1, THPT Kế Sách, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

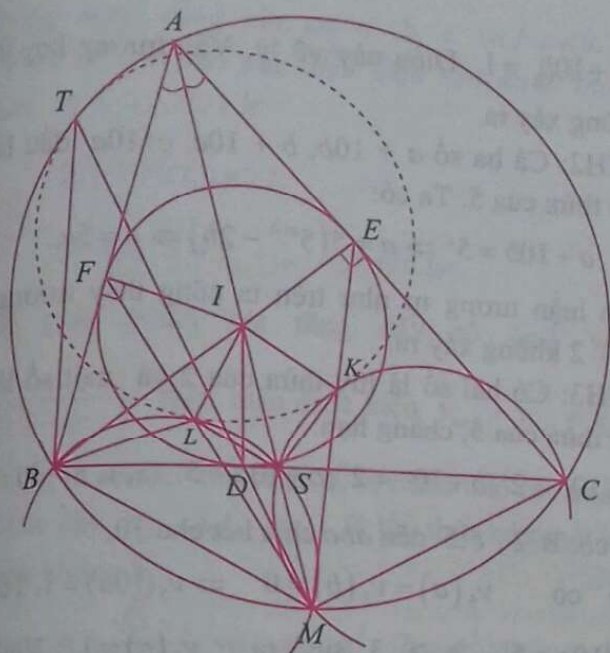
Bài T8/533. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F . Biết AI cắt BC tại S và cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BSM, CSM cắt MF, ME tương ứng tại K và L .

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, L, S, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi T là giao điểm thứ hai của MD với (O) . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O) .

Lời giải. a) Ta có:

$\widehat{BLM} = \widehat{BSM} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{BFL} = \widehat{MBL}$ nên MB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BFL .



Do đó $MB^2 = MI^2 = ML.MF$, suy ra MI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ILF . Từ đó $\widehat{ILF} = \widehat{AIF} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{MLS} = \widehat{MBS} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên $\widehat{ILS} = 90^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{IKS} = 90^\circ$, do đó bốn điểm I, L, S, K cùng thuộc đường tròn đường kính IS .

b) Từ $\widehat{BTM} = \widehat{MCD} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$; MB là tiếp tuyến của

các đường tròn ngoại tiếp tam giác TBD và tam giác FBL ; MI là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ILF và tam giác IKE ta có:

$$MB^2 = MI^2 = MC^2 = MD.MT = MF.ML = MK.ME.$$

Xét phép nghịch đảo cực M , phương tích $MI^2 = MB^2 = MC^2$ ($I_M^{k=MI^2}$) thì

$$I_M^{k=MI^2}: S \mapsto A; B \mapsto B; C \mapsto C; D \mapsto T; E \mapsto K; F \mapsto L.$$

Vậy qua phép nghịch đảo $I_M^{k=MI^2}$ đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF biến thành đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL , đường thẳng BC biến thành đường tròn (O) . Vì đường tròn (DEF) tiếp xúc với BC tại D , suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với đường tròn (O) tại T .

Nhận xét. 1) Câu a) cũng có thể giải theo cách khác: Xét phép nghịch đảo cực M , phương tích

$$k = MI^2 = MB^2 = MC^2 \left(I_M^{k=MI^2} \right),$$

thì $I_M^{k=MI^2}: S \mapsto A; B \mapsto B; C \mapsto C; I \mapsto I$. Từ đó qua phép nghịch đảo này đường tròn (MBS) biến thành đường thẳng AB , đường tròn (MCS) biến thành đường thẳng AC . Do đó $I_M^{k=MI^2}: K \mapsto E; L \mapsto F$. Ta thấy A, F, I, E lần lượt là ảnh của S, L, I, K qua phép nghịch đảo $I_M^{k=MI^2}$, mà A, F, I, E cùng thuộc đường tròn đường kính AI , nên bốn điểm S, L, I, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: Phạm Thị Minh Ánh, Nguyễn Văn Khiêm, Nguyễn Gia Khánh, 10 Toán 1, Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Ngọc Long, Nguyễn Quang Huy, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** Huỳnh Ngọc Hoàng, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Lâm Đồng:** Mai Trung Nguyên, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Bình Định:** Nguyễn Thành Hậu, 11A1, THPT Tây Sơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/533. Tìm các số thực a và b thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $a < b \leq 2000.2001$;

b) $(x+y+z-2000.2001)^2 \leq \frac{xyz}{500.2001}$ với mọi

$x, y, z \in [a, b]$;

c) $b - a$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Đặt $x = 500.2001x_1, y = 500.2001y_1,$

$z = 500.2001z_1$ với $x_1, y_1, z_1 \in [a_1, b_1]$ trong đó

$a = 500.2001a_1, b = 500.2001b_1$.

Khi đó: $a_1 b_1 \leq 4$. Ta đưa về bài toán tìm a_1, b_1 để

$$(x_1 + y_1 + z_1 - 4)^2 \leq x_1 y_1 z_1 \quad (*), \forall x_1, y_1, z_1 \in [a_1, b_1]$$

và $(b_1 - a_1)$ lớn nhất.

Đặt $x_1 = 2 + x_2, y_1 = 2 + y_2, z_1 = 2 + z_2$. Từ (*) suy ra:

$$(x_2 + 2)(y_2 + 2)(z_2 + 2) \geq (x_2 + y_2 + z_2 + 2)^2$$

$$\Rightarrow x_2 y_2 z_2 + 4 \geq x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \forall x_2, y_2, z_2 \in [c; d] \quad (**)$$

với $c = a_1 - 2, d = b_1 - 2$.

Cho $x_2 = y_2 = z_2 = c$, thì từ (**) ta có:

$$c^3 + 4 \geq 3c^2 \Leftrightarrow (c+1)(c-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq -1.$$

Cho $x_2 = y_2 = d, z_2 = c$, thay vào (**) ta có:

$$d^2c + 4 \geq 2d^2 + c^2 \Rightarrow d^2(2-c) \leq (2-c)(2+c)$$

$$\Leftrightarrow d^2 \leq 2+c \Leftrightarrow d-c \leq 2-d^2+d$$

(chú ý rằng dễ thấy $2-c \geq 0$).

- Nếu $d \geq 1$, suy ra: $-d^2 + d = d(1-d) \leq 0$. Vậy

$$b_1 - a_1 = d - c \leq 2.$$

- Nếu $d \leq 1$, kết hợp với $c \geq -1$ suy ra:

$$b_1 - a_1 = d - c \leq 2. \text{ Do đó } b_1 - a_1 = d - c \leq 2.$$

Vậy $(b_1 - a_1)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d=1, c=-1$.

Ngược lại khi $d=1, c=-1$, suy ra:

$$x_2y_2z_2 + 4 \geq x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a_1 = c + 2 = 1 \\ b_1 = d + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 500.2001 \\ b = 1500.2001 \end{cases}$$

Nhận xét. Đây là bài toán khó, chỉ có ba bạn giải đúng bài này, xin hoan nghênh ba bạn. Danh sách ba bạn là: **Hưng Yên:** Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/533. Cho a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a + 10b, b + 10c, c + 10a$ là lũy thừa của 2 hoặc là lũy thừa của 5. Chứng minh rằng abc chia hết cho 10 nhưng abc không chia hết cho 100.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

• TH1: Cả ba số $a + 10b, b + 10c, c + 10a$ đều là lũy thừa của 2. Ta có:

$$a + 10b = 2^x \Rightarrow a = 2(2^{x-1} - 5b).$$

Đặt $a = 2a_1$. Tương tự $b = 2b_1, c = 2c_1$. Từ đó:

$$a_1 + 10b_1 = 2^{x-1}, b_1 + 10c_1 = 2^{y-1}, c_1 + 10a_1 = 2^{z-1}.$$

Quá trình cứ tiếp tục như vậy và phải kết thúc ở bước thứ k nào đó khi ta có, chẳng hạn

$a_k + 10b_k = 1$. Điều này vô lý. Vậy trường hợp 1 không xảy ra.

• TH2: Cả ba số $a + 10b, b + 10c, c + 10a$ đều là lũy thừa của 5. Ta có:

$$a + 10b = 5^x \Rightarrow a = 5(5^{x-1} - 2b) \Rightarrow a = 5a_1.$$

Lập luận tương tự như trên ta cũng thấy trường hợp 2 không xảy ra.

• TH3: Có hai số là lũy thừa của 2 và một số là lũy thừa của 5, chẳng hạn:

$$a + 10b = 2^x; b + 10c = 2^y; c + 10a = 5^z \quad (x, y, z > 3).$$

Ta có: $a:2, c:5$ nên abc chia hết cho 10.

$$\text{Lại có } v_5(a) = v_5(b) = 0 \Rightarrow v_5(10a) = 1. \text{ Từ}$$

$$c + 10a = 5^z, z > 3 \text{ suy ra } v_5(c) = 1. \text{ Vậy}$$

$v_5(abc) = 1$. Vậy abc không chia hết cho 25, do đó không chia hết cho 100.

• TH4: Có một số là lũy thừa của 2 và hai số là lũy thừa của 5, chẳng hạn:

$$a + 10b = 5^x; b + 10c = 5^y; c + 10a = 2^z \quad (x, y, z > 3).$$

Ta có $a:5, c:2$ nên abc chia hết cho 10.

$$\text{Ta có } a + 10b = 5^x; b + 10c = 5^y \Rightarrow v_2(a) = 0,$$

$$v_2(b) = 0. \text{ Lại có: } c + 10a = 2^z, v_2(a) = 0, z > 3$$

$\Rightarrow v_2(c) = 1 \Rightarrow v_2(abc) = 1$. Vậy abc không chia hết cho 4, do đó không chia hết cho 100.

Nhận xét. Ngoài bạn Hoàng chỉ có 4 bạn tham gia giải bài toán này. Ba bạn có lời giải tốt (tuy hơi dài) là Trần Việt Anh (8C, THCS Acsimede, Đông Anh, Hà Nội); Phạm Ngọc Long (12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế); Nguyễn Huy Hoàng (12T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Nội).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/533. Cho a, b, c là các số thực dương không nguyên. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}_{n \geq 1}^{+\infty}$ như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c \\ x_{3n+1} = |x_{3n} - x_{3n-2}| \\ x_{3n+2} = |x_{3n-2} - x_{3n-1}| \\ x_{3n+3} = |x_{3n-1} - x_{3n}| \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{R}^+$; $a, b, c \notin \mathbb{Z}$) sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn: 1) $x_n < 1, \forall n \geq 1$;

2) $\frac{x_{n+3}}{x_n} < 1, \forall n \geq 1$;

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ tồn tại.

Lời giải. Nhận xét rằng dãy số $\{y_n\}$ với

$$y_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \text{ thỏa mãn điều kiện } y_{n+2} + y_{n+1} = y_n.$$

Từ đó, ta xem có thể chọn a, b, c sao cho các phần tử của dãy $x_{3n+1}, x_{3n+2}, x_{3n+3}$ là lũy thừa của một số được không?

Chọn $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và $a = \alpha^2, b = \alpha^3, c = \alpha$ thì

$$0 < \alpha < 1 \text{ và } \alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$$

Ta có: $x_1 = \alpha^2, x_2 = \alpha^3, x_3 = \alpha,$

$$x_4 = |x_3 - x_1| = \alpha(1 - \alpha) = \alpha^3,$$

$$x_5 = |x_1 - x_2| = \alpha^2(1 - \alpha) = \alpha^4,$$

$$x_6 = |x_2 - x_3| = \alpha(1 - \alpha^2) = \alpha^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp thông thường, ta chứng minh được:

$$\begin{cases} x_{3n+1} = |x_{3n} - x_{3n-2}| = \alpha^{n+2}, & n = 1, 2, \dots \\ x_{3n+2} = |x_{3n-2} - x_{3n-1}| = \alpha^{n+3}, & n = 1, 2, \dots \\ x_{3n+3} = |x_{3n-1} - x_{3n}| = \alpha^{n+1}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Suy ra các kết luận: $x_n < 1$ và $\frac{x_{n+3}}{x_n} = \alpha < 1,$

$n = 1, 2, \dots$ được thỏa mãn. Xét tổng

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{3m+3} &= \sum_{k=1}^m (x_{3k+1} + x_{3k+2} + x_{3k+3}) \\ &= (\alpha + \alpha^2 + 1) \sum_{k=1}^m \alpha^{k+1} = 2\alpha \sum_{k=1}^m \alpha^k = 2\alpha \frac{1 - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \lim_{m \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_{3m+3}) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(2\alpha \frac{1 - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \right) \\ &= \frac{2\alpha}{1 - \alpha} = \frac{2}{\alpha} \quad (\text{vì } \alpha^2 + \alpha - 1 = 0). \end{aligned}$$

Ứng với mỗi $n > 6$, ta chọn $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$3m+3 < n < 3(m+1)+3 \text{ hay } m = \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor \text{ thì}$$

$$S_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

$$S_{3m+3} \leq S_n < S_{3(m+1)+3} \quad (1).$$

Vì $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{3m+3} = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{3(m+1)+3} = \frac{2}{\alpha}$ nên từ (1) suy

$$\text{ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{2}{\alpha}.$$

Vậy kết luận về sự tồn tại của giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ được chứng minh.

Nhận xét. Đây là dạng toán khó về dự đoán các giá trị ban đầu của dãy cần được lựa chọn để dãy đó thỏa mãn các điều kiện của bài toán đã cho nên có rất ít bài giải gửi đến Tòa soạn. Các bạn *Trần Văn Quân* (12T1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên) chọn

bộ số $a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}, c = \frac{9-\sqrt{5}}{20}$ và bạn *Trần Minh*

Hoàng (9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà

Tĩnh) chọn bộ số $a = \frac{20+5\sqrt{5}}{110}, b = \frac{21}{110}, c = \frac{11}{110}$ cũng

cho đáp số đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/533. Cho tam giác không cân ABC , (O) , (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC . A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với cạnh BC, CA, AB ; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A_0, B_0, C_0 trên B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 ; A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AA_1, BB_1, CC_1 và (O) . Chứng minh rằng các đường tròn $(A_0A_1A_2), (B_0B_1B_2), (C_0C_1C_2)$ có chung trục đẳng phương.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC có AD, AE là phân giác trong và phân giác ngoài. K là trung điểm của DE . Khi đó $KD = KA$ và KA tiếp xúc với đường tròn (ABC) .

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây. Trở lại giải bài toán trên.

Để cho đơn giản, kí hiệu các đường tròn $(A_0A_1A_2), (B_0B_1B_2), (C_0C_1C_2)$ là $(O_a), (O_b), (O_c)$.

Gọi A_3 là giao điểm của BC và B_0C_0 ; O_a là trung điểm của A_0A_3 ; r, R theo thứ tự là bán kính của (I) và (O) . Dễ thấy $A_1(BCA_0A_3) = (BCA_0A_3) = -1$.

Kết hợp với $A_1A_0 \perp A_1A_3$, suy ra A_1A_0, A_1A_3 theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác A_1BC . Do đó, theo bổ đề trên, ta có $O_aA_0 = O_aA_1$ (1). Vì A_1A_3 là phân giác ngoài của tam giác A_1BC nên $\widehat{BA_1C_2} = \widehat{CA_1B_0}$. Kết hợp với

$\widehat{BC_0A_1} = 180^\circ - \widehat{AC_0B_0} = 180^\circ - \widehat{AB_0C_0} = \widehat{CB_0A_1}$, suy ra các tam giác A_1BC_0, A_1CB_0 đồng dạng.

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{BA_2}{CA_2} &= \frac{\sin \widehat{BAA_2}}{\sin \widehat{CAA_2}} = \frac{\sin \widehat{C_0AA_1}}{\sin \widehat{B_0AA_1}} = \frac{S_{C_0AA_1} \cdot AB_0 \cdot AA_1}{S_{B_0AA_1} \cdot AC_0 \cdot AA_1} \\ &= \frac{S_{C_0AA_1}}{S_{B_0AA_1}} = \frac{C_0A_1}{B_0A_1} = \frac{C_0B}{B_0C} = \frac{A_0B}{A_0C}. \\ \frac{BA_2}{CA_2} &= \frac{\sin \widehat{BAA_2}}{\sin \widehat{CAA_2}} = \frac{\sin \widehat{C_0AA_1}}{\sin \widehat{B_0AA_1}} = \frac{S_{C_0AA_1} \cdot AB_0 \cdot AA_1}{S_{B_0AA_1} \cdot AC_0 \cdot AA_1} \\ &= \frac{S_{C_0AA_1}}{S_{B_0AA_1}} = \frac{C_0A_1}{B_0A_1} = \frac{C_0B}{B_0C} = \frac{A_0B}{A_0C}. \end{aligned}$$

Vậy A_2A_0 là phân giác trong của tam giác A_2BC .

Từ đó, chú ý rằng

$$A_2(BCA_0A_3) = (BCA_0A_3) = -1,$$

suy ra A_2A_0, A_2A_3 theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác A_2BC .

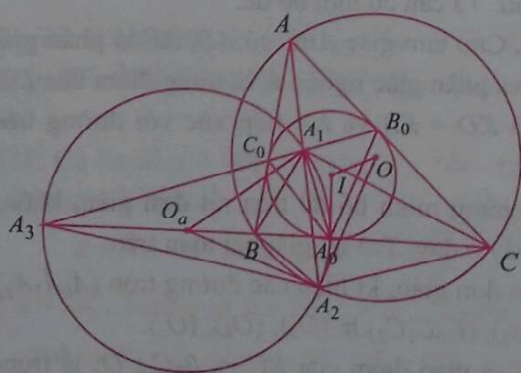
Do đó, theo bổ đề trên, ta có $O_aA_0 = O_aA_2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra O_a là tâm đường tròn $(A_0A_1A_2)$.

(3). Từ (3), chú ý rằng $IA_0 \perp BC \equiv O_aA_0$, suy ra

$$P_{I/(O_a)} = IA_0^2 = r^2.$$

Tương tự: $P_{I/(O_a)} = P_{I/(O_b)} = P_{I/(O_c)} = r^2$ (4).



Vì $(BCA_0A_3) = -1$ nên, theo hệ thức Newton, ta có

$$O_aA_2^2 = O_aA_0^2 = O_aB \cdot O_aC.$$

Do đó O_aA_2 tiếp xúc với (O) . Điều đó có nghĩa là $OA_2 \perp O_aA_2$. Vậy $P_{O/(O_a)} = OA_2^2 = R^2$.

Tương tự: $P_{O/(O_a)} = P_{O/(O_b)} = P_{O/(O_c)} = R^2$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra các đường tròn $(O_a), (O_b), (O_c)$ nhận IO là trục đẳng phương chung (đpcm)

Nhận xét. 1) Bài toán này khá khó, chỉ có 8 bạn tham gia giải, một số bạn cho lời giải quá dài.

2) Xin nêu tên cả 8 bạn: **Hưng Yên:** Nguyễn Gia Khánh, 10T1, Trần Văn Quân, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** Phạm Ngọc Long, Nguyễn Quang Huy, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Mai Trung Nguyên, 11T, THPT chuyên Bào Lộc; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/532. Sóng dừng trên một sợi dây có dạng

$$u = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cos\left(20\pi t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) (\text{cm}).$$

Với x đo bằng (cm), t đo bằng (s).

a) Tính vận tốc truyền sóng dọc theo sợi dây.

b) Xác định những vị trí trên dây có biên độ dao động bằng 1 cm.

Lời giải. a) Theo đề bài biên độ dao động của sóng: $A = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right|$.

Tại những điểm là nút thì $A = 0$, nên

$$2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right| = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x = k\pi \Rightarrow x_k = 4k.$$

Vì khoảng cách giữa hai nút liên tiếp là $\frac{\lambda}{2}$ nên:

$$\frac{\lambda}{2} = x_{k+1} - x_k = 4(k+1) - 4k = 4 \Rightarrow \lambda = 8 \text{ cm}.$$

Lại có: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10 \text{ Hz}$.

Vậy $v = \lambda f = 8 \cdot 10 = 80 \text{ cm/s}$.

(Xem tiếp trang 38)

Toán học có ích gì? Nhiều loại toán không dùng sau này tại sao cần học? Đó là câu hỏi, thắc mắc mà nhiều phụ huynh và học sinh vẫn thường nêu mỗi khi học toán.

Môn Toán cùng với môn Tiếng Việt là hai môn học có thời lượng nhiều nhất, gần bó dài nhất với cuộc đời mỗi học sinh, từ lớp 1 đến lớp 12. Vậy, học Toán có ích gì mà các nhà giáo dục lại yêu cầu học sinh học với thời lượng nhiều như thế?

Rèn luyện bộ não

Trong cuộc sống, chúng ta có thể không trở thành một vận động viên thể thao nhưng chúng ta vẫn thường xuyên tập thể dục mỗi ngày để rèn luyện sức khỏe. Chúng ta có thể không cần trở thành nhà toán học hay giáo viên dạy toán nhưng vẫn nên học toán để "tập thể dục" cho bộ não của mình. Cố Thủ tướng Phạm Văn Đồng đã từng nói: "Toán học là môn thể thao của trí tuệ".

Hằng ngày, chúng ta gặp rất nhiều tình huống trong cuộc sống, có những tình huống hoàn toàn mới đòi hỏi bộ não cần phải xử lý. Để xử lý được tình huống đòi hỏi bộ não phải "nhớ", "tìm tòi", "liên tưởng",... với những tình huống quen thuộc đã gặp. Nếu bộ não thường xuyên được rèn luyện thì "phản xạ" của bộ não sẽ nhanh hơn, kết quả đạt được tốt hơn.

Việc giải các bài toán (tình huống giả định) chính là ta đang rèn luyện cho bộ não giải quyết tình huống. Độ phức tạp của bài toán (biện luận, chia thành nhiều trường hợp,...) chính là độ phức tạp của tình huống đòi hỏi bộ não phải xử lý. Nó như là "quả tạ", "xà đơn", "vợt cầu lông", "trái bóng", "tiếng đàn", tiếng sáo", ... để rèn luyện trí tuệ và cảm xúc cho học sinh.

Do đó cái còn lại sau những năm tháng vất vả học toán không phải chỉ là những công thức, quy tắc,... mà quan trọng còn là *cách suy nghĩ, cách giải quyết vấn đề, khả năng toán học hoá các tình huống của cuộc sống.*

Tạo cảm xúc và phát triển thẩm mỹ

Trong đời mỗi học sinh, chắc có hơn một lần "reo lên" khi tự mình giải được bài toán khó, tìm thêm được cách giải khác cho bài toán. Lúc đó cảm xúc của chúng ta thật vui sướng và lâng lâng. Đôi khi đó còn là một kỉ niệm đẹp, một bước ngoặt trong cuộc đời.

Nhà toán học người Pháp Xi-mông Poát-xông (1781-1840), lúc nhỏ là một học sinh rất sợ toán. Sau, vì giải được bài toán "Chia sữa", ông trở nên say mê học toán, nghiên cứu toán và đã trở thành một nhà toán học lỗi lạc.

Nhà toán học Vla-di-mia Ác-nôn (1937-2010), một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của nước Nga thế kỉ XX, kể lại rằng lúc còn học ở tiểu học, ông được thầy giáo cho giải bài toán về chuyển động của hai bà lão. Ác-nôn còn nhớ: "Suy nghĩ tìm cách giải bài toán, lần đầu tiên tôi cảm

nhận được niềm vui sáng tạo. Và chính ước vọng có được niềm vui như vậy đã giúp tôi trở thành nhà toán học".

Nhà văn Pháp Sten-đan (1783-1842), tác giả của tiểu thuyết "Đỏ và đen" nổi tiếng, đã kể lại trong cuốn "Tự truyện": "Ở thầy giáo, tôi đã tìm thấy *Ơ-le* và bài toán của *Ơ-le* về số trùng mà bà nông dân mang ra chợ bán... Đó là một phát kiến với tôi".

Những câu chuyện trên chính là những "cảm xúc" mà toán học mang lại, nó làm cho cuộc sống thi vị hơn, giúp chúng ta thành công hơn.

Bên cạnh đó, toán học còn giúp chúng ta hiểu và yêu thích vẻ đẹp của toán học, thể hiện trong chân lý toán học, trong sự sáng tạo khi học toán, trong hình thức trình bày. Cố PGS. Văn Như Cương đã chia sẻ:

*"Em cắm hoa tươi đặt cạnh bàn
Mong rằng toán học bớt khô khan
Em ơi, trong toán nhiều công thức
Cũng đẹp như hoa lại chẳng tàn".*

Phát triển phẩm chất và năng lực

Toán học là môn học công cụ vì ngôn ngữ toán học, kiến thức toán học, tư duy phương pháp toán học là cần thiết cho cuộc sống và cho việc học các môn học khác. Mỗi khi bạn đã có phương pháp học toán tốt thì bạn sẽ không chấp nhận việc lập luận hời hợt, tư duy lộn xộn. Học toán mang lại cho bạn những phẩm chất và năng lực: biết cách đặt vấn đề, phân tích, giải quyết vấn đề, kiểm tra cách giải quyết; biết nhận ra cái bản chất, biết phân loại các trường hợp, biết từ những vấn đề riêng lẻ rút ra kết luận chung, biết áp dụng lý luận chung vào những tình huống cụ thể, biết suy luận ngắn gọn, chính xác, biết trình bày, diễn đạt rõ ràng, mạch lạc; rèn luyện tác phong khoa học.

Trong bức thư gửi cho các bạn trẻ yêu toán (tháng 10/1967), Cố Thủ tướng Phạm Văn Đồng đã nêu rõ:

"Trong các môn khoa học và kỹ thuật, toán học giữ một vị trí nổi bật. Nó có tác dụng lớn đối với sản xuất và chiến đấu. Nó còn là môn thể thao của trí tuệ, giúp chúng ta nhiều trong việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, phương pháp suy luận, phương pháp học tập, phương pháp giải quyết các vấn đề, giúp chúng ta rèn trí thông minh sáng tạo. Nó còn giúp chúng ta rèn luyện nhiều đức tính quý báu khác như: cần cù và nhẫn nại, tự lực cánh sinh, ý chí vượt khó, yêu thích chính xác, ham chuộng chân lý. Dù các bạn phục vụ ngành nào, trong công tác nào thì các kiến thức và phương pháp toán học cũng rất cần cho các bạn".

Từ các lợi ích trên, có thể khẳng định rằng toán học có vai trò rất quan trọng trong cuộc sống và học toán là điều hết sức cần thiết cho mỗi chúng ta, thậm chí rất nhiều người còn học toán đến hết đời với một niềm yêu thích. Trước khi ngừng thờ, Poát-xông đã nói câu bất hủ: "Nếu được sống thêm cuộc đời nữa, tôi sẽ lại làm toán!".



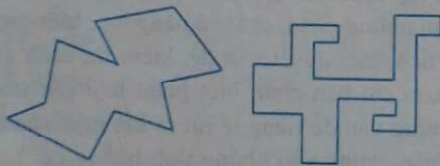
ĐỊNH LÝ CHVÁTAL VỀ PHÒNG TRUNG BÀY NGHỆ THUẬT

HOÀNG ĐỨC TÂN (Hà Nội)
Sưu tầm và biên soạn

1. Mở đầu

Việc phân bố các vệ sĩ để bảo vệ một Phòng trưng bày các tác phẩm nghệ thuật (gọi tắt là Phòng trưng bày nghệ thuật) luôn được các chủ sở hữu quan tâm. Vấn đề cũng không hề đơn giản bởi *sơ đồ mặt bằng* của một Phòng trưng bày nghệ thuật cũng khá phức tạp, lạ mắt, nói một cách tổng quát nó là một *đa giác đơn*.

Đa giác P là một dãy có thứ tự gồm các điểm $p_1, \dots, p_n$ ($n \geq 3$) trên mặt phẳng, được gọi là các *đỉnh* của *P* cùng với tập hợp các đoạn thẳng nối p_i với p_{i+1} ($i = 1, \dots, n-1$) và p_n trùng với p_1 , gọi là các *cạnh* của *P*. Đa giác *P* được gọi là *đơn* nếu bất kỳ hai cạnh không liên tiếp nào là không cắt nhau (h.1).



Hình 1. Ví dụ hai đa giác đơn.

Trong một hội nghị ở Stanford tháng 8 năm 1976, nhà toán học V. Klee đã nêu câu hỏi với các sinh viên của mình: “Số lượng vệ sĩ tối thiểu mà bạn cần để đảm bảo rằng họ có thể quan sát toàn bộ phòng trưng bày nghệ thuật là bao nhiêu?”. Ở đây giả định vệ sĩ là một điểm và họ có thể đứng ở một vị trí bất kỳ trong Phòng trưng bày nghệ thuật (hình đa giác đơn) với góc nhìn của mỗi vệ sĩ là 360° , và vệ sĩ có thể nhìn thấy một điểm trong phòng trưng bày nghệ thuật nếu đoạn thẳng nối điểm đó với anh ta nằm trong đa giác. Chỉ ít ngày sau khi V. Klee đặt câu hỏi, V. Chvátal đã chứng minh được kết quả sau.

Định lý Chvátal về Phòng trưng bày Nghệ thuật:

Chỉ cần nhiều nhất là $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ vệ sĩ để canh gác một

phòng trưng bày nghệ thuật có n cạnh ($[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất $\leq x$).

Để làm rõ $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ là giới hạn trên tốt nhất của số lượng

vệ sĩ, ta xét một Phòng trưng bày nghệ thuật có hình chiếc lược với $3k$ cạnh với k răng (h.2) và để bảo vệ được căn phòng này ta cần đúng k vệ sĩ (bởi rõ ràng là cần có ít nhất một vệ sĩ đứng trong mỗi khu vực bóng râm để quan sát từng “răng” của chiếc lược). Phòng trưng bày nghệ thuật hình chiếc Lược rõ ràng là một tính huống xấu nhất của Định lý Chvátal.



Hình 2. Phòng trưng bày nghệ thuật hình chiếc lược có $3k$ cạnh và k răng ($k=5$).

2. Chứng minh Định lý Chvátal

Chứng minh của Chvátal bị nhiều người cho là khó khăn. Năm 1978 Steve Fisk đã công bố một chứng minh tuyệt đẹp, chứng minh này đã được chọn đưa vào trong cuốn sách nổi tiếng “Proofs from THE BOOK” của Martin Aigner và Günter M. Ziegler. Chứng minh của Fisk bao gồm 3 bước chính sau đây.

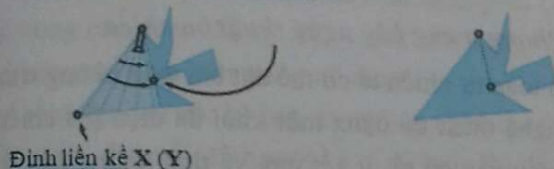
a) Ta luôn có thể phân hoạch tam giác một đa giác đơn.

Việc tạo ra phân hoạch tam giác một đa giác đơn tức là phân chia đa giác đó thành các hình tam giác mà chỉ cần sử dụng các đường chéo nối các cặp đỉnh của đa giác. Điều này sẽ luôn thực hiện được, nếu như ta có thể tìm thấy một đường chéo nối hai trong số các đỉnh và đường chéo đó nằm hoàn toàn bên trong đa giác. Vì nếu điều này là đúng, thì ta có thể sử dụng một đường chéo như vậy để cắt đa giác ban đầu thành hai đa giác nhỏ hơn, và sau đó tiếp tục cắt chúng thành những đa giác nhỏ hơn nữa, lặp lại quá trình này cho đến khi ta không còn gì ngoài những hình tam giác.

Đề thấy rằng một đường chéo như vậy luôn tồn tại, hãy xét một vệ sĩ đứng ở đỉnh X và chiếu một đèn

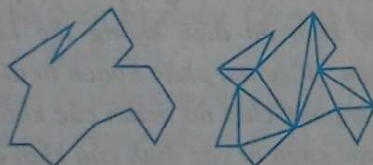
pin về phía đỉnh Y liền kề. Nếu người vẽ sĩ quay tia sáng này về phía bên trong của đa giác, thì đến một lúc nào đó, tia sáng phải chạm vào một đỉnh khác, ta sẽ gọi đỉnh ấy là Z . Bây giờ chúng ta có thể lấy một trong các đoạn XZ hoặc YZ làm đường chéo mong muốn, nếu như không có đỉnh nào của đa giác nằm bên trong $\triangle XYZ$. Thực vậy, không có đỉnh nào của đa giác nằm bên trong $\triangle XYZ$ cả bởi vì nếu có thì tia sáng quay sẽ chạm vào một trong các đỉnh ấy trước khi chạm vào đỉnh Z rồi (h.3).

Đèn pin (X) Đỉnh tìm thấy (Z)



Hình 3. Minh họa quá trình tìm một đường chéo XZ của đa giác đơn ban đầu mà nó cắt đa giác ban đầu thành hai đa giác nhỏ hơn.

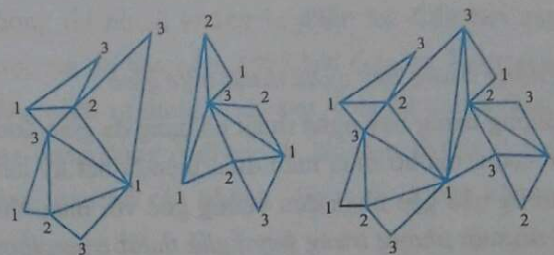
Kết quả là ta nhận được phân hoạch tam giác một đa giác đơn cho trước (h.4).



Hình 4.

b) Với mỗi phân hoạch tam giác một đa giác đơn ta luôn có thể tô đẹp bằng 3 màu.

Tô đẹp bằng 3 màu nghĩa là một cách dùng 3 màu khác nhau để gán cho mỗi đỉnh của phân hoạch tam giác một màu (hay một số tương ứng với màu như trong hình 5) sao cho mọi tam giác nhỏ trong phân hoạch tam giác luôn có ba đỉnh là ba màu khác nhau. Để làm được điều này đầu tiên ta chọn một trong các hình tam giác nhỏ và tô màu cho mỗi đỉnh của nó bằng một màu khác nhau. Ít nhất một trong các cạnh của tam giác đó sẽ là cạnh chung với một tam giác nhỏ khác. Tam giác nhỏ mới này đã có hai đỉnh được tô bằng hai màu khác nhau (hai đỉnh trên cạnh chung của tam giác nhỏ mà ta chọn ban đầu). Tức là tam giác nhỏ mới còn một đỉnh chưa được tô màu. Chúng ta tô màu đỉnh đó theo màu còn lại thứ ba. Chúng ta lặp lại quy trình này cho từng tam giác một. Vì tất cả các đỉnh là đỉnh của đa giác ban đầu, nên quy trình này sẽ tô màu được cho tất cả các đỉnh của đa giác ban đầu theo yêu cầu.



Hình 5. Tô màu các đỉnh của phân hoạch tam giác một đa giác đơn bằng ba màu 1, 2, 3.

c) Hãy đặt vé sĩ của bạn ở các đỉnh có màu xuất hiện ít nhất.

Giả sử rằng màu xuất hiện với số lần ít nhất là màu đỏ chẳng hạn, và giả sử có k đỉnh màu đỏ. Vì tổng số đỉnh của phân hoạch tam giác là n đỉnh và ta chỉ sử dụng ba màu để tô n đỉnh ấy, nên ta có $k \leq \frac{n}{3}$ và

vì k là số nguyên nên $k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Nhưng điều gì sẽ

xảy ra khi ta đặt k vé sĩ tại k đỉnh màu đỏ này? Theo tính chất của một cách tô đẹp bằng 3 màu, mỗi tam giác nhỏ luôn có một đỉnh màu đỏ và một vé sĩ đứng ở đỉnh đó rõ ràng có thể quan sát được toàn bộ tam giác ấy. Vì vậy, mọi tam giác trong phân hoạch tam giác, và do đó mọi điểm trong phòng trưng bày nghệ thuật, đều được quan sát bởi ít nhất một vé sĩ.

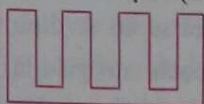
Định lý Chvátal đã được chứng minh xong. Một chứng minh tuyệt đẹp bởi nó cho ta biết số lượng vé sĩ và nó còn chỉ ra cách chúng ta bố trí vé sĩ đứng ở đâu trong Phòng trưng bày nghệ thuật nữa.

3. Những vấn đề khác về Phòng trưng bày nghệ thuật

Sau khi giải quyết bài toán Phòng trưng bày nghệ thuật, người ta bắt đầu khám phá các biến thể của chủ đề phòng trưng bày nghệ thuật. Ví dụ, người ta đã đặt ra các bài toán cho các vé sĩ có một khả năng hạn chế nào đó, cho các phòng trưng bày nghệ thuật có một số hạn chế, cho các phòng trưng bày nghệ thuật có lỗ ở bên trong, ... và cho các phòng trưng bày nghệ thuật trong không gian 3 chiều. Rất nhiều kết quả trong lĩnh vực này đã được Joseph O'Rourke trình bày trong cuốn chuyên khảo "Các định lý và thuật toán của Phòng trưng bày nghệ thuật" [3]. Ở đây, chỉ xin giới thiệu ba trong các phần mở rộng tự nhiên và dễ đọc về vấn đề phòng trưng bày nghệ thuật thôi.

3.1. Phòng trưng bày nghệ thuật trực giao

Nếu phòng trưng bày nghệ thuật có dạng đa giác đơn với n cạnh, mà nó thỏa mãn điều kiện là bất kỳ hai bức tường nào gặp nhau đều vuông góc với nhau thì ta gọi đó một phòng trưng bày nghệ thuật trực giao. Vậy cần có bao nhiêu vệ sĩ để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật trực giao có n cạnh. Ta có thể chỉnh sửa phòng trưng bày nghệ thuật hình chiếc lược để tạo ra một phòng trưng bày nghệ thuật trực giao với k răng và có $4k$ cạnh (h.6).



Hình 6. Phòng trưng bày nghệ thuật trực giao hình chiếc lược với k răng và $4k$ cạnh ($k = 4$).

Vì vậy chúng ta cần ít nhất $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ vệ sĩ để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật như trên. Đó là nội dung của Định lý sau đây.

Định lý Phòng trưng bày nghệ thuật trực giao. Chỉ cần nhiều nhất là $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ vệ sĩ để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật trực giao có n cạnh.

Để chứng minh định lý đầu tiên ta dùng kết quả đã biết “Mọi đa giác đơn trực giao nào cũng có thể được phân chia thành các tứ giác lồi, có các đỉnh được chọn từ các đỉnh của đa giác ban đầu”. Tiếp theo, ta chỉ ra sự tồn tại của phép tô 4 màu đẹp của kết quả mạng tứ giác lồi ở trên (tức là với bất kỳ tứ giác lồi nào trong mạng tứ giác luôn có 4 đỉnh được tô bằng 4 màu khác nhau). Sau đó, đặt các vệ sĩ ở các đỉnh có màu xuất hiện ít nhất thì ta sẽ nhận được kết quả mong muốn.

3.2. Vệ sĩ cơ động

Trong định lý Chvátal mỗi vệ sĩ sẽ đứng yên một chỗ và chỉ quan sát 360° xung quanh, bây giờ ta cho phép mỗi vệ sĩ có thể tuần tra dọc theo một đoạn tuyến cụ thể trong phòng trưng bày nghệ thuật. Trong trường hợp này ta có kết quả sau:

Định lý Phòng trưng bày Nghệ thuật cho Vệ sĩ cơ động. Chỉ cần nhiều nhất là $\frac{n}{4}$ vệ sĩ cơ động để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật có n cạnh.

Để tránh gây phiền phức cho khách tham quan phòng trưng bày nghệ thuật người ta có thể chỉ cho

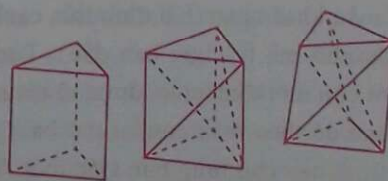
phép các vệ sĩ tuần tra dọc theo một cạnh của đa giác. Vậy ta cần bao nhiêu “vệ sĩ cạnh” này để bảo vệ phòng trưng bày nghệ thuật có n cạnh? Thật thú vị, câu trả lời cho đến nay là vẫn chưa rõ, nhưng nhiều người tin vào sự đúng đắn của phỏng đoán sau.

Phỏng đoán Phòng trưng bày Nghệ thuật cho vệ sĩ cạnh. Chỉ cần nhiều nhất là $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ vệ sĩ cạnh để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật có n cạnh, ngoại trừ một số trường hợp đặc biệt.

3.3 Phòng trưng bày nghệ thuật ba chiều

Hoàn toàn tự nhiên ta có thể đặt bài toán phòng trưng bày nghệ thuật có dạng một khối đa diện (ba chiều). Đến nay vẫn có rất ít kết quả về tình huống này. Lý do cản trở chủ yếu đối với việc khái quát hóa này là do phép phân hoạch tam giác một đa giác (là cốt lõi của việc chứng minh định lý Chvátal) lại không thể khái quát lên ba chiều được, thật lạ. Một phát biểu chính xác hơn về hiện tượng này là kết quả sau đây. Tồn tại các khối đa diện không thể là một phân hoạch tứ diện. (Việc tạo phân hoạch tứ diện một khối đa diện là sự phân chia nó thành các khối tứ diện có các đỉnh được chọn từ các đỉnh của khối đa diện ban đầu).

Ví dụ đơn giản nhất về một khối đa diện như vậy được Schonhardt phát hiện vào năm 1928 [5] và nó được xây dựng như sau. Xét một lăng trụ tam giác đều, trong đó đáy là tam giác ABC nằm ngay phía dưới tam giác trên $A'B'C'$. Giả sử rằng các cạnh của lăng trụ được dựng bằng dây và các cạnh AB' , BC' và CA' là các dây đã được thêm vào. Có thể là có ích khi tưởng tượng rằng ta đã nhúng toàn bộ khung dây vào dung dịch xà phòng và một màng xà phòng đã hình thành dọc theo mỗi mặt trong số tám mặt hình tam giác (h.7).



Hình 7

Bây giờ hãy xem điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta từ từ xoay hình tam giác trên. Nếu ta xoay theo một chiều thì các mặt hình chữ nhật của lăng trụ uốn cong ra

ngoài dọc theo các cạnh AB' , BC' và CA' . Tuy nhiên, nếu chúng ta xoay theo hướng khác, thì các mặt hình chữ nhật của lăng trụ uốn cong vào trong, tạo ra một hình đa diện không lồi. Tại điểm mà ta đã xoay được 60° thì ba cạnh AB' , BC' và CA' cắt nhau tại tâm của hình. Đa diện Schonhardt thu được khi phép quay bằng một giá trị trung gian nào đó, là 30° chẳng hạn. Trong trường hợp này, các đoạn thẳng AC' , BA' và CB' sẽ nằm bên ngoài khối đa diện. Tuy nhiên, bất kỳ tứ diện nào được xây dựng từ sáu đỉnh của đa diện Schonhardt nhất định phải chứa một trong các đoạn thẳng AC' , BA' và CB' và do đó, không thể nằm bên trong nó được.

Để ý rằng đối với các phòng trưng bày nghệ thuật hai chiều, việc đặt mỗi đỉnh một vệ sĩ sẽ luôn đủ để bảo vệ phòng trưng bày nghệ thuật (Bởi mọi đa giác luôn có thể phân hoạch tam giác được. Nên mỗi tam giác trong phân hoạch tam giác luôn được bảo vệ bởi ba vệ sĩ đứng ở các đỉnh của nó). Tuy nhiên, lập luận này không thể khái quát hóa được cho các phòng trưng bày nghệ thuật ba chiều. Có một kết quả khá bất ngờ sau đây (xem [6]).

Tồn tại các khối đa diện sao cho các vệ sĩ được đặt ở mọi đỉnh của nó, nhưng các vệ sĩ đó vẫn không thể nhìn thấy tất cả phần bên trong của khối đa diện.

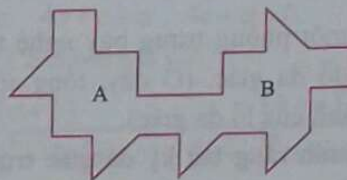


Hình 8. Một ví dụ về khối đa diện với các điểm bên trong mà ta không nhìn thấy được từ bất kỳ đỉnh nào.

4. Chiếu sáng một căn phòng

Vấn đề chiếu sáng được đặt ra cho các nhà toán học vào năm 1969 bởi Victor Klee [2]. Hãy tưởng tượng rằng bạn đang đứng trong một căn phòng, có lẽ là một phòng trưng bày nghệ thuật, với hình dạng của một đa giác đơn và mỗi bức tường là một tấm gương. "Nếu bạn quẹt một que diêm, có phải lúc nào nó cũng có thể chiếu sáng toàn bộ căn phòng?" Tất nhiên, ánh sáng luôn truyền theo quy tắc "góc tới bằng góc phản xạ" và để đơn giản hóa vấn đề, ta hãy giả sử rằng khi ánh sáng chiếu vào một góc của căn

phòng thì nó sẽ không bị phản xạ. Câu hỏi này đã được trả lời vào năm 1995 bởi George Tokarsky [4], bằng cách sử dụng ví dụ sau. Ông đã chỉ ra rằng nếu bạn đang đứng ở điểm A , thì bạn không thể chiếu sáng toàn bộ căn phòng - thực tế là bạn không thể chiếu sáng điểm B . Trong ví dụ này sử dụng một đa giác có 26 cạnh (h.9), bạn có thể tìm thấy một đa giác có ít cạnh hơn không?



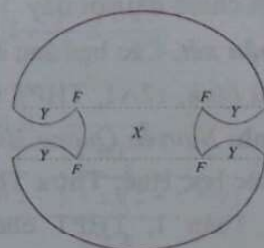
Hình 9

Hình 9 chỉ ra rằng mặc dù bạn không thể chiếu sáng toàn bộ căn phòng khi đứng ở điểm A , nhưng bạn chắc chắn có thể làm như vậy bằng cách di chuyển đến hầu hết mọi điểm khác của căn phòng. Tuy vậy, rất lạ là câu hỏi sau đây vẫn còn là một phỏng đoán mờ:

Liệu có tồn tại hay không một căn phòng đa giác đơn không thể được chiếu sáng từ bất kỳ điểm nào?

Bây giờ hãy xem điều gì sẽ xảy ra nếu ta mở rộng định nghĩa của ta về một căn phòng, cho phép có những căn phòng có tường là những đường cong có thể khác nhau. Trong trường hợp này, có những căn phòng không thể được chiếu sáng từ bất kỳ điểm nào, một trong số đó được minh họa trong hình 10. Nó được xây dựng từ hai nửa hình elip đồng dạng có các tiêu điểm được dán nhãn

F . Bạn đọc có thể xác minh được rằng bất kỳ chùm ánh sáng nào đi qua vùng có nhãn X không bao giờ có thể đi qua một trong các vùng có nhãn Y và ngược lại.



Hình 10

5. Các vấn đề lý thú dành cho bạn đọc quan tâm

Bài toán về phòng trưng bày nghệ thuật của V. Klee đã thúc đẩy nhiều nghiên cứu phong phú và cho tới nay nó vẫn được nhiều người quan tâm. Các vấn đề này hoàn toàn chứa đầy những vấn đề thú vị mà bất kỳ ai cũng có thể giải quyết với kiến thức toán học

tối thiểu. Bạn đọc quan tâm hãy thử lựa chọn một trong các bài toán sau.

5.1. Hãy xét một căn phòng hình vuông có tường là gương, nhưng các đỉnh của nó không phản chiếu bất kỳ ánh sáng nào. Chứng minh rằng không thể chiếu chùm sáng từ một góc của căn phòng mà để nó quay về đúng góc ấy.

5.2. Chứng minh rằng cần có nhiều nhất là $\frac{n+1}{3}$ vệ

sĩ để bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật có n cạnh và một lỗ đa giác. (Ở đây, tổng số cạnh bao gồm cả các cạnh của lỗ đa giác).

5.3. Chứng minh rằng bất kỳ đa giác trục giao nào cũng có thể được chia thành các tứ giác lồi mà các đỉnh được chọn từ các đỉnh của đa giác ban đầu (Phân hoạch tứ giác lồi một đa giác).

5.4. Số lượng vệ sĩ lười biếng tối thiểu mà bạn cần đảm bảo rằng họ có thể bảo vệ một phòng trưng bày nghệ thuật đa giác có n bức tường là bao nhiêu?

Người vệ sĩ lười biếng là người không muốn quay người lại, nhưng có thể nhìn thấy mọi thứ trong tầm

mắt của họ trong nửa mặt phẳng ở trước mặt họ. (CHƯA ĐƯỢC GIẢI QUYẾT!)

5.5. Có thể bắn ánh sáng từ một nguồn điểm trong mặt phẳng với một số hữu hạn đoạn thẳng gương rời rạc được không? (CHƯA ĐƯỢC GIẢI QUYẾT!)

Tòa soạn hy vọng nhận được lời giải của các bạn yêu toán.

Tài liệu tham khảo

- [1] S. Fisk, *A Short Proof of Chvatal's Watchman Theorem*, J. Combin. Theory B 24 (1978), 374.
- [2] V. Klee, *Is Every Polygonal Region Illuminable from Some Point?*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 180.
- [3] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms* (Oxford University Press New York 1987).
- [4] G. W. Tokarsky, *Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point*, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 867–879.
- [5] E. Schönhardt, *Über die Zerlegbarkeit von Dreieckspolyedern in Tetraeder* (Eingegangen am 2. 12. 1926).
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_problem#cite_note-FOOTNOTEORourke1987255-15

GIẢI BÀI KỶ TRƯỚC (Tiếp theo trang 32)

Những điểm có biên độ bằng 1 cm thỏa mãn

$$\text{phương trình: } 2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} x \right) \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} x \right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x_k = \pm \frac{2}{3} + 4k$$

với k là những số nguyên sao cho $x_k > 0$ và nhỏ hơn chiều dài sợi dây.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: Nguyễn Thị Thu Linh, 12A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh; Nguyễn Quang Huy, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; Hồ Phạm Phú An, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.

NGUYỄN XUÂN QUANG

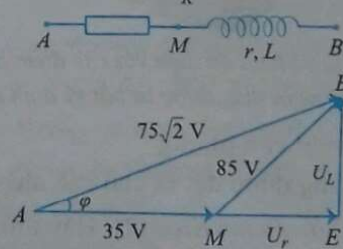
Bài L2/532. Đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R mắc nối tiếp với cuộn dây có điện trở r hoạt động. Điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở, cuộn dây và hai đầu đoạn mạch lần lượt là 35 V, 85 V và $75\sqrt{2}$ V. Cuộn dây tiêu thụ

công suất 40 W. Xác định tổng điện trở thuần của toàn mạch.

$$\text{Lời giải. Ta có: } \cos \varphi = \frac{35^2 + (75\sqrt{2})^2 - 85^2}{2 \cdot 35 \cdot 75\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow U_{R+r} = U_{AE} = AB \cos \varphi = 75 \text{ V} \Rightarrow U_r = 45 \text{ V};$$

$$\mathcal{P}_r = r I^2 = I \cdot U_r \Rightarrow I = \frac{\mathcal{P}_r}{U_r} = 1 \text{ A} \Rightarrow r + R = 75 \Omega.$$



Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: Hồ Phạm Phú An, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp; Lê Nguyễn Quỳnh Anh, Nguyễn Quang Huy, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; Nguyễn Thị Thùy Linh, 12A1, THPT Cù Huy Cận, Hà Tĩnh.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH



ỨNG DỤNG MỘT ĐẲNG THỨC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳnh Châu, Nghệ An)

Trước đây trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ có bài ứng dụng của đẳng thức

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$$

vào giải toán chứng minh BĐT. Trong bài viết này tác giả tiếp tục khai thác đẳng thức trên vào bài toán chứng minh BĐT.

Từ đẳng thức trên có thể viết lại dưới hai dạng tương đương sau

$$\text{Dạng 1: } \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 2 = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}$$

$$\text{Dạng 2: } \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1.$$

Bây giờ chúng ta đi tìm hiểu ứng dụng của hai dạng trên thông qua một số thí dụ sau.

1. Ứng dụng trong đổi biến số để chứng minh bất đẳng thức.

a) Ứng dụng của dạng 1

Thí dụ 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2 = xyz$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y+4}} + \frac{1}{\sqrt{z+4}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (1).$$

Chứng minh. Từ giả thiết $x+y+z+2 = xyz$ tồn tại các số thực dương a, b, c sao cho

$$x = \frac{b+c}{a}; y = \frac{c+a}{b}; z = \frac{a+b}{c}. \text{ Ta có:}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{4a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+a+b}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$VT \leq \sqrt{3 \left(\frac{a}{4a+b+c} + \frac{b}{4b+c+a} + \frac{c}{4c+a+b} \right)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4a+b+c} + \frac{b}{4b+c+a} + \frac{c}{4c+a+b} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{4a+b+c} + \frac{c+a}{4b+c+a} + \frac{a+b}{4c+a+b} \geq 1.$$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$VT = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + 4c(a+b)} + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2 + 4a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{(c+a)^2 + 4b(c+a)}$$

$$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + 10(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca)} \geq 1 \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 2. Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $a+b+c+2 = abc$. Chứng minh rằng

$$bc\sqrt{a^2-1} + ca\sqrt{b^2-1} + ab\sqrt{c^2-1} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} abc.$$

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho: $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$.

Do $a, b, c > 1$ nên x, y, z là ba cạnh của một tam giác. Ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{1}{a^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{b^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{x^2}{(y+z)^2}} + \sqrt{1-\frac{y^2}{(z+x)^2}} + \sqrt{1-\frac{z^2}{(x+y)^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3(x+y+z)(y+z-x)}}{y+z} + \frac{\sqrt{3(x+y+z)(z+x-y)}}{z+x} + \frac{\sqrt{3(x+y+z)(x+y-z)}}{x+y} \leq \frac{9}{2}.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$VT \leq 6 - \frac{x}{y+z} - \frac{y}{z+x} - \frac{z}{x+y} \leq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \text{ (là BĐT Nesbitt) (đpcm).}$$

Thí dụ 3. Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \text{ Chứng minh } (a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

Chứng minh. Ta có: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) + (y+1)(z+1) + (z+1)(x+1) = (x+1)(y+1)(z+1)$$

$\Leftrightarrow x+y+z+2 = xyz$. Do đó:

$$\text{dạng 1} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c+a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{a+b}{c}} = 1.$$

Lúc đó tồn tại các số dương x, y, z sao cho:

$$a = \frac{x+y+z}{x}, b = \frac{x+y+z}{y}, c = \frac{x+y+z}{z}. \text{ Khi đó}$$

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 4. Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2} \quad (1).$$

Chứng minh. Giả thiết $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

Đặt $xy = 1 + \frac{a+b}{c}, yz = 1 + \frac{b+c}{a}, zx = 1 + \frac{c+a}{b}$, ta có:

$$x^2 = \frac{a(a+b+c)}{bc}, y^2 = \frac{b(a+b+c)}{ca}, z^2 = \frac{c(a+b+c)}{ab}.$$

$$\text{Khi đó: (1)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{3}{2}. \text{ Ta có:}$$

$$\text{VT} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} \right) = \frac{3}{2}.$$

b) Ứng dụng của dạng 2

Thí dụ 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1).$$

Chứng minh. Từ giả thiết $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ ta

có thể đặt: $x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{c+a}; z = \frac{c}{a+b}$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\sigma \in S_3} (a+b)(a+c) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$\leq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{\sigma \in S_3} (a+b)(a+c) \sqrt{(a+b+c)(3b+3c-3a)}$$

$$\leq 9(a+b)(b+c)(c+a).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\text{VT} \leq (a+b)(a+c)(4b+4c-2a) + (b+c)(b+a)(4c+4a-2b)$$

$$+ (c+a)(c+b)(4a+4b-2c). \text{ Ta chứng minh:}$$

$$(a+b)(a+c)(4b+4c-2a) + (b+c)(b+a)(4c+4a-2b)$$

$$+ (c+a)(c+b)(4a+4b-2c) \leq \text{VP}. \text{ Thật vậy}$$

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) \leq 2a(a+b)(a+c)$$

$$+ 2b(b+c)(b+a) + 2c(c+a)(c+b)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Ta có: $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b; a^3 + a^3 + c^3 \geq 3a^2c;$

$$b^3 + b^3 + a^3 \geq 3b^2a; b^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^2c;$$

$$c^3 + c^3 + a^3 \geq 3c^2a; c^3 + c^3 + b^3 \geq 3c^2b.$$

Cộng theo về các BĐT cùng chiều trên ta có đpcm.

Thí dụ 2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{2} + 2xyz \quad (1).$$

Chứng minh. Từ giả thiết của bài toán ta suy ra tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$$x = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}, y = \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}, z = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}.$$

$$\text{Khi đó: (1)} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{c+a} \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}$$

$$+ \frac{c}{a+b} \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2a\sqrt{bc(b+a)(c+a)} + 2b\sqrt{ca(c+b)(a+b)}$$

$$+ 2c\sqrt{ab(a+c)(b+c)} \leq (a+b)(b+c)(c+a) + 4abc.$$

$$\text{VT} \leq a(ab+ac+2bc) + b(ba+bc+2ca)$$

$$+ c(ca+cb+2ab) = \text{VP} \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1.$$

Chứng minh rằng: $abc \geq 1$.

Chứng minh. Từ điều kiện của bài toán suy ra tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho: $a+1 = \sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}}$;

$$b+1 = \sqrt{\frac{(y+z)(y+x)}{zx}}; c+1 = \sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{xy}}. \text{ Khi}$$

đó BĐT cần chứng minh trở thành

$$\left(\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)}{zx}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{xy}} - 1\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+y)(x+z)} - \sqrt{yz}\right)\left(\sqrt{(y+z)(y+x)} - \sqrt{zx}\right) \times$$

$$\times \left(\sqrt{(z+x)(z+y)} - \sqrt{xy}\right) \geq xyz.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{(x+y)(x+z)} - \sqrt{yz} \geq x; \sqrt{(y+z)(y+x)} - \sqrt{zx} \geq y;$$

$$\sqrt{(z+x)(z+y)} - \sqrt{xy} \geq z.$$

Nhân theo về các BĐT cùng chiều trên ta có đpcm.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{64} \quad (1).$$

Chứng minh. Với mọi tam giác ABC ta có đẳng thức: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$ (*)

Nếu $\triangle ABC$ tù hoặc vuông từ (*) ta suy ra:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 1$, từ đó ta suy ra BĐT đúng. Xét $\triangle ABC$ nhọn. Từ (*) ta suy ra tồn tại

$$x, y, z > 0 \text{ sao cho: } \cos A = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}},$$

$$\cos B = \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}, \cos C = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}.$$

$$\text{Đặt: } a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{z+x}, c = \frac{2z}{x+y}.$$

Với cách đặt đó thì $a+b+c \geq 3, abc \leq 1$ và $ab+bc+ca+abc = 4$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (4+ab)(4+bc)(4+ca) \geq 125$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{abc} + 4(a+b+c) + abc \geq 16.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{abc} + abc \geq 2; \frac{2}{abc} \geq 2; 4(a+b+c) \geq 12.$$

Cộng các BĐT cùng chiều ta có đpcm.

2. Ứng dụng để thu gọn và chứng minh bất đẳng thức.

Thí dụ 1. Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq xyz(x+y+2z)(y+z+2x)(z+x+2y) \quad (1).$$

Chứng minh. TH1: Nếu ít nhất một trong ba biến bằng 0 thì BĐT là tầm thường.

TH2: $xyz \neq 0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 \left(\frac{y+z}{x}\right)^2 \left(\frac{z+x}{y}\right)^2 \geq \left(\frac{x+y}{z} + 2\right) \left(\frac{y+z}{x} + 2\right) \left(\frac{z+x}{y} + 2\right).$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x+y}{z}; b = \frac{y+z}{x}; c = \frac{z+x}{y}, \text{ ta có:}$$

$$a+b+c+2 = abc \text{ và } a+b+c \geq 6. \text{ Do đó:}$$

$$(1) \Leftrightarrow a^2 b^2 c^2 \geq (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+2)^2 \geq (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq abc + 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq a+b+c+6.$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq 2(a+b+c) \geq a+b+c+6.$$

Thí dụ 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1 \quad (1).$$

Chứng minh.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c+a}{b}\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{c}\right)^3}} \geq 1.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{b+c}{a}; y = \frac{c+a}{b}; z = \frac{a+b}{c} \text{ ta có:}$$

$$x+y+z+2 = xyz. \text{ Khi đó (1) có dạng:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq 1.$$

$$\text{Ta thấy } \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}} \geq \frac{2}{2+x^2}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} \geq \frac{2}{2+y^2}; \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq \frac{2}{2+z^2}.$$

Cộng các BĐT cùng chiều trên ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq \frac{2}{2+x^2} + \frac{2}{2+y^2} + \frac{2}{2+z^2}.$$

Ta cần chứng minh: $\frac{2}{2+x^2} + \frac{2}{2+y^2} + \frac{2}{2+z^2} \geq 1$ (**).

$$(**) \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 12 \geq 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z).$$

Ta có: $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$ và

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + 12 \geq 4(x+y+z).$$

Cộng hai BĐT trên ta có điều cần chứng minh.

Thí dụ 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{2a^2 + (b+c-a)^2} + \frac{b^2}{2b^2 + (c+a-b)^2} + \frac{c^2}{2c^2 + (a+b-c)^2} \leq 1 \quad (1).$$

Chứng minh.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \left(\frac{b+c}{a} - 1\right)^2} + \frac{1}{2 + \left(\frac{c+a}{b} - 1\right)^2} + \frac{1}{2 + \left(\frac{a+b}{c} - 1\right)^2} \leq 1.$$

Đặt: $x = \frac{b+c}{a} - 1$; $y = \frac{c+a}{b} - 1$; $z = \frac{a+b}{c} - 1$. Ta có:

$$(x+1) + (y+1) + (z+1) + 2 = (x+1)(y+1)(z+1)$$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx + xyz = 4$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{2+y^2} + \frac{1}{2+z^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 z^2 \geq 4.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 z^2 \geq \frac{(xy + yz + zx + xyz)^2}{4} = 4.$$

Thí dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 8.$$

Chứng minh. Ta có kết quả quen thuộc sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \quad (\text{BĐT Schur})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} + \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} + \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq 2 \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{b+c}{a}; y = \frac{c+a}{b}; z = \frac{a+b}{c} \Rightarrow x+y+z+2 = xyz$$

và $xy + yz + zx \geq 2(x+y+z)$. Khi đó:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x^2+2} + \frac{(y+2)^2}{y^2+2} + \frac{(z+2)^2}{z^2+2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{(x+2)^2}{x^2+2} + 3 - \frac{(y+2)^2}{y^2+2} + 3 - \frac{(z+2)^2}{z^2+2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có: $VT \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$.

Ta chứng minh $\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geq \frac{1}{2}$. Thật vậy:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4(xy + yz + zx) + 12 \geq 12(x+y+z).$$

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$4(xy + yz + zx) \geq 8(x+y+z),$$

ta chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 + 12 \geq 4(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm}).$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c+2=abc$.

Chứng minh rằng: a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}$.

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{7+a}} + \frac{1}{\sqrt{7+b}} + \frac{1}{\sqrt{7+c}} \leq 1.$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$

Chứng minh rằng $ab+bc+ca \leq \frac{3}{2}$.

3. Cho $x, y, z > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng

minh rằng $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+2abc=1$.

Chứng minh rằng: a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4(a+b+c)$.

$$\text{b) } \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq \frac{3}{2}.$$

5. Các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + 4abc \geq 2. \quad \text{b) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1.$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 5 \geq 2abc + 2(ab+bc+ca)$.

7. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 78

PROBLEM: A tourist attraction in a city centre is a big vertical wheel on which passengers can ride. The wheel turns in such a way that the height, h m, of a passenger above the ground is given by the formula

$$h = 60(1 - \cos kt).$$

In this formula, k is a constant, t is the time in minutes that has elapsed since the passenger started the ride at ground level and kt is measured in radians.

One complete revolution of the wheel takes 30 minutes. Compute k .

Solution. One complete revolution takes 30 minutes means that the period of the function

$$h = 60(1 - \cos kt)$$

is 30 minutes. On the other hand, the function

$$h = 60(1 - \cos kt)$$

has is a periodic function with the period $\frac{2\pi}{k}$.

$$\text{Hence } \frac{2\pi}{k} = 30. \text{ And } k = \frac{\pi}{15}.$$

Remark: The above problem is extracted from a A-level mathematics past paper.

TỪ VỰNG

wheel	: vòng quay, bánh xe
a revolution	: một vòng (quay)
period	: chu kỳ

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 76

BÀI TOÁN. Trên một dây chuyền sản xuất thiết bị điện tử, xác suất ngẫu nhiên của một thiết bị không đạt tiêu chuẩn là 0,045. Kiểm tra ngẫu nhiên một mẫu chọn gồm 200 thiết bị. Tìm xác suất để có hơn 198 thiết bị đạt tiêu chuẩn.

Lời giải. Gọi X là số thiết bị đạt tiêu chuẩn trong mẫu chọn. Ta cần tìm $P(X > 198)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P(X > 198) &= P(X = 199) + P(X = 200) \\ &= 200 \times (0,045) \times (0,955)^{199} + (0,955)^{200} \\ &= 0,00104. \end{aligned}$$

NHIỀU CÁCH GIẢI ... (Tiếp theo trang 45)

Nhận xét. Tòa soạn đã nhận được lời giải của một số bạn với những cách giải tương tự như những cách giải đã nêu. Danh sách các bạn là: Trần Thị Thanh Thư, 11T1, Lê Thị Thanh Tâm, Lê Ngọc Cương, Phan Thị Minh Châu, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; Trương Quang An, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi.

LÊ MAI (Hà Nội)

Lưu ý: X được gọi là biến ngẫu nhiên nhị thức.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: Cao Thị Khánh Chi, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An; Trần Văn Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên; Trần Duy Anh, 10 Anh 1, Đặng Quỳnh Bảo Uyên, 10 Toán 2, Trần Thị Thanh Thư, 11 Toán 1, Nguyễn Thị Khánh Linh, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế.

HỒ HẢI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 59 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2022

BÀI TOÁN 59. Cho (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các điểm D, E lần lượt nằm trong các đoạn thẳng AB và BC sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của BD và CE cắt các cung nhỏ AB và AC của (O) tại các điểm F và G tương ứng. Chứng minh DE song song với FG .

NGUYỄN VĂN BẢN

(GV THCS Thanh Yên, H. Điện Biên, Điện Biên)



BÀI TOÁN 57. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$.

Cách 1. Vẽ đường phân giác AD của tam giác

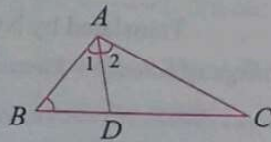
$ABC \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, mà $\widehat{BAC} = 2\widehat{B}$ nên

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B} \Rightarrow \triangle DAB$ cân

tại $D \Rightarrow DA = DB$.

Ta có:

$\triangle BAC \sim \triangle ADC$ (g.g)



$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{AD+DC} = \frac{AB+AC}{DB+DC}$$

$$= \frac{AB+AC}{BC} \Rightarrow BC^2 = AC(AC+AB) \quad (1).$$

Tương tự, ta có: $AC^2 = AB(AB+BC) \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $BC^2 = AC^2 + AB.AC$
 $= AB(AB+BC) + AB.AC = AB(AB+BC+AC)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB+BC+AC} \quad (3). \text{ Từ (2) suy ra:}$$

$$\Rightarrow AC^2 + AB.AC = AB(AB+BC) + AB.AC$$

$$\Rightarrow AC(AC+AB) = AB(AB+BC+AC)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC+AB}{AB+BC+AC} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}.$$

Cách 2. Bổ đề 1: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Đường thẳng qua O và song song với đáy của hình thang cắt cạnh bên BC tại E . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

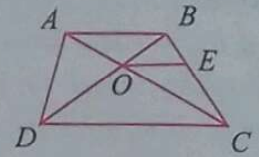
Chứng minh. Vì $OE \parallel AB \parallel CD$ nên theo hệ quả của định lý Thales ta có:

$$\frac{OE}{AB} = \frac{CE}{BC} \text{ và } \frac{OE}{CD} = \frac{BE}{BC}. \text{ Do đó:}$$

$$\frac{OE}{AB} + \frac{OE}{CD} = \frac{CE}{BC} + \frac{BE}{BC}$$

$$= \frac{CE+BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$



Trở lại bài toán. Đặt $\widehat{ACB} = x (x > 0) \Rightarrow$

$\widehat{ABC} = 2x, \widehat{BAC} = 4x$, vì $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$\Rightarrow 7x = 180^\circ$. Vẽ hình thang

$BACM$ sao cho $BM \parallel AC$

và $BM = BC$.

Gọi $O = AM \cap BC$.

Kẻ $ON \parallel BM$ ($N \in AB$), theo Bổ đề 1 ta có:

$$\frac{1}{ON} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BM} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} \quad (1).$$

Vì $BM \parallel AC \Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ACB} = x \Rightarrow \widehat{ABM} = 3x$.

Vì $\triangle BCM$ cân tại B nên

$$\widehat{BMC} = \frac{180^\circ - \widehat{CBM}}{2} = \frac{7x - x}{2} = 3x.$$

Suy ra $BACM$ là hình thang cân $\Rightarrow AM = BC$

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \triangle AMB$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{ABM} = 3x \quad (2).$

Vì $BM \parallel ON \Rightarrow \widehat{ONA} = \widehat{ABM} = 3x \quad (3).$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \triangle OAN$ cân tại $O \Rightarrow OA = ON \quad (4).$

Xét $\triangle OAB$ có $\widehat{OAB} = 3x$ và $\widehat{ABO} = 2x$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{ABO} - \widehat{OAB} = 7x - 2x - 3x = 2x$

nên $\triangle OAB$ cân tại $A \Rightarrow OA = AB \quad (5).$ Từ (1), (4)

$$\text{và (5)} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}.$$

Cách 3. Bổ đề 2: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD . Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB tại E . Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE}.$$

Chứng minh. Vì $DE \parallel AC$ nên theo định lý Thales

ta có: $\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad (1).$ Vì $DE \parallel AC \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ADE}$,

mà $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADE} \Rightarrow \triangle EAD$ cân

tại $E \Rightarrow AE = ED$.

Vì $DE \parallel AC$ nên theo hệ quả của định lý Thales ta có:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{AE}{AB} + \frac{AE}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE}.$$

Trở lại bài toán. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia phân giác của

$\widehat{ABC}$ tại M . Gọi $N = AB \cap CM$, theo bổ đề 2

$$\text{ta có: } \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BN} \quad (1).$$

Gọi $O = BM \cap AC$, ta có $MA \parallel BC$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{CBM} = x$ và $\widehat{MAC} = \widehat{ACB} = x$, từ đó suy ra $\triangle OAM$ và $\triangle OBC$ cân tại $O \Rightarrow OM = OA$, $OC = OB \Rightarrow BM = AC$ (2). Do đó tứ giác $ABCM$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{ABC} = 2x$
 $\Rightarrow \widehat{NMA} = 2x \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NMA} + \widehat{AMB} = 2x + x = 3x$
 $\Rightarrow \widehat{BNM} = 180^\circ - (\widehat{MBN} + \widehat{NMB}) = 7x - (x + 3x) = 3x$.

Từ đó $\triangle BMN$ cân tại $B \Rightarrow BM = BN$ (3).

$$\text{Từ (1); (2) và (3)} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}.$$

Cách 4. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm D sao cho $CA = CD$ và CA là tia phân giác của

$\widehat{DCB}$. Xét tam giác cân CAD có

$$\widehat{CAD} = \frac{180^\circ - \widehat{ACD}}{2} = \frac{7x - x}{2} = 3x$$

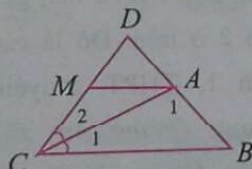
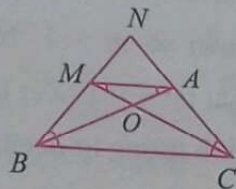
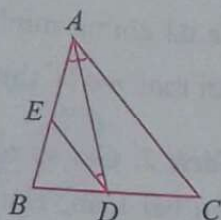
$\Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CAB} = 3x + 4x = 7x = 180^\circ$ nên ba điểm B, D, A thẳng hàng. Kẻ $AM \parallel BC$ ($M \in CD$), theo

$$\text{Bổ đề 2 ta có: } \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{CM} \quad (1).$$

Xét hình thang $ABCM$ có $\widehat{ABC} = \widehat{MCB} (= 2x)$ nên

$ABCM$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = CM$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AB}$$



Cách 5. (hình ở cách 4) Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho CA là tia phân giác của $\widehat{BCD}$. Ta có:

$$\widehat{DAC} = \widehat{C}_1 + \widehat{B} = 3x. \text{ Xét } \triangle BCD \text{ có } \widehat{B} = \widehat{BCD} = 2x$$

$$\Rightarrow \triangle BCD \text{ cân tại } D \Rightarrow BD = CD \text{ và } \widehat{BDC} = 180^\circ - 2\widehat{B} = 7x - 4x = 3x \Rightarrow \triangle CAD \text{ cân tại } C \Rightarrow CA = CD.$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong $\triangle CBD$ ta

$$\text{có: } \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad (1). \text{ Mà } \frac{AD}{CD} = \frac{BD - AB}{CD} = \frac{CD - AB}{CD}$$

$$= 1 - \frac{AB}{CD} = 1 - \frac{AB}{AC} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra:}$$

$$\frac{AB}{BC} = 1 - \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AB}.$$

Cách 6. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa

A lấy điểm D sao cho

$CD = CB$ và CB là tia

phân giác của góc $\widehat{ACD}$.

Lấy điểm E trên đoạn

CD sao cho $CE = CA$

$$\Rightarrow \triangle CEB = \triangle CAB \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EBC} = 2x. \text{ Xét } \triangle CBD$$

$$\text{cân tại } C \text{ và có } \widehat{DCB} = x \Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 3x$$

$$\Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DBC} - \widehat{EBC} = 3x - 2x = x.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BDE} = 3x \text{ và } \widehat{DBE} = x \Rightarrow \widehat{BED} = 3x$$

$$\Rightarrow \triangle BDE \text{ cân tại } B \Rightarrow BD = BE = AB \Rightarrow \triangle BAD$$

$$\text{cân tại } B \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA} = \frac{180^\circ - \widehat{ABD}}{2} = \frac{7x - 5x}{2} = x.$$

$$\text{Gọi } M = AD \cap BC, \text{ ta có: } \widehat{MAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 4x - x = 3x.$$

$$\text{Xét } \triangle CAM \text{ có } \widehat{ACM} = x \text{ và } \widehat{MAC} = 3x$$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = 3x \text{ nên } \triangle CAM \text{ cân tại } C \Rightarrow CA = CM.$$

$$\text{Xét } \triangle CAD \text{ có } \widehat{ACD} = 2x \text{ và } \widehat{MAC} = 3x$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 2x \text{ nên } \triangle CAD \text{ cân tại } A \Rightarrow CA = DA.$$

$$\text{Từ } CA = CM \text{ và } CA = DA \text{ có } CM = AD. \text{ Hai tam}$$

$$\text{giác cân } BAD \text{ và } NCM \text{ có hai góc đáy đều bằng } x$$

$$\text{và } CM = AD \text{ nên chúng bằng nhau dẫn đến}$$

$$AB = CN. \text{ Xét } \triangle CAD \text{ có } CM \text{ là đường phân giác}$$

$$\text{nên theo bổ đề 2 ta có:}$$

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{CN} = \frac{1}{AB}.$$

NGUYỄN ANH TUẤN

(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

(Tiếp theo trang 43)



BÀI TOÁN 66. Giả sử $f(n)$ là hàm số xác định trên tập hợp số tự nhiên và lấy giá trị trong tập hợp đồ. Chứng minh rằng nếu với mỗi n mà có bất đẳng thức $f(n+1) > f(f(n))$ thì với mỗi n sẽ có đẳng thức $f(n) = n$.

Lời giải. Cách 1. Trước hết ta chứng minh mệnh đề: Với mỗi số tự nhiên k và với mọi số tự nhiên $n \geq k$ ta có bất đẳng thức $f(n) \geq k$.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k . Với $k=1$ thì mệnh đề đúng vì hàm số $f(n)$ chỉ lấy giá trị trong $\mathbb{N}^*$. Giả sử mệnh đề đúng với k .

Xét số $n \geq k+1$, ta có: $n-1 \geq k$ và từ giả thiết quy nạp ta có: $f(n-1) \geq k$ và $f(f(n-1)) \geq k$.

Theo bài ra $f(n) > f(f(n-1))$ nên $f(n) > k$ hay $f(n) \geq k+1$. Mệnh đề được chứng minh.

Từ đây suy ra với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $f(k) \geq k$.

Bây giờ giả sử tồn tại số $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) > m$.

Gọi $A = \{f(n) | n > m\}$ và gọi $l = f(p) = \min A$.

Ta chứng minh $f(p-1) > m$.

Thật vậy, vì $p-1 \geq m$ nên:

nếu $p-1 > m$ thì $f(p-1) \geq p-1$

và nếu $p-1 = m$ thì $f(m) > f(m)$.

Xét số nguyên dương $q = f(f(p-1))$. Từ lập luận trên suy ra $q \in A$, nhưng lại phải thỏa mãn bất đẳng thức $f(p) > f(f(n-1))$, vậy $q < l$. Điều này mâu thuẫn vì l là phần tử nhỏ nhất của A .

Ta đã chứng minh mệnh đề $f(m) > m$ là sai, vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $f(n) = n$.

Cách 2. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt $d = \min \{f(n) | n \in \mathbb{Z}^+\}$. Gọi m là số thỏa mãn $f(m) = d$.

Giả sử $m > 1 \Rightarrow d = f(m) > f(f(m-1))$, mâu thuẫn $\Rightarrow m = 1$. Như vậy $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $n = 1$. Xét tập hợp: $\{f(n) | n \geq 2\}$. Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$f(2) = \min \{f(n) | n \geq 2\}.$$

Hơn nữa $f(1) < f(2)$ vì nếu $f(1) = f(2)$ thì $f(1) = f(2) > f(f(1))$, mâu thuẫn. Lập luận tương tự như trên, ta có: $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$ (1).

Vì $f(n) \in \mathbb{Z}^+$ nên $f(n) \geq 1$. Kết hợp với (1) suy ra $f(n) \geq n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Giả sử tồn tại k sao cho $f(k) > k \Rightarrow f(k) \geq k+1 \Rightarrow f(k+1) > f(f(k)) \geq f(k+1)$, vô lý.

Do đó $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nhận xét. Có ba bạn giải đúng bài này và giải như cách 2 ở trên. Đó là các bạn: **Trần Văn Quân**, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; **Trương Quang An**, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**. **Trần Thị Thanh Thu**, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**. Xin hoan nghênh các bạn.

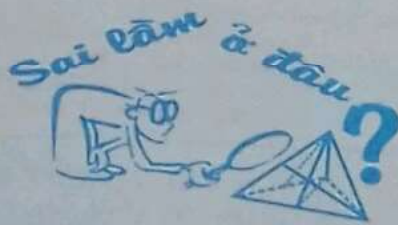
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.4.2022.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 68. Giả sử $n(r)$ là số tất cả các điểm có tọa độ nguyên trên một đường tròn có bán kính $r > 1$. Chứng minh rằng $n(r) < 6\sqrt{\pi}r^2$.

KHÁNH HỮU (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 532, tháng 10 năm 2021)

Phân tích sai lầm. 1) Gọi A_i là biến cố toa thứ i không có người, $i = 1, 2, \dots, 12$. Do đó xác suất để các toa a, b, c có người lần lượt là $P(\overline{A_a}), P(\overline{A_b}), P(\overline{A_c})$ chứ không phải là $P(A_a), P(A_b), P(A_c)$.

2) Với mỗi $i, j \in \{1, 2, \dots, 12\}$ và $i \neq j$ ta có

$P(A_i) = P(A_j) = \left(\frac{11}{12}\right)^7$. Biến cố $A_i \cap A_j$ là biến cố cả hai toa i và j đều không có người. Ta thấy $P(A_i \cap A_j) = \frac{10^7}{12^7}$. Suy ra $P(A_i) \cdot P(A_j) \neq P(A_i \cap A_j)$, tức là hai biến cố A_i, A_j không độc lập. Vì thế ta không thể áp dụng quy tắc nhân xác suất.

Lời giải đúng. Vì 7 hành khách lên ngẫu nhiên 12 toa tàu nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 12^7$.

Ta sẽ tính xác suất để có đúng 1 toa không có người.

Đánh số các toa từ 1 đến 12.

Có C_{12}^3 cách chọn ra 3 toa từ 12 toa. Chẳng hạn 3 toa được chọn là các toa a, b, c . Ta sẽ tính số trường hợp 7 hành khách lên tàu sao cho các toa a, b, c đều có người, còn các toa $i \in \{1, 2, \dots, 12\} \setminus \{a, b, c\}$ đều không có người.

- Số trường hợp 7 hành khách chỉ lên các toa a, b, c và không lên các toa khác là 3^7 ;

- Số trường hợp 7 hành khách chỉ lên không quá 2 trong 3 toa a, b, c và không lên các toa khác là $3 \cdot 2^7$.

- Như vậy, số trường hợp 7 hành khách chỉ lên các toa a, b, c sao cho mỗi toa này đều có người, và tất cả những toa khác không có người là $3^7 - 3 \cdot 2^7$.

Do đó, số trường hợp có đúng 3 toa tàu có người là $C_{12}^3 \cdot (3^7 - 3 \cdot 2^7)$.

Xác suất cần tính là $\frac{C_{12}^3 \cdot (3^7 - 3 \cdot 2^7)}{12^7} \approx 0,011$.

Chọn đáp án B.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện ra sai lầm trong lời giải bài toán.

KIHIVI

LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐỀ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?



Bài toán. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau?

Sau đây là lời giải của bạn Minh:

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần là $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ số.

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau

là $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau

là $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Vậy số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau là: $180 - 60 - 60 = 60$ số.

Bạn hãy cho nhận xét về lời giải của bạn Minh

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

LỜI GIẢI BÀI TOÁN ĐỀM ĐÃ ĐÚNG CHƯA?



Bài toán. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau?

Sau đây là lời giải của bạn Minh:

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần là $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ số.

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 1 luôn đứng cạnh nhau là $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, và các chữ số 2 luôn đứng cạnh nhau là $\frac{5!}{2!} = 60$ số.

Vậy số số tự nhiên có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 2 lần, chữ số 2 xuất hiện 2 lần, các chữ số 3, 4 mỗi chữ số xuất hiện 1 lần, đồng thời các chữ số 1 không đứng cạnh nhau, các chữ số 2 không đứng cạnh nhau là: $180 - 60 - 60 = 60$ số.

Bạn hãy cho nhận xét về lời giải của bạn Minh

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VĨNH THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGĐ

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư ký Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập: CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THÙY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY



Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Lê Viết Ân – Khai thác hằng đẳng thức bình phương để giải một số phương trình vô tỷ.



Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định, năm học 2020 - 2021.



Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Giang, năm học 2021 - 2022.



Diễn đàn dạy học toán

Lê Quang Hào – Phát triển tư duy của học sinh qua việc khai thác lời giải một bài toán.



Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Ngọc Tú – Một tính chất của đường cao trong tam giác.



Đề ra kỳ này

T1/537, ..., T12/537, L1/537, L2/537.

Problem in This Issue



Giải bài kì trước

T1/533, ..., T12/533, L1/533, L2/533.

Solutions to Previous Problems



Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

Phan Duy Nghĩa – Học toán có ích gì?



Bạn có biết

Hoàng Đức Tân – Định lý Chvátal về phòng trưng bày nghệ thuật.



Phương pháp giải toán

Phạm Duy Khánh – Ứng dụng một đẳng thức trong chứng minh bất đẳng thức.



Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 78.

Bài dịch số 76.



Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 57. Đề bài toán 59.



Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 66. Đề bài toán 68.



Sai lầm ở đâu?

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Sau đây là một số hình ảnh sản phẩm mẫu thiết bị dạy học lớp 10 mang thương hiệu NXBGDVN sản xuất theo Chương trình GDPT 2018:

1. Môn Toán



Conic



Hộp xác suất thống kê



Compa



Thước thẳng

2. Môn Mỹ thuật



Bàn ghế học mỹ thuật



Bảng vẽ



Mẫu vẽ

3. Môn Sinh học



Máy cắt nước 1 lần



Bộ đồ mổ



Tiêu bản

4. Môn Vật lí



Truyền âm



Điện tích

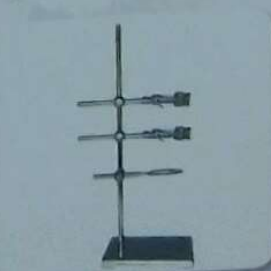


Xoay chiều

5. Môn Hóa học



Bộ thiết bị đo gia tốc



Bộ giá đỡ cơ bản



Khay đựng dụng cụ hóa chất

GIỚI THIỆU THIẾT BỊ DẠY HỌC LỚP 10

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam là đơn vị trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo có nhiệm vụ tổ chức biên soạn, in ấn, sản xuất và phát hành các sản phẩm sách giáo khoa, sách tham khảo, sách điện tử, thiết bị giáo dục phục vụ giảng dạy, học tập ở các cấp, bậc học trên toàn quốc.

Với bề dày hơn 60 năm thực hiện nhiệm vụ chính trị phục vụ ngành Giáo dục, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ trong các lần đổi mới chương trình và thay sách giáo khoa do Bộ Giáo dục và Đào tạo phân công. Các sản phẩm giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam luôn có được sự tin nhiệm, tin cậy của nhiều thế hệ học sinh, phụ huynh và giáo viên trên mọi miền tổ quốc.

Thực hiện nhiệm vụ đổi mới chương trình sách giáo khoa giáo dục phổ thông, bên cạnh việc biên soạn các bộ sách giáo khoa đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt; Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam căn cứ vào quy định Thông tư về Danh mục thiết bị dạy học tối thiểu cấp THPT của Bộ Giáo dục và Đào tạo, căn cứ vào triết lí, nội dung, đặc điểm của các bộ sách giáo khoa để tổ chức thiết kế và sản xuất các sản phẩm Thiết bị dạy học lớp 10 mới dùng chung cho các bộ sách giáo khoa.

Để chuẩn bị phục vụ công tác dạy và học cho GV và HS trên mọi miền tổ quốc năm học 2022 – 2023 và những năm tiếp theo, NXBGDVN với hơn 35 năm kinh nghiệm trong sản xuất và kinh doanh thiết bị giáo dục, cùng với đội ngũ chuyên gia giàu kinh nghiệm, họa sĩ thiết kế chuyên nghiệp và quy trình sản xuất thiết bị hiện đại đã và đang tổ chức nghiên cứu, xây dựng, sản xuất các sản phẩm TBDH theo danh mục TBDH tối thiểu dành cho các cấp học bậc học nói chung và lớp 10 nói riêng.

Lớp 10 với 15 môn học, trong đó có hoạt động trải

nghiệm hướng nghiệp là môn học hoàn toàn mới mẻ với nhiều nội dung chủ đề hấp dẫn, bước đầu giáo dục hướng nghiệp cho các em học sinh chấp chững bước vào bậc học THPT và đây cũng điều kiện để các em được khám phá bản thân, khám phá khả năng của chính mình. Để giúp môn học này thật bổ ích đã có rất nhiều thiết bị dạy học hỗ trợ đi kèm để GV và HS hứng thú và yêu thích hơn. Ngoài ra với hàng trăm loại sản phẩm thiết bị dạy học phục vụ, hỗ trợ cho các môn học khác nằm trong danh mục thiết bị dạy học tối thiểu lớp 10 do Bộ GDĐT quy định.

Năm học 2022 – 2023 là năm đầu tiên triển khai thực hiện thay SGK theo chương trình GDPT 2018 đối với lớp 10, đi đôi với SGK là các loại thiết bị dạy học tương ứng hỗ trợ cho các bài học của từng môn học giúp cho GV và HS tương tác với nhau nhiều hơn, khai thác và truyền tải nội dung dạy học một cách sinh động, chân thực và chất lượng, đồng thời thông qua thực hành giúp HS phát huy năng lực làm việc nhóm tạo sự say mê, hứng thú đối với môn học qua đó phát triển năng lực và sự sáng tạo, tư duy và trí nhớ được tốt hơn, các em biết vận dụng lí thuyết đưa vào thực hành trong cuộc sống. Đây là hiệu quả to lớn do thiết bị dạy học đem lại.

Với việc xác định đúng đắn hiệu quả to lớn mà TBDH đem lại cho công tác giảng dạy, học tập của GV và HS trong nhà trường, NXBGDVN đã đầu tư nhân lực, trí lực, vật lực để sản xuất TBDH phục vụ cho các cấp học, bậc học. Bộ TBDH của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đảm bảo mục đích dạy học, có tính thẩm mỹ, thân thiện với môi trường, an toàn cho người dùng, giá thành đảm bảo cạnh tranh, sản phẩm được dán tem công nghệ tích hợp chống hàng giả, hàng nhái, truy xuất nguồn gốc và hướng dẫn sử dụng thiết bị giáo dục trên bản điện tử.

(Xem tiếp bìa 3)