TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 534
Tháng 12 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Marin Mersenne
(1588 – 1648)

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HẰNG SỐ BIẾN THIÊN ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

TRỊNH PHONG QUANG
(GV THCS Phú Lộc, Nho Quan, Ninh Bình)

Trong quá trình giải toán về phương trình (PT) đa thức bậc cao hoặc PT vô tỉ, tùy thuộc đặc thù của bài toán mà ta có thể tráo đổi vai trò của ẩn với hệ số hoặc với tham số rồi chỉ dùng kiến thức giải phương trình bậc hai ta sẽ giải quyết được những bài toán một cách dễ dàng, mặc dù những bài toán này có những cách giải khác phải dùng kiến thức cao hơn. Sau đây là các thí dụ minh họa cho phương pháp.

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$x^4 - 8x^2 + x + 12 = 0 \quad (1).$$

Lời giải. PT(1) $\Leftrightarrow 4^2 - (2x^2+1).4 + x^4 + x = 0$ (2).

Coi (2) là PT bậc hai với ẩn là 4. Ta có:

$$\Delta = (2x^2+1)^2 - 4(x^4+x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2.$$

PT có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} 4 = \dfrac{2x^2+1-2x+1}{2} \\ 4 = \dfrac{2x^2+1+2x-1}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là:

$$S = \left\{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$x^4 - 22x^2 - x - 110 = 0 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^4 - 22x^2 - x + 11^2 - 11 = 0$

$$\Leftrightarrow 11^2 - (2x^2+1).11 + x^4 - x = 0 \ (2).$$

PT(2) là PT bậc hai với ẩn là 11. Ta có:

$$\Delta = (2x^2+1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2.$$

Khi đó PT có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 11 = \dfrac{2x^2+1+2x+1}{2} \\ 11 = \dfrac{2x^2+1-2x-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 10 = 0 \\ x^2 - x - 11 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \\ x = \dfrac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là:

$$S = \left\{\frac{-1-\sqrt{41}}{2}; \frac{-1+\sqrt{41}}{2}; \frac{1-3\sqrt{5}}{2}; \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Thí dụ 3 (Trích đề thi ĐH Công Đoàn 1996).

Giải phương trình $x = 5 - (5 - x^2)^2$ (1).

Lời giải. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x = 5 - (5^2 - 10x^2 + x^4)$$

$$\Leftrightarrow 5^2 - (2x^2+1).5 + x^4 + x = 0 \ (2).$$

Coi (2) là PT bậc hai có ẩn là 5, ta có:

$$\Delta = (2x^2+1)^2 - 4(x^4+x) = 4x^2 - 4x + 1$$
$$= (2x-1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 5 = \dfrac{2x^2+1-2x+1}{2} \\ 5 = \dfrac{2x^2+1+2x-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 4 = 0 \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là:

$$S = \left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}.$$

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$x + 3(2 - 3x^2)^2 = 2 \quad (1).$$

Lời giải. PT(1) $\Leftrightarrow x+3.2^2-36x^2+27x^4=2$

$$\Leftrightarrow 3.2^2-(18x^2+1).2+27x^4+x=0 \quad (2).$$

Coi (2) là PT bậc hai có ẩn là 2, ta có:

$$\Delta=(18x^2+1)^2-4.3.(27x^4+x)$$
$$=36x^2-12x+1$$
$$=(6x-1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 2=\dfrac{18x^2+1+6x-1}{6} \\ 2=\dfrac{18x^2+1-6x+1}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+x-2=0 \\ 9x^2-3x-5=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; x=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{6} \end{array}\right.$$. Vậy PT đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{21}}{6};\dfrac{1+\sqrt{21}}{6};-1;\dfrac{2}{3}\right\}$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$x^6-7x^2+\sqrt{6}=0 \quad (1).$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{6}$. Khi đó PT(1) trở thành:

$$x^6-(a^2+1)x^2+a=0$$
$$\Leftrightarrow -a^2x^2+a+x^6-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2a^2-a-x^6+x^2=0 \quad (2).$$

Do $x=0$ không là nghiệm của (1) nên coi (2) là PT bậc hai có ẩn là a, ta có:

$$\Delta=(-1)^2-4x^2(-x^6+x^2)$$
$$=4x^8-4x^4+1$$
$$=(2x^4-1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1+2x^4-1}{2x^2} \\ a=\dfrac{1-2x^4+1}{2x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=x^2 \\ a=\dfrac{1-x^4}{x^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{a} \\ x^4+ax^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt[4]{6} \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}} \end{array}\right..$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là:

$$S=\left\{x=\sqrt[4]{6}; x=-\sqrt[4]{6}; -\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}\right\}.$$

Nhận xét. Từ (2) bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử ta có $(x^2-a)(x^4+ax^2-1)=0$ từ đó ta tìm được các nghiệm như trên.

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$x^4-10x^3-2(m-11)x^2+2(5m+6)x+2m+m^2=0 \quad (1)$$

trong đó m là tham số, $m>-6$.

Lời giải. PT(1) được viết lại dưới dạng:

$$m^2-2(x^2-5x-1)m+x^4-10x^3+22x^2+12x=0 \quad (2)$$

Ta coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là m, ta có:

$$\Delta'=(x^2-5x-1)^2-(x^4-10x^3+22x^2+12x)$$
$$=(x-1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} m=x^2-6x \\ m=x^2-4x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-6x-m=0 & (3) \\ x^2-4x-2-m=0 & (4) \end{array}\right..$$

Giải PT(3) ta được nghiệm:

$$x_1=3+\sqrt{9+m}\ ;\ x_2=3-\sqrt{9+m}.$$

Giải PT(4) ta được nghiệm:

$$x_3=2+\sqrt{6+m}\ ;\ x_4=2-\sqrt{6+m}.$$

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

$$x_1=3+\sqrt{9+m}\ ;\ x_2=3-\sqrt{9+m};$$
$$x_3=2+\sqrt{6+m}\ ;\ x_4=2-\sqrt{6+m}.$$

Thí dụ 7. *Giải phương trình*

$$x^2+x+12\sqrt{x+1}=36 \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $x\geq -1$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow 6^2-2\sqrt{x+1}.6-x^2-x=0 \quad (2).$$

Coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là 6, ta có:

$$\Delta'=\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(-x^2-x)$$
$$=x^2+2x+1$$
$$=(x+1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 6=\sqrt{x+1}+x+1 \\ 6=\sqrt{x+1}-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+1}=5-x & (3) \\ \sqrt{x+1}=7+x & (4) \end{array}\right..$$

Giải PT(3):

$$\sqrt{x+1}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases}5-x\ge 0\\ x+1=25-10x+x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 5\\ x^2-11x+24=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 5\\ \left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow x=3\\ x=8\end{array}\right.\end{cases}$$

(thỏa mãn ĐK).

Giải PT(4):

$$\sqrt{x+1}=7+x \Leftrightarrow \begin{cases}7+x\ge 0\\ x+1=49+14x+x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -7\\ x^2+13x+48=0\end{cases}$$: vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là: $S=\{3\}$.

Thí dụ 8. *Giải phương trình* $12\sqrt{x+1}+9=x^2$ (1).

Lời giải. ĐK: $x\ge -1$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3^2+4\sqrt{x+1}.3-x^2=0 \quad (2).$$

Ta coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là 3, ta có:

$$\Delta'=4\left(\sqrt{x+1}\right)^2+x^2=x^2+4x+4$$
$$=(x+2)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l}3=-2\sqrt{x+1}+x+2\\ 3=-2\sqrt{x+1}-x-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x+1}=x-1 & (3)\\ 2\sqrt{x+1}=-x-5 & (4)\end{array}\right..$$

Giải PT (3): $2\sqrt{x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ 4x+4=1-2x+x^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-6x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow x=3+2\sqrt{3}\\ x=3-2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

(thỏa mãn ĐK).

Giải PT (4): $2\sqrt{x+1}=-x-5 \Leftrightarrow \begin{cases}-x-5\ge 0\\ 4x+4=x^2+10x+25\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -5\\ x^2+6x+21=0\end{cases}$$: vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là: $S=\{3+2\sqrt{3}\}$.

Thí dụ 9. *Giải phương trình* $x^2+\sqrt{x+3}=3$ (1).

Lời giải. ĐK: $x\ge -3$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=3-x^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-x^2\ge 0\\ x+3=(3-x^2)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3}\\ x+3=3^2-2.3x^2+x^4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3}\\ 3^2-(2x^2+1).3+x^4-x=0 \quad (2).\end{cases}$$

Ta coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là 3, ta có:

$$\Delta=\left(2x^2+1\right)^2-4(x^4-x)=4x^2+4x+1$$
$$=(2x+1)^2.$$

PT(2) có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l}3=\dfrac{2x^2+1+2x+1}{2}\\ 3=\dfrac{2x^2+1-2x-1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2+x-2=0 & (3)\\ x^2-x-3=0 & (4)\end{array}\right..$$

Giải PT(3): $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$.

Giải PT(4): $x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với ĐK ta được tập nghiệm của PT đã cho là: $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};1\right\}$.

Thí dụ 10. *Giải phương trình* $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$ (1).

Lời giải. ĐK: $x\ge 0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3+\sqrt{x}}=3-x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 3\\ 3+\sqrt{x}=(3-x)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 3\\ 3+\sqrt{x}=9-6x+x^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 3\\ 3^2-(2x+1)3+x^2-\sqrt{x}=0 \quad (2)\end{cases}.$$

Ta coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là 3, ta có:

$$\Delta = (2x+1)^2 - 4(x^2 - \sqrt{x})$$
$$= 4x + 4\sqrt{x} + 1$$
$$= (2\sqrt{x}+1)^2.$$

Khi đó PT(2) có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 3 = \dfrac{2x+1+2\sqrt{x}+1}{2} \\ 3 = \dfrac{2x+1-2\sqrt{x}-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+\sqrt{x}-2=0 & (3) \\ x-\sqrt{x}-3=0 & (4) \end{array}\right..$$

Giải PT(3): $x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐK: $0 \le x \le 3$).

Giải PT(4):

$$x-\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)}.$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là: $S=\{1\}$.

Thí dụ 11. *Giải phương trình*

$$729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36 \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $-1 \le x \le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}, 0 \le t \le 1$. PT(1) trở thành:

$$729(1-t^2)^2 + 8t = 36$$
$$\Leftrightarrow 729 - 1458t^2 + 729t^4 + 8t = 36$$
$$\Leftrightarrow 9.9^2 - 4.9 - 1458t^2 + 729t^4 + 8t = 0$$
$$\Leftrightarrow 9.9^2 - 2(2+81t^2).9 + 729t^4 + 8t = 0 \quad (2).$$

Ta coi PT(2) là PT bậc hai có ẩn là 9, ta có:

$$\Delta' = (2+81t^2)^2 - 9(729t^4+8t)$$
$$= 4 + 324t^2 + 6561t^4 - 6561t^4 - 72t$$
$$= 324t^2 - 72t + 4$$
$$= 4(81t^2 - 18t + 1)$$
$$= 4(9t-1)^2.$$

Khi đó PT(2) có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} 9 = \dfrac{2+81t^2+2(9t-1)}{9} \\ 9 = \dfrac{2+81t^2-2(9t-1)}{9} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 9t^2+2t-9=0 & (3) \\ 81t^2-18t-77=0 & (4) \end{array}\right..$$

Giải PT(3) ta có:

$$9t^2+2t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1-\sqrt{82}}{9} \text{ (loại)} \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{82}}{9} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow t=\frac{-1+\sqrt{82}}{9}.$$

Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{82}}{9}$ suy ra:

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{-1+\sqrt{82}}{9} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}.$$

Giải PT(4) ta có:

$$81t^2-18t-77=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1-\sqrt{78}}{9} \text{ (loại)} \\ t=\dfrac{1+\sqrt{78}}{9} \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là:

$$S=\left\{\frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}\,;-\frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}\right\}.$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Giải các phương trình sau:

1. $x^4+2x^3+8x^2-16=0$
2. $x^4-10x^2-x+20=0$
3. $x=4-(4-x^2)^2$
4. $x^2+\sqrt{x+5}=5$
5. $x^2=2+\sqrt{2-x}$
6. $\sqrt{3+\sqrt{3+x}}=x$
7. Với mỗi số thực a, gọi x_a là nghiệm của phương trình $x^4+2x^2+2ax+a^2+2a+1=0$. Tìm a để x_a nhận giá trị bé nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐHSP HÀ NỘI, NĂM HỌC 2021 – 2022

VÒNG 1

Bài 1. *Cho*

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$(a\geq 0, b\geq 0, a\neq b)$.

a) *Rút gọn P.*

b) *Chứng minh rằng* $P\geq 0$.

Lời giải. a) Điều kiện: $a\geq 0,\ b\geq 0,\ a\neq b$.

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right).\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b-\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

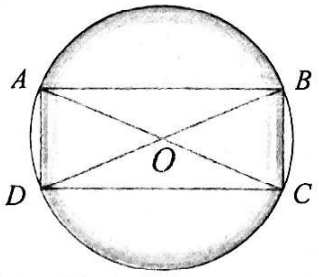
$$=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b-\sqrt{ab}}.$$

b) $a+b-\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}>0$ với mọi *a, b* thỏa mãn điều kiện, do đó $P\geq 0$.

Bài 2. a) *Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:* $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$;

$x^2-mx+4m-11=0$.

b) *Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O, bán kính bằng* 1,6m. *Giả sử hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính* 1,6m *sao cho* $\widehat{BOC}=45°$ *(hình vẽ). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình trên. Biết mức chi phí sơn phần hình tô đậm là* 150 *nghìn đồng /m² và phần còn lại là* 200 *nghìn đồng/m². Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu?* Cho $\pi=3,14$.



Lời giải. a) Gọi $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$ (1);

$x^2-mx+4m-11=0$ (2).

Ta có $\Delta_1=4m-11$.

Nếu $4m-11\geq 0$ thì PT (1) có nghiệm.

Nếu $4m-11<0$ thì tích *a.c* của PT(2) trái dấu, nên PT(2) có nghiệm.

Vậy ít nhất một trong hai phương trình (1) và (2) có nghiệm.

b) Diện tích hai hình viên phân không tô đậm bằng $2.\left(\frac{\pi R^2}{8}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.R^2\right)$.

Diện tích phần tô đậm bằng $\pi R^2-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.R^2$.

Chi phí phần tô đậm bằng

$$\left[\pi R^2-2.\left(\frac{\pi R^2}{8}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.R^2\right)\right].150000.$$

Chi phí sơn phần không tô đậm bằng

$$2.\left(\frac{\pi R^2}{8}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.R^2\right).200000.$$

Thay R = 1,6 m, ta có số tiền làm tròn bằng 1.215730 ~ 1216000 (đồng).

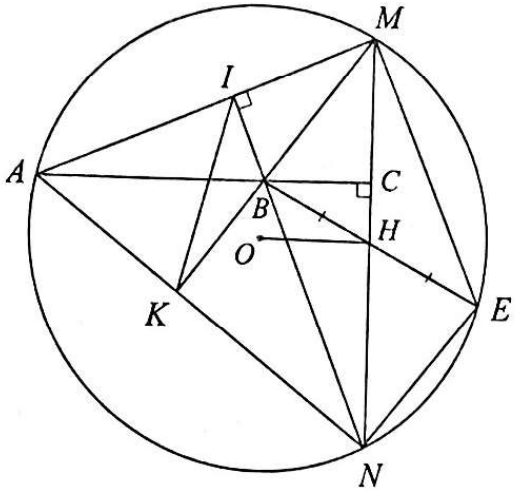
Bài 3. *Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (d) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Lấy điểm M tùy ý trên (d). Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AM cắt các đường thẳng AM, (d) lần lượt tại I, N. Đường thẳng MB cắt AN tại K.*

a) *Chứng minh rằng tứ giác MIKN nội tiếp.*

b) *Chứng minh CM.CN = AC.BC.*

c) *Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Vẽ hình bình hành MBNE. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và* $OH=\frac{1}{2}AB$.

Lời giải.



a) Dễ thấy B là trực tâm tam giác AMN nên $\widehat{MIN} = \widehat{MKN} = 90°$, vậy tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) $\Delta MBC \backsim \Delta ANC$ (g.g), suy ra:

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CA}{CN} \Rightarrow CM.CN = CA.CB.$$

c) Vì $MBNE$ là hình bình hành và H là trung điểm của BE nên H là trung điểm của MN.

Suy ra $OH \perp MN$ (đường kính – dây cung)

Từ giả thiết suy ra $\widehat{AME} = \widehat{ANE} = 90°$, nên AE là đường kính đường tròn (AMN). Suy ra O là trung điểm của AE, nên OH là đường trung bình của tam giác ABE, do đó $OH = \frac{1}{2}AB$.

Bài 4. a) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 57 \\ |x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1 \end{cases}.$$

b) *Cho a và b là hai số hữu tỉ. Chứng minh nếu $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a = b = 0$.*

Lời giải. a) $|x-1|^{2021} + |x-2|^{2020} = 1$ (*).

Nếu $x < 1$ thì $|x-2| > 1$, từ đó suy ra VT(*) > 1 (loại).

Nếu $x > 2$ thì $|x-1| > 1$, từ đó suy ra VT(*) > 1 (loại).

Nếu $1 < x < 2$ thì $|x-1| < 1$, $|x-2| < 1$, ta có:

VT(*) $< |x-1| + |x-2| = x - 1 + 2 - x = 1$ (loại).

Dễ thấy $x = 1$ hoặc $x = 2$ là nghiệm của (*).

- Với $x = 1$, giải được $y = \pm\sqrt{60}$.
- Với $x = 2$, giải được $y = \pm\sqrt{61}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm (x, y) là $(1, \sqrt{60}), (1, -\sqrt{60}), (2, \sqrt{61}), (2, -\sqrt{61})$.

b) Giả sử $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \neq 0$. Ta có:

$$a\sqrt{2} - b\sqrt{3} = \frac{2a^2 - 3b^2}{a\sqrt{2} + b\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}.$$

Do đó $a\sqrt{2} = \frac{(a\sqrt{2} + b\sqrt{3}) + (a\sqrt{2} - b\sqrt{3})}{2} \in \mathbb{Q}$.

Vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a = 0$, từ đó suy ra $b = 0$, trái giả sử.

Vậy $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$.

Nếu $a \neq 0$ thì $\frac{-b}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Q}$ vô lý.

Vậy $a = b = 0$.

VÒNG 2

Bài 1. *Cho* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) *Tìm một đa thức bậc hai Q(x) với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của Q(x).*

b) *Cho đa thức* $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Tính giá trị của P(α).

Lời giải. a) Ta có $(2\alpha - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.

Vậy α là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - x - 1$.

b) Ta có $P(x) = Q(x)(x^3 + x + 1) + (x + 2)$.

Suy ra $P(\alpha) = \alpha + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2. *Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA. Một cát tuyến thay*

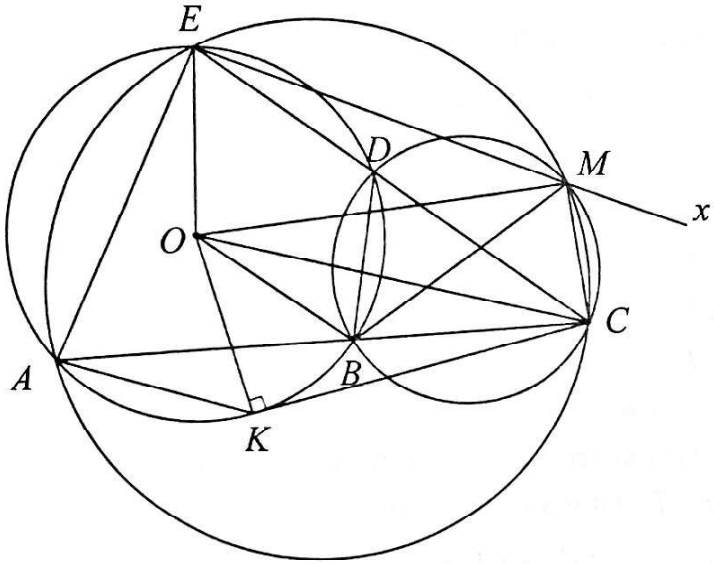
đối qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác OBME. Chứng minh rằng

a) *Tứ giác OBME nội tiếp.*

b) $CD.CE = CO^2 - R^2$.

c) *M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.*

Lời giải.



a) Các tứ giác *ACME*, *ABDE*, *BCMD* nội tiếp nên $\widehat{EMC} = 180° - \widehat{EAC}$, $\widehat{BMC} = \widehat{BDC} = \widehat{EAC}$.

Suy ra $\widehat{EMB} = \widehat{EMC} - \widehat{BMC} = 180° - 2\widehat{EAB}$ (1)

Mà $\widehat{EOB} = 2\widehat{BAE}$ (2), Từ (1), (2) suy ra tứ giác *OBME* nội tiếp.

b) Kẻ tiếp tuyến *CK* của đường tròn (*ABE*) (*K* là tiếp điểm). Dễ chứng minh $\Delta CKD \backsim \Delta CEK$. Từ đó suy ra $CD.CE = CK^2 = CO^2 - R^2$.

c) Các tứ giác *BOEM*, *ABDE*, *BCMD* nội tiếp ta có: $\widehat{OMB} = \widehat{OEB} = 90° - \dfrac{\widehat{BOE}}{2} = 90° - \widehat{BAE}$

$$= 90° - \widehat{BDC} = 90° - \widehat{BMC}.$$

Từ đó suy ra $\widehat{OMC} = 90°$. Suy ra *M* thuộc đường tròn đường kính *OC* cố định.

Bài 3. *Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng* $\dfrac{x^2+y}{xy+1}$ *với x, y là hai số nguyên dương.*

Lời giải. • Với $N = 1$. Chọn $x = 1$, y là số nguyên dương tùy ý, nên có vô số cách biểu diễn (loại).

• Với $N > 1$. Giả sử $\dfrac{x^2+y}{xy+1} = N$ (1) với x, y nguyên dương. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - (Ny).x + (y - N) = 0.$$

PT ẩn x trên có nghiệm nguyên nên

$$\Delta = (Ny)^2 - 4y + 4N = k^2,\ k \in \mathbb{N}^* \ (*).$$

Ta có: $k^2 - (Ny-2)^2 = (N-1)(4y+4) > 0$;

$$(Ny+2)^2 - k^2 = 4N(y-1) + (4y+4) > 0.$$

Suy ra $k = Ny \pm 1$ hoặc $k = Ny$.

Nếu $k = Ny \pm 1$, thay vào (*) ta có:

$$4(N-y) = \pm 2Ny + 1.$$ Điều này vô lý.

Vậy $k = Ny$. Thay vào (*) suy ra:

$$y = N, x = y^2 = N^2.$$

Tóm lại, $N > 1$.

Bài 4. *Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên.*

Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ (1) *có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.*

Lời giải. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 - bx + c = 0$ (1). Ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Z},\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \in \mathbb{Z}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2021 – 2022

(Thời gian làm bài: 150 phút; Dành cho thi sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin học)

Câu 1 *(2,5 điểm)*. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P với

$$x=\sqrt{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\right).$$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 *(2,0 điểm)*.

a) Giải phương trình

$$6x^2+10x-92+\sqrt{(x+70)(2x^2+4x+16)}=0.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-y^3+3x-12y+7=3x^2-6y^2\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{4-y}=x^3+y^2-4x-2y\end{cases}.$$

Câu 3 *(1,5 điểm)*.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x.(1+x+x^2)=4y.(y-1).$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất với mỗi số nguyên dương lẻ a mà $a^2\le n$ thì n chia hết cho a.

Câu 4 *(3,5 điểm)*. Cho tam giác ABC nhọn và cố định, nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn (O), P không trùng với A và B. Đường thẳng qua P vuông góc với OA và cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại Q, R. Đường thẳng qua P vuông góc với OB và cắt các đường thẳng AB, BC theo thứ tự tại S, T.

a) Chứng minh tam giác PQS là tam giác cân.

b) Giả sử tam giác ABC cân tại C. Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và PC là M. Chứng minh hai tam giác CPA, CAM đồng dạng và khi P thay đổi trên cung nhỏ AB thì tỉ số $\frac{PC}{PA+PB}$ có giá trị không đổi.

c) Tìm vị trí điểm P trên cung nhỏ AB để tích $QR.ST$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 *(0,5 điểm)*. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh) ***Giới thiệu***

****

☞

Suy ra a là ước của cả b và c. Vì vậy chia cả hai vế PT(1) cho a đưa phương trình về dạng:

$$x^2-px+q=0\ \ (2),$$

trong đó $p=2^m$, $q=2^n\ (m,n\in\mathbb{N})$.

Suy ra $x_1.x_2=q=2^n$. Do đó $x_1=2^t$, $t\in\mathbb{N}$.

Ta có: $2^{2t}-2^{m+t}+2^t=0$ (3).

Giản ước (3) cho số hạng với lũy thừa bé nhất, ta được đẳng thức dạng $A-B+C=0$, trong đó ít nhất một trong ba số hạng bằng 1.

Nếu có đúng một số hạng bằng 1 thì $A-B+C$ lẻ, vô lý.

Nếu cả ba số hạng bằng 1 cũng dẫn đến vô lý.

Vậy có đúng 2 số hạng bằng 1, số hạng còn lại chia hết cho 2. Dễ thấy $A=C=1$, $B=2$.

Vậy $n=2t$, từ đó ta có $x_2=2^t=x_1$.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Giới thiệu

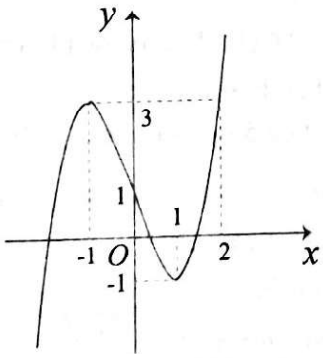
PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐỂ TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM ẨN

TRẦN VĂN ĐỨC
(GV THPT Cẩm Bình, Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Khai thác các chủ đề liên quan đến đồ thị rất phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm nhằm phát triển tư duy của học sinh. Có rất nhiều kỹ thuật để giải các bài toán phương trình nhưng kỹ thuật dùng đồ thị để tìm số nghiệm của phương trình hàm ẩn là một trong những kỹ thuật hay và ngắn gọn.

Đối với những bài toán tìm số nghiệm phương trình hàm ẩn liên quan đồ thị thì nói chung học sinh không giải ngay được bằng được bằng cách sử dụng máy tính bỏ túi mà các em phải nắm được phương pháp giải dạng toán này thì mới giải quyết được bài toán. Thông qua các thí dụ cụ thể, bài viết này sẽ giúp học sinh nắm được phương pháp dùng đồ thị để tìm số nghiệm của phương trình hàm ẩn.

Câu 1 (Đề thi chính thức THPT Quốc Gia 2021). *Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới.*



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

A. 9 **B.** 7 **C.** 3. **D.** 6.

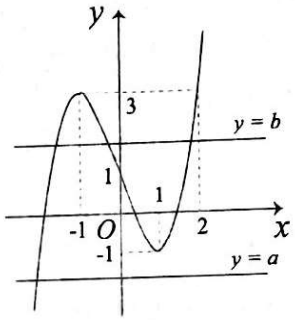
Lời giải. Từ đồ thị ta có:

$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=a \ (a<-1) \\ f(x)=b \ (1<b<2) \end{array}\right..$$

PT $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

PT $f(x)=a$ có 1 nghiệm.

PT $f(x)=b$ có 3 nghiệm phân biệt.



Do các nghiệm trên đôi một khác nhau nên PT $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm phân biệt. Chọn **B**.

Cách 2. *Dùng bảng biến thiên*

Đặt $t=f(x)$ lúc đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ với $a>3$.

x	$-\infty$			-1		1		$+\infty$
$t=f(x)$	$-\infty$	-1	1	3	1	-1	1	$+\infty$
$y=f(t)$	$-\infty$	↗	3	↘	a	↗	3	↘ $y=1$ ↗ $+\infty$
			-1		-1		-1	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy PT $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét. Đây là bài toán hàm ẩn đòi hỏi học sinh biết vận dụng kiến thức đồ thị để tìm sự tương giao của hai đồ thị và từ đó suy ra số nghiệm của phương trình. Qua bài toán trên ta có thể khái quát các bước giải bài toán: "*Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(u)=g(m)$*" như sau:

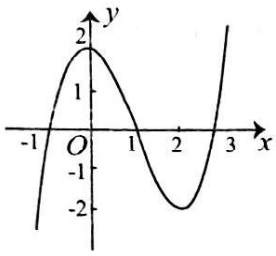
Bước 1: Biến đổi đưa phương trình về dạng $f(u)=g(m)$.

Bước 2: Dựa vào đồ thị hàm số để xét sự tương giao $y=f(u)$ và $y=g(m)$, giả sử chúng cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x_1;x_2;x_3...$

Bước 3: Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=u$ và $y=x_1, y=x_2, y=x_3,....$ để kết luận yêu cầu của bài toán.

Sau đây là các bài toán phát triển từ bài toán trên.

Câu 2. *Cho hàm số bậc ba* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *với* $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ *và* $a\neq 0$ *có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình* $f(f(x))=1$ *có bao nhiêu nghiệm?*



A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9.

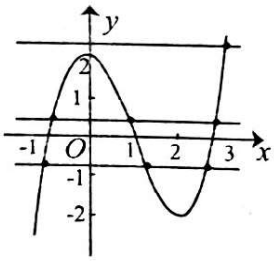
Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có:

$$f(f(x))=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m_1,\quad m_1\in(-1;0)\\ f(x)=m_2,\quad m_2\in(0;1)\\ f(x)=m_3,\quad m_3\in(2;+\infty)\end{array}\right..$$

PT $f(x)=m_1,\ m_1\in(-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt.

PT $f(x)=m_2,\ m_2\in(0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

PT $f(x)=m_3, m_3\in(2;+\infty)$ có 1 nghiệm duy nhất.

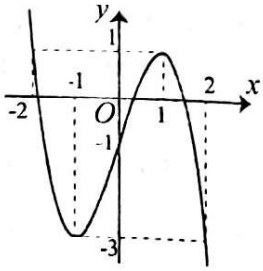


Do các nghiệm trên đôi một khác nhau nên phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm. Chọn **C**.

Câu 3. *Cho hàm số bậc ba* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ *và* $a\neq 0)$ *có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình*

$$f(2-f(x))=0$$

có bao nhiêu nghiệm?



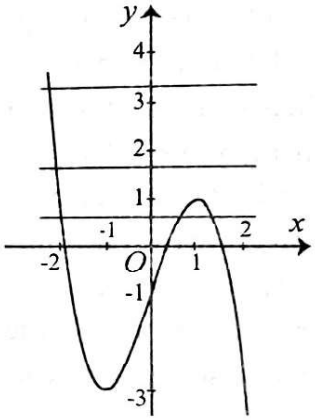
A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9.

Lời giải. Theo đồ thị ta có:

$$\Rightarrow f(2-f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=a\\ 2-f(x)=b\\ 2-f(x)=c\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=2-a & (1)\\ f(x)=2-b & (2).\\ f(x)=2-c & (3)\end{array}\right.$$

Nghiệm của các PT (1), (2), (3) lần lượt là hoành độ giao điểm của các đường thẳng $y=2-a;\ y=2-b;\ y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.



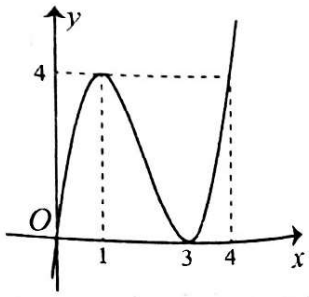
$a\in(-2;-1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$, suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.

$b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$, suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

$c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt. Chọn **A**.

Câu 4. *Cho hàm số bậc ba* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *với* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *và* $a\neq 0$ *có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình* $f(f(x))=0$ *có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?*



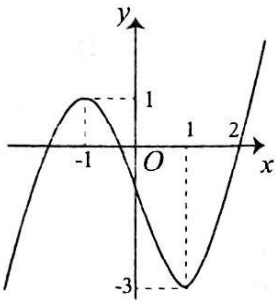
A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9.

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

$$f(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=3\end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị ta có: PT $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt (1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép). PT $f(x)=3$ có ba nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Chọn **A**.

Câu 5. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2+f(e^x))=1$ là*



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4.

Lời giải. Ta có:

$$f(2+f(e^x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+f(e^x)=-1 \\ 2+f(e^x)=a,\ (a>2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(e^x)=-3 \\ f(e^x)=a-2,\ (a-2>0) \end{array}\right.$$

• Xét phương trình $f(e^x)=-3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=b, b<-1\ \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

• Xét phương trình $f(e^x)=a-2>0$.

- TH1: $0<a-2<1 \Leftrightarrow 2<a<3$. Khi đó:

$$f(e^x)=a-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} e^x=b_1, b_1<-1 & \text{(vô nghiệm)} \\ e^x=b_2, -1<b_2<0 & \text{(vô nghiệm)} \\ e^x=b_3,\ b_3>2 & \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\ln b_3$. Vậy PT chỉ có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=\ln b_3$.

- TH2: $a-2=1 \Leftrightarrow a=3$. Khi đó:

$$f(e^x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} e^x=-1 & (VN) \\ e^x=b_4, & b_4>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\ln b_4.$$

Vậy PT chỉ có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=\ln b_4$.

- TH3: $a-2>1 \Leftrightarrow a>3$. Khi đó:

$$f(e^x)=a-2 \Leftrightarrow e^x=b_5 \Leftrightarrow x=\ln b_5 \text{ với } b_5>2.$$

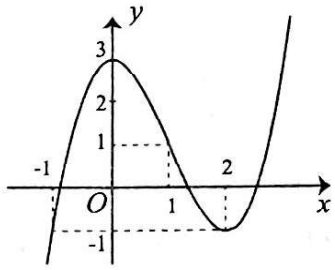
Vậy PT chỉ có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=\ln b_5$.

Kết luận: Với các trường hợp thì PT chỉ có thể có 2 nghiệm thực phân biệt. Chọn **B**.

Câu 6. *Cho hàm số bậc ba*

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R};\ a\neq 0)$$

có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $\left[f(x^2+1)\right]^2-f(x^2+1)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5.

Lời giải. Ta có:

$$\left[f(x^2+1)\right]^2-f(x^2+1)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^2+1)=-1 \\ f(x^2+1)=2 \end{array}\right.$$

• $f(x^2+1)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=-1\ \text{(vô nghiệm)} \\ x^2+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1.$

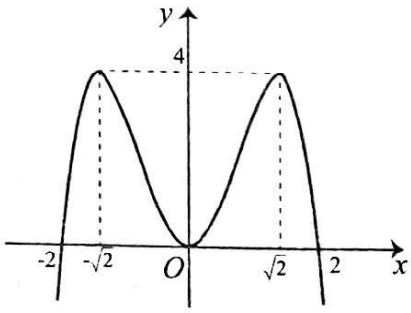
• $f(x^2+1)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+1=a\in(-1;0) & \text{(vô nghiệm)} \\ x^2+1=b\in(0;1) & \text{(vô nghiệm)} \\ x^2+1=c\in(2;+\infty) & \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2=c-1\in(1;+\infty) \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{c-1}$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm. Chọn **C**.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

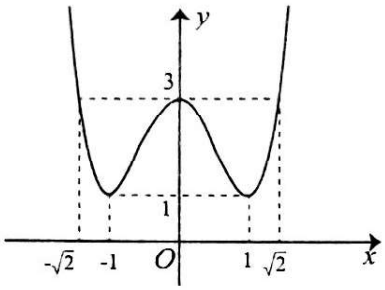
Câu 1. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=0$ là

A. 9 **B.** 12 **C.** 6 **D.** 7.

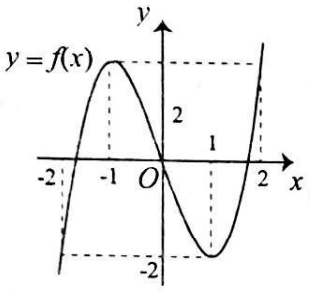
Câu 2. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các nghiệm thực của phương trình $f\left(\log_2 f(x)\right)=3$. Số phần tử của tập S là

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10.

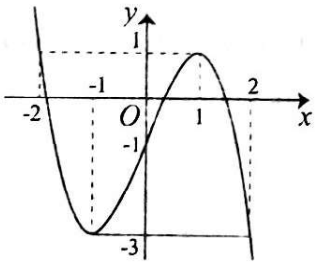
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$ bằng

A. 7 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 9

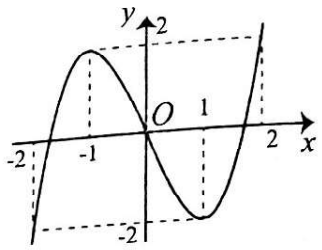
Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ.



Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.

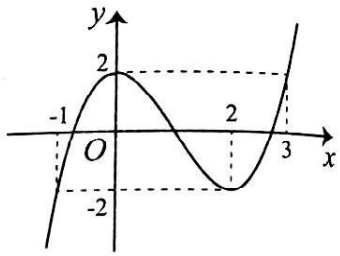
A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+2)=m$ có nghiệm $x\in(0;1)$



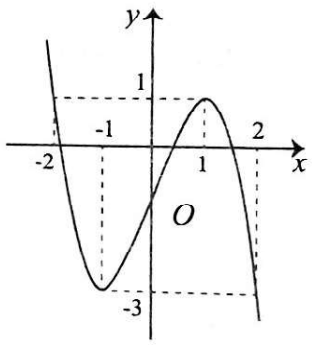
A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left[f\left(x^2+2x\right)\right]=3$ là



A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2.

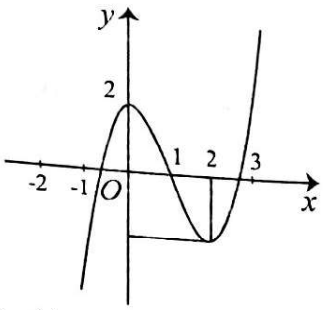
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(2-f(x)\right)=1$ là

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 4.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $m^2.f^2(x)-(m^2-2).f(x)-2=0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 10 **B.** 9 **C.** 7 **D.** 8

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH PHÁT HIỆN VÀ SỬ DỤNG SỐ ÂM TRONG CUỐN SÁCH CỬU CHƯƠNG TOÁN THUẬT CỦA LIU HUI

TẠ DUY PHƯỢNG
(Cộng tác viên Viện Toán học)

1. Sơ lược giới thiệu *Cửu chương toán thuật*

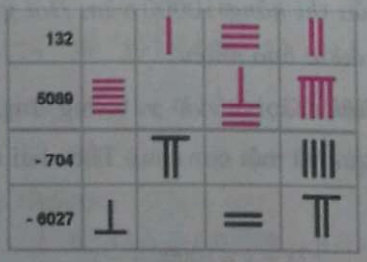
Cửu chương toán thuật (Toán học trong chín chương) là cuốn sách kinh điển của toán học Trung Hoa, do *Liu Hui* biên soạn năm 263 dựa trên các tác phẩm toán học Trung Hoa đã có từ trước và sau công nguyên (CN).

Hình 1: Liu Hui, tác giả Cửu Chương toán thuật

Cửu chương toán thuật ở Trung Hoa được coi như cuốn *Cơ sở* của *Euclid* ở phương Tây. *Cửu chương toán thuật* có ảnh hưởng lớn không chỉ đến toán học Trung Quốc, mà còn có ảnh hưởng sâu rộng đến toán học Việt Nam, Nhật Bản và Hàn Quốc. Chương 8 (Phương trận) của *Cửu chương toán thuật* trình bày phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính (sau này được gọi là *phương pháp khử Gauss*). Cũng trong quá trình giải hệ phương trình tuyến tính, Liu Hui là người đầu tiên trên thế giới đưa vào và sử dụng khái niệm *số âm* trong toán học.

Bài viết này trình bày toàn bộ 18 bài toán trong Chương 8 của *Cửu chương toán thuật* giải hệ phương trình tuyến tính, dẫn đến phát hiện và làm việc với số âm.

Người Trung Hoa ngày xưa đã sử dụng thẻ tre để tính toán. Thẻ tre màu đỏ biểu thị số dương, màu đen biểu thị số âm.

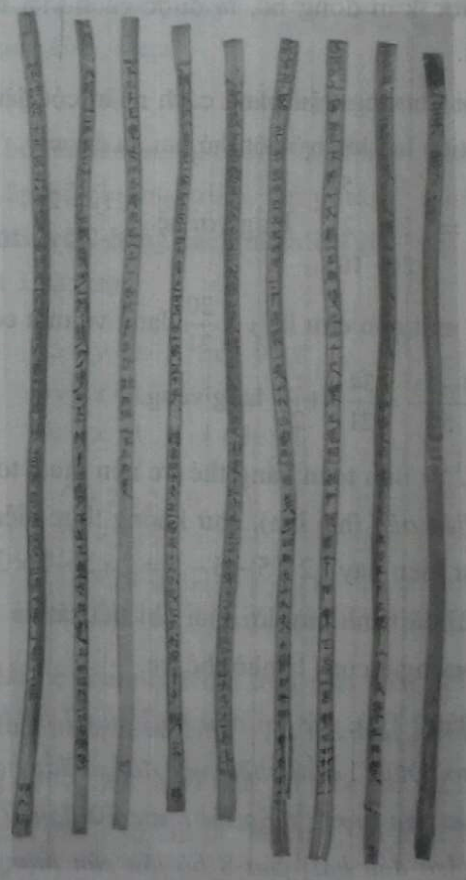


Hình 2: Bảng tính Trung Hoa

Cũng có khi thẻ tre cùng màu (đen, đỏ, nâu, ngà) biểu thị số dương, các số âm được thêm một thẻ đặt chéo lên trên. Các phép toán được thực hiện nhờ chuyển dịch các thẻ tre. Trong [1], các bài toán và lời giải được phát biểu bằng lời, số 0 được biểu thị là ô trống (Hình 2). Trong bài viết này chúng tôi sử dụng ngôn ngữ và kí hiệu toán học hiện đại, lời giải được trình bày dưới ngôn ngữ hệ phương trình, nhưng vẫn trung thành với *Cửu chương toán thuật*..

2. Giải hệ phương trình tuyến tính trong *Cửu chương toán thuật*

Cuốn sách 筭數書 (Suan shu shu-Sách về tính toán) được khai quật trong một ngôi mộ ở tỉnh Hồ Bắc năm 1984 gồm 1200 thẻ tre. Ngôi mộ có từ khoảng năm 186 trước công nguyên, nhưng nội dung toán học trong cuốn sách đó đã có từ 300 năm trước (Hình 3).



Hình 3: Một số thẻ tre của Suan shu shu

Chương 7 của *Cửu chương toán thuật* trình bày phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn đã có trong Suan shu shu. Một số bài toán trong Chương 8 của *Cửu chương toán thuật* cũng dẫn đến hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 1 (Bài 7 [1]). *5 con trâu và 2 con cừu giá 10 lạng vàng; 2 con trâu và 5 con cừu giá 8 lạng. Hỏi giá 1 con trâu, 1 con cừu.*

Giải. Gọi x và y tương ứng là giá tiền một con trâu và một con cừu. Theo bài ra ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$.

Lập phương trận tương ứng với hệ: $\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 2\\8 & 10\end{pmatrix}$.

Lưu ý 1. Ngày nay ma trận được lập theo hàng ngang $\begin{pmatrix}5 & 2 & 10\\2 & 5 & 8\end{pmatrix}$, người Trung Hoa lập phương trận (ma trận) theo hàng dọc. Điều này dễ hiểu vì người Trung Hoa viết chữ theo hàng dọc (từ trên xuống dưới) và từ phải sang trái. Xoay phương trận một góc 90^0 ngược kim đồng hồ, ta được cách viết ma trận hiện đại.

Biến đổi phương trận bằng cách nhân cột đầu với 5 rồi liên tiếp hai lần trừ cột thứ hai, ta được:

$\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 2\\8 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 5\\21 & 2\\20 & 10\end{pmatrix}$. Ứng với hệ $\begin{cases}21y=20\\5x+2y=10\end{cases}$.

Vậy giá một con cừu là $y=\frac{20}{21}$ lạng và một con trâu là $x=\frac{10-2y}{5}=\frac{34}{21}=1\frac{13}{21}$ lạng vàng.

Lưu ý 2. Vì tính toán bằng thẻ tre nên thuật toán đòi hỏi *trừ liên tiếp* (hai lần), chứ không thực hiện phép nhân như hiện nay ($2\times5-5-5=2\times5-5\times2=0$). Trong [2] đã trình bày lời giải chi tiết tất cả 18 bài trong Chương 8 của [1] nhờ thẻ tre.

Bài 2 (Bài 2 [1]). *Từ [số đấu hạt] của 7 bó lúa sản lượng cao bớt đi 1 đấu, thêm vào đó [số đấu hạt] của hai bó lúa sản lượng thấp thì được 10 đấu. Thêm 1 đấu vào [số đấu hạt] của 8 bó lúa sản lượng thấp cùng với [số đấu hạt] của 2 bó lúa sản lượng cao thì cũng được 10 đấu. Hỏi số thóc nhận được từ 1 bó lúa sản lượng cao, thấp?*

Giải. Gọi x và y tương ứng là số đấu thóc nhận được từ mỗi bó lúa sản lượng cao và sản lượng thấp. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}7x-1+2y=10\\8y+1+2x=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+2y=11\\2x+8y=9\end{cases}$$

Lập phương trận và đưa số hạng đầu về 0:

$$\begin{pmatrix}2 & 7\\8 & 2\\9 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\times7 & 7\\8\times7 & 2\\9\times7 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\times7-7-7 & 7\\8\times7-2-2 & 2\\9\times7-11-11 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 7\\52 & 2\\41 & 11\end{pmatrix}$$

Suy ra $y=\frac{41}{52}$ (đấu) và $x=\frac{11-2y}{7}=\frac{35}{26}=1\frac{9}{26}$ (đấu).

Bài 3 (Bài 10 [1]). *A và B có một số tiền. Nếu A nhận được thêm nửa số tiền của B thì A có 50 văn. Nếu B nhận 2/3 số tiền của A thì B cũng có 50 văn. Hỏi số tiền mỗi người có.*

Giải. Gọi x và y tương ứng là số tiền của A và B. Theo bài ra ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases}x+\frac{1}{2}y=50\\y+\frac{2}{3}x=50\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\1 & \frac{1}{2}\\50 & 50\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 1\\150 & 100\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 1\\50 & 100\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=25\\x=37\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Bài 4 (Bài 11 [1]). *Giá 2 con ngựa và 1 con trâu nhiều hơn một nửa giá 1 con ngựa là 10000 văn. Giá 1 con ngựa và 2 con trâu thêm nửa giá 1 con trâu nữa thì bằng 10000 văn. Hỏi giá 1 con ngựa, 1 con trâu là bao nhiêu?*

Giải. Gọi x và y tương ứng là giá tiền một con ngựa và một con trâu. Theo bài ra ta có hệ:

$$\begin{cases}2x+y=10000+\frac{1}{2}x;\\x+2y=10000-\frac{1}{2}y\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\\frac{5}{2} & 1\\10000 & 10000\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 20000 & 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3-3-3 & 3 \\ 5\times 3-2-2 & 2 \\ 20000\times 3-20000-20000 & 20000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 11 & 2 \\ 20000 & 20000 \end{pmatrix}.$$

Vậy giá 1 con trâu là: $y = 20000:11 = 1818\frac{2}{11}$ văn;

Giá 1 con ngựa: $x = \frac{20000-2y}{3} = 5454\frac{6}{11}$ văn.

Trong [1] *Liu Hui* đã phát triển phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính đến bậc năm dưới ngôn ngữ *phương trận* (ma trận).

Bài 5 (Bài 1 [1], xem thêm [3]). *Từ 3 bó lúa sản lượng cao, 2 bó lúa sản lượng trung bình và 1 bó lúa sản lượng thấp thu được 39 đấu; Từ 2 bó lúa sản lượng cao, 3 bó lúa sản lượng trung bình và 1 bó lúa sản lượng thấp thu được 34 đấu; Từ 1 bó lúa sản lượng cao, 2 bó lúa sản lượng trung bình và 3 bó lúa sản lượng thấp thu được 26 đấu. Hỏi bao nhiêu đấu thóc nhận được từ 1 bó lúa sản lượng loại cao, trung bình, thấp?*

Giải. Gọi x, y, z là số đấu thóc nhận được tương ứng từ một bó lúa sản lượng cao, trung bình và sản lượng thấp. Lập phương trình và biến đổi phương trận bằng cách đưa hai số hạng đầu ở hai cột trái và cột giữa về 0 bằng cách nhân cột đầu với 3 rồi trừ đi cột thứ ba, nhân cột thứ hai với 3 rồi trừ liên tiếp hai lần cột thứ ba, ta được:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

Đưa hệ số thứ hai của cột đầu về 0 bằng cách nhân cột đầu với 5 rồi trừ liên tiếp 4 lần cột thứ hai. Sau đó lần lượt tính z, y, x ta được:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4\times 5-5-5-5-5 & 5 & 2 \\ 8\times 5-1-1-1-1 & 1 & 1 \\ 39\times 5-24-24-24-24 & 24 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}; \quad y = \frac{24-z}{5} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4};$$

$$x = \frac{39-z-2y}{3} = 9\frac{1}{4}.$$

Tiểu kết. Thuật toán *Phương trận* giải hệ phương trình tuyến tính trong [1] là: Biến đổi phương trận về dạng tam giác với các hệ số phía trên đường chéo (tam giác trên) bằng 0. Từ phương trình cuối cùng và bằng phương pháp thế lần lượt tìm ra các ẩn. Đây chính là phương pháp khử Gauss hiện đại.

Trong [1] Liu Hui đã phát triển phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính đến bậc năm dưới ngôn ngữ *phương trận* (ma trận).

3. Phát hiện và sử dụng số âm trong *Cửu chương toán thuật*

Khi thực hiện thuật toán giải hệ phương trình tuyến tính bậc nhất, xuất hiện số âm.

Bài 6 (Bài 3 [1]). *Cùng thêm hai bó lúa sản lượng cao, ba bó lúa sản lượng trung bình và bốn bó lúa sản lượng thấp tương ứng vào một bó lúa sản lượng trung bình, thấp và cao thì đều vừa đủ 1 đấu. Hỏi bao nhiêu thóc nhận được từ mỗi bó lúa sản lượng cao, trung bình, thấp?*

Giải. Gọi x, y, z là số thóc nhận được tương ứng từ một bó lúa sản lượng cao, trung bình và sản lượng thấp. Lập hệ phương trình, lập phương trận và đưa hệ số đầu về 0 bằng cách nhân cột đầu với 2 và trừ cho cột 3, ta được

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ 4z+x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ x+4z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1\times 2-2 & 0 & 2 \\ 0\times 2-1 & 3 & 1 \\ 4\times 2-0 & 1 & 0 \\ 1\times 2-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi giải hệ phương trình trên nhờ biến đổi phương trận, xuất hiện hệ số âm (-1). *Liu Hui* giải thích: Số dương được hiểu là số tiền, số thóc, số vật, là lãi,..., là "thêm vào", số âm là "bớt đi", là lỗ (trong buôn bán). *Liu Hui* đã phát biểu *Quy tắc cộng trừ các số*

dương âm, dưới ngôn ngữ hiện đại được phát biểu như sau:

$$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b);\quad (\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b);$$
$$0-(+b)=-b;\quad 0-(-b)=b.$$

$$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b);\quad (\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b);$$
$$0+(+b)=+b;\quad 0-(+b)=-b.$$

Quy tắc trên cũng có thể viết dưới dạng:

$$a-b=\begin{cases}(|a|-|b|)\operatorname{sgn}a & \text{khi } \operatorname{sgn}a=\operatorname{sgn}b\\ (|a|+|b|)\operatorname{sgn}a & \text{khi } \operatorname{sgn}a=-\operatorname{sgn}b\end{cases};$$

$$0-b=-|b|\operatorname{sgn}b;$$

$$a+b=\begin{cases}(|a|-|b|)\operatorname{sgn}a, & \text{khi } \operatorname{sgn}a=-\operatorname{sgn}b\\ (|a|+|b|)\operatorname{sgn}a, & \text{khi } \operatorname{sgn}a=\operatorname{sgn}b\end{cases};$$

$$0+b=|b|\operatorname{sgn}b.$$

Ở đây hàm dấu $\operatorname{sgn}a=\begin{cases}1 & \text{khi } a>0\\ -1 & \text{khi } a<0\end{cases}.$

Và trị tuyệt đối $|a|=\begin{cases}a & \text{khi } a>0\\ -a & \text{khi } a<0\end{cases}.$

Từ đây suy ra quy tắc nhân số âm với số tự nhiên.

Áp dụng quy tắc này để biến đổi ma trận, ta có

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ -1\times3+3 & 3 & 1\\ 8\times3+1 & 1 & 0\\ 1\times3+1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 25 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{4}{25}\\ y=\dfrac{7}{25}\\ x=\dfrac{9}{25}\end{cases}.$$

Bài 7 (Bài 4 [1]). *5 bó lúa sản lượng cao bớt 7 bó lúa sản lượng thấp còn 1 đấu 1 thăng; 7 bó lúa sản lượng cao bớt 5 đấu sản lượng thấp còn 2 đấu 5 thăng. Hỏi bao nhiêu thóc nhận được từ 1 bó lúa sản lượng loại cao, thấp?*

Giải. Gọi x và y là số thóc (tính theo thăng) nhận được tương ứng từ một bó lúa sản lượng cao và sản lượng thấp. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases}5x-7y=11;\\ 7x-5y=25.\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}7 & 5\\ -5 & -7\\ 25 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}7\times5-5\times7 & 5\\ -5\times5-(-7)\times7 & -7\\ 25\times5-11\times7 & 11\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 5\\ 24 & -7\\ 48 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{48}{24}=2\\ x=5\end{cases}.$$

Lưu ý 3. 1 đấu = 10 thăng.

Bài 8 (Bài 5 [1]). *Nếu từ 6 bó lúa sản lượng cao bớt đi 1 đấu 8 thăng thì bằng 10 bó lúa sản lượng thấp; Nếu từ 15 bó lúa sản lượng thấp bớt đi 5 thăng thì bằng 5 bó sản lượng cao. Hỏi bao nhiêu thóc nhận được từ 1 bó lúa sản lượng cao và từ 1 bó sản lượng thấp?*

Giải. Gọi x và y là số thóc (tính theo thăng) nhận được tương ứng từ một bó lúa sản lượng cao và sản lượng thấp. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases}6x-18=10y\\ 15y-5=5x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-10y=18\\ -5x+15y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 15 & -10\\ 5 & 18\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -5\\ 1 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\times3+3 & 3\\ 3\times3-5 & -5\\ 1\times3+9 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -5\\ 12 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\ x=8\end{cases}.$$

Bài 9 (Bài 6 [1]). *Thêm 6 đấu vào 3 bó lúa sản lượng cao thì được 10 bó lúa sản lượng thấp; Thêm 1 đấu vào 5 bó lúa sản lượng thấp thì bằng 2 bó sản lượng cao. Hỏi bao nhiêu đấu thóc nhận được từ 1 bó lúa loại sản lượng cao hoặc thấp?*

Giải. Gọi x và y là số thóc (tính theo đấu) nhận được tương ứng từ một bó lúa sản lượng thấp và sản lượng cao. Lập hệ và biến đổi:

$$\begin{cases}3y+6=10x\\ 5x+1=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-10x+3y=-6\\ 5x-2y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -3\\ -1 & 6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}5\times2-10 & 10\\ -2\times2-(-3) & -3\\ -1\times2-6 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 10\\ -1 & -3\\ -8 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 10\\ 1 & -3\\ 8 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=8\\ x=3\end{cases}.$$

Bài 10 (Bài 9 [1]). *5 con chim sẻ và 6 con chim én nặng 1 cân. Nếu đổi 1 con chim sẻ cho 1 con én thì số cân bằng nhau. Hỏi mỗi chim sẻ và mỗi chim én nặng bao nhiêu?*

Giải. Gọi x và y tương ứng là trọng lượng của một con chim sẻ và một con chim én (1 *cân* = 16 *lạng*). Ta có hệ phương trận và đáp số:

$$\begin{cases}5x+6y=16\\ 4x+y=5y+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+6y=1;\\ 3x-4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & 6\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 3\times5-5-5-5 & 5\\ -4\times5-6-6-6 & 6\\ 0\times5-16-16-16 & 16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 5\\ -38 & 6\\ -48 & 16\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 5\\ 38 & 6\\ 48 & 16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} y=\dfrac{24}{19}\\ x=\dfrac{32}{19}\end{cases}.$$

Bài 11 (Bài 8 [1]). *Bán 2 con trâu, 5 con cừu mua 13 con lợn thì dư 1000 quan; Bán 3 con trâu, 3 con lợn mua 9 con cừu thì vừa đủ tiền. Bán 6 con cừu, 8 con lợn mua 5 con trâu thì thiếu 600 quan. Hỏi giá một con trâu, cừu và lợn.*

Giải. Gọi x, y, z tương ứng là giá tiền một con trâu, cừu và lợn. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 2x+5y=13z+1000\\ 3x+3z=9y\\ 6y+8z=5x-600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x+5y-13z=1000\\ x-3y+z=0\\ -5x+6y+8z=-600\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2\\ 6 & -3 & 5\\ 8 & 1 & -13\\ -600 & 0 & 1000\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ -9 & -11 & 5\\ 13 & 15 & -13\\ -600 & -1000 & 1000\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 9 & 11 & 5\\ -13 & -15 & -13\\ 600 & 1000 & 1000\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 9\times11-11\times9 & 11 & 5\\ -13\times11-(-15)\times9 & -15 & -13\\ 600\times11-1000\times9 & 1000 & 1000\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 11 & 5\\ -8 & -15 & -13\\ -2400 & 1000 & 1000\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} z=300\\ y=\dfrac{1000+15z}{11}=500.\\ x=1200\end{cases}$$

Bài 12 (Bài 15 [1]). *2 bó lúa A hơn 1 bó lúa B là 1 cân, 3 bó lúa B hơn 1 bó C là 1 cân, 4 bó lúa C hơn 1 bó A là 1 cân. Hỏi mỗi bó lúa các loại nặng bao nhiêu?*

Giải. Gọi x, y, z tương ứng là số cân lúa mỗi bó loại A, B, C. Lập hệ và biến đổi ma trận:

$$\begin{cases} 2x=1+y\\ 3y=1+z\\ 4z=1+x\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1\times2+2 & 0 & 2\\ 0\times2+(-1) & 3 & -1\\ 4\times2+0 & -1 & 0\\ 1\times2+1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 8 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ -1\times3+3 & 3 & -1\\ 8\times3+(-1) & -1 & 0\\ 3\times3+1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 23 & -1 & 0\\ 10 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Vậy 1 bó lúa loại C nặng $z=\dfrac{10}{23}$ cân; 1 bó lúa loại B nặng $y=\dfrac{11}{23}$; 1 bó loại A nặng $x=\dfrac{17}{23}$ cân.

Nhận xét. Số âm xuất hiện ngay trong phát biểu các bài số 7-12. Trong các bài 13-18 dưới đây, số âm xuất hiện trong quá trình biến đổi phương trận. Đáp số cuối cùng vẫn là các số dương. Trong một số bài, để lời giải ngắn gọn, chúng tôi đã dùng phép nhân thay cho phép trừ liên tiếp.

Bài 13 (Bài 12 [1]). *1 con ngựa khỏe, 2 con ngựa thường và 3 con ngựa yếu có thể thồ được 40 đảm hàng (1 đảm =30 cân) khi đi trên đường bằng, nhưng không thể leo dốc. Khi thêm 1 con ngựa thường vào 1 con ngựa khỏe, thêm 1 con ngựa yếu vào các con ngựa thường, thêm 1 con ngựa khỏe vào số ngựa yếu thì tất cả chúng đều leo được dốc. Hỏi mỗi con ngựa mỗi loại mang được bao nhiêu đảm hàng?*

Giải. Gọi x, y, z tương ứng là số cân mỗi con ngựa khỏe, ngựa thường và ngựa yếu mang được. Lập hệ và biến đổi ta được:

$$\begin{cases} x+y=40\\ 2y+z=40\\ 3z+x=40\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 40 & 40 & 40\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 40 & 40\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1\times2+2 & 2 & 1\\ 3\times2+1 & 1 & 0\\ 0\times2+40 & 40 & 40\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 7 & 1 & 0\\ 40 & 40 & 40\end{pmatrix}.$$

Vậy 1 ngựa yếu mang được $z=\dfrac{40}{7}=5\dfrac{5}{7}$ đảm;

1 con ngựa thường mang $y=\dfrac{40-z}{2}=17\dfrac{1}{7}$ đảm;

Một con ngựa khỏe mang được $22\dfrac{6}{7}$ đảm.

Bài 14 (Bài 16 [1]). *1 sếp, 5 quan và 10 người lính góp 10 con gà. Giả sử 10 quan, 1 sếp và 5 người lính góp 8 con gà; 5 sếp, 10 quan và 1 người lính góp 6 con gà. Hỏi mỗi người góp bao nhiêu gà?*

Giải. Gọi x, y, z tương ứng là số gà mà sếp, quan và lính góp. Theo bài ra ta có hệ:

$$\begin{cases} x+5y+10z=10 \\ 10x+y+5z=8 \\ 5x+10y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5-1\times5 & 10-1\times10 & 1 \\ 10-5\times5 & 1-5\times10 & 5 \\ 1-10\times5 & 5-10\times10 & 10 \\ 6-10\times5 & 8-10\times10 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -15 & -49 & 5 \\ -49 & -95 & 10 \\ -44 & -92 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15\times49-49\times15 & 49 & 5 \\ 49\times49-95\times15 & 95 & 10 \\ 44\times49-92\times15 & 92 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 49 & 10 \\ 976 & 95 & 1 \\ 776 & 92 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vậy mỗi lính góp $z=\frac{776}{976}=\frac{97}{122}$ con gà; mỗi quan góp $y=\frac{92-95z}{49}=\frac{41}{122}$ con gà; mỗi sếp góp $x=\frac{6-z-10y}{5}=\frac{45}{122}$ con gà.

Bài 15 (Bài 14 [2]). *Thu hoạch 2 vuông (luống) hạt kê trắng, 3 vuông hạt kê xanh, 4 vuông hạt kê vàng và 5 vuông hạt kê đen, nếu để riêng thì không đủ 1 đấu. Nếu thêm sản lượng mỗi thứ một vuông kê xanh và kê vàng vào kê trắng; kê vàng và kê đen vào kê xanh, kê đen kê trắng vào kê vàng, kê trắng kê xanh vào kê đen, thì đều được đủ 1 đấu. Hỏi mỗi loại là bao nhiêu?*

Giải. Gọi x, y, z, u tương ứng là sản lượng mỗi loại kê trắng, xanh, vàng đen. Ta có hệ

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+z+u=1 \\ 4z+u+x=1 \\ 5u+x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+z+u=1 \\ x+4z+u=1 \\ x+y+5u=1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 1\times2-2 & 0 & 2 \\ 1-0 & 0\times2-1 & 3 & 1 \\ 0-4 & 4\times2-1 & 1 & 1 \\ 5-1 & 1\times2-0 & 1 & 0 \\ 1-1 & 1\times2-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1-1 & -1\times3+3 & 3 & 1 \\ -4+7 & 7\times3+1 & 1 & 1 \\ 4+2 & 2\times3+1 & 1 & 0 \\ 0+1 & 1\times3+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 22 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3\times22-22\times3 & 22 & 1 & 1 \\ 6\times22-7\times3 & 7 & 1 & 0 \\ 1\times22-4\times3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 22 & 1 & 1 \\ 111 & 7 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy 1 vuông kê đen cho $u=\frac{10}{111}$ đấu; 1 vuông kê vàng cho $z=\frac{4-7u}{22}=\frac{17}{111}$ đấu; 1 vuông kê xanh cho $y=\frac{28}{111}$; 1 vuông kê trắng cho $x=\frac{11}{37}$ đấu.

Bài 16 (Bài 17 [1]). *5 con cừu, 4 con chó, 3 con gà và 2 con thỏ giá 1496 văn. 4 con cừu, 2 con chó, 6 con gà và 3 con thỏ giá 1175 văn. 3 con cừu, 1 con chó, 7 con gà và 5 con thỏ giá 958 văn. 2 con cừu, 3 con chó, 5 con gà và 1 con thỏ giá 861 văn. Hỏi giá tiền mỗi con mỗi loại.*

Giải. Gọi x, y, z, u tương ứng là giá tiền một con cừu, chó, gà và thỏ. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 5x+4y+3z+2v=1496 \\ 4x+2y+6z+3v=1175 \\ 3x+y+7z+5v=958 \\ 2x+3y+5z+v=861 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 861 & 958 & 1175 & 1496 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\times5-5\times2 & 3\times5-5\times3 & 4\times5-5\times4 & 5 \\ 3\times5-4\times2 & 1\times5-4\times3 & 2\times5-4\times4 & 4 \\ 5\times5-3\times2 & 7\times5-3\times3 & 6\times5-3\times4 & 3 \\ 1\times5-2\times2 & 5\times5-2\times3 & 3\times5-2\times4 & 2 \\ 861\times5-1496\times2 & 958\times5-1496\times3 & 1175\times5-1496\times4 & 1496 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & -7 & 6 & 4 \\ 19 & 26 & -18 & 3 \\ 1 & 19 & -7 & 2 \\ 1313 & 302 & 109 & 1496 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -7\times6+6\times7 & 6 & 4 \\ 45 & 26\times6-18\times7 & -18 & 3 \\ 20 & 19\times6-7\times7 & -7 & 2 \\ 1615 & 302\times6+109\times7 & 109 & 1496 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 45 & 30 & -18 & 3 \\ 20 & 65 & -7 & 2 \\ 1615 & 2575 & 109 & 1496 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & -18 & 3 \\ 4 & 13 & -7 & 2 \\ 323 & 515 & 109 & 1496 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 9\times6-6\times9 & 6 & -18 & 3 \\ 4\times6-13\times9 & 13 & -7 & 2 \\ 323\times6-515\times9 & 515 & 109 & 1496 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & -18 & 3 \\ 93 & 13 & -7 & 2 \\ 2697 & 515 & 109 & 1496 \end{pmatrix}.$$

Vậy một con thỏ giá $u=\dfrac{2697}{93}=29$ văn; một con gà giá $z=\dfrac{515-13u}{6}=23$ văn; một con chó giá $y=121$ văn; một con cừu giá $x=177$ văn.

Bài 17 (Bài 18). *9 đấu vừng, 7 đấu mì, 3 đấu đỗ, 2 đấu đậu và 5 đấu kê giá 140 văn; 7 đấu vừng, 6 đấu mì, 4 đấu đỗ, 5 đấu đậu và 3 đấu kê giá 128 văn; 3 đấu vừng, 5 đấu mì, 7 đấu đỗ, 6 đấu đậu và 4 đấu kê giá 116 văn; 2 đấu vừng, 5 đấu mì, 3 đấu đỗ, 9 đấu đậu và 4 đấu kê giá 112 văn; 1 đấu vừng, 3 đấu mì, 2 đấu đỗ, 8 đấu đậu và 5 đấu kê giá 95 văn. Hỏi giá mỗi đấu mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z, u, v tương ứng là giá tiền mỗi đấu vừng, mì, đỗ, đậu và kê. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 9x+7y+3z+2u+5v=140 \\ 7x+6y+4z+5u+3v=128 \\ 3x+5y+7z+6u+4z=116 \\ 2x+5y+3z+9u+4v=112 \\ x+3y+2z+8u+5v=95. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ 95 & 112 & 116 & 128 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1\times9-9 & 2\times9-9\times2 & 3\times3-9 & 7\times9-9\times7 & 9 \\ 3\times9-7 & 5\times9-7\times2 & 5\times3-7 & 6\times9-7\times7 & 7 \\ 2\times9-3 & 3\times9-3\times2 & 7\times3-3 & 4\times9-3\times7 & 3 \\ 8\times9-2 & 9\times9-2\times2 & 6\times3-2 & 5\times9-2\times7 & 2 \\ 5\times9-5 & 4\times9-5\times2 & 4\times3-5 & 3\times9-5\times7 & 5 \\ 95\times9-140 & 112\times9-140\times2 & 116\times3-140 & 128\times9-140\times7 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 20 & 31 & 8 & 5 & 7 \\ 15 & 21 & 18 & 15 & 3 \\ 70 & 77 & 16 & 31 & 2 \\ 40 & 26 & 7 & -8 & 5 \\ 715 & 728 & 208 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 31 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & 21 & 18 & 15 & 3 \\ 14 & 77 & 16 & 31 & 2 \\ 8 & 26 & 7 & -8 & 5 \\ 143 & 728 & 208 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4\times2-8 & 31\times5-5\times31 & 8\times5-5\times8 & 5 & 7 \\ 3\times2-18 & 21\times5-15\times31 & 18\times5-15\times8 & 15 & 3 \\ 14\times2-16 & 77\times5-31\times31 & 16\times5-31\times8 & 31 & 2 \\ 8\times2-7 & 26\times5+8\times31 & 7\times5+8\times8 & -8 & 5 \\ 143\times2-208 & 728\times5-172\times31 & 208\times5-172\times8 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ -12 & 360 & 30 & 15 & 3 \\ 12 & 576 & 168 & 31 & 2 \\ 9 & -378 & -99 & -8 & 5 \\ 78 & 1692 & 336 & 172 & 140 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ -4 & 20 & 10 & 15 & 3 \\ 4 & 32 & 56 & 31 & 2 \\ 3 & -21 & -33 & -8 & 5 \\ 26 & 94 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ -4\times5+20 & 20-10\times2 & 10 & 15 & 3 \\ 4\times5+32 & 32-56\times2 & 56 & 31 & 2 \\ 3\times5-21 & -21+33\times2 & -33 & -8 & 5 \\ 26\times5+94 & 94-112\times2 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 3 \\ 52 & 80 & 56 & 31 & 2 \\ -6 & -45 & -33 & -8 & 5 \\ 224 & 130 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 3 \\ 26 & 16 & 56 & 31 & 2 \\ -3 & -9 & -33 & -8 & 5 \\ 112 & 26 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 3 \\ 26\times16-16\times26 & 16 & 56 & 31 & 2 \\ -3\times16+9\times26 & -9 & -33 & -8 & 5 \\ 112\times16-26\times26 & 26 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 3 \\ 0 & 16 & 56 & 31 & 2 \\ 186 & -9 & -33 & -8 & 5 \\ 1116 & 26 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 3 \\ 0 & 16 & 56 & 31 & 2 \\ 93 & -9 & -33 & -8 & 5 \\ 558 & 26 & 112 & 172 & 140 \end{pmatrix}.$$

Đáp số: Giá kê là $v=\dfrac{558}{93}=6$ văn, giá đậu là $u=5$ văn, giá đỗ là $z=3$ văn, giá mì là $y=4$ văn, giá vừng là $x=7$ văn.

Bài 18 (Bài 13 [1]). *5 gia đình có một cái giếng chung cần góp dây làm gầu. Để gầu múc được nước, cần 2 đoạn dây của gia đình A thêm 1 đoạn dây của gia đình B, hoặc 1 đoạn dây của gia đình B thêm 3 đoạn dây của C, hoặc 4 đoạn dây của gia đình C cần thêm 1 đoạn dây của gia đình D, hoặc 5 đoạn dây của gia đình D thêm 1 dây của gia đình E, hoặc 6 đoạn dây của gia đình E thêm 1 đoạn dây của gia đình A. Hỏi giếng sâu bao nhiêu và độ dài mỗi đoạn dây của mỗi gia đình.*

Giải. Gọi x, y, z, u, v tương ứng là độ dài sợi dây (thốn) của các gia đình A, B, C, D, E và a (thốn) là độ sâu của giếng. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} 2x+y=a \\ 3y+z=a \\ 4z+u=a \\ 5u+v=a \\ 6v+x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=a \\ 3y+z=a \\ 4z+u=a \\ 5u+v=a \\ x+6v=a \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1\times 2-2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0\times 2-1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0\times 2-0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0\times 2-0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6\times 2-0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a\times 2-a & a & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1\times 3+3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0\times 3+1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0\times 3+0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 12\times 3+0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a\times 3+a & a & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1\times 4-4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 36\times 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a\times 4-a & a & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 144 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1\times 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 144\times 5+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15a\times 5+a & a & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76a & a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Vậy $v=\dfrac{76a}{721}$. Chọn $a=721$ thốn (1 thốn=2.3 cm). Một sợi dây nhà E dài 76 thốn; một sợi nhà D dài $u=129$ thốn; một sợi dây nhà C dài $z=148$ thốn; một sợi dây nhà B dài $y=191$ thốn; một sợi dây nhà A dài $x=265$ thốn.

Lời bình. Bài 18 (Bài 13 [1]) thường được cho là bài dạng hệ phương trình vô định (5 phương trình 6 ẩn). Thực chất đây là bài giải phương trình xác định (5 phương trình 5 ẩn nếu coi a là tham số và đưa về hệ 5 phương trình 5 ẩn bằng cách đặt ẩn phụ $x'=\dfrac{x}{a}$, $y'=\dfrac{y}{a}$, $z'=\dfrac{z}{a}$, $u'=\dfrac{u}{a}$, $v'=\dfrac{v}{a}$. *Liu Hui* coi đây là phương trình xác định và giải theo phương pháp phương trận (xem [1]).

Tài liệu dẫn

[1] 劉徽 Liu Hui, 九章算术, Cửu chương toán thuật, năm 263. Tiếng Nga: Berezina, trong *Các nghiên cứu lịch sử toán học*, Tập X, Nhà xuất bản Khoa học Kĩ thuật Moscow, 1957, trang 425-584; Tiếng Anh: Shen Kangshen, John N. Crossley, and Anthony W. -C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford 1999.

[2] Roger Hart, *The Chinese Roots of Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, USA, 2011.

[3] Lam Lay-Yong and Shen Kangshen, *Methods of Solving Linear Equations in Traditional China*, Historia Mathematics 16 (1989),107-122.

[4] Martzloff, J.-C., *A history of Chinese mathematics*, Berlin, Springer, 1997.

[5] Ya-xiang Yuan, *Jiu Zhang Suan Shu and the Gauss Algorithm for Linear Equations*, Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP (2012) 9–14. Bản dịch tiếng Việt: Dương Thị Hoàng Linh, tạp chí Pi, tập 4 (2020), số 4, trang 42-45.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/534 (Lớp 6). Cho số tự nhiên

$$A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12,$$

trong đó x và y là các số tự nhiên. Tìm giá trị nhỏ nhất (nếu có) của tổng các chữ số của số A.

HUỲNH THỊ THANH TÂM
(60/55 Quang Trung, phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/534 (Lớp 7). Cho tam giác đều ABC, M là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia CM lấy điểm D sao cho $CD = CA$ và trên tia BC lấy điểm E sao cho EB là tia phân giác của góc $\widehat{AED}$. Tính số đo góc $\widehat{AED}$.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T3/534. Tính tổng S các số lẻ nhỏ hơn 2022 không chia hết cho 5 và không chia hết cho 9.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T4/534. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A, E là điểm chính giữa cung AC không chứa B. ED cắt AC, BC lần lượt tại F và G. Đường thẳng qua F vuông góc với AD cắt đường thẳng qua G vuông góc với BE tại H. Gọi O', O'' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE và BGD. Chứng minh rằng $HO // O'O''$.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T5/534. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}$.

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/534. Giải phương trình

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} = x^2 - 5x + 3.$$

PHẠM VĂN THUẬN
(565 Thanh Xuân, Hà Nội)

Bài T7/534. Cho $a_k, b_k > 0, k = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\dfrac{1}{a_k} + \dfrac{1}{b_k}}$.

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Bài T8/534. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Các đường thẳng AG, BG, CG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh

a) $AB_1.AC_1.BC_1.BA_1.CA_1.CB_1 \leq 4R^4r^2$;

b) $BA_1.CA_1 + CB_1.AB_1 + AC_1.BC_1 \leq 2R(2R - r)$.

(Ở đây R, r thứ tự là kí hiệu các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC).

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/534. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác có nửa chu vi p. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{bc}}{p-a} + \frac{\sqrt{ca}}{p-b} + \frac{\sqrt{ab}}{p-c} \geq 6.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/534. Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c sao cho $a^2 + 1$, $b^2 + 2$ là các số nguyên tố, c là số không chia hết cho 5, và thỏa mãn

$$(a^2+1)(b^2+2) = c^2 + 9.$$

PHẠM HẢI ĐĂNG
(Kim Đường, Ứng Hòa, Hà Nội)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/534 (Lớp 6). Cho số tự nhiên

$$A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12,$$

trong đó x và y là các số tự nhiên. Tìm giá trị nhỏ nhất (nếu có) của tổng các chữ số của số A.

HUỲNH THỊ THANH TÂM
(60/55 Quang Trung, phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/534 (Lớp 7). Cho tam giác đều ABC, M là trung điểm của AB. Trên tia đối của tia CM lấy điểm D sao cho $CD = CA$ và trên tia BC lấy điểm E sao cho EB là tia phân giác của góc $\widehat{AED}$. Tính số đo góc $\widehat{AED}$.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T3/534. Tính tổng S các số lẻ nhỏ hơn 2022 không chia hết cho 5 và không chia hết cho 9.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T4/534. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A, E là điểm chính giữa cung AC không chứa B. ED cắt AC, BC lần lượt tại F và G. Đường thẳng qua F vuông góc với AD cắt đường thẳng qua G vuông góc với BE tại H. Gọi O', O'' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE và BGD. Chứng minh rằng $HO // O'O''$.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T5/534. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}$.

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/534. Giải phương trình

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} = x^2 - 5x + 3.$$

PHẠM VĂN THUẬN
(565 Thanh Xuân, Hà Nội)

Bài T7/534. Cho $a_k, b_k > 0, k = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng $$\frac{1}{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}}.$$

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Bài T8/534. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Các đường thẳng AG, BG, CG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh

a) $AB_1.AC_1.BC_1.BA_1.CA_1.CB_1 \leq 4R^4r^2$;

b) $BA_1.CA_1 + CB_1.AB_1 + AC_1.BC_1 \leq 2R(2R-r)$.

(Ở đây R, r thứ tự là kí hiệu các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC).

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/534. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác có nửa chu vi p. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{bc}}{p-a} + \frac{\sqrt{ca}}{p-b} + \frac{\sqrt{ab}}{p-c} \geq 6.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/534. Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c sao cho $a^2 + 1$, $b^2 + 2$ là các số nguyên tố, c là số không chia hết cho 5, và thỏa mãn

$$(a^2+1)(b^2+2) = c^2 + 9.$$

PHẠM HẢI ĐĂNG
(Kim Đường, Ứng Hòa, Hà Nội)

Bài T11/534. Cho số nguyên dương chẵn n và $p > n^n$ là số nguyên tố. Chứng minh đa thức

$$Q(x) = (x-1)(x-2)...(x-n) + p$$

là đa thức bất khả quy (theo nghĩa không là tích của hai đa thức hệ số nguyên khác hằng).

BÙI VĂN BÌNH

(*GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa*) Sưu tầm

Bài T12/534. Cho tam giác không vuông ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác. AD, BE, CF là các đường cao. A_b, A_c theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua F, E. A_a là giao điểm của EF và A_bA_c. Các điểm B_b, C_c được xác định tương tự. Chứng minh rằng AA_a, BB_b, CC_c đồng quy tại một điểm thuộc (O).

LƯU CÔNG ĐÔNG

(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)

Bài L1/354. Ba con lắc đơn cùng chiều dài, cùng khối lượng và cùng được treo trong điện trường đều có phương thẳng đứng. Con lắc thứ nhất và thứ hai tích điện lần lượt là q_1 và q_2, con lắc thứ 3 không tích điện. Biết $|qE| < mg$, Chu kì dao động nhỏ của ba con lắc lần lượt là T_1, T_2, T_3 sao cho $T_1 = \frac{T_3}{3}, T_2 = \frac{5T_3}{3}$. Tính tỉ số $\frac{q_1}{q_2}$.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/354. Cho đoạn mạc điện xoay chiều $AMNB$. Đoạn mạch AM chỉ chứa điện rở thuần $R = 120\sqrt{3}\ \Omega$, đoạn mạch MN chỉ chứa cuộn cảm có độ tự cảm L và điện trở hoạt động $R = 30\sqrt{3}\ \Omega$, đoạn mạch NB chỉ chứa tụ điện có điện dung C. Hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch có biểu thức: $u_{AB} = U_0 \cos 100\pi t\ (V)$, hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm A, N là $U_{AN} = 300$ V, và giữa hai điểm M, B là $U_{MB} = 60\sqrt{3}$ V. Hiệu điện thế tức thời u_{AN} lệch pha so với u_{MB} là $\frac{\pi}{2}$. Xác định U_0, độ tự cảm L, tụ điện C. Viết biểu thức dòng điện trong mạch.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

****

Đính chính: Do sơ suất khi chế bản nên Tạp chí TH&TT số 533, tháng 11 năm 2021 đã đăng thiếu tên một em trong danh sách các em đoạt giải *Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2020 – 2021*. Xin được bổ sung vào danh sách đó là em: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, trường THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên:** *đoạt giải Nhất môn Toán*, năm học 2020-2021.

Tòa soạn TH&TT thành thực xin lỗi em *Quân* và bạn đọc về sai sót này. Đề nghị em *Quân* gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại 024.35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

****

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/534 (For 6th grade). Consider the number

$$A = 2021^{xy} + y^5 + 3y^4 + 4y + 12,$$

where x and y are non-negative integers. Find the minimum value, if exists, of the sum of all digits of A.

Problem T2/534 (For 7th grade). Given an equilateral triangle ABC. Let M be the midpoint of AB. On the opposite ray of the ray CM, choose the point D so that $CD = CA$ and on the ray BC, choose the point E so that EB is the angle bisector of $\widehat{AED}$. Find the measurement of $\widehat{AED}$.

Problem T3/534. Find the sum S of all odd numbers which are less than 2022, are not divisible by 5 and are not divisible by 9.

(*Xem tiếp trang 44*)

Bài T1/530. *Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn điều kiện:* $35(xyz+x+z)=52(xy+1)$ (1).

Lời giải. Cách 1. Nếu $x = 0$ thì (1) trở thành $35z = 52$, nhưng z không là số nguyên, vì vậy $x \geq 1$. Nếu $z = 0$ thì điều kiện (1) trở thành $35x = 52xy + 52$ nên $35x > 52xy$, giản ước cho $x \geq 1$ được $35 > 52y$, suy ra số nguyên $y = 0$, lúc đó $35x = 52$, nhưng x không là số nguyên, vì vậy $z \geq 1$. Biến đổi (1) thành

$$35(xyz + z) + 35x = 52(xy + 1),$$

hay $$35z(xy + 1) + 35x = 52(xy + 1).$$

Do $x \geq 1$ nên $35z(xy + 1) < 52(xy + 1)$, giản ước cho $xy + 1 \geq 1$ được $35z < 52$, mà $z \geq 1$ nên chỉ có thể xảy ra $z = 1$. Thay $z = 1$ vào điều kiện (1) được

$$35(xy + 1) + 35x = 52(xy + 1),$$

hay là $$35x = 17(xy + 1).$$

Từ đó có $35x = 17xy + 17$ nên $y > 0$ và $35x > 17xy$, giản ước cho $x \geq 1$ được $35 > 17y$, do đó chỉ có thể là $y = 1$ hoặc $y = 2$. Nếu $y = 1$ thì có $35x = 17x + 17$, hay là $18x = 17$, nhưng x không là số nguyên.

Nếu $y = 2$ thì có $35x = 34x + 17$, nên $x = 17$. Vậy $x = 17$, $y = 2$, $z = 1$ là bộ số duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán.

Cách 2. Biến đổi (1) thành

$$35[(xy + 1)z + x] = 52(xy + 1) \quad (2).$$

Do $35 = 5.7$ và $52 = 4.13$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên 35 là ước số của $xy + 1$.

Đặt $xy + 1 = 35t > 0$ (3), thay vào (2) và giản ước cho 35 được $35tz + x = 52t$ (4), nên $35tz \leq 52t$, giản ước cho $t > 0$ được $35z \leq 52$ nên $z = 0$ hoặc $z = 1$. Nếu $z = 0$ từ (4) có $x = 52t$, thay vào (3) được $t(35 - 52y) = 1$ nên $t = 1$, nhưng y không là số nguyên. Nếu $z = 1$ thay vào (4) được $35t + x = 52t$, hay là $x = 17t$, thay vào (3) được $17ty + 1 = 35t$, hay là $t(35 - 17y) = 1$, từ đó $t = 1$, $x = 17$, $y = 2$, $z = 1$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Đinh A Na*, *Nguyễn Thái Triệu*, *Bùi Thị Thùy Linh*, 6A, *Phạm Xuân Hoàng*, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/530. *Quanh đường tròn viết n số thực khác nhau* ($n \geq 3$) *sao cho mỗi số bằng tích của hai số đứng kề nó. Tìm n và tìm các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết là a và b.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Ngọc Tú*). Ta đánh số các số được viết một cách hình thức lần lượt là $a_1, a_2, \ldots$ kể cả khi lặp lại số đầu tiên. Do các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đôi một khác nhau cho nên rõ ràng $a \neq b$ và cả hai số khác 0. Từ giả thiết đầu bài dễ dàng có

$$a_1 = a, a_2 = b, a_3 = \frac{b}{a}, a_4 = \frac{1}{a}, a_5 = \frac{1}{b}, a_6 = \frac{a}{b}, a_7 = a.$$

Vì các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đôi một khác nhau, cho nên $n \leq 6$. Ta xét các trường hợp :

Nếu $n = 3$ suy ra $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1$ và phải có 2 trong 3 số này bằng nhau, trái với giả thiết bài toán là 3 số này đôi một khác nhau. Với $n = 4$ và $n = 5$ ta có mâu thuẫn tương tự.

Với $n = 6$, các số được viết là: $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = \frac{b}{a}, a_4 = \frac{1}{a}, a_5 = \frac{1}{b}, a_6 = \frac{a}{b}$. Dễ kiểm tra là điều kiện chúng đôi một khác nhau là $ab \neq 0, a \neq b, a \neq 1, b \neq 1, b \neq a^2, a \neq \frac{1}{b}, a \neq b^2$.

Nhận xét : Chỉ có một bạn có lời giải đúng là bạn: *Nguyễn Ngọc Tú*, thôn Bản Tùy, xã Ngọc Dương, TP. Hà Giang, **Hà Giang**.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/530. *Với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a < b < c$ và $\frac{1}{[a;b]}+\frac{1}{[b;c]}=\frac{1}{2020}$. Tìm giá trị lớn nhất của a.*

Lời giải. Do $[a, b]$ chia hết cho a và b nên ta có thể đặt $[a, b] = mb = pa$ (m, p nguyên dương và $m < p$). Khi đó $p=\frac{mb}{a}\geq m+1$ (do $b > a$), suy ra

$$a\leq\frac{m}{m+1}b \quad (1).$$

Tương tự, đặt $[b, c] = nb$ (n nguyên dương). Do $b < c$ nên $n \geq 2$. Khi đó:

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}=\frac{1}{mb}+\frac{1}{nb}=\frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow b=\frac{2020(m+n)}{mn} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a\leq\frac{m}{m+1}.\frac{2020(m+n)}{mn}\Rightarrow a\leq\frac{2020(m+n)}{n(m+1)}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{m+n}{n(m+1)}\leq\frac{3}{4}$ (3). Thật vậy:

$$(3)\Leftrightarrow 4m+4n\leq 3mn+3n\Leftrightarrow n(3m-1)\geq 4m.$$

Vì $n\geq 2$ nên

$$n(3m-1)\geq 2(3m-1)=4m+2(2m-1)\geq 4m$$

(luôn đúng, do m là số nguyên dương).

Do đó $a\leq 2020.\frac{3}{4}=1515$. Vậy giá trị lớn nhất của a là 1515 khi $m = 1$, $n = 2$. Lúc đó ta chọn $a = 1515$, $b = 2a = 3030$, $c = 2b = 6060$ (thoả mãn điều kiện bài toán).

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải đúng bài này.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/530. *Cho tam giác ABC là tam giác nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường trung trực của đoạn thẳng AH lần lượt cắt các cạnh AB, AC tại P và Q. Trên tia đối của tia AO lấy điểm D (D không trùng A). Các tia DB, DC lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm khác là E và F. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DO, đường thẳng này lần lượt cắt các tia BF, CE, OP, OQ tại M, N, S, T. Chứng minh MT = NS.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $DS = DT$ và $DM = DN$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

- Ta có kết quả quen thuộc $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$, $\widehat{CAH}=\widehat{OAB}$.

Từ đó suy ra $\Delta APH \backsim \Delta AOC$ (g-g), ta có:

$$\frac{AP}{AO}=\frac{AH}{AC}\Leftrightarrow\frac{AP}{AH}=\frac{AO}{AC}.$$

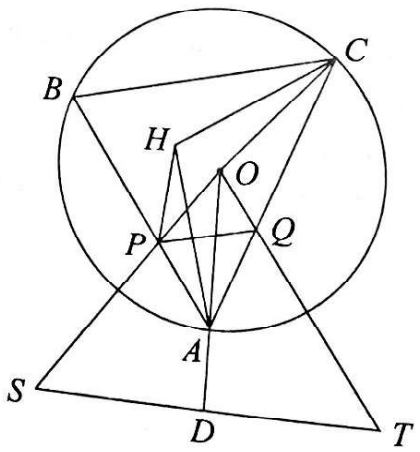
Do đó $\Delta APO \backsim \Delta AHC$ (c.g.c), suy ra:

$$\widehat{AOP}=\widehat{ACH}=90^\circ-\widehat{BAC} \quad (1)$$

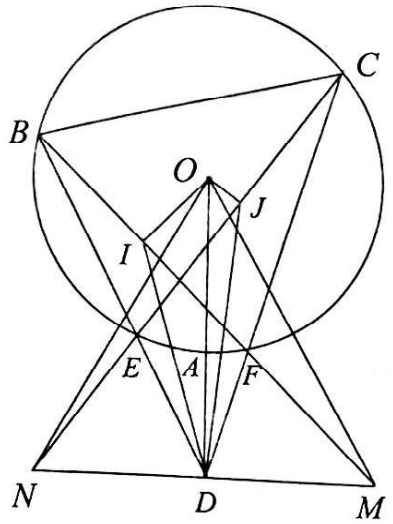
Tương tự, $\Delta AQO \backsim \Delta AHB$ (c.g.c), suy ra:

$$\widehat{AOQ}=\widehat{ABH}=90^\circ-\widehat{BAC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AOP}=\widehat{AOQ}$. Tam giác OST là tam giác cân do OD là đường cao đồng thời là phân giác, từ đó ta có $DS = DT$ (*).



- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BF, CE, suy ra $OI \perp BF$, $OJ \perp CE$ (tính chất đường kính, dây cung).



Vì $\widehat{EBF} = \widehat{ECF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EF), suy ra $\Delta DEC \backsim \Delta DFB$ (g.g).

Từ đó suy ra $\Delta DJC \backsim \Delta DIB$ (vì DJ, DI là các đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác DEC, DFB). Do đó $\widehat{DJE} = \widehat{DIF}$ (3).

Vì $\widehat{OJN} = \widehat{ODN} = 90°$ nên tứ giác $OJDN$ nội tiếp, ta có $\widehat{DON} = \widehat{DJN}$ (4).

Tương tự, tứ giác $OIDM$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{DOM} = \widehat{DIM} \quad (5).$$

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{DOM} = \widehat{DON}$.

Tam giác OMN cân vì có OD là đường cao đồng thời là phân giác góc $\widehat{MON}$, từ đó ta có:

$$DM = DN \quad (**).$$

Từ (*), (**) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải tốt cho bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/530. *Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình:* $x^2 - 2xy + 2\sqrt{2xy - y^2} = 1$.

Lời giải. Điều kiện $2xy - y^2 \geq 0$, suy ra x, y không trái dấu với nhau.

Nếu x là số nguyên chẵn thì vế trái là một số chẵn, phương trình không thỏa mãn. Do đó x là số lẻ.

Nhận thấy nếu (x, y) thỏa mãn phương trình thì $(-x, -y)$ cũng thỏa mãn phương trình.

Ta xét trường hợp $x > 0$; $y \geq 0$. Lưu ý rằng $x^2 - 2xy$ là số lẻ nên $x^2 - 2xy \neq 0$.

• Nếu $x^2 - 2xy > 0$ thì vì $x^2 - 2xy$ và $2\sqrt{2xy - y^2}$ là các số tự nhiên nên chỉ có thể

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 1 & (1) \\ 2xy - y^2 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x(x - 2y) = 1$. Vì x là số tự nhiên lẻ nên $\begin{cases} x = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 0)$: thỏa mãn (2).

Như vậy $(x; y) = (1; 0)$ thỏa mãn phương trình trong đầu bài.

Theo nhận xét trên, cũng có $(x; y) = (-1; 0)$ thỏa mãn phương trình.

• Nếu $x^2 - 2xy < 0$ thì vì $x > 0$ nên $x < 2y$.

Có $2xy - y^2 \leq x^2 + y^2 - y^2 = x^2$ nên

$$0 < 1 = x^2 - 2xy + 2\sqrt{2xy - y^2} \leq x^2 - 2xy + 2x$$

$\Rightarrow 2xy < x^2 + 2x \Rightarrow 2y < x + 2$.

Như vậy $x < 2y < x + 2 \Rightarrow 2y = x + 1$. Thay vào phương trình, ta được:

$$x^2 - x(x+1) + 2\sqrt{x(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4}} = 1$$

$\Leftrightarrow -x + \sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$.

Ta được $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Cặp số $(x; y) = (1; 1)$ thỏa mãn phương trình.

Theo nhận xét trên cũng có $(x; y) = (-1; -1)$ thỏa mãn phương trình.

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình là: $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

Nhận xét. Việc nhận xét x là số lẻ; x, y không trái dấu với nhau và nếu (x, y) thỏa mãn phương trình thì $(-x, -y)$ cũng thỏa mãn phương trình là rất quan trọng, vì ta chỉ cần xét bài toán với $x > 0$; $y \geq 0$.

Trong trường hợp $x^2 - 2xy < 0$, điều then chốt là chứng minh: $x < 2y < x+2$, suy ra $2y = x+1$.

Chỉ có một bạn sau đây có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/530. *Cho các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 1$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = (ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1).$$

Lời giải. Cách 1 (của bạn *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**).

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$bc+ca = c(a+b) \le \frac{(c+a+b)^2}{4} = 1.$$

Lại có: $c \ge 1 \Rightarrow a+b \le 1 \Rightarrow ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{1}{4} < 1.$

Từ đó: $P = (ab+bc+ca)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1\right)$

$$\le (ab+1)\left[a^2b^2+(bc+ca)^2-2c^2ab+1\right]$$

$$\le (ab+1)\left[a^2b^2+1-2ab+1\right] = a^3b^3-a^2b^2+2$$

$$= a^2b^2(ab-1)+2 \le 2.$$

$P = 2$ khi $(a,b,c) \in \{(0;1;1),(1;0;1)\}$.

Vậy max$P = 2$.

Cách 2. (Của bạn *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**)

Ta có:

$$(a+b)c \le \frac{(a+b+c)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow ac+bc-1 \le 0.$$

Mà $1 \le c \Leftrightarrow ab \le abc$, do đó:

$$ab+bc+ca-1 \le abc.$$

Vì vậy:

$$P = (ab+bc+ca)\left[(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)+1\right]$$

$$= (ab+bc+ca)\left[(ab+bc+ca)^2 - 4abc+1\right]$$

$$\le (ab+bc+ca)\left[(ab+bc+ca)^2 - 4(ab+bc+ca)+5\right].$$

Đặt $t = ab+bc+ca$. Khi đó:

$$0 \le t \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Xét hàm số: $f(t) = t(t^2-4t+5)$, ta có:

$$f'(t) = 3t^2-8t+5);\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{5}{3} \end{array}\right.;$$

$$f(0) = 0, f(1) = 2, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{27}.$$

Do đó: $\max\limits_{\left[0;\frac{4}{3}\right]} f(t) = 2$. Vậy max$P = 2$ khi

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1 \\ a+b=c \\ ab=abc \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ a+b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, b=1, c=1 \\ a=1, b=0, c=1 \end{array}\right..$$

Nhận xét. Cách giải thứ nhất chỉ dùng kiến thức ở bậc THCS và có lời giải khá ngắn gọn, cách thứ hai chuyển về việc dùng đạo hàm để tìm GTLN của hàm liên tục trên một đoạn. Lời giải của các bạn tham gia chủ yếu như một trong hai cách giải trên. Ngoài bạn *Hoàng* và bạn *Long*, các bạn có lời giải tốt là: **Hưng Yên:** *Trần Hữu Dương*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Vũ Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Lâm Đồng:** *Trần Công Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12T1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/530. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta luôn có:*

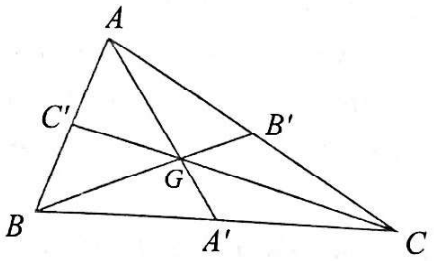
$$|m_a - m_b| + |m_b - m_c| + |m_c - m_a| \ge \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

với a, b, c, m_a, m_b, m_c thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C.

Lời giải (của *Đào Quang Anh*). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có:

$$GB+GC<AB+AC;\ GB+GA<CB+CA;$$

$$GC+GA<BC+BA.$$



Do đó:

$$m_a+m_b=\frac{3}{2}(GA+GB)<\frac{3}{2}(CA+CB)=\frac{3}{2}(a+b).$$

Suy ra: $|m_a-m_b|=\dfrac{|m_a^2-m_b^2|}{m_a+m_b}$

$$=\frac{\left|\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}-\dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}\right|}{m_a+m_b}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}|a^2-b^2|}{m_a+m_b}\ge\frac{|a-b|}{2}.$$

Tương tự, $|m_b-m_c|\ge\dfrac{|b-c|}{2}$, $|m_c-m_a|\ge\dfrac{|c-a|}{2}$.

Lưu ý: Dấu "=" xảy ra khi tam giác cân. Khi đó cả hai vế bằng nhau và bằng 0.

Không mất tổng quát, coi $a\ge b\ge c$. Khi ấy

$$|m_a-m_b|+|m_b-m_c|+|m_c-m_a|$$
$$\ge\frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2}$$
$$=\frac{(a-b)+(b-c)+(a-c)}{2}=a-c.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$a-c\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}\qquad(2).$$

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow(a-c)^2\ge a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$
$$\Leftrightarrow ab-ac+bc-b^2\ge0$$
$$\Leftrightarrow a(b-c)+b(c-b)\ge0$$
$$\Leftrightarrow(a-b)(b-c)\ge0.$$

BĐT cuối cùng đúng, vậy (2) đúng. BĐT(1) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Chỉ có 4 bạn gửi bài, tuy giải theo các cách khác nhau nhưng đều đúng: **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 10E1, THPT Everest, Bắc Từ Liêm; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, huyện Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân* 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

TẠ DUY PHƯỢNG

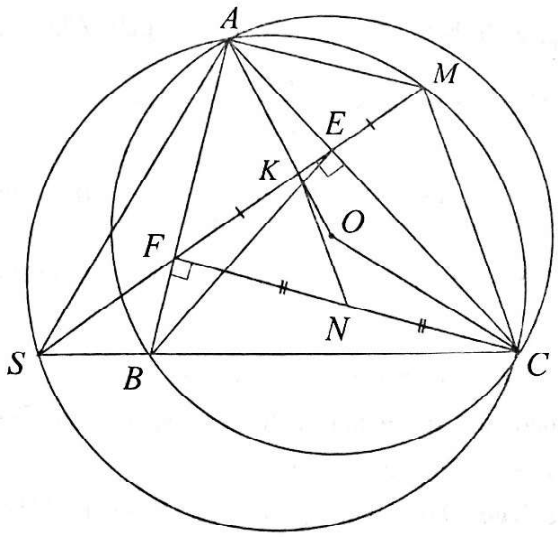
Bài T8/530. *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn tâm O, có các đường cao BE, CF. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại S, OA cắt EF tại K. Gọi N là trung điểm của FC. Chứng minh rằng* $\widehat{SAC}=\widehat{NKF}$.

Lời giải. Cách 1. (Theo bạn *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân, **Phú Yên**).

Ta có: $\widehat{KAE}+\widehat{AEK}=\dfrac{180^0-\widehat{AOC}}{2}+\widehat{ABC}$

$$=90^0-\widehat{ABC}+\widehat{ABC}=90^0.$$

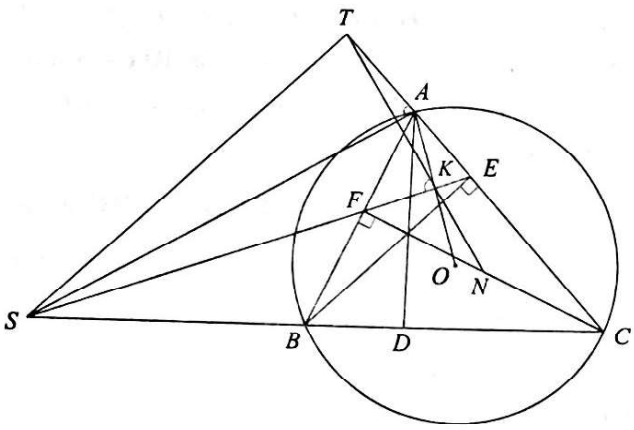
Như vậy $\widehat{AKE}=90^0$ hay OA vuông góc với EF tại K. Từ C kẻ đường thẳng song song với KN, đường thẳng này cắt EF tại M, khi đó K là trung điểm của



FM. Do đó F và M đối xứng nhau qua OA.

Vì tam giác AFM cân tại A nên $\widehat{AFM}=\widehat{AMF}\Rightarrow\widehat{AMS}=\widehat{AFE}=\widehat{ACS}$. Suy ra bốn điểm A, M, C, S cùng thuộc một đường tròn. Từ đó $\widehat{SAC}=\widehat{SMC}=\widehat{NKF}$ (đpcm).

Cách 2.



Gọi T là giao điểm của NK với AC. Kết luận của bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra được bốn điểm S, T, A, K cùng thuộc một đường tròn. Mặt khác, như cách 1 ta thấy $\widehat{AKS}=90^0$ nên ta chỉ cần chứng minh $\widehat{STE}=90^0$.

Kẻ đường cao AD của tam giác ABC. Khi đó từ $(SD,BC)=-1\Rightarrow\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{SB}{SC}$ (1).

Lại có tam giác AEF và tam giác ABC đồng dạng ngược hướng nên $\dfrac{KE}{KF}=\dfrac{DB}{DC}$ (2)

Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác FEC với T, K, N thẳng hàng ta có $\dfrac{KE}{KF}=\dfrac{TE}{TC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{SB}{SC}=\dfrac{TE}{TC}$ dẫn đến $BE\ //\ ST\ \Rightarrow\widehat{STE}=90^0$. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Các bài giải gửi về Tòa soạn đều trình bày theo một trong hai cách trên. Ngoài bạn *Tiến*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình**: *Đặng Hoàng Duy*, 12T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Lâm Đồng**: *Nguyễn Đình Lê Vũ*, 10 Toán, *Nguyễn Đức Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, *Mai Trung Nguyên*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Sóc Trăng**: *Lê Hồ Trọng Tín*, 10A1, THPT Kế Sách, huyện Kế Sách, *Phạm Nguyên Khang*, 10A2T, *Lâm Khả Hân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/530. *Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $\sin a+\sqrt{3}\cos b=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sin b+\sqrt{3}\cos a$.*

Lời giải. Ta có:

$$(\sin^2 a+\cos^2 b)(1+3)=(\sin a+\sqrt{3}\cos b)^2+(\sqrt{3}\sin a-\cos b)^2$$
$$\geq(\sin a+\sqrt{3}\cos b)^2=4$$

$\Rightarrow\sin^2 a+\cos^2 b\geq 1\Rightarrow 1-\cos^2 a+1-\sin^2 b\geq 1$

$\Rightarrow 1\geq\cos^2 a+\sin^2 b$.

Do đó: $4\geq(\sin^2 b+\cos^2 a)(1+3)$

$$=(\sin b+\sqrt{3}\cos a)^2+(\sqrt{3}\sin b-\cos a)^2$$
$$\geq(\sin b+\sqrt{3}\cos a)^2=P^2.$$

Suy ra: $2\geq P\geq -2$.

$$P=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}\sin a=\cos b\\ \sqrt{3}\sin b=\cos a\\ \sin a+\sqrt{3}\cos b=2\\ \sin b+\sqrt{3}\cos a=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\sin a=\frac{1}{2},\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos a=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin b=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{6}+2k\pi,b=\frac{\pi}{6}+2l\pi\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

$P=-2 \Leftrightarrow \sin a=\frac{1}{2}, \cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin b=-\frac{1}{2}, \cos a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow a=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, b=-\frac{\pi}{6}+2l\pi\ (k,l\in\mathbb{Z}).$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2, giá trị nhỏ nhất của P bằng – 2.

Nhận xét. Đây là bài toán cực trị lượng giác có biến đổi hay. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu ; **Bình Định:** *Vũ Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/530. *Cho x, y, z là các số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn $0 < x < y < z < p$. Biết x^3, y^3, z^3 có cùng số dư khi chia cho p, chứng minh $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.*

Lời giải (của bạn *Vũ Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy nhơn, **Bình Định**).

Giả sử $p > x > y > z$. Suy ra $p > 3$.

Theo giả thiết ta có: $x^3 \equiv y^3 \pmod p$

$\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) \equiv 0 \pmod p$.

Vì $p > x-y$ nên $x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod p$.

Tương tự: $y^2+yz+z^2 \equiv 0 \pmod p$.

Do đó $(x^2+xy+y^2)-(y^2+yz+z^2) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow (x-z)(x+y+z) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow x+y+z \equiv 0 \pmod p$ (vì $p > x-z$).

Suy ra: $x+y \equiv -z \pmod p$

$\Rightarrow x^2+2xy+y^2 \equiv z^2 \pmod p$

$\Rightarrow x^2+2xy+y^2+zx+zy \equiv z^2+zx+zy \pmod p$

$\Rightarrow x^2+xy+y^2+xy+yz+zx \equiv z(x+y+z) \pmod p$.

Vì $x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod p$, $x+y+z \equiv 0 \pmod p$ nên $xy+yz+zx \equiv 0 \pmod p$. Suy ra:

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \equiv 0 \pmod p$ (1).

Vì $x+y+z \equiv 0 \pmod p$ và $x+y+z < 3p$ nên có hai trường hợp sau:

• $x+y+z=p$. Theo (1) $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $p = x+y+z$. Tức là $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

• $x+y+z=2p$. Khi đó :

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ chia hết cho 2. Mà $(2,p)=1$ nên

$x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $2p=x+y+z$.

Vậy ta luôn có $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải. Trong số lời giải tốt, có các bạn: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 12T, *Phan Thị Minh Châu*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu. **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Hồng Phúc*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/530. *Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$ (1) với mọi số thực x, y.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Thay $x=1$, $y=1$ vào (1), ta được $f(0)=0$. Thực hiện phép đổi biến $x+y=u$, $x-y=v$ suy ra:

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}.$$

Thế các giá trị này vào (1) , ta thu được :

$$vf(u)-uf(v)=uv(u^2-v^2),\ \forall u,v\in\mathbb{R}\ (2).$$

Với $u \neq 0, v \neq 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2,\ \forall u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2,\ \forall u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - x^2 = c,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

với c là hằng số thực tùy ý. Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$, ta thu được $f(x) = x^3 + cx,\ \forall x \in \mathbb{R}$ với c là hằng số thực tùy ý.

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = x^3 + cx$ ứng với c là hằng số thực tùy ý, thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trinh hàm với cặp biến tự do trong lớp hàm thực một biến. Có nhiều bạn tham gia giải và đều nhận được kết quả đúng.

Bình Định: *Võ Tiến Đại*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Hoàng*, 11T1, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông. **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 9E THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu. **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Hoàng Yến Nhi*, 11CT, THPT Gia Định; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12T1, *Nguyễn Văn Huy*, *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, *Lê Thị Thanh Tâm*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 10T1, *Đoàn Hoàng Quân*, 11T1, *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên. **Lâm Đồng:** *Nguyễn Đình Lê Vũ*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, *Nguyễn Thị Thu Phương*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lý Hồng Nhựt*, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 12T THPT chuyên Tiền Giang; **Tây Ninh:** *Thái Gia Huy*, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/530. *Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm K bất kỳ; phân giác của các góc* $\widehat{ADK}$ *và* $\widehat{BCK}$ *cắt AB lần lượt tại E và F. Trên AC lấy điểm M sao cho MF song song với BD. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt DE tại N. Chứng minh rằng* $AE^2 + BF^2 = 2MN^2$.

Lời giải. Gọi P là giao điểm của MN và AD. Không mất tính tổng quát giả sử $ABCD$ có cạnh bằng 1. Đặt $\widehat{ADK} = \alpha; \widehat{BCK} = \beta$. Dễ thấy:

$$AK = \tan\alpha; BK = \tan\beta; AE = \tan\frac{\alpha}{2} = x;$$

$$BF = \tan\frac{\beta}{2} = y.$$ Do đó:

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} = \tan\alpha + \tan\beta = AK + BK = AB = 1;$$

$$AP = MP = AM.\sin 45^\circ = AF.\sin 45^\circ.\sin 45^\circ$$

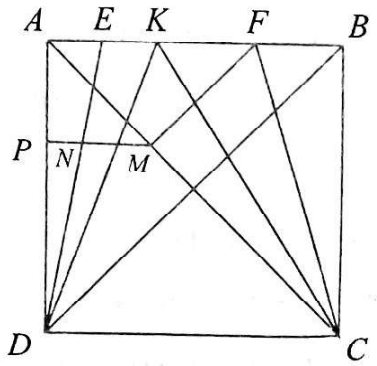
$$= (1 - BF).\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-y}{2};$$

$$NP = DP.\tan\frac{\alpha}{2} = (1 - AP).\tan\frac{\alpha}{2} = \left(1 - \frac{1-y}{2}\right).x$$

$$= \frac{(1+y)x}{2};$$

$$MN = MP - NP = \frac{1-y}{2} - \frac{(1+y)x}{2}$$

$$= \frac{1-x-y-xy}{2}.$$



Vậy các điều kiện sau tương đương

1) $AE^2 + BF^2 = 2MN^2$.

2) $x^2 + y^2 = 2\left(\frac{1-x-y-xy}{2}\right)^2$.

3) $2(x^2+y^2)=1+x^2+y^2+x^2y^2-2x-2y+2x^2y+2y^2x.$

4) $2x+2y-2x^2y-2y^2x=1-x^2-y^2+x^2y^2.$

5) $2x(1-y^2)+2y(1-x^2)=(1-x^2)(1-y^2).$

6) $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}=1$ (đúng).

Nhận xét. Bài toán này khá khó, chỉ có bốn bạn tham gia giải: **Hưng Yên:** *Hoàng Đình Quân*, 11T1, *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 12T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/530. *Hai chất điểm A và B dao động điều hòa với cùng biên độ. Ở thời điểm ban đầu (t = 0), hai chất điểm đều đi qua vị trí cân bằng theo chiều dương. Biết chu kì dao động của các chất điểm A và B lần lượt là T và 0,5T. Tính tỉ số giữa tốc độ của chất điểm A và tốc độ của chất điểm B tại thời điểm* $t=\dfrac{T}{12}$.

Lời giải. Áp dụng công thức độc lập thời gian giữa li độ và vận tốc:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{\omega^2A^2}=1\Rightarrow|v|=\omega\sqrt{A^2-x^2};$$

$$\left|\frac{v_A}{v_B}\right|=\frac{\omega_A\sqrt{A^2-x_A^2}}{\omega_B\sqrt{A^2-x_B^2}}=\frac{T_B\sqrt{A^2-x_A^2}}{T_A\sqrt{A^2-x_B^2}}.$$

Vì khi $t=0$ các chất điểm A, B đều đi qua vị trí cân bằng, do đó, vị trí của chúng sau $t=\dfrac{T}{12}$ là:

$$\begin{cases}x_A=\dfrac{A}{2}\\ x_B=\dfrac{A\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{v_A}{v_B}\right|=\frac{0,5T_A\sqrt{A^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2}}{T_A\sqrt{A^2-\left(\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Đồng Tháp:** *Hồ Phạm Phú An*, 12T1, *Nguyễn Trường Duy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thùy Chinh*, 12A1,THPT Cù Huy Cận; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12T1; *Hồ Khánh Diệu*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đào Ngọc Thiện*, *Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

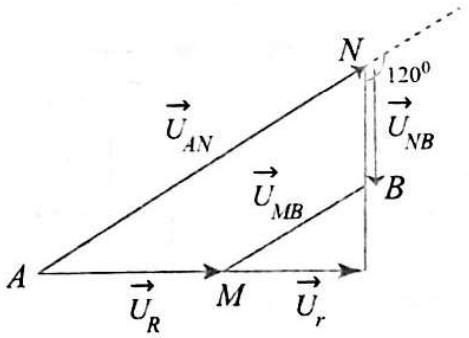
Bài L2/530. *Đặt một điện áp xoay chiều vào hai đầu đoạn mạch AMNB. Trong đó, đoạn mạch AM chứa điện trở thuần R, đoạn MN chứa cuộn dây không thuần cảm có độ tự cảm L và điện trở r hoạt động. Biểu thức điện áp giữa hai đầu các đoạn mạch AN, MB và NB lần lượt là*

$u_{AN}=2\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi)$; $U_{MB}=2U\cos(\omega t+\varphi)$;

$U_{NB}=U'\cos\left(\omega t+\varphi-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Xác định tỉ số $\dfrac{r}{R}$.

Lời giải. Sử dụng phương pháp giản đồ vectơ ta có:



Vì u_{AN} cùng pha với u_{MB}, do vậy $\vec{U}_{AN}$ song song với $\vec{U}_{MB}$. Từ giản đồ vectơ, áp dụng định lí Thales trong tam giác ta có:

$$\frac{r}{R}=\frac{\vec{U}_r}{\vec{U}_R}=\frac{u_{MB}}{u_{AN}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

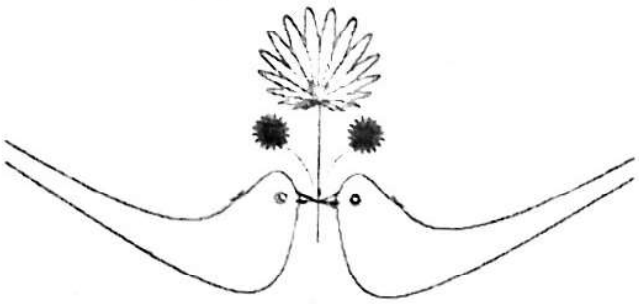
Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

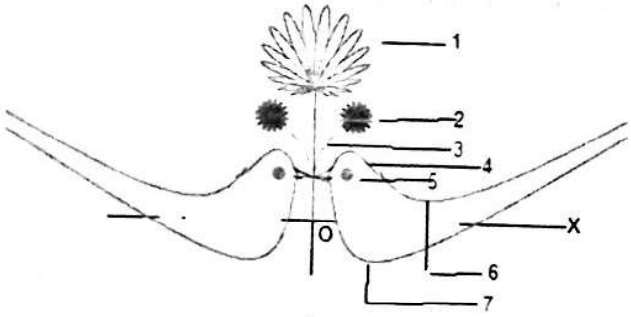
BẠN CÓ BIẾT

BỒ CÂU DÂNG HOA CHÚC HÒA BÌNH

Bức họa được tạo thành bởi các đường cong toán học chủ yếu trong chương trình THPT.



Sau đây là đồ thị của các hàm số trong mặt phẳng đối với hệ trục tọa độ trực chuẩn (Oxy) tạo nên bức họa.



HOA

1. ***Đường Hoa kép 2***, phương trình tham số:

$$x = 2(\sin t + \sin 12t).\cos t$$

$$y = 2(\sin t + \sin 12t).\sin t,\ t \in [0; 2\pi].$$

2. ***Đường Hoa đơn 1***, phương trình tham số:

$$x = 0{,}8.\sin 8t.\cos t$$

$$y = 0{,}8.\sin 8t.\sin t,\ t \in [0; 2\pi].$$

3. ***Cành hoa***: đồ thị hàm số

$$y = \log x,\quad x \in [0{,}2; 2].$$

BỒ CÂU (bên phải)

4. ***Đầu và cổ***: đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x}{3} - 2x^2 + 2,\quad x \in [0; 3].$$

5. ***Mắt***: Hình tròn tâm (1,5; 2,2), bán kính 0,35

6. ***Lưng***: đồ thị hàm số

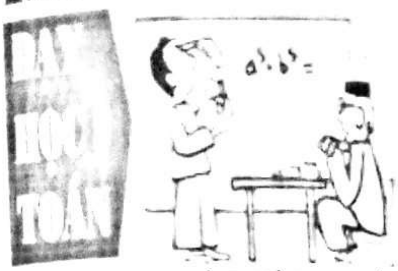
$$y = \frac{2x}{3} + \frac{17}{x - 0{,}5} + 6,\quad x \in [3{,}2; 15].$$

7. ***Bụng***: đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{6}{x} - 6,\quad x \in \left[\frac{3}{4}; 15\right].$$

Chú ý. Lấy đối xứng qua trục tung để có toàn bộ hình vẽ.

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(*Hội Toán học Hà Nội*)



THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

CHÚNG TA HỌC ĐƯỢC GÌ TỪ BÀI TOÁN HÌNH VUÔNG

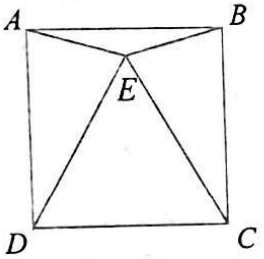
NGUYỄN HUY HOÀNG
(Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài viết sẽ tập trung khai thác hai bài toán quen thuộc trong chương trình bậc THCS, qua đó thấy được tầm quan trọng của việc tìm hiểu sâu một bài toán đối với học sinh khi học bộ môn này.

1. HÌNH VUÔNG VÀ TAM GIÁC ĐỀU

Bài toán 1. *Bên trong hình vuông ABCD ta dựng tam giác đều CDE. Tính số đo góc $\widehat{AEB}$.*

Lời giải. Vì tam giác EDC là tam giác đều nên $\widehat{EDC} = 60°$ suy ra $\widehat{ADE} = 30°$.



Mà $DA = DC = DE$ nên tam giác DAE cân tại A, kéo theo $\widehat{DAE} = 75°$. Từ đó $\widehat{EAB} = 15°$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{EBA} = 15°$.

Từ đây ta có $\widehat{AEB} = 180° - \widehat{EAB} - \widehat{EBA} = 150°$.

Ta đặt câu hỏi rằng liệu dựng tam giác đều phía bên ngoài hình vuông thì sẽ ra sao?

Bài toán 2. *Cho hình vuông ABCD. Dựng bên ngoài hình vuông tam giác đều CDE. Tính góc $\widehat{AEB}$.*

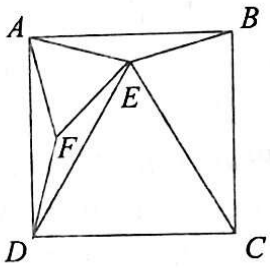
Lời giải hoàn toàn giống như trên, xin nhường cho bạn đọc rèn luyện. Đáp án là 30°.

Nhận xét. Bài toán trên là một bài biến đổi góc cơ bản trong chương trình toán lớp 7. Nhưng, nếu phát biểu bài toán trên ở dạng đảo thì nó sẽ khó hơn đôi chút, vì khi đó chúng ta sẽ không thể sử dụng các tam giác cân để tính góc:

Bài toán 3. (Bài toán đảo) *Cho hình vuông ABCD. Dựng bên trong hình vuông một tam giác EAB cân tại E sao cho $\widehat{EAB} = 150°$. Chứng minh rằng tam giác EDC là tam giác đều.*

Lời giải. Trong nửa mặt phẳng bờ AE lấy điểm F sao cho tam giác FAE đều. Từ giả thiết và cách dựng hình, ta có:

$$\widehat{EAB} = 15°, \widehat{FAE} = 60° \text{ nên } \widehat{DAF} = 15°.$$



Xét ΔEAB và ΔFAD có $\widehat{EAB} = \widehat{FAD} = 15°$, $AE = AF$ và $AB = AD$ nên $\Delta EAB = \Delta FAD$ (c.g.c). Từ đó tam giác FAD cân tại F nên $FA = FD = FE$.

Sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$$60° = \widehat{AFE} = \widehat{FAD} + \widehat{FDA} + \widehat{FED} + \widehat{FDE}$$
$$= 2\widehat{ADF} + 2\widehat{FDE} = 2\widehat{ADE}.$$

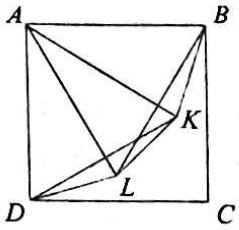
Do đó $\widehat{ADE} = 30°$, suy ra $\widehat{EDC} = 60°$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{ECD} = 60°$. Từ đó tam giác EDC là tam giác đều.

Nhận xét. Tuy lời giải bài toán 1 không thể áp dụng cho bài toán này, nhưng ta thấy rằng, việc dựng tam giác đều trong bài toán 1 đã mở ra con đường rất sáng sủa để giải bài toán 3.

Giải xong bài toán 1 và 3, ta có một kết quả để phát hiện nhanh các tính chất hình học trong quá trình giải các bài toán khác, chẳng hạn

Bài toán 4 (All Siberian MO 2016) *Trong hình vuông ABCD dựng bên trong các tam giác đều ADK và ABL. Chứng minh tam giác CKL đều.*

Lời giải. Sử dụng kết quả bài toán 1, ta thấy ngay tam giác KBC và LDC là tam giác cân tại K, L có góc ở đỉnh bằng 150° nên $\Delta KCB = \Delta LCD$ (c.g.c).



Từ đó $CL = CK$. Lại có

$\widehat{LCD} = \widehat{KCB} = 15°$ nên $\widehat{KCL} = 60°$. Vậy tam giác KCL đều.

Bài toán 5 (All Siberian 2015). *Dựng bên trong hình vuông ABCD tam giác ABL đều. Gọi K là giao điểm AC và BL. Chứng minh CK = CL.*

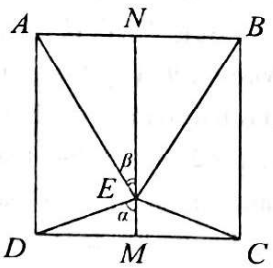
Gợi ý. Chứng minh hai góc đáy cùng bằng 75°.

Không dừng lại ở đó, giải xong các bài toán 1, 2, 3 ta phải đặt tiếp câu hỏi: điểm chung của ba bài toán này là gì, tổng quát nó lên được không? Bạn đọc phải nhận thấy rằng cả ba đều phát biểu dưới dạng:

Bài toán 6 (Tổng quát). *Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E sao cho tam giác EAB và ECD cân tại E. Hãy tìm mối liên hệ giữa góc $\widehat{AEB}$ và góc $\widehat{CED}$.*

Phân tích. Rất khó để giải bài toán này bằng việc vẽ đường phụ và giải bằng hình học thuần túy, bởi lẽ giả thiết được cho quá ít. Do vậy ta phải giải bài toán này theo hướng khác với công cụ cao hơn. Ở đây, chúng tôi sẽ giải bài này bằng lượng giác.

Lời giải. Gọi M, N là trung điểm CD và AB. Từ giả thiết ta có E nằm trên đường thẳng MN. Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài cạnh hình vuông là 2. Đặt $\widehat{DEC} = 2\alpha$ và $\widehat{AEB} = 2\beta$. Sử dụng hệ thức lượng giác trong các tam giác vuông MED và NEA:



$EM = DM.\cot\alpha = \cot\alpha$, $EN = AN.\cot\beta = \cot\beta$.

Trường hợp 1. E nằm trên đoạn thẳng MN.

Vì E nằm giữa M và N nên $EM + EN = MN$ hay $\cot\alpha + \cot\beta = 2$.

Trường hợp 2. E nằm trên tia đối tia MN.

Vì M nằm giữa E và N nên $EN - EM = MN$ hay $\cot\beta - \cot\alpha = 2$.

Trường hợp 3. E nằm trên tia đối tia NM.

Vì N nằm giữa E và M nên $EM - EN = MN$ hay $\cot\alpha - \cot\beta = 2$.

Nhận xét. Hệ thức thu được rất ấn tượng và đẹp đẽ! Nhưng không vì thế mà ta thỏa mãn với kết quả vừa có. Nếu tiếp tục nhìn lại vào lời giải bài trên, ta thấy rằng yếu tố hình vuông không được sử dụng trong bài toán, và thực tế lời giải trên chỉ sử dụng "một nửa hình vuông", đó là hình chữ nhật $ANMD$ có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Lại nhìn vào số 2 trong kết quả thu được, rất tự nhiên, ta đặt ra bài toán tổng quát cho bài 6.

Bài toán 7 (Tổng quát bài toán 6). *Cho hình chữ nhật ANMD có AD = xAN. Trên cạnh MN lấy điểm E tùy ý. Chứng minh rằng*

$$\cot\cot\widehat{AEN} + \cot\widehat{DEM} = x.$$

Chứng minh bài toán này, cũng như tình huống E nằm ngoài đoạn MN nhường cho bạn đọc tìm hiểu.

Như vậy, cứ mỗi số x và điểm E có vị trí xác định thì ta có một bài toán. Chẳng hạn:

Bài toán 8. *Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = \sqrt{3}, AD = 4$. Đường tròn đường kính AD cắt BC tại K và L. Tính độ dài KL.*

Còn nếu điểm E nằm ở vị trí ngẫu nhiên bên trong hình vuông thì sao? Lúc bấy giờ, việc giải tất nhiên sẽ còn vất vả hơn. Ta phải sử dụng các công cụ tốt hơn ở lớp trên như định lý côsin, phương pháp tọa độ trong mặt phẳng,... Tuy nhiên, bạn đọc cũng hãy thử giải với một vài trường hợp đặc biệt của điểm E, chẳng hạn các bài toán ở cuối mục 2, hoặc bạn đọc có thể thử sức ngay với bài toán sau:

Bài toán 9. *Cho hình vuông ABCD có cạnh là x. Lấy điểm E bên trong hình vuông sao cho $EA = \sqrt{3}$, $EC = \sqrt{5}$ và $ED = \sqrt{6}$.*

a) *Tính độ dài EB.* b) *Tìm x*

Gợi ý. a) Hạ các đường vuông góc từ E xuống các cạnh của hình vuông và dùng bốn lần định lý Pythagoras.

b) Sử dụng định lý côsin cho hai tam giác ABE và EBC, với chú ý hai góc ABE và EBC phụ nhau, đưa về giải phương trình trùng phương ẩn x.

Người ta còn đặt ra bài toán: *Không tồn tại điểm E nằm trong mặt phẳng chứa hình vuông ABCD có cạnh là 1 sao cho các khoảng cách EA, EB, EC, ED đều là số hữu tỷ*. Bài toán trên còn gọi là *Bài toán hình vuông đơn vị* và đến nay vẫn chưa có lời giải được hoàn thiện. Người ta chỉ chứng minh được trong một vài trường hợp đặc biệt của điểm E, chẳng hạn E nằm trên cạnh hình vuông, E nằm trên trục đối xứng của hình vuông và E nằm trên đường tròn ngoại tiếp của hình vuông.

2. VỀ HAI TRUNG ĐIỂM CỦA CẠNH HÌNH VUÔNG

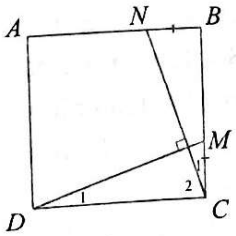
Ở lớp 7 ta đã quen với bài toán sau:

Bài toán 1. *Cho hình vuông ABCD có M, N là trung điểm của BC và BA. Chứng minh $CN \perp DM$.*

Ta xét bài toán tổng quát hơn:

Bài toán 2 (Tổng quát Bài toán 1). *Cho hình vuông ABCD. Trên tia BA và tia CB lấy điểm M, N sao cho BN = CM. Khi đó $DM \perp CN$.*

Lời giải. Ta có $\widehat{NBC} = \widehat{MCD} = 90°$, $BN = CM$ và $BC = CD$, nên $\Delta BNC = \Delta CMD$ (c.g.c), suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$. Từ đó $\widehat{D_1} + \widehat{C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90°$.



Suy ra $DM \perp CN$.

Bài toán 3 (Đảo bài toán 1). *Cho hình vuông ABCD có M là trung điểm BC. Khi đó đường thẳng qua C vuông góc DM đi qua trung điểm AB.*

Nhận xét. Giải xong bài toán 1, 2, 3 thì ta phải đặt ngay câu hỏi: Ta sẽ vận dụng các kết quả trên như thế nào. Rõ ràng, bài toán 3 dùng để chứng minh sự chia đôi (đi qua trung điểm một đoạn thẳng) và bài toán 1 và bài toán 2 sẽ vận dụng vào các bài toán chứng minh sự vuông góc. Sau đây là các bài toán ứng dụng cụ thể:

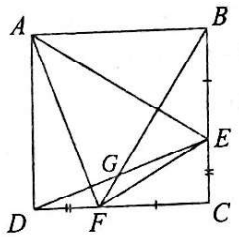
Bài toán 4 (Moldova NMO 2015). *Trên cạnh CB, CD của hình vuông ABCD lần lượt lấy E, F sao cho BE = CF. Gọi G là giao điểm của BF và DE. Chứng minh rằng AG vuông góc với EF.*

Lời giải. Theo bài toán 2:

Vì $BE = CF$ nên $AE \perp BF$.

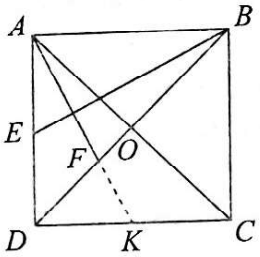
Vì $DF = CE$ nên $DE \perp AF$.

Từ hai điều trên suy ra G là trực tâm tam giác AEF nên AG vuông góc với EF.



Bài toán 5 (Moldova NMO 2020). *Cho hình vuông ABCD có E là trung điểm AD và F là giao điểm BD và CE. Chứng minh rằng BF vuông góc AF.*

Lời giải. Gọi K là trung điểm CD. Theo Bài toán 1 ta có $AK \perp BE$. Vậy, sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được A, F, K thẳng hàng. Có hai cách để chứng minh điều này:



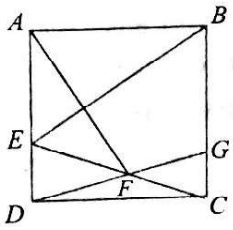
Cách 1. Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có DO, CE là đường trung tuyến trong tam giác ADC nên F là trọng tâm của tam giác ADC. Vậy nên AF đi qua trung điểm K của CD.

Cách 2. Áp dụng định lý Thales cho $DE // BC$, ta có $\frac{FE}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$. Từ đó $\frac{FE}{FC} \cdot \frac{KC}{KD} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Theo định lý đảo của định lý Menelaus thì A, F, K thẳng hàng.

Nhận xét 1. Có thể thấy rằng lời giải cách 1 nhẹ nhàng, chỉ sử dụng kiến thức trọng tâm của tam giác trong chương trình lớp 7 nhưng lời giải cách 2 lại là chìa khóa giúp ta giải quyết được một lớp bài toán rộng hơn. Chẳng hạn:

Bài toán 6. *Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD, BC lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EA = 2ED và GB = 3GC. Chứng minh rằng $BE \perp AF$.*



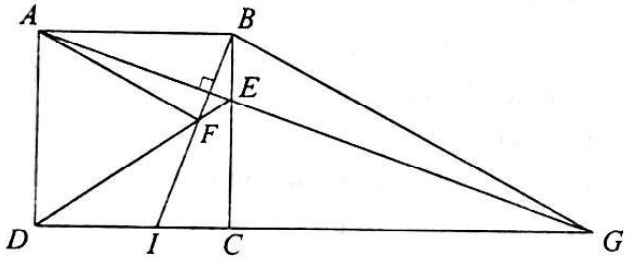
Gợi ý. Gọi $K = AF \cap CD$. Dùng định lý Menelaus để chứng minh $KD = 2KC$. Từ đó $AE = DK$.

Nhận xét 2. Bài toán 5 phát biểu có vẻ hơi thừa giả thiết, vì vậy ta có thể phát biểu bài toán theo hình thức ấn tượng hơn:

Bài toán 7. *Cho tam giác OAD vuông cân. Trên cạnh OA, OD, AD lần lượt lấy các điểm E, F, G sao cho EA = ED; DF = 2FO và GA = 2GO. Chứng minh rằng EG vuông góc với AF.*

Bằng kỹ thuật trên, ta cũng sáng tạo ra bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho EC = 2EB. Trên cạnh DE lấy điểm F sao cho FD = 6FE. Đường thẳng qua B song song AF cắt đường thẳng CD tại G. Chứng minh AG vuông góc với BF.*



Lời giải. Gọi I là giao điểm BF và CD. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEC, ta có:

$$\frac{ID}{IC}\cdot\frac{BC}{BE}\cdot\frac{FE}{FD}=1\Rightarrow\frac{ID}{IC}=\frac{1}{3}\cdot 6-2,$$ từ đó $IC = BE$.

Áp dụng bài toán 2, ta có $AE \perp BI$ (1).

Theo bài toán 4, ta có $AF \perp EI$. Lại có $BG \parallel AF$ nên $EI \perp BG$. Kết hợp $BC \perp IG$, ta suy ra E là trực tâm tam giác BIG, từ đó $GE \perp BI$ (2).

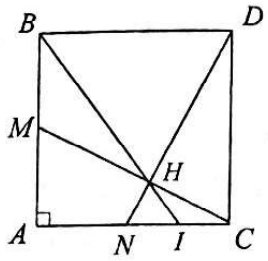
Từ (1) và (2) ta suy ra A, E, G cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với BI.

Nhận xét. Ngoài ra, có thể giải bài toán theo hướng khác: Chứng minh $AE \perp BF$, sau đó chứng minh A, E, G thẳng hàng bằng hệ quả định lý Thales.

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A có M, N là trung điểm AB, AC. Gọi H là hình chiếu của N lên MC. Chứng minh rằng*

a) *BA = BH*; b) *BH đi qua trung điểm của NC.*

Lời giải. Dựng hình vuông $ABDC$. Sử dụng Bài toán 1, không khó để thấy N, D, H thẳng hàng.



a) Vì $\widehat{MBD} = \widehat{MHD} = 90°$ nên tứ giác $BDHM$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{BHD} = \widehat{BMD}$. Mặt khác, dễ thấy $\Delta MBD = \Delta MAC$ (c.g.c) nên $\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$.

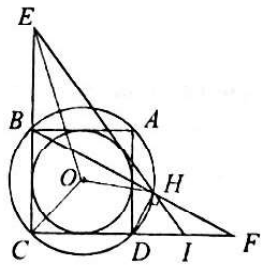
Vì $\widehat{MAN} = \widehat{MHN} = 90°$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{HNC}$. Vì $NC \parallel BD$ nên $\widehat{HNC} = \widehat{HDB}$. Vậy là cuối cùng, $\widehat{BHD} = \widehat{HDB}$ nên tam giác BHD cân tại B.

b) Gọi I là giao điểm của BH và AC. Sử dụng kết quả câu trên và các cặp góc so le trong, ta có $\widehat{NHI} = \widehat{BHD} = \widehat{BDH} = \widehat{HNI}$ nên tam giác INH cân tại I. Mặt khác, vì tam giác INH cân nên $\widehat{ICH} = 90° - \widehat{INH} = 90° - \widehat{IHN} = \widehat{IHC}$ hay tam giác IHC cân tại I. Từ hai tam giác cân này, ta có $IN = IH = IC$ hay I là trung điểm của NC.

Nhận xét. Phát biểu bài toán không có hình vuông nhưng các yếu tố "trung điểm hai cạnh kề" và "vuông góc" đã gợi cho ta tư duy dựng hình phụ như vậy. Giải được bài toán trên mà không làm gì thêm thì thật là một sự lãng phí. Bởi lẽ nhờ nó, bạn đọc sẽ giải quyết được hàng loạt bài toán rất hay sau đây:

Bài toán 10 (Bài P486, Tạp chí Pi). *Cho hình vuông ABCD có đường tròn nội tiếp (O, r). Lấy E, F sao cho B, D lần lượt là trung điểm của CE và CF. Gọi H là hình chiếu của D lên BF. Chứng minh rằng EH tiếp xúc (O, r).*

Gợi ý. Từ bài toán trên ta có ngay $\Delta OEH = \Delta OEC$ (c.c.c) nên khoảng cách từ O đến đáy của hai tam giác sẽ bằng nhau và bằng r, nên EH tiếp xúc với (O).



Làm xong bài toán 10, vẽ thêm điểm I như bài toán 9, nhìn lại hình vẽ ta để ý rằng (O, r) chính

là đường tròn nội tiếp của tam giác CIE. Để ý thêm O cũng chính là tâm của đường tròn nội tiếp của hình vuông $ABCD$. Với những nhận xét như vậy, ta có phiên bản "tổng hợp" của bài 9 và 10:

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường tròn tâm I, bán kính IA cắt BC tại H và K, với K nằm giữa B và H. Chứng minh rằng K là trung điểm BH và tứ giác $AIKB$ nội tiếp.*

Ứng dụng của bài toán 9 vẫn chưa kết thúc. Kết luận ở ý a cho thấy rằng H nằm trên đường tròn tâm B, bán kính BA. Sự kiện $\widehat{CHD} = 90°$ cho thấy rằng H nằm trên đường tròn đường kính CD. Như vậy, giải xong bài toán 9 nghĩa là ta cũng giải quyết xong hàng loạt các bài toán có chung họ hàng của nó, được giới thiệu ngay sau đây:

Bài toán 12 (Đề thi vào lớp 10, THPT chuyên Lâm Đồng 2021). *Cho hình vuông $ABCD$. Đường tròn (A, AB) cắt đường tròn đường kính BC tại E khác B. Chứng minh rằng CE đi qua trung điểm F của AD.*

Bài toán 14 (Kyiv City MO 2017). *Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm BC. Gọi H là hình chiếu của C lên DM. Chứng minh rằng $AH = AB$.*

Đây chỉ là bài toán trực tiếp, không có gì đáng để bàn. Các bài toán sau sẽ tập trung khai thác các tính chất trên mô hình của bài toán này. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm, coi như bài tập luyện tập:

Bài toán 13 (Poland JMO 2016). *Trong hình vuông $ABCD$ lấy P sao cho $AD = AP$ và $\widehat{DPC} = 90°$.. Chứng minh rằng $DP = 2CP$.*

Bài toán 14. *Cho tam giác MAN vuông cân tại M có B là trung điểm MN. Lấy điểm C trên nửa mặt phẳng bờ MN không chứa A sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Chứng minh $\widehat{CBM} + \widehat{CNM} = 45°$.*

Bài toán 15. *Cho hình vuông $ABCD$. Đường tròn (A, AB) cắt đường tròn đường kính BC tại E khác B. Gọi F là điểm bất kỳ trên cung BD chứa điểm E. Chứng minh rằng*

$$S_{AEF} = S_{BEF} + S_{CEF} + S_{DEF}.$$

3. KẾT LUẬN

Bài viết trên nêu ra một phương pháp để học toán: Tìm hiểu thật sâu, thật rộng, thật sâu sắc và ứng dụng linh hoạt vào các tình huống khi làm bài. Số lượng bài toán chúng ta học là rất ít, nhưng số lượng bài tập mà chúng ta tạo ra là nhiều vô kể. Sẽ thật sai lầm nếu bạn đọc giải xong một bài toán và dừng ngay đó, để rồi sau này, khi gặp phiên bản khác của nó lại rơi vào bế tắt. Dẫn lời của nhà bác học *A. Einstein* để thay cho lời kết: "*The important thing is not stop questioning*" (Tạm dịch: Điều quan trọng nhất là không ngừng đặt câu hỏi).

Sau đây là một vài bài tập để bạn đọc rèn luyện:

Bài tập 1 (*Bài P383, Tạp chí Pi*)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AD. Gọi P là giao điểm AM với BN và H là trực tâm của tam giác PDM. Lấy L sao cho P là trung điểm LN. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng và tính $\frac{KH}{KL}$.

Bài tập 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Lấy M, N lần lượt thuộc CD, DA sao cho $CM = DN = 1$. Gọi P là giao điểm AM với BN. Lấy điểm I trên đoạn thẳng MN sao cho $IM = 2IN$. Gọi L là đối xứng với N qua P và K là đối xứng D qua I. Chứng minh KL đi qua trực tâm H của tam giác PDM.

Bài tập 3 (*UNSW Australia 2020*). Cho hình vuông $UNSW$. Trên cạnh UN, UW lần lượt lấy các điểm A, B sao cho $UA = UB$. Gọi E là hình chiếu của U lên BN. Chứng minh rằng $ES \perp EA$.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

(Tiếp theo kỳ trước)

Tính chất 3. *Với n là số nguyên dương và a, b là các số thực ta có:* $a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Chứng minh. • Ta có: $(a-b)^2\ge 0$, suy ra:

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow 2a^2+2b^2\ge (a+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1).$$

Vậy BĐT đúng với $n=1$.

• Với $n\ge 2$, xét hàm: $f(x)=x^n+\left(a^2+b^2-x\right)^n$;

$$f'(x)=nx^{n-1}-n\left(a^2+b^2-x\right)^{n-1};$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^{n-1}=\left(a^2+b^2-x\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow x=a^2+b^2-x\Leftrightarrow x=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Do $a^2+b^2\ge 0$ nên $a^2+b^2-x\ge -x$. Từ đó xét n chẵn hay lẻ ta đều có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$\frac{a^2+b^2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra: $x^n+\left(a^2+b^2-x\right)^n\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n$ (2).

Áp dụng (2) với $x=a^2$ ta được:

$$a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n \quad (3).$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\right)^n=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{a^2+b^2}{2} \\ a^2+b^2=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$

Tính chất 4. *Với n là số nguyên dương và a,b là số thực ta có:*

1) $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$.

2) $(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$.

Chứng minh. 1) • Khi $b=0$ thì $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}$. Xét $b\ne 0$ ta có:

$$(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1=0 \quad (1).$$

Đặt $\frac{a}{b}=x$ thì (1) trở thành $f(x)=0$ với

$$f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-1.$$

Ta có: $f'(x)=2n(x+1)^{2n-1}-2nx^{2n-1}$.

Do $x+1>x$ nên $(x+1)^{2n-1}>x^{2n-1}$. Suy ra $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$. Với $x=0$ thì $\frac{a}{b}=0\Rightarrow a=0$.

Vậy $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Rightarrow a=0$ hoặc $b=0$.

• Dễ thấy $a=0$ hoặc $b=0$ thì $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}$.

2) • Khi $b=0$ thì $(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

Xét $b\neq 0$ ta có:

$$(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n+1}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}-1=0\ (2).$$

Đặt $\frac{a}{b}=x$ thì (2) trở thành $f(x)=0$ với

$f(x)=(x+1)^{2n+1}-x^{2n+1}-1$. Ta có:

$f'(x)=(2n+1)(x+1)^{2n}-(2n+1)x^{2n}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^{2n}=x^{2n}\Leftrightarrow x+1=-x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ có 2 khoảng đơn điệu nên $x=0; x=-1$ là tất cả các nghiệm của $f(x)=0$.

Với $x=0$ hoặc $x=-1$ suy ra $a=0$ hoặc $a+b=0$. Vậy $(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}$, suy ra $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$.

• Dễ thấy $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$ thì $(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

Sau đây là một số thí dụ có vận dụng các tính chất này.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\left(\sqrt{12+x^2}+\sqrt{2+x}\right)^8+\left(\sqrt{2-x}+x+4\right)^8=2^{17}\ (1).$$

Lời giải. ĐK: $-2\le x\le 2$. Áp dụng tính chất 3 ta có: $\mathrm{VT}(1)\ge 2\left(\frac{\sqrt{12+x^2}+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+x+4}{2}\right)^8$ (2).

Mặt khác $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2=4+2\sqrt{4-x^2}\ge 4$, suy ra: $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ge 2$ (3).

Ta có $\sqrt{12+x^2}\ge 2-x$ (4). Thật vậy, do $-2\le x\le 2$ nên $x+2\ge 0$ và $2-x\ge 0$.

$$\mathrm{VT}(4)=\sqrt{(2-x)^2+4(2+x)}\ge\sqrt{(2-x)^2}=2-x.$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{\sqrt{12+x^2}+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+x+4}{2}\ge\frac{2-x+2+x+4}{2}=4.$$

Theo tính chất 1 có:

$$\left(\frac{\sqrt{12+x^2}+\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}+x+4}{2}\right)^8\ge 4^8=2^{16}\ (5).$$

Từ (2) và (5) suy ra $\mathrm{VT}(1)\ge\mathrm{VP}(1)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-2$. Vậy PT đã cho có đúng 1 nghiệm $x=-2$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\dfrac{(4x^2+4y+1)^{14}+(4y^2+4x+1)^{14}}{(x+y+1)^{28}}=2 & (1)\\[2ex] \left(x^2+\dfrac{4}{x}-4\right)^{22}+(y^2-y-4)^{22}=2^{23} & (2)\end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}x+y+1\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}$. PT(1) tương đương với $(4x^2+4y+1)^{14}+(4y^2+4x+1)^{14}=2(x+y+1)^{28}$ (3).

Áp dụng tính chất 3 ta có:

$$\mathrm{VT}(3)\ge 2\left(\frac{4x^2+4y+1+4y^2+4x+1}{2}\right)^{14}$$

$$=2(2x^2+2y^2+2x+2y+1)^{14}\ (4).$$

Mặt khác $(x-y)^2\ge 0$, suy ra $2x^2+2y^2\ge(x+y)^2$.

Do đó: $2x^2+2y^2+2x+2y+1\ge(x+y)^2+2x+2y+1$

$$=(x+y+1)^2.$$

Theo tính chất 1 suy ra:

$$(2x^2+2y^2+2x+2y+1)^{14}\ge\left((x+y+1)^2\right)^{14}$$

$$=(x+y+1)^{28}\ (5).$$

Từ (4),(5) suy ra $\mathrm{VT}(3)\ge\mathrm{VP}(3)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$. Thay $x=y$ vào (2) được:

$$\left(x^2+\frac{4}{x}-4\right)^{22}+(x^2-x-4)^{22}=2^{23}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{4}{x}-4\right)^{22}+(-x^2+x+4)^{22}=2^{23}\ (6).$$

Áp dụng tính chất 3 ta có:

$$VT(6) \ge 2\left(\frac{x^2+\frac{4}{x}-4-x^2+x+4}{2}\right)^{22} = 2\left(\frac{\frac{4}{x}+x}{2}\right)^{22} \quad (7).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left|x+\frac{4}{x}\right| = |x|+\frac{4}{|x|} \ge 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}} = 4 \Rightarrow \frac{\left|x+\frac{4}{x}\right|}{2} \ge 2.$$

Theo tính chất 1 suy ra:

$$\left(\frac{\left|x+\frac{4}{x}\right|}{2}\right)^{22} = \left(\frac{x+\frac{4}{x}}{2}\right)^{22} \ge 2^{22} \quad (8).$$

Từ (7) và (8) suy ra:

$$VT(6) \ge 2.2^{22} = 2^{23} = VP(6).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |x| = \frac{4}{|x|} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Suy ra PT(6) có 2 nghiệm $x = \pm 2$. Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(2;2)$ và $(-2;-2)$.

Thí dụ 3. *Cho phương trình*

$$(x^3-3x-m)^7+(-x^3+6x^2+m)^7 = (6x^2-3x)^7 \quad (1).$$

Tìm tập hợp S gồm tất cả các số thực m để phương trình (1) có đúng 8 nghiệm phân biệt. Biết $S=(p;q)\setminus\{r\}$ hãy tính $P=(p-q)r$.

Lời giải. Đặt $a = x^3-3x-m$, $b = -x^3+6x^2+m$. Suy ra $6x^2-3x = a+b$. Phương trình (1) trở thành $a^7+b^7 = (a+b)^7$ (2). Theo tính chất 4 thì (2) $\Leftrightarrow$ $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a + b = 0$. Do vậy

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x-m=0 \\ -x^3+6x^2+m=0 \\ 6x^2-3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x=m & (3) \\ x^3-6x^2=m & (4) \\ x=0 & \\ x=\frac{1}{2} & \end{array}\right..$$

• Giả sử (3) và (4) có nghiệm chung, ta có:

$$\begin{cases} x^3-3x=m \\ x^3-6x^2=m \end{cases} \quad (*)$$

Suy ra: $x^3-3x = x^3-6x^2 \Leftrightarrow 6x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Thay $x=0$ vào (*) ta được $m=0$.

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $m=-\frac{11}{8}$.

• Xét $y = x^3-3x$. Ta có: $y' = 3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra PT(3) có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow m \in (-2;2)\setminus\left\{-\frac{11}{8};0\right\}$.

• Xét $y = x^3-6x^2$, ta có:

$$y' = 3x^2-12x;\ y'=0 \Leftrightarrow x=0; x=4.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra PT(4) có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow m \in (-32;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}$.

PT(1) có đúng 8 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(3) và PT(4) đều có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$, đồng thời PT(3) và PT(4) không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m \in (-2;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}$.

Vậy $S = (-2;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}$ và $P = \frac{11}{4}$.

Thí dụ 4. *Cho phương trình*

$$(x^2-3x+m)^8+(x^2-(2m+1)x+m^2)^8 = ((2m-2)x+m-m^2)^8 \quad (1).$$

Tìm m để PT(1) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. PT(1) tương đương với

$$(x^2-3x+m)^8+(-x^2+(2m+1)x-m^2)^8 = ((2m-2)x+m-m^2)^8 \quad (2).$$

Đặt $a = x^2 - 3x + m$; $b = -x^2 + (2m+1)x - m^2$.

Suy ra $(2m-2)x + m - m^2 = a + b$. Phương trình (2) trở thành: $a^8 + b^8 = (a+b)^8$ (3).

Theo tính chất 4 thì (3) $\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

Do vậy $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 3x + m = 0 & (4) \\ -x^2 + (2m+1)x - m^2 = 0 & (5) \end{array}\right.$.

• Giả sử (4) và (5) có nghiệm chung ta có

$$\begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ -x^2 + (2m+1)x - m^2 = 0 \end{cases} \quad (*).$$

Cộng theo vế hai PT của (*) ta được:

$(2m-2)x + m - m^2 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)(2x-m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $x = \dfrac{m}{2}$.

Với $x = \dfrac{m}{2}$ thay vào (*) ta được: $\dfrac{m^2}{4} - \dfrac{1}{2}m = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$. Thử lại với $m = 1$, $m = 0, m = 2$ thì (4) và (5) có nghiệm chung.

• PT(4) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}.$$

• PT(5) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{4}$.

Vậy PT(1) có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(4) và PT(5) đều có 2 nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m \in \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{9}{4}\right) \setminus \{0;1;2\}$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{(4x^2+5x+1)^{10} + \left(4x^2 + 3x + \dfrac{4}{4x^2+1}\right)^{10}}{2^{11}(x+1)^{20}} = 1.$

b) $(x+2)^6 = \dfrac{128\left[2x^6 - (3x+2)^6\right]}{(x-1)^6 + (x+3)^6}.$

c) $\dfrac{(8x^4+8x^2-2)^{10} + \left(5 + 2x\sqrt{1-x^2}\right)^{10}}{(2x^2+1)^{20}} = 2.$

d) $\left(x + \sqrt{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt{12+x^2} + \sqrt{2-x} - 2x\right)^8 = 2^9.$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{80} + y^{80} = \dfrac{1}{2^{15}}\left(x^8 + y^8\right)^8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(x^3 + y^3 + 1 - \sqrt{2}\right)^5 + \left(x + y + 1 + \sqrt{2}\right)^5 = 82 \\ \sqrt{5 + 4x - y^2} - x.\sqrt[3]{\dfrac{x^2+y^2+2}{3}} = 2 \end{cases}.$

c) $\begin{cases} \left(\dfrac{2x^2 - x + y + 2}{x^2 - x + 1}\right)^5 + \left(x^3 + y^3 + 1\right)^5 = 33 \\ \left(\dfrac{2y}{x^2+1}\right)^{28} + \left(\dfrac{xy+1}{y^2+1}\right)^{28} = \dfrac{1}{2^{13}} \end{cases}.$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} = \dfrac{17}{2} \\ \dfrac{\left(x + \sqrt{y^2+1}\right)^8 + \left(2x^2 + 2y^2 + 2x\sqrt{y^2+1} + 1\right)^4}{17\left(x^2+y^2\right)^4} = 1 \end{cases}.$

3. Tìm m để phương trình

$(x^2 + mx + 2)^8 + (2x^2 + 4x + 2m)^8 = (x^2 - (m-4)x + 2m - 2)^8$

có đúng 4 nghiệm phân biệt.

4. Tìm m để phương trình $(x^2 - 4x + m)^8 + (x^2 - (3m+1)x + m^2)^8$ $= ((3m-3)x + m - m^2)^8$ có số nghiệm nhiều nhất.

5. Tìm m để phương trình $(x^3 - 3x - m)^7 + (x^2 + 3x + m)^7 = (x^3 + x^2)^7$ có đúng 7 nghiệm phân biệt.

6. Cho phương trình

$(x^3 - 3x + m)^7 - (3x - 5)^7 = (x^3 - 6x + m + 5)^7$.

a) Giải phương trình với $m = 0$. b) Tìm m để phương trình có đúng 7 nghiệm phân biệt.

7. Cho phương trình

$(x^4 - 3x^2 - m)^7 + (-x^3 + 3x^2 + m)^7 = (x^4 - x^3)^7$.

a) Giải phương trình với $m = -\dfrac{5}{8}$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 9 nghiệm phân biệt.

8. Cho phương trình

$(x^3 + 2x^2 - m)^9 - (x^3 - 3x - m)^9 = (2x^2 + 3x)^9$.

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 8 nghiệm phân biệt.

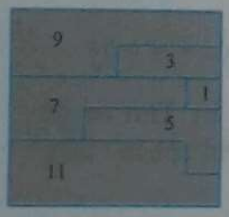
GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI:

PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 6 ĐA GIÁC

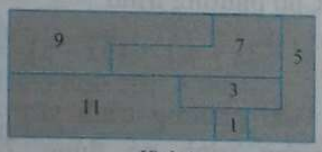
(Đề in trong TH&TT số 529, tháng 7.2021)

Đề bài. *Cho một miếng bìa hình vuông một mặt màu sẫm với độ dài cạnh bằng 6 cm (mặt sau màu trắng). Bạn hãy cắt hình vuông đó thành 6 đa giác bằng các đường gấp khúc song song với cạnh hình vuông mà mỗi đa giác được cắt ra có không quá 6 cạnh với số đo cạnh là số nguyên theo cm và diện tích 6 đa giác được cắt ra bằng* $1cm^2$, $3cm^2$, $5cm^2$, $7cm^2$, $9cm^2$, $11\ cm^2$, *sao cho có thể ghép được 6 đa giác đó thành hình chữ nhật màu sẫm với kích thước lần lượt bằng* 2 cm x 18 cm, 3 cm x 12 cm, 4 cm x 9 cm.

Lời giải. Phân chia hình vuông 6 cm x 6 cm thành 6 đa giác ở hình 1 rồi ghép lại thành các hình chữ nhật với kích thước lần lượt bằng 2cm x 18cm (hình 2), 3cm x 12cm (hình 3), 4cm x 9cm (hình 4) như dưới đây với các hình chữ nhật được ghép có màu sẫm.

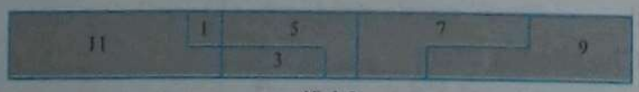


Hình 1



Hình 4

Hình 3



Hình 2

Nhận xét. Một số bạn có gửi lời giải nhưng hình chữ nhật được ghép vẫn lẫn mặt trắng lên trên.

NGUYỄN VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

ĐỐ VUI

CÓ BAO NHIÊU CHỮ SỐ ?

Ngày 26/12/2017 ông *Jonathan Pace* - kỹ sư điện tử ở bang Tennessee (Mỹ), đồng thời là một thành viên của GIMPS (dự án Great Internet Mersenne Prime Search - Tìm kiếm số nguyên tố Mersenne khổng lồ trên internet) là người đã cho máy tính chạy phần mềm đặc biệt trong vòng 6 ngày liền để cơ bản tìm ra số nguyên tố mới $2^{77232917}-1$.

Một năm sau, tháng 12/2018 *Patrick Laroche* thành viên khác của dự án GIMPS đã tìm ra số nguyên tố lớn hơn $2^{82589933}-1$, đó là một số nguyên tố Mersenne (Số nguyên tố Mersenne là số nguyên tố có dạng 2^n-1)

Cho đến nay (2021) số $2^{82589933}-1$ vẫn đang giữ kỉ lục "số nguyên tố lớn nhất mà con người tìm thấy".

Mục tiêu tiếp theo của chương trình GIMPS là tìm được số nguyên tố có hơn 100 triệu chữ số và ai tìm thấy nó sẽ có phần thưởng khoảng 150.000 USD do Electronic Frontier Foundation tài trợ.

Số nguyên tố Mersenne $2^{82589933}-1$ có gần 25 triệu chữ số sẽ trải dài khoảng 126 km nếu viết hai chữ số trên một centimet và nếu in mỗi chữ số của con số này trên 1 milimet thì chiều dài của số nguyên tố này tương đương 1.600 chiếc xe bus hai tầng của thành phố London nối liền nhau.

Câu hỏi đặt ra là: ***Số nguyên tố Mersenne*** $2^{82589933}-1$ ***có bao nhiêu chữ số?***

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 54. *Cho x là số thực thay đổi thỏa mãn* $|x|<1$ *và* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. *Chứng minh bất đẳng thức* $(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$.

Lời giải. *Cách 1. Sử dụng phương pháp đánh giá.*

Ta có: $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

$$\Leftrightarrow 0<x+1<2\Leftrightarrow 0<\frac{x+1}{2}<1;$$

$$-1<x<1\Leftrightarrow 0<1-x<2\Leftrightarrow 0<\frac{1-x}{2}<1.$$

Do $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ nên

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n<\frac{1+x}{2} \text{ và } \left(\frac{1-x}{2}\right)^n<\frac{1-x}{2}.$$

Suy ra: $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n+\left(\frac{1-x}{2}\right)^n<\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}=1.$

Vậy $(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$.

Cách 2. Sử dụng phương pháp lượng giác hóa.

Do $|x|<1$ nên đặt $x=\cos\alpha$, $0<\alpha<\pi$. Khi đó

$$(1+x)^n+(1-x)^n=(1+\cos\alpha)^n+(1-\cos\alpha)^n$$

$$=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}+2^n\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}$$

$$<2^n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=2^n.$$

Vậy $(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp khai triển nhị thức Newton.

Ta có: $2^n=(1+x+1-x)^n$

$$=C_n^0(1+x)^nC_n^0+C_n^1(1+x)^{n-1}(1-x)+\ldots$$
$$+C_n^{n-1}(1+x)(1-x)^{n-1}+C_n^n(1-x)^n$$

$$=(1+x)^n+C_n^1(1+x)^{n-1}(1-x)+\ldots$$
$$+C_n^n(1+x)(1-x)^{n-1}+(1-x)^n.$$

Do $|x|<1$ nên $1+x>0$ và $1-x>0$, suy ra:

$$C_n^1(1+x)^{n-1}(1-x)+\ldots+C_n^{n-1}(1+x)(1-x)^{n-1}>0.$$

Do đó $2^n>(1+x)^n+(1-x)^n$.

Vậy $(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$.

Cách 4. Sử dụng phương pháp quy nạp.

Đặt $A_n=(1+x)^n+(1-x)^n$. Khi $n=2$ thì

$$A_2=(1+x)^2+(1-x)^2=2+2x^2<2+2=2^2.$$

Suy ra bất đẳng thức đúng với $n=2$.

Giả sử với $|x|<1$ thì bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 2$: $A_k<2^k$. Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là $A_{k+1}<2^{k+1}$.

Thật vậy: $2^{k+1}=2.2^k>2.A_k$

$$=\left[(1+x)+(1-x)\right]\left[(1+x)^k+(1-x)^k\right]$$

$$=(1+x)^{k+1}+(1-x)^{k+1}+(1+x)^k(1-x)$$
$$+(1-x)^k(1+x)$$

$>(1+x)^{k+1}+(1-x)^{k+1}$ (vì $1+x>0$ và $1-x>0$).

Vậy $(1+x)^n+(1-x)^n<2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp đạo hàm.

Xét hàm số $f(x)=(1+x)^n+(1-x)^n$, $|x|<1$.

Ta có: $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n(1-x)^{n-1}$

$$=n\left[(1+x)^{n-1}-(1-x)^{n-1}\right];$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(1+x)^{n-1}=(1-x)^{n-1}$$

$\Rightarrow 1+x=1-x\Rightarrow x=0$ (vì $1+x>0$ và $1-x>0$).

Ta có bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2^n	$\searrow$	2	$\nearrow$	2^n

Từ BBT suy ra: $f(x) < 2^n$, $\forall x \in (-1; 1)$.

Vậy $(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n$.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Nhận xét. Kỳ này Tạp chí xin hoan nghênh các bạn: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Văn Lương*, GV THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**; *Trần Thị Thanh Thư, Trần Trọng Nghĩa*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An NHơn, **Bình Định** cũng đã đưa ra được nhiều cách giải tương tự cho bài toán 54 này.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 56 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.1.2022.

BÀI TOÁN 56. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

ĐÀO VĂN NAM

(GV TH, THCS&THPT Everest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

PROBLEMS IN ... *(Tiếp theo trang 22)*

Problem T4/534. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). Let D be the midpoint of the arc BC which does not contant A, and E the midpoint of the arc AC which does not contant B. ED intersects AC, BC respectively at F and G. The line which passes through F and is perpendicular to AD intersects the line passing through G and perpendicular to BE at H. Let O', O'' respectively be the circumcenters of the triangles AFE and BGD. Show that $HO // O'O''$.

Problem T5/534. Given positive numbers a, b, c satisfying $a^2+b^2+c^2=12$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/534. Solve the equation

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{x^2-3x+1} + \sqrt{7x^2-5x+1} = x^2-5x+3.$$

Problem T7/534. Given $a_k, b_k > 0, k = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Prove that

$$\frac{1}{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}}.$$

Problem T8/534. Given a triangle ABC with the centroid G. The lines AG, BG, CG intersects the circumcircle of ABC at A_1, B_1, C_1. Show that

a) $AB_1.AC_1.BC_1.BA_1.CA_1.CB_1 \leq 4R^4r^2$;

b) $BA_1.CA_1 + CB_1.AB_1 + AC_1.BC_1 \leq 2R(2R-r)$.

(where R, r respectively is the circumradius and inradius of the triangle ABC).

Problem T9/534. Suppose that a, b, c are the lengths of 3 sides of a triangle and p is the triangle's half perimeter. Show that

$$\frac{\sqrt{bc}}{p-a} + \frac{\sqrt{ca}}{p-b} + \frac{\sqrt{ab}}{p-c} \geq 6.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/534. Find all non-negative integers a, b, c satisfying a^2+1, b^2+2 are prime numbers, c is not divisible by 5, and $(a^2+1)(b^2+2) = c^2+9$.

Problem T11/534. Given an even positive integer n and a prime number $p > n^n$. Show that the polynomial

$$Q(x) = (x-1)(x-2)...(x-n) + p$$

cannot be presented as a product of two non-constant polynomials with integral coefficients.

Problem T12/534. Given an oblique triangle ABC and (O) is its circumcircle. AD, BE, CF are the altitudes. A_b, A_c respectively are the points of reflection of B, C on F, E. A_a is the intersection between EF and A_bA_c. The points B_b, C_c are determined similarly. Show that AA_a, BB_b, CC_c are concurrent at a point on (O).

Tran slated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 75

PROBLEM. *Show that for any natural number n, the product $P = n(n + 1)(2n + 1)$ is divisible by 6.*

Solution. We will show that P is divisible by 2 and 3, and hence it is divisible by 6.

Either n or $n + 1$ must be even. Thus P is divisible by 2.

If n is divisible by 3 then so is P.

If $n = 3m + 1$, for some natural number m, then $n + 2$ is divisible by 3. And so is $2n + 1$ since $2n + 1 = 2(n + 2) - 3$. Therefore, P is a multiple of 3.

If $n = 3m + 2$, for some natural number m, then $n + 1$ is divisible by 3. Therefore, P is a multiple of 3.

Thus P is divisible by 2 and 3 and we are done.

TỪ VỰNG

divisible	: *chia hết cho*
so is	: *cũng thế*
multiple	: *bội*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 72

BÀI TOÁN. *Chứng minh bằng quy nạp rằng:*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} \quad (1).$$

Lời giải. Với $n = 1$ rõ ràng (1) đúng. Cả hai vế đều bằng 1. Giả sử rằng (1) đúng với $n = k$, tức là:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} \quad (2)$$

Ta cần chứng minh rằng (1) đúng với $n = k + 1$.

Xét $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2$.

Từ (2) ta có $S = (-1)^{k+1}\dfrac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k+1)^2$.

Từ đó: $S = (-1)^{k+1}(k+1)\left(\dfrac{k}{2} - (k+1)\right)$

$$= (-1)^{k+1}(k+1)\left(\frac{k-2k-2}{2}\right)$$

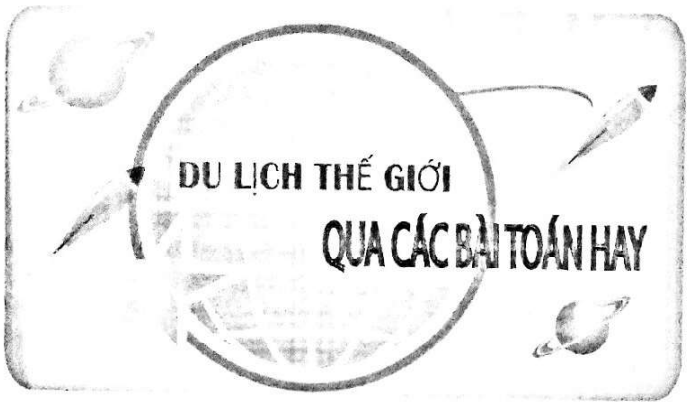
hay $S = (-1)^{k+2}\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Chúng ta đã chỉ ra rằng (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều cần chứng minh.

Câu hỏi: Bạn có thể tìm được cách chứng minh khác mà không sử dụng đến quy nạp không?

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Đoàn Ngọc Thiện*, *Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Phan Thị Bảo Trâm*, *Nguyễn Phương Thảo*, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Văn Ngọc Bình*, *Nguyễn Kỳ Nam*, *Trương Hồ Bảo Nhi*, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Lê Đức Hiếu*, 10 Toán 1, *Trần Duy Anh*, 10 Anh 1, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10T2, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



BÀI TOÁN 63 (Bài dự tuyển năm 1997, IMO lần thứ 38). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương* $(x; y)$ *sao cho* $x^{y^2} = y^x$ (1).

Lời giải. Gọi x, y là nghiệm của (1) và $d = (x; y)$. Ta có: $x = du, y = dv$ với $u, v \in \mathbb{N}^*$, $(u, v) = 1$.

Khi đó (1) trở thành:

$$(du)^{dv^2} = (dv)^u \quad (2).$$

So sánh các số mũ dv^2 và u trong (2) ta có các trường hợp:

TH1: $dv^2 = u$. Khi đó: $(2) \Leftrightarrow u = v$. Vì $(u; v) = 1$ nên $u = v = 1$ và từ $dv^2 = u$ suy ra $d = 1$. Do đó $x = y = 1$ là một nghiệm của (1).

TH2: $dv^2 > u$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow d^{dv^2-u}u^{dv^2} = v^u \quad (3).$$

Do đó $v^u \vdots u^{dv^2}$. Vì $(u; v) = 1$ suy ra $u = 1$ và ta có:

$$d^{dv^2-1} = v \quad (4).$$

Nếu $d = 1$ thì do (4) nên $v = 1$, khi đó BĐT $dv^2 > u$ không đúng. Với $d \geq 2$ ta có:

$$d^{dv^2-1} \geq 2^{dv^2-1} \geq 2^{2v-1} > v \text{ với } v = 1, 2, 3, \ldots$$

BĐT cuối có thể chứng minh bằng quy nạp theo v. Điều này mâu thuẫn với (4).

TH3: $dv^2 < u$ (như vậy $u > d$). Viết lại (2) như sau:

$$u^{dv^2} = d^{u-dv^2}.v^u \quad (5).$$

Do đó $u^{dv^2} \vdots v^u$. Vì $(u; v) = 1$ suy ra $v = 1$ và (5) trở thành: $u^d = d^{u-d}$ (6).

Do $u > d$ nên từ (6) suy ra: $d < u - d$. Do (6) nên mọi ước nguyên tố p của d cũng là ước của u. Lấy α, β là các số mũ lớn nhất với $p^\alpha | u$, $p^\beta | d$. Từ (6) suy ra: $\alpha d = \beta(u - d)$, điều đó chứng tỏ rằng $\alpha > \beta$. Vậy $u \vdots d$, cho nên $u = kd$, $k \in \mathbb{Z}$. Vì $u > 2d$ nên $k \geq 3$. Thay $u = kd$ vào (6) ta được: $k = d^{k-2}$ (7).

Rõ ràng d không thể bằng 1. Vì vậy $d \geq 2$.

- Nếu $k = 3$ thì do (7) ta có: $d = 3$. Suy ra: $u = 9$, $x = 27, y = 3$.
- Nếu $k = 4$ thì do (7) ta có: $d^2 = 4$. Suy ra: $d = 2$, $u = 8, x = 16, y = 2$.
- Nếu $k \geq 5$ thì $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ (dễ thấy theo quy nạp) và (7) không được nghiệm đúng.

Tóm lại phương trình (1) có ba nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1; 1), (27; 3), (16; 2).$$

Nhận xét. Một số bạn tham gia có lời giải không đúng hoặc còn sót nghiệm. Chỉ có một bạn giải đúng bài này là bạn: *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu.** Xin hoan nghênh bạn *Kiên*.

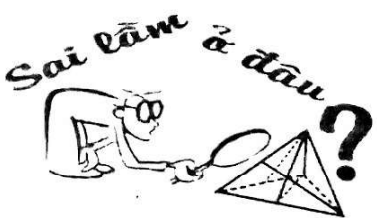
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.1.2022

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 65. *Gọi AB và CD là hai dây cung không cắt nhau của một đường tròn, cho K là điểm nằm trên dây CD. Chỉ bằng thước và compa, hãy dựng một điểm P trên đường tròn sao cho K là trung điểm của phần đoạn thẳng nằm trong tam giác ABP của dây CD.*

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*



GIẢI ĐÁP: TÍNH TỔNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 530, tháng 8 năm 2021)

Phân tích sai lầm. Lời giải của bạn *Hải* sai ở bước biến đổi $\begin{cases} u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1 + u_1q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases}$.

Ta thấy rằng

$$u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \Leftrightarrow u_1.q^{16}.(q^3-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ q = 0 \\ q^3 = 8 \end{array}\right..$$

Ngoài ra, trong lời giải của bạn *Hải* còn một chỗ chưa chính xác, đó là ngay từ đầu bạn đã khẳng định "Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1.q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$." Công thức này đúng với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Chỉ khi nào $q \neq 0$ thì công thức mới đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải đúng. Gọi u_1 và q lần lượt là số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n). Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1.q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Theo giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1 + u_1q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^3-8) = 0 \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases}.$$

TH1: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ 0.\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases}$ (vô lí).

TH2: $\begin{cases} q = 0 \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ u_1 = 272 \end{cases}$. Lúc này $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, nên không tồn tại tổng

$$S_{2021} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_{2021}}.$$

TH3: $\begin{cases} q^3 - 8 = 0 \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}$.

Suy ra $u_n = u_1.q^{n-1} = 16.2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Do đó:

$$S_{2021} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16.2^1} + \frac{1}{16.2^2} + \ldots + \frac{1}{16.2^{2020}}$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2020}}\right).$$

Xét $P = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2020}}$. Nhận thấy các số hạng của P là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1 và công bội bằng $\frac{1}{2}$, nên tổng của 2021 số hạng bằng $P = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2020}}$.

Vậy $S_{2021} = \frac{1}{16}\left(2 - \frac{1}{2^{2020}}\right) = \frac{2^{2021} - 1}{2^{2024}}$.

Nhận xét. Bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

LỜI GIẢI ĐÃ CHUẨN CHƯA?

Bài toán. *Giải bất phương trình*

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9.$$

Một học sinh giải như sau:

$(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+4} \leq (x-3)(x+3)$

$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x^2+4} - x - 3) \leq 0$ (1).

• Nếu $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$, ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \geq x+3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 4 \geq x^2 + 6x + 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ -3 \leq x \leq \frac{-5}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq \frac{-5}{6}.$$

Kết hợp với $x \leq 3$ ta có $x \leq \frac{-5}{6}$ là nghiệm BPT.

• Nếu $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \leq x+3$

$\Leftrightarrow x^2 + 4 \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{-5}{6}$. Kết hợp với $x > 3$ ta có nghiệm của BPT là $x > 3$.

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{-5}{6}\right] \cup (3; +\infty)$.

Theo bạn lời giải trên đã chuẩn chưa?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

ng với
g thức

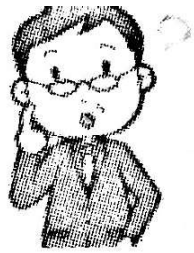
hạng
). Số
n là
có hệ

vô lí).

c này

Do đó:

LỜI GIẢI ĐÃ CHUẨN CHƯA?



Bài toán. *Giải bất phương trình*

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9.$$

Một học sinh giải như sau:

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+4} \le (x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x^2+4}-x-3) \le 0 \quad (1).$$

• Nếu $x-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 3$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \ge x+3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ \begin{cases} x \ge -3 \\ x^2+4 \ge x^2+6x+9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -3 \le x \le \dfrac{-5}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le \frac{-5}{6}.$$

Kết hợp với $x \le 3$ ta có $x \le \dfrac{-5}{6}$ là nghiệm BPT.

• Nếu $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \le x+3$

$\Leftrightarrow x^2+4 \le x^2+6x+9 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{-5}{6}$. Kết hợp với $x>3$ ta có nghiệm của BPT là $x>3$.

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \dfrac{-5}{6}\right] \cup (3;+\infty)$.

Theo bạn lời giải trên đã chuẩn chưa?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 56 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.1.2022.

BÀI TOÁN 56. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

ĐÀO VĂN NAM

(GV TH, THCS&THPT Everest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

PHƯƠNG ÁN CHỌN CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Trong đề kiểm tra giữa kỳ I có câu hỏi trắc nghiệm sau:

Tổng S các nghiệm phương trình

$2\cos 3x(2\cos 2x+1)=1$ *trên đoạn* $[-4\pi;6\pi]$ *là*

A. 61π **B.** 55π **C.** 50π **D.** 56π.

Một học sinh đã chọn đáp án A và giải như sau:

Xét $\sin x=0 \Leftrightarrow x=m\pi \quad (m\in\mathbb{Z})$ thay vào phương trình thấy không thỏa mãn.

Xét $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq m\pi$. Khi đó

$$2\cos 3x(2\cos 2x+1)=1$$

$$\Leftrightarrow 2[\cos 5x+\cos x]+2\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 5x+2\sin x\cos 3x+2\sin x\cos x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin 6x-\sin 4x)+(\sin 4x-\sin 2x)+\sin 2x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k2\pi}{5} \\ x=\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{l2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Với $x\in[-4\pi;6\pi]$, khi đó:

$$-4\pi\le\frac{k2\pi}{5}\le 6\pi \Leftrightarrow -10\le k\le 15;$$

$$-4\pi\le\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}\le 6\pi \Leftrightarrow \frac{-29}{2}\le l\le\frac{41}{2}$$

$\Rightarrow -14\le l\le 20.$

Do đó tổng nghiệm:

$$S=\sum_{k=-10}^{15}\left(\frac{k2\pi}{5}\right)+\sum_{l=-14}^{20}\left(\frac{\pi}{7}+\frac{l2\pi}{7}\right)=61\pi.$$

Chọn **A**.

Theo bạn chọn phương án A đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH LÂM

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Cuộc thi sáng tác "Trang sách tôi yêu"

CHÀO MỪNG KỈ NIỆM 65 NĂM
THÀNH LẬP NXB GIÁO DỤC VIỆT NAM

TỔNG GIÁ TRỊ GIẢI THƯỞNG LÊN TỚI
200 TRIỆU ĐỒNG

- Thời gian gửi bài dự thi: từ ngày 07/12/2021 – 31/3/2022
- Thể lệ cuộc thi xem tại: www.nxbgd.vn
- Đối tượng dự thi:
  - Bảng A: Dành cho các nhà thơ, nhà văn, nhà khoa học, nhà giáo, sinh viên, học sinh, công dân Việt Nam nói chung.
  - Bảng B: Dành cho các cán bộ, công nhân viên đã và đang công tác tại NXBGDVN.
- Bài dự thi gửi đến email: trangsachtoiyeu@nxbgd.vn

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT1M22
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2022
Giá 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng