TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 535
Tháng 1 - 2022
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 59 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Chúc Mừng Năm Mới

Happy New Year

2022

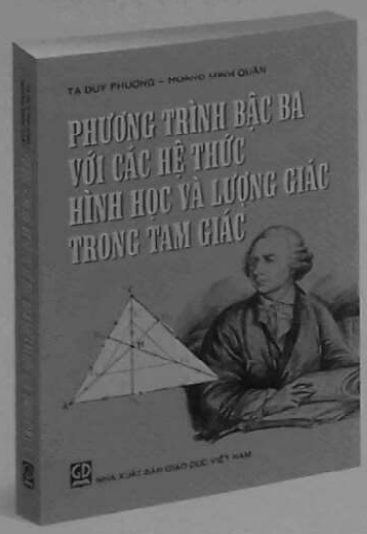
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và Chương 4 chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606

TRUNG HỌC CƠ SỞ

SỐ CHÍNH PHƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

VŨ HỮU CHÍN

(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, Hải Phòng)

Các bài toán về số chính phương học sinh được học từ năm lớp 6. Bài viết này đưa ra một số bài toán tìm số chính phương và một số ứng dụng. Để bắt đầu chúng ta nhắc lại một vài kiến thức cơ bản

1. *Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.*

2. *Số chính phương chỉ có thể tận cùng bằng* 0, 1, 4, 5, 6, 9; *không thể có tận cùng bằng* 2, 3, 7, 8.

3. *Cho a là số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì $a \vdots p^2$.*

4. *Cho a là số chính phương thì: a chia cho 3 có số dư là* 0, 1; *a chia cho 4 có số dư là* 0, 1.

5. *Không tìm được số chính phương x nếu $a^2 < x < (a+1)^2$*, với $a \in \mathbb{Z}$.

DẠNG 1. TÌM CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1.1. *Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số, biết rằng khi thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là

$$\overline{abcd}\ (a,b,c,d \in \mathbb{N}; 0 \le a,b,c,d \le 9, a \ne 0).$$

Theo đề bài $\overline{abcd} = k^2$ và

$$\overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2, (k,m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 100).$$

Suy ra: $\overline{abcd} + 1353 = m^2 \Rightarrow k^2 + 1353 = m^2$

$$\Leftrightarrow (m-k)(m+k) = 1353 = 1.1353 = 3.451 = 11.123 = 33.41.$$

Có $0 < m-k \le m+k$, ta có các trường hợp:

- $\begin{cases} m-k=1 \\ m+k=1353 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=677 \\ k=676 \end{cases}$ (loại)
- $\begin{cases} m-k=3 \\ m+k=451 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=227 \\ k=224 \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} m-k=11 \\ m+k=123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases}$ (chọn)
- $\begin{cases} m-k=33 \\ m+k=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases}$ (loại).

Vậy $\overline{abcd} = 56^2 = 3136$.

Từ bài toán trên xét bài toán tìm 2 số chính phương mà các chữ số ở mỗi hàng tương ứng của hai số cùng hơn kém một số.

Bài 1.2. *Tìm hai số chính phương A và B có 4 chữ số và các chữ số ở mỗi hàng tương ứng của A và B cùng hơn kém một số.*

Lời giải. Đặt là: $A = \overline{a_1a_2a_3a_4} = p^2$, $B = \overline{b_1b_2b_3b_4} = q^2$ ($31 < p,q < 100$). Giả sử $A > B$ và $a_i - b_i = x$, với $i \in \{1;2;3;4\}$, $x \in \{1;2;3;...;8\}$. Ta có:

$$A - B = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = \overline{xxxx} \quad (1).$$

Suy ra: $(p-q)(p+q) = 1111.x = 11.101x$ (1).

Do đó $(p-q)(p+q) \vdots 101$, mà $0 < p-q < 69$, $p+q < 200$, suy ra $p+q = 101$. Thay vào (1) suy ra: $p-q = 11.x \Rightarrow p-q \in \{11; 22; 33; 44; 55; 66\}$.

Mà $(p-q),(p+q)$ cùng tính chẵn lẻ, $p+q = 101$ nên $p-q \in \{11; 33; 55\}$. Ta có các trường hợp:

- $\begin{cases} p-q=11 \\ p+q=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=56 \\ q=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=56^2 \\ B=45^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3136 \\ B=2025 \end{cases}$ (thỏa mãn).
- $\begin{cases} p-q=33 \\ p+q=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=67 \\ q=34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=67^2 \\ B=34^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4489 \\ B=1156 \end{cases}$ (thỏa mãn).
- $\begin{cases} p-q=55 \\ p+q=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=78 \\ q=23 \end{cases}$ (loại).

Vậy $\begin{cases} A = 3136 \\ B = 2025 \end{cases}$; $\begin{cases} A = 4489 \\ B = 1156 \end{cases}$.

Bài 1.3. *Cho $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ là các số chính phương có 4 chữ số khác nhau, sao cho $\overline{dcba}$ chia hết cho $\overline{abcd}$. Tìm số $\overline{abcd}$.*

Lời giải. Đặt $\overline{abcd} = m^2\ (m \in \mathbb{N}, 31 < m < 100)$.

Do $\overline{dcba} \vdots \overline{abcd}$ nên $\overline{dcba} = m^2 t$, với $1 < t \le 9$.

Mà $\overline{dcba}$ là số chính phương. Suy ra t là số chính phương. Đặt $t = n^2, 1 < n^2 \le 9 \Rightarrow n \in \{2;3\}$. Do đó:

$$\overline{dcba} = m^2 n^2 = (mn)^2, 32 \le mn \le 99.$$

Do $n \ge 2$, nên $m < 50$. Ta có:

$$\overline{dcba} - \overline{abcd} = 999d + 90c - 90b - 999a.$$

Suy ra: $\left(\overline{dcba} - \overline{abcd}\right) \vdots 9 \Rightarrow \overline{dcba} - \overline{abcd} = m^2 n^2 - m^2$ $= m^2\left(n^2 - 1\right) \vdots 9$. Do $n \in \{2;3\} \Rightarrow m \vdots 3$. Lại có: $\left(\overline{dcba} + \overline{abcd}\right) \vdots 11 \Rightarrow \overline{dcba} + \overline{abcd} = m^2\left(n^2 + 1\right) \vdots 11$ $\Rightarrow m \vdots 11$. Vậy $m \vdots 3, m \vdots 11, m < 50$, suy ra $m = 33$. Do đó $\overline{abcd} = 33^2 = 1089$, $\overline{dcba} = 9801 = 99^2$ (thỏa mãn). Vậy số $\overline{abcd} = 1089$.

Bài 1.4. *Tìm số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ biết $\overline{abd}$ là số chính phương và nếu cộng thêm 72 vào số $\overline{abcd}$ thì được một số chính phương.*

Lời giải. Ta có một số chính phương có tận cùng là: 0; 1; 4; 5; 6; 9. Do $\overline{abd}$ là số chính phương nên $d \in \{0;1;4;5;6;9\}$ (1). Do $\overline{abcd} + 72$ là số chính phương nên

$$d + 2 \in \{0;1;4;5;6;9\} \Leftrightarrow d \in \{8;9;2;3;4;7\} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $d \in \{4;9\}$.

• TH1: $d = 4 \Rightarrow \overline{ab4} = y^2; \overline{abc4} + 72 = \overline{abc6} + 70 = x^2$.

Ta có y^2 có tận cùng 4, suy ra y có tận cùng là: 2; 8. Ta có x^2 có tận cùng 6, suy ra x có tận cùng là: 4; 6. Từ $\overline{ab4} = y^2 \Rightarrow 100 < y^2 < 1000$ $\Rightarrow 10 < y \le 31$. Do đó $y \in \{12; 18; 22; 28\}$.

- Nếu $y = 12 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow x^2 = \overline{14c6} + 70$ $\Rightarrow 1400 < x^2 < 1600 \Rightarrow 37 < x < 40$ (không thỏa mãn x có tận cùng là 4; 6).
- Nếu $y = 12 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow x^2 = \overline{14c6} + 70$ $\Rightarrow 1400 < x^2 < 1600 \Rightarrow 37 < x < 40$ (không thỏa mãn x có tận cùng là 4; 6).
- Nếu $y = 18 \Rightarrow y^2 = 324 \Rightarrow x^2 = \overline{32c6} + 70$ $\Rightarrow 3200 < x^2 < 3400 \Rightarrow 56 < x < 59$ (không thỏa mãn x có tận cùng là 4; 6).
- Nếu $y = 22 \Rightarrow y^2 = 484 \Rightarrow x^2 = \overline{48c6} + 70$ $\Rightarrow 4800 < x^2 < 5000 \Rightarrow 69 < x < 71$ (không thỏa mãn x có tận cùng là 4; 6).
- Nếu $y = 28 \Rightarrow y^2 = 784 \Rightarrow x^2 = \overline{78c6} + 70$ $\Rightarrow 7800 < x^2 < 8000 \Rightarrow 88 < x < 90$ (không thỏa mãn x có tận cùng là 4; 6).

• TH2: $d = 9 \Rightarrow \overline{ab9} = y^2; \overline{abc9} + 72 = \overline{abc1} + 80 = x^2$.

Suy ra y có tận cùng là: 3; 7. Số x có tận cùng là: 1; 9. Từ $\overline{ab9} = y^2 \Rightarrow 100 < y^2 < 1000$ $\Rightarrow 10 < y \le 31$. Do đó $y \in \{13;17;23;27\}$.

- Nếu $y = 13 \Rightarrow y^2 = 169$ và $x^2 = \overline{16c1} + 80$ $\Rightarrow 1600 < x^2 < 1800 \Rightarrow 40 < x < 43$.

Khi đó $x = 41$, suy ra $\overline{abcd} = 1609$ (thỏa mãn).

- Nếu $y = 17 \Rightarrow y^2 = 289$ và $x^2 = \overline{28c1} + 80$ $\Rightarrow 2800 < x^2 < 3000 \Rightarrow 52 < x < 55$ (không thỏa mãn).
- Nếu $y = 23 \Rightarrow y^2 = 529$ và $x^2 = \overline{52c1} + 80$ $\Rightarrow 5200 < x^2 < 5400 \Rightarrow 72 < x < 74$ (không thỏa mãn).
- Nếu $y = 27 \Rightarrow y^2 = 729$ và $x^2 = \overline{72c1} + 80$ $\Rightarrow 7200 < x^2 < 7400 \Rightarrow 84 < x < 87$ (không thỏa mãn).

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 1609$.

Bài 1.5. *Tìm số $A = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$, $(a_1 \ne 0)$ và $\overline{b_1b_2b_3} = 2.\overline{a_1a_2a_3}$ đồng thời A viết dưới dạng $p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là 4 số nguyên tố khác nhau.*

Lời giải. Số $A = \overline{a_1a_2a_3}.10^6 + \overline{b_1b_2b_3}.10^3 + \overline{a_1a_2a_3}$

$$= \overline{a_1a_2a_3}.10^6 + 2.\overline{a_1a_2a_3}.10^3 + \overline{a_1a_2a_3}$$

$$= \overline{a_1a_2a_3}.\left(10^6 + 2.10^3 + 1\right)$$

$= \overline{a_1a_2a_3}.\left(10^3+1\right)^2 = \overline{a_1a_2a_3}.7^2.11^2.13^2.$

Từ $200 \le 2.\overline{a_1a_2a_3} = \overline{b_1b_2b_3} < 1000$

$\Rightarrow 100 \le \overline{a_1a_2a_3} < 500$. Ta có 7; 11; 13 là ba số nguyên tố khác nhau. Theo đề bài suy ra $\overline{a_1a_2a_3} = p^2$, với p là số nguyên tố khác với 7;11;13. Ta có: $100 \le \overline{a_1a_2a_3} = p^2 < 500 \Rightarrow 10 < p < 23$.

Do đó $p \in \{17;19\}$.

TH1: $p = 17 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3} = 17^2 = 289 \Rightarrow \overline{b_1b_2b_3} = 578$.

TH2: $p = 19 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3} = 19^2 = 361 \Rightarrow \overline{b_1b_2b_3} = 722$.

Vậy $A \in \{289578289; 361722361\}$.

Bài 1.6. *Tìm số tự nhiên A biết rằng 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng, 1 mệnh đề sai.*

1) $A+51$ *là số chính phương.*

2) *Chữ số tận cùng về bên phải số A là chữ số 1.*

3) $A-38$ *là số chính phương.*

Lời giải. Nếu mệnh đề 2) đúng thì $A+51$ có tận cùng là 2. Suy ra $A+51$ không là số chính phương. Từ mệnh đề 2) đúng thì $A-38$ có tận cùng là 3. Do đó $A-38$ không là số chính phương. Vậy nếu mệnh đề 2) đúng thì mệnh đề 1) và 3) là sai (trái với giả thiết).

Do đó mệnh đề 2) sai, mệnh đề 1) và 3) đúng.

Đặt $A+51 = m^2, A-38 = n^2$, với $m,n \in \mathbb{Z}^+, m > n$.

Suy ra: $m^2 - n^2 = 89 \Leftrightarrow (m+n)(m-n) = 89$.

Ta có: $m+n > m-n, \left(m+n, m-n \in \mathbb{Z}^+\right)$ và 89 là số nguyên tố nên $\begin{cases} m+n=89 \\ m-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=44 \end{cases}$.

Do đó $A+51 = 45^2 \Leftrightarrow A = 1974$.

Bài 1.7. *Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0 mà 3 lần số đó bằng bình phương của tổng các chữ số của nó.*

Lời giải. Đặt $N = \overline{abc...xyz}$ (n chữ số), $(0 \le a,b,c,...,x,y,z \le 9; a \ne 0)$.

Ta có $3N = (a+b+c+...+x+y+z)^2$. Ta có:

$a+b+c+...+x+y+z \le 9n \Rightarrow 3N \le (9n)^2 \Leftrightarrow N \le 27n^2$ (*).

Nếu $n \ge 4 \Rightarrow 27n^2 \ge 27.4^2 = 432$, mà $N \ge 1000$, không thỏa mãn (*). Suy ra $n \le 3$.

• TH1: $n = 1$ thì $3a = a^2 \Rightarrow a = 3$. Suy ra $N = 3$.

• TH2: $n = 2$ thì $3.\overline{ab} = (a+b)^2 \Rightarrow (a+b) \vdots 3$.

Đặt $a+b = 3m \Rightarrow 3.\overline{ab} = 9m^2 \Leftrightarrow \overline{ab} = 3m^2$. Ta có:

$(10a+b)-(a+b) = 3m^2 - 3m \Rightarrow 9a = 3m(m-1)$

$\Rightarrow 3a = m(m-1) \Rightarrow a$ là số chẵn. Ta nhận thấy $m \le 5$ và $m \vdots 3$ hoặc $(m-1) \vdots 3$.

- Nếu $m \vdots 3 \Rightarrow m = 3$. Suy ra $\overline{ab} = 27$.

- Nếu $(m-1) \vdots 3 \Rightarrow m = 4$. Suy ra $\overline{ab} = 48$.

• TH3: $n = 3$ thì $3.\overline{abc} = (a+b+c)^2 \Rightarrow (a+b+c) \vdots 3$.

Đặt $a+b+c = 3m$. Vì $a+b+c \le 27$

$\Rightarrow 3.\overline{abc} \le 27^2 \Leftrightarrow \overline{abc} \le 243 \Rightarrow a \in \{1;2\}$.

- Nếu $a = 1 \Rightarrow 1+b+c = 3m$ (1), $\overline{1bc} = 3m^2$ (2).

Từ (1) suy ra: $3m \le 19 \Leftrightarrow m \le 6$. Từ (2) $\Rightarrow 3m^2 \ge 100 \Leftrightarrow m \ge 6$. Do đó $m = 6$. Suy ra $\overline{1bc} = 3.6^2 = 108$. Khi đó $b = 0, c = 8$ nên

$a+b+c = 1+0+8 = 9 < 3.6$ (loại).

- Nếu $a = 2 \Rightarrow 2+b+c = 3m \Rightarrow \overline{2bc} = 3m^2$

$\Rightarrow 3m^2 \ge 200 \Rightarrow m \ge 9$ (loại).

Vậy các số cần tìm là: 3; 27; 48.

Nhận xét. Để giải bài toán trước tiên ta khẳng định số cần tìm chỉ có nhiều nhất là 3 chữ số, từ đó xét các trường hợp để giải.

Bài 1.8. *Tìm 4 số tự nhiên có tính chất: Bình phương của mỗi số trong chúng cộng với ba số còn lại là số chính phương.*

Lời giải. Gọi bốn số tự nhiên cần tìm là a,b,c,d với $a \ge b \ge c \ge d$. Ta có: $x = a^2+b+c+d$,

$y = a+b^2+c+d, z = a+b+c^2+d, t = a+b+c+d^2$ là các số chính phương.

Suy ra: $a^2 < x \le a^2+3a < (a+2)^2 \Rightarrow x = (a+1)^2$.

Do đó: $x = (a+1)^2 = a^2+b+c+d$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}(b+c+d-1) < \frac{3b}{2}$ (1). Vậy:

$b^2 < y < \frac{3b}{2} + b^2 + 2b < (b+2)^2 \Rightarrow y = (b+1)^2$.

Suy ra: $y = (b+1)^2 = a+b^2+c+d \Rightarrow b = \frac{1}{2}.(a+c+d-1)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a=b=c+d-1$ (3).

• TH1: $d=1 \Rightarrow a=b=c, z=(a+1)^2$. Suy ra $t=3a+1$ là số chính phương, thì $t=3a+1=(3k\pm1)^2$. Suy ra:

$$a=b=c=3k^2\pm2k, k\in\mathbb{N}.$$

• TH2: $d>1$.

Ta có: $c\le a<2c$ (do $a=b=c+d-1<2c$). Lại có $(c+1)^2=c^2+2c+1<z<c^2+2c+2c+c<(c+3)^2$, suy ra: $z=(c+2)^2=c^2+4c+4=a+b+c^2+d$ $\Leftrightarrow 2a+d=4c+4$. Kết hợp với (3) ta có:

$$\begin{cases}a=c+d-1\\2a+d=4c+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c+d-1\\2(c+d-1)+d=4c+4\end{cases}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{5d}{2}-4, c=\dfrac{3d}{2}-3$. Do $a,c\in\mathbb{N}\Rightarrow d=2p$ $\Rightarrow a=5p-4, c=3p-3$. Do $a\ge c\ge d$ $\Rightarrow 5p-4\ge 3p-3\ge d=2p\Rightarrow p\ge3$. Ta có:

$$z=2a+c+d^2=2.(5p-4)+3p-3+4p^2$$
$$=4p^2+13p-11\ge(2p+2)^2.$$

Lại có $4p^2+13p-11<(2p+4)^2$. Do đó $(2p+2)^2\le z<(2p+4)^2$. Ta có các trường hợp:

+ Với $z=4p^2+13p-11=(2p+2)^2\Rightarrow p=3$.

Khi đó $a=b=11, c=d=6$.

+ Với $z=4p^2+13p-11=(2p+3)^2\Rightarrow p=20$.

Khi đó $a=b=96, c=57, d=40$.

Kết luận: Các bộ (a,b,c,d) cần tìm là:

$(3k^2+2k;3k^2+2k;3k^2+2k;1)$;

$(3k^2-2k;3k^2-2k;3k^2-2k;1)$; $(11;11;6;6)$;

$(96;96;57;40)$ và các hoán vị của nó ($k\in\mathbb{N}$).

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán khó, do vai trò của 4 số chính phương như nhau nên ta có thể giả thiết 4 số đó sắp xếp được theo thứ tự. Từ đó ta xét các trường hợp của d. Trong lời giải bài toán ta đã sử dụng tính chất của số chính phương là: Nếu x là số chính phương mà $n^2<x<(n+2)^2, n\in\mathbb{N}$ thì $x=(n+1)^2$.

Bài 1.9. *Tìm 11 số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của chúng là một số chính phương nhỏ hơn 10000.*

Lời giải. Gọi 11 số tự nhiên liên tiếp là: $n-5$, $n-4, n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4$, $n+5$ ($n\in\mathbb{N}, n\ge5$). Ta có:

$$S=(n-5)^2+(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2$$
$$+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2$$
$$=11(n^2+10).$$ Ta có: $S<10000\Rightarrow 11(n^2+10)<10000$

$$\Rightarrow n^2<\frac{10000}{11}-10\Rightarrow n\le29.$$

S là số chính phương $\Leftrightarrow n^2+10=11q^2$ ($q\in\mathbb{N}^*$).

Suy ra: $q^2=(n^2+10)\vdots11$ (*).

Ta có: $n^2+10=n^2-1+11\vdots11\Leftrightarrow(n-1)(n+1)\vdots11$.

Do đó $(n-1)\vdots11$ hoặc $(n+1)\vdots11$. Suy ra $n=11k+1$ hoặc $n=11t-1$, $(k,t\in\mathbb{N}^*)$.

• TH1: $n=11k+1$, $n\le29$. Suy ra $n\in\{12;23\}$.

+ Thay $n=12$ vào (*) không thỏa mãn.

+ Thay $n=23$ vào (*) tìm được $q=7$. Suy ra:

$$S=5929=77^2<10000.$$

• TH2: $n=11t-1$, $n\le29$. Suy ra $n\in\{10;21\}$.

Thay $n=10; n=21$ vào (*) không thỏa mãn.

Vậy $n=23$, tìm được 11 số tự nhiên liên tiếp là: 18; 19; 20; ..... ; 28.

Nhận xét. Trong bài toán này ta đã đặt 11 số tự nhiên liên tiếp một cách phù hợp, giới hạn giá trị cần tìm, từ đó xét các trường hợp để giải bài toán.

DẠNG 2. CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG HOẶC KHÔNG LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 2.1. *Chứng minh rằng với số nguyên dương $n\ge6$ thì số $a_n=1+\dfrac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)(n+7)....(2n)}$ là một số chính phương.*

Lời giải. Ta có: $a_n=1+\dfrac{2^n.[1.3.5....(2n-1)]}{(n+5)(n+6)(n+7)....(2n)}$

$$=1+\frac{2^n.(2n)!}{[2.4.6....(2n)](n+5)(n+6)(n+7)....(2n)}$$

$$a_n = 1 + \frac{(2n)!}{n!(n+5)(n+6)(n+7)....(2n)}$$
$$= 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$= 1 + (n^2+5n+4)(n^2+5n+6) = (n^2+5n+5)^2.$$

Vậy a_n là số chính phương.

Bài 2.2. *Cho a,b,c,d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn*

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6.$$

Chứng minh rằng $A = abcd$ là số chính phương.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$$
$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0$$
$$\Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$$
$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0 \Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd$$

Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương.

Bài 2.3. *Cho a,b,c là ba số phân biệt. Chứng minh rằng giá trị của của biểu thức sau là số chính phương*

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Lời giải. Cách 1.

$$P(x) = \frac{x^2-(a+b)x+ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{x^2-(b+c)x+bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{x^2-(c+a)x+ca}{(b-c)(b-a)} = Ax^2 - Bx + C$$

với $A = \frac{1}{(c-a)(c-b)} + \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} = 0;$

$$B = \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} + \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)}$$
$$= \frac{b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0;$$

$$C = \frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)}$$
$$= \frac{-ab(a-b)-bc(b-c)-ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1.$$

Vậy $P(x) = 1 = 1^2$ với mọi x. Do đó $P(x)$ có giá trị là số chính phương.

Cách 2. Xét đa thức

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} - 1.$$

Ta có $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, do đó $f(x)$ có ba nghiệm phân biệt a,b,c (a,b,c đôi một khác nhau). Nhưng $f(x)$ là đa thức bậc 2 nên $f(x)$ phải là đa thức 0. Do đó: $f(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 1, \forall x$. Vậy $P(x)$ có giá trị là số chính phương.

Nhận xét. Trong cách giải 2, ta đã sử dụng tính chất nghiệm của đa thức: *Một đã thức bậc n thì có không quá n nghiệm (kể cả nghiệm bội). Do đó nếu đa thức bậc n có n + 1 nghiệm thì đa thức đó là đa thức 0.*

Bài 2.4. *Cho hai số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh rằng a và b là hai số chính phương liên tiếp.*

Lời giải. Ta có: $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b = 4b \Leftrightarrow (b-a+1)^2 = 4b.$$

Suy ra: $(b-a+1)^2 \vdots 4 \Rightarrow (b-a+1) \vdots 2 \Rightarrow \frac{b-a+1}{2}$ là số nguyên. Do đó $b = \left(\frac{b-a+1}{2}\right)^2$ là số chính phương. Chứng minh tương tự có $a = \left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a-1}{2}\right)^2$ cũng là số chính phương. Lại có $\frac{b-a+1}{2} - \frac{b-a-1}{2} = 1$. Suy ra a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 2.5. *Cho a,b,c là các số nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng các số $a+b$ và abc đồng thời là các số chính phương.*

Lời giải. Từ giả thiết suy ra: $c(a+b)=ab$

$\Leftrightarrow ab-ac-bc+c^2=c^2 \Leftrightarrow (a-c)(b-c)=c^2$ (1).

Từ giả thiết suy ra $a>c, b>c$ nên $a-c>0, b-c>0$. Đặt ƯCLN$(a-c,b-c)=d$. Giả sử $d>1$. Suy ra: $a-c \vdots d, b-c \vdots d \Rightarrow (a-c)(b-c) \vdots d^2$.

Từ (1) suy ra: $c^2 \vdots d^2 \Rightarrow c \vdots d$, do đó a và b cùng chia hết cho d. Điều này trái với đề bài. Vậy $d=1$, do đó hai số $a-c, b-c$ là hai số nguyên tố cùng nhau, nên từ (1) suy ra $a-c, b-c$ là hai số chính phương.

Đặt $a-c=k^2, b-c=m^2, (k,m \in \mathbb{N}^*)$. Từ (1) suy ra $c^2=k^2m^2 \Leftrightarrow c=km$. Do đó:

$$a+b=(a-c)+(b-c)+2c=k^2+m^2+2km=(k+m)^2$$

là số chính phương. Suy ra $abc=c^2(a+b)=c^2(k+m)^2$ là số chính phương.

Nhận xét. Lời giải bài toán đã dựa vào tính chất: *Nếu a và b là hai số nguyên tố cùng nhau mà $ab=m^2, m \in \mathbb{N}$ thì a,b đều là số chính phương.*

Bài 2.6. *Với bộ 3 số (2; 5; 13) có tính chất: Tích hai số bất kỳ trừ 1 là số chính phương. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương d để bộ 4 số (2; 5; 13; d) có tính chất trên.*

Lời giải. Vì $2.5-1=3^2, 2.13-1=5^2, 5.13-1=8^2$, ta khẳng định không tìm được số nguyên dương d sao cho các số

$$x=2d-1, y=5d-1, z=13d-1$$

đều là số chính phương. Xét các trường hợp:

- TH1: $d \equiv 0,2 \pmod 4 \Rightarrow x=2d-1 \equiv 3 \pmod 4$, suy ra x không là số chính phương.
- TH2: $d \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow y=5d-1 \equiv 2 \pmod 4$, suy ra y không là số chính phương.
- TH3: $d \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow d=4k+1 \Rightarrow x=8k+1$, $y=4(5k+1), z=4(13k+3), k \in \mathbb{N}$. Giả sử x,y,z đều là số chính phương. Suy ra $8k+1; 5k+1; 13k+3$ đều là số chính phương.

Đặt $a^2=8k+1, b^2=5k+1, c^2=13k+3$, $(a,b,c \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra: $a^2+b^2=c^2-1$. Ta có: $c^2-1 \equiv 0, 3 \pmod 4$, mà $a^2+b^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod 4$, suy ra $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod 4$. Vậy a là số chẵn. Mà $a^2=8k+1$, nên a là số lẻ (vô lí). Vậy không tồn tại số d.

Nhận xét. Lời giải đã sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng và tính chất: Nếu $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 4$ thì $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod 4$.

Bài 2.7. *Cho 5 số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 5. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.*

Lời giải. Gọi các số đã cho là a_i $(i=\overline{1,5})$. Biểu diễn $a_i=2^{\alpha_i}.5^{\beta_i}$, với $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.

Xét năm cặp số $(\alpha_i, \beta_i), (i=\overline{1,5})$, mỗi cặp sẽ rơi vào một trong các trường hợp: (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai cặp $(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j)$ cùng thuộc một trường hợp. Khi đó $\alpha_i+\alpha_j$, $\beta_i+\beta_j$ là những số chẵn $(i,j \in \{1,2,...,5\}, i \neq j)$. Do đó:

$$a_i.a_j=2^{\alpha_i}.5^{\beta_i}.2^{\alpha_j}.5^{\beta_j}=2^{\alpha_i+\alpha_j}.5^{\beta_i+\beta_j}$$

là số chính phương.

DẠNG 3. TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ CÁC BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG. TỪ CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG CÓ CÁC TÍNH CHẤT CỦA CÁC BIẾN

Bài 3.1. a) *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $M=2^n+3^n+4^n$ là số chính phương.*

b) *Tìm $m,n \in \mathbb{N}$ sao cho $P=2^m+5^n$ là số chính phương.*

Lời giải. a) • Với $n=1$ thì $M=2^1+3^1+4^1=3^2$ là số chính phương.

• Xét $n>1$ thì n là số chẵn hoặc số lẻ.

+ TH1: n là số chẵn thì $n=2k, k \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra $M=2^{2k}+3^{2k}+4^{2k}$. Ta có: $4^t=(3+1)^t, t \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra 4^t chia cho 3 dư 1. Do đó $2^{2k}=4^k$ chia cho 3 dư 1, 4^{2k} chia cho 3 dư 1. Suy ra M chia cho 3 dư 2. Suy ra M không thể là số chính phương.

+ TH2: n là số lẻ thì $n=2k+1, k\in\mathbb{Z}^+$. Suy ra:

$$M=2^{2k+1}+3^{2k+1}+4^{2k+1}=2.4^k+3.9^k+4^{2k+1}.$$

Ta có: $3.9^k=3.(2.4+1)^k$ chia cho 4 dư 3. Suy ra M chia cho 4 dư 3. Do đó M không là số chính phương. Vậy $n=1$ thì M là số chính phương.

b) Để cho $P=2^m+5^n$ là số chính phương, đặt $2^m+5^n=k^2, k\in\mathbb{N}$.

+ Nếu $m=0\Rightarrow 1+5^n=k^2$. Do đó k^2 là số chẵn, nên k là số chẵn. Suy ra $k^2\vdots 4$. Lại có $1+5^n\equiv 2(\text{mod}4)$, do đó $1+5^n=k^2$, không xảy ra.

+ Nếu $m\neq 0\Rightarrow 2^m+5^n=k^2\Rightarrow k$ lẻ và k không chia hết cho 5. Ta xét hai trường hợp :

- TH1: $n=0$ thì $2^m+1=k^2=(2x+1)^2$ $(x\in\mathbb{N})$.

Suy ra $2^m=4x(x+1)$. Suy ra $x=1$, khi đó $m=3; n=0$ (thỏa mãn).

Thử lại: Với $m=3; n=0$ thì $P=2^3+5^0=9=3^2$ là số chính phương.

- TH2: $n\neq 0$ và k không chia hết cho 5. Suy ra $k^2\equiv\pm 1(\text{mod}5)$. Từ $2^m+5^n=k^2\Rightarrow 2^m\equiv\pm 1(\text{mod}5)$ suy ra m là số chẵn. Đặt $m=2m_1$, $m_1\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$5^n=\left(k+2^{m_1}\right)\left(k-2^{m_1}\right)\Rightarrow\begin{cases}k+2^{m_1}=5^{n_1}\\ k-2^{m_1}=5^{n_2}\end{cases}$$

với $n_1+n_2=n$, $n_1>n_2, n_1,n_2\in\mathbb{N}$. Suy ra :

$$2^{m_1+1}=5^{n_2}.\left(5^{n_1-n_2}-1\right)\Rightarrow 5^{n_2}=1\Leftrightarrow n_2=0\Rightarrow n=n_1.$$

Khi đó $2^{m_1+1}=5^n-1$

* Nếu n là số chẵn thì $n=2t$, $t\in\mathbb{N}$, suy ra:

$$2^{m_1+1}=5^{2t}-1=25^t-1\vdots 3 \text{ (vô lý)}.$$

* Nếu n là số lẻ, thì

$$2^{m_1+1}=5^n-1=4\left(5^{n-1}+5^{n-2}+....+5+1\right).$$

Với $n>1$, thì $5^{n-1}+5^{n-2}+....+5+1$ là số lẻ lớn hơn 1 (vô lí). Với $n=1$, thì $2^{m_1+1}=5^1-1\Rightarrow m_1=1$. Khi đó $m=2, n=1$.

Thử lại $m=2, n=1$ thì $P=2^2+5^1=9=3^2$ là số chính phương. Vậy các cặp $(m;n)$ là: $(2;1),(3;0)$.

Bài 3.2. a) *Tìm tất cả các số nguyên dương n để số* $A=\underbrace{111...1}_{2n \text{ số } 1}-\underbrace{777...7}_{n \text{ số } 7}$ *là số chính phương.*

b) Cho $a_1=14, a_2=144, a_3=1444,...,a_n=1\underbrace{444....4}_{n \text{ số } 4}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. *Tìm tất cả các số i sao cho* a_i *là số chính phương* (với $i\in\mathbb{N}, 1\le i\le n$).

Lời giải. a) Ta có:

$$A=\frac{10^{2n}-1}{9}-7.\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{2n}-7.10^n+6}{9}.$$

+ Với $n=1$, ta có: $A=4=2^2$ (thỏa mãn).

+ Với $n\ge 2$, ta có:

$$\left(10^n-4\right)^2<10^{2n}-7.10^n+6<\left(10^n-3\right)^2.$$

Suy ra A không là số chính phương. Vậy $n=1$ thì $A=2^2$ là số chính phương.

b) $a_1=14$, không là chính phương; $a_2=144=12^2$, $a_3=1444=38^2$ là số chính phương; $a_4=14444$ không là chính phương.

Xét $i\ge 5$, ta có: $a_i=1\underbrace{444....4}_{i \text{ số } 4}=$

$$=1\underbrace{444...444}_{i-4 \text{ số } 4}.10^4+4444\equiv 12 \ (\text{mod}16) \ (*).$$

Giả sử $a_i=b^2$, suy ra b là số chẵn. Từ (*) suy ra $a_i=b^2=(4q+1111).4\Rightarrow b$ không chia hết cho 4.

Đặt $b=2(2k+1)$, $k\in\mathbb{N}^*$, suy ra:

$$b^2=4(2k+1)^2=4\left(4k^2+4k+1\right)$$
$$=16k(k+1)+4\equiv 4 \text{ mod}(16) \ (**).$$

Từ (*) và (**) mâu thuẫn. Vậy $i\in\{2;3\}$ là hai số thoả mãn để cho a_i là số chính phương.

Bài 3.3. *Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất với mỗi số nguyên lẻ a mà* $a^2\le n$ *thì* $n\vdots a$.

Lời giải. Gọi a là số nguyên lẻ lớn nhất mà $a^2\le n$. Khi đó $n<(a+2)^2$. Nếu $a\ge 7$ thì $a-4, a-2, a$ là các ước lẻ của n. Ta có các số này nguyên tố cùng nhau đôi một nên $n\vdots a(a-2)(a-4)$. Suy ra:

$$a(a-2)(a-4)\le n<(a+2)^2\Rightarrow a^3-7a^2+4a-4<0$$

$\Rightarrow a^2(a-7)+4(a-1)<0$. Vô lý (do $a\ge 7$).

Do đó $a\in\{1;3;5\}$.

• TH1: $a=1$ thì $1^2\le n<3^2\Rightarrow n\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

• TH2: $a=3$ thì $3^2 \le n < 5^2$

$\Rightarrow n \in \{9;12;15;18;21;24\}$ (do $n \vdots 3$).

• TH3: $a=5$ thì $5^2 \le n < 7^2 \Rightarrow n \in \{30;45\}$ (do $n \vdots 15$).

Vậy $n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;12;15;18;21;24;30;45\}$.

Bài 3.4. *Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số $x, y \in \mathbb{Z}^+$ sao cho: $\frac{p+1}{2} = x^2$ và $\frac{p^2+1}{2} = y^2$. Suy ra $p+1 = 2x^2$ (1) và $p^2+1 = 2y^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra:

$$p(p-1) = 2(y+x)(y-x) \quad (3).$$

Do đó: $2(y+x)(y-x) \vdots p$ (4). Mặt khác từ (1) suy ra p là số lẻ và $x > 1$.

Từ đó $p+1 = 2x^2 = x^2 + x^2 > x+1 \Rightarrow p > x$.

Từ (2) suy ra $y > 1$. Do đó:

$$p^2+1 = 2y^2 = y^2 + y^2 > y^2+1 \Rightarrow p > y.$$

Từ (3) suy ra $y > x$. Do đó: $0 < y - x < p$.

Do đó từ (4) suy ra $y + x \vdots p$, mà $0 < x + y < 2p$.

Suy ra: $x + y = p$. Thay $x + y = p$ vào (3) được:

$$p - 1 = 2(y-x) \Rightarrow y - x = \frac{p-1}{2} \text{ và } x + y = p.$$

Suy ra $x = \frac{p+1}{4}, y = \frac{3p-1}{4}$. Thay $x = \frac{p+1}{4}$ vào (1) ta có: $p+1 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (p+1)(p-7) = 0$

$\Leftrightarrow p = 7 \Rightarrow x = 2, y = 5$. Thử lại $x = 2, y = 5$ thỏa mãn bài toán. Vậy $p = 7$.

Bài 3.5. *Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất lớn hơn 1 sao cho $(n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6 và thương là số chính phương.*

Lời giải. Theo đề bài có: $(n+1)(2n+1) = 6k^2, k \in \mathbb{N}$.

Ta có $6k^2$ là số chẵn, $2n+1$ là số lẻ. Suy ra $n+1$ là số chẵn, nên n là số lẻ. Đặt $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}^*$.

Do đó: $(2m+1+1)(4m+2+1) = 6k^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)(4m+3) = 3k^2.$$

Lại có ƯCLN$(m+1, 4m+3) = 1$, $4m+3$ không thể là số chính phương.

Do đó $m+1 = a^2, 4m+3 = 3b^2, a, b \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $4a^2 - 3b^2 = 1 \Leftrightarrow (2a+1)(2a-1) = 3b^2$.

Do $2a+1, 2a-1$ là 2 số lẻ liên tiếp, nên ƯCLN$(2a+1, 2a-1) = 1$, suy ra:

$$\begin{cases} 2a-1 = 3a_1^2 \\ 2a+1 = a_2^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2a-1 = a_1^2 \\ 2a+1 = 3a_2^2 \end{cases}, a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*.$$

+ Nếu $\begin{cases} 2a-1 = 3a_1^2 \\ 2a+1 = a_2^2 \end{cases} \Rightarrow a_2^2 = 3a_1^2 + 2$ (không xảy ra).

+ Nếu $\begin{cases} 2a-1 = a_1^2 \\ 2a+1 = 3a_2^2 \end{cases} \Rightarrow a_1^2 = 3a_2^2 - 2$. Suy ra a_1 là số lẻ, a_1 không chia hết cho 3.

Ta có: n nhỏ nhất $\Leftrightarrow m$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a_1$ nhỏ nhất. Mà $a_1 \in \{1;5;7;11;...\}$ nên:

- Với $a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow n = 1$, loại vì $n > 1$.

- Với $a_1 = 5 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow m = 168 \Rightarrow n = 2.168 + 1 = 337$.

Khi đó $(337+1).(2.337+1) = 6.195^2$ (thỏa mãn).

Vậy số n nhỏ nhất là 337.

Nhận xét. Trong bài này ta đã sử dụng tính chất: Số chính phương không có dạng $4m + 3$ và $3n + 2$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

Bài 3.6. *Cho m, n là những số nguyên dương với $n > 1$. Đặt $P = m^2n^2 - 4m + 4n$. Chứng minh rằng:*

a) *Nếu $m > n$ thì $(mn^2 - 2)^2 < n^2P < m^2n^4$.*

b) *Nếu P là số chính phương thì $m = n$.*

Lời giải. a)

• $(mn^2-2)^2 < n^2P \Leftrightarrow m^2n^4 - 4mn^2 + 4 < m^2n^4 - 4mn^2 + 4n^3$

$\Leftrightarrow n^3 > 1 \Leftrightarrow n > 1$ (luôn đúng, với $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$).

• $n^2P < m^2n^4 \Leftrightarrow m^2n^4 - 4mn^2 + 4n^3 < m^2n^4$

$$\Leftrightarrow 4n^2(-m+n) < 0 \Leftrightarrow m > n$$

(luôn đúng theo giả thiết).

b) Giả sử ngược lại $m \ne n$, xét hai trường hợp:

• TH1: Xét $m>n$, theo phần a) ta có:

$\left(mn^2-2\right)^2<n^2P<\left(mn^2\right)^2$, và do P là số chính phương. Suy ra: $n^2P=\left(mn^2-1\right)^2$

$$\Rightarrow m^2n^4-4mn^2+4n^3=m^2n^4-2mn^2+1$$

$$\Leftrightarrow 4n^3=2mn^2+1 \quad (*).$$

Vì $4n^3$ là số chẵn, mà $2mn^2+1$ là số lẻ nên (*) không xảy ra.

• TH2: Xét $m<n$, khi đó:

+ Nếu $m\ge 2$ thì $n>2\Rightarrow 2mn\ge 4n$

$\Rightarrow (mn)^2<P=m^2n^2-4m+4n<(mn+1)^2$, mâu thuẫn với P là số chính phương.

+ Nếu $m=1$ thì $P=n^2+4n-4$. Khi đó:

- Với $n>2$ thì $(n+1)^2<P<(n+2)^2$, mâu thuẫn với P là số chính phương.

- Với $n=2$ thì $P=8$ không phải là số chính phương.

Vậy nếu P là số chính phương thì $m=n$.

Bài 3.7. *Cho x,y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.*

Lời giải. Ta có $x\ge 2, y\ge 2$. Ta sẽ chứng minh: $-4xy+1<-7x+7y<4xy+1$ (*). Thật vậy:

$$-4xy+1<-7x+7y\Leftrightarrow 1+7x<4xy+7y$$

$\Leftrightarrow 1+7x<y(4x+7)$ là BĐT đúng vì $1+7x<2(4x+7)\le y(4x+7)$.

Tương tự: $-7x+7y<4xy+1\Leftrightarrow 7y<7x+4xy+1$ là BĐT đúng với $x\ge 2, y\ge 2$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow 4x^2y^2-4xy+1<4x^2y^2-7x+7y<4x^2y^2+4xy+1$

$\Leftrightarrow (2xy-1)^2<4x^2y^2-7x+7y<(2xy+1)^2$.

Mặt khác $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương và do $1<2xy-1<2xy+1$ nên:

$$4x^2y^2-7x+7y=(2xy)^2\Leftrightarrow x=y \text{ (đpcm)}.$$

Nhận xét. Trong lời giải đã sử dụng tính chất của số chính phương là: *Nếu x là số chính phương mà $n^2<x<(n+2)^2$, $n\in\mathbb{N}$ thì $x=(n+1)^2$.*

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Tìm tất cả các số có 6 chữ số thoả mãn hai tính chất sau:

- Số tạo thành bởi ba chữ số cuối lớn hơn số tạo thành bởi ba chữ số đầu 1 đơn vị.
- Là số chính phương.

2. Tìm ba số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có bốn chữ số giống nhau.

3. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n\vdots 6$ và $1000n$ là số chính phương.

4. Tìm tất cả các số có 4 chữ số sau khi ghép vào sau số 400 ta được một số chính phương.

5. Tìm số $\overline{xyztu}$, biết rằng: $\left(\overline{xy}+\overline{ztu}\right)^2=\overline{xyztu}$.

6. Tìm số chẵn lớn nhất có 5 chữ số mà 3 chữ số đầu (giữ nguyên thứ tự từ trái sang phải) tạo thành số chính phương và 3 chữ số cuối tạo thành lập phương đúng.

7. Cho số $A=1.2.3.....17$. Hãy tìm ước số lớn nhất của A, biết ước số đó là một số chính phương.

8. a) Cho $a=\underbrace{111...1}_{n \text{ chữ số } 1}$; $b=1\underbrace{000...0}_{n-1 \text{ chữ số } 0}5$. Chứng minh $ab+1$ là số chính phương.

b) Cho $a=\underbrace{111...1}_{n \text{ chữ số } 1}2$; $b=\underbrace{111...1}_{n \text{ chữ số } 1}4$. Chứng minh $ab+1$ là số chính phương.

9. Cho $n=p^xq^y$ với p,q là các số nguyên tố khác nhau, $x,y\in\mathbb{N}^*$. Biết n^2 có 15 ước số. Hỏi n^3 có bao nhiêu ước số.

10. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Tìm số dư của phép chia $n^{2015}:8$?

11. a) Tìm số tự nhiên n sao cho 5^n+12^n là số chính phương.

b) Tìm số nguyên dương n sao cho 2^n+3^n là số chính phương.

12. Cho 2013 số tự nhiên 1, 2, 3, …, 2013. Người ta viết 2013 số đó một cách tùy ý, mỗi số viết một lần, liền nhau tạo thành một số mới. Số đó có là số chính phương hay không ? Hãy giải thích.

13. Hình vuông có cạnh là số tự nhiên có thể có diện tích bằng $\underbrace{11111.....1}_{20012001 \text{ chữ số } 1}$ được không?

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2021 – 2022

(*Thời gian làm bài: 150 phút; Dành cho thi sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin học*)

Câu 1 (*2,5 điểm*). Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P với

$$x=\sqrt{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\right).$$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình

$$6x^2+10x-92+\sqrt{(x+70)(2x^2+4x+16)}=0.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3+3x-12y+7=3x^2-6y^2 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y \end{cases}.$$

Câu 3 (*1,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x.(1+x+x^2)=4y.(y-1).$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất với mỗi số nguyên dương lẻ a mà $a^2\le n$ thì n chia hết cho a.

Câu 4 (*3,5 điểm*). Cho tam giác ABC nhọn và cố định, nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O), P không trùng với A và B. Đường thẳng qua P vuông góc với OA và cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại Q, R. Đường thẳng qua P vuông góc với OB và cắt các đường thẳng AB, BC theo thứ tự tại S, T.

a) Chứng minh tam giác PQS là tam giác cân.

b) Giả sử tam giác ABC cân tại C. Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và PC là M. Chứng minh hai tam giác CPA, CAM đồng dạng và khi P thay đổi trên cung nhỏ AB thì tỉ số $\frac{PC}{PA+PB}$ có giá trị không đổi.

c) Tìm vị trí điểm P trên cung nhỏ AB để tích $QR.ST$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (*0,5 điểm*). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*) ***Giới thiệu***

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH, NĂM HỌC 2021 – 2022

Câu 1. *Cho biểu thức*

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}.$$

a) *Rút gọn biểu thức P*

b) *Tính giá trị của biểu thức P với*

$$x=\sqrt{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\right).$$

c) *Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.*

Lời giải. a) ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$. Ta có:

$$P=\frac{x+2+\sqrt{x}.(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1}:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{2.(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2.(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

b) Biến đổi: $x=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1}=2+2=4.$$

Lúc này giá trị của P là $P=\dfrac{2}{4+\sqrt{4}+1}=\dfrac{2}{7}$.

c) Với $x\ge 0, x\ne 1$, thì $x+\sqrt{x}+1\ge 1$ nên $0<P=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le 2$. Do đó P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $P=1$ hoặc $P=2$.

- Với $P=1$ thì $x+\sqrt{x}+1=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

- Với $P=2$ thì $x+\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow \sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Vậy có hai giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x=0$.

Câu 2. a) *Giải phương trình*

$$6x^2+10x-92+\sqrt{(x+70)(2x^2+4x+16)}=0 \quad (1).$$

b) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3-y^3+3x-12y+7=3x^2-6y^2 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y \end{cases}.$$

Lời giải. a) ĐK: $(x+70)(2x^2+4x+16)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x+70)\left[2(x+1)^2+14\right]\ge 0\Leftrightarrow x\ge -70.$$

Với $x\ge -70$ ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (6x^2+12x+48)-2x-140+\sqrt{(x+70)(2x^2+4x+16)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(2x^2+4x+16)-2(x+70)+\sqrt{2x^2+4x+16}.\sqrt{x+70}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+70}+\sqrt{2x^2+4x+16}\right)\left(3\sqrt{2x^2+4x+16}-2\sqrt{x+70}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+70}+\sqrt{2(x+1)^2+14}\right)\left(3\sqrt{2x^2+4x+16}-2\sqrt{x+70}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+4x+16}=2\sqrt{x+70}$$

$$\Leftrightarrow 9(2x^2+4x+16)=4(x+70)$$

$$\Leftrightarrow 18x^2+32x-136=0\Leftrightarrow x=2;\ x=-\frac{34}{9}.$$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn ĐK $x\ge -70$. Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=2$, $x=-\dfrac{34}{9}$.

b) ĐK $x\ge -2$, $y\le 4$ (1). PT đầu tiên của hệ tương đương với: $x^3-3x^2+3x-1=y^3-6y^2+12y-8$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=(y-2)^3\Leftrightarrow x-1=y-2\Leftrightarrow y=x+1.$$

Thế $y=x+1$ vào PT thứ hai trong hệ ta được:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1 \quad (2).$$

ĐK xác định của (2) là $-2\le x\le 3$ (3). Với $-2\le x\le 3$ thì

$$3\sqrt{x+2}+(x+4)>0,\ 3\sqrt{3-x}+(5-x)>0 \text{ và}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{x+2}+(x+4)}+\frac{1}{3\sqrt{3-x}+(5-x)}+3x+6>0.$$

Khi đó ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}+3\sqrt{3-x}=3x^3+3x^2-12x-3$$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}-(x+4)+3\sqrt{3-x}-(5-x)=3x^3+3x^2-12x-12$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+x+2}{3\sqrt{x+2}+(x+4)}+\dfrac{-x^2+x+2}{3\sqrt{3-x}+(5-x)}=(x^2-x-2)(3x+6)$

$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left(\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}+(x+4)}+\dfrac{1}{3\sqrt{3-x}+(5-x)}+3x+6\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐK (3)).

- Với $x=2$ thì $y=3$, thỏa mãn điều kiện (1).

- Với $x=-1$ thì $y=0$, thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=(2;3)$, $(x;y)=(-1;0)$.

Câu 3. a) *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x.(1+x+x^2)=4y.(y-1)$.*

b) *Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất với mỗi số nguyên dương lẻ a mà $a^2 \le n$ thì n chia hết cho a.*

Lời giải. a) Giả sử $(x;y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn $x.(1+x+x^2)=4y.(y-1)$. Ta có:

$x.(1+x+x^2)=4y.(y-1) \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1)=(2y-1)^2$.

Vì y nguyên nên $(2y-1)^2$ là số chính phương lẻ. Suy ra x^2+1 và $x+1$ là những số lẻ và $x \ge 0$.

Nếu số nguyên d là ước chung của x^2+1 và $x+1$ thì d là số lẻ và $x^2+1-(x+1)(x-1)=2 \vdots d$.

Suy ra $d=1$ hoặc $d=-1$. Chứng tỏ x^2+1 và $x+1$ nguyên tố cùng nhau. Như vậy x^2+1 và $x+1$ là các số chính phương. Hơn nữa $x^2<x^2+1\le(x+1)^2$ nên $x^2+1=(x+1)^2 \Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ thì $4y.(y-1)=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=1$.

Thử lại thấy $(x;y)=(0;0)$, $(x;y)=(0;1)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

b) Giả sử n là số nguyên dương có tính chất với mỗi số nguyên dương lẻ a mà $a^2 \le n$ thì n chia hết cho a. Gọi a_0 là số nguyên dương lẻ lớn nhất thỏa mãn $a_0^2 \le n$, thì $a_0^2 \le n < (a_0+2)^2$.

- Nếu $a_0 \ge 7$ thì a_0, a_0-2, a_0-4 là các ước nguyên dương lẻ của n, đồng thời a_0, a_0-2, a_0-4 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $n \vdots a_0.(a_0-2)(a_0-4)$. Suy ra:

$a_0.(a_0-2).(a_0-4) \le n < (a_0+2)^2$. Ta có:

$a_0.(a_0-2).(a_0-4) < (a_0+2)^2$

$\Leftrightarrow a_0^3-7a_0^2+4a_0-4<0 \Leftrightarrow a_0^2.(a_0-7)+4(a_0-1)<0$.

Điều này vô lí, vì $a_0 \ge 7$.

- Nếu $a_0=5$ thì $5^2 \le n < 7^2$. Mà $n \vdots 1, n \vdots 3, n \vdots 5$ nên $n \in \{30;45\}$.

- Nếu $a_0=3$ thì $3^2 \le n < 5^2$. Mà $n \vdots 1, n \vdots 3$ nên $n \in \{9;12;15;18;21;24\}$.

- Nếu $a_0=1$ thì $1^2 \le n < 3^2$. Suy ra:

$n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Do đó $n \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;12;15;18;21;24;30;45\}$.

Thử lại thấy 16 giá trị này của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

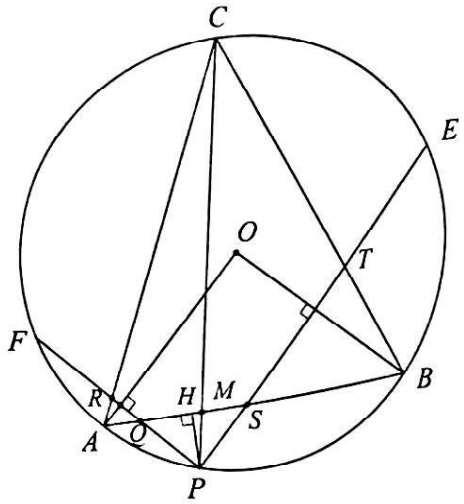
Câu 4. *Cho tam giác ABC nhọn và cố định, nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O), P không trùng với A và B. Đường thẳng qua P vuông góc với OA và cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại Q, R. Đường thẳng qua P vuông góc với OB và cắt các đường thẳng AB, BC theo thứ tự tại S, T.*

a) *Chứng minh tam giác PQS là tam giác cân.*

b) *Giả sử tam giác ABC cân tại C. Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và PC là M. Chứng minh hai tam giác CPA, CAM đồng dạng và khi P thay đổi trên cung nhỏ AB thì tỉ số $\dfrac{PC}{PA+PB}$ có giá trị không đổi.*

c) *Tìm vị trí điểm P trên cung nhỏ AB để tích QS.ST đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.



a) Gọi F, E lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng PR, PT với đường tròn (O). Ta có $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{BE}$, và

$\widehat{PQS} = \widehat{PQB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{PB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AF}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$ (1),

$\widehat{PSQ} = \widehat{PSA} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{PA} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BA}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PQS} = \widehat{PSQ}$ nên ΔPSQ cân tại P.

b) Giả sử ΔABC cân tại C, suy ra $AC = BC$, nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$. Ta có $\widehat{APC} = \widehat{CAB} = \widehat{CAM}$ (góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau), $\widehat{ACM}$ chung, nên CAM, CPA là hai tam giác đồng dạng.

Dẫn tới $\frac{PC}{AC} = \frac{PA}{MA}$ (3). Tương tự ta chứng minh được hai tam giác CPB, CBM đồng dạng nên $\frac{PC}{BC} = \frac{PB}{MB}$ (4). Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{PC}{AC} = \frac{PA}{MA} = \frac{PB}{MB} \Rightarrow \frac{PC}{AC} = \frac{PA+PB}{MA+MB} = \frac{PA+PB}{AB}$$

$\Rightarrow \frac{PC}{PA+PB} = \frac{AC}{AB}$. Vậy $\frac{PC}{PA+PB}$ có giá trị không đổi khi P chạy trên cung nhỏ AB.

c) Tam giác PSQ cân ở P nên $PQ = PS$ (5). Vì $\widehat{QAR} = \widehat{BTS} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}$, $\widehat{AQR} = \widehat{BST} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$, nên hai tam giác ARQ, TBS đồng dạng, dẫn tới:

$$\frac{QA}{ST} = \frac{QR}{SB} \Rightarrow QR.ST = QA.SB \text{ (6)}.$$

Vì $\widehat{APQ} = \widehat{PBS} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{PA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AF}$,

$\widehat{PAQ} = \widehat{BPS} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{PB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}$,

nên hai tam giác PAQ, BPS đồng dạng, dẫn tới:

$$\frac{QP}{SB} = \frac{QA}{SP} \Rightarrow PQ.PS = QA.SB \text{ (7)}.$$

Từ (5), (6), (7) suy ra $QR.ST = PQ^2$.

Ta lại có $\widehat{PQS} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của P trên AB.

Xét ΔPQH có: $PQ = \frac{PH}{\sin\widehat{PQH}} = \frac{PH}{\sin\widehat{ACB}}$.

Suy ra $QR.ST = \frac{1}{\sin^2\widehat{ACB}}.PH^2$.

Vì $\sin\widehat{ACB}$ không đổi nên tích $QR.ST$ đạt giá trị lớn nhất khi PH lớn nhất, tức là P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

Câu 5. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c} + \frac{3bc}{3b+6c+a} + \frac{3ca}{9c+4a+4b} \le \frac{a+2b+3c}{9}.$$

Lời giải. Với các số thực dương x, y, z ta có:

$$(x+2y)(2x+y) = (x+y+y)(x+x+y) \ge 3\sqrt[3]{xy^2}.3\sqrt[3]{x^2y} = 9xy$$

nên $\frac{xy}{x+2y} \le \frac{2x+y}{9}$. Tương tự ta có:

$$\frac{yz}{y+2z} \le \frac{2y+z}{9}, \quad \frac{zx}{z+2x} \le \frac{2z+x}{9}.$$

Dẫn tới: $\frac{xy}{x+2y} + \frac{yz}{y+2z} + \frac{zx}{z+2x} \le \frac{x+y+z}{3}$ (1).

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $x = y = z$.

Cũng với $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+y} \ge \frac{9}{3x+4y+2z}$$

hay $\frac{2xy}{x+y+z} + \frac{xy}{x+2y} \ge \frac{9xy}{3x+4y+2z}$.

Tương tự ta có:

$$\frac{2yz}{x+y+z} + \frac{yz}{y+2z} \ge \frac{9yz}{2x+3y+4z},$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM 2021

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài 1 (5,0 *điểm*).

1) Giải phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2.$$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\dfrac{2b-c}{a}\ge 4$.

Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 2 (6,0 *điểm*).

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$\left(x^2+y\right)\left(x+y^2\right)=\left(x-y\right)^3.$$

2) Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ 69 số đó 4 số sao cho trong chúng có 1 số bằng tổng của 3 số còn lại.

Bài 3 (4,0 *điểm*).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C sao cho cung BC nhỏ hơn cung AC, qua C dựng tiếp tuyến với đường tròn (O), cắt AB tại D. Kẻ CH vuông góc với AB ($H\in AB$), kẻ BK vuông góc với CD ($K\in CD$); CH cắt BK tại E.

a) Chứng minh $BK+BD<EC$.

b) Chứng minh $BH.AD=AH.BD$.

Bài 4 (3,0 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm di động trên cạnh BC (M khác B, C). Hình chiếu của M trên AB, AC lần lượt là H và K. Gọi I là giao điểm của BK và CH. Chứng minh rằng đường thẳng IM luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5 (2,0 *điểm*).

Tìm tất cả các giá trị của x để:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}-x^3\le 30.$$

BÙI VĂN CHI

(21/2 *Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Giới thiệu

****

☞ $$\frac{2zx}{x+y+z}+\frac{zx}{z+2x}\ge\frac{9zx}{4x+2y+3z}.$$

Dẫn tới

$$\frac{9xy}{3x+4y+2z}+\frac{9yz}{2x+3y+4z}+\frac{9zx}{4x+2y+3z}$$
$$\le\frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z}+\frac{xy}{x+2y}+\frac{yz}{y+2z}+\frac{zx}{z+2x}\ (2).$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $x=y=z$.

Nhận thấy:

$$3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2,\forall x,y,z>0$$

nên

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z}\le\frac{2(x+y+z)^2}{3(x+y+z)}=\frac{2}{3}(x+y+z)\ (3).$$

Dấu "=" ở (3) xảy ra khi $x=y=z$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{2x+3y+4z}+\frac{zx}{4x+2y+3z}$$
$$\le\frac{x+y+z}{9}\ (4).$$

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi $x=y=z$.

Tiếp theo, ở (4) chọn $x=a$, $y=2b$, $z=3c$, với $a,b,c>0$, ta thu được:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}$$
$$\le\frac{a+2b+3c}{9}\ (5).$$

Dấu "=" ở (5) xảy ra khi $a=2b=3c$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Giới thiệu

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

GÓP PHẦN PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH THÔNG QUA KHAI THÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NGUYỄN VĂN HẬU - TRẦN ĐÌNH HOÀNG
(GV THPT Nguyễn Trường Tộ, Hưng Nguyên, Nghệ An)

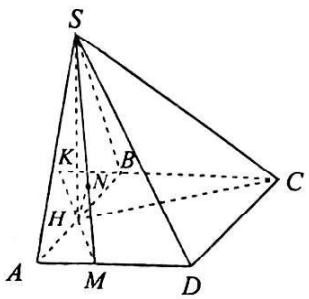
Hiện nay dạy học không chỉ dừng lại ở việc truyền thụ kiến thức mà còn phát triển toàn diện và phát huy tốt nhất tiềm năng, khả năng sáng tạo của mỗi cá nhân, tức là cần hình thành cho người học năng lực sáng tạo. Do đó việc phát triển "tính mềm dẻo", "tính nhuần nhuyễn" một trong những đặc trưng cốt lõi của tư duy sáng tạo là việc làm quan trọng góp phần phát triển tư duy sáng tạo qua đó phát triển năng lực sáng tạo cho các em.

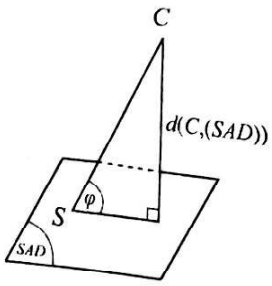
Hình học không gian nói chung và bài toán về góc trong hình học không gian nói riêng là phần kiến thức có nhiều tiềm năng trong việc phát triển tư duy sáng tạo cho cho học sinh. Chúng ta khai thác một số bài toán về góc trong không gian như sau

1. KHAI THÁC KẾT QUẢ CỦA BÀI TOÁN

Bài toán 1. *Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD}=60^\circ, AB=2a$. Gọi H là trung điểm AB. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy điểm S thay đổi khác H, đặt $x=SH\ (x>0)$, gọi φ là góc giữa SC và (SAD). Tính $\sin\varphi$.*

Lời giải.





Kẻ HM vuông góc với AD; N là hình chiếu vuông góc của H trên SM. Khi đó ta có $HN\perp(SAD)$. Suy ra $d\left(H,(SAD)\right)=HN$.

Mà $BC\parallel AD$ suy ra:

$$d\left(C,(SAD)\right)=d\left(B,(SAD)\right)=2d\left(H,(SAD)\right).$$

Tam giác SHM vuông tại H và HN là đường cao nên

$$HN=\frac{SH.HM}{SM}=\frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2+4x^2}}$$

$$\Rightarrow d\left(C,(SAD)\right)=\frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2+4x^2}}.$$

Gọi $K=HM\cap BC$. Khi đó ta có tam giác HKC vuông tại K nên

$$CH^2=CK^2+KH^2=\frac{25a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=7a^2.$$

Tam giác SHC vuông tại H nên $SC=\sqrt{SH^2+CH^2}=\sqrt{x^2+7a^2}$.

$$\sin\varphi=\frac{d\left(C,(SAD)\right)}{SC}=\frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2+3a^2)(x^2+7a^2)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4x^4+21a^4+31a^2x^2}}.$$

Nhận xét. Từ kết quả bài toán trên, GV có thể hướng dẫn HS khai thác để tạo ra các kết quả khác bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau:

- Do $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4x^4+21a^4+31a^2x^2}}$

$$\Rightarrow \sin\varphi \le \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21}.a^2x^2+31.a^2x^2}} \Rightarrow \sin\varphi \le \sqrt{\frac{12}{4\sqrt{21}+31}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt[4]{\frac{21}{4}}.a$. Vậy φ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\sin\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $SH=\sqrt[4]{\frac{21}{4}}.a$.

Do đó ta có bài toán mới như sau:

Bài toán 1.1. *Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD}=60°, AB=2a$. Gọi H là trung điểm AB. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy điểm S thay đổi khác H.*

a) *Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.*

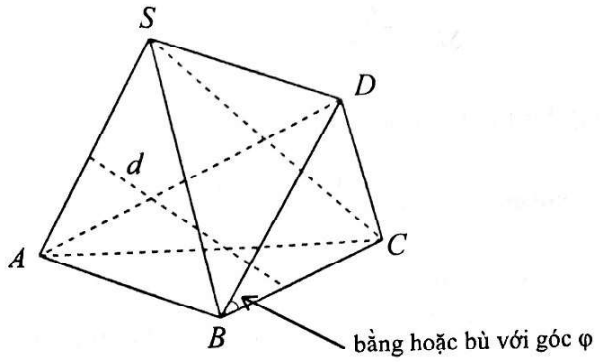
(Đây chính là đề thi HSG lớp 11 tỉnh Nghệ An năm học 2015 -2016).

b) *Tính thể tích của khối chóp S.ABCD khi góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.*

ĐS: a) $SH=\sqrt[4]{\frac{21}{4}}.a$ b) $V_{S.ABCD}=\frac{2}{3}.a^3\sqrt[4]{\frac{189}{4}}$.

Bài toán 2. *Cho hình chóp tam giác S.ABC có $SA=a, BC=b$. Gọi V, d lần lượt là thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa SA và BC. Gọi φ là góc giữa SA và BC. Tính $\sin\varphi$ theo V, a, b và d.*

Lời giải.



Dựng hình bình hành $SABD$. Khi đó góc giữa SA và BC bằng hoặc bù với góc $\widehat{DBC}$.

Vì $SD // AB$ nên $V_{S.ABC}=V_{D.ABC}=V_{A.BCD}$.

Do đó ta có: $V=V_{A.BCD}$.

Mà $d(SA,BC)=d(A,(BCD))=d$;

$$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BD.BC\sin\varphi=\frac{1}{2}SA.BC\sin\varphi=\frac{1}{2}a.b.\sin\varphi$$

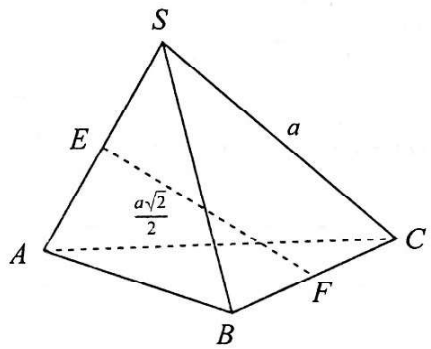
suy ra:

$$V=V_{A.BCD}=\frac{1}{3}d(A,(BCD)).S_{\Delta BCD}=\frac{1}{6}a.b.d\sin\varphi.$$

Do đó: $\sin\varphi=\frac{6V}{a.b.d}$.

Nhận xét. Từ kết quả của bài toán ta thấy có một hệ thức liên hệ giữa các đại lượng rất đẹp là $\sin\varphi=\frac{6V}{a.b.d}$ hay $V=\frac{1}{6}a.b.d\sin\varphi$. Do đó chúng ta có thể khai thác kết quả này theo các hướng sau:

• *Thứ nhất, với một tứ diện đều cạnh a:*



- Ta dễ dàng tính được $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- Góc giữa SA và BC bằng 90°.

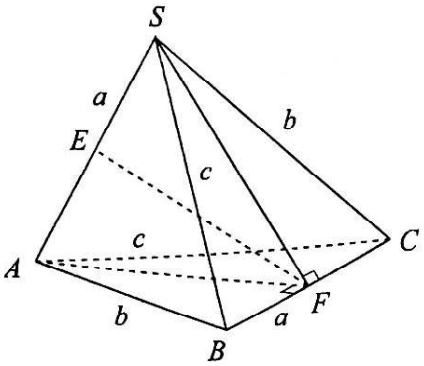
- Do đó $V=\frac{1}{6}a.a.\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin 90°=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Thể tích cho tứ diện đều cạnh a là: $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

• *Thứ hai, với tứ diện gần đều với kích thước $SA=BC=a$, $SB=AC=c$, $SC=AB=b$, gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, BC. Khi đó $EF\perp SA$ và $EF\perp BC$.*

- Ta tính $d=EF$.

$$EF^2=SF^2-SE^2=\frac{SC^2+SB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}-\frac{SA^2}{4}$$
$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}.$$



- Tính $\sin\varphi$. Ta có:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2} - \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2}.$$

Do đó: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}\right|}{SA.BC} = \dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}}{a^2}.$$

- Do đó

$$V = \frac{1}{6}a.a.\sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.\frac{\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}}{a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}.$$

Như vậy tứ diện gần đều có các cặp cạnh đối diện lần lượt là a, b và c có thể tích bằng

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}.$$

Dễ thấy rằng $V \le \dfrac{\sqrt{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{108}$.

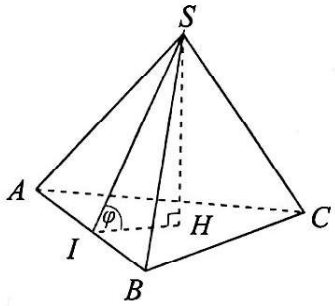
Do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2 = P = \text{const}$ thì

$$\max V = \frac{P\sqrt{6P}}{108}.$$

- *Thứ ba, ta có các bài toán tìm yếu tố về góc, khoảng cách, thể tích...khi áp dụng công thức*

$$V = \frac{1}{6}a.b.d\sin\varphi.$$

Bài toán 3. *Cho hình chóp tam giác S.ABC. Biết diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔABC là $S_{\Delta SAB} = a^2$ và $S_{\Delta ABC} = 6a^2$, $AB = 4a$. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Tính $\sin\varphi$.*



Lời giải. Vẽ SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$. Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HI \perp AB, I \in AB$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\varphi = \widehat{SIH}$.

Vì $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}SH.6a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Do diện tích của tam giác ΔSAB là $S_{\Delta SAB} = a^2$ và $AB = 4a$, suy ra:

$$SI = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2a^2}{4a} = \frac{a}{2}.$$

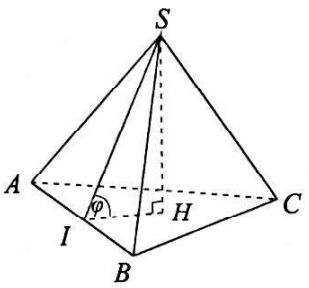
Trong tam giác vuông SHI, ta có:

$$\sin\varphi = \frac{SH}{SI} = \frac{a\sqrt{3}}{4} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60°.$$

Nhận xét. Trong bài toán nói trên ta cho: Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là V. Diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔABC lần lượt là S_1 và S_2. Độ dài cạnh $AB = d$. Khi đó ta có bài toán như sau:

Bài toán 3.1. *Cho hình chóp tam giác S.ABC. Biết Diện tích của hai tam giác ΔSAB và ΔABC lần lượt là S_1 và S_2, cạnh $AB = d$, thể tích của khối chóp S.ABC bằng V. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Tính $\sin\varphi$.*

Lời giải. Vẽ SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$. Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HI \perp AB, I \in AB$.



Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\varphi = \widehat{SIH}$.

Vì $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SH.S_2 = V$

$\Rightarrow SH = \frac{3V}{S_2}$. Do diện tích của hai tam giác ΔSAB là $S_{\Delta SAB} = S_1$ và $AB = d$, suy ra:

$$SI = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2S_1}{d}.$$

Trong tam giác vuông SHI ta có:

$$\sin\varphi = \frac{SH}{SI} = \frac{3V}{S_2} : \frac{2S_1}{d} = \frac{3V.d}{2S_1.S_2}.$$

Vậy ta có: $\sin\varphi = \frac{3V.d}{2S_1.S_2}$.

Áp dụng kết quả của bài toán 3.1 ta giải nhanh được các bài toán như sau:

Xét hình chóp tam giác có hai mặt có diện tích là S_1, S_2 và cạnh chung d. Khi đó:

1) Góc φ giữa hai mặt S_1, S_2 được tính theo công thức: $\sin\varphi = \frac{3V.d}{2S_1.S_2}$.

2) Thể tích của hình chóp là:

$$V = \frac{2S_1.S_2\sin\varphi}{3.d}.$$

3) Cạnh chung d giữa hai mặt S_1, S_2 được tính theo công thức:

$$d = \frac{2S_1.S_2\sin\varphi}{3.V}.$$

4) Khoảng cách h từ đỉnh đến mặt đáy là:

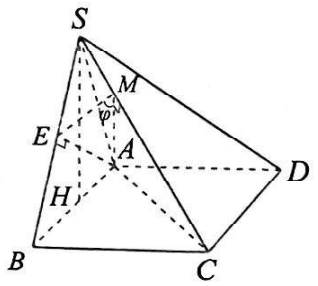
$$h = \frac{3.V}{S_{đáy}}.$$

2. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG NHIỀU CÁCH KHÁC NHAU

Dựa vào những đặc điểm của bài toán mà từ đó GV gợi ý cho HS lựa chọn các phương pháp và công cụ tương ứng với đặc điểm đó để giải bài toán. Việc rèn luyện cho HS giải một bài toán bằng nhiều cách khác nhau sẽ phát triển tính nhuần nhuyễn, tính linh hoạt cho các em.

Bài toán 4. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 1. Gọi H là trung điểm AB, SH = 1 và $SH \perp (ABCD)$. Tính φ là góc giữa (SAC) và (SBC).*

Lời giải. Cách 1. *Giáo viên hướng dẫn học sinh sử dụng định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng.*



Kẻ $AE \perp SB$ $(E \in SB)$, vì $BC \perp (SAB)$ suy ra:

$$AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC).$$

Kẻ $AM \perp SC (M \in SC)$, suy ra:

$$\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right) = \widehat{AME}.$$

- Tính AE: Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}$.

Ta có: $SA^2 = SB^2 = SH^2 + BH^2$

$$= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Suy ra $SA = SB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $AE = \frac{2S_{\Delta SAB}}{SB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- Tính AM. Ta có: $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $AC = \sqrt{2}$,

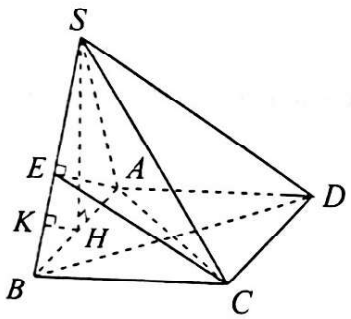
$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{3}{2}$.

Suy ra theo công thức Héron có: $S_{\Delta SAC} = \frac{3}{4}$. Do đó

$AM = \frac{2S_{\Delta SAC}}{SC} = \frac{3}{2}.\frac{2}{3} = 1$. Suy ra:

$\sin\varphi = \frac{AE}{AM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Cách 2. *Giáo viên gợi ý cho học sinh sử dụng công thức hình chiếu.*



Kẻ $HK \perp SB$ $(K \in SB) \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Ta có:

$$SA^2 = SB^2 = SH^2 + BH^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Suy ra $SA = SB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ta có ΔSKH đồng dạng với $\Delta SHB \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{SH}{SB}$

$\Rightarrow \frac{SK}{SB} = \frac{SH^2}{SB^2} = \frac{4}{5}$.

Kẻ $AE // HK$ $(E \in SB) \Rightarrow AE \perp (SBC)$.

Suy ra $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SEC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3}{5}.\frac{S_{\Delta SBC}}{S_{\Delta SAC}}$ (*). Ta có:

$$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Theo kết quả của cách 1 ta có $S_{\Delta SAC} = \frac{3}{4}$.

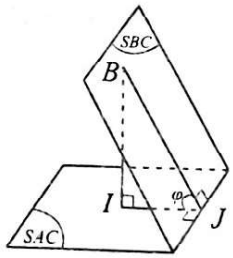
Từ đó ta có:

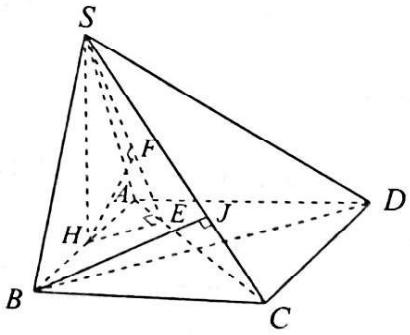
$$(*) \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{3}{5}.\frac{S_{\Delta SBC}}{S_{\Delta SAC}}$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right):\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cách 3. Giáo viên gợi ý cho học sinh sử dụng khoảng cách: $\sin\varphi = \frac{d(B,(SAC))}{BJ}$ với $BJ \perp SC$ tại J. Ở đây sử dụng lại các độ dài đoạn thẳng đã tính ở Cách 2.





Dựng: $HE \perp AC(E \in AC)$,

$HF \perp SE(F \in SE)$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (SAC) và SC.

Khi đó: $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right) = \left(\widehat{IJ,BJ}\right) = \widehat{BJI}$.

Ta có $\frac{1}{BJ^2}=\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{4}{5}+1=\frac{9}{5}\Rightarrow BJ=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

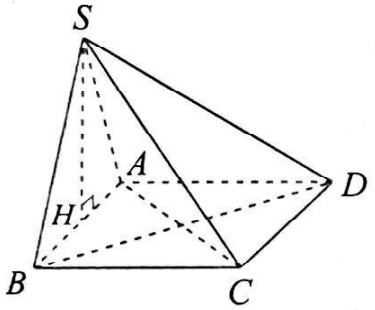
Ta có $BI=d\left(B,(SAC)\right)=2d\left(H,(SAC)\right)=2HF$

$=\frac{2SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=2.\frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}$.

Suy ra $\sin\varphi=\frac{BI}{BJ}=\frac{2}{3}.\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow\varphi=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Cách 4. *Giáo viên gợi ý cho học sinh sử dụng công thức thể tích (kết quả của Bài toán 3.1).*



Ta có $\sin\varphi=\frac{3V_{S.ABC}.SC}{2S_{\Delta SAC}S_{\Delta SBC}}$ (*)

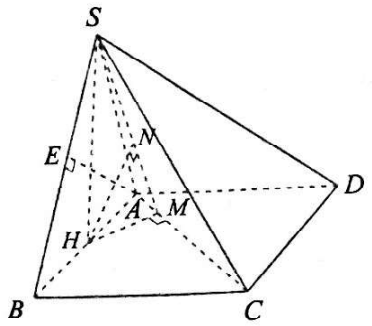
$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}$.

$S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SB.BC=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{5}}{2}.1=\frac{\sqrt{5}}{4}$. Theo kết quả của cách 1 ta có $S_{\Delta SAC}=\frac{3}{4}$.

Từ (*) suy ra: $\sin\varphi=\frac{3}{2}.\frac{1}{6}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow\varphi=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Cách 5.



Xem góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Kẻ $AE\perp SB\ (E\in SB)$, $HN\perp SM\ (N\in SM)$ suy ra $AE\perp(SBC)$, $HN\perp(SAC)$.

Do đó: $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=\left(\widehat{AE,HN}\right)=\varphi$.

Theo cách giải 1 ta có: $AE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $HN=\frac{1}{3}$.

Với kết quả đó ta tính được $\frac{ES}{EB}=\frac{3}{2}$, $\frac{NS}{NM}=8$

Do đó ta có: $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AS}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{2\overrightarrow{AS}+3\overrightarrow{AB}}{5}$;

$$\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{AS}+8\overrightarrow{AM}}{9};$$

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HN}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{AS}+8\overrightarrow{AM}}{9}\right)\left(\frac{2\overrightarrow{AS}+3\overrightarrow{AB}}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{-9\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AS}+16\overrightarrow{AM}}{18}\right)\left(\frac{2\overrightarrow{AS}+3\overrightarrow{AB}}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{-9\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AS}+4\overrightarrow{AC}}{18}\right)\left(\frac{2\overrightarrow{AS}+3\overrightarrow{AB}}{5}\right)$$

$$=\frac{-12\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}+8\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}+12\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+4AS^2-27AB^2}{90}.$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}=\frac{AB^2+AS^2-BS^2}{2}$

$$=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}=\frac{AC^2+AS^2-CS^2}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos45^\circ=\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

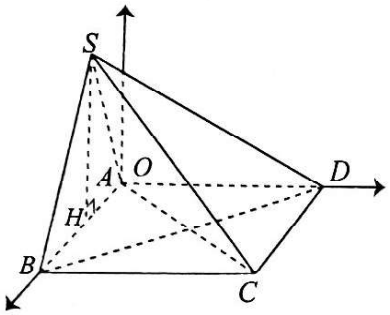
Suy ra:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HN}=\frac{-12.\frac{1}{2}+8.\frac{1}{2}+12+4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-27}{90}=-\frac{2}{15}.$$

Do đó: $\cos\varphi=\left|\frac{\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HN}}{AE.HN}\right|=\left|\frac{-\frac{2}{15}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}.\frac{1}{3}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cách 6. *Sử dụng phương pháp tọa độ.*



Đặt $S\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $A(0;0;0)$; $B(0;1;0)$, $C(1;1;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS}=\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;0)\Rightarrow$

$\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{n_{(SAC)}}=(2;-2;1)$.

Lại có $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{1}{2};-1\right)$; $\overrightarrow{SC}=\left(1;\frac{1}{2};-1\right)\Rightarrow$

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(0;-1;-\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{n_{(SBC)}}=(0;2;1)$.

Do đó $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_{(SAC)}}.\overrightarrow{n_{(SBC)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(SAC)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(SAC)}}\right|}=\frac{|0-4+1|}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Việc phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh là việc làm cần thiết. Qua quá trình dạy học môn Toán ở trường phổ thông cho thấy, việc rèn luyện tính mềm dẻo và tính nhuần nhuyễn cho học sinh thông qua khai thác từng bài toán cụ thể sẽ giúp học sinh chủ động, tích cực suy nghĩ, phân tích bài toán theo nhiều góc độ khác nhau, có ý thức tìm tòi cái mới, từ đó góp phần nâng cao chất lượng dạy học, đáp ứng nhu cầu của ngành trong giai đoạn hiện nay.

3. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60^0$, $SA=a, SB=2a, SC=4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4, AC=BD=5$, $AD=BC=6$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

3. Cho hình tứ diện $SABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=x$, $SB=AC=y$, $SC=AB=z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=27$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $SABC$.

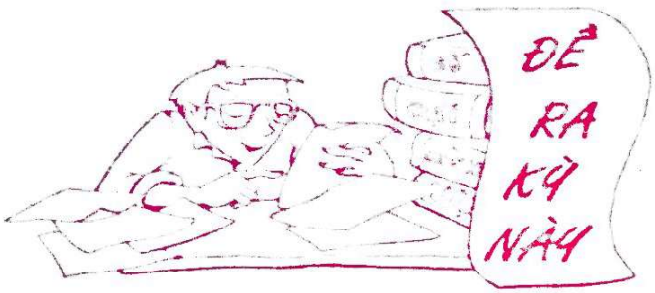
4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 1, M là trung điểm của SA, N thoả mãn $\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SN}$.

a) Tính sin góc giữa BM và CN.

b) Tính khoảng cách giữa BM và CN.

5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=BC=a$, $AA'=a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AD' và $A'D$; H là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$; K là hình chiếu của B lên mặt phẳng $(CA'B')$. Tính thể tích của khối tứ diện $IHBK$.

6. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AD=4a, SA=SB=SC=SD=\sqrt{6}a$. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích đạt giá trị lớn nhất, tính *sin* của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).



CÁC LỚP THCS

Bài T1/535 (Lớp 6). Cho a, b là các số tự nhiên lẻ nguyên tố cùng nhau. Tìm tất cả các giá trị có thể có của $\gcd\left(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1;\ 2^b+2^{\frac{b+1}{2}}+1\right)$, ở đây gcd($x$; y) kí hiệu là ước chung lớn nhất của hai số x và y.

(cbl.dolehaithung@gmail.com)

Bài T2/535 (Lớp 7). Biết N là số chẵn không chia hết cho 10, hãy tìm chữ số hàng chục của số N^{20} và chữ số hàng trăm của N^{200}.

NGUYỄN MẠNH THẮNG

(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài T3/535. Cho trước số nguyên tố p. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$x^2-(p+2)x+2p+1=p^y.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/535. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. OM cắt BC tại I, AM cắt đường tròn (O) tại N, kẻ đường kính NP. Các đường thẳng PA và BC cắt nhau tại E và Q là giao điểm của PC và BN. Chứng minh rằng ME tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác OIQ.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/535. Cho các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)}+\ldots+\frac{x_1}{x_n(x_n+x_1)}$$
$$\geq\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n+x_1}.$$

ĐINH THỊ QUYẾN

(GV THCS Nam Đông Quan, Đông Hưng, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/535. Biết rằng phương trình

$$(x-15)(x-10)(x-1964)=2021$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức

$$S=\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-15)^3+(x_i-10)^3+(x_i-1964)^3\right].$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T7/535. Cho hàm số nhận giá trị thực f xác định trên tập hợp các số nguyên dương ($f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$) thoả mãn điều kiện: Với mọi số nguyên dương $n>1$, tồn tại một ước nguyên tố p của n sao cho $f(n)=f\left(\frac{n}{p}\right)-f(p)$. Biết rằng $f(2021)=1$, hãy tính $f(2022)$.

NGUYỄN THÁI AN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T8/535. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (J) đi qua A cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E; cắt lại (O) tại P. Gọi I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDP, CEP. Chứng minh rằng ID, KE, AO đồng quy tại một điểm nằm trên (J).

ĐẬU ANH HÙNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/535. Cho p là một số nguyên tố bất kì, q là một số nguyên thoả mãn $0\leq q\leq p-1$. Chứng minh rằng $q!(p-q-1)!+(-1)^q\equiv 0 \pmod p$, trong đó kí hiệu $n!=1.2.3\ldots.n$.

HỒ SỸ HÙNG

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/535. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, biết f đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(f(x))=f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

NGÔ THANH NGHỊ

(SV Lớp 01CDT, ĐHKT Đà Nẵng)

Bài T11/535. Tìm số thực dương $a>1$ nhỏ nhất thoả mãn điều kiện: Với mọi điểm P nằm trong

hình vuông $ABCD$ (có thể trên cạnh hình vuông) thì luôn tồn tại hai trong bốn tam giác PAB, PCD, PDA, PBC (tam giác có thể suy biến) có tỉ số diện tích thuộc đoạn $\left[\frac{1}{a};a\right]$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/535. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại K khác A. OH cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại P. Trên (O) lấy điểm S sao cho $AS \parallel OH$. Đường thẳng qua S vuông góc với BC cắt (O) tại T. Chứng minh rằng KT đi qua trực tâm tam giác APH.

NGUYỄN VĂN LINH
(Hà Nội)

Bài L1/535. Hai nguồn kết hợp S_1, S_2 cách nhau một khoảng là 50 mm đều dao động theo phương trình $u = a\sin 200\pi t$ (mm) trên mặt nước. Biết vận tốc truyền sóng trên mặt nước $v = 0{,}8$ m/s và biên độ sóng không đổi khi truyền đi. Hỏi điểm gần nhất dao động cùng pha với nguồn trên đường trung trực của S_1S_2 cách nguồn S_1 bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/535. Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn AM có điện trở $R = 200\,\Omega$ và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu của đoạn mạch một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U và có tần số thay đổi được. Điều chỉnh tần số để cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại thì thấy điện áp trên đoạn mạch AM lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với cường độ dòng điện. Tính tổng trở của đoạn mạch lúc đó.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

CÁC LỚP THCS

Bài T1/535 (Lớp 6). Given odd coprime natural numbers a, b. Find all possible values of $\gcd\left(2^a + 2^{\frac{a+1}{2}} + 1;\ 2^b + 2^{\frac{b+1}{2}} + 1\right)$, where $\gcd(x, y)$ denote the greatest common divisor of two numbers x and y.

Bài T2/535 (Lớp 7). Suppose that N is an even number which is not a multiple of 10. Find the tens place of N^{20} and the hundreds place of N^{200}.

Bài T3/535. Given a prime number p. Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying

$$x^2 - (p+2)x + 2p + 1 = p^y.$$

Bài T4/535. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). The tangents to the circle at B and C intersect at M. OM intersects BC at I, AM intersects (O) at N, and draw the diameter NP. The lines PA and BC intersect at E and Q is the intersection between PC and BN. Show that ME is tangent to the circumcircle of OIQ.

Bài T5/535. Given positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Show that

$$\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)} + \frac{x_3}{x_2(x_2+x_3)} + \ldots + \frac{x_1}{x_n(x_n+x_1)} \geq \frac{1}{x_1+x_2} + \frac{1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n+x_1}.$$

CÁC LỚP THPT

Bài T6/535. Suppose that the equation

$$(x-15)(x-10)(x-1964) = 2021$$

has 3 solutions x_1, x_2, x_3. Find the value of the expression

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-15)^3 + (x_i-10)^3 + (x_i-1964)^3\right].$$

Bài T7/535. Given a function $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ satisfying the condition: For each positive integer $n > 1$, there exists a prime divisor p of n so that $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$. Suppose furthermore that $f(2021) = 1$. Compute $f(2022)$.

(Xem tiếp trang 34)

Bài T1/531 (Lớp 6). *Chứng tỏ rằng*

$$(2^{m+1}+1).(2^m+1) \vdots 3$$

với số tự nhiên m tùy ý.

Lời giải. Rõ ràng 2^m không chia hết cho 3 với số tự nhiên m tùy ý.

Cách 1. Nếu với số tự nhiên m mà 2^m chia cho 3 dư 2, tức là $2^m = 3h + 2$ thì

$$2^m + 1 = 3h + 3 = 3(h + 1) \text{ chia hết cho 3;}$$

nếu với số tự nhiên m mà 2^m chia cho 3 dư 1, tức là $2^m = 3k + 1$ thì

$$2^{m+1} + 1 = 2.2^m + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$$

chia hết cho 3, với h, k là các số tự nhiên.

Vậy tích $(2^{m+1} + 1)(2^m + 1)$ chia hết cho 3 với số tự nhiên m tùy ý.

Cách 2. Với số tự nhiên chẵn $m = 2v$ ta thấy

$$2^{m+1} = 2^{2v+1} = 2.4^v \equiv 2 \pmod 3$$

$$\Rightarrow 2^{m+1} + 1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (2^{m+1}+1)(2^m+1) \vdots 3.$$

Với số tự nhiên lẻ $m = 2v + 1$ thì

$$2^m = 2^{2v+1} = 2.4^v \equiv 2 \pmod 3$$

$$\Rightarrow 2^m + 1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (2^{m+1}+1)(2^m+1) \vdots 3.$$

Nhận xét. 1) Sử dụng *Cách* 1 các bạn hãy chứng minh rằng: Tích

$$(2^m + 1)(2^{m+1} + 1)(2^{m+2} + 1)(2^{m+3} + 1)$$

chia hết cho 45 với số tự nhiên m tùy ý.

2) Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Trần Anh Đức*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Lưu Trọng Phúc*, 6B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; *Đinh A Na, Nguyễn Thái Triệu, Nguyễn Thị Thảo Trang, Nguyễn Quốc Hoàng Anh, Thái Bá Nhân, Hoàng Phương Thảo*, 6A, *Phạm Xuân Hoàng, Nguyễn Thị Băng Tâm, Trần Hoàng Huỳnh, Trần Văn Cường, Lê Văn Quang Hiếu, Nguyễn Văn Hải Anh*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng:** *Đặng Ngọc Duy*, 6A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/531 (Lớp 7). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho khi viết $6^n + 1$ trong hệ thập phân ta được một số có tất cả các chữ số bằng nhau.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của một số bạn). Ta thử vài giá trị đầu tiên của n:

$$6^1 + 1 = 7$$
$$6^2 + 1 = 37$$
$$6^3 + 1 = 217$$
$$6^4 + 1 = 1297$$
$$6^5 + 1 = 7777$$
$$6^6 + 1 = 46657.$$

Ta thấy có $n = 1$ và $n = 5$ thỏa mãn bài toán. Bây giờ ta sẽ chứng minh $n \geq 6$ không thỏa mãn bài toán. Thật vậy, giả sử tồn tại giá trị $n \geq 6$ sao cho $6^n + 1 = \underbrace{a.a...a}_{k}$ thì $a = 7$ vì dễ thấy là 6^n luôn tận cùng bởi 6 với mọi n nguyên dương. Khi đó ta có:

$$(6^n + 1) - (6^5 + 1) = \underbrace{7.7...7}_{k} - 7777.$$

Vế phải bằng $\underbrace{777...7}_{k-4}0000 = \underbrace{777...7}_{k-4} \times 5^4 \times 2^4$ là một số không chia hết cho 2^5, còn vế trái bằng $6^5 \times (6^{n-5} - 1)$ là một số chia hết cho 2^5, vô lý. Mâu thuẫn đó chứng tỏ hai giá trị $n = 1$ và $n = 5$ là hai giá trị duy nhất thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau đây tìm được ít nhất một giá trị n thỏa mãn bài toán:

Sóc Trăng: *Đặng Ngọc Duy*, 6A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An:** *Trần Đức Toàn, Võ Ánh Dương*, 7D, *Trần Hoàng Huynh, Lê Văn Quang Hiếu*, 7A,

Trần Văn Cường, 7C, *Đinh A Na*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 8C1, *Đinh Quang Dũng*, 7C2, THCS Archimedes; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Văn Anh Dũng*, 8A2, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Ngân Hà*, 7A1, THCS Yên Phong.

Trong các bạn trên chỉ có *Đặng Ngọc Duy*, *Nguyễn Thị Ngân Hà*, *Đinh A Na* và *Lê Văn Quang Hiếu* tìm thấy đủ hai giá trị n.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/531. *Cho các số thực dương a và b thay đổi thỏa mãn đồng thời các điều kiện:* $[a]=[b]$, $a<b$. *Chứng minh* $\frac{1+b^2}{1+a^2}<2,5$.

(Trong đó kí hiệu $[x]$ *là phần nguyên của x).*

Lời giải.

* Nếu $0<a<1$, do $[a]=[b]$ nên $0<a<b<1$. Khi đó $0<a^2<b^2<1 \Leftrightarrow 1<1+a^2<1+b^2<2$.

Suy ra $\frac{1+b^2}{1+a^2}<\frac{2}{1}=2<2,5$.

* Nếu $b>a\geq 1$. Do $[a]=[b]$ và $a<b$ nên $b-a<1$, suy ra $b<a+1 \Leftrightarrow b^2<a^2+2a+1$.

Lại có $(1-a)^2\geq 0 \Leftrightarrow 1+a^2\geq 2a$ với mọi a.

Nhận thấy:

$$\frac{1+b^2}{1+a^2}=1+\frac{b^2-a^2}{1+a^2}<1+\frac{(a+1)^2-a^2}{1+a^2}=1+\frac{1+2a}{1+a^2}$$
$$<1+\frac{1+2a}{2a}\leq 2+\frac{1}{2a}<2+\frac{1}{2}=2,5.$$

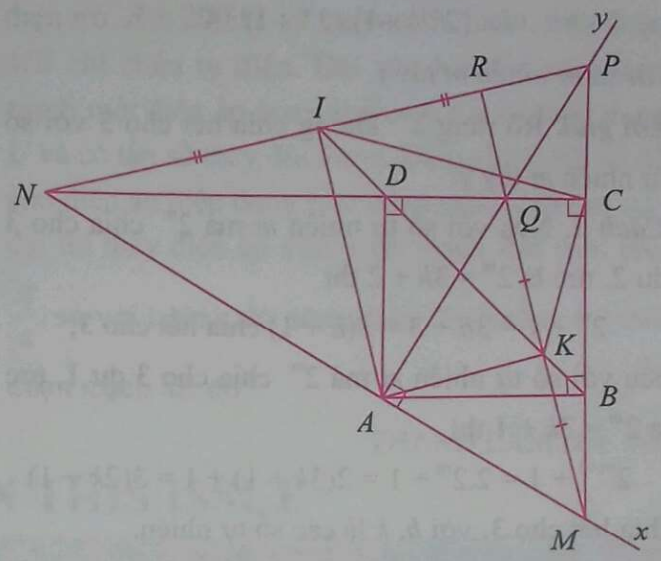
Do đó $\frac{1+b^2}{1+a^2}<2,5$. Vậy BĐT đã được chứng minh.

Nhận xét. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An**: *Đinh A Na*, 6A, *Đỗ Ánh Dương*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Bùi Đức Huy Hoàng*, 9A7, THCS Quang Trung, TP Bảo Lộc; *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Phú Thọ**: *Kiều Gia Huy*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/531. *Cho hình vuông ABCD. Một góc vuông xAy quay quanh A, có cạnh Ax cắt các đường thẳng BC và CD theo thứ tự tại M và N, cạnh Ay cắt hai đường thẳng BC và CD theo thứ tự tại P và Q. Đường thẳng QM cắt NP ở R. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh bốn điểm I, B, K, D thẳng hàng.*

Lời giải.



Áp dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông:

Trong tam giác vuông ANP có $AI=\frac{NP}{2}$.

Trong tam giác vuông PCN có $CI=\frac{NP}{2}$.

Suy ra $AI=CI$, do đó I thuộc đường trung trực của AC.

Tương tự, trong tam giác vuông AMQ có $AK=\frac{MQ}{2}$.

Trong tam giác vuông CMQ có $CK=\frac{MQ}{2}$.

Suy ra $AK=CK$, do đó K thuộc đường trung trực của AC. Mà theo tính chất hình vuông, BD là trung trực của AC. Do đó bốn điểm I, D, K, B thẳng hàng.

Nhận xét. 1) Giả thiết không dùng đến điểm R.

2) Bài toán không khó nên khá nhiều bạn tham gia giải. Các bạn lớp 8 sau đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Hồ Hoàng Vũ*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Kim Anh Quân, Phan Quốc Bảo*, 8A, *Nguyễn Thái Hoàng Anh, Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Sỹ Bảo Lâm, Hoàng Văn Quyết*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Hoàng*, 8A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Kiều Gia Huy*, 8A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/531. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a^4b+b^4c+c^4a+abc(a^3+b^3+c^3)\ge(a+b+c)(3abc-1).$$

Lời giải. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$a^4b+b^4c+c^4a+abc\left(a^3+b^3+c^3\right)+a+b+c \ge 3abc\left(a+b+c\right) \quad (1).$$

Trước hết ta chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2 \quad (2).$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^3+b^3+b^3\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3b^3}=3ab^2\Rightarrow a^3+2b^3\ge 3ab^2.$$

Tương tự: $b^3+2c^3\ge 3bc^2$;

$$c^3+2a^3\ge 3ca^2.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên suy ra (2), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Áp dụng BĐT (2), ta có:

$$\begin{aligned}\text{VT}(1)&=a^4b+b^4c+c^4a+abc\left(a^3+b^3+c^3\right)+a+b+c\\&\ge a^4b+b^4c+c^4a+abc\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+a+b+c.\\&=\left(a^4b+ab^2c^3+a\right)+\left(b^4c+bc^2a^3+b\right)\\&\quad+\left(c^4a+ca^2b^3+c\right) \quad (3).\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương với mỗi biểu thức trong từng dấu ngoặc của VP(3), ta có:

$$\text{VT}(1)\ge\text{VP}(3)\ge 3a^2bc+3b^2ca+3c^2ab=3abc\left(a+b+c\right).$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh, suy ra bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều giải bài toán bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba hoặc sáu số thực dương. Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Nội: *Nguyễn Tuấn Hoàng*, 8A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Trần Việt Anh*, 8C1, THCS & THPT Arcchimedes, Đông Anh, *Đào Quang Anh*, 6E2, THCS Everes, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thế Ngọc, Nguyễn Thùy Linh*, 9C, THCS Cao Mai, *Kiều Gia Huy*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Võ Ánh Dương*, 9D, *Trần Văn Cường*, 9C, *Trần Hoàng Huỳnh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tấn Phúc*, 9/1 THCS Nguyễn Trãi, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/531. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thì trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình vô nghiệm*

$$\sqrt{a+b}\,x^2-2\sqrt{a}\,x+\sqrt{c}=0;$$

$$\sqrt{b+c}\,x^2-2\sqrt{b}\,x+\sqrt{a}=0;$$

$$\sqrt{c+a}\,x^2-2\sqrt{c}\,x+\sqrt{b}=0.$$

Lời giải. Cách 1 (*chứng minh phản chứng*). Giả sử cả 3 phương trình đều có nghiệm. Khi đó:

$$\begin{cases}\Delta_1'=a-\sqrt{(a+b)c}\ge 0\\ \Delta_2'=b-\sqrt{(b+c)a}\ge 0\\ \Delta_3'=c-\sqrt{(c+a)b}\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\ge(a+b)c\\ b^2\ge(b+c)a\\ c^2\ge(c+a)b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{c}\ge\dfrac{a+b}{a}\\ \dfrac{b}{a}\ge\dfrac{b+c}{b}\\ \dfrac{c}{b}\ge\dfrac{c+a}{c}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Leftrightarrow 0\ge 3$$

(vô lý).

Do đó điều giả sử là sai. Vậy trong ba phương trình có ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Cách 2 (*chứng minh trực tiếp*). Do các phương trình trong bài toán không thay đổi qua phép hoán vị vòng quanh, nên ta có thể giả sử $c = \min\{a; b; c\}$. Khi đó xét phương trình (3): $\sqrt{c+a}.x^2 - 2\sqrt{c}.x + \sqrt{b} = 0$.

Ta có: $b(a+c) \geq c(c+c) = 2c^2 > c^2 \Rightarrow c < \sqrt{b(a+c)}$.

Do đó $\Delta_3' = c - \sqrt{(c+a)b} < 0$. Vậy (3) vô nghiệm.

Nhận xét. Bài toán khá dễ, có nhiều bạn tham gia giải bài này và hầu hết các bạn đều làm đúng theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên có một số bạn sai lầm khi lập luận rằng: Do vai trò của a, b, c trong bài toán là bình đẳng nên có thể giả thiết $a \geq b \geq c$. Có thể thấy ngay a, b, c trong bài toán là không bình đẳng (chẳng hạn cố định a, thay b bởi c và c bởi b thì các phương trình sẽ thay đổi). Bài toán chỉ không thay đổi qua phép hoán vị vòng quanh: $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$ nên ta chỉ có thể giả thiết một trong 3 số a, b, c là max (hoặc min) của 3 số. Nếu chỉ giả thiết $a \geq b \geq c$ thì mặc nhiên ta đã xét thiếu trường hợp $b < c$ (nếu coi a = max) và thiếu trường hợp $a < b$ (nếu coi c là min).

Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, *Trần Hữu Dương*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 11A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2; **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông; **Kiên Giang:** *Lương Gia Hưng*, 10 Tin, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thủy Tiên*, 11 Toán 2, *Huỳnh An Phú*, *Trần Sĩ Phương*, 10 Toán 1, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10 Toán 2, *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Vũ Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp:** *Phạm Hải Bằng*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, H. Kế Sách.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/531. *Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi G là trọng tâm tam giác đó, chứng minh rằng:* $\frac{GA^2}{bc} + \frac{GB^2}{ca} + \frac{GC^2}{ab} \geq 1$.

Lời giải (của bạn *Hà Huy Hào*). Giả sử x, y, z là các số thực; M là một điểm bất kì trên mặt phẳng tam giác ABC. Ta có:

$$(x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC})^2 \geq 0 \qquad (1).$$

Khai triển (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + 2xy\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2yz\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2zx\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} \geq 0 \ (1').$$

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vec tơ và định lí hàm số côsin cho tam giác AMB ta có:

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2MA.MB\cos\widehat{AMB} = MA^2 + MB^2 - AB^2.$$

Vậy $(1) \Leftrightarrow (1') \Leftrightarrow x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2$

$$+xy\left(MA^2 + MB^2 - AB^2\right) + yz\left(MB^2 + MC^2 - BC^2\right) + zx\left(MA^2 + MC^2 - AC^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(xMA^2 + yMB^2 + zMC^2\right) \geq xyc^2 + yza^2 + zxb^2 \qquad (2).$$

Chọn $x = a, y = b, z = c$ và $M \equiv G$, thay vào bất đẳng thức (2) ta được:

$$(a+b+c)\left(aGA^2 + bGB^2 + cGC^2\right) \geq abc^2 + bca^2 + cab^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(aGA^2 + bGB^2 + cGC^2\right) \geq abc(c+a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{GA^2}{bc} + \frac{GB^2}{ac} + \frac{GC^2}{ab} \geq 1.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Lời bình. Bạn *Hà Huy Hào* đã biết vận dụng vectơ để chứng minh bất đẳng thức tổng quát, và bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra như một hệ quả.

Nhận xét. Một số bạn giải bằng cách đi trực tiếp từ bất đẳng thức $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 \geq 0$ hoặc sử dụng công thức độ dài trung tuyến và biến đổi đại số.

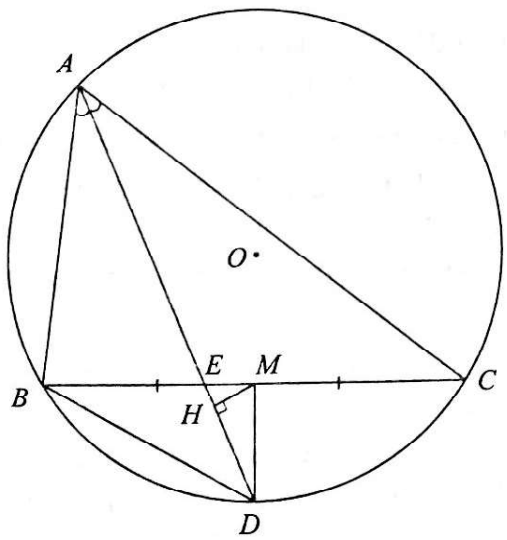
Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre**: *Hà Huy Hào*, 10

Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Đà Lạt:** *Tô Gia Bảo* 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long. **Hà Nội**: *Đào Quang Anh* 10E2, *Trần Việt Anh*, 8C1, THCS & THPT Everest, Bắc Từ Liêm; *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, huyện Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ**: *Lương Minh Hiếu*, *Hán Vũ Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Sóc Trăng**: *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế Sách; **Thừa Thiên Huế**: *Phan Thị Minh Châu*, *Lê Ngọc Cương*, *Lê Thị Thanh Tâm*, 11 Toán 2, *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, *Trần Sĩ Phương*, 10 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, THPT Chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc**: *Lê Thị Bảo Ngọc*, 8A2, THCS Yên Lạc, huyện Yên Lạc.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/531. *Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt (O) tại D, cắt BC tại E. Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AD. Chứng minh* $\sqrt{AD.EH}=\dfrac{AC-AB}{2}$.

Lời giải. (Theo bạn *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh** và bạn *Ngô Thị An Bình*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**).



Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác *ABC* ta được:

$$\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{EB}{BC}=\frac{AB}{AB+AC};\frac{EC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}.$$

Do đó: $\dfrac{AC-AB}{2}=\dfrac{(AB+AC).(EC-EB)}{2BC}$

$$=\frac{(AB+AC).EM}{BC}\quad(1).$$

Trong tam giác vuông EMD ta có: $EM=\sqrt{EH.ED}$.

Mặt khác từ $\Delta DBE\sim\Delta DAB\,(g.g)$ suy ra:

$$\frac{S_{DBE}}{S_{DAB}}=\frac{EB^2}{AB^2}$$

$$\Rightarrow\frac{ED}{AD}=\frac{EB^2}{AB^2}=\frac{BC^2}{(AB+AC)^2}\left(\frac{EB}{AB}=\frac{EC}{AC}=\frac{EB+EC}{AB+AC}=\frac{BC}{AB+BC}\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt{ED}=\frac{BC}{AB+AC}.\sqrt{AD}$$

$$\Rightarrow EM=\frac{BC}{AB+AC}.\sqrt{AD.EH}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{AD.EH}=\dfrac{AC-AB}{2}$.

Nhận xét. Các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Ngoài bạn *Hoàng* và bạn *Bình*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đào Quang Anh*, 10E2, TH, THCS, THPT Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, *Phạm Văn Thông*, 12 Toán 1, *Đoàn Hoàng Quân*, 11 Toán 1, *Nguyễn Văn Khiêm*, *Nguyễn Gia Khánh*, *Trần Hữu Dương*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Hán Vũ Long*, *Lương Minh Hiếu*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Sĩ Phương*, 10 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Phan Thị Minh Châu*, *Lê Thị Thanh Tâm*, *Lê Ngọc Cường*, *Nguyễn Hương Thuỷ*, 11 Toán 2, *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, *Mai Trung Nguyên*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Đồng Tháp:** *Lê Minh Thuận*, *Đỗ Duy Quang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê

Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Tây Ninh**: *Thái Gia Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha; **Kiên Giang:** *Lương Gia Hưng*, 10 Tin, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Sóc Trăng:** *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế Sách, huyện Kế Sách; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đặng Đình Trung*, 10CT, THPT Gia Định.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/531. *Giải phương trình*

$$2021^x = 1 + 2019x + \log_{2021}(1 + 2020x).$$

Lời giải. ĐK: $x > -\frac{1}{2020}$. Ta có

$2021^x = 1 + 2019.x + \log_{2021}(1 + 2020.x)$

$\Leftrightarrow 2021^x + x = (1 + 2020.x) + \log_{2021}(1 + 2020.x)$

$\Leftrightarrow f(x) = f(\log_{2021}(1 + 2020.x))$ (1)

trong đó $f(x) = 2021^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Chú ý nếu x, y là các số thực thoả mãn $x > y$ thì ta có $2021^x > 2021^y$, suy ra $f(x) > f(y)$. Do đó (1) tương đương với

$$x = \log_{2021}(1 + 2020.x)$$

$\Leftrightarrow 2021^x = 1 + 2020.x \Leftrightarrow g(x) = 2021^x - 2020.x - 1 = 0.$

Mặt khác $g'(x) = 2021^x.\ln 2021 - 2020, x \in \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có không quá một nghiệm, suy ra theo định lý Rolle, phương trình $g(x) = 0$ có không quá hai nghiệm. Ta thấy $g(1) = g(0) = 0$. Bởi vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Nhận xét. Đây là bài toán thuộc phần "*ứng dụng của đạo hàm trong giải phương trình*". Bài toán thuộc dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Hán Vũ Long, Lương Minh Hiếu*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân, Phạm Văn Thông*, 12T1, *Trần Hữu Dương*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc**: *Lê Thị Bảo Ngọc*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thuỳ Linh, Trần Thị Như Quỳnh*, 12A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Lê Đức Hiếu*, 10T1, *Trần Trọng Nghĩa, Nguyễn Hoàng Ngọc, Nguyễn Văn Huy, Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, *Phan Thị Minh Châu, Lê Ngọc Cường, Lê Thị Thanh Tâm, Nguyễn Hương Thuỷ*, 11T2, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Tiền Giang**: *Mai Võ Phúc Thành*, 12T, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Thiện Trí*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bến Tre**: *Hà Huy Hào*, 10T, THPT chuyên Bến Tre; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 9A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/531. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) nguyên tố cùng nhau sao cho* $(2^m - 1)(2^n - 1)$ *là một số chính phương.*

Lời giải (của bạn *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**). Do (m, n) nguyên tố cùng nhau nên tồn tại u, v nguyên dương sao cho $mu - nv = 1$. Xét d = ƯCLN $\left(2^m - 1; 2^n - 1\right)$. Ta có: $2^m \equiv 1 \pmod d$

$\Rightarrow 2^{mu} \equiv 1 \pmod d$; $2^n \equiv 1 \pmod d$

$\Rightarrow 2^{nv} \equiv 1 \pmod d$. Do đó: $2^{mu} - 2^{nv} \equiv 0 \pmod d$

$\Rightarrow 2^{nv}\left(2^{mu-nv} - 1\right) = 2^{nv} \equiv 0 \pmod d \Rightarrow d \mid 2^{nv}$.

Vì d lẻ nên $d = 1$. Vậy $\left(2^m - 1; 2^n - 1\right) = 1$. Do đó $\left(2^m - 1\right)\left(2^n - 1\right)$ là số chính phương khi và chỉ khi $2^m - 1$ và $2^n - 1$ đều là số chính phương.

Nếu $m > 1$ thì $2^m - 1 \equiv -1 \pmod 4$ nên không là số chính phương. Vậy $2^m - 1$ là số chính phương chỉ khi $m = 1$. Tương tự $2^n - 1$ là số chính phương chỉ khi $n = 1$.

Vậy cặp $(m, n) = (1; 1)$ là cặp duy nhất thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Ngoài bạn *Khánh*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Trần Hữu Dương*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Tuyên Quang:** *Phạm Mai Uyên*, 10 Toán, THPT chuyên

Tuyên Quang; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/531. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(xf(y))+y+f(x)=f(f(x+y))+yf(x) \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Thay lần lượt $x=0$ và $x=1$ vào (1), ta thu được:

$$f(0)+y+f(0)=f(f(y))+yf(0),\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(f(y))=2f(0)+y-yf(0),\forall y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

và $f(f(y))+y+f(1)$

$$=f(f(1+y))+yf(1),\forall y\in\mathbb{R} \quad (3).$$

Thay $f(f(y))$ xác định theo (2) vào (3), ta thu được: $2f(0)+y-yf(0)+y+f(1)$

$$=f(f(1+y))+yf(1),\forall y\in\mathbb{R} \quad (4).$$

Thay y bởi $1+y$ vào (2) ta được:

$$f(f(1+y))=2f(0)+1+y-(1+y)f(0)$$

$$=f(0)+1+y-yf(0),\forall y\in\mathbb{R} \quad (5).$$

Thay $f(f(1+y))$ xác định bởi (5) vào (4) ta có:

$$y[f(1)-1]-f(1)+1-f(0)=0,\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)-1=0\\-f(1)+1-f(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=1\\f(0)=0\end{cases}.$$

Thế $f(0)=0$ vào (2), ta thu được:

$$f(f(y))=y,\forall y\in\mathbb{R}$$

hay $\quad f(f(x+y))=x+y,\forall x,y\in\mathbb{R}.$

Thế giá trị này vào (1) ta thu được:

$$f(xf(y))+y+f(x)=x+y+yf(x),\forall x,y\in\mathbb{R} \quad (6).$$

Thế $y=1$ vào (6) và sử dụng đẳng thức $f(1)=1$, ta thu được:

$$f(x)+1+f(x)=x+1+f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=x$ thoả mãn điều kiện bài ra.

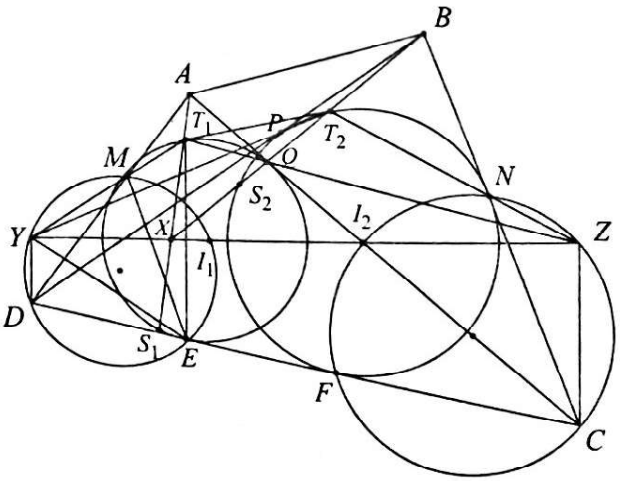
Kết luận: Tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện bài toán là $f(x)=x$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm cơ bản với cặp biến tự do trong lớp hàm một biến thực nên có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn gửi đến Tòa soạn đều giải theo cách đã trình bày ở trên và cho đáp số đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Trần Công Minh*, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc, *Nguyễn Đức Hoàng*, 11T, *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Hoàng Yến Nhi*, 11CT, THPT Gia Định; **Thừa Thiên Huế:** *Đặng Quang Đoàn*, *Nguyễn Trương Hiền*, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10T2, *Huỳnh An Phú*, *Trần Sỹ Phương*, 10T1, *Trần Thị Thanh Thư*, *Nguyễn Văn Huy*, 11T1, *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, *Nguyễn Văn Khiêm*, 10T1, *Phạm Văn Thông*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Hán Vũ Long*, *Lương Minh Hiếu*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương. **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 12T, THPT chuyên Tiền Giang; **Tây Ninh:** *Thái Gia Huy*, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/531. *Cho tứ giác lồi ABCD.* (I_1), (I_2) *lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác ADC, BDC.* T_1T_2 *là tiếp tuyến chung ngoài khác CD của* (I_1), (I_2) *(trong đó* T_1 *thuộc* (I_1) *và* T_2 *thuộc* (I_2)*). Chứng minh rằng* AT_1, BT_2, I_1I_2 *đồng quy.*

Lời giải. (Theo bạn *Võ Nhật Minh*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).



Gọi M, E, Q theo thứ tự là tiếp điểm của AD, DC, CA và (I_1); N, F, P theo thứ tự là tiếp điểm của (I_2) và BC, CD, DB; S_1, S_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AT_1, BT_2 và $(I_1), (I_2)$; X là giao điểm của AT_1, BT_2; Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của D, C trên I_1I_2.

Dễ thấy D, I_1, M, E, Y cùng thuộc đường tròn đường kính DI_1.

Dễ thấy các tam giác cân EDM, EYT_1 đồng dạng cùng hướng.

Do đó $(ED, EY) \equiv (EM, ET_1) (\text{mod}\, \pi)$.

Vậy $(MY, MT_1) \equiv (MY, MD) + (MA, MT_1)$

$$\equiv (EY, ED) + (EM, ET_1) \equiv 0 (\text{mod}\, \pi).$$

Do đó Y, M, T_1 thẳng hàng.

Tương tự các bộ ba điểm (Y, P, T_2), (Z, Q, T_1), (Z, N, T_2) thẳng hàng.

Dễ thấy các tứ giác MS_1QT_1 và NS_2PT_2 điều hòa.

Vậy $T_1(T_2XYZ) = T_1(T_1S_1MQ) = (T_1S_1MQ) = -1$

$$= (T_2S_2PN) = T_2(T_2S_2PN) = T_2(T_1XYZ).$$

Do đó X, Y, Z thẳng hàng.

Điều đó có nghĩa là AT_1, BT_2, I_1I_2 đồng quy.

Nhận xét. Bài toán này khó, ngoài bạn *Minh* chỉ có bạn *Tô Gia Bảo*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng** tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/531. *Có bốn điểm theo thứ tự O, M, N, P cùng nằm trên một sợi dây dài, đàn hồi, căng ngang. Biết MN = 2NP. Cho O dao động điều hoà. Trên dây có sóng truyền đi với biên độ không đổi. Biết phương trình sóng tại M và P lần lượt là:*

$$u_M = a\cos\left(100t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ và } u_P = a\cos\left(100t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Hãy viết phương trình sóng tại N.

Lời giải. Độ giảm pha của sóng khi truyền từ M tới P là: $\Delta\varphi_{MP} = \frac{2\pi.MP}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$,

$MN = \frac{2}{3}MP$, nên $\Delta\varphi_{MN} = \frac{2}{3}.\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$.

Vậy $u_N = a\cos\left(100t + \frac{2\pi}{3} - \frac{8\pi}{9}\right) = a\cos\left(100t - \frac{2\pi}{9}\right)$.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Quỳnh Anh*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Thái Hoàng Yến Nhi*, 11 Toán, THPT Gia Định, **TP. Hồ Chí Minh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/531. *Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch:*

$$i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right) \text{ (A) và } i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right) \text{ (A).}$$

Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

Lời giải. Do 2 trường hợp cường độ dòng điện hiệu dụng bằng nhau nên:

$$R^2 + Z_L^2 = R^2 + Z_C^2 \Rightarrow Z_L = Z_C.$$

Như vậy u_{RL} nhanh pha hơn cường độ dòng điện góc φ_1, còn u_{RC} chậm pha hơn i một góc φ_2, ta có: $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{10\pi}{21} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{6}$. Từ công thức $\tan\varphi_1 = \frac{Z_L}{R}$, suy ra: $Z_L = \frac{R}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}\ \Omega$.

Hiệu điện thế cực đại hai đầu mạch:

$$U_0 = 6.10\sqrt{3} = 60\sqrt{3}\text{ V}.$$

Khi cả ba phần tử mắc nối tiếp, xảy ra cộng hưởng dòng nên: $I_0 = \frac{U_0}{R} = 2\sqrt{3}\text{ A}$.

Công suất tiêu thụ của đoạn mạch khi đó bằng:

$$P = \frac{U_0I_0}{2} = 180\text{ W}.$$

Nhận xét. Chỉ có bạn *Hồ Phạm Phú An*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

SO SÁNH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN TUẤN ANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Giới thiệu. Trong bài viết sẽ sẽ điểm qua 20 bất đẳng thức (BĐT) và sự liên kết giữa chúng. Ta quy ước cách viết sau: Với BĐT (I) và (J), ta viết:

$$(I)\Rightarrow(J)$$

nếu có một đánh giá trực tiếp để từ BĐT (I) đúng, ta thu được BĐT (J) cũng đúng.

Với a,b,c là các số thực dương. Khi đó ta có các BĐT sau:[1]

BĐT 1 (Cauchy): $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc.$ (I_1)

BĐT 2: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca.$ (I_2)

BĐT 3:

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca).\ (I_3)$$

BĐT 4: $9\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)^3.$ (I_4)

BĐT 5: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 3.$ (I_5)

BĐT 6: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9.$ (I_6)

BĐT 7 (Nesbitt): $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}.$ (I_7)

BĐT 8: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}.$ (I_8)

BĐT 9: $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}\ge\dfrac{9}{a+b+c}.$ (I_9)

BĐT 10: $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}\ge 3.$ (I_{10})

BĐT 11:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c).\quad (I_{11})$$

BĐT 12: $\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}+\dfrac{ab}{a+b}\le\dfrac{1}{2}(a+b+c).$ (I_{12})

BĐT 13 (Schur):

$$a^3+b^3+c^3+3abc$$
$$\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).\quad (I_{13})$$

BĐT 14:

$$\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.\ (I_{14})$$

BĐT 15:

$$27\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge(bc+ca+ab)(a+b+c)^4.\ (I_{15})$$

BĐT 16 (IMO 1984):

$$\frac{7}{27}(a+b+c)^3+2abc$$
$$\ge(ab+bc+ca)(a+b+c).\quad (I_{16})$$

BĐT 17 (Jack Garfunkel):

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.\quad (I_{17})$$

BĐT 18 (Russia năm 2000): *Với $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).\ (I_{18})$$

BĐT 19 (Hong Kong năm 1997):

$$\frac{3+\sqrt{3}}{9}\ge\frac{abc\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)}.\ (I_{19})$$

BĐT 20 (Việt Nam TST 2021): *Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn:*

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)=5(a+b+c).$$

Khi đó:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ca)+7abc\le 25.\ (I_{20})$$

[1] Đa số các BĐT đúng với trường hợp các biến không âm. Tuy nhiên, để tránh phức tạp trong lập luận không cần thiết, người viết đã thay đổi điều kiện là các biến đều dương.

Ta có các đánh giá sau:

$\bullet (I_1) \Leftrightarrow (I_2)$: $a^2+b^2+c^2$

$$=(ab+bc+ca)+\frac{3}{a+b+c}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_3)$:

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$+\frac{243}{16}\frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_3) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc$

$$\geq\frac{1}{3}\left[9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\right].$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_4)$: $9\left(a^3+b^3+c^3\right)$

$$\geq(a+b+c)^3+15\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_4) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

$$\geq abc+\frac{1}{24}\left[9\left(a^3+b^3+c^3\right)-(a+b+c)^3\right].$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_5)$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+\frac{9}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$(I_5) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

$$\geq abc+\frac{27abc(ab+bc+ca)^2}{4(a+b+c)^4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right).$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_6)$: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$$\geq 9+\frac{48}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_6) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

$$\geq abc+\frac{1}{3}abc\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\right].$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_7)$: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

$$\geq\frac{3}{2}+\frac{6}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_7) \Rightarrow (I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc+\frac{1}{96}\left(59+11\sqrt{33}\right)\times$$

$$\times\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right).$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_8)$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}+\frac{48}{(a+b+c)^4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_8) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc+$

$$+\frac{1}{3}abc(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{9}{a+b+c}\right).$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_9)$: $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}\geq\dfrac{9}{a+b+c}+$

$$+\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_9) \Rightarrow (I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc+\frac{1}{192}\left(59+11\sqrt{33}\right)\times$$

$$\times(ab+bc+ca)^2\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}-\frac{9}{a+b+c}\right).$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_{10})$: $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}$

$$\geq 3+\frac{36}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_{10}) \Rightarrow (I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc+$

$$+\frac{(ab+bc+ca)^2}{4(a+b+c)}\left[\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}-3\right].$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_{11})$:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)+$$
$$+3\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

•$(I_{11})\Rightarrow(I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+$

$$+\frac{1}{6}\left[3\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)\right].$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{12})$: $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\ge\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}+$

$$+\frac{ab}{a+b}+\frac{3}{2(a+b+c)^2}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

•$(I_{12})\Rightarrow(I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc-\frac{1}{3}(a+b+c)^2\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}(a+b+c)-\left(\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\right)\right].$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{13})$: $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+$

$$+bc(b+c)+ca(c+a)+\frac{1}{3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right)M^2$$

với $M=\dfrac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}-3.$

•$(I_{13})\Rightarrow(I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+\frac{1}{3}\left\{a^3+b^3+c^3+3abc-\right.$$
$$\left.-\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]\right\}.$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{14})$: $\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a+b+c}{3}\ge$

$$\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+\frac{1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}-2\sqrt{6}}{(a+b+c)^2}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

•$(I_{14})\Rightarrow(I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+\frac{17(a+b+c)^2}{9}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b+c}{3}-\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right).$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{15})$:

$$27\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge(bc+ca+ab)(a+b+c)^4+$$
$$+12(a+b+c)^3\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

•$(I_{15})\Rightarrow(I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+\frac{1}{81(a+b+c)^3}\times$$
$$\times\left[27\left(a^3+b^3+c^3\right)^2-(bc+ca+ab)(a+b+c)^4\right].$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{16})$: $\dfrac{7}{27}(a+b+c)^3+2abc\ge$

$$\ge(ab+bc+ca)(a+b+c)+\frac{1}{9}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

•$(I_{16})\Rightarrow(I_1)$: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+$

$$+\frac{9}{7}\left[\frac{7}{27}(a+b+c)^3+2abc-(ab+bc+ca)(a+b+c)\right].$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{17})$: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge$

$$\ge2+\frac{1}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right)M^2$$

với $M=\dfrac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}-3.$

•$(I_{17})\Rightarrow(I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc+\frac{2(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}\times$$
$$\times\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2\right].$$

•$(I_1)\Rightarrow(I_{18})$:

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)\sqrt[3]{abc}\ge2(ab+bc+ca)+$$
$$+\frac{1}{3(a+b+c)}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right)M^2$$

với $M=\dfrac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}-3.$

$\bullet (I_{18}) \Rightarrow (I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc + \frac{3}{10}(a+b+c)\times$$
$$\times\left[a^2+b^2+c^2+(a+b+c)\sqrt[3]{abc}-2(ab+bc+ca)\right].$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_{19})$:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{9} \ge \frac{abc\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)} +$$
$$+\frac{3+\sqrt{3}}{3}\frac{1}{(a+b+c)^3}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right).$$

$\bullet (I_{19}) \Rightarrow (I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc + \frac{3-\sqrt{3}}{8}\times$$
$$\times\left[\frac{3+\sqrt{3}}{9}-\frac{abc\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}\right](a+b+c)^3.$$

$\bullet (I_1) \Rightarrow (I_{20})$:

$$N^2 \ge 4(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)+\frac{35abc}{N}+$$
$$+\frac{35(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^5}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\right)$$

với $N = \dfrac{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$.

$\bullet (I_{20}) \Rightarrow (I_1)$:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc \ge \frac{4(a+b+c)}{27}\times$$
$$\times\left\{N^2-\left[4(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)+\frac{35abc}{N}\right]\right\}$$

Với $N = \dfrac{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$

Chứng minh. Chứng minh các đánh giá trên trước hết ta chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó tồn tại $t \in [0;1)$ sao cho $ab+bc+ca = 3-3t^2$. Sử dụng kết quả quen thuộc sau:

$$(1+t)^2(1-2t) \le abc \le (1-t)^2(1+2t).$$

Thay vào các đánh giá, vấn đề còn lại đơn giản là biến đổi đại số hoặc có thể kết hợp khảo sát hàm số. Phần này xin dành cho bạn đọc.

Từ đó ta được:

$$(I_i) \Rightarrow (I_j) \text{ và } (I_j) \Rightarrow (I_i), \forall i \ne j.$$

****

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 22)

Bài T8/535. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). A circle (J) passing through A intersects the sides AB, AC respectively at D and E; intersects (O) at the second point P. Let I, K respectively be the circumcenters of BDP and CEP. Prove that ID, KE, AO are concurrent at a point on (J).

Bài T9/535. Given an arbitrary prime number p, and q is an integer $0 \le q \le p-1$. Show that $q!(p-q-1)!+(-1)^q \equiv 0 \pmod p$, where $n! = 1.2.3\ldots n$.

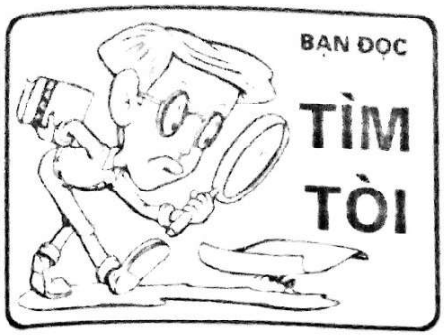
TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/535. Find all increasing continuous function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(f(x)) = f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài T11/535. Find the smallest positive number $a > 1$ satisfying the condition: For any point P lies inside and on the boundary of the square $ABCD$, there always two among four triangles PAB, PCD, PDA, PBC (some triangle can be reduced to a line segment) so that the ratio of two areas belongs to $\left[\frac{1}{a};a\right]$.

Bài T12/535. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O) with orthocenter H. The circle with diameter AH intersects (O) at the second point K. OH intersects the tangent at A to the circle (O) at P. Let S be the point on (O) so that $AS \parallel OH$. The line through S perpendicular to BC intersects (O) at T. Show that KT passes through the orthocenter of APH.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)



MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ LEIBNIZ VÀ ỨNG DỤNG

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Định lý Leibniz là một trong những định lý nổi tiếng của hình học sơ cấp, có nhiều ứng dụng đặc biệt trong hình học sơ cấp. Định lý được phát biểu như một bài tập trong sách giáo khoa hình học lớp 10. Trong bài viết này, chúng tôi xin nêu lên một số hướng mở rộng của định lý Leibniz và một vài ứng dụng của định lý nổi tiếng này.

1. ĐỊNH LÝ LEIBNIZ. *Cho M là một điểm bất kì trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Khi đó ta có:* $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3MG^2$,

trong đó G là trọng tâm của tam giác và a,b,c *là độ dài của ba cạnh* BC,CA,AB *tương ứng.*

2. MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ LEIBNIZ

a) Hướng thứ 1

Định lý 1. *Cho* $A_1,A_2,...,A_n$ *là các điểm trong không gian và G là trọng tâm của hệ điểm này, với mọi điểm M trong không gian, ta có đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^{n}MA_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2+nMG^2.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}MA_i^2=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\overrightarrow{GA_i}+\overrightarrow{GA_i}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}GA_i^2+2\overrightarrow{MG}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}+nMG^2=\sum_{i=1}^{n}GA_i^2+nMG^2.$$

Chú ý rằng, với mọi $i\neq j,i,j=1,2,...,n$, ta có:

$$GA_i^2+GA_j^2=\left(\overrightarrow{GA_i}-\overrightarrow{GA_j}\right)^2+2\overrightarrow{GA_i}\overrightarrow{GA_j}$$

$$=A_iA_j^2+2\overrightarrow{GA_i}\overrightarrow{GA_j}.$$

Do đó: $\sum_{i=1}^{n}GA_i^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\left(GA_i^2+GA_j^2\right)$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2+2\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\overrightarrow{GA_i}\overrightarrow{GA_j}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2-\sum_{i=1}^{n}GA_i^2\right).$$ Suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n}GA_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2.$$

Từ đó suy ra: $\sum_{i=1}^{n}MA_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}A_iA_j^2+nMG^2$.

b) Hướng thứ hai

Định lý 2. *Cho* $A_1,A_2,...,A_n$ *là các điểm trong không gian và* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ *là các số thực có tổng bằng* α *khác 0. Giả sử G là tâm tỉ cự của hệ điểm* $\{A_1,A_2,...,A_k\}$ *và hệ số* $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$, *ta có hệ thức:* $\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+...+\alpha_nMA_n^2$

$$=\alpha MG^2+\alpha_1GA_1^2+\alpha_2GA_2^2+...+\alpha_nGA_n^2,$$

với mọi điểm M.

Chứng minh. Vì G là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1,A_2,...,A_k\}$ ứng với hệ số $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$, ta có $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$. Khi đó, với mọi điểm M, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iMA_i^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{MG}^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\overrightarrow{MG}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}^2$$

$$=\alpha MG^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_iGA_i^2.$$

Từ kết quả trên, với $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=1$, ta nhận được: $MA_1^2+MA_2^2+...+MA_n^2$

$$=nMG^2+GA_1^2+GA_2^2+...+GA_n^2.$$

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG TỪ CÁC ĐỊNH LÝ (MỞ RỘNG)

Kết quả 1. Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ là các điểm nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính R, thì với $M \equiv O$, ta có

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j^2.$$

Từ kết quả này ta suy ra được $\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j^2 \le n^2R^2$

a) Trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$.

b) Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, ta luôn có :

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right).$$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \le 16R^2$

Kết quả 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\frac{1}{A_iA_j^2} \ge \frac{\left(n(n-1)/2\right)^2}{\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j^2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j^2}.$$

$$\ge \frac{n^2(n-1)^2}{4n^2R^2} = \frac{(n-1)^2}{4R^2}.$$

Từ kết quả này ta suy ra được

a) Trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{R^2}.$$

b) Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, ta luôn có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2} \ge \frac{9}{4R^2}.$$

Kết quả 3. Từ kết quả 1, sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j \le \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\sqrt{\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j^2} \le \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}nR.$$

Từ kết quả này ta suy ra được:

a) Trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$a+b+c \le 3\sqrt{3}R.$$

b) Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, ta luôn có:

$$a+b+c+d+e+f \le 4\sqrt{6}R.$$

Kết quả 4. Từ kết quả 3, sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\frac{1}{A_iA_j} \ge \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2}{\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} A_iA_j} \ge \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}nR} = \frac{(n-1)\sqrt{n(n-1)}}{2\sqrt{2}R}..$$

Từ kết quả này ta suy ra được:

a) Trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

b) Trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, ta luôn có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f} \ge \frac{3\sqrt{6}}{2R}.$$

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Bài toán 1. [Problem 11301, Americal Mathematical Monthly] *Chứng minh rằng với mọi số phức a,b,c ta có bất đẳng thức*

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \le \frac{9}{16}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right).$$

Lời giải. Với mọi số a,b,c ta có đẳng thức:

$$ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right) = (b-a)(a-c)(c-b)(a+b+c).$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
&ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\\
&=ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-a^2\right)+bc\left(a^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\\
&=\left(b^2-a^2\right)(bc-ab)+\left(c^2-a^2\right)(ca-bc)\\
&=b\left(b^2-a^2\right)(c-a)+c\left(c^2-a^2\right)(a-b)\\
&=(b-a)(c-a)\left(b^2+ba-c^2-ca\right)\\
&=(b-a)(a-c)(c-b)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên, ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$|(b-a)(a-c)(c-b)(a+b+c)| \le \frac{9}{16}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right).$$

Xét trong mặt phẳng phức, giả sử O là gốc tọa độ, và các điểm A,B,C biểu diễn cho các số phức a,b,c. Khi đó, bất đẳng thức trên được biểu diễn dưới dạng:

$$3OG.AB.BC.CA \le \frac{9}{16}\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)^2 \ (*),$$

trong đó G là trọng tâm của hệ ba điểm A,B,C. Sử dụng định lý Leibniz, kết hợp bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$OA^2+OB^2+OC^2 = 3OG^2+\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}BC^2+\frac{1}{3}CA^2$$
$$\ge 4\sqrt[4]{3OG^2.\frac{1}{3}AB^2.\frac{1}{3}BC^2.\frac{1}{3}CA^2}$$

hay $\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)^2 \ge \frac{16}{3}.OG.AB.BC.CA.$

Bất đẳng thức (*) được chứng minh xong.

Bài toán 2. [Thi HSG Tỉnh Vĩnh Long, 1996 – 1997] *Cho thập giác đều $A_1A_1A_2...A_{10}$ có độ dài cạnh bằng với a. Chứng minh rằng với mọi điểm M trên mặt phẳng chứa thập giác đều trên, ta luôn có* $\sum_{i=1}^{10} MA_i^2 \ge 5a^2\left(3+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_1A_2...A_{10}$. Sử dụng định lý 2, ta có:

$$\sum_{i=1}^{10} MA_i^2 = 10MO^2+\sum_{i=1}^{10} OA_i^2 = 10MO^2+10R^2 \ge 10R^2.$$

Sử dụng định lý côsin cho tam giác OA_1A_2, chú ý $\widehat{A_1OA_2} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ và $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, ta có:

$$a^2 = A_1A_2^2 = R^2+R^2-2R^2\cos 36^0$$
$$= 2R^2\left(1-\cos 36^\circ\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}R^2.$$

Suy ra $10R^2 = 5a^2\left(3+\sqrt{5}\right)$. Từ đó ta có đánh giá

$$\sum_{i=1}^{10} MA_i^2 \ge 5a^2\left(3+\sqrt{5}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.

Bài toán 3. [Crux Problem 3938] *Cho tam giác ABC và một đường tròn (O,R). Hãy tìm điểm P thuộc (O) sao cho $PA^2+PB^2+PC^2$ đạt giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Giả sử G là trọng tâm của tam giác ABC. Sử dụng định lý Leibnitz, ta có

$$PA^2+PB^2+PC^2 = 3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2 \ (*).$$

Nếu $G \equiv O$ thì $PG = R$. Khi đó $PA^2+PB^2+PC^2$ là một hằng số.

Nếu $G \not\equiv O$ thì đường thẳng OG cắt đường tròn (O) tại các điểm P_1,P_2, giả sử P_1 gần G hơn so với P_2. Khi đó, từ (*), ta suy ra $PA^2+PB^2+PC^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $P \equiv P_2$, và đạt giá trị nhỏ nhất khi $P \equiv P_1$.

Bài toán 4. [Crux Problem 4594] *Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có hệ thức:*

$$\frac{MA^2}{h_a}+\frac{MB^2}{h_b}+\frac{MC^2}{h_c} = 2R+r,$$

trong đó h_a,h_b và h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A,B và C; R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.

Lời giải. Với S là diện tích của tam giác ABC, ta có $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, với a,b,c lần lượt là độ dài của các cạnh BC,CA,AB. Kí hiệu L là vế trái của hệ thức cần chứng minh, ta có

$$L = \frac{MA^2}{h_a}+\frac{MB^2}{h_b}+\frac{MC^2}{h_c} = \frac{aMA^2+bMB^2+cMC^2}{2S}.$$

Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có các hệ thức quan trọng sau:

$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $aIA^2+bIB^2+cIC^2 = abc.$

Từ đó, với nhận xét điểm I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A,B,C\}$ ứng với hệ số $\{a,b,c\}$, sử dụng định lý 2, ta có: $aMA^2+bMB^2+cMC^2$
$= (a+b+c)MI^2+aIA^2+bIB^2+cIC^2 = 2pr^2+abc$,
với $2p = a+b+c$. Suy ra:

$$L = \frac{2pr^2+abc}{2S} = \frac{2r.S+4RS}{2S} = r+2R.$$

Bài toán 5. [Crux Problem 4201]. *Cho M là điểm nằm trong đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn (O), bán kính $R = 1$. Giả sử $A_kB_k, k = 1,2,...,n$ là các dây cung qua đỉnh A_k và điểm M. Chứng minh rằng*

$$\frac{A_1B_1^2+A_2B_2^2+...+A_nB_n^2}{n} \ge \frac{4}{1+OM^2}.$$

Lời giải. Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) được xác định bởi

$$\wp_{M/(O)} = \overline{MA_k}.\overline{MB_k}, k = 1,2,...,n.$$

Suy ra $MA_k.MB_k = \rho = 1 - OM^2, k = 1,2,...,n$. Do đó, với mọi $k = 1,2,...,n$, ta có:

$$A_kB_k^2 = (A_kM + MB_k)^2 = A_kM^2 + 2\rho + \frac{\rho^2}{A_kM^2}.$$

Suy ra: $\sum_{k=1}^{n} A_kB_k^2 = \sum_{k=1}^{n} A_kM^2 + \rho^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_kM^2} + 2n\rho.$

Mặt khác, sử dụng định lý 2, ta có hệ thức:

$$\sum_{k=1}^{n} A_kM^2 = nOM^2 + \sum_{k=1}^{n} OA_k^2 = n(1 + OM^2).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, dạng Engel, ta có: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_kM^2} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} A_kM^2}$. Từ đó suy ra:

$$\sum_{k=1}^{n} A_kB_k^2 \geq n(1 + OM^2) + \frac{n^2(1 - OM^2)^2}{n(1 + OM^2)}$$

$$+ 2n(1 - OM^2) = \frac{4n}{1 + OM^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.

Bài toán 6. [T12/373, THTT] *Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, bán kính mặt cầu ngoại tiếp R. Chứng minh rằng*

$$GA + GB + GC + GD + 4R$$

$$\geq \frac{2}{\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + CD + DB).$$

Lời giải. Trước hết, ta phát biểu các bổ đề sau

Bổ đề 1. Nếu G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$GA^2 = \frac{3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (CD^2 + DB^2 + BC^2)}{16}.$$

Chứng minh bổ đề 1. Gọi G_A là trọng tâm của tam giác BCD. Ta có:

$$GA^2 = \frac{9}{16}AG_A^2 = \frac{9}{16}.\frac{1}{9}\left(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}\right)^2$$

$$= \frac{3\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2\right) - \left(\overline{AC} - \overline{AD}\right)^2 - \left(\overline{AD} - \overline{AB}\right)^2 - \left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)^2}{16}$$

$$= \frac{3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (CD^2 + DB^2 + BC^2)}{16}.$$

Bổ đề 2. *Nếu O, G theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì*

$$R^2 - OG^2 = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{4}$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2 + CD^2 + DB^2 + BC^2}{16}.$$

Chứng minh bổ đề 2. Sử dụng định lý 2, ta có:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 4OG^2$$

hay $R^2 - OG^2 = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{4}$.

Kết hợp bổ đề 1, ta có: $\frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{4}$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2 + CD^2 + DB^2 + BC^2}{16}.$$

Trở lại bài toán, sử dụng các bổ đề 1 và 2, ta có đánh giá: $R.GA = OA.GA \geq \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA}$

$$= \frac{OA^2 + GA^2 - OG^2}{2} = \frac{GA^2 + R^2 - OG^2}{2}$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2}{8}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta nhận được:

$$\sqrt{6}(R + GA) \geq 2\sqrt{6}\sqrt{R.GA} = \sqrt{3}\sqrt{8R.GA}$$

$$\geq \sqrt{3(AB^2 + AC^2 + AD^2)} \geq AB + AC + AD.$$

Một cách tương tự, ta cũng có:

$$\sqrt{6}(R + GB) \geq BC + BD + BA;$$

$$\sqrt{6}(R + GC) \geq CD + CA + CB;$$

$$\sqrt{6}(R + GD) \geq DA + DB + DC.$$

Từ đó suy ra: $GA + GB + GC + GD + 4R$

$$\geq \frac{2}{\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + CD + DB).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tứ diện $ABCD$ đều.

Bài toán 7. *Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu (O), G là trọng tâm tứ diện. Các đường thẳng AG, BG, CG và DG cắt lại (O) theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng*

a) $GA.GB.GC.GD \leq GA_1.GB_1.GC_1.GD_1$;

b) $\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \geq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1}$;

c) $GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geq GA + GB + GC + GD$.

Lời giải. Ta sử dụng kí hiệu

$$\sum GA = GA + GB + GC + GD.$$

a) Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương bất đẳng thức: $(GA.GB.GC.GD)^2$

$$\le (GA.GA_1).(GB.GB_1).(GC.GC_1).(GD.GD_1).$$

Mặt khác: $GA.GA_1 = GB.GB_1 = GC.GC_1 = GD.GD_1$

$$= R^2 - OG^2$$

và sử dụng định lí 2, ta có:

$$4R^2 - 4OG^2 = \sum GA^2 \ge \frac{1}{4}\left(\sum GA\right)^2$$

$$\ge \frac{1}{4}.16.\sqrt{GA.GB.GC.GD}$$

hay $\left(R^2 - OG^2\right)^4 \ge (GA.GB.GC.GD)^2$.

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

b) Ta có: $\sum \frac{1}{GA_1} = \sum \frac{GA}{R^2 - OG^2} = \frac{1}{R^2 - OG^2}\sum GA.$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương bất đẳng thức: $\sum \frac{1}{GA} \ge \frac{1}{R^2 - OG^2}\sum GA$

$$\Leftrightarrow \left(R^2 - OG^2\right)\sum \frac{1}{GA} \ge \sum GA.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\left(R^2 - OG^2\right)\sum \frac{1}{GA} = \frac{1}{4}\sum GA^2 \sum \frac{1}{GA}$$

$$\ge \frac{1}{16}\left(\sum GA\right)^2 \sum \frac{1}{GA} \ge \frac{1}{16}\left(\sum GA\right)^2 \frac{16}{\sum GA} = \sum GA.$$

c) Sử dụng các kết quả trên, ta có

$$\sum GA_1 = \sum \frac{GA_1.GA}{GA} = \left(R^2 - OG^2\right)\sum \frac{1}{GA} \ge \sum GA.$$

Bài toán 8. [Crux Problem 2629]. *Cho tam giác ABC, gọi S là điểm đối trung của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3}\left(SA^2 + SB^2 + SC^2\right) \ge \frac{BC^2.SA^2 + CA^2.SB^2 + AB^2.SC^2}{BC^2 + CA^2 + AB^2}.$$

Lời giải. Trước hết ta nhắc lại kết quả quan trọng sau: $a^2\overrightarrow{SA} + b^2\overrightarrow{SB} + c^2\overrightarrow{SC} = \vec{0}$ hay S là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ ứng với hệ số $\{a^2, b^2, c^2\}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Sử dụng định lý 2, ta có các kết quả sau:

$$SA^2 + SB^2 + SC^2 = 3SG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

và $a^2GA^2 + b^2GB^2 + c^2GC^2$

$$= \left(a^2 + b^2 + c^2\right)SG^2 + a^2SA^2 + b^2SB^2 + c^2SC^2.$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh được biểu diễn dưới dạng:

$$6\left(a^2 + b^2 + c^2\right)SG^2 \ge \left(2a^2 - b^2 - c^2\right)GA^2$$

$$+ \left(2b^2 - c^2 - a^2\right)GB^2 + \left(2c^2 - a^2 - b^2\right)GC^2 \ (*).$$

Mặt khác: $GA^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$,

$$GB^2 = \frac{1}{9}\left(2c^2 + 2a^2 - b^2\right), GC^2 = \frac{1}{9}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

Bằng các biến đổi đại số, vế phải của (*) là:

$$-\frac{1}{3}\left[\left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 + \left(c^2 - a^2\right)^2\right] \le 0.$$

Bất đẳng thức (*) được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S \equiv G$ hay tam giác ABC đều.

Cuối cùng là một số bài tập.

1. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c và P là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

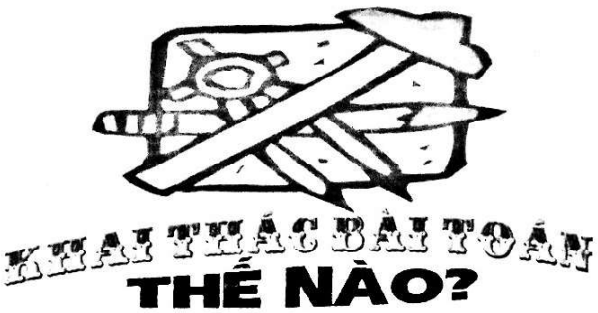
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2. [T10/244, TH&TT] Gọi l và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện. Hỏi trong số các tứ diện, tứ diện nào đạt GTLN của tỉ số $\frac{l}{R}$? Và tính GTLN đó.

3. [Problem 3394, Dragoljub Milosevic, G. Milanovac, Serbia, CRUX] Cho tứ diện $ABCD$. Kí hiệu h_A và m_A lần lượt chỉ độ dài đường cao và độ dài đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh A đến mặt (BCD) đối diện. Gọi V là thể tích của tứ diện. Chứng minh rằng

$$\left(h_A + h_B + h_C + h_D\right)\left(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2\right) \ge \frac{128}{\sqrt{3}}V.$$

Bài 4. [Problem 11433, American Mathematical Monthly] Cho n là một số nguyên dương và các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2 ... B_n, C_1, C_2, ..., C_n$ cùng thuộc mặt cầu (S) có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại điểm P thuộc mặt cầu (S) sao cho $\sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} PB_i^2 = \sum_{i=1}^{n} PC_i^2$.



KHAI THÁC BÀI TOÁN GỐC

HOÀNG TRỌNG TÀI

(GV THCS Mỹ Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Trong giải toán việc nắm chắc *"bài toán gốc"* là rất quan trọng, nó giúp các em học sinh hình thành kỹ năng giải toán rất linh hoạt và giải quyết được rất nhiều bài toán khó.

Bài toán gốc. *Cho a, b, c khác 0 và thỏa mãn*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a)=0.$

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$$\Rightarrow (a+b)\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right]=0$$

$$\Rightarrow (a+b)(ac+bc+c^2+ab)=0$$

$$\Rightarrow (a+b)[a(b+c)+c(b+c)]=0$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Chúng ta sẽ sử dụng bài toán gốc này để giải các bài toán sau một cách dễ dàng!

Bài toán 1. *Chứng minh rằng nếu có*

$$x+y+z=2021 \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2021}$$

thì tồn tại một trong ba số x,y,z *bằng* 2021.

Lời giải. Từ $x+y+z=2021$ và

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2021}$, suy ra: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$ (theo kết quả bài toán gốc)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=2021 \\ x=2021 \\ y=2021 \end{array}\right.$$

(vì $x+y+z=2021$).

Vậy tồn tại một trong ba số x,y,z bằng 2021.

Bài toán 2. *Cho* a,b,c *khác* 0 *thỏa mãn:*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1.$$

Tính $Q=\left(a^{2017}+b^{2017}\right)\left(b^{2019}+c^{2019}\right)\left(c^{2021}+a^{2021}\right).$

Lời giải. Từ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

(theo kết quả bài toán gốc)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c. \\ c=-a \end{array}\right.$$

- Với $a=-b \Rightarrow a^{2017}+b^{2017}=0 \Rightarrow Q=0.$
- Với $b=-c \Rightarrow b^{2019}+c^{2019}=0 \Rightarrow Q=0.$
- Với $c=-a \Rightarrow c^{2021}+a^{2021}=0 \Rightarrow Q=0.$

Vậy $Q=0.$

Bài toán 3. *Cho 3 số* a,b,c *thỏa mãn:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}.$$

Lời giải. Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ (1)

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

(theo kết quả bài toán gốc)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \quad (2).$$

Do vai trò của a,b,c ở (1) là như nhau nên từ (2) ta có thể giả sử $a=-b$.

Khi đó ta có: $\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{c^{2021}}$

và $\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}=\frac{1}{c^{2021}}$.

Do đó: $\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$.

Bài toán 4. *Tính giá trị của biểu thức:*

$$P=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}$$

trong đó a,b,c khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} & (1) \\ a^3+b^3+c^3=2021^3 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải. Từ (1) suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)=0$

(theo kết quả bài toán gốc)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \quad (*).$$

Do vai trò của a,b,c trong điều kiện (1) và (2) là như nhau nên từ (*) ta có thể giả sử $a=-b$. Khi đó từ (2) suy ra: $c^3=2021^3 \Rightarrow c=2021$.

Vậy $P=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=c^{2021}=2021^{2021}$.

Bài toán 5. *Cho x,y,z khác 0 thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (1) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} & (2). \\ 2x^2+y=1 & (3) \end{cases}$$

Tìm x,y,z.

Lời giải. Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$

(theo kết quả bài toán gốc)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z. \\ z=-x \end{array}\right.$$

- Với $x=-y$. Từ (3) suy ra:

$2y^2+y=1 \Rightarrow y^2+y+y^2-1=0$

$\Rightarrow y(y+1)+(y+1)(y-1)=0$

$\Rightarrow (y+1)(2y-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y+1=0 \\ 2y-1=0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=1, z=3 \\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{-1}{2}, z=3 \end{array}\right. \quad (\text{vì } x+y+z=3).$$

- Với $y=-z$. Từ (1) suy ra $x=3$.

Từ (3) suy ra: $y=1-2x^2=1-2.3^2=-17$

$\Rightarrow z=17$.

- Với $z=-x$. Từ (1) suy ra: $y=3$.

Từ (3) suy ra: $x^2=\frac{1-y}{2}=\frac{1-3}{2}=-1<0$

$\Rightarrow$ không tồn tại x.

Vậy $(x;y;z)\in\left\{(1;-1;3),\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};3\right),(3;-17;17)\right\}$.

Bài toán 6. *Cho x,y,z đôi một khác nhau và $x>0, y\neq 0, z\neq 0$ thỏa mãn:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y-z}.$$

Chứng minh rằng $y<0$.

Lời giải. Áp dụng kết quả bài toán gốc với $a=x, b=y, c=-z$ ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y-z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{-z}=\frac{1}{x+y+(-z)}$$

$$\Rightarrow (x+y)(y-z)(-z+x)=0$$

$$\Rightarrow (x+y)(y-z)(x-z)=0 \quad (1).$$

Vì x,y,z đôi một khác nhau $\Rightarrow y-z\neq 0, x-z\neq 0$, nên từ (1) suy ra:

$x+y=0\Rightarrow y=-x$. Mà $x>0$ nên $y<0$.

Bài toán 7. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{4x-2022}+\frac{1}{5x+2020}+\frac{1}{6x-2021}=\frac{1}{15x-2023} \quad (*).$$

Lời giải. ĐK: x khác $\frac{1011}{2}, -404, \frac{2021}{6}, \frac{2023}{15}$ (**).

Đặt $\begin{cases}4x-2022=a\\5x+2020=b\\6x-2021=c\end{cases}$. Khi đó (*) có dạng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Áp dụng bài toán gốc ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=0\\b+c=0\\c+a=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}9x-2=0\\11x-1=0\\10x-4043=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{9}\\x=\frac{1}{11}\\x=404,3\end{array}\right.$$

(thỏa mãn ĐK(**)). Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:

$$x=\frac{2}{9}, x=\frac{1}{11}, x=404,3.$$

Với bài toán gốc và hệ thống bài tập vận dụng trên đây mong rằng các em sẽ có một tư duy mới trong học toán và giải toán. Chúc các em thành công!

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài toán 1. Cho 3 số x,y,z khác 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases}x+y+z=2021\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2021}\end{cases}.$$

Chứng minh rằng trong 3 số x,y,z tồn tại hai số đối nhau.

Bài toán 2. Cho a,b,c khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{5c}=\frac{1}{a+3b+5c}.$$

Chứng minh rằng $(a+3b)(3b+5c)(5c+a)=0$.

Bài toán 3. Cho a,b,c khác 0 thỏa mãn:

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{3}{c}\right)(3a-3b+c)=3.$$

Chứng minh rằng $(a-b)(c-3b)(c+3a)=0$.

Bài toán 4. Cho 3 số x,y,z khác 0 thỏa mãn:

$$x<y<z \text{ và } \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x-y+z}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^{2021}}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z^{2021}}=\frac{1}{x^{2021}-y+z^{2021}}.$$

Bài toán 5. Cho $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c}$ với a,b,c khác 0 và đôi một khác nhau.

Tính $A=a^{2021}+c^{2021}+2021$.

Bài toán 6. Cho x,y,z khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}x+y+z=-\frac{1}{2}\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-2\\x^2+2y=-1\end{cases}$

Tìm x, y, z.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 76

PROBLEM. *On a production line making electronic devices, the probability of a randomly chosen device not meeting the standard is* 0.045. *A random sample of* 200 *devices is checked. Find the probability that there are more than* 198 *devices which meet the standard.*

Solution. Let X be the number of devices which meet the standard among the sample. We need to find $P(X > 198)$.

We have $P(X > 198) = P(X = 199) + P(X = 200)$

$= 200 \times (0.045) \times (0.955)^{199} + (0.955)^{200}$

$\approx 0.00104.$

Remark: X is called a binomial random variable.

TỪ VỰNG

randomly : *một cách ngẫu nhiên*

sample : *mẫu chọn*

binomial : *nhị thức*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 73

BÀI TOÁN. *Đồ thị hàm số $y = f(x)$ được biến đổi thành đồ thị hàm số $y = f(2x)$. Mô tả một cách đầy đủ phép biến đổi trên.*

Lời giải. Nếu ta đặt $t := 2x$, hàm $y = f(2x)$ trở thành $y = f(t)$ và hàm này tương tự hàm $y = f(x)$ ngoại trừ trường hợp sau: giá trị của biến x chạy từ a đến b tương ứng với giá trị biến t chạy từ $\frac{a}{2}$ đến $\frac{b}{2}$.

Vì vậy phép biến đổi trên là phép dãn theo hướng x với hệ số $\frac{1}{2}$.

Câu hỏi: Bạn có thể vẽ đồ thị các hàm số $y = \sin x$ và $y = \sin 2x$ không?

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Đoàn Ngọc Thiện*, *Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Phan Thị Bảo Trâm*, *Nguyễn Phương Thảo*, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Văn Ngọc Bình*, *Nguyễn Kỳ Nam*, *Trương Hồ Bảo Nhi*, *Trần Thị Thanh Thư*, *Nguyễn Văn Huy*, 11 Toán 1, *Lê Quý Dũng*, 11 Toán 2, *Lê Đức Hiếu*, 10 Toán 1, *Trần Duy Anh*, 10 Anh 1, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10T2, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 55. *Giải phương trình*

$$4x^2-6x-1+x\sqrt{2x^2+6x+1}=0 \quad (*).$$

Lời giải. Điều kiện:

$$2x^2+6x+1\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-3+\sqrt{7}}{2} \\ x\le \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right..$$

Cách 1. *Đưa PT về dạng* $A^2(x)=B^2(x)$.

$$\text{PT}(*) \Leftrightarrow 2x^2+6x+1-x\sqrt{2x^2+6x+1}+\frac{x^2}{4}=\frac{25x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{5x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{5x}{2} \\ \sqrt{2x^2+6x+1}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{-5x}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1}=3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \end{array}\right..$$

TH1: $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 7x^2-6x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1.$

TH2: $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 2x^2-6x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}.$

Vậy PT(*) có hai nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Cách 2. *Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.*

$$(*) \Leftrightarrow 6x^2-\left(2x^2+6x+1\right)+x\sqrt{2x^2+6x+1}=0$$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+6x+1}\ge 0$, PT (*) trở thành:

$6x^2+xt-t^2=0 \Leftrightarrow (2x+t)(3x-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2x \\ t=3x \end{array}\right..$

- Với $t=-2x \Rightarrow \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x$. Giải như trên ta được nghiệm $x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

- Với $t=x \Rightarrow \sqrt{2x^2+6x+1}=3x$. Giải như trên ta được nghiệm $x=1$.

Vậy PT (*) có hai nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Cách 3. *Nhân biểu thức liên hợp.*

$$(*) \Leftrightarrow \left(2x^2-6x-1\right)+\left(2x^2+x\sqrt{2x^2+6x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-6x-1\right)+x\left(2x+\sqrt{2x^2+6x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-6x-1\right)+x.\frac{2x^2-6x-1}{2x-\sqrt{2x^2+6x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-6x-1\right)\left[1+\frac{x}{2x-\sqrt{2x^2+6x+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-6x-1=0 \\ 1+\dfrac{x}{2x-\sqrt{2x^2+6x+1}}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-6x-1=0 \\ 3x-\sqrt{2x^2+6x+1}=0 \end{array}\right..$$

Giải các phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Cách 4. *Nhân biểu thức liên hợp.*

$$(*) \Leftrightarrow \left(7x^2-6x-1\right)-\left(3x^2-x\sqrt{2x^2+6x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(7x^2-6x-1\right)-x\left(3x-\sqrt{2x^2+6x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(7x^2-6x-1\right)-x.\frac{7x^2-6x-1}{3x+\sqrt{2x^2+6x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(7x^2-6x-1\right)\left[1-\frac{x}{3x+\sqrt{2x^2+6x+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x^2-6x-1=0 \\ 1-\dfrac{x}{3x+\sqrt{2x^2+6x+1}}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x^2-6x-1=0 \\ 2x+\sqrt{2x^2+6x+1}=0 \end{array}\right..$$

Giải các phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Cách 5. *Đặt ẩn phụ.*

Vì $x=0$ không là nghiệm của PT(*) nên chia hai vế của PT (*) cho $x^2\neq 0$ ta được:

• Với $x>0$ ta có: $4-\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0.$

Đặt $t=\sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\geq 0$, PT trở thành:

$t^2-t-6=0\Leftrightarrow (t+2)(t-3)=0\Leftrightarrow t=3$ (vì $t+2>0$)

$\Rightarrow \sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=3\Rightarrow 7x^2-6x-1=0\Rightarrow x=1.$

• Với $x<0$ ta có: $4-\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0.$

Đặt $t=\sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\geq 0$ PT trở thành:

$t^2+t-6=0\Leftrightarrow (t-2)(t+3)=0\Leftrightarrow t=2$ (vì $t+3>0$)

$\Rightarrow \sqrt{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=2\Rightarrow 2x^2-6x-1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}.$

Vậy PT (*) có hai nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Cách 6. *Đặt ẩn phụ.*

(*) $\Leftrightarrow 6x^2-(2x^2+6x+1)+x\sqrt{2x^2+6x+1}=0$ (**)

• Nếu $x=0$ thì PT (*) vô nghiệm.

• Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=0$ thì

(**) $\Rightarrow 6x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ PT(*) vô nghiệm.

Chia hai vế của PT (**) cho $x\sqrt{2x^2+6x+1}\neq 0$ ta được:

$$\frac{6x}{\sqrt{2x^2+6x+1}}-\frac{\sqrt{2x^2+6x+1}}{x}+1=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+6x+1}}\neq 0$, PT trở thành:

$$6t-\frac{1}{t}+1=0\Rightarrow 6t^2+t-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)(3t-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1}{2} \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \\ \sqrt{2x^2+6x+1}=3x \end{array}\right..$$

Giải các phương trình này và kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $x=1;\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Nhận xét. Kỳ này Tạp chí xin hoan nghênh các bạn sau đã đóng góp nhiều cách giải đúng cho bài toán 55 này: *Phan Thị Minh Châu, Lê Thị Minh Tâm, Lê Ngọc Cương, Nguyễn Hưng Thủy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Văn Xá*, GV THPT Yên Phong số 2, **Bắc Ninh**; *Trần Ngọc Cường*, GV THPT Mường Quạ, Con Cuông, **Nghệ An**; *Hoàng Minh Dũng*, tổ 5A - tổ dân phố 2, phường Đông Sơn, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

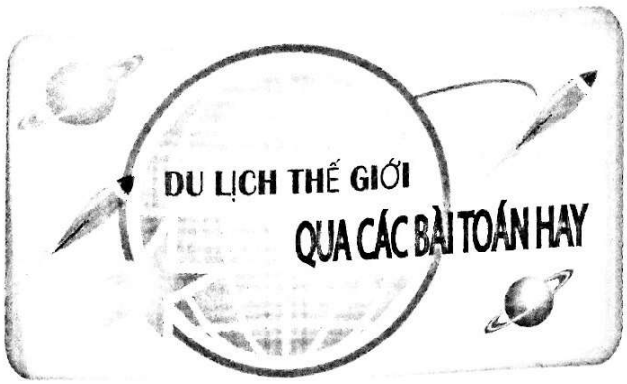
Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 57 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28.2.2022.

BÀI TOÁN 57. *Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}$. Chứng minh rằng*

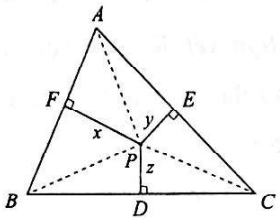
$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}.$$

NGUYỄN ANH TUẤN

(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)



BÀI TOÁN 64 (IMO, 1981). *Cho P là điểm nằm trong tam giác ABC và D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB. Tìm tất cả các điểm P sao cho tổng* $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ *nhỏ nhất.*



Lời giải. Kí hiệu $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và $PF = x$, $PE = y$, $PD = z$. Do P nằm trong tam giác ABC nên

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{BPC} + S_{CPA} \Rightarrow cx + by + az = 2S_{ABC} \ (*).$$

Đặt $f(P) = \frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF} = \frac{a}{z}+\frac{b}{y}+\frac{c}{x}$.

Ta có: $f(P).2S_{ABC} = \left(\frac{a}{z}+\frac{b}{y}+\frac{c}{x}\right)(cx+by+az)$

$$= a^2+b^2+c^2+cb\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+ac\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+ab\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right).$$

Do x, y, z dương nên theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}} = 2;\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{z}.\frac{z}{x}} = 2;$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \ge 2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}} = 2.$$ Do đó:

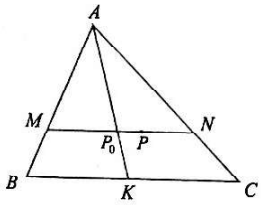
$$f(P).2S_{ABC} \ge a^2+b^2+c^2+2cb+2ac+2ab = (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow f(P) \ge \frac{(a+b+c)^2}{2S_{ABC}}.$$

Vậy $\min f(P) = \min\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S_{ABC}}$

$\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow P$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Nhận xét. 1) Có thể giải bài này theo hướng: Tìm cực tiểu của hàm ba biến: $f(x,y,z) = \frac{a}{z}+\frac{b}{y}+\frac{c}{x}$.



Ta giới hạn vị trí của điểm P trên đoạn MN song song với cạnh BC thì các giá trị az và $\frac{a}{z}$ không đổi với mọi điểm P trên đoạn này. Bài toán đưa về tìm cực tiểu của hàm hai biến: $f(x,y) = \frac{b}{y}+\frac{c}{x}$. Nhưng hai biến x, y này lại liên hệ với nhau bởi điều kiện (*) có dạng $cx + by = D$ với $D = 2S_{ABC} - az$ không đổi nên bài toán đưa về tìm cực trị của hàm $f(x) = \frac{c}{x}+\frac{b}{y} = \frac{c}{x}+\frac{b^2}{D-cx}$. Khảo sát hàm này ta suy ra f min khi $x = y$ hay $P \equiv P_0$ là giao của MN và đường phân giác AK của góc A. Lập luận tương tự ta suy ra điểm P cần tìm chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng và làm như cách 1. Các bạn có lời giải ngắn gọn là: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư, Nguyễn Văn Huy*, 11T1, *Phan Thị Minh Châu, Lê Thị Thanh Tâm, Lê Ngọc Cương, Nguyễn Hương Thủy*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. Anh Nhơn; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, H. Tư Nghĩa. Xin hoan nghênh các bạn.

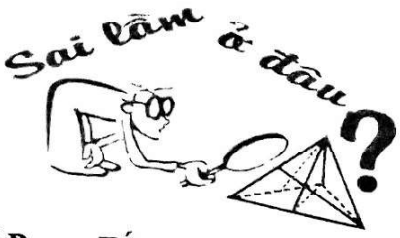
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28.2.2022.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 66. *Giả sử f(n) là hàm số xác định trên tập hợp số tự nhiên và lấy giá trị trong tập hợp đó. Chứng minh rằng nếu với mỗi n mà có bất đẳng thức f(n + 1) > f(f(n)) thì với mỗi n sẽ có đẳng thức f(n) = n.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: TÍNH TỔNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 530, tháng 8 năm 2021)

Phân tích sai lầm. Lời giải có thiếu sót khi xét trường hợp $m \neq 1$ do đó làm thiếu giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất. Hệ có nghiệm duy nhất khi (2) có nghiệm kép $x \neq -1$ hoặc (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = -1$.

Lời giải đúng trường hợp $m \neq 1$ như sau:

Với $m \neq 1$, phương trình (2) là phương trình bậc hai. Hệ có nghiệm duy nhất khi (2) có nghiệm kép $x \neq -1$ hoặc (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = -1$. Điều đó xảy ra khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = -4m^2 + 5 = 0 \\ -\dfrac{2m-1}{2(m-1)} \neq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = -4m^2 + 5 > 0 \\ (m-1) + (2m-1).(-1) + 2m + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ -1 \neq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ m = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ m = -1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \pm 1;\ m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét. Bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

PHƯƠNG ÁN CHỌN CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Trong đề kiểm tra giữa kỳ I có câu hỏi trắc nghiệm sau:

Tổng S các nghiệm phương trình $2\cos 3x(2\cos 2x + 1) = 1$ *trên đoạn* $[-4\pi; 6\pi]$ *là*

A. 61π **B.** 55π **C.** 50π **D.** 56π.

Một học sinh đã chọn đáp án A và giải như sau:

Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$ thay vào phương trình thấy không thỏa mãn.

Xét $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi$. Khi đó

$$2\cos 3x(2\cos 2x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2[\cos 5x + \cos x] + 2\cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 5x + 2\sin x\cos 3x + 2\sin x\cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin 6x - \sin 4x) + (\sin 4x - \sin 2x) + \sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{l2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Với $x \in [-4\pi; 6\pi]$, khi đó:

$$-4\pi \leq \frac{k2\pi}{5} \leq 6\pi \Leftrightarrow -10 \leq k \leq 15;$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7} \leq 6\pi \Leftrightarrow \frac{-29}{2} \leq l \leq \frac{41}{2}$$

$$\Rightarrow -14 \leq l \leq 20.$$

Do đó tổng nghiệm:

$$S = \sum_{k=-10}^{15}\left(\frac{k2\pi}{5}\right) + \sum_{l=-14}^{20}\left(\frac{\pi}{7} + \frac{l2\pi}{7}\right) = 61\pi.$$

Chọn **A**.

Theo bạn chọn phương án A đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)