# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 536
Tháng 2 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

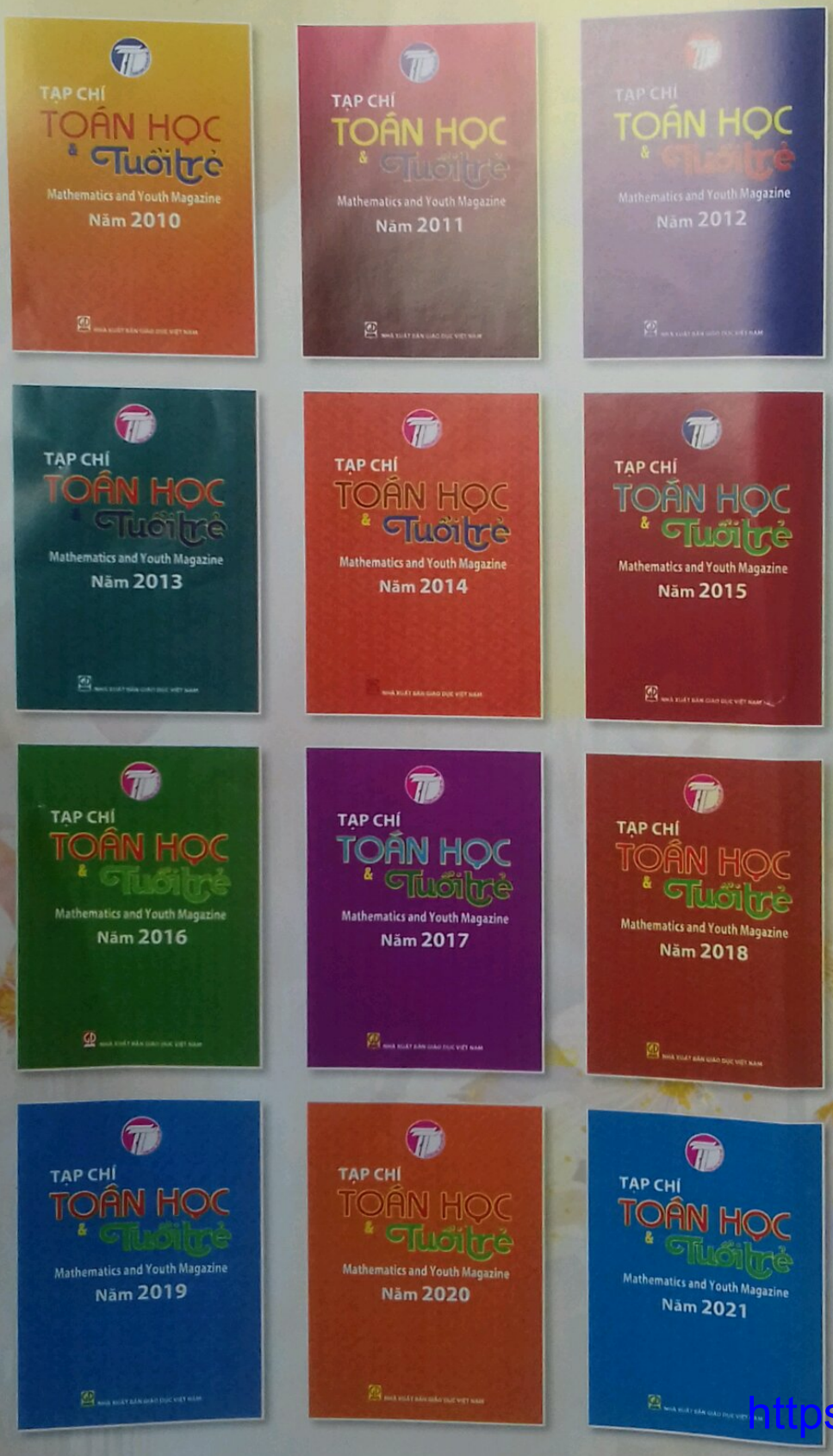
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

*Bộ đóng tập*

## TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM




**Năm 2010**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

**Năm 2011**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

**Năm 2012**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

**Năm 2013**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

**Năm 2014**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

**Năm 2015**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2016**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2017**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2018**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2019**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2020**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

**Năm 2021**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

*Mọi chi tiết xin liên hệ:*
**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**
**Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội**
Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
Email: toanhocvatuoitre@gmail.com


# MỘT BÀI TOÁN CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

**NGUYỄN DŨNG**
*(GV THCS Lương Sơn, Bình Thuận)*

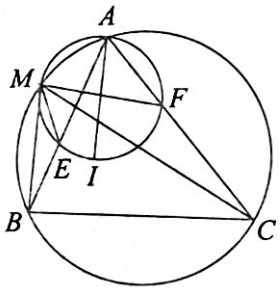
Trong hình học có những bài toán tuy đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng lớn trong việc giải các bài toán khác. Trong chuyên mục này tác giả trình bày một bài toán như vậy.

**Bài toán**. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. I là điểm nằm trong tam giác ABC, đường tròn đường kính AI cắt AB, AC, (O) lần lượt tại E, F, M (M khác A). Khi đó* $\Delta BEM \backsim \Delta CFM$.

Thật vậy, ta có: $\widehat{MEA} = \widehat{MFA}$, suy ra:

$$\widehat{MEB} = \widehat{MFC}.$$

Kết hợp $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$ suy ra $\Delta BEM \backsim \Delta CFM$ (g.g).




Sử dụng kết quả này chúng ta có thể giải quyết được khá nhiều các bài toán hình học có cùng cấu hình.

**Bài 1**. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và AB < AC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi D, E và F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của điểm I trên các đường thẳng BC, CA và AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A).*

a) *Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng*

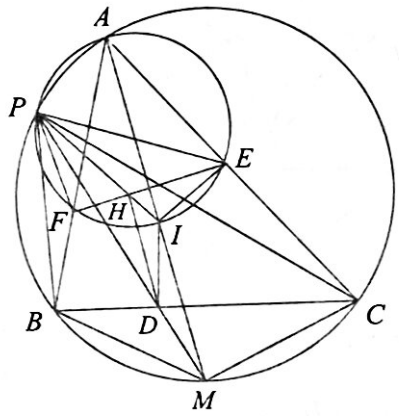
b) *Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF. Chứng minh rằng đường thẳng HD song song với đường thẳng AM.*

(Thi vào lớp 10 chuyên Tin TP. Hà Nội, năm 2021)

***Lời giải.*** a) Theo kết quả bài toán trên, ta có:

$$\Delta BFP \backsim \Delta CEP \text{ nên } \frac{PB}{PC} = \frac{BF}{CE}.$$

Mặt khác để ý $BF = BD$, $CE = CD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), nên ta có $\frac{PB}{PC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$.




Do đó $PD$ là tia phân giác giác của $\widehat{BPC}$ nên đường thẳng $PD$ đi qua điểm chính giữa cung $BC$ không chứa $A$ của $(O)$. Theo giả thiết $AM$ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $M$ là điểm chính giữa của cung $BC$ không chứa $A$ của $(O)$.

Vậy đường thẳng $PD$ đi qua $M$ hay ba điểm $P$, $M$, $D$ thẳng hàng.

b) *Cách 1*. Ta có: $\Delta BFP \backsim \Delta CEP$ nên $\frac{PF}{PB} = \frac{PE}{PC}$. Để ý $\widehat{EPF} = \widehat{EAF} = \widehat{CAB} = \widehat{CPB}$, do đó $\Delta PEF \backsim \Delta PCB$ (c.g.c).

Vì $IE = IF$ nên $PI$ là tia phân giác $\widehat{EPF}$. Mặt khác $PD$ là tia phân giác của $\widehat{BPC}$ nên suy ra $\Delta PFH \backsim \Delta PBD$, ta cũng có $\Delta PIF \backsim \Delta PMB$ (g.g).

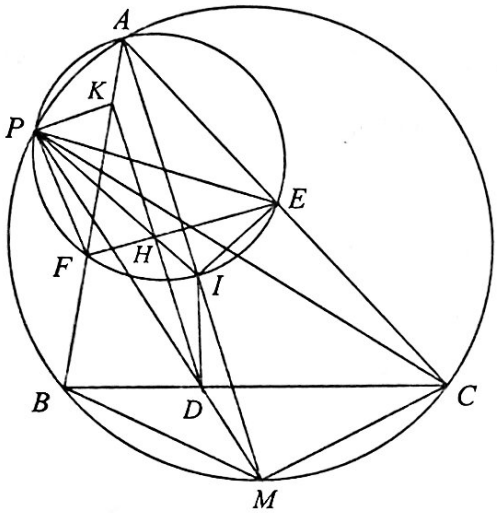
Do đó $\frac{PH}{PD}=\frac{PF}{PB}=\frac{PI}{PM}$ hay $\frac{PH}{PI}=\frac{PD}{PM}$.

Vậy $HD \parallel AM$.

*Cách 2.* Vì $PH$ là tia phân giác của $\widehat{EPF}$ nên ta có $\frac{HF}{HE}=\frac{PF}{PE}=\frac{BF}{CE}$. Mặt khác vì $AF = AE$ nên $\widehat{AFE}=\widehat{AEF}$, suy ra $\widehat{BFH}=\widehat{CEH}$.

Do đó $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$ (c.g.c) suy ra:

$$\widehat{BHF}=\widehat{CHE},\ \frac{BH}{CH}=\frac{BF}{CE}.$$




Tia $PD$ là phân giác của $\widehat{BPC}$ nên $\frac{DB}{DC}=\frac{PB}{PC}=\frac{BF}{CE}$.

Do đó $\frac{DB}{DC}=\frac{BH}{CH}$. Suy ra $HD$ là tia phân giác của $\widehat{BHC}$ hay $\widehat{BHD}=\widehat{CHD}$.

Kết hợp $\widehat{BHF}=\widehat{CHE}$, suy ra $\widehat{DHF}=90^0$ hay $DH \perp EF$ mà $AI \perp EF$ nên $DH \parallel AI$. Vậy $DH \parallel AM$.

*Cách 3.* Giả sử tia $DH$ cắt đường thẳng $AB$ tại $K$.

Theo cách 1, ta có $\Delta PFH \backsim \Delta PBD$, suy ra:

$$\widehat{FPH}=\widehat{BPD},\ \frac{PH}{PD}=\frac{PF}{PB}.$$

Do đó: $\widehat{DPH}=\widehat{BPF}$, $\frac{PH}{PD}=\frac{PF}{PB}$.

Vậy $\Delta PHD \backsim \Delta PFB$ (c.g.c).

Ta có $\widehat{PBK}=\widehat{PBF}=\widehat{PDH}=\widehat{PDK}$ hay tứ giác $BPKD$ nội tiếp, suy ra:

$$\widehat{BKD}=\widehat{BPD}=\widehat{BPM}=\widehat{BAM}.$$

Do đó ta có: $DK \parallel AM$ hay $DH \parallel AM$.

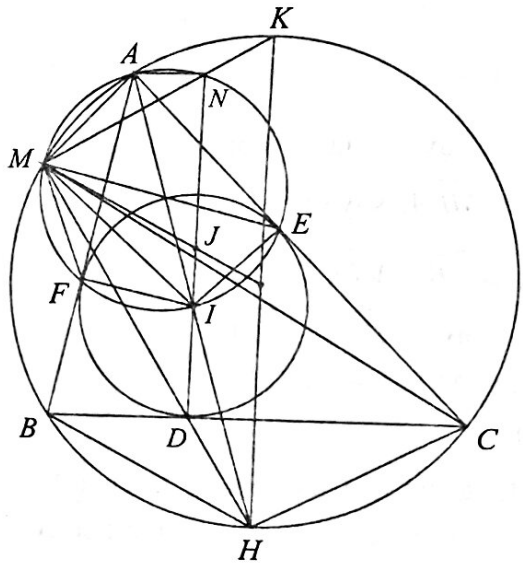
***Nhận xét.*** Từ cách 3, ta có:

$$\widehat{FKH}=\widehat{BKD}=\widehat{BAM}=\widehat{FPI}=\widehat{FPH}.$$

Do đó tứ giác $PKHF$ là tứ giác nội tiếp do $HK \perp HF$ nên $PK \perp PF$.

**Bài 2.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc cạnh BC tại D. Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn (O) lần nữa tại M, cắt đường thẳng qua A song song với cạnh BC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng OM chia đôi đoạn thẳng DN.*

***Lời giải.***




Gọi $E$, $F$ lần lượt là tiếp điểm của $(I)$ với $AC$, $AB$; $H$, $K$ lần lượt là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{BAC}$. Dễ thấy các điểm $A$, $I$, $H$ thẳng hàng và $H$, $O$, $K$ thẳng hàng.

Ta có $ID \perp BC$, $IN \perp AN$ ($N$ thuộc đường tròn đường kính $AI$) và $AN \parallel BC$ nên ba điểm $D$, $I$, $N$ thẳng hàng.

Theo bài toán 1, ta có ba điểm $M$, $D$, $H$ thẳng hàng.

Vì bốn điểm $A$, $M$, $I$, $N$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AI$ nên $\widehat{AMN}=\widehat{AIN}$.

Do $IN \parallel HK$ (vì cùng vuông góc với $BC$) nên $\widehat{AIN} = \widehat{AHK} = \widehat{AMK}$. Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{AMK}$ hay ba điểm $M, N, K$ thẳng hàng.

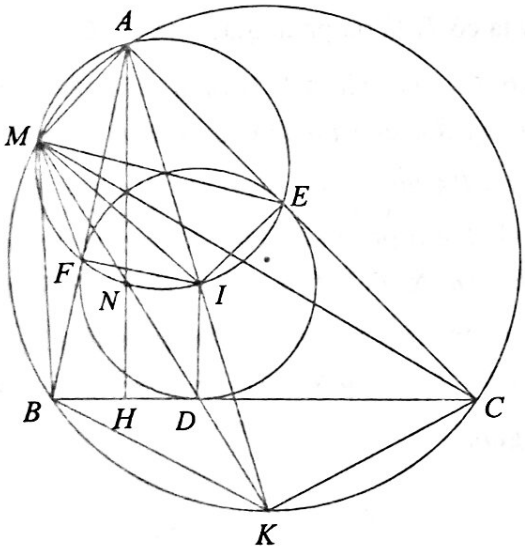
Gọi giao điểm của $OM$ và $DN$ là $J$, vì $DN \parallel HK$ nên theo hệ quả định lí Thales ta có:

$$\frac{JD}{OH} = \frac{MJ}{MO} = \frac{JN}{OK}.$$

Mà $OH = OK$ nên $JD = JN$ hay $OM$ đi qua trung điểm đoạn thẳng $DN$.

**Bài 3.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc cạnh BC tại D, H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác A), và cắt AH tại N. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.*

***Lời giải.***




Gọi $E$, $F$ lần lượt là giao điểm của đường tròn đường kính $AI$ với $AC$ và $AB$. Giả sử $AI$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $K$.

Theo bài toán 1, ta có ba điểm $M$, $D$, $K$ thẳng hàng.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $N$ thuộc đường thẳng đi qua ba điểm $M, D, K$.

Thật vậy, giả sử đường thẳng $MK$ cắt đường thẳng $AH$ tại $N'$.

Ta có: $\widehat{MEI} = \widehat{MAI} = \widehat{MAK}$.

Mà $\widehat{MAK} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{MK} = \frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{MB}$ + sđ $\overset{\frown}{BK}$)

$= \frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{MB}$ + sđ $\overset{\frown}{KC}$) $= \widehat{MBD} = \widehat{N'DH}$,

do đó ta có: $\widehat{MEI} = \widehat{N'DH}$. Chú ý rằng:

$$\widehat{MEI} + \widehat{MEA} = 90^0, \ \widehat{HN'D} + \widehat{N'DH} = 90^0,$$

vậy ta có $\widehat{MEA} = \widehat{HN'D}$ hay $\widehat{MEA} = \widehat{MN'A}$.

Suy ra $N'$ thuộc đường tròn đường kính $AI$.

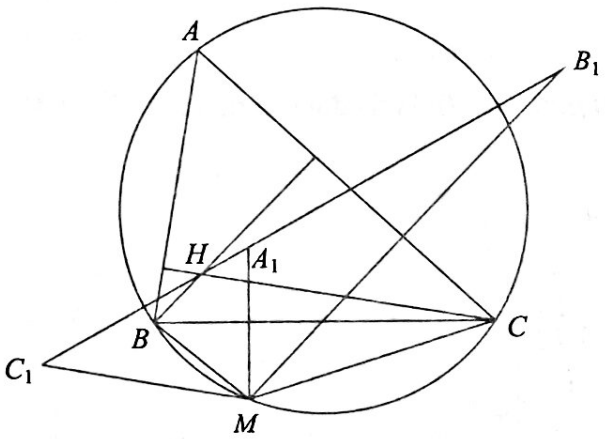
Do đó $N \equiv N'$ hay ba điểm $M, N, D$ thẳng hàng.

**Bài 4.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn qua A, O cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng trực tâm tam giác PQO nằm trên BC.*

***Lời giải.***

***Bổ đề.*** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M là điểm bất kì thuộc đường tròn sao cho M không trùng với các đỉnh của tam giác. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó ba điểm $A_1$, $B_1$, $C_1$ và trực tâm H của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng (Đường thẳng này là đường thẳng Steiner của điểm M đối với tam giác ABC).*

(Bạn đọc tự chứng minh Bổ đề này).




Quay trở lại bài toán, gọi $(K)$ là đường tròn đi qua hai điểm $A$, $O$.

Giả sử $(K)$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai là $M$.

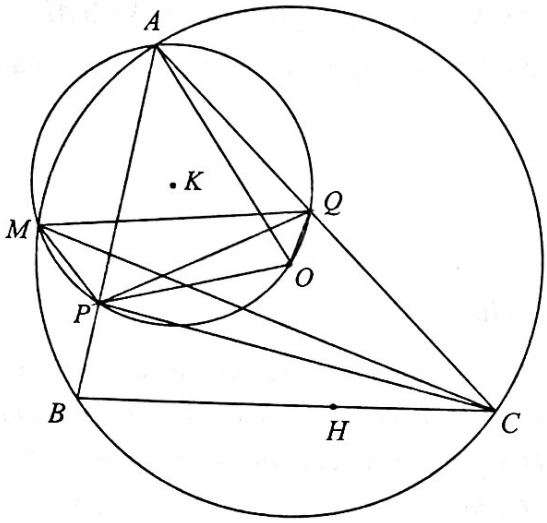
Ta có $\widehat{MPA} = \widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$. Suy ra:

$$\widehat{MBP} = \widehat{PMB} \text{ hay } PM = PB.$$

Theo bài toán đầu tiên ta có $\Delta PBM \backsim \Delta QCM$ do đó $\Delta QCM$ cân tại $Q$.

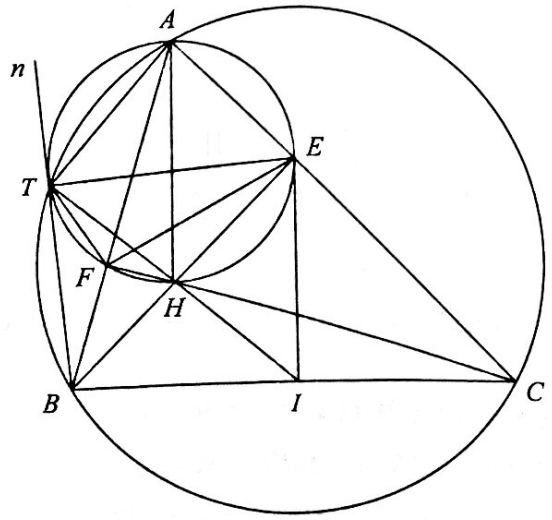
Chú ý $OM = OB$ và $OM = OC$ do đó $OP$ và $OQ$ là đường trung trực của $MB$, $MC$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $OPQ$ nội tiếp đường tròn $(K)$ và $M$ là điểm thuộc đường tròn $(K)$, từ đó suy ra trực tâm $H$ của tam giác $OPQ$ nằm trên $BC$.




**Bài 5.** *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác ABC; BH, CH cắt CA, AB tương ứng tại E, F. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm T (T khác A). Chứng minh TI là tia phân giác của góc* $\widehat{FTC}$.

***Lời giải.*** Gọi $Tn$ là tia đối của tia $TB$.




Vì tứ giác $ATBC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ nên $\widehat{ATN} = \widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ nên bốn điểm $B, F, E, C$ cùng thuộc một đường tròn nên suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{ECB} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AFE} = \widehat{ATE}$ nên $\widehat{ATN} = \widehat{ATE}$ hay $TA$ là tia phân giác của $\widehat{NTE}$.

Kết hợp $\widehat{AHT} = 90^0$ ($T$ thuộc đường tròn đường kính $AH$) nên suy ra $TH$ là tia phân giác của $\widehat{BTE}$.

Do đó ta có: $\widehat{BTE} = 2\widehat{HTE} = 2\widehat{HAE} = 2\widehat{EBI}$.

Tam giác $BEC$ vuông tại $E$, có $I$ là trung điểm $BC$ nên $\widehat{EIC} = 2\widehat{EBI}$.

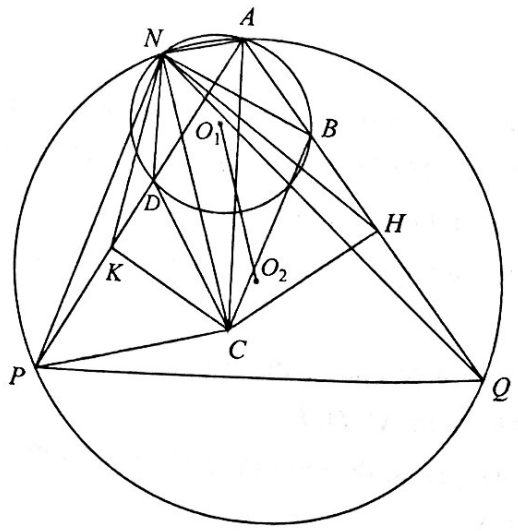
Vậy ta được $\widehat{BTE} = \widehat{EIC}$, nên tứ giác $BTEI$ nội tiếp. Mà $IB = IE$ suy ra $TI$ là tia phân giác của $\widehat{BTE}$. Do đó ba điểm $T, H, I$ thẳng hàng.

Theo bài toán mở đầu ta có $\Delta BFT \backsim \Delta CET$, suy ra $\widehat{BTF} = \widehat{CTE}$. Do đó $\widehat{FTH} = \widehat{HTC}$.

Vậy ta có $TI$ là tia phân giác của $\widehat{FTC}$.

**Bài 6.** *Cho tứ giác ABCD thỏa mãn* $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$. *Trên tia đối của tia DA lấy điểm P, trên tia đối của tia BA lấy điểm Q sao cho* $\widehat{DCP} = \widehat{BCQ}$. *Gọi* $O_1$, $O_2$ *lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp* $\Delta ABD$ *và* $\Delta APQ$. *Giả sử hai đường tròn* $(O_1)$ *và* $(O_2)$ *không tiếp xúc nhau, chứng minh rằng đường thẳng* $O_1O_2$ *đi qua trung điểm đoạn thẳng AC.*

***Lời giải.***




(Xem tiếp trang 20)

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH, NĂM HỌC 2020 – 2021

**Bài 1.** 1) *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2 \quad (1).$$

2) *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn* $\frac{2b-c}{a}\geq 4$ (2).

*Chứng minh rằng phương trình:* $ax^2+bx+c=0$ (3) *luôn có nghiệm.*

***Lời giải.*** 1) ĐK: $x \geq 1$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (x-\sqrt{x^2-1})+(x+\sqrt{x^2-1})+2\sqrt{x^2-(x^2-1)}=4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2=4 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy PT(1) có một nghiệm $x=1$.

2) Vì $a \neq 0$ nên có 3 trường hợp:

TH1: $a>0; c\geq 0$. Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow 2b \geq 4a+c \geq 2\sqrt{4ac}$ (BĐT Cauchy)

$\Rightarrow b^2 \geq 4ac \Leftrightarrow \Delta = b^2-4ac \geq 0 \Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm.

TH2: $a<0; c\leq 0$. Khi đó: (2) $\Leftrightarrow 2b \leq 4a+c$

$\Leftrightarrow -2b \geq (-4a)+(-c) \geq 2\sqrt{(-4a)(-c)}$

$\Rightarrow b^2 \geq 4ac \Leftrightarrow \Delta = b^2-4ac \geq 0 \Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm.

TH3: $a>0; c\leq 0$ hoặc $a<0; c\geq 0$. Khi đó:

$\Delta = b^2-4ac \geq 0 \Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm.

Vậy PT(3) luôn có nghiệm.

**Bài 2.** 1) *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:*

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3 \quad (1).$$

2) *Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ 69 số đó 4 số sao cho trong chúng có 1 số bằng tổng của 3 số còn lại.*

***Lời giải.*** 1) Biến đổi:

(1) $\Leftrightarrow x^3+x^2y^2+xy+y^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$\Leftrightarrow 2y^3+x^2y^2+3x^2y-3xy^2+xy=0$

$\Leftrightarrow y[2y^2+x^2y+3x^2-3xy+x]=0$

$\Leftrightarrow y[2y^2+y(x^2-3x)+(3x^2+x)]=0$

$\Leftrightarrow y=0$ hoặc $2y^2+y(x^2-3x)+(3x^2+x)=0$ (2)

Xem (2) là phương trình bậc hai ẩn $y$ ($x$ là tham số), ta có:

$$\begin{aligned}\Delta &= (x^2-3x)^2-8(3x^2+x)\\ &= x^4-6x^3+9x^2-24x^2-8x\\ &= x^4-6x^3-15x^2-8x = x(x^3-6x^2-15x-8)\\ &= x(x^3+x^2-7x^2-7x-8x-8)\\ &= x[x^2(x+1)-7x(x+1)-8(x+1)]\\ &= x(x+1)(x^2-7x-8) = x(x+1)^2(x-8).\end{aligned}$$

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm nguyên là $\Delta$ là số chính phương. Do đó:

$x(x-8)=a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow x^2-8x-a^2=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2-a^2=16$

$\Leftrightarrow (x-4-a)(x-4+a)=16.$

Vì hai thừa số ở vế trái có tổng là số chẵn và tích là số chẵn nên chúng đều là số chẵn.

Xét các trường hợp:

- $\begin{cases}x-4-a=2\\ x-4+a=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ a=3\end{cases}.$

Thay $x=9$ vào PT(2) ta được:

$$2y^2+54y+252=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y_1=-6\\ y_2=-21\end{array}\right..$$

Khi đó $(x;y)\in\{(9;-6),(9;-21)\}$.

- $\begin{cases}x-4-a=8\\ x-4+a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\ a=-3\end{cases}.$

- $\begin{cases}x-4-a=4\\ x-4+a=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8\\ a=0\end{cases}.$

Thay $x=8$ vào PT(2) ta được:

$$2y^2-40y+200=0 \Leftrightarrow (y-10)^2=0$$
$$\Leftrightarrow y=10.$$

Khi đó $(x;y)=(8;10)$.

• $\begin{cases} x-4-a=-2 \\ x-4+a=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ a=-5 \end{cases}$. Thay $x = -1$ vào PT(2) ta được: $2y^2 + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow y = -1$. Khi đó $(x; y) = (-1; -1)$.

• $\begin{cases} x-4-a=-8 \\ x-4+a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ a=3 \end{cases}$.

• $\begin{cases} x-4-a=-4 \\ x-4+a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ a=0 \end{cases}$. Thay $x = 0$ vào PT(2) ta được: $y = 0$. Khi đó $(x; y) = (0; 0)$.

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (1): $(x; y) \in \{(9; -6), (9; -21), (8; 10), (-1; -1), (k; 0)\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Giả sử 69 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn 100 là: $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{69} \le 100$.

Dễ thấy: $a_2 \ge 2; a_3 \ge 3; \ldots; a_{69} \ge 69$;

$1 \le a_1 \le 32$.

Xét 2 dãy số:

$1 \le a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \ldots < a_{69} - a_2 \le 100 - 2 = 98$ (1);

$4 \le a_3 + a_1 < a_4 + a_1 < \ldots < a_{69} + a_1 \le 100 + 32 = 132$ (2).

Dãy (1) có 67 số hạng khác nhau, dãy (2) có 67 số hạng khác nhau. Cả 2 dãy có 134 số hạng lấy giá trị từ 1 đến 132, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số hạng bằng nhau. Chẳng hạn:

$a_m - a_2 = a_k + a_1$ ($m \ne k, m, k \in \{3; 4; \ldots; 69\}$

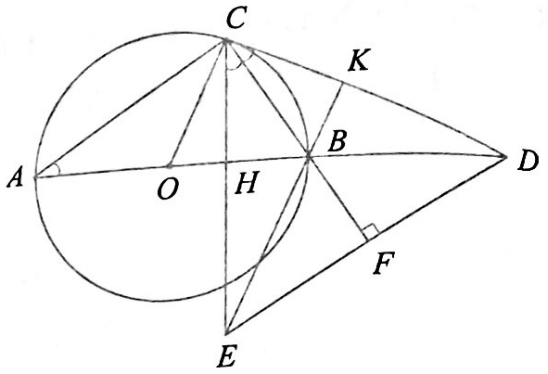
$\Leftrightarrow a_m = a_1 + a_2 + a_k$ (đpcm).

**Bài 3.** *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C sao cho cung BC nhỏ hơn cung AC, qua C dựng tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt AB tại D. Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), kẻ BK vuông góc với CD ($K \in CD$); CH cắt BK tại E.*

a) *Chứng minh $BK + BD < EC$.*

b) *Chứng minh $BH.AD = AH.BD$.*

***Lời giải.***




a) Ta có: $\widehat{BCD} = \widehat{CAB}\left(= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{BC}\right) = \widehat{ECD} \Rightarrow CB$ là tia phân giác của góc $\widehat{ECD} \Rightarrow BH = BK$.

Mặt khác, $B$ là giao điểm hai đường cao của $\Delta CDE$ nên là trực tâm, do đó $CB \perp ED$ tại $F$.

Do đó $\Delta CDE$ cân tại $C$, suy ra $CD = CE$.

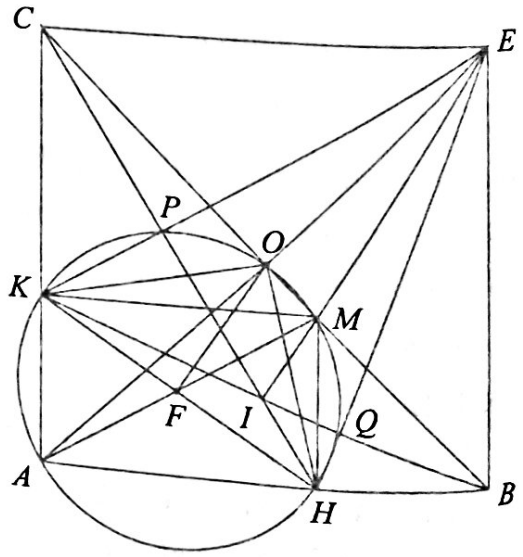
$\Delta CDH$ vuông nên $HD < CD \Leftrightarrow BH + BD < CD$ $\Leftrightarrow BK + BD < CE$ (đpcm).

b) Vì $CA \perp CB$ nên $CA$ là phân giác ngoài của $\Delta CHD$ tại $C$. Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác ta có:

$$\frac{AH}{AD} = \frac{BH}{BD} \Leftrightarrow BH.AD = AH.BD \text{ (đpcm).}$$

**Bài 4.** *Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm di động trên cạnh BC (M khác B, C). Hình chiếu của M trên AB, AC lần lượt là H và K. Gọi I là giao điểm của BK và CH. Chứng minh rằng đường thẳng IM luôn đi qua một điểm cố định.*

***Lời giải.***



Gọi $O$ là trung điểm của $BC$. $E$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$. Ta có $ABEC$ là hình vuông. Gọi $P$ là giao điểm của $EK$ với $CH$, $Q$ là giao điểm của $EH$ với $BK$.

Ta có $BC$ là trung trực của $AE$ nên $MO \perp AE$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = 90^0$. Mặt khác, $AKMH$ là hình chữ nhật nên 5 điểm $A, H, M, O, K$ cùng thuộc đường tròn tâm $F$ đường kính $KH$.

Vì $ABCE$ là hình vuông và $AHMK$ là hình chữ nhật nên suy ra:

$$\Delta CAH = \Delta ECK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{CEK}.$$

Vì $\widehat{ACH} + \widehat{HCE} = 90^0$ nên $\widehat{CEK} + \widehat{HCE} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta CEP$ vuông tại $P \Rightarrow CP \perp EK$ hay $HP \perp EK$ (1).

Chứng minh tương tự ta có: $KQ \perp EH$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $I$ là trực tâm $\Delta EHK$.

Do đó $EI \perp KH$ (3). Ta lại có:

$\widehat{KAO} = \widehat{HAO}$ $(= 45^0) \Rightarrow \overset{\frown}{OK} = \overset{\frown}{OH} \Rightarrow OK = OH$

$\Rightarrow OF \perp KH$ (4). Từ (3), (4) suy ra $OF // EI$ (5).

Vì $OF$ là đường trung bình của $\Delta AME$ nên $OF // EM$ (6).

Từ (5), (6) suy ra hai đường thẳng $EI$ và $EM$ trùng nhau.

Vậy đường thẳng $IM$ đi qua điểm cố định $E$ là đỉnh của hình vuông $ABEC$ khi $M$ di động trên cạnh $BC$.

**Bài 5.** *Tìm tất cả các giá trị của x để:*

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} - x^3 \le 30.$$

***Lời giải.*** ĐK: $2 \le x \le 4$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[4]{x-2} \\ b = \sqrt[4]{4-x} \end{cases}$ $(a \ge 0, b \ge 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = x-2 \\ b^4 = 4-x \end{cases}$

$\Rightarrow a^4 + b^4 = 2$. Khi đó:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = ab + a + b \ (*)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho 2 bộ số $(a; b)$ và $(1; 1)$ ta có:

$$2 = a^4 + b^4 \Leftrightarrow 2^2 = 2(a^4 + b^4) \ge (a^2 + b^2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 \ge (a^2 + b^2)$$
$$\Leftrightarrow 2^2 \ge 2(a^2 + b^2) \ge (a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 \ge (a+b) \ (1).$$

Lại áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm:

$$2 = a + b \ge 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow 1 \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le 1 \ (2).$$

Từ (1), (2) ta có: $ab + a + b \le 1 + 2 = 3$ (**).

Từ (*), (**) suy ra:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \le 3 \ (4).$$

BĐT(4) đúng khi $2 \le x \le 4$ **(a).**

Ta có:

$$6x\sqrt{3x} - x^3 = x\sqrt{x}\left(6\sqrt{3} - x\sqrt{x}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm:

$$x\sqrt{x}\left(6\sqrt{3} - x\sqrt{x}\right) \le \left(\frac{x\sqrt{x} + 6\sqrt{3} - x\sqrt{x}}{2}\right)^2 = 27 \ (5).$$

BĐT(5) đúng khi

$$\begin{cases} 6\sqrt{3} - x\sqrt{x} \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(6\sqrt{3}\right)^2 \ge x^3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x \le 3\sqrt[3]{4} \ \textbf{(b).}$$

Từ (4), (5) suy ra:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} - x^3 \le 3 + 27 = 30.$$

Từ (a), (b) ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là: $2 \le x \le 4$.

**BÙI VĂN CHI**

*(21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy NHơn, Bình Định)*

***Giới thiệu***

# ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TỈNH BÌNH ĐỊNH, NĂM HỌC 2020 - 2021

*(Môn thi: Toán chuyên, thời gian làm bài: 150 phút)*

**Bài 1** *(2,0 điểm)*.

1. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $P=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên.

2. Cho phương trình: $2x^2-3x+2m=0$. Tìm $m$ để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ khác 0 thỏa $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=1$.

**Bài 2** *(2,5 điểm)*.

1. Giải phương trình:

$$\frac{x^4-x^2+1}{x^3+3x^2-x}=\frac{1}{2}.$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1\\ \sqrt{x+y}=y-x\end{cases}.$$

**Bài 3** *(1,5 điểm)*. Tìm tất cả các số nguyên tố $p$ và $q$ sao cho $p^2+3pq+q^2$ là một số chính phương.

**Bài 4** *(3,0 điểm)*.

1. Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$ (với $\widehat{BAC}<60^0$) nội tiếp đường tròn $(O)$. Gọi $M$ là điểm bất kỳ trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh rằng

$$MA>MB+MC.$$

2. Cho tam giác $ABC$ nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Gọi $D$ là trung điểm cạnh $BC$ và $E$, $F$ tương ứng là hình chiếu vuông góc của $D$ lên $AC$ và $AB$. Đường thẳng $EF$ cắt các đường thẳng $AO$ và $BC$ theo thứ tự tại $M$ và $N$.

a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ nội tiếp.

b) Gọi $K$ là giao điểm của $AB$ và $ED$, $L$ là giao điểm của $AC$ và $FD$, $H$ là trung điểm của $KL$ và $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AEF$. Chứng minh $HI\perp EF$.

**Bài 5** *(1,0 điểm)*. Cho $x$, $y$ là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}.$$

**BÙI VĂN CHI**

*(21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)*

**********

***Giới thiệu***

## Math Jokes

*'What is Pi?'* A mathematician, *'Pi is the ratio of the circumference of a circle to its diameter.'* A computer programmer, *'Pi is 3.141592653589 in double precision.'* A physicist, *'Pi is 3.14159 plus or minus 0.000005.'* An engineer, *'Pi is about 22/7.'* A nutritionist, *'Pie is a healthy and delicious dessert!'*

**********

It is only two weeks into the term that, in a calculus class, a student raises his hand and asks: *"Will we ever need this stuff in real life?"* The professor gently smiles and says: *"Of course not – if your real life will consist of flipping hamburgers at MacDonald's!"*


# KHAI THÁC YẾU TỐ TRUNG ĐIỂM, TRUNG TUYẾN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN MAX, MIN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ PHỨC

**CAO HẢI VÂN**
*(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)*

Kỳ thi THPT Quốc gia và Tốt nghiệp THPT trong những năm gần đây, các bài toán *min*, *max* liên quan đến số phức xuất hiện khá nhiều và ở dạng bài toán vận dụng cao. Bên cạnh việc giải bằng các phương pháp Đại số quen thuộc thì việc khai thác yếu tố Hình học của số phức để giải cũng là một hướng đi khá hiệu quả. Trong khuôn khổ bài viết này tác giả muốn trao đổi một hướng đi bằng cách khai thác yếu tố trung điểm và trung tuyến.

## 1. Một số kiến thức liên quan

- $I$ là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm $M$.
- Mọi tam giác $ABC$ với $a=BC, b=CA, c=AB$ thì $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$, trong đó $m_a$ là độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh $A$.
- Trong tập số phức $\mathbb{C}$, mỗi số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$.
- Môđun của số phức $z$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$: $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Nếu $A,B$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z,w$ và $I$ là trung điểm của $AB$ thì $I$ là điểm biểu diễn cho số phức $\dfrac{z+w}{2}$.
- Nếu $A,B$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z,w$ thì $|z-w|=AB$.

## 2. Một số thí dụ minh họa

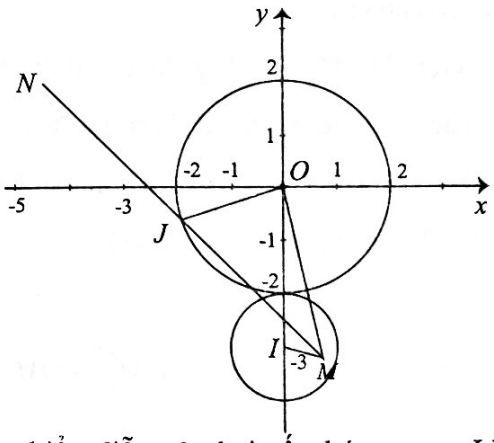
*Để thuận tiện trong trình bày, các bài toán sau đây đều được xét trên hệ trục tọa độ $Oxy$.*

**Thí dụ 1 (Đề thi thử của Trường THPT chuyên Quang Trung, năm 2021).** *Xét hai số phức $z,w$ thỏa mãn $|w+z|=4$ và $|z+3i|\le 1$. Giá trị lớn nhất của $T=|w-z|$ bằng*

**A.** 12. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

***Phân tích.*** Nếu $M,N$ lần lượt là các điểm biểu diễn của hai số phức $z,w$ thì điểm $J$ biểu diễn cho số phức $\dfrac{z+w}{2}$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$. Từ giả thiết $|w+z|=4$ ta có $OJ=2$. Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của đoạn $MJ$ với $J$ thuộc đường tròn $(O;2)$.

***Lời giải.*** Đặt $I(0;-3)$. Gọi $M,N$ lần lượt là các




điểm biểu diễn của hai số phức $z,w$; $J$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$.

Ta có $|w+z|=2OJ \Rightarrow OJ=2$ hay $J$ thuộc đường tròn $(O;2)$.

Với $|z+3i|\le 1$ thì ta có $M$ thuộc hình tròn tâm $I(0;-3)$ và bán kính bằng 1. Ta luôn có:

$$MJ\le MO+OJ\le MI+IO+OJ\le 1+3+2=6.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $T=|w-z|$ bằng 12. Chọn đáp án **A**.

**Thí dụ 2 (Đề thi thử của Trường PT Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm 2018).** *Cho $z_1, z_2$ là hai số phức thỏa mãn hệ thức $|z-3-4i|=2$ và $|z_1-z_2|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|^2-|z_2|^2$.*

**A.** $-10$. **B.** $-5$.

**C.** $-6-2\sqrt{5}$. **D.** $-4-3\sqrt{5}$.

***Phân tích.*** Chúng ta biết rằng nếu $M_1, M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1, z_2$ thì với giả thiết ta có $M_1, M_2$ thuộc đường tròn tâm $(I;2)$ với $I(3;4)$ và thỏa mãn $M_1M_2=1$. Ta có:

$$P=|z_1|^2-|z_2|^2=OM_1^2-OM_2^2=\overrightarrow{OM_1}^2-\overrightarrow{OM_2}^2$$
$$=\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right)\left(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right).$$

Mà $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=2\overrightarrow{OJ}$ (với $J$ là trung điểm của $M_1M_2$) thì việc ta khai thác yếu tố trung điểm là hoàn toàn có căn cứ.

***Lời giải.*** Gọi $M_1, M_2$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức $z_1, z_2$; $J$ là trung điểm của $M_1M_2$. Đặt $I(3;4)$. Khi đó $M_1, M_2$ thuộc đường tròn tâm $(I;2)$ và thỏa mãn $M_1M_2=1$.

Ta có:

$$P=|z_1|^2-|z_2|^2=OM_1^2-OM_2^2=\overrightarrow{OM_1}^2-\overrightarrow{OM_2}^2$$
$$=\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right).\left(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right)$$
$$=2\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{M_2M_1}.\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{OI}$$

(vì $M_1M_2 \perp IJ$)

$$=2M_1M_2.OI.\cos(\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{OI})=10\cos(\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{OI})$$
$$\geq -10.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{OI}\right)=180^0$ hay $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OI}$.

Từ đó ta có đáp án chọn là **A**.

**Thí dụ 3 (Đề tham khảo Tốt nghiệp THPT năm 2021).** *Xét hai số phức $z_1, z_2$ thỏa mãn $|z_1|=1, |z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng*

**A.** $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$.

**C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

***Phân tích.*** Ta có:

$$3z_1+z_2-5i=2z_1+(z_1+z_2)-5i=2(z_1+z_3)-5i$$
$$=4z_4-5i.$$

Nếu gọi $M, N$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $z_1, z_2$; $P$ là trung điểm của $MN$; $Q$ là trung điểm của $MP$ thì bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của đoạn $IQ$ với $I\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

***Lời giải.*** Gọi $M, N$ lần lượt là điểm biểu diễn cho $z_1, z_2$. Theo giả thiết thì tam giác $OMN$ vuông tại $M$.

Gọi $P$ là trung điểm của $MN$ và $Q$ là trung điểm của $MP$. Suy ra $P, Q$ theo thứ tự là điểm biểu diễn cho các số phức $z_3=\frac{z_1+z_2}{2}$ và $z_4=\frac{z_1+z_3}{2}$.

Ta có:

$$|3z_1+z_2-5i|=|2z_1+(z_1+z_2)-5i|$$
$$=|2(z_1+z_3)-5i|=4\left|z_4-\frac{5}{4}i\right|.$$

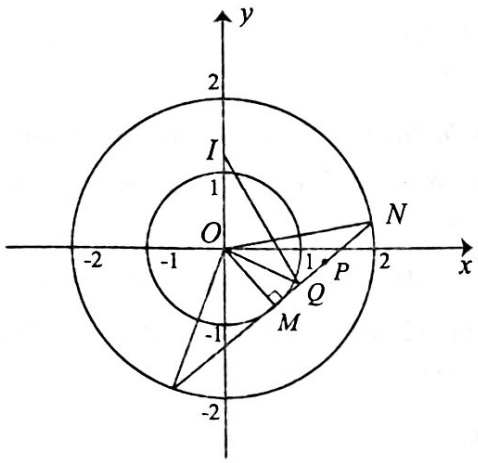
Đặt $I\left(0;\frac{5}{4}\right)$. Ta có: $IQ \leq IO+OQ=\frac{5}{4}+OQ$.

Mặt khác:

$$OQ^2=OM^2+MQ^2=1+\left(\frac{MN}{4}\right)^2=1+\frac{3}{16}=\frac{19}{16}.$$

Từ đó suy ra $IQ \leq \frac{5}{4}+\frac{\sqrt{19}}{4}$ hay giá trị lớn nhất của $IQ$ là $\frac{5+\sqrt{19}}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $I, O, Q$ theo thứ tự thẳng hàng. Ta tìm được tọa độ các điểm $M, N$ lần lượt là $\left(\frac{\pm\sqrt{57}}{9}; \frac{-4\sqrt{19}}{19}\right)$ và $\left(\frac{\mp\sqrt{57}}{19}; \frac{-7\sqrt{19}}{19}\right)$.




Vậy giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng $5+\sqrt{19}$. Ta có đáp án chọn là **B**.

**Thí dụ 4 (Đề thi Tốt nghiệp THPT năm 2021 – Đợt 1).** *Xét các số phức $z, w$ thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} + 6 + 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng*

**A.** 3. **B.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

***Phân tích.*** Nếu $w = a + bi$ thì $i\overline{w} = b + ai$ và $|i\overline{w}| = |w| = 2$. Tức là nếu tìm được số phức $i\overline{w}$ thì ta cũng có thể tìm được $w$ và tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $i\overline{w}$ và $w$ là đường tròn $(O, 2)$.

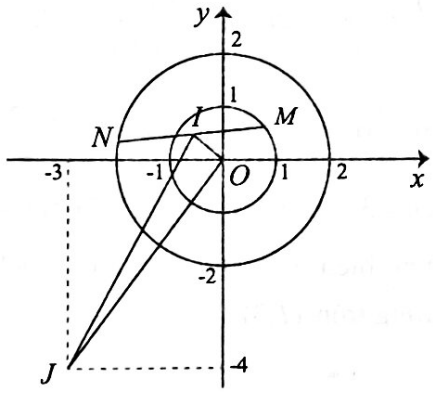
Khi đó, gọi $M, N$ là điểm biểu diễn cho các số phức $z$ và $i\overline{w}$; $I$ là trung điểm của $MN$. Từ giả thiết ta có $|z + i\overline{w} + 6 + 8i| = |2v + 6 + 8i|$ với $v$ là số phức có điểm biểu diễn $I$. Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $IJ$ với $J(-3; -4)$.

***Lời giải.*** Gọi $M, N$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z, i\overline{w}$; $I$ là trung điểm của $MN$. Với $J(-3; -4)$ thì $|z + i\overline{w} + 6 + 8i| = 2IJ$.

Ta luôn có: $IJ \geq JO - OI = 5 - OI$. Mặt khác:

$$OI^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} = \frac{5}{2} - \frac{MN^2}{4}.$$

Mà $1 \leq MN \leq 3$ nên $OI^2 \leq \frac{9}{4}$.




Từ đó ta có $IJ \geq 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $MN = 1$ và $J, I, O$ theo thứ tự thẳng hàng.

Dễ dàng tìm được $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và $N\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$.

Như vậy 2 số phức cần tìm là $z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ và $w = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i$ hay $|z - w| = \frac{\sqrt{29}}{5}$. Đáp án cần tìm là **D**.

*Nhận xét:* Giữa đề tham khảo và đề chính thức của Kỳ thi Tốt nghiệp THPT năm 2021 thì chúng ta thấy có một sự tương đồng về cách tiếp cận bài toán bằng hình học đặc biệt là yếu tố trung điểm.

**Thí dụ 5 (Đề thi thử của Trường THPT chuyên Đại học Vinh, năm 2018).** *Cho các số phức $w, z$ thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng*

**A.** $4\sqrt{13}$. **B.** $4 + 2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $6\sqrt{7}$.

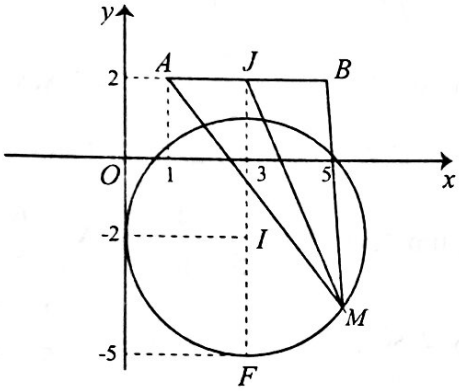
***Phân tích.*** Đặt $A(1; 2), B(5; 2)$. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$. Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $MA + MB$. Rõ ràng với $A$, $B$ cố định thì kết hợp với công thức trung tuyến

và bất đẳng thức Bunyakovsky ta có thể giải quyết được bài toán.

***Lời giải.*** Từ $5w=(2+i)(z-4)$ ta ta suy ra được:

$$\frac{5(w+i)}{2+i}=z-3+2i \text{ hay } \left|\frac{5(w+i)}{2+i}\right|=|z-3+2i|.$$

Kết hợp với giả thiết $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ta có $|z-3+2i|=3$. Đặt $A(1;2), B(5;2), I(3;-2)$. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$. Khi đó $M$ thuộc đường tròn $(I;3)$.




Gọi $J$ là trung điểm của $AB$.

Ta có $MJ^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$ hay $MA^2+MB^2=2MJ^2+8$.

Mà $MJ$ lớn nhất khi $M,I,J$ theo thứ tự thẳng hàng. Với $J(3;2)$ thì $M\equiv F(3;-5)$ có nghĩa là là giá trị lớn nhất của $MJ$ bằng 7.

Như vậy giá trị lớn nhất của $MA^2+MB^2$ bằng 106.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta lại có $MA+MB\le\sqrt{2(MA^2+MB^2)}=2\sqrt{53}$. Dấu "=" xảy ra khi $MA=MB$ và $M,I,J$ theo thứ tự thẳng hàng tức là $z=3-5i$. Với kết quả này đáp án chọn là **C.**

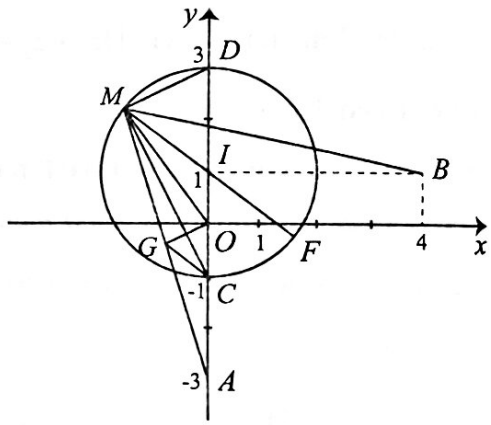
**Thí dụ 6 (Đề thi thử của Sở GD&ĐT tỉnh Hà Tĩnh, năm 2018).** *Cho các số phức $z_1=-3i, z_2=4+i$ và $z$ thỏa mãn $|z-i|=2$. Biết biểu thức $|z-z_1|+2|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Hiệu $a-b$ bằng*

**A.** $\frac{3-6\sqrt{13}}{17}$. **B.** $\frac{6\sqrt{13}-3}{17}$.

**C.** $\frac{3+6\sqrt{13}}{17}$. **D.** $-\frac{3+6\sqrt{13}}{17}$.

***Phân tích.*** So với thí dụ 4 thì thí dụ này có sự khác biệt ở hệ số 2 và chúng ta sẽ tìm cách biến đổi để có hệ số bằng nhau, tức là nếu đặt $A(0;3), B(4;1)$ và $M$ là điểm biểu diễn cho $z$ thì chúng ta sẽ đi tìm một điểm $N$ sao cho $MA=2MN$.

***Lời giải.***




Đặt $A(0;-3), B(4;1), C(0;-1), D(0;3), I(0;1)$. Gọi $M$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$. Khi đó $M$ thuộc đường tròn $(I;2)$. Gọi $G$ là trung điểm của $MA$. Khi đó $GC$ là đường trung bình của tam giác $AIM$ hay $GC=\frac{1}{2}MI=1$. Suy ra tam giác $CGO$ cân tại $C$.

Mặt khác $OG\,//\,MD$ nên $OG\perp MC$ (vì $MD\perp MC$). Do đó $MC$ là đường trung trực của $OG$ hay $MG=MO$. Như vậy:

$$|z-z_1|+2|z-z_2|=MA+2MB=2(MO+MB)$$
$$\ge 2OB=\sqrt{17}.$$

Dấu "=" khi $O,M,B$ thẳng hàng hay $M$ là giao điểm của tia $OB$ với đường tròn $(I;2)$.

Phương trình đường thẳng $OB$ và đường tròn $(I;2)$ lần lượt là: $y=\frac{1}{4}x$ và $x^2+(y-1)^2=4$.

Hệ phương trình $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$ có hai nghiệm là $\left(\frac{4-8\sqrt{13}}{17};\frac{1-2\sqrt{13}}{17}\right)$ và $\left(\frac{4+8\sqrt{13}}{17};\frac{1+2\sqrt{13}}{17}\right)$.

Vậy điểm $M$ cần chọn để thỏa mãn bài toán có tọa độ là $\left(\frac{4+8\sqrt{13}}{17};\frac{1+2\sqrt{13}}{17}\right)$ tức là số phức cần tìm có dạng $\frac{4+8\sqrt{13}}{17}+\frac{1+2\sqrt{13}}{17}i$.

Từ đó kết quả $a-b=\frac{3+6\sqrt{13}}{17}$. Chọn đáp án **C.**

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho $z_1,z_2$ là hai trong các số phức $z$ thỏa mãn $|z-5-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2|$ bằng

**A.** $6-\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{34}-6$.

**C.** $2\sqrt{34}+6$. **D.** $6+\sqrt{34}$.

**2.** Với hai số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$.

**A.** $5+3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{26}$.

**C.** $4\sqrt{6}$. **D.** $34+3\sqrt{2}$.

**3.** Giả sử $z_1,z_2$ là hai trong các số phức $z$ thỏa mãn $|iz+\sqrt{2}-i|=1$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

**A.** 4. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 3.

**4.** Cho hai số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $|z_1+z_2|=5$ và $|z_1-z_2|=1$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$. Khi đó môđun của số phức $M+mi$ bằng

**A.** $\sqrt{76}$. **B.** $2\sqrt{15}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

**5.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2+3i|=\sqrt{5}$. Gọi $m,M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=|z+i|^2-|z-2|^2$. Tính $A=m+M$.

**A.** $A=-3$. **B.** $A=-2$. **C.** $A=5$. **D.** $A=10$.

**6.** Cho $z$ là số phức thỏa mãn $|z-1+i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2$.

**A.** 18. **B.** $14+2\sqrt{10}$.

**C.** $38+8\sqrt{10}$. **D.** $16+2\sqrt{10}$.

**7.** Cho $z_1,z_2$ là hai số phức thỏa mãn $|iz+6-3i|=|2z-6-9i|$ và $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

**A.** $\frac{31}{5}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{56}{5}$.

**8.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$. Giá trị lớn nhất của $|z-2+3i|$ bằng

**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** $1+\sqrt{13}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** 9.

**9.** Giả sử $z_1,z_2$ là hai trong số các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

**A.** $20-4\sqrt{22}$. **B.** $5-\sqrt{21}$.

**C.** $20-4\sqrt{21}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

**10.** Xét các số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

# PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC HỌC SINH QUA VIỆC KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

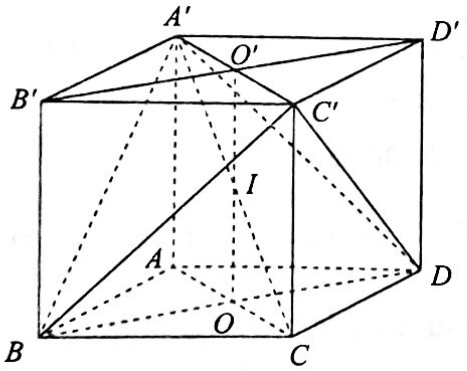
NGUYỄN TIẾN TIẾN - HOÀNG THỊ NĂM
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Trong quá trình dạy học ở trường phổ thông, việc lựa chọn được một bài toán cơ bản và sau đó khai thác, phát triển bài toán là việc làm cần thiết vừa khơi dậy trí tò mò, khám phá của học sinh vừa góp phần nâng cao kiến thức, phát triển năng lực cho học sinh. Với khuôn khổ bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu một bài toán như vậy. Đó là, bài toán về mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật.

## I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

*Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$ và $AA' = c$. Xác định tâm $I$ và tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó.*

***Lời giải.***




Ta có các đường chéo $AC', A'C, BD', B'D$ của hình hộp chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Gọi $I$ là trung điểm của $A'C$ thì $IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$. Suy ra $I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho. Ta lại có:

$A'C^2 = A'A^2 + AC^2 = A'A^2 + AB^2 + AD^2$ nên

$$A'C^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho là

$$R = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$$
$$= \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

## II. KHAI THÁC BÀI TOÁN

### 2.1. Đặc biệt hóa

a) Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh $a$ có bán kính là $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

b) Hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính $R$ có cạnh là $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

### 2.2. Lời bàn

a) Chúng ta đã biết tâm $I$ của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ cũng chính là trung điểm của các đoạn thẳng $A'C, AC', B'D, BD'$ và $OO'$.

b) Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABCD$ và các tứ diện $A'ABD, A'ABC, A'BCD, ACB'D'$.

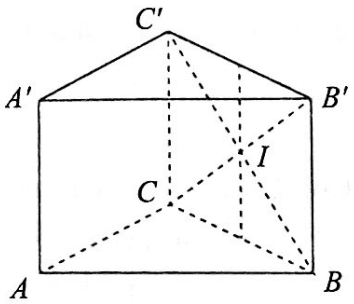
### 2.3. Khai thác và phát triển bài toán

Từ mô hình trong bài toán mở đầu, chúng ta sẽ khai thác kết quả đối với ba mô hình: Hình lăng trụ đứng, hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy và hình tứ diện gần đều.

**a) Đối với hình lăng trụ đứng**

***Nhận xét 1.*** *Trong bài toán mở đầu, mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có bài toán:*

**Bài toán 1.1.** *Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$. Xác định tâm và tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo $AB, AC, AA'$.*




**Kết quả 1.1.** Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2+A'A^2}$ và tâm được xác định bằng một trong hai cách sau:

*Cách 1*: Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là giao điểm của $B'C$ với $BC'$.

*Cách 2*: Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là trung điểm của đoạn nối trung điểm của $BC$ và $B'C'$ (hai cạnh huyền của hai đáy).

***Nhận xét 2.*** *Trong bài toán mở đầu, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC$ và $BD$ chính là đường kính đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$, và để ý rằng $AB^2+AD^2=BD^2=AC^2$. Trong bài toán 1.1, tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nên $BC$ chính là cạnh huyền và là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, lúc này để ý $AB^2+AC^2=BC^2$. Vì vậy, tổng quát hóa bài toán mở đầu và bài toán 1.1. thì chúng ta có bài toán sau:*

**Bài toán 1.2.** *Cho hình lăng trụ đứng $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'....A_n'$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn bán kính r. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.*

**Kết quả 1.2.** Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho có bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{A_1'A_1^2+(2r)^2}$, còn tâm $I$ được xác định như sau:

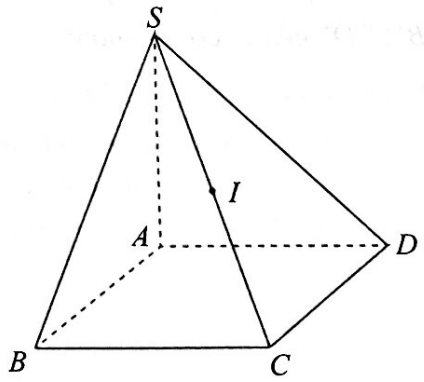
*Bước 1*: Xác định tâm $H$ và tâm $H'$ của đường tròn ngoại tiếp các đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'....A_n'$ (Đường thẳng $HH'$ là trục của đường tròn ngoại tiếp các đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'....A_n'$).

*Bước 2*: Xác định trung điểm $I$ của đoạn thẳng $HH'$. Khi đó $I$ chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

**b) Đối với hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

***Nhận xét 3.*** *Trong bài toán mở đầu, hình chóp $A'.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên $A'A$ vuông góc với đáy, và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABCD$ chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có bài toán:*

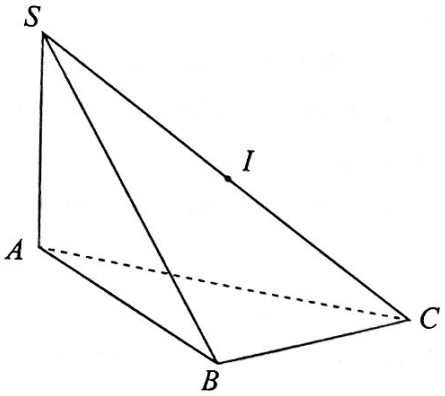
**Bài toán 1.3.** *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ theo $SA, AB, AD$.*




**Kết quả 1.3.** Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+AB^2+AD^2}$ và tâm $I$ của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng $SC$.

***Nhận xét 4.*** *Trong bài toán mở đầu, hình chóp $A'.ABD$ có đáy $ABD$ là tam giác vuông tại $B$, cạnh bên $A'A$ vuông góc với đáy, và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABD$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có bài toán:*

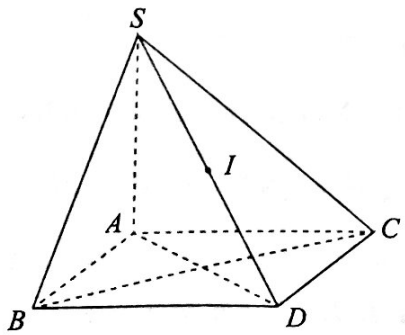
**Bài toán 1.4.** *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo $SA, BA, BC$.*




**Kết quả 1.4.** Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+BA^2+BC^2}$ và tâm $I$ của mặt cầu là trung điểm của cạnh $SC$.

***Nhận xét 5.*** *Trong bài toán mở đầu, hình chóp $A'.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, cạnh bên $A'A$ vuông góc với đáy, và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có bài toán:*

**Bài toán 1.5.** *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Xác định tâm và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo $SA, AB, AC$.*




**Kết quả 1.5.** Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+AB^2+AC^2}$ và tâm $I$ của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng $SD$, trong đó $D$ là đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABDC$.

***Nhận xét 6.*** *Nếu tổng quát các bài toán 1.3, 1.4, 1.5 cho trường hợp đáy là đa giác nội tiếp đường tròn thì chúng ta có bài toán:*

**Bài toán 1.6.** *Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn bán kính r và cạnh bên $SA_1$ vuông góc với đáy. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.*

**Kết quả 1.6.** Gọi $K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có bán kính $R=\frac{1}{2}\sqrt{SA_1^2+(2r)^2}$, còn tâm $I$ của mặt cầu được xác định như sau:

*Bước 1.* Xác định tâm $K$ của đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.

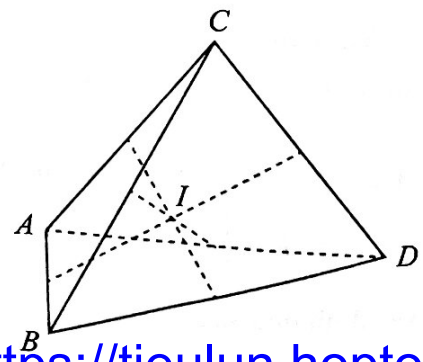
*Bước 2.* Từ $K$ kẻ đường thẳng $d$ song song với $SA_1$.

*Bước 3.* Mặt phẳng trung trực của cạnh $SA_1$ cắt $d$ tại điểm $I$ thì $I$ chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

**c) Đối với tứ diện gần đều**

***Nhận xét 7.*** *Trong bài toán mở đầu, các tứ diện $A'C'BD$ và $ACB'D'$ là những tứ diện gần đều và $A'C'^2+A'B^2+A'D^2=2\left(AB^2+AD^2+AA'^2\right)$. Do đó, mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện gần đều $A'C'BD$, $ACB'D'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có bài toán:*

**Bài toán 1.7.** *Cho tứ diện gần đều ABCD có $AB=CD=a$; $AC=BD=b$; $AD=BC=c$. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo $a,b,c$.*



**Kết quả 1.7.** Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ nói trên có bán kính $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}}$ và tâm $I$ của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai trung điểm của cặp cạnh đối $AB$ và $CD$ hoặc $AC$ và $BD$ hoặc $AD$ và $BC$.

***Đặc biệt.*** Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều cạnh $a$ thì có bán kính $R=\sqrt{\dfrac{3}{8}}a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$. Tứ diện đều nội tiếp mặt cầu bán kính $R$ thì có cạnh $a=\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$.

**2.4. Một số kết quả thường dùng**

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có bán kính $R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{CA}{2\sin B}=\dfrac{AB}{2\sin C}$.

b) Đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $n$ cạnh có bán kính $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$, với $a$ là độ dài cạnh của đa giác đều đó.

## III. THÍ DỤ MINH HỌA

**Thí dụ 1 (Trích đề tham khảo THPT Quốc gia 2017).** *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a$ và $AA'=2a$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.*

**A.** $R=3a$. **B.** $R=\dfrac{3a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $R=2a$.

***Hướng dẫn.*** Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nên theo kết quả bài toán mở đầu ta có $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{A'A^2+AB^2+AD^2}=\dfrac{3a}{2}$.

**Thí dụ 2 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2016 – 2017, Sở GD&ĐT Phú Thọ).** *Tính theo a thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$, biết các cạnh $OA,OB,OC$ đôi một vuông góc và $OA=a, OB=a\sqrt{3}, OC=2a\sqrt{3}$.*

**A.** $2a^3$. **B.** $6\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $\dfrac{32\pi a^3}{3}$.

***Hướng dẫn.*** Tứ diện $OABC$ có các cạnh $OA,OB,OC$ đôi một vuông góc nên theo kết quả 1.5, ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}=2a$.

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi a^3}{3}$.

**Thí dụ 3.** *Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, AC=2a, \widehat{BAC}=60°$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy $(ABC)$ và $SA=\sqrt{3}a$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.*

**A.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{55}a}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{11}a}{2}$.

***Hướng dẫn.*** Ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

nên $BC=a\sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ có bán kính $r=\dfrac{BC}{2\sin A}=a$. Theo kết quả 1.6, ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2+(2r)^2}=\dfrac{\sqrt{7}a}{2}$.

**Thí dụ 4 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2017 – 2018, Sở GD&ĐT Nam Định).** *Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3a, AC=3\sqrt{3}a, BC=6a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABC)$ là điểm H thỏa mãn $\widehat{AHB}=\widehat{BHC}=\widehat{CHA}=120°$. Biết rằng tổng diện tích của các mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHB, S.BHC, S.CHA$ bằng $288\pi a^2$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là*

**A.** $9\sqrt{3}a^3$. **B.** $6\sqrt{3}a^3$. **C.** $3\sqrt{3}a^3$. **D.** $12\sqrt{3}a^3$.

***Hướng dẫn.*** Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AHB, BHC, CHA$ có bán kính lần lượt là

$$r_1=\frac{AB}{2\sin\widehat{AHB}}=a\sqrt{3},\ r_2=\frac{BC}{2\sin\widehat{BHC}}=2\sqrt{3}a,$$

$$r_3=\frac{CA}{2\sin\widehat{CHA}}=3a.$$

Đặt $SH = h$. Theo kết quả 1.6, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHB$ có bán kính

$$R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + (2r_1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 12a^2}.$$

Tương tự, mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.BHC, S.CHA$ có bán kính là

$$R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 48a^2} \text{ và } R_3 = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 36a^2}.$$

Tổng diện tích của các mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHB, S.BHC, S.CHA$ bằng $288\pi a^2$ nên ta có phương trình: $4\pi\left(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2\right) = 288\pi a^2$

$$\Leftrightarrow 3h^2 + 96a^2 = 288a^2 \Leftrightarrow h = 8a.$$

Để ý rằng tam giác $ABC$ có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.AC = 12\sqrt{3}a^3.$$

**Thí dụ 5.** *Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(5;-2;-1)$. Xét các điểm $B, C, D$ thuộc $(S)$ sao cho $ABCD$ là một tứ diện có $AB = CD, AC = BD$ và $AD = BC$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng*

**A.** $\frac{512}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{512}{9}$. **D.** $\frac{4096}{3}$.

***Hướng dẫn.*** Đặt $a = AB = CD, b = AC = BD$ và $c = AD = BC$ thì thể tích khối tứ diện gần đều $ABCD$ được tính bởi công thức

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(c^2 + a^2 - b^2\right)}.$$

Mặt cầu $(S)$ có bán kính $R = IA = 4\sqrt{3}$. Theo kết quả 1.7, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ có bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$. Do đó ta có: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 384$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(c^2 + a^2 - b^2\right) \le \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 = 128^3.$$

Suy ra $V \le \frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{128^3} = \frac{512}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 8\sqrt{2}$ hay $ABCD$ là tứ diện đều.

***Lưu ý:*** *Qua kết quả thí dụ này và kết quả 1.7, chúng ta có thể rút ra lưu ý sau khi làm bài trắc nghiệm*: Trong các tứ diện gần đều nội tiếp mặt cầu bán kính $R$ thì tứ diện đều là tứ diện có thể tích lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $V = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.

## IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ và $SA = a, AB = b, AC = c$. Mặt cầu đi qua các đỉnh $A, B, C, S$ có bán kính $r$ bằng

**A.** $\frac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

**C.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **D.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

**Bài 2.** (Trích đề thi THPT Quốc gia 2017, mã đề 101)

Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

**A.** $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $R = a$.

**C.** $R = 2\sqrt{3}a$. **D.** $R = \sqrt{3}a$.

**Bài 3** (Trích đề thi THPT Quốc gia 2017, mã đề 102). Cho mặt cầu bán kính $R$ ngoại tiếp một hình lập phương cạnh $a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a = 2\sqrt{3}R$. **B.** $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$.

**C.** $a = 2R$. **D.** $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

**Bài 4** (Trích đề thi THPT Quốc gia 2017, mã đề 103). Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác $BCD$

vuông tại $C$, $AB$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD)$, $AB=5a, BC=3a$ và $CD=4a$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

**A.** $R=\frac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R=\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

**C.** $R=\frac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R=\frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

**Bài 5** (Trích đề thi THPT Quốc gia 2017, mã đề 104). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=3a, BC=4a$, $SA=12a$ và $SA$ vuông góc với đáy. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

**A.** $R=\frac{5a}{2}$. **B.** $R=\frac{17a}{2}$.

**C.** $R=\frac{13a}{2}$. **D.** $R=6a$.

**Bài 6 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2019 – 2020, Sở GD&ĐT Thái Bình).** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ và $SA=5, AB=3, BC=4$. Tính diện tích $S$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

**A.** $S=100\pi$. **B.** $S=\frac{100\pi}{9}$.

**C.** $S=\frac{100\pi}{3}$. **D.** $S=50\pi$.

**Bài 7 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2019 – 2020, Sở GD&ĐT Bắc Ninh).** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=2a$, $SC$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, tam giác $ABC$ đều cạnh $3a$. Bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $a$.

**Bài 8 (Trích đề thi thử TN THPT 2021, Sở GD&ĐT Bắc Giang).** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ có $\widehat{BAC}=120°$, $BC=3a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

**A.** $12\pi a^2$. **B.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{16\pi a^2}{3}$. **D.** $16\pi a^2$.

**Bài 9 (Trích đề thi thử TN THPT 2020, Sở GD&ĐT Bắc Ninh).** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A$ và $B$. Biết $SA$ vuông góc với $(ABCD)$, $AB=BC=a, AD=2a, SA=a\sqrt{2}$. Gọi $E$ là trung điểm của $AD$. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm $S,A,B,C,E$ bằng

**A.** $a$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

**Bài 10 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2020 – 2021, Sở GD&ĐT Bắc Ninh).** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a\sqrt{3}, AD=a$, $SA$ vuông góc với mặt đáy và mặt phẳng $(SBC)$ tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích $V$ của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

**A.** $V=\frac{13\sqrt{13}}{6}\pi a^3$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{10}}{3}\pi a^3$.

**C.** $V=\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$. **D.** $V=\frac{13\sqrt{13}}{24}\pi a^3$.

**Bài 11 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2019 – 2020, Sở GD&ĐT Đà Nẵng).** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa $(SBC)$ và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Nếu $ABC$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{43}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{43}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{43}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{43}}{6}$.

**Bài 12 (Trích đề thi THPT Quốc gia 2018, mã đề 101).** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm $B,C,D$ thuộc $(S)$ sao cho $AB,AC,AD$ đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

**A.** 72. **B.** 216. **C.** 108. **D.** 36.

**Bài 13 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2019 – 2020, Sở GD&ĐT Đà Nẵng).** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ với các đỉnh $A(1;0;2), B(3;1;4), C(3;-2;1)$ và $S(a;b;c)$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$. Khi đó, giá trị của $2a+b+2c$ bằng

**A.** 0. **B.** –6. **C.** 3. **D.** 6.

**Bài 14 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2019 – 2020, Sở GD&ĐT Ninh Bình).** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-18=0$. Gọi $A,B,C$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(\alpha)$ với các trục $Ox,Oy,Oz$. Gọi $D$ là điểm sao cho $DA,DB,DC$ đôi một vuông góc với nhau và $D$ không trùng với $O$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, giá trị của $a+b-3c$ bằng

**A.** 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** $\frac{187}{2}$.

**Bài 15 (Trích đề thi HSG 12 năm học 2017 – 2018, Sở GD&ĐT Nam Định).** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c$ là các số thực thay đổi, khác 0 và thỏa mãn $a+b+c=6$. Gọi tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $I$. Giá trị nhỏ nhất của $OI$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** 3.

**Bài 16 (Trích đề thi thử TNTHPT 2021, Sở GD&ĐT Bình Thuận).** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Biết khi $a,b,c$ thay đổi thì tâm $I$ của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc một mặt phẳng $(P)$ cố định. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến mặt phẳng $(P)$ bằng

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

**Bài 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm $B,C,D$ thuộc $(S)$ sao cho $AB,AC,AD$ đôi một vuông góc với nhau. Khi thể tích của khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì các điểm $B,C,D$ thuộc mặt phẳng có phương trình

**A.** $x-y-z+2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$.
**C.** $x-y-z+8=0$. **D.** $x-y-z-8=0$.

**********

***MỘT BÀI TOÁN ....*** *(Tiếp theo trang 4)*

Gọi $N$ là giao điểm thứ hai của $(O_1)$ và $(O_2)$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $C$ trên hai đường thẳng $AB$, $AD$. Theo kết quả bài toán ban đầu, ta có $\Delta DNP \backsim \Delta BNQ$.

Vì $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{KDC} = \widehat{HBC}$ nên

$\Delta KDC \backsim \Delta HBC$ (g.g);

$\Delta DCP \backsim \Delta BCQ$ (g.g).

Ta có: $\frac{DN}{BN} = \frac{DP}{BQ} = \frac{CD}{BC} = \frac{KD}{HB}$, kết hợp với $\widehat{KDN} = \widehat{HBN}$, suy ra $\Delta KDN \backsim \Delta HBN$ (c.g.c).

Do đó ta có $\widehat{KND} = \widehat{HNB}$.

Vì $\widehat{KNH} = \widehat{KND} + \widehat{DNH}$

$= \widehat{HNB} + \widehat{DNH}$

$= \widehat{DNB} = \widehat{DAB}$

$= \widehat{KAH}$,

suy ra năm điểm $A$, $N$, $K$, $C$, $H$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AC$.

Do đó $NC \perp NA$, mà $(O_1)$ và $(O_2)$ cắt nhau tại $A$, $N$ nên $O_1O_2$ vuông góc với $AN$ tại trung điểm của $AN$. Vậy $NC \parallel O_1O_2$ và $O_1O_2$ chứa đường trung bình của tam giác $ANC$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/536 (Lớp 6)**. Gọi $m$ là tổng các chữ số của số $9^{2022}$, $n$ là tổng các chữ số của $m$ và $k$ là tổng các chữ số của $n$. Tìm số $k$.

NGUYỄN HỒNG THANH
*(GV THCS Minh Hải, Văn Lâm, Hưng Yên)*

**Bài T2/536 (Lớp 7)**. Cho tam giác $ABC$ có $\widehat{ABC}=40^0$, $\widehat{ACB}=10^0$. Đường trung trực của đoạn thẳng $AB$ là $d$, $d'$ là đường thẳng qua $C$ và vuông góc với $d$. Gọi $D$ là giao điểm của $d$ và $d'$. Tính số đo góc $\widehat{BDA}$.

LÊ ANH KIỆT và nhóm HTS
*(Toán k4, THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)*

**Bài T3/536**. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt{1-x}=-x^2+3x-1.$$

PHẠM VĂN THUẬN
*(565 Thanh Xuân, Hà Nội)*

**Bài T4/536**. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{CAD}=40^0$, $\widehat{BAC}=50^0$, $\widehat{CBD}=20^0$ và $\widehat{CDB}=25^0$. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của tứ giác.

TRẦN QUỐC LUẬT
*(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T5/536**. Cho các số thực $a$, $b$ thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=ab+\frac{1}{a^2+b^2+1}-\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{a^4+b^4+1}.$$

LẠI QUANG THỌ
*(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/536**. Cho $n$ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2)$. Đặt $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Chứng minh rằng

$$(S-a_1)^{a_1}(S-a_2)^{a_2}\ldots(S-a_n)^{a_n}\leq\left(\frac{n-1}{n}.S\right)^S.$$

ĐẶNG THANH HẢI
*(GV khoa Cơ bản, Học viện Phòng không - Không quân, Sơn Tây, Hà Nội)*

**Bài T7/536**. Cho tam giác $ABC$ không tù. Chứng minh rằng

$$\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{\sin\frac{A}{2}}+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^{\sin\frac{B}{2}}+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

TRIỆU VĂN HƯNG
*(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang)*

**Bài T8/536.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Một điểm $M$ di động trên đường tròn $(O)$. Gọi $I$, $J$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $BC$, $CA$, $AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4MI^4+MJ^4+MK^4$.

HOÀNG NGỌC MINH
*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T9/536**. Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$, các đường trung tuyến $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ lần lượt cắt đường tròn tâm $O$ tại $A_2$, $B_2$, $C_2$. Chứng minh rằng

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\geq\frac{3R}{2}.$$

PHẠM DUY KHÁNH
*(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/536**. Cho $p$ là số nguyên tố và $n$ là số nguyên lớn hơn 4. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x)=x^n-px^2+px+p^2$$

không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

PHẠM HỮU HIỆP
*(GV THPT chuyên Tiền Giang)*

**Bài T11/536.** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1)=0$ và

$$f(xy-y)=f(x)f(y)+f(x)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

HỒ THANH LAI

*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)*

**Bài T12/536.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt $BC$ tại $E$ và cắt lại $(O)$ tại $P$. $P'$ là điểm đối xứng với $P$ qua $BC$. $AP'$ cắt $BC$ tại $K$; $L$ là trực tâm tam giác $AEK$. Chứng minh đường tròn đường kính $AL$ tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác $ABC$.

NGUYỄN ĐĂNG KHOA

*(Sinh viên K71, khoa Toán-Tin, ĐHSP Hà Nội)*

**Bài L1/536.** Cho 3 điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng, theo thứ tự xa dần nguồn âm. Mức cường độ âm tại $A$, $B$, $C$ lần lượt là 40 dB ; 35,9 dB và 30 dB. Biết khoảng cách giữa $A$ và $B$ là 30 m, Tính khoảng cách giữa $B$ và $C$.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

**Bài L2/536.** Đoạn mạch điện $AB$ gồm đoạn mạch $AM$ mắc nối tiếp với đoạn mạch $MB$. Trên đoạn $AM$ chứa biến trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn $MB$ chứa tụ điện. Mắc vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có tần số góc ω (với $2\omega^2LC=3$). Khi $R=R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại, và điện áp giữa hai đầu đoạn mạch $AM$ có biểu thức là: $u_{AM}=240\sqrt{2}\cos\omega t$ (V). Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu của đoạn mạch $AB$.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

**********

**Đính chính:** Bài T7/535 mục *Đề ra kỳ này*, số tháng 1.2022 đã nhầm khi viết:

... $f(2021)=1$, *hãy tính* $f(2022)$.

Xin được sửa là: ... $f(2022)=1$, *hãy tính* $f(2024)$.

Thành thực xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/536** (For 6th grade). Let $m$ be the sum of the digits of the number $9^{2022}$, $n$ the sum of the digits of $m$ and $k$ the sum of the digits of $n$. Find $k$.

**Problem T2/536** (For 7th grade). Given a triangle $ABC$ with $\widehat{ABC}=40^0$, $\widehat{ACB}=10^0$. Let $d$ be the perpendicular bisector of the line segment $AB$, and $d'$ the line through $C$ and perpendicular to $d$. Let $D$ be the intersection between $d$ and $d'$. Find the measurement of the angle $\widehat{BDA}$.

**Problem T3/536.** Solve the equation

$$\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt{1-x}=-x^2+3x-1.$$

**Problem T4/536.** Given a quadrilateral $ABCD$ with $\widehat{CAD}=40^0$, $\widehat{BAC}=50^0$, $\widehat{CBD}=20^0$ and $\widehat{CDB}=25^0$. Find the measurement of the acute angle formed by the diagonals of the quadrilateral.

**Problem T5/536.** Given real numbers $a$, $b$ so that $a+b=2$. Find the maximum value of the expression

$$P=ab+\frac{1}{a^2+b^2+1}-\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{a^4+b^4+1}.$$

## FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/536.** Given $n$ positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Let $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Prove that $(S-a_1)^{a_1}(S-a_2)^{a_2}\ldots(S-a_n)^{a_n}\le\left(\frac{n-1}{n}.S\right)^S$.

**Problem T7/536.** Given a non-obtuse triangle $ABC$. Show that

$$\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{\sin\frac{A}{2}}+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^{\sin\frac{B}{2}}+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^{\sin\frac{C}{2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

*(Xem tiếp trang 31)*


**Bài T1/532**. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$.

***Lời giải.*** Từ $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$ (1), khi cho $x=0$ hoặc $x=-1$ thì (1) trở thành:

$$y^4+(y+1)^4=1.$$

Do các số $y^4$ và $(y+1)^4$ đều là số nguyên không âm nên chỉ xảy ra: hoặc $y=0$ hoặc $y=-1$, đều thỏa mãn đề bài.

Xét với $x\ge 1$ hoặc $x<-1$. Ta biến đổi:

$$y^4+(y+1)^4=y^4+(y^2+2y+1)^2$$
$$=2y^4+4y^3+6y^2+4y+1,$$

thay vào (1) được:

$$2x^2+2x+1=2y^4+4y^3+6y^2+4y+1$$

hay là $x^2+x=y^4+2y^3+3y^2+2y$,

hay là $x^2+x+1=(y^4+y^3+y^2)+(y^3+y^2+y)$
$+(y^2+y+1)=(y^2+y+1)^2$,

suy ra $x^2+x+1$ là số chính phương.

• Với $x\ge 1$ thì $x^2<x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$ nên không tồn tại số nguyên $x$ để $x^2+x+1$ là số chính phương.

• Với $x<-1$ thì $x^2>x^2+x+1>x^2+2x+1=(x+1)^2$

nên không tồn tại số nguyên $x$ để $x^2+x+1$ là số chính phương.

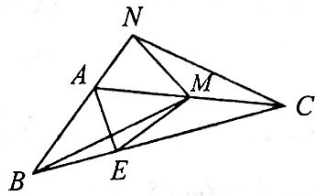
Vậy phương trình (1) có các nghiệm nguyên $(x;y)$ sau: $(0;0)$; $(0;-1)$; $(-1;0)$; $(-1;-1)$.

***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng. **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Lưu Trọng Phúc*, 6B, THCS Đội Cung, TP.Vinh; **Sóc Trăng**: *Đặng Ngọc Duy*, 6A1, THCS Kế An, Kế Sách.

**NGUYỄN VIỆT HẢI**

**Bài T2/532**. *Cho tam giác ABC có* $\widehat{A}=120^0$; $\widehat{B}=40^0$. *Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AB = AM. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho* $\widehat{AMN}=40^0$. *Tính số đo góc* $\widehat{BNC}$.

***Lời giải.*** (Của nhiều bạn) Ta lấy $E$ trên cạnh $BC$ sao cho $AE$ vuông góc $BM$. Do tam giác $AMB$ cân tại $A$, cho nên $AE$ là phân giác góc $A$ và là trung trực của $BM$. Từ sự đối xứng qua $AE$, ta có $\widehat{AME}=\widehat{B}=40^0$ và $\widehat{BAE}=\widehat{EAC}=\widehat{CAN}=60^0$.




Từ $\widehat{A}=120^0, \widehat{B}=40^0$, $AB=AM$, $\widehat{AMN}=40^0$, tam giác $BAE$ và tam giác $MAN$ bằng nhau (g.c.g). Suy ra $AE=AN, BE=NM$. Vì $EM=BE$ nên $ME=MN$. Do $AN=AE$ và $ME=MN$, suy ra $AC$ là trung trực $NE$, do đó $\widehat{NCA}=\widehat{C}$.

Do $\widehat{C}=180^0-120^0-40^0=20^0$ nên $\widehat{NCA}=20^0$. Vậy $\widehat{BNC}=\widehat{A}-\widehat{NCA}=120^0-20^0=100^0$.

***Nhận xét*** : Các bạn lớp 7 sau đây có đáp số đúng: **Nghệ An**: *Phạm Xuân Hoàng, Thái Bá Nhân, Nguyễn Thái Triệu, Nguyễn Văn Lâm, Đinh Ana*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Huỳnh Gia Bảo*, 7A2, THCS Kế An, Kế Sách;

Ngoài ra có 2 bạn lớp 8 cũng gửi bài giải là bạn *Nguyễn Kim Anh Quân*, 8A và *Nguyễn Hải Triều*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương;

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T3/532**. *Tìm phần nguyên của biểu thức*

$$A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$$

*với n là số nguyên dương.*

***Lời giải.*** Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2<2(a^2+b^2)$ với $a$, $b$ là hai số thực bất kỳ khác nhau, ta có:

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)^2<2(n+n+2)=4(n+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1} \quad (1).$$

Do đó: $A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$

$$<\left(3\sqrt{n+1}\right)^2=9n+9 \quad (2).$$

Ta sẽ chứng minh

$$A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2>9n+8 \quad (3).$$

Thật vậy,

$$(3)\Leftrightarrow A=3n+3+2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+2)}\right)>9n+8$$

$$\Leftrightarrow \text{VT}=2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+2)}\right)>6n+5.$$

Theo (1), ta có: $2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)$

$$=2\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)>\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)^2=2n+2+2\sqrt{n(n+2)}.$$

Do đó $\text{VT}=2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+2)}\right)>2n+2+4\sqrt{n(n+2)}.$

Để suy ra (3), ta chỉ cần chứng minh

$$2n+2+4\sqrt{n(n+2)}>6n+5$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{n(n+2)}>4n+3$$

$$\Leftrightarrow 16n(n+2)>(4n+3)^2 \Leftrightarrow 8n>9.$$

BĐT thỏa mãn với mọi số tự nhiên $n\geq 2$. Như vậy (3) đúng với $n\geq 2$.

Với $n=1$: ta có:

$$A=\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2>(1+1,41+1,73)^2=4,14^2>17$$

nên (3) đúng với $n=1$. Nghĩa là (3) đúng với mọi số nguyên dương $n$.

Từ (2), (3) suy ra với mọi số nguyên dương $n$, ta có $9n+8<A<9n+9$. Vậy $[A]=9n+8$.

***Nhận xét.*** Điều then chốt của lời giải là chứng minh $9n+8<A<9n+9$.

Có thể chứng minh $A>9n+8$ bằng cách áp dụng BĐT Cauchy:

$$A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2>9\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)};$$

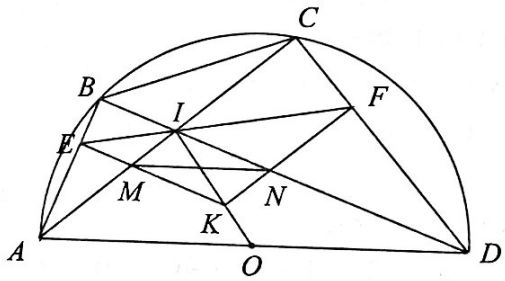
sau đó chứng minh với $n\geq 3$ có $9\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}>9n+8$ (lập phương hai vế, quy về tam thức bậc 2); trường hợp $n=1$, $n=2$ được thử trực tiếp. Bạn đọc tự kiểm tra các kết quả. Các bạn sau đây có bài giải tốt :

**Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 8C1, THCS & THPT Archimedes Đông Anh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T4/532.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn (O) đường kính AD. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Đường phân giác ngoài ở đỉnh I của tam giác BIC cắt AB, CD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với AB tại E, đường thẳng vuông góc với CD tại F và đường thẳng OI đồng quy.*

***Lời giải.***




Gọi $K$ là giao điểm của các đường thẳng qua $E$, $F$ lần lượt vuông góc với $AB$, $AC$.

Ta có $KE\perp AB$, $KF\perp CD$ (1). Bài toán trở thành chứng minh ba điểm $I$, $K$, $O$ thẳng hàng.

Gọi $M=EK\cap AC$, $N=FK\cap BD$.

Vì $AD$ là đường kính đường tròn $(O)$ nên

$$BD\perp AB \text{ và } AC\perp CD \ (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $EK\,//\,BD$, $FK\,//\,AC$.

Xét hai tam giác $BIA$ và $CID$ có:

$$\widehat{ABI}=\widehat{DCI}=90^\circ,\ \widehat{BIA}=\widehat{CID} \text{ (đối đỉnh)},$$

nên $\Delta ABI \backsim \Delta DCI$ (g.g). Lại có $IE$, $IF$ là hai tia phân giác tương ứng của hai tam giác trên, suy ra

$$\frac{EB}{EA}=\frac{FC}{FD}.$$

Áp dụng định lí Thales cho tam giác $ABI$ và tam giác $CDI$ ta có: $\frac{EB}{EA}=\frac{MI}{MA}$, $\frac{FC}{FD}=\frac{NI}{ND}$.

Do đó $\frac{MI}{MA}=\frac{NI}{ND}\Rightarrow MN\,//\,AD$ (định lí Thales đảo). Mặt khác, tứ giác $IMKN$ là hình bình hành

(có các cặp cạnh đối song song), nên $IK$ đi qua trung điểm của $MN$.

Vì $MN \parallel BC$, theo hệ quả của định lí Thales, suy ra $IK$ đi qua trung điểm của $AD$.

Vậy ba điểm $I, K, O$ thẳng hàng.

***Nhận xét.*** 1) Bài toán trên có nhiều cách giải, ý tưởng chung là kết hợp tính chất tia phân giác và định lí Thales.

2) Các bạn THCS sau đây có lời giải tốt.

**Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Nam Khánh, Nguyễn Tất Quân*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Lưu Trọng Phúc*, 8B, THCS Đội Cung, TP Vinh.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/532.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2(x-y)+3y^2+x(1-3y)=y & (1) \\ 3\sqrt{3x^2-9y+2}+\sqrt[3]{y^3-21}+3=x & (2) \end{cases}.$$

***Lời giải.*** ĐK: $3x^2-9y+2\ge 0$.

Biến đổi phương trình (1), ta có:

$$x^2(x-y)+3y^2+x(1-3y)=y$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-y)-3y(x-y)+x-y=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-3y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$$

(vì $3x^2-9y+2\ge 0 \Rightarrow 3x^2-9y+3>0$

$\Rightarrow x^2-3y+1>0$).

Thay $x=y$ vào (2), ta được:

$$3\sqrt{3x^2-9x+2}+\sqrt[3]{x^3-21}+3=x.$$

Do $3\sqrt{3x^2-9x+2}\ge 0$ nên

$$\sqrt[3]{x^3-21}+3\le x \Leftrightarrow x^3-21\le (x-3)^3$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-27x+6\le 0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+2\le 0 \quad (3).$$

Kết hợp với điều kiện $3x^2-9y+2\ge 0$ và $x=y$ suy ra $3x^2-9x+2\ge 0$ (4). Từ (3) và (4) ta có:

$$3x^2-9x+2=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{57}}{6};\ x_2=\frac{9+\sqrt{57}}{6}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{9-\sqrt{57}}{6};\frac{9-\sqrt{57}}{6}\right);\left(\frac{9+\sqrt{57}}{6};\frac{9+\sqrt{57}}{6}\right).$$

***Nhận xét.*** Đây là dạng hệ phương trình hai ẩn có chứa căn. Ngoài cách làm trên, để tìm mối liên hệ giữa $y$ và $x$, ta cũng có thể coi (1) là phương trình bậc hai ẩn $y$ (với $x$ là tham số), ta tìm được $y=x$ và $y=\frac{x^2+1}{3}$ (loại). Bài này rất ít bạn tham gia giải.

Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 8C1, TH, THCS và THPT Archimedes Đông Anh; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Hưng Yên.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T6/532.** *Cho $n$ số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ $(n\in\mathbb{N}, n\ge 3)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)}+...+\frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)}\ge\frac{n}{2}.$$

***Lời giải.*** Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_1+a_2}{4a_2}\ge 2\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}.\frac{a_1+a_2}{4a_2}}=\frac{a_1}{a_2}$$

$\Rightarrow \frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}\ge\frac{3}{4}.\frac{a_1}{a_2}-\frac{1}{4}$. Tương tự:

$$\Rightarrow \frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)}\ge\frac{3}{4}.\frac{a_2}{a_3}-\frac{1}{4},...,\frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)}\ge\frac{3}{4}.\frac{a_n}{a_1}-\frac{1}{4}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)}+...+\frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)}$$
$$\ge\frac{3}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\right)-\frac{n}{4}.$$

Mặt khác cũng theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\ge n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}...\frac{a_n}{a_1}}=n,$$

do đó:

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)}+...+\frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)}$$
$$\ge\frac{3n}{4}-\frac{n}{4}=\frac{n}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải bài này đều đúng và có cách giải theo hướng như cách giải trên, một số bạn sử dụng BĐT Schwarz cũng cho lời giải ngắn gọn. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên

Mỹ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 11A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 8C1, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đoàn Quang Minh*, *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Hải Triều*, 8B, THCS Lý Nhật Quang; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Huỳnh An Phú*, 10 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, *Nguyễn Phương Thảo*, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, 11 Toán 1, *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Long An:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Đắk Nông:** *Ngô Anh Hoàn*, 11A10, THPT Trần Hưng Đạo, H. Đắk Mil; **Bà Rịa Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Vĩnh Long:** *Lê Nguyễn Gia Bảo*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng:** *Lý Hoàng Nhựt*, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Minh Hoàng*, 10 Toán, *Trần Công Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Quảng Trị:** *La Đại Quân*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quảng Trị.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T7/532.** *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

***Lời giải.*** Đặt $a=|x|$, $b=|y|$, $c=|z|$. Ta có:

$$a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0,\ a^2+b^2+c^2=1 \text{ và}$$

- $|P|=|xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)|$
$$\le |xy(x+y)|+|yz(y+z)|+|zx(z+x)|$$
$$\le ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

- $2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$
$$-3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$=(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2\ge 0.$$

- $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra:

$$|P|\le ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$$
$$=\frac{2}{3}(a+b+c)\le\frac{2}{3}.\sqrt{3}.$$

Suy ra: $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\le P\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$P=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$P=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=y=z=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\max P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ và $\min P=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

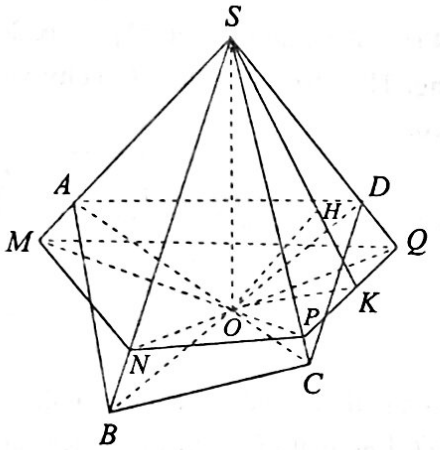
***Nhận xét.*** Đây là bài toán cực trị dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

**Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 8C1, THCS Archimedes, Đông Anh, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, *Nguyễn Đoàn Quang Minh*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. TP. Đồng Hới; **Quảng Trị**: *La Đại Quân*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế**: *Huỳnh An Phú*, 10T1, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Nguyễn Văn Huy*, *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, *Phan Thị Minh Châu*, *Lê Ngọc Cương*, *Lê Thị Thanh Tâm*, 11T2, *Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, *Trần Công Minh*, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Vĩnh Long**: *Lê Nguyễn Gia Bảo*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Long An**: *Nguyễn Tiến Đạt*, 10T1, THPT chuyên Long An.

**NGUYỄN MINH ĐỨC**

**Bài T8/532.** *Cho hình chóp S.ABCD có O là giao điểm của AC và BD. Gọi $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ theo thứ tự là khoảng cách từ điểm O đến các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SDA). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ* $\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_4^2}$.

***Lời giải.***




Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $O$ và vuông góc với $SO$, $(\alpha)$ cắt các đường thẳng $SA, SB, SC, SD$ theo thứ tự tại $M, N, P, Q$.

Đặt $\beta=\widehat{MON}=\widehat{POQ}$ thì

$$\widehat{NOP}=\widehat{QOM}=180^\circ-\beta.$$

Gọi $K$ là chân đường cao kẻ từ $O$ của tam giác $OPQ$ và $H$ là chân đường cao kẻ từ $O$ của tam giác $SOK$. Khi đó:

$$OH\perp(SPQ) \text{ hay } OH\perp(SCD).$$

Suy ra $h_3=d(O,(SCD))=OH$.

Kí hiệu $k_1,k_2,k_3,k_4$ theo thứ tự là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh $O$ của các tam giác $OMN, ONP, OPQ, OQM$.

Tam giác $SOK$ vuông tại $O$ có đường cao $OH$ nên $\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{k_3^2}$.

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{h_1^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{k_1^2};\ \frac{1}{h_2^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{k_2^2};\ \frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{k_4^2}.$$

Suy ra: $\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_4^2}\Leftrightarrow\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_3^2}=\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_4^2}$.

Đặt $m=OM, n=ON, p=OP, q=OQ$. Sử dụng định lí hàm số côsin trong tam giác ta có:

$$\frac{1}{k_1^2}=\frac{MN^2}{4S_{OMN}^2}=\frac{m^2+n^2-2.mn.\cos\beta}{m^2.n^2.\sin^2\beta}.$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{1}{k_2^2}=\frac{n^2+p^2+2.np.\cos\beta}{n^2.p^2.\sin^2\beta};$$

$$\frac{1}{k_3^2}=\frac{p^2+q^2-2.pq.\cos\beta}{p^2.q^2.\sin^2\beta}$$

và $$\frac{1}{k_4^2}=\frac{q^2+m^2+2.qm.\cos\beta}{q^2.m^2.\sin^2\beta}.$$

Suy ra: $\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_3^2}$

$$=\frac{p^2q^2(m^2+n^2-2mn\cos\beta)+m^2n^2(p^2+q^2-2pq\cos\beta)}{m^2n^2p^2q^2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{m^2n^2(p^2+q^2)+p^2q^2(m^2+n^2)-2mnpq(mn+pq)\cos\beta}{m^2n^2p^2q^2\sin^2\beta}.$$

Tương tự: $\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_4^2}$

$$=\frac{m^2q^2(n^2+p^2)+n^2p^2(m^2+q^2)+2mnpq(mq+np)\cos\beta}{m^2n^2p^2q^2\sin^2\beta}.$$

Vì $(SAC)\cap(SBD)=SO$; $SO\perp(\alpha)$ và $(\alpha)\cap(SAC)=MP, (\alpha)\cap(SBD)=NQ$ nên

$$(SAC)\perp(SBD)\Leftrightarrow MP\perp NQ.$$

Vậy: $\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_4^2}\Leftrightarrow\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_3^2}=\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_4^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2n^2(p^2+q^2)+p^2q^2(m^2+n^2)-2mnpq(mn+pq)\cos\beta}{m^2n^2p^2q^2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{m^2q^2(n^2+p^2)+n^2p^2(m^2+q^2)+2mnpq(mq+np)\cos\beta}{m^2n^2p^2q^2\sin^2\beta}$$

$$\Leftrightarrow(mn+pq+mq+np)\cos\beta=0\Leftrightarrow\cos\beta=0$$

$$\Leftrightarrow\beta=90^\circ\Leftrightarrow MP\perp NQ\Leftrightarrow(SAC)\perp(SBD).$$

***Nhận xét.*** Số bài giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Hai bạn sau có lời giải đúng: *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/532.** *Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c. Gọi $r_a$, $r_b$, $r_c$ lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng. Chứng minh rằng*

$$\frac{r_a}{a\sin A}+\frac{r_b}{b\sin B}+\frac{r_c}{c\sin C}\ge 3 \quad (1).$$

***Lời giải.*** (Của *Trần Việt Anh*, lớp 8 và nhiều bạn)

Ta có: $S_{ABC}=(p-a)r_a=\frac{1}{2}bc\sin A.$

Suy ra: $\frac{r_a}{a\sin A}=\frac{bc}{a(b+c-a)}$ (2).

Tương tự:

$$\frac{r_b}{b\sin B}=\frac{ac}{b(a+c-b)};\ \frac{r_c}{c\sin C}=\frac{ab}{c(a+b-c)}.$$

Vế trái của (1) trở thành

$$\frac{r_a}{a\sin A}+\frac{r_b}{b\sin B}+\frac{r_c}{c\sin C}$$
$$=\frac{bc}{a(b+c-a)}+\frac{ac}{b(a+c-b)}+\frac{ab}{c(a+b-c)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P:=\frac{bc}{a(b+c-a)}+\frac{ac}{b(a+c-b)}+\frac{ab}{c(a+b-c)}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a(b+c-a)}\cdot\frac{ac}{b(a+c-b)}\cdot\frac{ab}{c(a+b-c)}}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}.$$

Mà $a^2\ge a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c);$

$$b^2\ge b^2-(a-c)^2=(b+a-c)(b-a+c);$$
$$c^2\ge c^2-(b-a)^2=(c+b-a)(c-b+a).$$

Nhân vế với vế ta được:

$$abc\ge(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

Suy ra:

$$P\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}\ge 3.$$

Vậy BĐT(1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ *ABC* là tam giác đều.

***Lời bình.*** Các bạn tự chứng minh bốn hệ thức tương đối quen thuộc sau hoặc xem trong

[1] Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2017.

**Bổ đề 1** ([1], Bài 3.4.10, trang 190) $r_ar_br_c=p^2r.$

**Bổ đề 2** ([1], Bài 3.1.11, trang 76) $abc=4pRr.$

**Bổ đề 3** ([1], Bài 4.1.4, trang 261)

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{pr}{2R^2}.$$

**Bổ đề 4** (Bất đẳng thức Euler, [1], trang 24): $R\ge 2r.$

**Áp dụng.** Theo bất đẳng thức Cauchy và bốn bổ đề trên ta có:

$$\frac{r_a}{a\sin A}+\frac{r_b}{b\sin B}+\frac{r_c}{c\sin C}\ge 3\sqrt[3]{\frac{r_ar_br_c}{abc\sin A\sin B\sin C}}$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{p^2r}{4pRr\frac{pr}{2R^2}}}=3\sqrt[3]{\frac{R}{2r}}\ge 3.$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

***Nhận xét.*** Các bạn đều làm theo cách đã trình bày, với một vài chi tiết khác không đáng kể. Thí dụ, một số bạn dùng hình vẽ chứng minh công thức $S_{ABC}=(p-a)r_a$, hoặc một số bạn dùng công thức $r_a=p\tan\frac{A}{2}$ và biến đổi lượng giác để chứng minh công thức (2). Các bạn dưới đây đã làm đúng: **Bà Rịa-Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định**: *Nguyễn Thành Hậu*, 11A1, THPT Tây Sơn; **Hà Nội**: *Trần Việt Anh* 8C1, THCS & THPT Archimedes, Đông Anh, *Nguyễn Huy Hoàng* 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng* 9E, THCS Nguyễn Trãi, huyện Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, *Trần Công Minh*, *Mai Trung Nguyên*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Long An**: *Nguyễn Tiến Đạt*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, *Phạm Ngọc Long* 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long**: *Lê Nguyễn Gia Bảo*, 12 T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. Và một bạn không ghi tên.

**TẠ DUY PHƯỢNG**

**Bài T10/532.** *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n! chia hết cho* $2^{n-1}$.

***Lời giải*** (Của bạn *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**)

Giả sử $n! = 2^s m$, với $m$ là số lẻ. Khi đó:

$$2^{n-1} \mid n! \Leftrightarrow s \geq n-1.$$

Ta có: $s = v_2(n!) = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{2^i}\right]$, ở đó $k$ là số nguyên dương lớn nhất mà $2^k \leq n$. Do đó:

$$n-1 \leq s \leq \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{2^i} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i} = n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

$$= n - \frac{n}{2^k} \leq n-1.$$

Vậy ta phải có $s = n-1 \Leftrightarrow n = 2^k$. Vậy $n = 2^k$ với $k$ là số nguyên dương.

***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 8C1, THCS Archimedes; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long*, 12T, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T11/532.** *Cho* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là hàm số liên tục thỏa mãn* $f(x+y) = f(f(x)).f(y)$ (1) *với mọi số thực x và y. Chứng minh rằng f là hàm hằng.*

***Lời giải*** (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $f(x_0) = 0$ thì từ (1) suy ra:

$$f(x+x_0) = f(f(x_0))f(x_0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $f(t) \equiv 0$ là hàm hằng.

Xét trường hợp $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (1) và từ giả thiết $f$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay $y = 0$ vào (1), ta thu được:

$$f(x) = f(f(x))f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(0)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) ta thu được:

$$f(x+y) = \frac{f(x)}{f(0)}f(y), \forall y \in \mathbb{R}$$

hay $\quad g(x+y) = g(x)g(y), \forall y \in \mathbb{R}$ (2),

trong đó $g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$ là hàm liên tục và dương trên $\mathbb{R}$. Vậy (2) là phương trình hàm Cauchy dạng mũ nên có nghiệm $g(x) = a^x, a > 0$. Suy ra:

$$f(x) = ba^x, a > 0, b = f(0) > 0.$$

Ta chứng minh $a = 1$, tức là $f(x) \equiv b$.

Thật vậy, giả sử $0 < a \neq 1$. Thế vào (1), ta thu được: $ba^{x+y} = ba^{f(x)} \times ba^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a^x = ba^{f(x)} \Leftrightarrow x = ba^x + \log_a b.$$

Với $x = \log_a b$ thì $0 = ba^{\log_a b}$, mâu thuẫn.

Thế $f(x) = b$ vào (1), ta thu được $b = 1$,

*Kết luận*: Vậy chỉ có hàm hằng $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$ là thỏa mãn các điều kiện bài ra.

***Nhận xét.*** Đây là dạng toán về phương trình hàm cơ bản với cặp biến tự do trong lớp hàm một biến thực nên có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn gửi đến tòa soạn đều giải theo cách đã trình bày ở trên dựa vào kết quả đã biết về phương trình hàm Cauchy dạng tuyến tính và dạng mũ.

Các bạn sau đây có lời giải đúng.

**Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 11T1, *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Lê Nguyễn Gia Bảo*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng:** *Lý Hoàng Nhựt*, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/532.** *Gọi (O), (I) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp (tâm O), nội tiếp (tâm I) của tam giác ABC. Đường tròn (D) tiếp xúc trong với (O) tại X*

*đồng thời tiếp xúc với các cạnh AB, AC. M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AX kẻ từ X và tiếp tuyến của (D) song song với BC (tiếp tuyến này nằm cùng phía với X so với BC). Chứng minh AM, BC và OI đồng quy.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**)

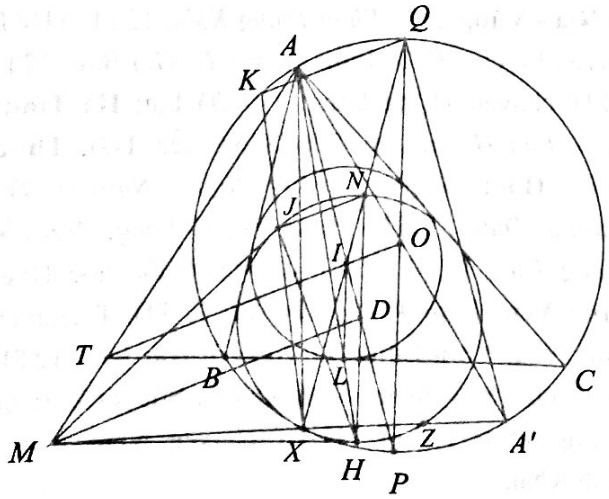
Ta cần có một bổ đề.

**Bổ đề.** *Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. Đường tròn (D) tiếp xúc với AB, AC và tiếp trong với (O) tại X. Q là trung điểm cung $\widehat{BAC}$ của (O). Khi đó I, X, Q thẳng hàng.*

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây. Trở lại bài toán trên:

Gọi $H$ là tiếp điểm của đường tròn $(D)$ và đường thẳng qua $M$ song song với $BC$; $L$ là tiếp điểm của $(I)$ và $BC$; $N$ là điểm đối xứng của $H$ qua $D$; $P$ là giao điểm thứ hai của $AI$ và $(O)$; $Q$ là giao điểm thứ hai của $PO$ và $(O)$; $J$ là điểm đối xứng của $H$ qua $DM$; $K$ là giao điểm thứ hai của $XJ$ và $(O)$; $Z$ là giao điểm thứ hai của $MX$ và $(D)$; $T$ là giao điểm của $OI$ và $BC$; $A'$ là điểm đối xứng của $A$ qua $O$.

Kí hiệu $XX$ là tiếp tuyến chung tại $X$ của $(O)$ và $(D)$.




Dễ thấy $\overrightarrow{DH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$. Từ đó, chú ý rằng $X$ là tâm của phép vị tự ngoài biến $(D)$ thành $(O)$, suy ra $X$, $H$, $P$ thẳng hàng. Dễ thấy $\widehat{AXA'} = \widehat{AXM} = 90°$. Do đó $X, M, A'$ thẳng hàng. Kết hợp với $Z \in MX$, suy ra $X, Z, A'$ thẳng hàng.

Dễ thấy $MJ$ tiếp xúc với $(D)$. Do đó tứ giác $HZJX$ điều hòa. Dễ thấy $IL // QP$ và $OP = OQ$. Do đó $I(LOPQ) = -1$.

Vậy $Q(PKA'X) = X(PKA'X) = X(HJZX)$
$= -1 = I(LOPQ)$.

Dễ thấy $QP // IL$; $QA' // AP \equiv IP$.

Theo bổ đề trên, $QX \equiv IQ$. Vậy $QK // IO$ (1).

Dễ thấy $\overrightarrow{DN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$. Từ đó, chú ý rằng $X$ là tâm của phép vị tự ngoài biến $(D)$ thành $(O)$, suy ra $X$, $N$, $Q$ thẳng hàng. Vậy qua phép vị tự tâm $X$ biến $(O)$ thành $(D)$, $Q$, $K$ theo thứ tự biến thành $N$, $J$. Do đó $QK // NJ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $NJ // IO$.

Kết hợp với $MD \perp HJ$, $HJ \perp NJ$, suy ra $MD // IO \equiv TI$.

Kết hợp với $MH // TL$; $DH // IL$, suy ra các tam giác $MHD$ và $TLI$ có các cạnh tương ứng song song. Vậy $MT$, $HL$, $DI$ đồng quy (3).

Dễ thấy $\overrightarrow{IL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DH}$. Từ đó, chú ý rằng $A$ là tâm của phép vị tự ngoài biến $(I)$ thành $(D)$, suy ra $A$, $L$, $H$ thẳng hàng.

Do đó $A = HL \cap DI$ (4).

Từ (1) và (2) suy ra $A \in MT$.

Điều đó có nghĩa là $AM$, $OI$ và $BC$ đồng quy.

***Nhận xét.*** Bài toán này khá khó, ngoài bạn *Bảo* chỉ có 4 bạn tham gia giải: **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 10T1, *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Sóc Trăng:** *Phạm Nguyên Khang*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/532.** *Sóng dừng trên một sợi dây có dạng*

$$u = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(20\pi t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)(\text{cm}).$$

*Với x đo bằng (cm), t đo bằng (s).*

a) *Tính vận tốc truyền sóng dọc theo sợi dây.*

b) *Xác định những vị trí trên dây có biên độ dao động bằng 1 cm.*

***Lời giải.*** Theo đề bài biên độ dao động của sóng:

$$A = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right|.$$

Tại những điểm là nút thì $A = 0$, nên

$$2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}x = k\pi \Rightarrow x_k = 4k.$$

Vì khoảng cách giữa hai nút liên tiếp là $\frac{\lambda}{2}$ nên:

$$\frac{\lambda}{2} = x_{k-1} - x_k = 4k + 1 - 4k = 4 \Rightarrow \lambda = 8 \text{ cm}.$$

Lại có: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10$ Hz.

Vậy $v = \lambda f = 8.10 = 80$ cm/s.

Những điểm có biên độ bằng 10 cm thỏa mãn phương trình: $2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| = 1 \Rightarrow \lambda = 8$ cm.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x_k = \pm\frac{2}{3} + 4k.$$

Với $k$ là những số nguyên sao cho $x_k > 0$ và nhỏ hơn chiều dài sợi dây.

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào có câu trả lời đúng cho đề ra kì này!

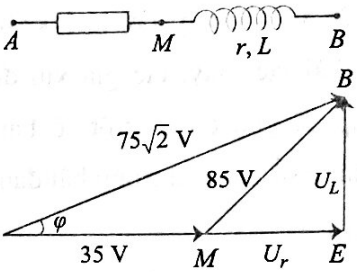
**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**

**Bài L2/532.** *Đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R mắc nối tiếp với cuộn dây có điện trở r hoạt động. Điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở, cuộn dây và hai đầu đoạn mạch lần lượt là 35 V, 85 V và $75\sqrt{2}$ V. Cuộn dây tiêu thụ công suất 40 W. Xác định tổng điện trở thuần của toàn mạch.*

***Lời giải.*** Ta có: $\cos\varphi = \frac{35^2 + (75\sqrt{2})^2 - 85^2}{2.35.75\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow U_{R+r} = U_{AE} = AB\cos\varphi = 75$ V $\Rightarrow U_r = 45$ V

$\mathcal{P}_r = rI^2 = I.U_r \Rightarrow I = \frac{\mathcal{P}_r}{U_R} = 1\text{A} \Rightarrow r + R = 75\ \Omega.$




***Nhận xét.*** Hoan nghênh bạn *Nguyễn Trường Duy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** và bạn *Lê Đình Minh Quân*, 11CT, THPT Gia Định, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**

## *PROBLEMS ...*

(*Tiếp theo trang 21*)

**Problem T8/536.** Given an equilateral triangle $ABC$ with the side $a$, inscribed in a circle $(O)$. Let $M$ be a point moving on $(O)$. Let $I$, $J$, $K$ respectively be the perpendicular projections of $M$ on $BC$, $CA$, $AB$. Find the minimum value of the expression $P = 4MI^4 + MJ^4 + MK^4$.

**Problem T9/536.** Given an acute triangle $ABC$ inscribed in a circle $(O)$ with radius $R$. The medians $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ respectively intersects $(O)$ at $A_2$, $B_2$, $C_2$. Show that $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \geq \frac{3R}{2}$.

**TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD**

**Problem T10/536.** Given a prime $p$ and an integer $n$ which is greater than 4. Show that the polynomial $f(x) = x^n - px^2 + px + p^2$ cannot be factorized as a product of two integral coefficients polynomials whose degrees are greater or equal to 1.

**Problem T11/536.** Find all functions $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ satisfying $f(1) = 0$ and

$$f(xy - y) = f(x)f(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

**Problem T12/536.** Given a triangle $ABC$ inscribed in a circle $(O)$. The angle bisector of $\widehat{BAC}$ intersects $BC$ at $E$ and intersects $(O)$ at the second point $P$. Let $P'$ be the reflection point of $P$ in $BC$. $AP'$ intersects $BC$ at $K$. Let $L$ be the orthocenter of $AEK$. Show that the circle with diameter $AL$ is tangent to the Euler circle of $ABC$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)


# HẰNG SỐ TỐT NHẤT TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

**HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG**
*(GV THPT Khoa học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)*

**Lời mở đầu**. Bất đẳng thức (BĐT) là một mảng toán hay và khó trong chương trình toán THPT. Các bài toán bất đẳng thức thường xuyên xuất hiện trong các đề thi HSG hay thi vào lớp 10 THPT chuyên và thường gây khó khăn cho học sinh. Trong bài viết này, tác giả xin đưa ra một phương pháp để giải quyết một số bài toán yêu cầu về tìm hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức.

***Phương pháp***:

*Bước 1*. Cho hai hoặc ba biến trong bất đẳng thức bằng nhau (dựa theo điều kiện bài toán).

*Bước 2*. Biến đổi từ bước 1 để tìm ra hằng số tốt nhất.

*Bước 3*. Chứng minh bài toán luôn đúng với hằng số tốt nhất đó. Kết thúc chứng minh.

Sau đây xin đi vào một số bài toán cụ thể:

**Bài toán 1**. *Cho các số thực dương x, y. Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng*: $(x+y)^4 \ge k.xy(x^2+y^2)$ (1).

***Lời giải***. Cho $x=y$. Từ (1), ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow (x+x)^4 \ge k.x.x(x^2+x^2)$$

$$\Leftrightarrow (2x)^4 \ge k.x^2.2x^2 \Leftrightarrow 16x^4 \ge k.2x^4$$

$$\Leftrightarrow k \le 8 \Rightarrow k_{Max} = 8.$$

Ta sẽ chứng minh $k=8$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn bài toán. Thật vậy, thay $k=8$ vào (1), ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow (x+y)^4 \ge 8xy(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2 \ge 8xy(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4-4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^4 \ge 0$$

(luôn đúng). Do đó $k=8$ thỏa mãn bài toán

Vậy $k=8$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn bài toán.

**Bài toán 2**. *Tìm hằng số k nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $x^3y^3(x^3+y^3) \le k$ *luôn đúng với mọi số thực dương* $x, y$ *thỏa mãn* $x+y=2$ (2).

***Lời giải***. Từ giả thiết, cho $x=y=1$. Từ (2), ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow 1^3.1^3.(1^3+1^3) \le k \Leftrightarrow k \ge 2 \Rightarrow k_{\min} = 2.$$

Ta sẽ chứng minh $k=2$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bài toán hay cần chứng minh $x^3y^3(x^3+y^3) \le 2$.

Thật vậy, từ bất đẳng thức Cauchy cho bốn số thực dương ta có:

$$4 = 2^2 = (x+y)^2 = (x^2-xy+y^2)+xy+xy+xy$$
$$\ge 4.\sqrt[4]{(x^2-xy+y^2).xy.xy.xy}$$

$$\Rightarrow 1 \ge \sqrt[4]{(x^2-xy+y^2).x^3y^3}$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3(x^2-xy+y^2) \le 1$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3.(x^2-xy+y^2)(x+y) \le 2$$

$$\Leftrightarrow x^3y^3(x^3+y^3) \le 2 \quad (\text{do } x+y=2).$$

Suy ra BĐT đúng với $k=2$.

Vậy $k=2$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

**Bài toán 3**. *Tìm hằng số m tốt nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\ge m\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$ (3) *luôn đúng với mọi số thực dương x, y.*

***Lời giải***. Từ giả thiết, nếu cho $x=y$ vào BĐT (3), ta được: $\frac{x^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}-2\ge m\left(\frac{x}{x}+\frac{x}{x}-2\right)$

$$\Leftrightarrow 2-2\ge m(4-4)\Leftrightarrow 0\ge m.0.$$

Khi đó ta không tìm được hằng số $m$ lớn nhất thỏa mãn.

Trong trường hợp này, ta biến đổi bài toán như sau. Ta có: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\ge m\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}\ge m\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2}\ge \frac{m(x-y)^2}{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{x^2y^2}\ge \frac{m(x-y)^2}{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy}\left(\frac{(x+y)^2}{xy}-m\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy}-m\ge 0\quad (\forall x\ne y)$$

$$\Rightarrow m\le \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

Do BĐT(3) luôn đúng $\forall x,y>0$ nên từ $m\le\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow m\le \min\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right)$.

Mặt khác, $\frac{(x+y)^2}{xy}\ge\frac{\left(2\sqrt{xy}\right)^2}{xy}=\frac{4xy}{xy}=4$ nên $m\le 4$. Ta sẽ chứng minh $m=4$ là giá trị tốt nhất thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, thay $m=4$ vào (3) ta được:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\ge 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$$

$$\Rightarrow t^2+\frac{1}{t^2}-2\ge 4\left(t+\frac{1}{t}-2\right)\quad (\text{với } t=\frac{x}{y})$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{1}{t^2}-4t-\frac{4}{t}+6\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^4-4t^3+6t^2-4t+1}{t^2}\ge 0\Leftrightarrow \frac{(t-1)^4}{t^2}\ge 0$$

(luôn đúng).

Suy ra BĐT (3) đúng với $m=4$.

Vậy $m=4$ là giá trị tốt nhất thỏa mãn bài toán.

**Bài toán 4**. *Cho các số thực dương a,b,c. Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\ge k(a+b+c)^3\quad (4).$$

***Lời giải***. Cho $a=b=c$. Từ (4), ta có:

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow 4\left(a^3+a^3+a^3\right)+15a.a.a\ge k(a+a+a)^3$$

$$\Leftrightarrow 12a^3+15a^3\ge k(3a)^3\Leftrightarrow 27a^3\ge k.27a^3$$

$$\Leftrightarrow k\le 1\Rightarrow k_{\max}=1.$$

Ta sẽ chứng minh $k=1$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, thay $k=1$ vào (4), ta có:

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\ge (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \ge a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+5abc\ge (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b) -bc(b+c)-ca(c+a)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2-ab-ac+bc\right)+b\left(b^2-bc-ba+ca\right) +c\left(c^2-ca-cb+ab\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)$

$+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$ (5).

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0$. Từ đó:

$$\begin{cases} c-a\leq 0 \\ c-b\leq 0 \end{cases} \Rightarrow c(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Mặt khác, $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)$

$$=(a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right]$$
$$=(a-b)^2(a+b-c)\geq 0$$

nên $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)$

$$+c(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Suy ra, BĐT(5) đúng hay

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\geq (a+b+c)^3.$$

Do đó $k=1$ thỏa mãn bài toán.

Vậy $k=1$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn bài toán.

- ***Từ bài toán 4***, ta xây dựng được 2 bài toán có cấu trúc *"nhẹ"* hơn như sau:

**Bài toán 5**. *Cho các số thực dương $a,b,c$. Tìm hằng số k nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$2(x+y+z)^3+k.xyz\geq 7(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

**Bài toán 6**. *Cho các số thực dương $a,b,c$. Tìm hằng số k nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$(x+y+z)^3+9xyz\geq k(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

**Bài toán 7**. *Cho các số thực dương $a,b,c$. Tìm hằng số h nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$a^4+b^4+c^4+habc(a+b+c)\geq (ab+bc+ca)^2 \text{ (6)}.$$

***Lời giải***. Cho $a=b=c$. Từ (6), ta có:

$$\Leftrightarrow a^4+a^4+a^4+h.a.a.a(a+a+a)$$
$$\geq \left(a^2+a^2+a^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3a^4+h.3a^4\geq 9a^4 \Leftrightarrow h.3a^4\geq 6a^4 \Leftrightarrow h\geq 2$$
$$\Rightarrow h_{\min}=2.$$

Ta sẽ chứng minh $h=2$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, thay $h=2$ vào (6), BĐT

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)\geq (ab+bc+ca)^2$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)$$
$$\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)+\frac{1}{2}\left(b^4-2b^2c^2+c^4\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(c^4-2c^2a^2+a^4\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(b^2-c^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(c^2-a^2\right)^2\geq 0$$

(luôn đúng).

Suy ra, BĐT(6) đúng hay $h=2$ thỏa mãn bài toán.

Vậy $h=2$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

- Trong bài toán số 7, ta có thể *"làm mạnh"* bất đẳng thức hơn như sau:

**Bài toán 8**. *Cho các số thực dương $a,b,c$. Tìm hằng số t nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:*

$$a^4+b^4+c^4+t.abc(a+b+c)\geq 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Việc tìm hằng số $t$ và chứng minh xin dành cho bạn đọc.

**Bài toán 9**. *Tìm hằng số k tốt nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x,y,z>0$:*

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$
$$\geq \frac{kxy}{(x+z)(y+z)}+\frac{kyz}{(y+x)(z+x)}+\frac{kzx}{(z+y)(x+y)} \text{ (7)}.$$

*Lời giải*. Cho $x = y = z$. Từ (7), ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{x}{x+x} + \frac{x}{x+x} + \frac{x}{x+x}$$

$$\geq \frac{k.x.x}{(x+x)(x+x)} + \frac{k.x.x}{(x+x)(x+x)} + \frac{k.x.x}{(x+x)(x+x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{k.x^2}{4x^2} + \frac{k.x^2}{4x^2} + \frac{k.x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{k}{4} + \frac{k}{4} + \frac{k}{4} = \frac{3k}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{3k}{4} \Leftrightarrow k \leq 2$$

$$\Rightarrow k_{\max} = 2.$$

Ta sẽ chứng minh $k = 2$ là giá trị tốt nhất thỏa mãn bài toán. Thật vậy, thay $k = 2$ vào (7), ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

$$\geq \frac{2xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{2yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{2zx}{(z+y)(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+z)(x+y) + y(y+z)(y+x) + z(z+x)(z+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\geq \frac{2xy(x+y) + 2yz(y+z) + 2zx(z+x)}{(x+z)(y+z)(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow x(x+z)(x+y) + y(y+z)(y+x) + z(z+x)(z+y)$$

$$\geq 2xy(x+y) + 2yz(y+z) + 2zx(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$\geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - xy(x+y)$$

$$- yz(y+z) - zx(z+x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - xy - xz + yz) + y(y^2 - yz - yx + zx)$$

$$+ z(z^2 - zx - zy + xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-z)$$

$$+ z(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Đây chính là BĐT (5) trong bài toán 4 đã được chứng minh, suy ra BĐT

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

$$\geq \frac{2xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{2yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{2zx}{(z+x)(z+y)}$$

luôn đúng hay $k = 2$ thỏa mãn.

Vậy $k = 2$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn bài toán.

Để kết thúc bài viết, xin đưa ra một số bài tập áp dụng.

## BÀI TẬP

**Bài 1**. Tìm hằng số $k$ nhỏ nhất thỏa mãn BĐT

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c}$$

$$\geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

luôn đúng với mọi số thực dương $a, b, c$.

**Bài 2**. Tìm hằng số $m$ tốt nhất thỏa mãn BĐT

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} + \frac{mxyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2$$

luôn đúng với mọi số thực dương $x, y, z$.

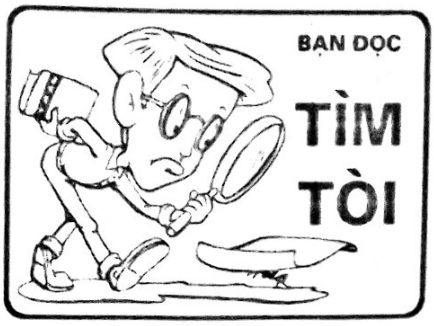
**Bài 3**. Cho $x, y, z > 0$. Tìm hằng số $k$ lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:.

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{k}{xy + yz + zx}.$$

**Bài 4**. Cho $a, b, c > 0$. Tìm hằng số $h$ tốt nhất thỏa mãn bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a^2}{2a^2 + k(b+c)^2} + \frac{b^2}{2b^2 + k(c+a)^2}$$

$$+ \frac{c^2}{2c^2 + k(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$



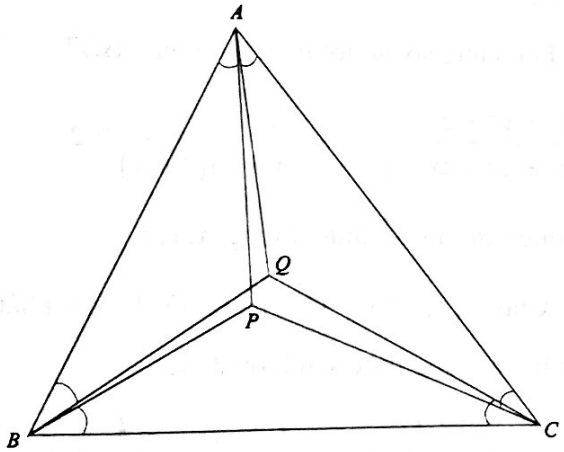

# ĐIỂM BROCARD CỦA n - GIÁC NỘI TIẾP

NGUYỄN VĂN LINH (Hà Nội)

Bài viết mở rộng khái niệm điểm Brocard cho đa giác lớn hơn 3 cạnh và nêu điều kiện để một $n$ - giác nội tiếp có điểm Brocard.

Trước tiên ta nhắc lại định nghĩa và tính chất của điểm Brocard trong tam giác.

**Định nghĩa 1.** *Điểm Brocard thứ nhất của tam giác ABC là một điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho* $\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}$. *Điểm Brocard thứ hai của tam giác ABC là một điểm Q nằm trong tam giác ABC sao cho* $\widehat{QAC} = \widehat{QCB} = \widehat{QBA}$.




Theo định nghĩa trên ta thấy rằng mọi tam giác đều tồn tại hai điểm Brocard, được dựng bằng cách lấy giao điểm của các đường tròn qua hai đỉnh và tiếp xúc với một cạnh của tam giác.

Sau đây là hai tính chất cơ bản của điểm Brocard của tam giác.

**Tính chất 1.** *Hai điểm Brocard của tam giác ABC là một cặp điểm liên hợp đẳng giác.*

***Chứng minh.*** Thật vậy, giả sử $P$ là điểm Brocard thứ nhất của tam giác $ABC$. Đặt $\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA} = \Omega$. Gọi $Q'$ là điểm liên hợp đẳng giác của $P$ trong tam giác $ABC$. Khi đó:

$$\widehat{Q'AC} = \widehat{Q'CB} = \widehat{Q'BA} = \Omega.$$

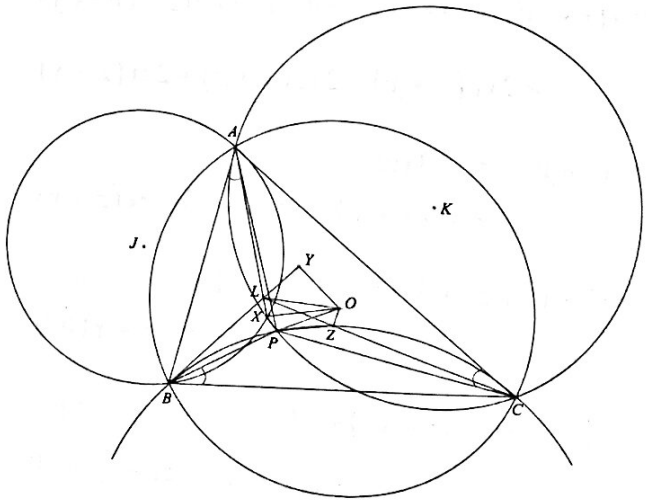
Do đó $Q' \equiv Q$.

***Nhận xét.*** Ta gọi

$$\Omega = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$
$$= \angle QAC = \angle QCB = \angle QBA$$

là góc Brocard của tam giác $ABC$.

**Tính chất 2.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với L là điểm Lemoine. Khi đó hai điểm Brocard P, Q của tam giác nằm trên đường tròn đường kính OL và* $\widehat{POL} = \widehat{QOL} = \Omega$.

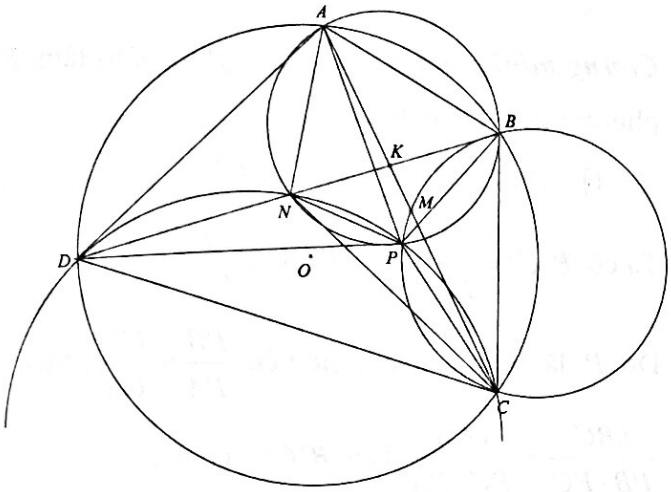



***Chứng minh.*** Gọi $(J)$ là đường tròn qua $B$ và tiếp xúc với $AC$ tại $A$, $(K)$ là đường tròn ngoại

tiếp tam giác $APC$. $(J)$ cắt $(K)$ tại $X$ khác $A$. Tương tự xác định các điểm $Y, Z$.

Ta có $\widehat{XAB} = \widehat{XCA}$ và $\widehat{XAC} = \widehat{XBA}$ nên $\Delta AXB \sim \Delta CXA$, ta thu được $\dfrac{d(X;AC)}{d(X;AB)} = \dfrac{AB}{AC}$.

Do đó $X$ nằm trên đường đối trung ứng với đỉnh $A$ của tam giác $ABC$.




Mặt khác, $\widehat{BXC} = 360^\circ - \widehat{AXB} - \widehat{AXC}$

$$= 360^\circ - 2\left(180^\circ - \widehat{XAB} - \widehat{XAC}\right)$$

$$= 2\widehat{BAC} = \widehat{BOC}.$$

Suy ra $B, X, O, C$ đồng viên (cùng thuộc một đường tròn). Mà $OB = OC$ và $XA$ là phân giác của $\angle BXC$ nên $\angle AXO = 90^\circ$.

Vậy $X$ là hình chiếu của $O$ trên $AL$. Tương tự ta thu được $\widehat{LXO} = \widehat{LYO} = \widehat{LZO} = 90^\circ$. Suy ra $L, X, Y, Z, O$ đồng viên.

Sử dụng góc định hướng, ta có:

$$(ZP, ZL) \equiv (BP, BC) \equiv (CP, CA) \equiv (XP, XA)$$
$$\equiv (XP, XL) \pmod{\pi}.$$

Suy ra $P \in (LXZ)$. Vậy $P$ nằm trên đường tròn đường kính $OL$. Đồng thời $\widehat{POL} = \widehat{PZL} = \widehat{PBC} = \Omega$

Bây giờ chúng ta thử mở rộng khái niệm điểm Brocard cho tứ giác. Một câu hỏi được đặt ra là tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tồn tại một điểm $P$ thỏa mãn:

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCD} = \widehat{PDA}$$

hoặc $\widehat{PAD} = \widehat{PDC} = \widehat{PCB} = \widehat{PBA}$?

Nếu tồn tại, ta sẽ gọi $P$ là điểm Brocard của tứ giác.

Tác giả chưa tìm được hết các loại tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện trên. Tuy nhiên có một loại tứ giác rất quen thuộc có điểm Brocard, đó là tứ giác điều hòa.

**Tính chất 3.** *Một tứ giác nội tiếp có điểm Brocard khi và chỉ khi tứ giác đó điều hòa.*

***Chứng minh.*** Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$.

*Chiều thuận.* Giả sử tồn tại điểm $P$ nằm trong tứ giác $ABCD$ thỏa mãn $\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCD} = \widehat{PDA}$. Gọi $N$ là giao điểm của $(APB)$ với $BD$. Suy ra $\widehat{PNB} = \widehat{PAB} = \widehat{PCD}$, suy ra tứ giác $DNPC$ nội tiếp. Ta có:

$$\widehat{NAB} = \widehat{NAP} + \widehat{PAB} = \widehat{NBP} + \widehat{PBC}$$
$$= \widehat{DBC} = \widehat{DAC},$$

suy ra $AN$ và $AC$ đẳng giác trong $\widehat{DAB}$. Tương tự $CN$ và $CA$ đẳng giác trong $\widehat{BCD}$.

Gọi $K$ là giao điểm của $AC$ với $BD$. Ta có:

$$\frac{AD^2}{AB^2} = \frac{ND}{NB} \cdot \frac{KD}{KB} = \frac{CD^2}{CB^2}.$$

Suy ra $AD \cdot BC = AB \cdot CD$ hay tứ giác $ABCD$ điều hòa.

*Chiều đảo.* Giả sử tứ giác $ABCD$ điều hòa. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC$, $BD$. Gọi $P$ là giao điểm của $(ANB)$ và $(BMC)$.

Do $AC$ là đường đối trung của tam giác $DAB$ nên $\widehat{NAB} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, suy ra $(ANB)$ tiếp xúc với $BC$. Tương tự $(BMC)$ tiếp xúc với $CD$, $(CND)$ tiếp xúc với $AD$.

Từ đó $\widehat{PNB} = \widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCD}$, suy ra tứ giác $DNPC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PCD} = \widehat{PDA}$.

***Nhận xét.*** Vì $\widehat{APB}+\widehat{DPC}=\widehat{ANB}+\widehat{DNC}$

$$=\widehat{BNC}+\widehat{DNC}$$
$$=180^\circ$$

nên $P$ có điểm liên hợp đẳng giác $Q$ trong tứ giác điều hòa $ABCD$. Do đó $P,Q$ là hai điểm Brocard của tứ giác điều hòa $ABCD$. Ta đặt

$$\Omega=\widehat{PAB}=\widehat{PBC}=\widehat{PCD}$$
$$=\widehat{PDA}=\widehat{QAD}=\widehat{QDC}$$
$$=\widehat{QCB}=\widehat{QBA}$$

là góc Brocard của tứ giác $ABCD$.

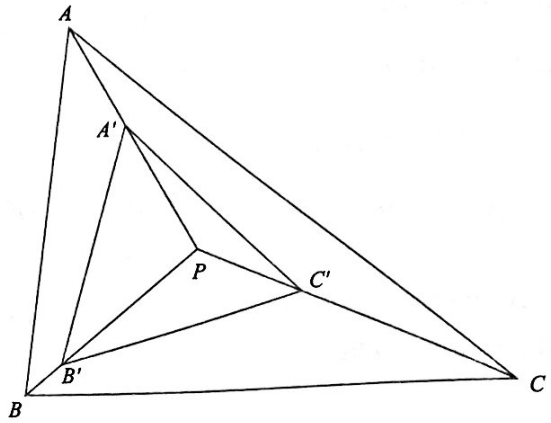
Bạn đọc cũng có thể chứng minh được hai điểm $P,Q$ nằm trên đường tròn đường kính $OK$ và $\widehat{POK}=\widehat{QOK}=\Omega$.

Việc tồn tại điểm Brocard của tam giác và tứ giác điều hòa giúp chúng ta mạnh dạn định nghĩa điểm Brocard của $n$ - giác.

**Định nghĩa 2.** *Cho n - giác $A_1A_2...A_n$. Nếu tồn tại điểm K nằm trong n - giác thỏa mãn $\widehat{KA_2A_1}=\widehat{KA_3A_2}=...=\widehat{KA_nA_{n-1}}=\widehat{KA_1A_n}$ hoặc điểm L nằm trong n - giác thỏa mãn $\widehat{LA_1A_2}=\widehat{LA_2A_3}=...=\widehat{LA_{n-1}A_n}=\widehat{LA_nA_1}$ thì K và L được gọi là điểm Brocard của n - giác $A_1A_2...A_n$.*

Muốn đi tìm một lớp các đa giác nhiều cạnh hơn 4 có điểm Brocard, ta cần tìm điểm chung giữa tam giác và tứ giác điều hòa. Tạm gác lại vấn đề về điểm Brocard, ta nhắc lại một tính chất quen thuộc của *điểm isodynamic*, giao điểm của ba đường tròn Apollonius của một tam giác.

**Tính chất 4.** *Cho tam giác ABC có P là điểm isodynamic. Khi đó tồn tại một phép nghịch đảo tâm P, phương tích k > 0 biến các đỉnh của tam giác ABC thành các đỉnh của một tam giác đều.*




***Chứng minh.*** Gọi $f$ là phép nghịch đảo tâm $P$, phương tích $k>0$ bất kì.

$f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C'$.

Ta có $B'C'=\dfrac{kBC}{PB\cdot PC}$, $C'A'=\dfrac{kCA}{PC\cdot PA}$.

Do $P$ là điểm isodynamic nên $\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{CB}{CA}$. Suy ra

$\dfrac{kBC}{PB\cdot PC}=\dfrac{kCA}{PC\cdot PA}$ hay $B'C'=C'A'$.

Tương tự ta thu được tam giác $A'B'C'$ đều.

Một điều thú vị là cũng tồn tại phép nghịch đảo biến bốn đỉnh của tứ giác điều hòa thành bốn đỉnh của một hình vuông.

**Tính chất 5.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Khi đó tồn tại phép nghịch đảo biến bốn đỉnh của tứ giác ABCD thành bốn đỉnh của một hình vuông khi và chỉ khi tứ giác ABCD điều hòa.*

***Chứng minh.*** *Chiều thuận.* Giả sử tồn tại một phép nghịch đảo tâm $P$ biến bốn đỉnh $A,B,C,D$ thành các điểm $A',B',C',D'$ sao cho $A'B'C'D'$ là một hình vuông.

Chứng minh tương tự tính chất 4 ta thấy $A'B'=B'C'$ nên $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{BA}{BC}$. Tương tự $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{DA}{DC}$. Suy ra $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{DA}{DC}$. Vậy tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa.

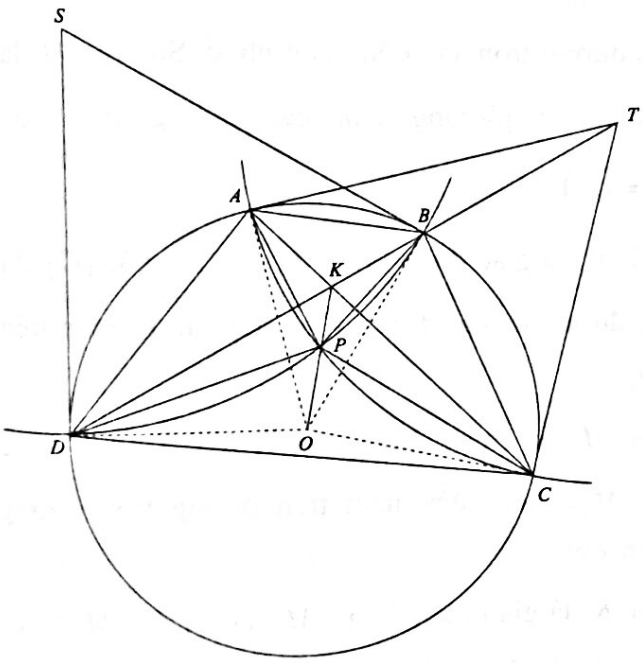
*Chiều đảo.* Giả sử tứ giác $ABCD$ điều hòa.

Gọi $T$ là giao điểm của tiếp tuyến tại $A$ và $C$ của $(O)$, $S$ là giao điểm của tiếp tuyến tại $B$ và $D$ của $(O)$. Khi đó $(T;TA)$ và $(S;SB)$ là đường tròn Apollonius của các cặp tam giác $ABD$, $CBD$ và $BAC$, $DAC$.

Gọi $K$ là giao của $AC$ và $BD$. Khi đó dễ thấy $OK$ là trục đẳng phương của $(T;TA)$ và $(S;SB)$.

Mà $P_{O/(T;TA)} = OA^2 > 0$ và $P_{K/(T;TA)} = \overline{KA}\cdot\overline{KC} < 0$ nên tồn tại giao điểm $P$ của $(T;TA)$ và $(S;SB)$ nằm trên $OK$.

Gọi $f$ là phép nghịch đảo tâm $P$, phương tích $k>0$ bất kì. Giả sử $f(X)=X'$ với $X$ là điểm bất kì trên mặt phẳng.




Do $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{BA}{BC}$ nên chứng minh tương tự tính chất 4, $B'A' = B'C'$. Tương tự suy ra $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$. Đồng thời do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp. Suy ra $A'B'C'D'$ là hình vuông.

***Nhận xét.*** - Thực tế có hai phép nghịch đảo biến bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$ thành bốn đỉnh của một hình vuông do $(T;TA)$ và $(S;SB)$ cắt nhau tại hai điểm trên $OK$.

- Kết hợp hai tính chất 3 và 5 ta thu được: "một tứ giác nội tiếp có điểm Brocard khi và chỉ khi tồn tại phép nghịch đảo biến bốn đỉnh của tứ giác đó thành bốn đỉnh của một hình vuông."

Đây là cơ sở cho việc tìm ra lớp các đa giác nhiều cạnh hơn 4 có điểm Brocard. Sau các bước chứng minh tương tự tính chất 3 và 5, tác giả thu được kết luận sau.

**Tính chất 6.** *Cho $n$ - giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp $(O)$. Khi đó tồn tại một điểm $K$ nằm trong $n$ - giác sao cho $\widehat{KA_2A_1} = \widehat{KA_3A_2} = ... = \widehat{KA_nA_{n-1}} = \widehat{KA_1A_n}$ khi và chỉ khi tồn tại phép nghịch đảo biến các đỉnh của $n$ - giác $A_1A_2...A_n$ thành các đỉnh của một $n$ - giác đều.*

***Chứng minh.*** *Chiều thuận.* Giả sử tồn tại một điểm $K$ nằm trong $n$-giác sao cho $\widehat{KA_1A_2} = \widehat{KA_2A_3} = ... = \widehat{KA_{n-1}A_n} = \widehat{KA_nA_1}$.

Gọi $X_j$ là giao điểm của đường đối trung ứng với đỉnh $A_j$ của tam giác $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ với $(O)$; $M_j$ là trung điểm của $A_jX_j$.

Gọi $P$ là giao của $A_2X_2$ với $A_3X_3$. Ta có $M_2, M_3$ nằm trên đường tròn đường kính $OP$.

Lại có $\widehat{A_1A_2K} = \widehat{A_2A_3K}$ nên $(KA_2A_3)$ tiếp xúc với $A_2A_1$. Do đó $K, M_2, A_2, A_3$ đồng viên. Tương tự ta thu được $M_j$ nằm trên $(KA_jA_{j+1})$.

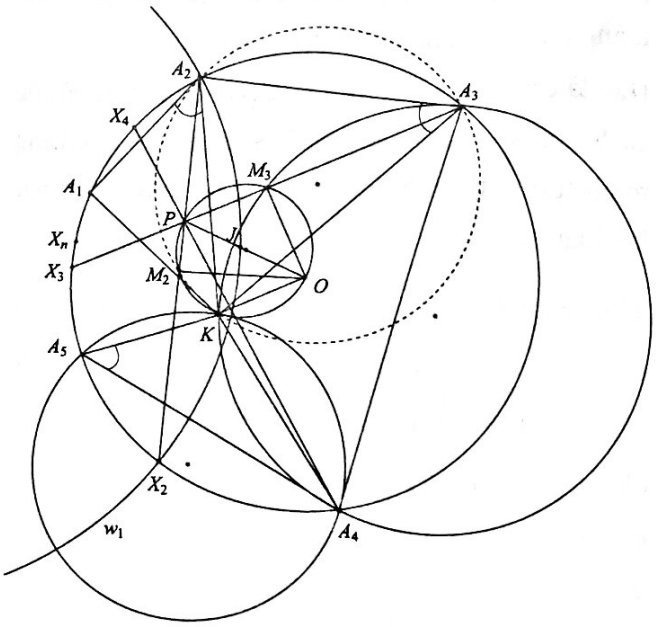
Ta có:

$$(M_3P, M_3K) \equiv (M_3A_3, M_3K)$$
$$\equiv (A_4A_3, A_4K) \equiv (A_3A_2, A_3K)$$
$$\equiv (M_2A_2, M_2K) \equiv (M_2P, M_2K) \pmod{\pi}.$$

Suy ra $P, M_2, M_3, K$ đồng viên. Do đó $\widehat{OKP} = 90^\circ$.

Tương tự gọi $P'$ là giao của $A_3X_3$ với $A_4X_4$ thì $\widehat{OKP'} = 90^\circ$, suy ra $P' \equiv P$.

Chứng minh tương tự ta thu được $A_1X_1, A_2X_2, ..., A_nX_n$ đồng quy tại $P$.




Giả sử $P$ nằm ngoài $(O)$. Không mất tổng quát giả sử $P$ nằm trên nửa mặt phẳng bờ $A_2A_3$ không chứa $O$. Gọi $T$ là giao điểm của $A_1A_2$ và $A_3A_4$. Khi đó $P$ phải nằm trong góc tạo bởi các tia đối của tia $TA_2$ và $TA_3$ vì $P$ nằm trên đường đối trung ứng với đỉnh $A_2, A_3$ của các tam giác $A_1A_2A_3$ và $A_2A_3A_4$.

Nhưng điều này vô lý vì khi đó $P$ nằm ngoài $\widehat{A_3A_4A_5}$ mà $T$ lại nằm trên đường đối trung ứng với đỉnh $A_4$ của tam giác $A_3A_4A_5$. Vậy $P$ nằm trong $(O)$.

Gọi $\omega_j$ là đường tròn Apollonius ứng với đỉnh $A_j$ của tam giác $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ $\left(j=\overline{1;n}\right)$.

Ta có $P_{P/\omega_j} = \overline{PA_j}\cdot\overline{PX_j} < 0$ và $P_{O/\omega_j} = OA_j^2 > 0$ nên ta thu được các đường tròn $\omega_j$ nhận $OP$ làm trục đẳng phương và cắt nhau tại hai điểm trên $OP$. Gọi $J$ là một trong hai điểm đó.

Gọi $f$ là phép nghịch đảo tâm $J$, phương tích $k>0$ bất kì.

Giả sử $f\left(A_j\right) = B_j$ $\left(j=\overline{1;n}\right)$.

Do $A_1A_2...A_n$ nội tiếp nên $B_1B_2...B_n$ nội tiếp.

Đồng thời

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{kA_1A_2}{JA_1\cdot JA_2} : \frac{kA_2A_3}{JA_2\cdot JA_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{JA_3}{JA_2} = 1.$$

Chứng minh tương tự ta thu được:

$$B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n = B_nB_1.$$

Suy ra $B_1B_2...B_n$ là $n$-giác đều.

*Chiều đảo.*

Giả sử tồn tại phép nghịch đảo tâm $J$ biến $A_1A_2...A_n$ thành $n$-giác đều. Chứng minh tương tự chiều thuận, ta thu được $J$ là giao của các đường tròn $\omega_j$ $\left(j=\overline{1;n}\right)$.

Do $P_{O/\omega_j} = OA_j^2 = R_{(O)}^2$ nên phương tích của $O$ tới các đường tròn $\omega_j$ đều bằng nhau. Suy ra $OJ$ là trục đẳng phương của các đường tròn $\omega_j$ $\left(j=\overline{1;n}\right)$.

Gọi $X_j$ là giao điểm khác $A_j$ của $\omega_j$ với $(O)$ thì các đường thẳng $A_jX_j$ đồng quy tại $P$ nằm trên $OJ$.

Gọi $M_j$ là trung điểm của $A_jX_j$. Ta thu được $M_1, M_2, ..., M_n$ đều nằm trên đường tròn đường kính $OP$.

Gọi $K$ là giao điểm khác $M_2$ của $\left(A_2A_3M_2\right)$ với đường tròn đường kính $OP$.

Từ đó:

$$\left(M_3A_3, M_3K\right) \equiv \left(M_3P, M_3K\right) \equiv \left(M_2P, M_2K\right)$$
$$\equiv \left(A_3A_2, A_3K\right) (\bmod \pi).$$

Suy ra $\left(KM_3A_3\right)$ tiếp xúc với $A_2A_3$. Suy ra $K \in \left(M_3A_3A_4\right)$.

Ta có $\left(A_2A_3M_2\right)$ tiếp xúc với $A_2A_1$ và $\left(M_3A_3A_4\right)$ tiếp xúc với $A_4A_5$ nên

$$\widehat{KA_2A_1} = \widehat{KA_3A_2} = \widehat{KA_4A_3}.$$

Chứng minh tương tự ta thu được:

$$\widehat{KA_2A_1} = \widehat{KA_3A_2} = ... = \widehat{KA_nA_{n-1}} = \widehat{KA_1A_n}.$$

***Nhận xét.*** Ta thấy:

$$\widehat{KOP} = \widehat{KM_3P} = \widehat{KA_4A_3},$$

tương tự tính chất 2 của điểm Brocard của tam giác.

Hoàn toàn tương tự, với điều kiện tồn tại phép nghịch đảo biến các đỉnh của $n$-giác thành các đỉnh của một $n$-giác đều, ta cũng thấy rằng tồn tại điểm $L$ nằm trong $n$-giác $A_1A_2...A_n$ sao cho

$$\widehat{LA_1A_2} = \widehat{LA_2A_3} = ... = \widehat{LA_{n-1}A_n} = \widehat{LA_nA_1}.$$

Cuối cùng ta sẽ chỉ ra các góc ở trên ứng với hai điểm $K, L$ đều bằng nhau để thu được góc Brocard của $n$-giác nội tiếp. Nhưng trước khi chứng minh điều này, ta đến với một tính chất khác của điểm $K$.

**Tính chất 7.** *Tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $KA_1A_2$, $KA_2A_3, ..., KA_{n-1}A_n$, $KA_nA_1$ đồng viên.*

***Chứng minh.*** Gọi $(O_i)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $KA_iA_{i+1}$ ($i = \overline{1;n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$).

Gọi $R$ là giao điểm của $A_1A_2$ và $A_3A_4$, $S$ là giao điểm của $A_2A_3$ và $A_4A_5$. Khi đó $RK$, $SK$ lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(O_1), (O_3)$ và $(O_2), (O_4)$.

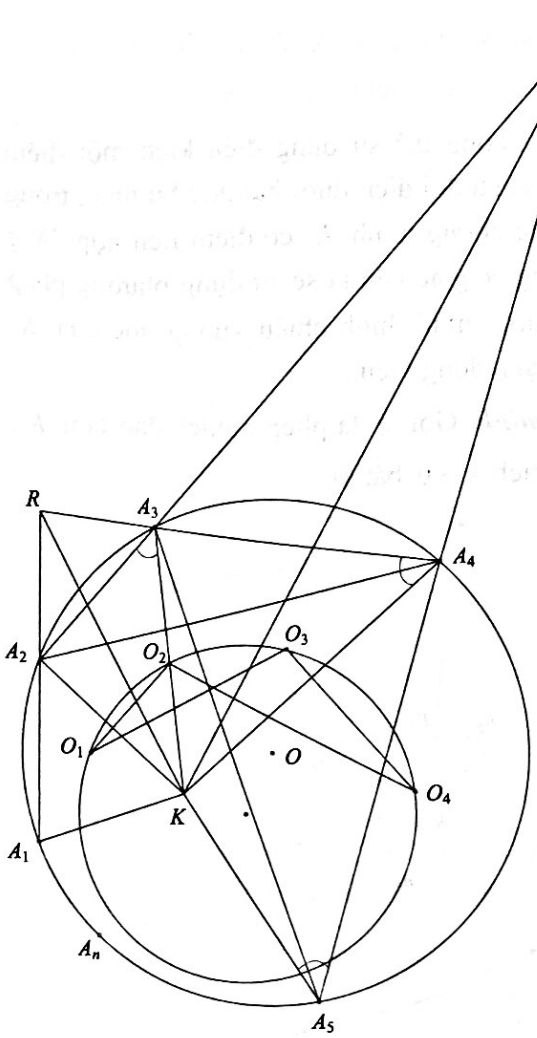
Ta thu được:

$$O_1O_3 \perp RK, O_2O_4 \perp SK.$$

Mà $O_1O_2 \perp A_2K$, $O_3O_4 \perp A_4K$ nên

$$\widehat{O_2O_1O_3} = \widehat{A_2KR},$$

$$\widehat{O_2O_4O_3} = \widehat{A_4KS}.$$




Mặt khác, $\widehat{KA_2A_1} = \widehat{KA_4A_3}$ nên tứ giác $RA_2KA_4$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{RKA_2} = \widehat{A_2A_4A_3}$.

Tương tự ta cũng có tứ giác $A_3SA_5K$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{KSA_4} = \widehat{KA_3A_5}$. Suy ra:

$$\begin{aligned}\widehat{A_4KS} &= 180^\circ - \widehat{KA_4S} - \widehat{KSA_4}\\ &= 180^\circ - \widehat{A_3A_4S} - \widehat{KA_4A_3} - \widehat{KA_3A_5}\\ &= \widehat{A_3A_4A_5} - \widehat{KA_3A_2} - \widehat{KA_3A_5}\\ &= \widehat{A_3A_4A_5} - \widehat{A_2A_3A_5} = \widehat{A_3A_4A_5} - \widehat{A_2A_4A_5}\\ &= \widehat{A_3A_4A_2}.\end{aligned}$$

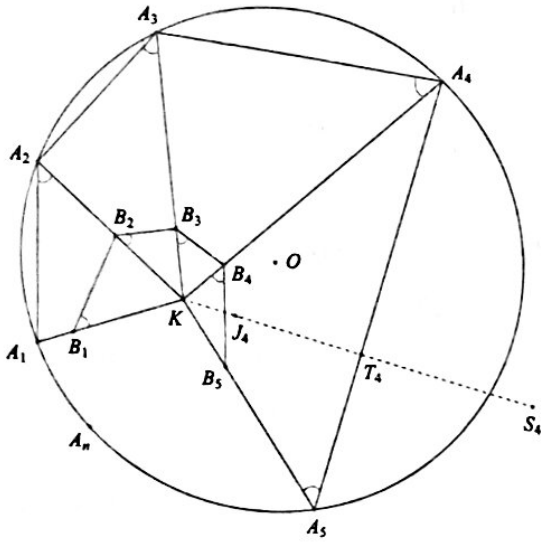
Do đó $\widehat{O_2O_1O_3} = \widehat{O_2O_4O_3}$. Suy ra $O_1, O_2, O_3, O_4$ đồng viên.

Chứng minh tương tự ta thu được $O_1, O_2, ..., O_n$ đồng viên.

**Tính chất 8.** *Hai điểm K, L là một cặp liên hợp đẳng giác trong n - giác $A_2A_2...A_n$.*

Rõ ràng không thể sử dụng điều kiện một điểm nhìn hai cạnh đối diện dưới hai góc bù nhau trong tứ giác để chứng minh $K$ có điểm liên hợp đẳng giác trong $n$-giác nên ta sẽ sử dụng phương pháp khác: chứng minh hình chiếu vuông góc của $K$ trên $n$ cạnh đồng viên.

***Chứng minh.*** Gọi $g$ là phép nghịch đảo tâm $K$, phương tích $k > 0$ bất kì.




Gọi $B_i$ là ảnh của $A_i$ qua $g$ $(i=\overline{1;n})$.

Ta có $\widehat{KB_2B_3} = \widehat{KA_3A_2}$, $\widehat{KB_3B_4} = \widehat{KA_4A_3}$ nên $\widehat{KB_3B_4} = \widehat{KB_2B_3}$. Chứng minh tương tự ta thu được $\widehat{KB_1B_2} = \widehat{KB_2B_3} = ... = \widehat{KB_{n-1}B_n} = \widehat{KB_nB_1}$ hay $K$ là điểm Brocard của $B_1B_2...B_n$. Đồng thời do $n$ - giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp nên $n$-giác $B_1B_2...B_n$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự tính chất 7 ta thu được tâm của $(KB_1B_2)$, $(KB_2B_3)$,..., $(KB_{n-1}B_n)$, $(KB_nB_1)$ đồng viên.

Gọi $J_i$ là tâm của $(KB_iB_{i+1})$, $T_i$ là hình chiếu của $K$ trên $A_iA_{i+1}$, $S_i$ là điểm đối xứng với $K$ qua $A_iA_{i+1}$ $(i=\overline{1;n})$.

Phép vị tự tâm $K$, tỉ số 2 biến các điểm $T_i$ thành $S_i$ nên $T_1,T_2,...,T_n$ đồng viên khi và chỉ khi $S_1,S_2,...,S_n$ đồng viên.

Tuy nhiên $g(S_i) = J_i$ mà $J_1,J_2,...,J_n$ đồng viên nên điều này hiển nhiên đúng.

Vậy hình chiếu của $K$ trên các cạnh của $n$-giác $A_1A_2...A_n$ cùng thuộc một đường tròn có tâm $I$. Gọi $L$ là điểm đối xứng với $K$ qua $I$ thì $L$ chính là điểm liên hợp đẳng giác của $K$ trong $n$-giác $A_1A_2...A_n$.

***Nhận xét.*** Ta đặt $\Omega = \widehat{KA_2A_1} = \widehat{KA_3A_2} = ...$

$$= \widehat{KA_1A_n} = \widehat{LA_1A_2} = \widehat{LA_2A_3} = ... = \widehat{LA_nA_1}$$

là góc Brocard của $n$ - giác $A_1A_2...A_n$.

Rõ ràng hai điểm $L,K$ đều nằm trên đường tròn đường kính $OP$ như trong tính chất 6 và $\widehat{KOP} = \widehat{LOP} = \Omega$.

Để kết thúc, mời bạn đọc thử chứng minh một tính chất khác khá thú vị như sau.

**Tính chất 9.** *Cho n - giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp (O) có P là tâm của phép nghịch đảo biến các đỉnh của $A_1A_2...A_n$ thành các đỉnh của một n - giác đều. Gọi $T_i$ là điểm isodynamic thứ nhất của tam giác $A_iPA_{i+1}$ $(i=\overline{1;n},\ P_{n+1} \equiv P_1)$. Khi đó $T_1,T_2,...,T_n$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm nằm trên OP.*

Để chứng minh kết quả này, bạn đọc có thể sử dụng phép nghịch đảo tâm $P$ phương tích $k > 0$ bất kỳ. Khi đó các điểm $T_i, A_i, A_{i+1}$ biến thành các đỉnh của một tam giác đều.

## References


1. Honsberger. R, *The Brocard Points*, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 98-124, 1995.

2. *Brocard points*, Wolfram Mathworld. https://mathworld.wolfram.com/BrocardPoints.html

3. *Isodynamic points*, Wolfram Mathworld. https://mathworld.wolfram.com/IsodynamicPoints.html

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 77

**PROBLEM.** *On a production line making electronic devices, the probability of a randomly chosen device not meeting the standard is 0.045. A random sample of 200 devices is checked. Find a formula for the probability that there are more than 190 devices which meet the standard.*

***Solution.*** Let $X$ be the number of devices which meet the standard among the sample. We need to find $P(X > 190)$. We have

$$P(X>190)=P(X=191)+P(X=192)+\ldots+P(X=200)$$

$$=C_{200}^{191}\times(0.045)^{9}\times(0.955)^{191}+C_{200}^{192}\times(0.045)^{8}\times(0.955)^{192}+\ldots+C_{200}^{199}\times(0.045)\times(0.955)^{199}+(0.955)^{200}.$$

***Remark:*** In practice, it might not be convenient to calculate directly a sum with many terms like above. We have a method, called the normal approximation, to estimate such sums.

### TỪ VỰNG

| | |
|---|---|
| *randomly* | *: một cách ngẫu nhiên* |
| *sample* | *: mẫu chọn* |
| *normal approximation* | *: xấp xỉ (bởi) phân bố chuẩn* |

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

---

## BÀI DỊCH SỐ 74

BÀI TOÁN. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n$, tích $P = n(n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6.*

***Lời giải.*** Ta sẽ chứng minh rằng $P$ chia hết cho 2 và 3 và như thế nó chia hết cho 6.

Trong hai số $n$ hoặc $n + 1$ phải có một số chẵn. Vì vậy $P$ chia hết cho 2.

+) Nếu $n$ chia hết cho 3 thì $P$ cũng chia hết cho 3.

+) Nếu $n = 3m + 1$, với $m$ là số tự nhiên thì $n + 2$ chia hết cho 3. Và $2n + 1$ cũng chia hết cho 3, do $2n + 1 = 2(n + 2) - 3$. Từ đó $P$ là bội của 3.

+) Nếu $n = 3m + 2$, với $m$ là số tự nhiên thì $n + 1$ chia hết cho 3. Do đó $P$ là bội của 3. Vì vậy $P$ chia hết cho 2 và 3. Phép chứng minh của ta đã hoàn thành.

***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Cao Thị Khánh Chi*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

**HỒ HẢI** (*Hà Nội*)

## NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

**BÀI TOÁN 56.** *Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

***Lời giải. Cách 1.***

Đặt $\begin{cases} x=\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} \\ y=\sqrt{b^2+c^2}\ge\dfrac{b+c}{\sqrt{2}} \\ z=\sqrt{c^2+a^2}\ge\dfrac{c+a}{\sqrt{2}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=\dfrac{x^2-y^2+z^2}{2} \\ b^2=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2} \\ c^2=\dfrac{-x^2+y^2+z^2}{2} \end{cases}$

Do đó: $\dfrac{2a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{x^2-y^2+z^2}{y}$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)+\left(z^2+y^2\right)-3y^2}{y}\ge\frac{2xy+2yz-3y^2}{y}.$$

Suy ra: $\dfrac{2a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\ge 2x+2z-3y$. Tương tự:

$$\frac{2b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge 2x+2y-3z,\ \frac{2c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 2y+2z-3x.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{2a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{2b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{2c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge x+y+z$$

$$\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}}.$$

Vậy: $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\dfrac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

***Cách 2.*** Gọi vế trái của BĐT trong bài toán là $P$. Theo bất đẳng thức Schwarz ta được:

$$P=\frac{a^4}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^4}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^4}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{c^2+a^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\left(a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{c^2+a^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

$$\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+a^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right]$$

$$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\le\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3$$

$$\Rightarrow\left(a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{c^2+a^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$$

Suy ra: $P\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}}=\dfrac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\sqrt{2}}$

$$\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

***Cách 3.*** Bài toán đề ra tương đương với các bất đẳng thức sau

$$\frac{\sqrt{2}a^2-b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}.\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{2}b^2-c\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{2}.\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\sqrt{2}c^2-a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}\ge 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}a^2-b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{2}b^2-c\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\sqrt{2}c^2-a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 0\ (*).$$

Vì bất đẳng thức đề ra là bất đẳng thức đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c>0$, khi đó:

$$\begin{cases}\sqrt{2}a^2-b\sqrt{b^2+c^2}\ge 0\ge\sqrt{2}c^2-a\sqrt{a^2+b^2} \\ 0<\sqrt{b^2+c^2}\le\sqrt{c^2+a^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}a^2-b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\ge\frac{\sqrt{2}a^2-b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}\quad(1);$$

$$\frac{\sqrt{2}b^2-c\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2}b^2-c\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}\quad(2);$$

$$\frac{\sqrt{2}c^2 - a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \ge \frac{\sqrt{2}c^2 - a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+a^2}} \quad (3).$$

Cộng vế với vế của (1),(2),(3) và đặt vế trái của (*) là $Q$ ta được:

$$Q \ge \frac{\sqrt{2}a^2 - b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{2}b^2 - c\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{2}c^2 - a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}.$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(b\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{c^2+a^2}}.$$

Tiếp tục ta chứng minh:

$$\sqrt{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(b\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{a^2+b^2}\right) \ge 0$$

hay $\sqrt{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \left(b\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunyakovsky thì:

$$\left(b^2+c^2+a^2\right)\left[\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right] \ge \left(b\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2.$$

Do đó: $\sqrt{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \left(b\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

Suy ra $Q \ge 0$.

Vậy $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \ge \dfrac{a+b+c}{\sqrt{2}}$.

***Cách 4.*** Không mất tổng quát ta giả sử:

$$a \ge b \ge c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev với hai dãy đơn điệu cùng giảm trên ta được:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= a^2.\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + b^2.\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + c^2.\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Lại có: $\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\ge \frac{9}{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{a^2+b^2}}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunyakovsky thì

$$\left(\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \le 6\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Do đó:

$$\frac{9}{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{a^2+b^2}} \ge \frac{9}{\sqrt{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\ge \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\sqrt{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\ge \frac{3}{\sqrt{6}}.\frac{a+b+c}{\sqrt{3}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \ge \dfrac{a+b+c}{\sqrt{2}}$.

**ĐÀO VĂN NAM**

*(GV Trường TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, Hà Nội)*

***Nhận xét.*** Ngoài 4 cách giải nêu trên của bạn *Đào Văn Nam*, người giới thiệu bài toán 56, Tòa soạn cũng nhận được một số cách giải tương tự như những cách trên từ các bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Hoàng Minh Dũng*, tổ 5A, tổ dân phố 2, phường Đông Sơn, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Nguyễn Hoàng Ngọc*, 11 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

**LÊ MAI** *(Hà Nội)*

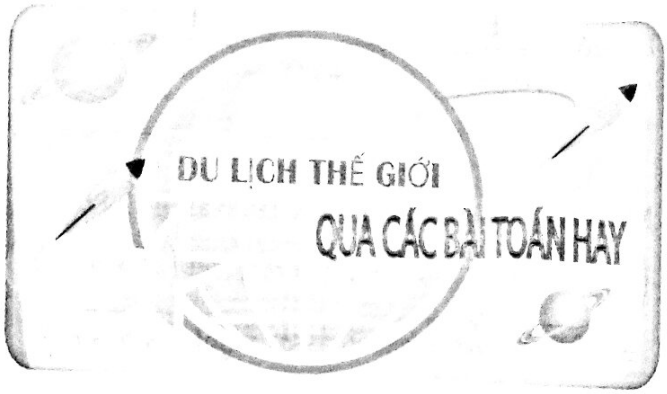
Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 58 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.3.2022.

**BÀI TOÁN 58.** *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \ge \frac{x+y+z}{3}.$$

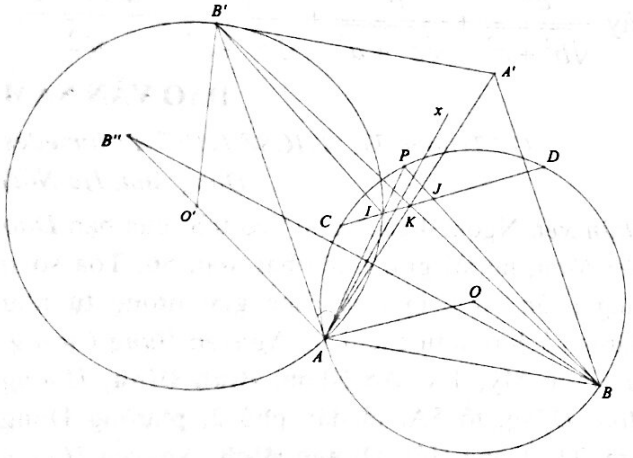
**NGÔ VĂN THÁI**

*(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)*




**BÀI TOÁN 65 (Vô địch Toán Quốc gia Hungary, 1997).** *Gọi AB và CD là hai dây cung không cắt nhau của một đường tròn, cho K là điểm nằm trên dây CD. Chỉ bằng thước và compa, hãy dựng một điểm P trên đường tròn sao cho K là trung điểm của phần đoạn thẳng nằm trong tam giác ABP của dây CD.*

***Lời giải.*** (Theo lời giải của bạn *Trần Văn Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Hưng yên, **Hưng Yên**)




Lấy $A'$, $B'$ lần lượt đối xứng với $A$, $B$ qua $K$. Vẽ phân giác $Ax$ của góc $\widehat{B'AO}$. Gọi $O'$ là giao điểm đường trung của đoạn $AB'$ với $AB''$.

Dựng đường tròn tâm $O'$ bán kính $O'A$. Đường tròn này cắt $CD$ tại $I$ ($I$ nằm trong đường tròn $(O)$). Khi đó $AI$ sẽ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm $I$ cần tìm. Thật vậy, do $Ax$ là phân giác của góc $\widehat{B'AO}$ và $B$, $B''$ đối xứng với nhau qua $Ax$ nên $\widehat{O'AB'} = \widehat{OAB}$. Do đó hai tam giác cân $AO'B'$ và $AOB$ có hai góc ở đỉnh bằng nhau: $\widehat{AO'B'} = \widehat{AOB}$.

Ta có: $\widehat{AIB'} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB'} = \frac{1}{2}(360^0 - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AnB'})$

$= 180^0 - \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AnB'} = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{AO'B'}$

$\Rightarrow \widehat{AO'B'} + 2\widehat{AIB'} = 180^0.$

Mặt khác: $\widehat{AO'B'} = \widehat{AOB} = 2\widehat{APB}$. Do đó:

$2\widehat{APB} + 2\widehat{AIB'} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{APB} + \widehat{AIB'} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{B'IP} \Rightarrow B'I \,//\, PB.$

Gọi $J$ là giao điểm của $BP$ và $CD$, ta có:

$$\frac{KI}{KJ} = \frac{KB'}{KB} = 1 \Leftrightarrow KI = KJ.$$

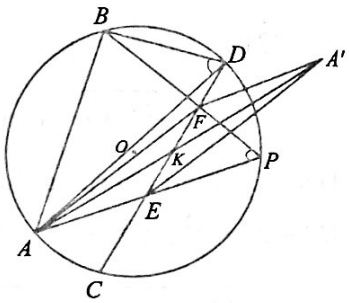
***Cách 2.*** (Của bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**)

*Phân tích.* Giả sử điểm $P$ đã dựng được. Gọi

$E = PA \cap CD$,

$F = PB \cap CD$,

$A' = Đ_K(A)$,




suy ra $AEA'F$ là hình bình hành. Ta có:

$\widehat{A'FB} = \widehat{A'FD} + \widehat{DFB} = \widehat{PEF} + \widehat{EFB}$

$= 180^0 - \widehat{APB} = 180^0 - \widehat{ADB} = \alpha$ không đổi.

Do đó $F$ là giao điểm của đoạn $CD$ và cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $A'B$. Từ đó ta tìm được điểm $P$.

Phần cách dựng, chứng minh và biện luận dành cho bạn đọc.

***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn *Quân* và *Thanh* tham gia giải bài này và cách giải của hai bạn khác với đáp án của kỳ thi. Xin hoan nghênh hai bạn.

**NHƯ HOÀNG**

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2022.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI TOÁN 67.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương m, n sao cho* $\frac{n^3+1}{mn-1}$ *là số nguyên.*

**KHÁNH HỮU** (*Hà Nội*)


## GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

***(Đề đăng trên TH&TT số 532, tháng 10 năm 2021)***

***Phân tích sai lầm.*** Lời giải của bạn *Mạnh* đã sai lầm khi khẳng định: $y''(\pi + k2\pi) = 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại các điểm $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

***Lời giải đúng.*** Ta có:

$y' = 2\cos^2 x + \cos x - 1$, $y'' = -2\sin 2x - \sin x$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• Xét các điểm $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Vì hàm số có tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$ nên ta chỉ cần xét cực trị của 1 điểm bất kì trong các điểm trên. Chẳng hạn, $x = \pi$ (khi $k = 0$).

| $x$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | |

$\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại các điểm $x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

• $y''\left(\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

• $y''(-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và

$$y_{CT} = y\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện ra sai lầm trong lời giải bài toán.

**KIHIVI**

## LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Trong giờ luyện tập biến đổi căn thức thầy giáo cho bài toán: *Rút gọn biểu thức*

$$P = \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}}.\sqrt[6]{1 - a\sqrt{2 - a^2}}}{\sqrt[3]{1 - a^2}}.$$

Một học sinh đã có lời giải như sau:

Điều kiện để $P$ xác định là:

$$\begin{cases} 2 - a^2 \ge 0 \\ a \ne \pm 1 \\ 1 \ge a\sqrt{2 - a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne |a| \le \sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \le a \le 0 \\ \begin{cases} 0 < a \le \sqrt{2} \\ 1 \ge a^2(2 - a^2) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne |a| \le \sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \le a \le 0 \\ \begin{cases} 0 < a \le \sqrt{2} \\ \forall a \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 \ne |a| \le \sqrt{2}.$$

Khi đó: $$P = \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}}.\sqrt[6]{1 - a\sqrt{2 - a^2}}}{\sqrt[3]{1 - a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(a + \sqrt{2 - a^2})^2}.\sqrt[6]{2 - 2a\sqrt{2 - a^2}}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{1 - a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(a + \sqrt{2 - a^2})^2}.\sqrt[6]{(a - \sqrt{2 - a^2})^2}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{1 - a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(a + \sqrt{2 - a^2})^2(a - \sqrt{2 - a^2})^2}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{1 - a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{4}\sqrt[6]{(1 - a^2)^2}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{1 - a^2}} = \frac{\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{1 - a^2}}{\sqrt[3]{1 - a^2}} = \sqrt[6]{2}.$$

Vậy $P = \sqrt[6]{2}$.

***Theo em lời giải trên có đúng không?***

**NGUYỄN THANH GIANG**

*(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)*

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 536 (2.2022)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



## TRONG SỐ NÀY



***Biên tập:*** LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành:*** HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản:*** MINH HÒA

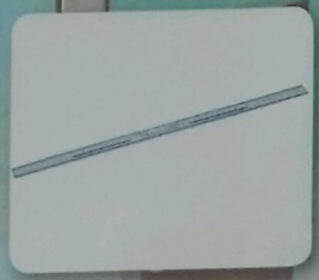
**Sau đây là một số hình ảnh sản phẩm mẫu thiết bị dạy học lớp 10 mang thương hiệu NXBGDVN sản xuất theo Chương trình GDPT 2018:**

## 1. Môn Toán

Conic

Hộp xác suất thống kê

Compa



Thước thẳng

## 2. Môn Mĩ thuật

Bàn ghế học mĩ thuật

Bảng vẽ

Mẫu vẽ

## 3. Môn Sinh học

Máy cất nước 1 lần

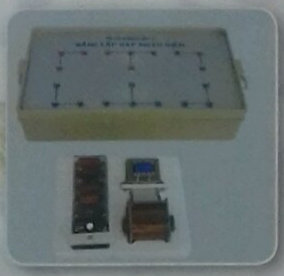
Bộ đồ mổ

Tiêu bản

## 4. Môn Vật lí

Truyền âm

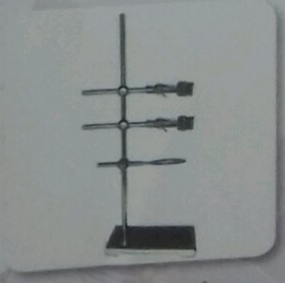
Điện tích



Xoay chiều

## 5. Môn Hóa học

Bộ thiết bị đo gia tốc rơi tự do



Bộ giá đỡ cơ bản

Khay đựng dung cụ thí nghiệm

# GIỚI THIỆU THIẾT BỊ DẠY HỌC LỚP 10

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam là đơn vị trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo có nhiệm vụ tổ chức biên soạn, in ấn, sản xuất và phát hành các sản phẩm sách giáo khoa, sách tham khảo, sách điện tử, thiết bị giáo dục phục vụ giảng dạy, học tập ở các cấp, bậc học trên toàn quốc.

Với bề dày hơn 60 năm thực hiện nhiệm vụ chính trị phục vụ ngành Giáo dục, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ trong các lần đổi mới chương trình và thay sách giáo khoa do Bộ Giáo dục và Đào tạo phân công. Các sản phẩm giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam luôn có được sự tín nhiệm, tin cậy của nhiều thế hệ học sinh, phụ huynh và giáo viên trên mọi miền tổ quốc.

Thực hiện nhiệm vụ đổi mới chương trình sách giáo khoa giáo dục phổ thông, bên cạnh việc biên soạn các bộ sách giáo khoa đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt; Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam căn cứ vào quy định Thông tư về Danh mục thiết bị dạy học tối thiểu cấp THPT của Bộ Giáo dục và Đào tạo, căn cứ vào triết lí, nội dung, đặc điểm của các bộ sách giáo khoa để tổ chức thiết kế và sản xuất các sản phẩm Thiết bị dạy học lớp 10 mới dùng chung cho các bộ sách giáo khoa.

Để chuẩn bị phục vụ công tác dạy và học cho GV và HS trên mọi miền tổ quốc năm học 2022 – 2023 và những năm tiếp theo. NXBGDVN với hơn 35 năm kinh nghiệm trong sản xuất và kinh doanh thiết bị giáo dục, cùng với đội ngũ chuyên gia giàu kinh nghiệm, họa sĩ thiết kế chuyên nghiệp và quy trình sản xuất thiết bị hiện đại đã và đang tổ chức nghiên cứu, xây dựng, sản xuất các sản phẩm TBDH theo danh mục TBDH tối thiểu dành cho các cấp học bậc học nói chung và lớp 10 nói riêng.

Lớp 10 với 15 môn học, trong đó có hoạt động trải nghiệm hướng nghiệp là môn học hoàn toàn mới mẻ với nhiều nội dung chủ đề hấp dẫn, bước đầu giáo dục hướng nghiệp cho các em học sinh chập chững bước vào bậc học THPT và đây cũng điều kiện để các em được khám phá bản thân, khám phá khả năng của chính mình. Để giúp môn học này thật bổ ích đã có rất nhiều thiết bị dạy học hỗ trợ đi kèm để GV và HS hứng thú và yêu thích hơn. Ngoài ra với hàng trăm loại sản phẩm thiết bị dạy học phục vụ, hỗ trợ cho các môn học khác nằm trong danh mục thiết bị dạy học tối thiểu lớp 10 do Bộ GDĐT quy định.

Năm học 2022 – 2023 là năm đầu tiên triển khai thực hiện thay SGK theo chương trình GDPT 2018 đối với lớp 10, đi đôi với SGK là các loại thiết bị dạy học tương ứng hỗ trợ cho các bài học của từng môn học giúp cho GV và HS tương tác với nhau nhiều hơn, khai thác và truyền tải nội dung dạy học một cách sinh động, chân thực và chất lượng, đồng thời thông qua thực hành giúp HS phát huy năng lực làm việc nhóm tạo sự say mê, hứng thú đối với môn học qua đó phát triển năng lực và sự sáng tạo, tư duy và trí nhớ được tốt hơn, các em biết vận dụng lí thuyết đưa vào thực hành trong cuộc sống. Đây là hiệu quả to lớn do thiết bị dạy học đem lại.

Với việc xác định đúng đắn hiệu quả to lớn mà TBDH đem lại cho công tác giảng dạy, học tập của GV và HS trong nhà trường. NXBGDVN đã đầu tư nhân lực, trí lực, vật lực để sản xuất TBDH phục vụ cho các cấp học, bậc học. Bộ TBDH của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đảm bảo mục đích dạy học, có tính thẩm mĩ, thân thiện với môi trường, an toàn cho người dùng, giá thành đảm bảo cạnh tranh, sản phẩm được dán tem công nghệ tích hợp chống hàng giả, hàng nhái, truy xuất nguồn gốc và hướng dẫn sử dụng thiết bị giáo dục trên bản điện tử.

*(Xem tiếp bìa 3)*

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8E [illegible]/22
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2022
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng