TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 533
Tháng 11 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

NHIỆT LIỆT CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

20-11

https://tieulun.hopto.org

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

GIỚI THIỆU SÁCH THAM KHẢO THIẾT YẾU LỚP 6

NXB Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu cùng quý thầy cô, quý phụ huynh và các em học sinh một số cuốn sách tham khảo thiết yếu lớp 6 theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 được phát hành từ năm học 2021 - 2022.

Bộ sách tham khảo thiết yếu lớp 6 được biên soạn với mục tiêu phát triển phẩm chất và năng lực người học của Chương trình giáo dục phổ thông 2018 - Chương trình tổng thể và Chương trình môn học. Tham gia biên soạn bộ sách là đội ngũ tác giả uy tín và giàu kinh nghiệm trong công tác giảng dạy cũng như biên soạn SGK mới như: GS.TS. Lê Anh Vinh, PGS. TS. NGND. Tôn Thân, PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thuỷ, PGS. TS. Lê Kim Long, TS. Đặng Thanh Hải, TS. Phạm Quỳnh...

Bộ sách tham khảo thiết yếu được phát hành từ năm học 2021 - 2022, đáp ứng được các yêu cầu về kiểm tra, đánh giá theo hướng dẫn của Bộ Giáo dục và Đào tạo, giúp học sinh luyện tập, khắc sâu kiến thức và biết vận dụng kiến thức vào thực tế cuộc sống.

Danh mục sách tham khảo lớp 6

STT	Tên sách	Tác giả
1	**Bài tập Toán 6 (2 tập)** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	GS. TS. Lê Anh Vinh (Chủ biên)
2	**Các dạng Toán và phương pháp giải Toán 6 (2 tập)** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	PGS. TS. NGND. Tôn Thân (Chủ biên)
3	**Bài tập Ngữ văn 6 (2 tập)** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thuỷ (Chủ biên)
4	**Bài tập Tiếng Anh 6 (2 tập)** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Lê Thị Kim Dung (Chủ biên)
5	**Bài tập Khoa học tự nhiên 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	PGS. TS. Lê Kim Long (Chủ biên)
8	**Bài tập Tin học 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Tô Quang Cường (Chủ biên)
7	**Bài tập Công nghệ 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Đặng Thanh Hải (Chủ biên)
8	**Bài tập Lịch sử và Địa lí 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Nguyễn Thị Bích PGS. TS. Nguyễn Phương Linh
9	**Bài tập Giáo dục công dân 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Phạm Quỳnh (Chủ biên)
10	**Bài tập Âm nhạc 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	ThS. Mai Linh Chi ThS. Đặng Khánh Nhật
11	**Bài tập Mĩ thuật 6** *Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018*	TS. Phạm Minh Phong TS. Đoàn Dũng ST

https://tieulun.hopto.org

CHINH PHỤC KỲ THI TUYỂN SINH VỚI BÀI TOÁN HÌNH LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

NGUYỄN THỊ BÍCH NHUNG
(GV THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài toán liên quan đến ba đường cao trong tam giác nội tiếp đường tròn là một bài toán mà các em học sinh thường gặp trong các kì thi tuyển sinh lớp 9 vào lớp 10 và THPT chuyên. Đây là một bài toán khá hay, có nhiều câu hỏi khác nhau gồm cả câu cơ bản và câu khó, có thể vẽ thêm nhiều đường phụ để xuất hiện nhiều câu hỏi mới và hay. Vì thế rất cần trong quá trình ôn thi vào THPT hướng dẫn cho các em làm bài toán tổng hợp với nhiều câu khó để các em thuận lợi khi giải câu chốt hình trong các đề thi môn Toán. Sau đây tôi đưa ra bài toán liên quan đến ba đường cao với nhiều câu như thế.

Bài toán. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) có AM, BN, CP là ba đường cao cắt nhau tại H.*

1) *Chứng minh rằng: Tứ giác BPNC, ANHP nội tiếp.*

2) *Chứng minh rằng: CN.CA = CM.CB.*

3) *Chứng minh rằng:* $BP.BA + CN.CA = BC^2$.

4) *Chứng minh rằng: H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MNP.*

5) *Đường thẳng AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng H và E đối xứng nhau qua BC.*

6) *Vẽ đường kính AA'.*

a) *Chứng minh rằng: BHCA' là hình bình hành.*

b) *Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :* $OI // AM$ *và* $OI = \frac{1}{2}AH$.

7) *Gọi HO cắt AI tại G. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.*

8) *Giả sử* $BC = R\sqrt{3}$. *Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác APN theo R.*

9) *Giả sử AH = AO. Tính số đo góc* $\widehat{BAC}$.

10) *Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác BHC.*

11) *Gọi NP cắt BC tại Q, QA cắt (O) tại F. Chứng minh rằng: Tứ giác AFPN là tứ giác nội tiếp.*

12) *Chứng minh rằng: H, I, F thẳng hàng*

13) *Chứng minh rằng:* $QH \perp AI$.

14) *Chứng minh rằng: PN song song với tiếp tuyến tại A của (O).*

15) *Chứng minh rằng:*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.R.(MP + PN + MN).$$

16) *Cho BC cố định, tìm vị trí của điểm A trên đường tròn để tổng MP + PN + MN có giá trị lớn nhất.*

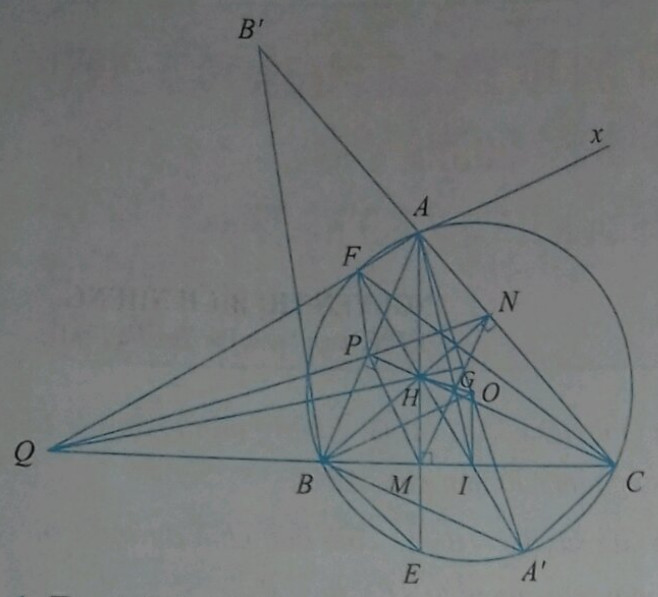
17) *Khi A thay đổi, BC cố định. Tìm vị trí của A để chu vi tam giác ABC có giá trị lớn nhất.*

18) *Khi điểm A di động, BC cố định thì PN luôn có độ dài không đổi.*

19) *Khi A cố định, BC thay đổi thì đường thẳng PN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định.*

20) *Cho BC cố định và* $BC = R\sqrt{3}$. *Xác định vị trí của A trên đường tròn (O) để MH.MA có giá trị lớn nhất.*

https://tieulun.hopto.org



1. Ta có BN, CP là các đường cao của tam giác ABC nên có: $CP \perp AB; BN \perp AC$

$$\Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{BNC} = 90^0; \widehat{APH} = \widehat{ANH} = 90^0.$$

Do tứ giác $BPNC$ có hai đỉnh liên tiếp P, N cùng nhìn cạnh BC dưới một góc 90^0 nên tứ giác $BPNC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (theo cung chứa góc).

Tứ giác $APHN$ có:

$$\widehat{APH} + \widehat{ANH} = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Suy ra tứ giác $APHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

2. Xét hai tam giác vuông: $\Delta CMA; \Delta CNB$ ta có:

$\widehat{BCA}$ chung $\Rightarrow \Delta CMA \sim \Delta CNB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CM.CB = CN.CA.$$

3. Chứng minh tương tự câu 2 ta có:

$$BP.BA = BM.BC$$

$$\Rightarrow CN.CA + BP.BA = CM.CB + BM.BC$$

$$= BC(CM + BM) = BC^2.$$

4. + Chứng minh tương tự câu 1 ta có tứ giác $MHNC$ và tứ giác $BPHM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{HCN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HN}$); $\widehat{PBH} = \widehat{PMH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{PH}$).

+ Tứ giác $BCNP$ nội tiếp nên có: $\widehat{PBN} = \widehat{PCN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{PN}$).

Suy ra: $\widehat{PMH} = \widehat{NMH}$. Do đó MH là tia phân giác của góc $\widehat{PMN}$.

Chứng minh tương tự: NH là tia phân giác của góc $\widehat{PNM}$.

Do đó H là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác PMN.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PMN.

5. Ta có: $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE).

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CAE}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra: $\widehat{CBE} = \widehat{CBN}$. Do đó BC là tia phân giác của góc $\widehat{HBE}$.

Xét tam giác BHE có BC vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔBHE là tam giác cân. Do đó đường cao BC là đường trung trực của $HE \Rightarrow E$ đối xứng với H qua BC.

6. a) Ta có: $\widehat{ACA'} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow A'C \perp AC$.

Mà $BH \perp AC$ (gt) $\Rightarrow A'C // BH$.

Chứng minh tương tự ta có: $A'B // CH$. Do đó $BHCA'$ là hình bình hành.

b) Ta có: $BHCA'$ là hình bình hành (câu a) mà I là trung điểm của BC nên I là trung điểm của HA'.

Mà $OA = OA'$ nên OI là đường trung bình của tam giác $AA'H$, suy ra:

$$OI // AH; OI = \frac{1}{2}AH \Rightarrow OI // AM.$$

7. Xét tam giác AHA' có: $AO = OA'; HI = IA'$ $\Rightarrow HO$, AI là đường trung tuyến của tam giác AHA'. Mà G là giao điểm của AI và HO nên G là trọng tâm của $\Delta AHA' \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AI$.

Xét ΔABC có: $BI = IC$ nên AI là trung tuyến và $AG = \frac{2}{3}AI$ mà G thuộc AI nên G là trọng tâm của ΔABC.

https://tieulun.hopto.org

8. Ta có: tứ giác $APHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác OBI có: $OI = \sqrt{OB^2 - BI^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}$.

Mà $AH = 2OI$ (câu 6) nên $AH = R$. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác APN bằng $\frac{AH}{2} = \frac{R}{2}$.

9. Ta có: $AH = AO = R \Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}R$ (câu 6b). Xét tam giác OIB vuông tại I có:

$$\cos\widehat{BOI} = \frac{OI}{OB} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^0$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2.\widehat{BOI} = 2.60^0 = 120^0.$$

Do đó: $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.\widehat{BOC} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ BC).

10. Ta có: tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành (câu 6a) nên có: $\Delta BHC = \Delta CA'B$. Suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔBHC bằng đường tròn ngoại tiếp $\Delta CA'B$.

Mà đường tròn ngoại tiếp $\Delta BA'C$ chính là đường tròn $(O; R)$, vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBHC là R.

11. Xét ΔQAB và ΔQCF có: $\widehat{AQB}$ chung; $\widehat{QAB} = \widehat{QCF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF) $\Rightarrow \Delta QAB \sim \Delta QCF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QF} \Rightarrow QA.QF = QB.QC \text{ (1)}.$$

ΔQBN và ΔQPC có: $\widehat{BQN}$ chung; $\widehat{QNB} = \widehat{QCP}$

$\Rightarrow \Delta QBN \sim \Delta QPC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{QB}{QP} = \frac{QN}{QC} \Rightarrow QB.QC = QP.QN \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra: $QA.QF = QN.QP$

$\Rightarrow \frac{QA}{QP} = \frac{QN}{QF}$; ΔQAN và ΔQPF lại có $\widehat{AQN}$ chung $\Rightarrow \Delta QAN \sim \Delta QPF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{QNA} = \widehat{QFP}$. Mà $\widehat{QFP} + \widehat{PFA} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{QNA} + \widehat{PFA} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $AFPN$ là tứ giác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0).

12. Ta có tứ giác $AFPN$ là tứ giác nội tiếp (câu 11), mà tứ giác $APHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (câu 1). Do đó 5 điểm A, F, P, N, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow \widehat{AFH} = 90^0 \Rightarrow HF \perp AQ$ (3).

Ta lại có $\widehat{AFA'} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow A'F \perp AQ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: H, F, A' thẳng hàng

Mặt khác I là trung điểm của HA' (câu 6b) nên I, H, F thẳng hàng.

13. Ta có: I, H, F thẳng hàng (câu 12) mà $HF \perp AQ \Rightarrow IF \perp AQ$. Xét ΔAQI có:

$$IF \perp AQ; AM \perp QI; AM \cap IF = H.$$

Do đó H là trực tâm của tam giác AQI $\Rightarrow QH \perp AI$.

14. Vẽ tiếp tuyến Ax tại A của đường tròn (O).

Ta có: $\widehat{CAx} = \widehat{CBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Ta lại có: tứ giác $BPNC$ nội tiếp nên

$\widehat{PNA} = \widehat{CBA}$ (cùng bù với $\widehat{PNC}$)

$\Rightarrow \widehat{PNA} = \widehat{CAx}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $PN // Ax$.

15. Ta có: $PN // Ax$ mà $Ax \perp AO$ (tính chất tiếp tuyến) nên

$$PN \perp AO \Rightarrow S_{OPAN} = \frac{1}{2}.OA.PN = \frac{1}{2}R.PN.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$S_{BPOM} = \frac{1}{2}.R.PM;\ S_{CNOM} = \frac{1}{2}.R.NM.$$

Do đó: $S_{ABC} = S_{APON} + S_{BPOM} + S_{CNOM}$

$$= \frac{1}{2}R.(PN + PM + NM).$$

https://tieulun.hopto.org

16. Theo câu 15, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.R.(MN + NP + MP) = \frac{1}{2}.AM.BC$$

Do BC cố định nên $MN + NP + MP$ có giá trị lớn nhất khi AM có giá trị lớn nhất.

Ta lại có: $AM \le OA + OI = R + OI$ không đổi (theo quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc), do đó AM đạt GTLN khi $AM = R + OI$, khi đó A, O, I thẳng hàng. Khi đó điểm A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Vậy $MN + MP + PN$ có giá trị lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.

17. Ta có: chu vi $\Delta ABC = AB + BC + AC$. Mà BC cố định nên chu vi ΔABC có giá trị lớn nhất khi $AB + AC$ có giá trị lớn nhất.

Lấy điểm B' thuộc tia đối của tia AC sao cho $AB = AB'$. $\Delta ABB'$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 2.\widehat{BB'C}$ không đổi do $\widehat{BAC} = \text{sđ}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ không đổi vì BC cố định. Do đó điểm B' thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ của (O') dựng trên cạnh BC cố định.

Ta lại có: $AB + AC = AB' + AC = B'C$ có giá trị lớn nhất khi $B'C$ có giá trị lớn nhất.

Khi đó $B'C$ là đường kính của (O') $\Leftrightarrow BB' \perp BC \Leftrightarrow AB = AB' = AC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$.

Vậy chu vi ΔABC có giá trị lớn nhất khi A nằm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$.

18. Ta có: tứ giác $BPNC$ nội tiếp (câu 1) $\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BPN}$).

Xét ΔAPN và ΔACB có:

$\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{APN} = \widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \Delta APN \sim \Delta ACB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{PN}{BC}$$

$\Rightarrow PN = BC.\frac{AN}{AB} = BC.\cos\widehat{BAC}$ có giá trị không đổi khi BC cố định (vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$ không đổi khi BC cố định).

Vậy PN có giá trị không đổi $PN = BC.\cos\widehat{BAC}$ khi BC cố định, A di động trên (O).

19. Theo câu 14, ta có: $PN \perp OA$ mà OA cố định nên PN luôn vuông góc với một đường thẳng cố định khi A cố định, BC di động trên (O).

20. + Ta có: $BC = R\sqrt{3} \Rightarrow IB = IC = \frac{1}{2}BC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác OBC cân tại O ($OB = OC = R$) có OI là đường trung tuyến vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ta có:

$$\sin\widehat{BOI} = \frac{BI}{BO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^o$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^0 \quad (*).$$

+ Xét hai tam giác vuông BMH và AMC có:

$\widehat{BHM} = \widehat{ACM}$ (cùng bù với $\widehat{NHM}$)

$$\Rightarrow \Delta BMH \sim \Delta AMC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{MH}{MC}$$

$$\Rightarrow AM.HM = BM.MC \le \frac{1}{4}(BM + MC)^2 = \frac{3}{4}R^2.$$

Do đó $AM.HM$ có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{4}R^2$ khi $BM = MC$. Khi đó tam giác ABC cân tại B (**).

Kết hợp (*) và (**) ta có tam giác ABC đều.

Vậy $AM.HM$ có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{4}R^2$ khi đó tam giác ABC đều, điểm A ở chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng $AEHF$ và $AEDB$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

https://tieulun.hopto.org

2) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh tam giác ABD và tam giác AKC đồng dạng với nhau.

3) Chứng minh rằng OC vuông góc với DE.

Bài 2. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong $(O; R)$. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng

a) Bốn điểm B, E, C, F cùng thuộc 1 đường tròn.

b) $AC.AE = AF.AB$; c) $MN // EF$; d) $\frac{MN}{AH} < 2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Đường cao AD, BE cắt nhau tại H, kéo dài BE cắt đường tròn O tại F.

a) Chứng minh bốn điểm C, D, H, E cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Chứng minh tam giác AHF cân.

c) Gọi M là trung điểm của AB, chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

d) Cho BC cố định và $BC = R\sqrt{3}$. Xác định vị trí của điểm A trên đường tròn (O) để $DH.DA$ là lớn nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1) Chứng minh tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.

2) E, F nằm trên đường tròn (O).

3) Chứng minh tứ giác $BCFE$ là hình thang cân.

4) Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $CEHD$ nội tiếp .

2) Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

3) $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.

4) H và M đối xứng nhau qua BC.

5) Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 6. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) $(AB < AC)$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ đường kính CG của (O).

1) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp một đường tròn, xác định tâm I của đường tròn đó.

2) Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp một đường tròn, xác định tâm M của đường tròn đó.

3) Chứng minh rằng ba điểm G, I, H thẳng hàng

4) Đường thẳng qua D vuông góc với ID cắt AB tại N. Chứng minh tứ giác $IMFD$ nội tiếp.

5) Trên AB lấy điểm T sao cho $\widehat{NDT} = \widehat{AOI}$. Chứng minh GT vuông góc với CN.

6) Chứng minh: $AB.AC.BC = 4R.\sin^2 A.S_{BFEC}$ (kí hiệu S là diện tích).

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O; R)$ có đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OA \perp EF$.

c) Kẻ đường kính AD của (O), BC cắt HD tại I. Chứng minh $OI \perp BC$.

d) Giả sử $BC = R\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF theo R.

e) Chứng minh 2 điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

f) Kẻ tiếp tuyến Ax, chứng minh $Ax // EF$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O: R)$ có $AB < AC$. Vẽ 2 đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, xác định tâm I.

2) Chứng minh: $AH = 2OI$.

3) EF cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB), MI cắt (O) tại K. Chứng minh:

a) Tam giác AMN cân

b) $HF.CF - HE.BE = OE^2 - OF^2$.

c) $BC^2 = 4MI.KI$.

4) Vẽ HT vuông góc với NK tại T. Chứng minh AK vuông góc với HN, rồi suy ra tứ giác $MKTE$ nội tiếp.

(*Xem tiếp trang 24*)

https://tieulun.hopto.org

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH, NĂM HỌC 2021 – 2022

Câu 1. *Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:*

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Lời giải. Đặt $x=a-b; y=b-c; z=c-a$

$\Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$. Khi đó:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=x^3+y^3+z^3$$
$$=x^3+y^3-(x+y)^3$$
$$=x^3+y^3-x^3-y^3-3xy(x+y)$$
$$=-3xy(x+y)=3xyz;$$

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2y+b^2z+c^2x$$
$$=a^2y-b^2(x+y)+c^2x=(a^2y-b^2y)-(b^2x-c^2x)$$
$$=y(a-b)(a+b)-x(b-c)(b+c)$$
$$=yx(a+b)-xy(b+c)=xy(a+b-b-c)$$
$$=xy(a-c)=xy(-z)=-xyz.$$

Do đó

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=\frac{3xyz}{-xyz}=-3.$$

Câu 2. a) *Giải phương trình:*

$$9x^2=(x^2+x-5)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2.$$

b) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}x^3+xy^2+2y^3=0\\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4\end{cases}.$$

Lời giải. a) ĐK: $x\ge -\frac{1}{3}$. Khi đó PT đã cho tương đương với: $9x^2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2=(x^2+x-5)9x^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x^2=0\\ \left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2=x^2+x-5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \text{ (thỏa mãn)}\\ 3x+2+2\sqrt{3x+1}=x^2+x-5\end{array}\right..$$

Xét $3x+2+2\sqrt{3x+1}=x^2+x-5$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7-2\sqrt{3x+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+3)-\left(2\sqrt{3x+1}-8\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+3)-2\left(\sqrt{3x+1}-4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)\left[x+3-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+4}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-5=0\\ x+3-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+4}=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5 \text{ (thỏa mãn)}\\ x+3-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+4}=0\end{array}\right..$$

Vì $x\ge -\frac{1}{3}\Rightarrow x+3-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+4}\ge -\frac{1}{3}+3-\frac{6}{4}>0$

$\Rightarrow$ PT: $x+3-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+4}=0$ vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có các nghiệm $x=0; x=5$.

b) ĐK: $2x^2-x\ge 0$. Vì $x=y=0$ không phải là nghiệm của HPT nên trong hai số x và y tồn tại ít nhất một số khác không, suy ra $x^2-xy+2y^2>0$.

Ta có: $x^3+xy^2+2y^3=0\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+2y^2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-y\\ x=y=0 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Thay $x=-y$ vào PT thứ hai ta được:

$$\sqrt{x(2x^2-1)}+8x^2-3x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2-1)}+4(2x^2-1)-3x=0 \ (1)$$

+ Nếu $x>0\Rightarrow 2x^2-1\ge 0$ suy ra:

https://tieulun.hopto.org

$$\sqrt{x\left(2x^2-1\right)}=\sqrt{x}.\sqrt{2x^2-1}.$$

Đặt $\sqrt{x}=b\ (b>0);\sqrt{2x^2-1}=a\ (a\ge 0)$.

Khi đó PT(1) trở thành:

$$4a^2+ab-3b^2=0\Leftrightarrow(a+b)(4a-3b)=0$$

$$\Leftrightarrow 4a=3b\quad(\text{vì } a+b>0).$$

$$\Leftrightarrow 16a^2=9b^2\Rightarrow 16\left(2x^2-1\right)=9x$$

$$\Leftrightarrow 32x^2-9x-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9+\sqrt{2129}}{64}\\ x=\dfrac{9-\sqrt{2129}}{64}<0\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Ta thấy $x=\dfrac{9+\sqrt{2129}}{64}$ thỏa mãn $2x^2-1>0$ nên ta chọn $x=\dfrac{9+\sqrt{2129}}{64}$, suy ra:

$$(x;y)=\left(\frac{9+\sqrt{2129}}{64};-\frac{9+\sqrt{2129}}{64}\right).$$

+ Nếu $x<0\Rightarrow 2x^2-1\le 0$ suy ra:

$$\sqrt{x\left(2x^2-1\right)}=\sqrt{-x}.\sqrt{-\left(2x^2-1\right)}.$$

Đặt $\sqrt{-x}=b(b>0);\sqrt{-\left(2x^2-1\right)}=a(a\ge 0)$.

Khi đó PT(1) trở thành:

$$-4a^2+ab+3b^2=0\Leftrightarrow 4a^2-ab-3b^2=0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(4a+3b)=0\Leftrightarrow a=b\ (\text{vì } 4a+3b>0)$$

$$\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow 2x^2-1=x\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad(\text{loại})\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Với $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x^2-1<0$ nên $x=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn, suy ra $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm:

$$(x;y)\in\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{9+\sqrt{2129}}{64};-\frac{9+\sqrt{2129}}{64}\right)\right\}.$$

Câu 3. a) *Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn:*

$$m(m+1)(m+2)=n^2.$$

b) *Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}.$$

Lời giải.

a) Nếu $n=0\Rightarrow m(m+1)(m+2)=0$

$\Rightarrow m=-2;-1;0\Rightarrow(m;n)\in\{(-2,0);(-1,0);(0,0)\}$.

Với $n\ne 0\Rightarrow m(m+1)(m+2)>0\Rightarrow m>0$

$\Rightarrow m\ge 1$ (do m là số nguyên).

Ta có: $m(m+1)(m+2)=(m+1)\left(m^2+2m\right)$.

Gọi d là ước chung của $m+1$ và m^2+2m. Suy ra:

$$\left.\begin{array}{l}m+1\vdots d\\ m^2+2m\vdots d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(m+1)^2\vdots d\\ m^2+2m\vdots d\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow(m+1)^2-\left(m^2+2m\right)\vdots d$ hay $1\vdots d\Rightarrow d=1$.

Mà $m(m+1)(m+2)=(m+1)\left(m^2+2m\right)=n^2$ là số chính phương và $(m+1, m^2+2m)=1$ nên mỗi số $m+1; m^2+2m$ là số chính phương. Suy ra $(m+1)^2; m^2+2m$ là các số chính phương hay $m^2+2m+1; m^2+2m$ là các số chính phương. Mà $m^2+2m; m^2+2m+1$ là hai số nguyên dương liên tiếp (do $m\ge 1$) dẫn đến vô lí.

Vậy $(m;n)\in\{(-2,0);(-1,0);(0,0)\}$.

b) Từ bài ra ta có :

$$3=x+y+xy\le x+y+\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow x+y\ge 2.$$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\ge 2$. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

https://tieulun.hopto.org

$$P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}$$
$$\le\sqrt{2\left[18-\left(x^2+y^2\right)\right]}+\frac{x+y}{4}$$
$$=\sqrt{36-2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x+y}{4}.$$

Vì $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2\Rightarrow\sqrt{36-2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x+y}{4}$

$$\le\sqrt{36-(x+y)^2}+\frac{x+y}{4}=\sqrt{36-t^2}+\frac{t}{4}.$$

Ta chứng minh: $\sqrt{36-t^2}+\frac{t}{4}\le4\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{36-t^2}-4\sqrt{2}+\frac{t-2}{4}\le0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-t^2}{\sqrt{36-t^2}+4\sqrt{2}}+\frac{t-2}{4}\le0$$

$$\Leftrightarrow(2-t)\left[\frac{2+t}{\sqrt{36-t^2}+4\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right]\le0\ \ (*)$$

Vì $t\ge2\Rightarrow t+2\ge4;$

$$\sqrt{36-t^2}+4\sqrt{2}\le\sqrt{36-2^2}+4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{2+t}{\sqrt{36-t^2+4\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\ge\frac{4}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}>0$$

mà $t\ge2\Rightarrow2-t\le0$ do đó (*) luôn đúng.

Vậy max $P=4\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ khi $x=y=1$.

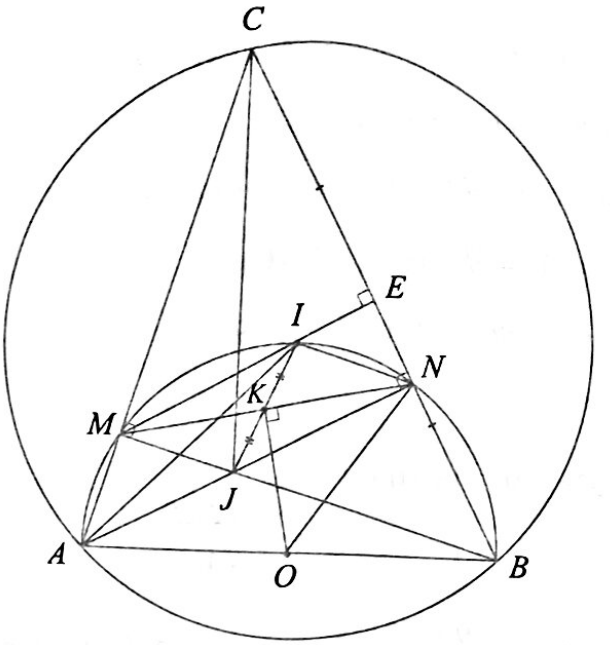
Câu 4. *Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung lớn AB của của đường tròn tâm I, bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM.*

a) *Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.*

b) *Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMM.*

c) *Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỷ số* $\frac{CJ}{OK}$.

Lời giải.



a) Ta giả thiết ta có: $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.90^0=45^0$

suy ra tam giác *MBC* vuông cân tại *M*.

Chứng minh tương tự, ta cũng có tam giác *NAC* vuông cân tại *N*.

b) Gọi *E* là trung điểm của *BC*, do tam giác *MBC* vuông cân tại *M* suy ra $ME\perp BC$.

Do *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, *E* là trung điểm của *BC* suy ra $IE\perp BC$.

Suy ra *M*, *I*, *E* thẳng hàng nên

$$MI\perp BC\Rightarrow MI\perp CN.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $NI\perp CM$.

Suy ra *I* là trực tâm tam giác *CMN*.

c) Từ chứng minh câu a và b suy ra *MI* // *AN*, *IN* // *BM*, do đó tứ giác *MINJ* là hình bình hành, mà *K* là trung điểm của *IJ* nên *K* cũng là trung điểm của *MN*, suy ra *OK* vuông góc với *MN*.

Đặt *AB* = 2*R*, dễ thấy

$$\Delta CNM\sim\Delta CAB\ \text{(g.g)}\Rightarrow\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{AB}.$$

Mà tam giác *NCA* vuông cân tại *N* nên $\frac{CN}{CA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

(*Xem tiếp trang 10*)

https://tieulun.hopto.org

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐHSP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2021 – 2022
VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 90 phút; Dành cho tất cả các thi sinh thi vào trường chuyên)

Bài 1. Cho

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$(a\geq 0, b\geq 0, a\neq b)$.

a) Rút gọn P.

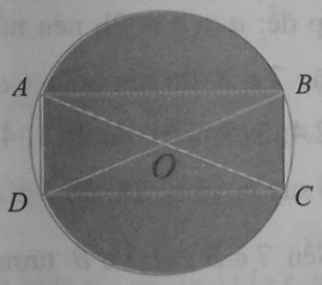
b) Chứng minh rằng $P\geq 0$.

Bài 2. a) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của m, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$x^2-(2m+1)x+m^2+3=0;$$

$$x^2-mx+4m-11=0.$$

b) Một tấm biển quảng cáo có dạng hình tròn tâm O, bán kính bằng 1,6m. Giả sử hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính 1,6m sao cho $\widehat{BOC}=45°$ (hình trên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt như ở hình trên. Biết mức chi phí sơn phần hình tô đậm là 150 nghìn đồng /m^2 và phần còn lại là 200 nghìn đồng/m^2. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi = 3,14$.



Bài 3. Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (d) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB. Lấy điểm M tùy ý trên (d). Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AM cắt các đường thẳng AM, (d) lần lượt tại I, N. Đường thẳng MB cắt AN tại K.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MIKN$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CM.CN = AC.BC$.

c) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh rằng OH vuông góc với đường thẳng (d) và $OH=\frac{1}{2}AB$.

Bài 4. a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 \\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1 \end{cases}.$$

b) Cho a và b là hai số hữu tỉ. Chứng minh nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.

VÒNG 2

(Thời gian làm bài 120 phút, dùng riêng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

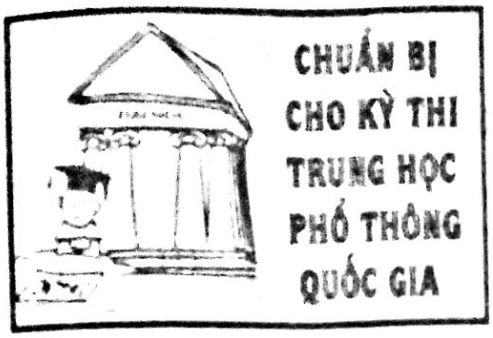
Bài 1. Cho $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của $Q(x)$.

b) Cho đa thức $P(x)=x^5-x^4-x+1$. Tính giá trị của $P(\alpha)$.

Bài 2. Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm

https://tieulun.hopto.org



BÀI TOÁN VỀ SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

NGUYỄN VĂN CƯỜNG
(GV THPT Mỹ Đức A, Hà Nội)

Bài toán về tìm số cực trị của đồ thị hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối thường xuất hiện trong kỳ thi tốt nghiệp Trung học phổ thông. Dạng toán gây nhiều khó khăn cho học sinh. Bài viết này xin trình bày một cách tiếp cận hai bài toán cơ bản thường được đề cập trong kỳ thi nói trên. Tác giả hy vọng bài viết sẽ có tác dụng thiết thực đối với học sinh trong việc ôn thi tốt nghiệp THPT và là tư liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo.

Bài toán 1. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)|$

Ta có: $g(x)=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$;

$$g'(x)=\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}},\forall f(x)\neq 0.$$

Để tìm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)|$ ta giải các PT: $f(x)=0$ (1) và $f'(x)=0$ (2).

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)|$ bằng tổng số nghiệm bội lẻ của hai phương trình (1) và (2). Nói cách khác, nếu gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, n là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ với trục hoành (không tính điểm tiếp xúc) thì số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)|$ là $m+n$.

Nhận xét. *Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị các hàm số $y=f(x\pm m)$, $y=f(x)\pm m$ với $m\in\mathbb{R}$.*

Thí dụ 1 (Đề thi Quốc gia năm 2017). *Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau*

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm đơn duy nhất, phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm (đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị) nên đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có ba điểm cực trị.

Thí dụ 2. *Tìm số điểm cực trị của hàm số* $y=\left|(x-2)^3(x-1)(x+1)\right|$

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 3.

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=(x-2)^3(x-1)(x+1)$, ta có $g(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ là $x=2$, $x=\pm 1$. Mặt khác:

$$\begin{aligned}g'(x)&=3(x-2)^2(x^2-1)+2x(x-2)^3\\&=(x-2)^2\left[3(x^2-1)+2x(x-2)\right]\\&=(x-2)^2(5x^2-4x-3);\end{aligned}$$

$g'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ . Do đó hàm số $y=\left|(x-2)^3(x-1)(x+1)\right|$ có 5 điểm cực trị.

https://tieulun.hopto.org

Thí dụ 3 (Đề tham khảo của Bộ GD&ĐT, năm 2018). *Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có bảy điểm cực trị?*

A. 5 B. 6 C. 7 D. 3.

Lời giải. Xét hàm $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$.

Ta có: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$;

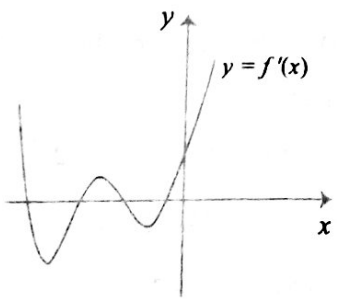
$f'(x)=0$ có ba nghiệm $x=0,\ x=-1,\ x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có ba điểm cực trị. Để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có bảy điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Từ bảng biến thiên ta suy ra $\begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$. Vậy có 4 giá trị nguyên là $m=1, m=2, m=3, m=4$.

Thí dụ 4 (Đề thi TNTHPT, năm 2020). *Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.*



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là:

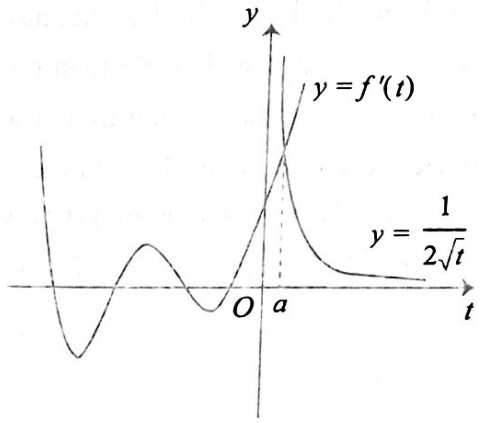
A. 5 B. 6 C. 7 D. 3.

Lời giải. Xét hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$ có:

$$h'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)-2x;$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{1}{2x^2}\ (1) \end{array}\right..$$

Xét phương trình (1): Đặt $t=x^4$ thì (1) thành $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t>0$. Ta thấy hàm $y=f'(t)$ có đồ thị như hình dưới.



Hàm $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=+\infty$.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ có nghiệm duy nhất $t=a>0$, khi đó $x=\pm\sqrt[4]{a}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm $h(x)$ có ba điểm cực trị đồng thời đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm đơn (một điểm tiếp xúc) vì vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là 5.

https://tieulun.hopto.org

Thí dụ 5. *Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số* $y=\left|2x^4-4(m+8)x^2+m-2021\right|$ *có năm điểm cực trị?*

A. 2019 B. 2020 C. 2021 D. 0.

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=2x^4-4(m+8)x^2+m-2021$$

có: $f'(x)=8x^3-8(m+8)x=8x\left[x^2-(m+8)\right]$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+8\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $m+8\le 0\Leftrightarrow m\le -8$ thì hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất tại hai điểm. Từ đó suy ra hàm số

$$y=\left|2x^4-4(m+8)x^2+m-2021\right|$$

có nhiều nhất ba điểm cực trị.

TH2: Nếu $m+8>0\Leftrightarrow m>-8$ thì hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị là $x=0, x=x_1, x=x_2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$m-2021$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Để hàm số $y=\left|2x^4-4(m+8)x^2+m-2021\right|$ có năm điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt (không tính điểm tiếp xúc). Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m-2021\le 0\Leftrightarrow m\le 2021$. Vì m nguyên dương nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

Thí dụ 6. *Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên*

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2022	↘	-2021	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2020)+2021\right|$ *có bao nhiêu điểm cực trị?*

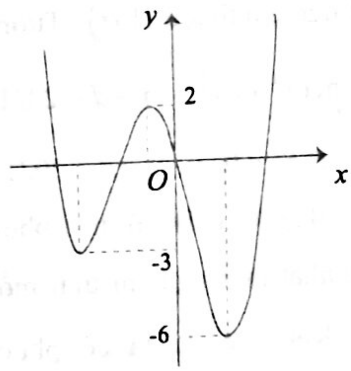
A. 5 B. 3 C. 2 D. 1.

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=f(x-2020)+2021$. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ sang phải theo phương trục hoành 2020 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên theo phương trục tung 2021 đơn vị. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		2018		2023		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4043	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $g(x)=f(x-2020)+2021$ cắt trục hoành tại một điểm, tiếp xúc tại một điểm. Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2020)+2021\right|$ có ba điểm cực trị.

Thí dụ 7. *Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C) như hình vẽ.*



Tìm số giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2020)+m\right|$ *có 5 điểm cực trị?*

A. 3 B. 5 C. 2 D. 1.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị nên đồ thị hàm số $y=f(x-2020)$ cũng có ba điểm cực trị. Vậy để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-2020)+m\right|$ có năm điểm cực trị thì phương trình $f(x-2020)+m=0$ phải có hai

https://tieulun.hopto.org

nghiệm bội lẻ, hay đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị $(C'): y=f(x-2020)$ tại hai điểm phân biệt. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\left[\begin{array}{l}-6<-m\le -3\\ -m\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\le m<6\\ m\le -2\end{array}\right..$$

Do m nguyên dương nên $m\in\{3,4,5\}$. Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 8. *Cho hàm số $y=f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ với $b,c,d\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\begin{cases}d>2021\\ b+c+d-2020<0\end{cases}$. Hàm số $y=|f(x)-2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị?*

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải. Ta có hàm số $g(x)=f(x)-2021$ là hàm số bậc 3 nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Mặt khác

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+bx^2+cx+d-2021)=+\infty$$

nên $\exists\alpha>1$ để $g(\alpha)>0$, $g(1)=b+c+d-2020<0$, suy ra $g(1).g(\alpha)<0$ nên phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1;\alpha)$. Tương tự:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+bx^2+cx+d-2021)=-\infty$$

$\Rightarrow\exists\beta<0$ để $g(\beta)<0$, $g(0)=d-2021>0$, suy ra $g(\beta).g(0)<0$, $g(0).g(1)<0$ nên phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(\beta;0),(0;1)$. Kết hợp lại ta có phương trình $g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt đồng thời đồ thị $g(x)$ có hai điểm cực trị (tính chất hàm bậc ba). Vậy hàm số $y=|f(x)-2021|$ có 5 điểm cực trị.

Thí dụ 9. *Cho hàm số*

$$y=f(x)=(m^8+1)x^4-2(m^4.3^m+1)x^2+9^m+2022$$

với m là tham số. Hàm số $y=|f(x)-2020|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải. Ta có:

$$y=|f(x)-2020|=\sqrt{[f(x)-2020]^2},$$

$$y'=\frac{f'(x)[f(x)-2020]}{|f(x)-2020|}$$

với mọi x thỏa mãn $f(x)-2020\ne 0$.

Mặt khác $-2(m^4.3^m+1)(m^8+1)<0,\ \forall m$ nên hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị hay phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm (hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có $ab<0$ thì có ba điểm cực trị). Xét phương trình:

$$(m^8+1)t^2-2(m^4.3^m+1)t+9^m+2=0\ \ (t=x^2)$$

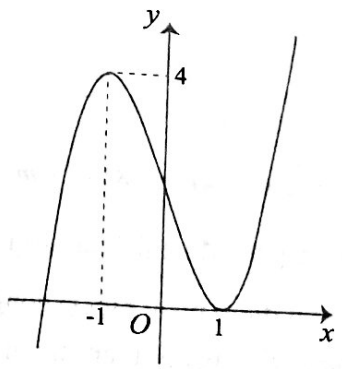
có $\Delta'=(3^m.m^4+1)^2-(m^8+1)(9^m+2)$

$$=-(9^m-2.3^m.m^4+m^8)-m^8-1$$

$$=-(3^m-m^4)^2-m^8-1<0.$$

Từ đó suy ra phương trình $f(x)-2020=0$ vô nghiệm. Vậy hàm số $y=|f(x)-2020|$ có ba cực trị.

Thí dụ 10. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ*



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\le 10$ để hàm số $g(x)=|f^2(x)+2f(x)+m|$ có 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 10.

Lời giải. Xét $h(x)=f^2(x)+2f(x)+m$,

$$h'(x)=2f(x).f'(x)+2f'(x)=2f'(x)[f(x)+1];$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\ \ (1)\\ f(x)=-1\ \ (2)\end{array}\right..$$

https://tieulun.hopto.org

Dựa vào đồ thị ta thấy PT(1) có 2 nghiệm là $x=\pm 1$, PT(2) có một nghiệm $x=a<-1$.

Ta có: $h(1)=f^2(1)+2f(1)+m=m$,

$h(-1)=f^2(-1)+2f(-1)+m=24+m$,

$h(a)=f^2(a)+2f(a)+m=1-2+m=m-1$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$		a		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$m+24$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $h(x)=f^2(x)+2f(x)+m$ có ba điểm cực trị. Vậy để hàm số

$g(x)=\left|f^2(x)+2f(x)+m\right|$ có ba điểm cực trị thì đồ thị hàm $h(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc)

Ta cần có $m-1\geq 0\Leftrightarrow m\geq 1$. Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn.

Bài toán 2. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$

Ta có: $y=f\left(|x|\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{|x|}.f'\left(|x|\right),\ \forall x\neq 0.$

Nhận thấy $x=0$ là một điểm cực trị của hàm số. Để tìm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ ta giải phương trình $f'(t)=0$ $(t=|x|>0)$. Mỗi nghiệm $t>0$ cho ta hai nghiệm của x. Vì vậy nếu hàm số $y=f(x)$ có m điểm cực trị dương thì hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có $2m+1$ điểm cực trị.

Thí dụ 1. *Hàm số (C): $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:*

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(|2x+2|-4\right)-5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=2;\ x=4$.

Ta có: $g'(x)=\left(|2x+2|-4\right)'f'\left(|2x+2|-4\right)$

$$=\frac{2x+2}{|2x+2|}.f'\left(|2x+2|-4\right),\forall x\neq -1.$$

Nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực trị $x=-1$. Ta có: $f'\left(|2x+2|-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x+2|-4=2\\|2x+2|-4=4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+1|=3\\|x+1|=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,x=-4\\x=3,x=-5\end{array}\right.$ (có 2 nghiệm dương).

Vậy hàm số $g(x)=f\left(|2x+2|-4\right)-5$ có 5 điểm cực trị. Chọn **C.**

Thí dụ 2. *Cho hàm số*

$$y=f(x)=\frac{2}{3}x^3-(m+2)x^2+2\left(m^2-16\right)x+2021.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 4 B. 6 C. 7 D. 3.

Lời giải. Ta có:

$f'(x)=2x^2-2(m+2)x+2\left(m^2-16\right);$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m^2-16=0$ (1).

Để hàm số $f\left(|x|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ phải có đúng 1 điểm cực trị có hoành độ dương.

TH1: PT(1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-16<0$ $\Leftrightarrow -4<m<4$.

TH2: PT(1) có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-16=0\\m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$

Do m nguyên dương, kết hợp hai trường hợp ta có $m\in\{1,2,3,4\}$. Vậy có 4 giá trị m cần tìm.

https://tieulun.hopto.org

Thí dụ 3 (Đề thi TNTHPT, năm 2021). *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $f(|x^3+6x|+m)$ có ít nhất 3 cực trị?*

A. 5 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 6.

Lời giải. Từ giả thiết $f'(x)=(x-8)(x^2-9)$ đạt cực trị tại $x=8, x=\pm 3$.

Đặt $g(x)=f(|x^3+6x|+m)$. Ta có:

$$g'(x)=\left[f(|x^3+6x|+m)\right]'$$
$$=\frac{(3x^2+6)(x^3+6x)}{|x^3+6x|}.f'(|x^3+6x|+m)$$

với $x\neq 0$. Nhận thấy $x=0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $g(x)$. Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 cực trị thì $g'(x)$ phải có ít nhất 3 nghiệm bội lẻ hay $f'(|x^3+6x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0. Ta có:

$$f'(|x^3+6x|+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x^3+6x|+m=-3\\|x^3+6x|+m=3\\|x^3+6x|+m=8\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x^3+6x|=-m-3\\|x^3+6x|=-m+3.\\|x^3+6x|=-m+8\end{array}\right.$$

Để $f'(|x^3+6x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0 thì: $8-m>0\Leftrightarrow m<8$. Do m nguyên dương nên $m\in[1;7]$. Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^2+c$ với với $b,c\in R$ và thỏa mãn $\begin{cases}c>2021\\b+c-2020<0\end{cases}$. Hàm số $y=|f(x)-2021|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 1.

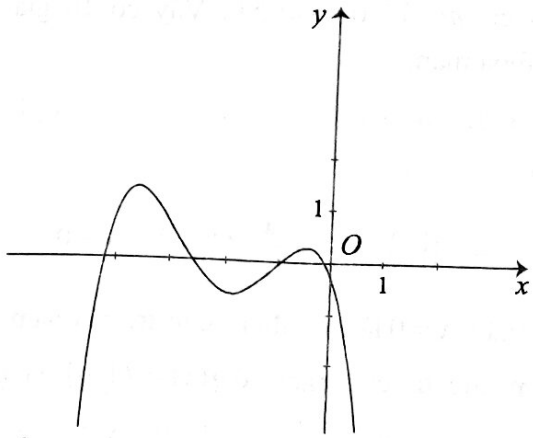
Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=|f^2(x)-4f(x)+1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4.

Bài tập 3 (Đề TNTHPT, năm 2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=|f(x^4)+x^2|$ là

A. 3 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4.

Bài tập 4 (Đề TNTHPT, năm 2021). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x)=(x-9)(x^2-16),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+7x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 8.

https://tieulun.hopto.org

ỨNG DỤNG CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH TRONG MỘT TÌNH HUỐNG THỰC TẾ

PHAN THẾ HẢI
(GV CĐSP Bà Rịa - Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Như chúng ta đều biết, trong đa số các cuộc thi hiện nay thì số lượng thành viên trong Ban giám khảo thường từ 2 thành viên trở lên. Chẳng hạn, các bài thi của học sinh ở trường có 2 giám khảo chấm, các cuộc thi trên truyền hình thường có từ 3 đến 5 giám khảo, vv…

Điểm của thí sinh trong các cuộc thi thường được cho theo thang điểm 10 hoặc 100 và điểm trung bình chung (*TBC*) của các thành viên trong Ban giám khảo được lấy làm kết quả điểm cho thí sinh. Trong thực tế, đã có tình trạng một giám khảo nào đó cho điểm quá cao hoặc cho điểm quá thấp so với điểm của các thành viên còn lại. Chẳng hạn, trong cuộc thi văn nghệ tại một trường học, điểm của 5 thành viên trong Ban giám khảo lần lượt là 70 điểm, 73 điểm, 76 điểm, 82 điểm và 95 điểm. Người cho điểm cao nhất và người cho điểm thấp nhất lệch nhau đến 25 điểm. Điều này có thể được giải thích bằng nhiều lý do như xuất phát từ quan điểm đánh giá của người chấm, nhất là những cuộc thi có nội dung chấm lại dựa nhiều vào cảm tính; xuất phát từ quan hệ cá nhân và thậm chí là xuất phát từ một động cơ nào đó, …

Để tránh tình trạng đã nêu ở trên, trong một số cuộc thi, Ban tổ chức đã ra điều kiện như sau: Khi tính điểm *TBC* của các giám khảo, nếu điểm của một giám khảo nào đó lớn hơn hoặc nhỏ hơn a điểm so với điểm *TBC* thì điểm của giám khảo này sẽ bị loại. Lúc đó, điểm của thí sinh sẽ là điểm *TBC* của những giám khảo còn lại. Điều kiện này được áp dụng liên tục trong quá trình tính điểm *TBC* của một thí sinh.

Mặc dù điều kiện được đưa ra có vẻ đơn giản và trên thực tế, các trường hợp điểm chênh lệch nhau quá lớn cũng không nhiều nhưng xét về mặt lý thuyết, các trường hợp rắc rối và khó xử vẫn có thể xảy ra khi chúng ta áp dụng điều kiện nêu trên.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ phân tích các tình huống xảy ra đối với Ban giám khảo có 2 hoặc 3 thành viên. Trong suốt bài viết, chúng tôi quy ước điểm của các giám khảo 1, giám khảo 2, giám khảo 3, … tương ứng lần lượt là $x_1, x_2, x_3, \cdots$ và thỏa mãn $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le 100$. Điểm lệch được đưa ra để loại giám khảo nếu điểm của họ lớn hơn hoặc nhỏ hơn điểm *TBC* được ký hiệu là a. Đối với các thí dụ cụ thể trong bài viết, nếu không đề cập đến a thì a luôn được hiểu là 10.

1. Trường hợp Ban giám khảo có 2 thành viên

a) Tình huống 1: *Không có giám khảo nào bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Đối với tình huống này thì ta luôn có:

https://tieulun.hopto.org

$$\frac{x_1+x_2}{2}-a \le x_1 \le x_2 \le \frac{x_1+x_2}{2}+a.$$

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 80 điểm, do đó điểm *TBC=75*. Vì không có giám khảo nào lệch với điểm *TBC* quá ± 10 nên kết quả cuối cùng của thí sinh là 75 điểm.

b) Tình huống 2: *Cả 2 giám khảo đều bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Đối với tình huống này thì ta luôn có

$$\begin{cases} x_1 < \dfrac{x_1+x_2}{2}-a \\ x_2 > \dfrac{x_1+x_2}{2}+a \end{cases}.$$

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 92 điểm, do đó điểm *TBC* = 81. Do điểm của cả 2 giám khảo lệch với điểm *TBC* quá ± 10 nên không có kết quả cuối cùng cho thí sinh. Đây rõ ràng là một tình huống khó xử đối với Ban tổ chức nếu họ chọn điểm lệch $a=10$.

Nhận xét. *Không bao giờ xảy ra tình huống: Có một giám khảo bị loại và giám khảo kia thì không bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Thật vậy, do ta luôn có

$$x_1 < \frac{x_1+x_2}{2}-a \Leftrightarrow x_2 > \frac{x_1+x_2}{2}+a$$

nên nếu giám khảo 1 bị loại thì giám khảo 2 cũng bị loại và ngược lại (do điểm của cả 2 giám khảo đều lệch với điểm *TBC* hơn *a* điểm).

2. Trường hợp Ban giám khảo có 3 thành viên

Trong phần 2 này, chúng tôi đặt

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

a) Tình huống 1: *Không có giám khảo nào bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Đối với tình huống này thì ta luôn có $m-a \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le m+a$.

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 75 điểm, giám khảo 3 cho 80 điểm, do đó điểm *TBC=75*. Vì không có giám khảo nào lệch với điểm *TBC* quá ± 10 nên kết quả cuối cùng của thí sinh là 75 điểm.

b) Tình huống 2: *Có đúng một giám khảo bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Đây là một tình huống khá thú vị mà chúng ta sẽ thấy sau đây.

• Giả sử giám khảo 1 bị loại, giám khảo 2 và giám khảo 3 không bị loại. Khi đó, ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \le x_1 < m-a \\ m-a \le x_2 \le m+a \\ m-a \le x_3 \le m+a \end{cases}$. Do vậy,

$$\begin{cases} -m-a \le -x_2 \le -m+a \\ m-a \le x_3 \le m+a \end{cases} \Rightarrow -2a \le x_3-x_2 \le 2a$$

$\Rightarrow \dfrac{x_2+x_3}{2}-a \le x_2 \le x_3 \le \dfrac{x_2+x_3}{2}+a$. Điều này chứng tỏ khi giám khảo 1 bị loại thì việc tính điểm *TBC* tiếp theo đối với giám khảo 2 và giám khảo 3 sẽ là một tình huống an toàn vì không còn giám khảo nào bị loại nữa. Điểm *TBC* của giám khảo 2 và giám khảo 3 chính là điểm cuối cùng của thí sinh. Hơn nữa, trong tình huống này, chúng ta có nhận xét sau đây:

Nhận xét. Do $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 100$ nên hiển nhiên ta luôn có $m < x_3 \le m+a$ (tức là x_3 luôn lớn hơn điểm *TBC*). Tuy nhiên, nếu x_2 không lớn hơn điểm *TBC* tức là $m-a \le x_2 \le m$ thì ta có $\begin{cases} 0 \le x_1 < m-a \\ m-a \le x_2 \le m \\ m < x_3 \le m+a \end{cases}$ suy ra:

https://tieulun.hopto.org

$x_1 + x_2 + x_3 < 3m = x_1 + x_2 + x_3$ là vô lý.

Do vậy, x_2 cũng phải thỏa mãn $m < x_2 \le m + a$.

Tóm lại, nếu như giám khảo 1 bị loại, giám khảo 2 và giám khảo 3 không bị loại thì điểm của giám khảo 1 luôn nhỏ hơn $m - a$, còn giám khảo 2 và giám khảo 3 đều có điểm lớn hơn m. Hơn nữa, khi tính điểm *TBC* đối với 2 giám khảo còn lại là giám khảo 2 và giám khảo 3 thì sẽ không có giám khảo nào bị loại nữa.

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 85 điểm, giám khảo 3 cho 88 điểm, do đó điểm *TBC* = 81. Trong trường hợp này, điểm của giám khảo 1 ít hơn điểm *TBC* là 11 điểm nên bị loại. Điểm cuối cùng của thí sinh sẽ là điểm *TBC* của giám khảo 2 và giám khảo 3, tức là $\frac{85+88}{2} = 86,5$ điểm.

• Giả sử giám khảo 3 bị loại, giám khảo 1 và giám khảo 2 không bị loại thì lý luận tương tự như trên ta cũng có kết luận sau: Điểm của giám khảo 3 sẽ lớn hơn $m + a$ còn giám khảo 1 và giám khảo 2 đều có điểm nhỏ hơn m. Khi tính điểm *TBC* đối với 2 giám khảo còn lại là giám khảo 1 và giám khảo 2 thì sẽ không có giám khảo nào bị loại nữa.

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 79 điểm, giám khảo 3 cho 91 điểm, do đó điểm *TBC*= 80. Trong trường hợp này, điểm của giám khảo 3 vượt quá điểm *TBC* là 11 điểm nên bị loại. Điểm cuối cùng của thí sinh sẽ là điểm *TBC* của giám khảo 1 và giám khảo 2, tức là $\frac{70+79}{2} = 74,5$ điểm.

• Do điều kiện $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 100$ nên không bao giờ xảy ra trường hợp chỉ có giám khảo 2 bị loại.

c) Tình huống 3: *Có đúng 2 giám khảo bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

• Giả sử giám khảo 1 và giám khảo 2 bị loại, khi đó ta có:

hoặc là $\begin{cases} x_1 < m - a \\ x_2 < m - a \end{cases}$ hoặc là $\begin{cases} x_1 < m - a \\ x_2 > m + a \end{cases}$.

Nếu $\begin{cases} x_1 < m - a \\ x_2 < m - a \end{cases}$ thì $x_1 + x_2 + x_3 < 2m - 2a + x_3$ suy ra $x_3 > m + 2a > m + a$. Do đó, giám khảo 3 cũng bị loại.

Nếu $\begin{cases} x_1 < m - a \\ x_2 > m + a \end{cases}$ thì do $x_3 \ge x_2 > m + a$ nên giám khảo 3 cũng bị loại.

• Giả sử giám khảo 2 và giám khảo 3 bị loại, khi đó ta có:

hoặc là $\begin{cases} x_2 > m + a \\ x_3 > m + a \end{cases}$ hoặc là $\begin{cases} x_2 < m - a \\ x_3 > m + a \end{cases}$.

Nếu $\begin{cases} x_2 > m + a \\ x_3 > m + a \end{cases}$ thì $x_1 + x_2 + x_3 > 2m + 2a + x_1$ suy ra $x_1 < m - 2a < m - a$. Do đó, giám khảo 1 cũng bị loại.

Nếu $\begin{cases} x_2 < m - a \\ x_3 > m + a \end{cases}$ thì do $x_1 \le x_2 < m - a$ nên giám khảo 1 cũng bị loại.

Tóm lại, trong tình huống 3 này, để có đúng 2 giám khảo bị loại sau lần tính điểm *TBC* đầu tiên thì chỉ có một trường hợp duy nhất là giám khảo 1 và giám khảo 3 bị loại.

https://tieulun.hopto.org

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 80 điểm, giám khảo 3 cho 93 điểm, khi đó điểm *TBC=81*. Trong trường hợp này, điểm của cả hai giám khảo 1 và 3 đều lệch so với điểm *TBC* quá ± 10 nên bị loại. Điểm cuối cùng của thí sinh sẽ là điểm của giám khảo 2 (80 điểm).

d) Tình huống 4: *Cả 3 giám khảo đều bị loại sau lần tính điểm TBC đầu tiên.*

Thí dụ: Giám khảo 1 cho 70 điểm, giám khảo 2 cho 71 điểm, giám khảo 3 cho 36 điểm, khi đó điểm *TBC*= 59. Trong trường hợp này, điểm của cả 3 giám khảo lệch với điểm *TBC* quá ± 10 nên đều bị loại. Do đó, không có kết quả cuối cùng cho thí sinh.

3. Điều kiện của *a* để thí sinh luôn có kết quả cuối cùng

Trong một cuộc thi, nếu chúng ta cứ lấy điểm *TBC* của tất cả các giám khảo làm kết quả điểm cho thí sinh mà không cần thêm điều kiện gì thì điểm của thí sinh luôn xác định. Tuy nhiên, nếu phải đưa thêm điều kiện để loại các giám khảo có điểm lớn hơn hoặc nhỏ hơn điểm *TBC* là *a* điểm thì như đã phân tích ở trên, có thể xảy ra tình huống là không xác định được điểm cuối cùng cho thí sinh. Do đó, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra ở đây là: *a* phải thỏa mãn điều kiện nào để kết quả điểm cuối cùng của thí sinh luôn tồn tại?

• *Đối với trường hợp Ban giám khảo có 2 thành viên.*

+ Nếu chọn $a \geq 50$ thì do $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 100$ nên ta luôn có $x_2 - x_1 \leq 100 \leq 2a$ hay $\begin{cases} x_1 \geq \dfrac{x_1 + x_2}{2} - a \\ x_2 \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2} + a \end{cases}$. Các điều kiện này chứng tỏ không có ai trong Ban giám khảo bị loại cho dù họ có cho điểm bao nhiêu đi chăng nữa trong phạm vi từ 0 đến 100. Điểm cuối cùng của thí sinh luôn là $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Thí dụ, trong trường hợp xấu nhất là một giám khảo cho 100 điểm và giám khảo còn lại cho 0 điểm thì thí sinh vẫn có kết quả cuối cùng là 50 điểm.

+ Nếu chọn $a < 50$ thì nguy cơ không xác định được điểm của thí sinh vẫn xảy ra nếu 2 giám khảo cho điểm như thí dụ vừa nêu.

Tóm lại, trong trường hợp Ban giám khảo có 2 thành viên và điểm được cho theo thang điểm 100 thì để kết quả điểm cuối cùng của thí sinh luôn tồn tại, Ban tổ chức chỉ cần chọn điểm lệch $a \geq 50$. Tuy nhiên, trong trường hợp chọn như vậy thì không có ý nghĩa gì (tức là cũng giống như việc không đưa ra điều kiện).

• *Đối với trường hợp Ban giám khảo có 3 thành viên.*

+ Nếu chọn $a \geq \dfrac{100}{3}$ thì không bao giờ cả 3 giám khảo đều bị loại sau lần tính điểm *TBC* đầu tiên. Thật vậy, giả sử cả 3 giám khảo đều bị loại thì xảy ra 2 trường hợp, hoặc là $\begin{cases} 0 \leq x_1 < m - a \\ 0 \leq x_2 < m - a \\ m + a < x_3 \leq 100 \end{cases}$ hoặc là $\begin{cases} 0 \leq x_1 < m - a \\ m + a < x_2 \leq 100 \\ m + a < x_3 \leq 100 \end{cases}$.

Nếu $\begin{cases} 0 \leq x_1 < m - a \\ 0 \leq x_2 < m - a \\ m + a < x_3 \leq 100 \end{cases}$ thì $x_1 + x_2 < 2m - 2a$ hay $x_1 + x_2 + x_3 < 2m - 2a + x_3$ suy ra $x_3 > m + 2a > 3a \geq 100$ (vô lý).

Nếu $\begin{cases} 0 \leq x_1 < m - a \\ m + a < x_2 \leq 100 \\ m + a < x_3 \leq 100 \end{cases}$ thì $x_2 + x_3 > 2m + 2a$

https://tieulun.hopto.org

$\Rightarrow\ x_1+x_2+x_3>2m+2a+x_1 \ \Rightarrow\ m>2a+x_1$

$\Rightarrow\ m+a>3a+x_1$. Mà $m+a<x_3\le 100$ nên $3a+x_1<m+a<100 \Rightarrow x_1<100-3a\le 0$ (vô lý).

Tóm lại, nếu chọn $a\ge\frac{100}{3}$ thì không bao giờ xảy ra tình huống cả 3 thành viên đều bị loại. Tất nhiên, có thể có đúng 2 giám khảo bị loại (thí dụ: $x_1=25$, $x_2=60$ và $x_3=95$ với $a=34$), hoặc có đúng một giám khảo bị loại (thí dụ: $x_1=40$, $x_2=90$ và $x_3=95$ với $a=34$) hoặc không có giám khảo nào bị loại (thí dụ: $x_1=33$, $x_2=66$ và $x_3=99$ với $a=34$). Như đã phân tích trong các tình huống của Trường hợp 2 thì khi chọn $a\ge\frac{100}{3}$, thí sinh luôn có kết quả cuối cùng của họ.

+ Nếu chọn $a<\frac{100}{3}$ thì nguy cơ cả 3 giám khảo bị loại vẫn có thể xảy ra.

Thí dụ: Cho $x_1=x_2=0$ và $x_3=100$. Khi đó, điểm $TBC=m=\frac{100}{3}$ và ta luôn có:

$$\begin{cases} x_1=x_2=0<\frac{100}{3}-a<m-a \\ x_3=100>\frac{100}{3}+a>m+a \end{cases}.$$

Do đó, cả 3 giám khảo đều bị loại và hiển nhiên không có kết quả cuối cùng cho thí sinh.

Tóm lại, trong trường hợp Ban giám khảo có 3 thành viên và điểm được cho theo thang điểm 100 thì để kết quả điểm cuối cùng của thí sinh luôn tồn tại, Ban tổ chức chỉ cần chọn điểm lệch $a\ge\frac{100}{3}$. Trong trường hợp này, việc chọn như vậy là có ý nghĩa vì chúng ta có thể loại ra những giám khảo cho điểm quá cao hoặc quá thấp mà thí sinh thì vẫn luôn có kết quả cuối cùng.

Kết luận. Trên đây là sự phân tích về một số tình huống cho điểm của các giám khảo trong những cuộc thi mà thành viên của Ban giám khảo là 2 hoặc 3. Độc giả có thể nghiên cứu thêm các tình huống đối với những cuộc thi mà Ban giám khảo có từ 4 thành viên trở lên. Mặt khác, chúng ta cũng có thể đưa ra các bài toán thực tế cụ thể mà để giải được nó, người học cần vận dụng linh hoạt các phương pháp giải hệ phương trình và bất phương trình. Sau đây là một thí dụ minh họa.

Bài toán: Trong một cuộc thi hùng biện của học sinh tại một trường học, Ban giám khảo gồm có 5 thành viên. Ban tổ chức đã đưa ra một điều kiện như sau: Điểm của từng giám khảo được cho từ 0 điểm đến 100 điểm. Nếu sau khi tính điểm *TBC* của các giám khảo, điểm của một giám khảo nào đó lớn hơn hoặc nhỏ hơn điểm *TBC* 10 điểm thì điểm của giám khảo đó sẽ bị loại và điểm *TBC* của thí sinh chỉ được tính đối với những giám khảo còn lại. Sau khi nhận kết quả từ các giám khảo và tiến hành tính toán, Ban thư ký nhận thấy: Trong lần tính thứ nhất, có đúng 1 giám khảo lớn hơn điểm *TBC* của cả 5 giám khảo là 12 điểm nên điểm của vị giám khảo này đã bị loại ra. Trong lần tính thứ hai, lại có đúng 1 giám khảo lớn hơn điểm *TBC* của cả 4 giám khảo là 12 điểm nên điểm của vị giám khảo này tiếp tục bị loại ra. Cuối cùng, điểm của 3 giám khảo còn lại đều bằng nhau.

a) Bạn hãy cho biết điểm cụ thể của từng giám khảo trong cuộc thi này.

b) Cũng hỏi như câu a) nhưng có thêm tình huống: Trong lần tính thứ ba, lại có đúng 1 giám khảo lớn hơn điểm *TBC* của cả 3 giám khảo là 12 điểm nên điểm của vị giám khảo này tiếp tục bị loại ra. Cuối cùng, điểm của 2 giám khảo còn lại đều bằng nhau.

https://tieulun.hopto.org

CÁC LỚP THCS

Bài T1/533 (Lớp 6). Cho

$$A=\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+...+\frac{1}{8082}+\frac{1}{8083}$$

trong đó mẫu số của các phân số lấy các giá trị nguyên liên tiếp từ 2021 đến 8083. Hãy so sánh A với $\frac{11}{6}$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T2/533 (Lớp 7). Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn: $p + 4q$ và $q + 4p$ đều là các số chính phương.

TẠ KHÁNH HÀ
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T3/533. Tìm tất cả các số $(x; y; p)$ thỏa mãn phương trình $x^5+x^4+1=p^y$, trong đó x, y là hai số nguyên dương và p là số nguyên tố.

PHÚC NGUYỄN
(congphuc13toan@gmail.com)

Bài T4/533. Cho AB là dây cung cố định của đường tròn $(O; R)$ (AB khác $2R$). M là điểm di động trên cung lớn AB ($MA < MB$), N là hình chiếu vuông góc của O trên tia phân giác của góc AMB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MB tại K, cắt AB tại D. Chứng minh rằng đường thẳng qua K và song song với MN đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/533. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{d+3}=1$. Chứng minh

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}\le 6.$$

TRẦN CÔNG DIÊU
(TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/533. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=y+2\sqrt{2}\\ 9y^2(x+3y)=1-x^3y^3\end{cases}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/533. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2}.\max\{a,b,c\}\ge\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}.\min\{a,b,c\}.$$

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T8/533. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Biết AI cắt BC tại S và cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BSM, CSM cắt MF, ME tương ứng tại K và L.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, L, S, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi T là giao điểm thứ hai của MD với (O). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O).

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Bắc Giang)

Bài T9/533. Tìm các số thực a và b thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $a<b\le 2000.2001$;

b) $(x+y+z-2000.2001)^2\le\frac{xyz}{500.2001}$ với mọi $x,y,z\in[a,b]$;

c) $b-a$ đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/533. Cho a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a + 10b$, $b + 10c$, $c + 10a$ là lũy thừa của 2

https://tieulun.hopto.org

hoặc là lũy thừa của 5. Chứng minh rằng abc chia hết cho 10 nhưng abc không chia hết cho 100.

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/533. Cho a, b, c là các số thực dương không nguyên. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}_{n\geq 1}^{+\infty}$ như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c \\ x_{3n+1} = |x_{3n} - x_{3n-2}| \\ x_{3n+2} = |x_{3n-2} - x_{3n-1}| \\ x_{3n+3} = |x_{3n-1} - x_{3n}| \end{cases}.$$

Chứng minh rằng tồn tại a, b, c $(a,b,c \in \mathbb{R}^+;$ $a,b,c \notin \mathbb{Z})$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn: 1) $x_n < 1, \forall n \geq 1$;

2) $\dfrac{x_{n+3}}{x_n} < 1, \forall n \geq 1$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ tồn tại.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Khoa Toán- Tin, K41, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/533. Cho tam giác không cân ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với cạnh BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A_0, B_0, C_0 trên B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0; A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AA_1, BB_1, CC_1 và (O). Chứng minh rằng các đường tròn $(A_0A_1A_2)$, $(B_0B_1B_2)$, $(C_0C_1C_2)$ có chung trục đẳng phương.

DƯƠNG THỊ XUÂN AN
(GV THPT chuyên Bến Tre)

Bài L1/533. Sóng dừng trên một sợi dây có dạng $u = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)\cos(20\pi t + \varphi - \dfrac{\pi}{2})(cm)$. Với x đo bằng (cm), t đo bằng (s).

a) Tính vận tốc truyền sóng dọc theo sợi dây.

b) Xác định những vị trí trên dây có biên độ dao động bằng 1 cm.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/533. Đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R mắc nối tiếp với cuộn dây có điện trở r hoạt động. Điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở, cuộn dây và hai đầu đoạn mạch lần lượt là 35V, 85V và $75\sqrt{2}$ V. Cuộn dây tiêu thụ công suất 40W. Xác định tổng điện trở thuần của toàn mạch.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/533 (For 6th grade). Given

$$A = \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + ... + \frac{1}{8082} + \frac{1}{8083}$$

where the denominators are consecutive integers from 2021 to 8083. Compare A and $\dfrac{11}{6}$.

Problem T2/533 (For 7th grade). Find all prime numbers p, q so that $p + 4q$ and $q + 4p$ are both perfect squares.

Problem T3/533. Find all triples $(x; y; p)$ satisfying $x^5 + x^4 + 1 = p^y$, where x, y are positive integers and p is a prime number.

Problem T4/533. Suppose that AB is a fixed chord which is not a diameter of a circle $(O; R)$. Let M be a point moving on the major arc AB ($MA < MB$), and N be the perpendicular projection of O on the angle bisector of the angle AMB. The circumcircle of AMN intersects MB at K, intersects AB at D. Show that the perpendicular through K and parallel to MN always passes through a fixed point.

Problem T5/533. Given positive numbers a, b, c, d satisfying $\dfrac{1}{a+3} + \dfrac{1}{b+3} + \dfrac{1}{c+3} + \dfrac{1}{d+3} = 1$. Show that

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq 6.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/533. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = y + 2\sqrt{2} \\ 9y^2(x+3y) = 1 - x^3y^3 \end{cases}.$$

Problem T7/533. Given positive numbers a, b, c satisfying $abc = 1$. Show that ☞

https://tieulun.hopto.org

$$\frac{3}{2}.\max\{a,b,c\} \ge \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2} \ge \frac{3}{2}.\min\{a,b,c\}.$$

Problem T8/533. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). The incircle (I) of ABC are tangent to BC, CA, AB at D, E, F respectively. Suppose that AI intersects BC at S and intersects (O) at the second point M. The circumcircles of the triangles BSM, CSM intersect MF, ME at K and L respectively.

a) Show that four points I, L, S, K both lie on a circle.

b) Let T be the second intersection between MD and (O). Prove that the circumcircle of the triangle TKL is tangent to (O).

Problem T9/533. Find real numbers a and b satisfying the following conditions

a) $a < b \le 2000.2001$;

b) $(x+y+z-2000.2001)^2 \le \dfrac{xyz}{500.2001}$ for all $x,y,z \in [a,b]$;

c) $b-a$ obtains the maximum value.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/533. Suppose that a, b, c are positive numbers so that $a+10b$, $b+10c$, $c+10a$ are either a power of 2 or a power of 5. Show that abc is divisible by 10 but not divisible by 100.

Problem T11/533. Given positive numbers which are not integral a, b, c. We define the sequence $\{x_n\}_{n\ge1}^{+\infty}$ as follows: $\begin{cases} x_1=a, x_2=b, x_3=c \\ x_{3n+1}=|x_{3n}-x_{3n-2}| \\ x_{3n+2}=|x_{3n-2}-x_{3n-1}| \\ x_{3n+3}=|x_{3n-1}-x_{3n}| \end{cases}$.

Show that we can choose some a, b, c ($a,b,c \in \mathbb{R}^+$; $a,b,c \notin \mathbb{Z}$) so that the following conditions hold

1) $x_n < 1, \forall n \ge 1$;

2) $\dfrac{x_{n+3}}{x_n} < 1, \forall n \ge 1$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_1+x_2+...+x_n)$ exists.

Problem T12/533. Given a scalene triangle ABC. Suppose that (O), (I) respectively are the circumcircle and the incircle of. Let A_0, B_0, C_0 respectively be the touch point between (I) and BC, CA, AB. Let A_1, B_1, C_1 respectively be the perpendicular projections of A_0, B_0, C_0 on B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0; and A_2, B_2, C_2 respectively the second intersections between AA_1, BB_1, CC_1 and (O). Show that the circles $(A_0A_1A_2)$, $(B_0B_1B_2)$, $(C_0C_1C_2)$ have the same radical axis.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

CHINH PHỤC ... (*Tiếp theo trang 5*)

Bài 9. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$) . Vẽ 3 đường cao AF, BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H, gọi I là trung điểm của DE, IH cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác BHC tại M.

1) Chứng minh BD là tia phân giác của góc EDF.

2) Chứng minh tứ giác $AIFM$ nội tiếp.

3) AF cắt MC tại Q. Đường tròn tâm G nội tiếp tam giác MHC tiếp xúc với HC và MC lần lượt tại J và L. Đường thẳng qua C song song với MH cắt JL tại S. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC. Chứng minh: $OK \parallel SG$.

4) Chứng minh:

$$2\sin A.\sin B.\cos A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$$

(A, B, C là các góc của tam giác ABC).

Bài 10. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ 2 đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AI của (O).

1) Chứng minh $AEHD$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $AH.AC = AE.AI$.

3) DE cắt (O) tại S (S thuộc cung nhỏ AC), SI cắt BC tại K. Chứng minh AK vuông góc với HS.

4) HS cắt BC tại L. Chứng minh AK và HS cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác LBD.

https://tieulun.hopto.org

Bài T1/529. *Cho*

$$A=\frac{1.2022+2.2021+3.2020+...+2022.1}{2^2+6^3+12^4+...+(k.(k+1))^{k+1}+...+4090506^{2023}}.$$

Hãy so sánh A với $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Đặt tử số của phân số đã cho là B và mẫu số của nó là C. Ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$A=\frac{B}{C}<\frac{1}{2},\ \text{tức là}\ 2B<C.$$

Cách 1. Tổng $B = 1.2022 + 2.2021 +...$

$+ 1011.1012 + 1012.1011 +...+ 2022.1$

có tất cả 2022 số hạng, mỗi số hạng là tích hai số nguyên $x.y = y.x$ với $1 \le x \le 1011$ và $1012 \le y \le 2022$, và có số hạng nhỏ hơn 1011.2022, nên $B < 2022(1011.2022) = 1011.2022^2$, hay là $2B < 2022.\ 2022^2 = 2022^3$ (*). Dễ thấy mẫu số $C > 4090506^{2023} = (2022.\ 2023)^{2023}$

$= 2022^{2023}.\ 2023^{2023}$ (**).

Từ (*) và (**) có $2B < C$. Chính xác hơn có:

$$A=\frac{B}{C}<\frac{2022^3}{2.2022^{2023}.2023^{2023}}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2022^{2020}.2023^{2023}}<\frac{1}{2}.$$

Cách 2. Xét trường hợp tất cả các số mũ ở mỗi số hạng của mẫu số đều bằng 1 thì

$C > D = 1.2 + 2.3 + 3.4 +...$

$+ k(k + 1) +...+ 2022.2023.$

Coi mỗi số hạng $x.y$ trong tổng B là tổng của x số đều bằng y, chẳng hạn

$1.2022 + 2.2021 + 3.2020$

$= 2022 + 2021 + 2021 + 2020 + 2020 + 2020$

thì $B = 1.2022 + 2.2021 +...+ 1011.1012$

$+ 1012.1011 +...+ 2022.1$

$= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) +...$

$+ (1 + 2 + 3 +...+ 2021 + 2022)$

và sử dụng công thức tính tổng các số tự nhiên từ 1 đến n là $1 + 2 + 3 +...+ n = \frac{n(n+1)}{2}$, ta có:

$2B = 1.2 + 2.3 + 3.4 +...+ k(k + 1) +...$

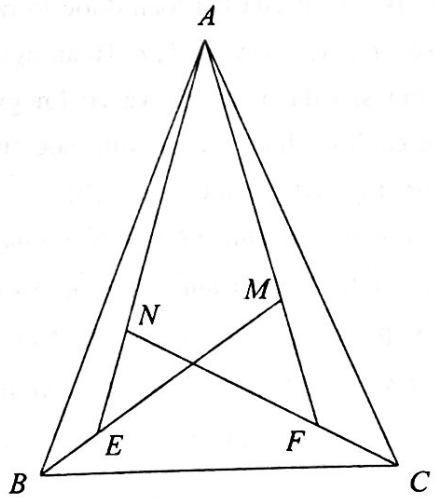
$+ 2022.2023 = D < C$ (đpcm).

Nhận xét. Một số bạn viết nhầm dấu lớn hơn, nhỏ hơn; một số bạn tính nhầm số các số hạng của tổng. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Nguyễn Gia Hiển*, 6A, THCS chuyên Hà Nội- Amsterdam; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Đinh A Na*, *Nguyễn Thái Triệu*, *Nguyễn Trọng Bảo*, 6A, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/529. *Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy hai điểm phân biệt M, N bên trong tam giác sao cho AM = CN, BM = AN. Đường thẳng BM cắt AN tại E, CN cắt AM tại F. Chứng minh AE = AF.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Ngọc Diệp* và bạn *Nguyễn Thái Hoàng Anh*).



Các bạn nhận xét là đầu bài ra sai. Trong trường hợp tổng quát, có thể thấy nói chung rằng $AE \ne AF$. Khẳng định bài toán đúng khi cho $AM = CN = BM = AN$ do tính đối xứng qua trục đối xứng (qua A) của tam giác.

https://tieulun.hopto.org

Nhận xét : Chỉ hai bạn sau gửi lời giải và có lời giải đúng: **Nghệ An**: *Nguyễn Thái Hoàng Anh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Điện Biên**: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS xã Pom Lót, huyện Điện Biên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/529. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$. Chứng minh rằng:*

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+25 \geq 7x+8y+9z.$$

Lời giải. Đặt $x = 1 + a$; $y = 2 + b$; $z = 3 + c$, trong đó a, b, c là các số thực không âm (do $x \geq 1$, $y \geq 2$, $z \geq 3$). Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+25-7x-8y-9z \\ &= (1+a)^2+(2+b)^2+(3+c)^2+(1+a)(2+b) \\ &\quad +(2+b)(3+c)+(3+c)(1+a) \\ &\quad +25-7(1+a)-8(2+b)-9(3+c) \\ &= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+25 \geq 7x+8y+9z.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=0 \Leftrightarrow x=1, y=2, z=3.$$

Khẳng định của bài toán đã được chứng minh.

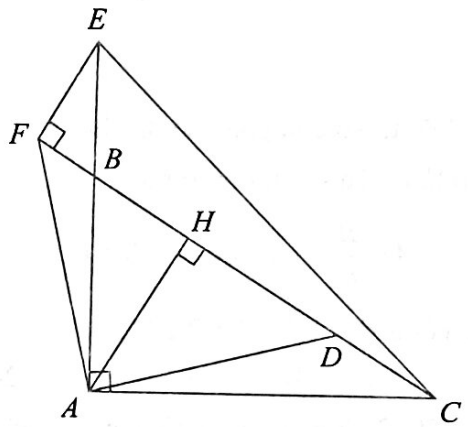
Nhận xét. Bản chất của bài toán được lộ ra khi ta đổi tham số từ x, y, z sang a, b, c. Hoan nghênh các bạn học sinh sau đã tham gia và có lời giải đúng trong hoàn cảnh ở nhiều địa phương học sinh đang phải học trực tuyến do dịch Covid – 19:

Phú Thọ: *Nguyễn Sơn Hải*, 8A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Điện Biên**: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lot, Điện Biên; **Hà Nội**: *Nguyễn Gia Hiển*, 6A, *Vũ Minh Hoàng*, 8C1, *Nguyễn Duy Hiếu*, 8C2,THCS Archimedes, *Đào Quang Anh*, 9E1, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo, TP. Hưng Yên, *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Hoàng Long*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tấn Phúc*, 8/1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/529. *Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Trên tia AB lấy điểm E sao cho AE = AC. Chứng minh khoảng cách từ E đến BC thì bằng DC.*

Lời giải.



Hạ $EF \perp BC$ tại F. Ta cần chứng minh $EF = CD$. Theo giả thiết $HD = HA$ và $AE = AC$ nên các tam giác HAD, AEC vuông cân, do đó: $\widehat{AEC} = \widehat{ADH} = 45°$.

Cách 1. Ta có $\widehat{CAE} = \widehat{CFE} = 90°$ nên tứ giác $ACEF$ nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{AFC} = \widehat{AEC} = 45° \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AFH} = 45°.$$

Vậy tam giác ADF vuông cân tại A, suy ra:

$$AF = AD \text{ và } \widehat{FAE} = \widehat{DAC} = 90° - \widehat{BAD}.$$

Từ đó suy ra $\Delta FAE = \Delta DAC$ (c.g.c).

Do đó $EF = CD$.

Cách 2. Giả sử $AB < AC$. Trường hợp $AB > AC$ làm tương tự.

Dễ thấy $\Delta FEB \backsim \Delta HAB$, ta có: $\dfrac{EF}{AH} = \dfrac{EB}{AB}$ (1);

$\Delta HCA \backsim \Delta HAB$, ta có: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{HC}{HA}$

Suy ra : $\dfrac{AB+EB}{AB} = \dfrac{HD+CD}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{CD}{AH}$ (2).

https://tieulun.hopto.org

Từ (1), (2) suy ra $\frac{EF}{AH}=\frac{CD}{AH}$ hay $EF = CD$.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Thanh Hóa: *Nguyễn Hoàng Long*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt, Thái Minh Quân*, 7B, *Nguyễn Cảnh Nam Khánh*, 8D, *Võ Ánh Dương*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS xã Pom Lót, Điện Biên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Sơn Hải*, 8A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tấn Phúc*, 8/1, THCS Nguyễn Trãi.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/529. *Giải phương trình*

$$8x^4+32x^3+32x^2-x-3=0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$$4x^2\left(2x^2+3x-1\right)+10x\left(2x^2+3x-1\right)+3\left(2x^2+3x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+3x-1\right)\left(4x^2+10x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+3x-1=0\\4x^2+10x+3=0\end{array}\right..$$

Ta có: $2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$;

$$4x^2+10x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{4}.$$

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là

$$\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{4};\ \frac{-5-\sqrt{13}}{4};\frac{-5+\sqrt{13}}{4}\right\}.$$

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là biến đổi phương trình về dạng tích

$$\left(2x^2+3x-1\right)\left(4x^2+10x+3\right)=0.$$

Cách này ngắn gọn. Một số bạn sử dụng phương pháp đặt ẩn số phụ, đưa về hệ phương trình. Làm như vậy dài và phức tạp.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Nghệ An: *Nguyễn Văn Việt, Thái Minh Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Sơn Hải*, 8A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội:** *Vũ Minh Hoàng*, 8C11, THCS&THPT Archimedes Đông Anh ; *Đào Quang Anh*, 9E1, TH, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS xã Pom lót, H. Điện Biên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hoàng Long*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/529. *Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng*

$$3(a^3+b^3+c^3)+4abc\ge\frac{13}{27}(a+b+c)^3.$$

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$3(a^3+b^3+c^3)+4abc\ge\frac{13}{27}(a+b+c)^3\ (1)$$

$$\Leftrightarrow 81(a^3+b^3+c^3)+108abc\ge 13(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 81(a^3+b^3+c^3)+108abc\ge 13(a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc)$$

$$\Leftrightarrow 68(a^3+b^3+c^3)+30abc\ge 39(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)$$

$$\Leftrightarrow (34a+34b-5c)(a-b)^2+(34b+34c-5a)(b-c)^2+(34c+34a-5b)(c-a)^2\ge 0\ (2).$$

Vì *a, b, c* là ba cạnh của tam giác nên *a, b, c* là các số dương và $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ nên

$$34a+34b-5c>5a+5b-5c=5(a+b-c)>0$$
$$34b+34c-5a>5b+5c-5a=5(b+c-a)>0$$
$$34c+34a-5b>5c+5a-5b=5(c+a-b)>0.$$

Do đó, bất đẳng thức (2) luôn đúng. Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, tức là tam giác *ABC* là tam giác đều.

Cách 2. Vì *a, b, c* là ba cạnh của tam giác nên *a, b, c* là các số dương và $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

https://tieulun.hopto.org

$$(b+c-a)(c+a-b) \le \left(\frac{b+c-a+c+a-b}{2}\right)^2 = c^2 \ (1).$$

Tương tự ta có:

$$(c+a-b)(a+b-c) \le a^2 (2);$$

$$(a+b-c)(b+c-a) \le b^2 \ (3).$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) có hai vế đều dương, suy ra:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$$

$$\Leftrightarrow -a^3 - b^3 - c^3 + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 2abc \le abc$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \ge (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3+c^3) + 15abc \ge a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3+c^3) + 15abc \ge (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3+c^3) + \frac{45}{4}abc \ge \frac{3}{4}(a+b+c)^3 \quad (4).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge 27abc.$$

Suy ra:

$$\frac{3}{4}(a+b+c)^3 = \frac{13}{27}(a+b+c)^3 + \frac{29}{108}(a+b+c)^3 \ge \frac{13}{27}(a+b+c)^3 + \frac{29}{4}abc \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$3(a^3+b^3+c^3) + \frac{45}{4}abc \ge \frac{13}{27}(a+b+c)^3 + \frac{29}{4}abc$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3+c^3) + 4abc \ge \frac{13}{27}(a+b+c)^3 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia gửi bài, ngoài hai cách làm trên nhiều bạn đã sử dụng BĐT Schur cho ba cạnh a, b, c của tam giác: $a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ để giải nhưng cần phải chứng minh trước khi dùng.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 9E1, THCS Everest, Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên- Huế**: *Trần Thị Thanh Như*, *Nguyễn Văn Huy* 11T1, *Đỗ Nguyễn Tâm Như*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/529. *Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho*

$$(x+1)(x^4+1) \vdots y \text{ và } (y+1)(y^4+1) \vdots x \quad (*).$$

Lời giải. Cách 1. Nhận thấy rằng nếu cặp $(x; y)$ thỏa mãn (*) thì $(x; y) = 1$. Thật vậy, đặt $(x; y) = d$ thì ta có: $d \mid x^5 + x^4 + x$ và $d \mid y$, mà $y \mid x^5 + x^4 + x + 1$ nên $d \mid 1$. Vậy $d = 1$.

Dễ thấy cặp $(x_1; y_1) = (3; 2)$ thỏa mãn (*). Ta xây dựng cặp $(x_{n+1}; y_{n+1})$ thỏa mãn:

$$x_{n+1} + y_{n+1} > x_n + y_n.$$

Xét cặp $(x; y) = (x_n; y_n)$ thỏa mãn (*) thì $(y_n; x_n)$ cũng thỏa mãn (*). Giả sử $x_n > y_n$.

Ta chứng minh cặp $(x_{n+1}; y_{n+1})$, trong đó $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{(x_n+1)(x_n^4+1)}{y_n} > y_n$ cũng thỏa mãn (*). Thật vậy, ta có:

- $(x_{n+1}+1)(x_{n+1}^4+1) = (x_n+1)(x_n^4+1) \vdots \frac{(x_n+1)(x_n^4+1)}{y_n}$

$\Rightarrow (x_{n+1}+1)(x_{n+1}^4+1) \vdots y_{n+1}$.

- $(y_{n+1}+1)(y_{n+1}^4+1)$

$$= \frac{\left[(x_n+1)(x_n^4+1)+y_n\right]\left[(x_n+1)^4(x_n^4+1)^4+y_n^4\right]}{y_n^5}.$$

Ta có: $\left[(x_n+1)(x_n^4+1)+y_n\right]\left[(x_n+1)^4(x_n^4+1)^4+y_n^4\right]$

$$\equiv (y_n+1)(y_n^4+1) \equiv 0 \pmod{x_n}.$$

https://tieulun.hopto.org

Mà $(x_n ; y_n) = 1$ nên $(y_{n+1}+1)(y_{n+1}^4+1) \vdots x_{n+1}$. Do đó tồn tại vô hạn các cặp $(x; y)$ thỏa mãn (*).

Cách 2. Xét bài toán tổng quát:

Cho $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + 1$ $(n \geq 2)$ là đa thức với hệ số nguyên dương và $a_k = a_{n-k}$ với $k = 1, 2, ..., n-1$. Chứng minh rằng tồn tại vô số các cặp số $(x; y)$ sao cho

$$P(x) \vdots y \text{ và } P(y) \vdots x \quad (**).$$

Thật vậy: Dễ thấy cặp $(1; P(1))$ thỏa mãn (**). Xét cặp $(x; y)$ thỏa mãn (**) mà $x < y$ và $(x; y) = 1$.

Ta chứng minh nếu cặp $(x; y)$ thỏa mãn (**) thì cặp $\left(y; \frac{P(y)}{x}\right)$ cũng thỏa mãn (**). Vì $P(y)$ dương và $P(y) \vdots \frac{P(y)}{x}$ nên ta còn phải chứng minh $P\left(\frac{P(y)}{x}\right) \vdots y$. Ta có:

$$P\left(\frac{P(y)}{x}\right) = \left(\frac{P(y)}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{P(y)}{x}\right)^{n-1} + ... + a_1\frac{P(y)}{x} + 1$$

$$= \frac{1}{x^n}\left[(P(y)^n + a_{n-1}(P(y)^n x + ... + a_1P(y)x^{n-1} + x^n\right].$$

Do $a_k = a_{n-k}$ và $P(y) \equiv 1 \pmod y$ nên

$$x^n P\left(\frac{P(y)}{y}\right) \equiv P(x) \pmod y \equiv 0 \pmod y$$

$\Rightarrow P\left(\frac{P(y)}{y}\right) \equiv 0 \pmod y$ (vì $(x; y) = 1$). Vậy cặp $\left(y; \frac{P(y)}{x}\right)$ thỏa mãn (**). Mặt khác $\frac{P(y)}{x} > \frac{y^2}{x} > y$, suy ra tồn tại vô số cặp số $(x; y)$ thỏa mãn (**). Trở lại bài toán, chọn

$$P(x) = x^5 + x^4 + x + 1 = (x+1)(x^4+1)$$

ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Lời giải 1 là của bạn *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**. Lời giải 2 thuộc về bạn *Hoàng Đức Nguyên*, GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, tác giả của đề toán. Lời giải 1 ngắn gọn nhưng lời giải 2 cho ta nghiệm của bài toán tổng quát là lớp hàm đa thức thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ngoài bạn *Quân*, bạn *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** cũng cho lời giải đúng.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/529. *Cho tam giác đều ABC cạnh a, nội tiếp đường tròn (O). Một điểm M di động trên đường tròn (O). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{16}MA^8 + MB^8 + MC^8.$$

Lời giải. • *Với M thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa B* (*M* khác *A*, *C*). Gọi M_1 là điểm đối xứng của *M* qua *OC* thì M_1 thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa *A*.

Khi đó: $M_1B = MA$; $M_1A = MB$; $M_1C = MC$.

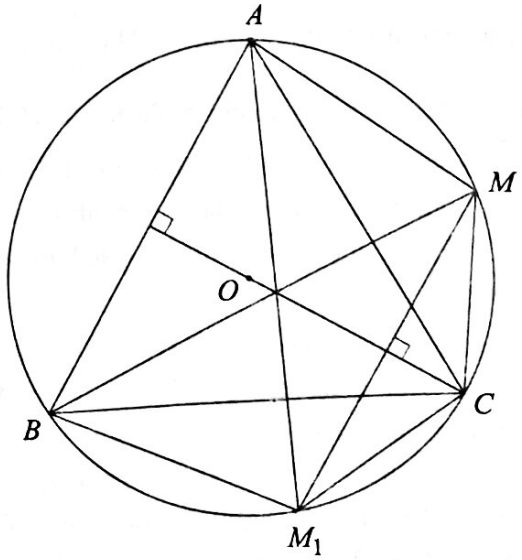
Ta thấy $M_1A > M_1B$, do đó

$$\left(\frac{1}{16}MA^8 + MB^8 + MC^8\right) - \left(\frac{1}{16}M_1A^8 + M_1B^8 + M_1C^8\right)$$

$$= \left(\frac{1}{16}M_1B^8 + M_1A^8 + M_1C^8\right) - \left(\frac{1}{16}M_1A^8 + M_1B^8 + M_1C^8\right)$$

$$= \frac{15}{16}\left(M_1A^8 - M_1B^8\right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16}MA^8 + MB^8 + MC^8 > \frac{1}{16}M_1A^8 + M_1B^8 + M_1C^8.$$



Từ đó *P* không đạt giá trị nhỏ nhất khi *M* thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa *B*. Lập luận tương tự ta

https://tieulun.hopto.org

thấy P cũng không đạt giá trị nhỏ nhất khi M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C.

• *Với M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A* (M khác B, C). Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ ta có $MA.BC = MB.CA + MC.AB$, suy ra:

$$MA = MB + MC.$$

Sử dụng định lý hàm số côsin cho tam giác MBC ta được: $MB^2 + MC^2 - 2MB.MC\cos\widehat{BMC} = BC^2$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 + MB.MC = a^2$$

$$\Rightarrow MA^4 + MB^4 + MC^4 = (MB+MC)^4 + MB^4 + MC^4$$

$$= 2(MB^2 + MB.MC + MC^2)^2 = 2a^4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$P = \frac{1}{16}MA^8 + MB^8 + MC^8 \geq \frac{(MA^4 + MB^4 + MC^4)^2}{16+1+1}$$

$$= \frac{2}{9}a^8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$MA = MB + MC \text{ và } \frac{MA}{2} = MB = MC.$$

Lúc này M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A.

• Với $M \equiv A$ thì $P = 2a^8$; $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$ thì $P = \frac{17}{16}a^8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{2}{9}a^8$.

Nhận xét. Một số bạn chưa chỉ ra được khi M thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa B, M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C thì biểu thức P không đạt giá trị nhỏ nhất. Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đào Quang Anh*, 9E1, TH, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Quận Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Nguyễn Gia Khánh*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 9E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/529. *Cho tam giác ABC có số đo các góc A, B, C lập thành cấp số nhân công bội q = 2; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; số đo độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c của tam giác là các hệ số của phương trình $x^3 + m_a x^2 + m_b x + m_c = 0$ (1). Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $x_0^2 < \frac{21R^2+4}{4}$.*

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} = \frac{7}{4}$.

Chứng minh. Ta có:

$$\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}}{2}.$$

Do $\sin\frac{9\pi}{7} = \sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = -\sin\frac{5\pi}{7}$ nên

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{9\pi}{7} - \sin\frac{7\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

https://tieulun.hopto.org

Suy ra: $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{7}{4}.$$

Gọi A là góc nhỏ nhất. Vì A,B,C lập thành cấp số nhân công bội $q=2$ nên $B=2A, C=2B=4A$.

Suy ra: $\pi=A+B+C=A+2A+4A=7A$

$$\Rightarrow A=\frac{\pi}{7}, B=\frac{2\pi}{7}, C=\frac{4\pi}{7}.$$

Theo công thức đường trung tuyến:

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};$$

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên ta được:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=3R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$$

$$=3R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{21}{4}R^2.$$

Vì x_0 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$x_0^3+m_a x_0^2+m_b x_0+m_c=0$$

hay $$x_0^3=-\left(m_a x_0^2+m_b x_0+m_c\right).$$

Suy ra: $$x_0^6=\left(m_a x_0^2+m_b x_0+m_c\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được:

$$x_0^6=\left(m_a x_0^2+m_b x_0+m_c\right)^2$$

$$\le\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\left(x_0^4+x_0^2+1\right).$$

Suy ra: $$\frac{21R^2}{4}=m_a^2+m_b^2+m_c^2\ge\frac{x_0^6}{x_0^4+x_0^2+1}$$

$$=x_0^2-1+\frac{1}{x_0^4+x_0^2+1}>x_0^2-1$$

hay $$x_0^2<\frac{21R^2}{4}+1=\frac{21R^2+4}{4}.$$

Nhận xét. Chỉ có 4 bạn nộp bài và cơ bản làm đúng: **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng* 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 9E1, THCS Everest, Bắc Từ Liêm. **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/529. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $x^2+y^2=19^{5^{1980^k}+2021}(6-z)$.

Lời giải (của bạn *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân, **Phú Yên**).

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề: *Cho hai số nguyên dương x, y và p là số nguyên tố p = 4k+3. Khi đó nếu* $p\mid x^2+y^2$ *thì* $p\mid x$ *và* $p\mid y$.

Chứng minh: Phản chứng. Giả sử trái lại. Khi đó cả x và y không chia hết cho p. Theo định lý Fermat nhỏ ta có theo modulo p

$$x^{p-1}\equiv y^{p-1}\equiv 1\Rightarrow x^{4k+2}\equiv y^{4k+2}\equiv 1$$

$$\Rightarrow\left(x^2\right)^{2k+1}+\left(y^2\right)^{2k+1}\equiv 2$$

$$\Rightarrow p\mid x^2+y^2\mid\left(x^2\right)^{2k+1}+\left(y^2\right)^{2k+1}\equiv 2$$

$\Rightarrow p=2$, mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh

Trở lại bài toán. Ta có $19\mid x^2+y^2$, vì 19 là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên theo bổ đề: $19\mid x, 19\mid y$.

Đặt $x=19x_1, y=19y_1, n=\frac{5^{1980^k}+2021}{2}$

$\Rightarrow x_1^2+y_1^2=19^{2n-2}(6-z)$. Tiếp tục như vậy sau n bước dẫn đến $x_n^2+y_n^2=6-z$ với $x=19^n x_n$, $y=19^n y_n$. Bằng cách thử trực tiếp ta được:

$$x_n=1, y_n=1, z=4;$$
$$x_n=2, y_n=1, z=1,$$
$$x_n=1, y_n=2, z=1.$$

Từ đó phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên dương (x, y, z) là:

https://tieulun.hopto.org

$(19^n, 19^n, 4)$; $(2.19^n, 19^n, 1)$, $(19^n, 2.19^n, 1)$ ở đó $n = \dfrac{5^{1980^4} + 2021}{2}$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Tiến*, có 8 bạn tham gia giải bài toán này, 1 bạn có lời giải chưa hoàn chỉnh, 7 bạn kết luận phương trình không có nghiệm nguyên dương.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/529. *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to S$ với S là một tập bị chặn thỏa mãn $f^2(0)+f(0)=0$ và*

$$\left|f(x+y^2+z^3)-f(x)-f^2(y)-f^3(z)\right|\le\frac{1}{2}\quad(1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$. Chứng minh $|f(x)-f(-x)|\le 2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x=y=0$ vào (1) ta được:

$$\left|f(z^3)-f^3(z)\right|\le\frac{1}{2},\ \forall z\in\mathbb{R}\quad(2).$$

Từ giả thiết $f^2(0)+f(0)=0$, suy ra $f(0)=-1$ hoặc $f(0)=0$.

• Trường hợp khi $f(0)=-1$. Thay $x=z=0$ vào (1), ta được $\left|f(y^2)-f^2(y)+2\right|\le\frac{1}{2},\forall y\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left|f^2(y)-f^2(-y)\right|\le 1,\forall y\in\mathbb{R}$ (3).

Thay $y=0$ vào (1), ta được:

$$\left|f(x+z^3)-f(x)-f^3(z)-1\right|\le\frac{1}{2},\forall x,z\in\mathbb{R}\quad(4).$$

Cộng theo vế (2) và (4) ta được:

$$\left|-f(z^3)+f^3(z)\right|+\left|f(x+z^3)-f(x)-f^3(z)-1\right|\le 1.$$

Suy ra:

$$\left|-f(z^3)+f^3(z)+f(x+z^3)-f(x)-f^3(z)-1\right|$$
$$\le\left|-f(z^3)+f^3(z)\right|+\left|f(x+z^3)-f(x)-f^3(z)-1\right|$$
$$\le 1.$$

Suy ra: $\left|f(x+z^3)-f(x)-f(z^3)-1\right|\le 1,\ \forall x,z\in\mathbb{R}$

hay $\left|f(x+z)-f(x)-f(z)-1\right|\le 1,\ \forall x,z\in\mathbb{R}$.

Vậy nên $\left|-f(x)-f(-x)-2\right|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra:

$$\left|f(x)+f(-x)\right|\ge 2-\left|-f(x)-f(-x)-2\right|\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (3), ta thu được:

$$\left|f(x)-f(-x)\right|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

• Trường hợp khi $f(0)=0$.

Thay $y=0$ vào (1), ta được:

$$\left|f(x+z^3)-f(x)-f^3(z)\right|\le\frac{1}{2},\forall x,z\in\mathbb{R}.$$

Suy ra: $\left|f(x+z^3)-f(x)-f(z^3)\right|\le 1,\forall x,z\in\mathbb{R}$.

Do vậy: $\left|f(x+z)-f(x)-f(z)\right|\le 1,\ \forall x,z\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $\left|f(x+y)-f(x)-f(y)\right|\le 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Cho $y=x$ ta thu được:

$$\left|f(2x)-2f(x)\right|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$$

hay $$\left|\frac{1}{2}f(2x)-f(x)\right|\le\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay x bởi $2x$, ta được:

$$\left|\frac{1}{2}f(2^2x)-f(2x)\right|\le\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$

hay $$\left|\frac{1}{4}f(2^2x)-\frac{1}{2}f(2x)\right|\le\frac{1}{2^2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra: $\left|\frac{1}{4}f(2^2x)-f(x)\right|$

$$\le\left|\frac{1}{4}f(2^2x)-\frac{1}{2}f(2x)\right|+\left|\frac{1}{2}f(2x)-f(x)\right|$$
$$\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=1-2^{-2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Như vậy, bằng phương pháp quy nạp theo $l\in\mathbb{N}$, ta chứng minh được:

$$\left|\frac{1}{2^l}f(2^lx)-f(x)\right|\le 1-2^{-l},\forall x\in\mathbb{R},l\in\mathbb{N}.$$

Cho $l\to+\infty$ ta được $|f(x)|\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ (do f bị chặn và $2^l\to+\infty$). Suy ra:

$$\left|f(x)-f(-x)\right|\le 2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp 2 trường hợp, ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đây là dạng toán về ước lượng hàm số giới nội trên $\mathbb{R}$ với các ràng buộc dạng bất đẳng

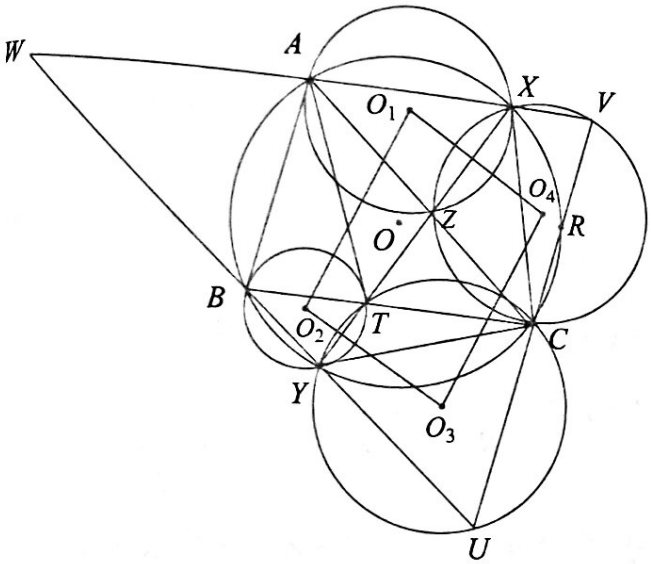
https://tieulun.hopto.org

thức. Chỉ có một bạn tham gia giải là *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/529. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm X, Y thuộc (O) sao cho AX // BC, BY // AC. Gọi Z, T theo thứ tự là giao điểm của XY với AC, BC. O_1, O_2, O_3, O_4 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXZ, BYT, CYT, CXZ. Chứng minh $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.*

Lời giải.



Gọi R là giao điểm thứ hai của (O) và đường thẳng qua C song song với AB; $U = BY \cap CR; V = CR \cap AX; W = AX \cap BY$.

Dễ thấy $O_1O_4 \perp XZ \equiv YT \perp O_3O_2$.

Do đó $O_1O_4 \,//\, O_3O_2$ (1).

Dễ thấy $P_{W/(O_1)} = \overline{WA}.\overline{WX} = \overline{WB}.\overline{WY} = P_{W/(O_2)}$.

Vì $AZ \,//\, BY; XA \,//\, TB$ và A, B, X, Y cùng thuộc (O) nên

$$(AZ, AB) \equiv (BY, BA) \equiv (XY, XA)$$
$$\equiv (TZ, TB) (\bmod \pi).$$

Điều đó có nghĩa là A, B, Z, T cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $P_{C/(O_1)} = \overline{CA}.\overline{CZ} = \overline{CB}.\overline{CT} = P_{C/(O_2)}$.

Vậy $WC \perp O_1O_2$ (2).

Vì $VX \,//\, BC; VC \,//\, BA$ và A, B, Z, T cùng thuộc một đường tròn nên

$$(VX, VC) \equiv (BC, BA) \equiv (BT, BA)$$
$$\equiv (ZT, ZA)$$
$$\equiv (ZX, ZC) (\bmod \pi).$$

Điều đó có nghĩa là C, X, Z, V cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự C, Y, T, U cùng thuộc một đường tròn.

Vì $YU \,//\, ZC$ và C, X, Z, V cùng thuộc một đường tròn nên X, Y, U, V cùng thuộc một đường tròn. Vậy

$$P_{W/(O_3)} = \overline{WY}.\overline{WU} = \overline{WX}.\overline{WV} = P_{W/(O_4)}.$$

Kết hợp với $P_{C/(O_3)} = 0 = P_{C/(O_4)}$, suy ra $WC \perp O_3O_4$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $O_1O_2 \,//\, O_3O_4$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

Nhận xét.

1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân, Phạm Văn Thông*, 12T1, *Nguyễn Văn Khiêm, Nguyễn Gia Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long, Nguyễn Quang Huy*, 12T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Mai Trung Nguyên*, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 12T, THPT chuyên Tiền Giang; **Sóc Trăng:** *Lý Hoàng Nhật*, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

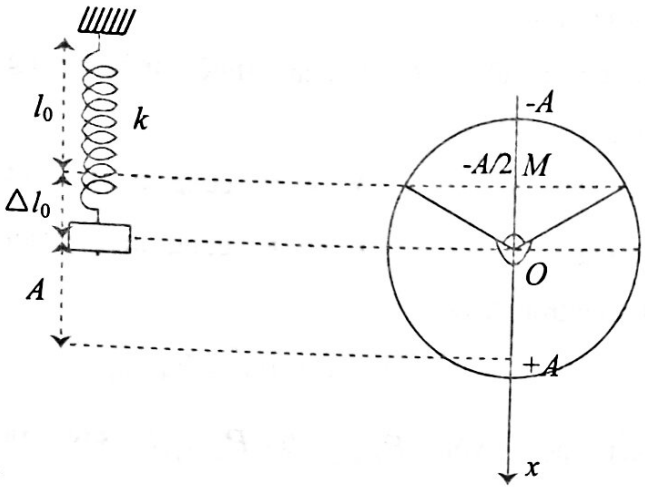
2) Nhiều bạn không biế sử dụng góc định hướng để khắc phục tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ.

NGUYỄN MINH HÀ

https://tieulun.hopto.org

Bài L1/529. *Một con lắc lò xo treo thẳng đứng, điểm treo cố định dao động với tần số 5 Hz. Trong một chu kì thời gian lò xo bị giãn bằng 2 lần thời gian lò xo bị nén. Lấy $\pi^2 = 10$, $g = 10$ m/s^2. Tính gia tốc cực đại của vật.*

Lời giải



Hình vẽ trên mô tả dao động điều hòa của con lắc lò xo và có xác định rõ các vị trí đặc biệt: Với M là vị trí lò xo không biến dạng; O là vị trí cân bằng của con lắc lò xo; $-A$ và $+A$ lần lượt là các vị trí tương ứng biên trên và biên dưới.

Theo đề bài, thời gian lò xo bị giãn bằng 2 lần thời gian lò xo bị nén.

Kết hợp với hình vẽ ta có: M ứng với vị trí vật nặng của con lắc lò xo có li độ

$$x = \frac{A}{2} \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{A}{2} \text{ hay } A = 2\Delta l_0 = \frac{2g}{\omega^2}.$$

Với $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l_0}} = 2\pi f = 10\pi$ rad/s.

$$\Rightarrow A = \frac{2.10}{(10\pi)^2} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Suy ra gia tốc cực đại của vật là:

$$a_{\max} = \omega^2 A = (10\pi)^2.0,02 = 20 \text{ m/s}^2.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 12A3, THPT Cù Huy Cận, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12T1; *Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Đào Ngọc Thiện*, *Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/529. *Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Mạch AM chỉ chứa biến trở R, đoạn mạch MB chứa điện trở thuần r mắc nối tiếp với cuộn cảm thuần có độ tự cảm L. Đặt vào AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng và tần số không đổi. Điều chỉnh R đến giá trị 80 Ω thì công suất tiêu thụ trên biến trở đạt cực đại và tổng trở của đoạn mạch AB chia hết cho 40. Tính hệ số công suất của đoạn mạch AM và AB.*

Lời giải. Công suất tỏa nhiệt trên R:

$$P = I^2R = \frac{U^2}{(R+r)^2 + Z_L^2}R = \frac{U^2}{R + \dfrac{r^2 + Z_L^2}{R} + 2r}.$$

P cực đại khi $R = R_0 = r^2 + Z_L^2 = 80^2$. Khi đó tổng trở của đoạn mạch AB là:

$$Z = \sqrt{(80+r)^2 + Z_L^2} = \sqrt{2.80.(80+r)}.$$

Theo đề bài Z chia hết cho 80 và $r < 80$ nên ta dễ dàng tìm được $r = 10\Omega$. Do đó:

$$\cos\varphi_{MB} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + Z_L^2}} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8};$$

$$\cos\varphi = \frac{80 + r}{\sqrt{(r+80)^2 + Z_L^2}} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng là: **Hưng Yên:** *Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 12A3, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Đồng Tháp:** *Hồ Phạm Phú An*, 12T1, *Nguyễn Trường Duy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

https://tieulun.hopto.org

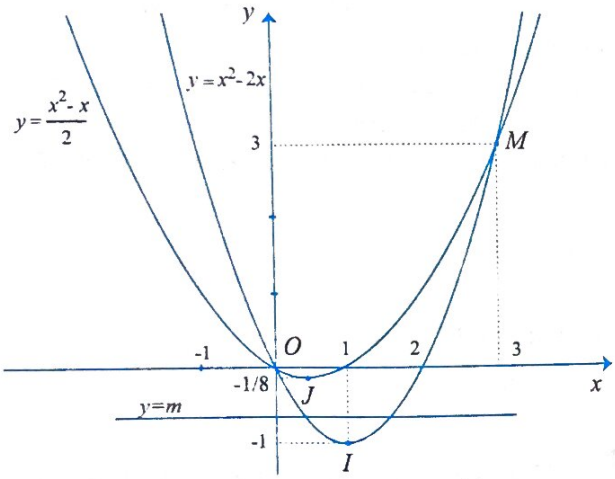
Trên cùng hệ trục Oxy ta thực hiện:

+ Vẽ đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng Ox (tùy thuộc vào giá trị của m).

+ Vẽ parabol $(P): y = x^2 - 2x$ với đỉnh $I(1;-1)$ và đi qua 2 điểm $O(0;0)$, $M(3;3)$. Đồng thời chú ý đến 2 nhánh tương ứng với $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

+ Vẽ parabol $(P'): y = \dfrac{x^2 - x}{2}$ với đỉnh $J\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{8}\right)$ và đi qua 2 điểm $O(0;0)$, $M(3;3)$.

Qua các đồ thị thì ta suy ra được:



+ Để (1) có nghiệm thì $m > 0$ (tuy nhiên nghiệm $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$).

+ Với $m \in \left[-1;-\dfrac{1}{8}\right]$ thì (2) được thỏa mãn với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó trong TH2 thì (*) thỏa mãn khi $m \in \left[-1;-\dfrac{1}{8}\right]$.

Tóm lại, các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là: $m \le -\dfrac{1}{8}$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất phương trình có chứa tham số hay. Ngoài hai cách giải trên của bạn *La Đại Cương*, bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng phát phát hiện đúng sai lầm và đóng góp một cách giải tương tự như cách 1 trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHIVI

XÁC SUẤT NÀO?

Đề bài. *Một đoàn tàu gồm 12 toa tàu, mỗi toa đều có thể chở được nhiều hơn 7 người. Ban đầu cả 7 toa đều không có người. Có 7 hành khách lên tàu và vào ngẫu nhiên các toa. Tính xác suất để có đúng 3 toa tàu có người (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).*

A. 0,123. **B.** 0,011. **C.** 0,017. **D.** 0,087.

Bạn Thảo Linh đề xuất lời giải:

Vì 7 hành khánh lên ngẫu nhiên 12 toa tàu nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 12^7$.

Ta sẽ tính xác suất để có đúng 1 toa không có người. Đánh số các toa từ 1 đến 12. Gọi A_i là biến cố toa thứ i không có người, $i = 1,2,...,12$. Số cách 7 hành khách lên tàu sao cho toa thứ i không có người là 11^7, với $i = 1,2,...,12$. Xác suất để toa thứ i không có người là $P(A_i) = \left(\dfrac{11}{12}\right)^7$, với $i = 1,2,...,12$.

Có C_{12}^3 cách chọn ra 3 toa từ 12 toa. Chẳng hạn 3 toa được chọn là các toa a, b, c. Xác suất để các toa a,b,c có người và các toa $i \in \{1,2,...,12\} \setminus \{a,b,c\}$ không có người là:

$$P(A_a).P(A_b).P(A_c).\prod_{i \in \{1,2,...,12\} \setminus \{a,b,c\}} P(A_i)$$

$$= \left(\left(\frac{11}{12}\right)^7\right)^9 . \left(1 - \left(\frac{11}{12}\right)^7\right)^3.$$

Do vậy, xác suất để có đúng 3 toa không có người là $C_{12}^3 . \left(\left(\dfrac{11}{12}\right)^7\right)^9 . \left(1 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^7\right)^3 \approx 0,087$. Chọn đáp án D.

Bạn có đồng ý với kết quả trên không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

https://tieulun.hopto.org

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 53. *Cho ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx}.$$

Phân tích 1. Ta thấy vai trò của y, z bình đẳng và khác vai trò của x, nên ta dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $y = z = tx\,(t > 0)$. Khi đó

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} = \frac{x^2(1 + 2t^2)}{x^2(2t^2 + 2t)} = \frac{2t^2 + 1}{2t^2 + 2t}.$$

Suy ra

$(2t^2 + 2t)P = 2t^2 + 1 \Leftrightarrow (2P - 2)t^2 + 2Pt - 1 = 0$ (1).

Ta tìm điều kiện của P để PT(1) ẩn t có nghiệm.

Nếu $P = 1$ thì (1) có nghiệm $t = \frac{1}{2}$. Nếu $P \neq 1$ thì

(1) có nghiệm khi $\begin{cases} \Delta' = P^2 + 2P - 2 \geq 0 \\ P \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} P \geq \sqrt{3} - 1 \\ P \leq -\sqrt{3} - 1 \end{array}\right. \\ P \neq 1 \end{cases}$.

Do đó (1) có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} P \geq \sqrt{3} - 1 \\ P \leq -\sqrt{3} - 1 \end{array}\right.$. Nhưng $P > 0$ nên ta dự đoán giá trị $\min P$ là $\sqrt{3} - 1$.

Phân tích 2. Giả sử $\min P = m$, tức là $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} \geq m$ (2), $\forall x, y, z > 0$. Ta biến đổi

$(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - mxy - 2myz - mzx \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - m(y + z)x + y^2 + z^2 - 2myz \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{m}{2}(y + z)\right)^2 + \left(y^2 + z^2 - 2myz - \frac{m^2}{4}(y + z)^2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{m}{2}(y + z)\right)^2 + \left((1 - \frac{m^2}{4})y^2 - (2m + \frac{m^2}{2})yz + (1 - \frac{m^2}{4})z^2\right) \geq 0.$

Ta sẽ tìm m để

$$\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)y^2 - 2\left(m + \frac{m^2}{4}\right)yz + \left(1 - \frac{m^2}{4}\right)z^2$$

trở thành bình phương của một biểu thức, muốn vậy ta sẽ chọn m sao cho $m + \frac{m^2}{4} = 1 - \frac{m^2}{4} > 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{3}$. Vì $P > 0$ nên $m > 0$. Vì thế ta dự đoán $\min P = m = \sqrt{3} - 1$.

Phân tích 3. Áp dụng BĐT

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

ta có:

$$2t(xy + 2yz + zx) = 2(tx)y + 2t.2yz + 2z(tx)$$
$$\leq \left(t^2x^2 + y^2\right) + 2t\left(y^2 + z^2\right) + \left(z^2 + t^2x^2\right)$$
$$= 2t^2x^2 + (2t + 1)y^2 + (2t + 1)z^2.$$

Ta sẽ chọn số $t > 0$ sao cho

$$2t^2 = 2t + 1 \Leftrightarrow t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Do đó: $2t(xy + 2yz + zx) \leq 2t^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Như vậy $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} \geq \frac{1}{t} = \sqrt{3} - 1$.

Phân tích 4. Với $0 < t < 1$, ta áp dụng BĐT Cauchy: $x^2 + 2ty^2 \geq 2\sqrt{2t}.xy$;

$$x^2 + 2tz^2 \geq 2\sqrt{2t}.xz;$$
$$2(1 - t)(y^2 + z^2) \geq 4(1 - t)yz$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{2t}.xy + 2(1 - t)yz + \sqrt{2t}.zx$ (3).

Ta sẽ chọn $t \in (0;1)$ sao cho hệ số của xy, yz, zx ở vế phải của (3) tương ứng tỉ lệ với hệ số của xy, yz, zx trong biểu thức dưới mẫu của P, tức là $\sqrt{2t} = 1 - t$ và được $t = 2 - \sqrt{3}$.

Phân tích 5. Rõ ràng P là biểu thức thuần nhất đối với x, y, z. Do đó, để tìm giá trị nhỏ nhất của P thì trước hết ta sẽ xét các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + 2yz + zx = 1$. Khi đó $P = x^2 + y^2 + z^2$.

https://tieulun.hopto.org

Ta thấy vai trò của y,z bình đẳng nên có thể đặt $t=y+z>0$. Suy ra $xt+2yz=1$ hay $2yz=1-xt$. Vì $(y+z)^2\ge 4yz$ nên $t^2\ge 2-2xt$ suy ra $x\ge\dfrac{2-t^2}{2t}$. Ta có:

$$P=x^2+(y+z)^2-2yz=x^2+t^2-1+xt$$
$$\ge\left(\frac{2-t^2}{2t}\right)^2+t^2-1+\frac{2-t^2}{2}$$
$$=\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{t^2}-1\ge\sqrt{3}-1.$$

Do đó ta dự đoán $\min P=\sqrt{3}-1$.

Từ những phân tích trên đây, chúng ta đưa ra một số cách giải quyết Bài toán 53.

Lời giải 1. Do $x,y,z>0$, ta thấy

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1 \text{ tương đương với}$$
$$x^2+y^2+z^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(xy+2yz+zx\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{3}-1)(y+z)x+\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)\ge 0.$$

Xét tam thức bậc hai ẩn x (coi y,z là tham số)

$$f(x)=x^2-(\sqrt{3}-1)(y+z)x+\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)$$

có biệt thức

$$\Delta_x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2(y+z)^2-4\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)$$
$$=-2\sqrt{3}\left(y-z\right)^2\le 0,\forall y,z>0,$$

nên $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)\ge 0,\forall x>0$.

Vì thế $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1$ với mọi $x,y,z>0$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}y=z>0\\ x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(y+z)\end{cases}\Leftrightarrow y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Vậy $\min P=\sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Lời giải 2. Với mọi số thực x,y,z ta có:

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(y+z)\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)^2\ge 0\ (4),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{3}-1)(xy+xz)+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(y^2+2yz+z^2)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(y^2-2yz+z^2)\ge 0,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\left(\sqrt{3}-1\right)(xy+2yz+zx)\ (5),\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Vì (4) đúng với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ nên (5) đúng với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$. Đẳng thức ở (5) xảy ra khi

$$x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(y+z)=y-z=0\Leftrightarrow y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}.$$

Với $x,y,z>0$ thì từ (5) ta có:

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1\quad(6).$$

Đẳng thức ở (6) xảy ra khi $y=z=\dfrac{x}{\sqrt{3}-1}>0$.

Vậy $\min P=\sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Lời giải 3. Áp dụng BĐT

$$a^2+b^2\ge 2ab,\forall a,b\in\mathbb{R},\text{ ta có:}$$

$$(1+\sqrt{3})(xy+2yz+zx)=2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x\right)y$$
$$+(1+\sqrt{3})2yz+2z\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$\le\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}x^2+y^2\right)+(1+\sqrt{3})\left(y^2+z^2\right)$$
$$+\left(z^2+\frac{2+\sqrt{3}}{2}x^2\right)$$
$$=(2+\sqrt{3})\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Như vậy $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

Đẳng thức xảy ra khi

https://tieulun.hopto.org

$$\begin{cases}\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}x^2 = y^2 = z^2\\ x,y,z>0\end{cases} \Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Lời giải 4. Áp dụng BĐT Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2(2-\sqrt{3})y^2 \ge 2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}.xy \\ x^2 + 2(2-\sqrt{3})z^2 \ge 2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}.xz \\ 2(\sqrt{3}-1)(y^2+z^2) \ge 4(\sqrt{3}-1)yz \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge (\sqrt{3}-1)(xy + 2yz + zx)$$

$$\Rightarrow P = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx} \ge \sqrt{3}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} y^2 = z^2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 = (2-\sqrt{3})y^2 = (2-\sqrt{3})z^2 \\ x,y,z>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Lời giải 5. Rõ ràng P là biểu thức thuần nhất đối với x, y, z. Do đó, để tìm giá trị nhỏ nhất của P thì trước tiên ta sẽ xét các x, y, z thỏa mãn $xy + 2yz + zx = 1$. Khi đó $P = x^2 + y^2 + z^2$. Ta thấy vai trò của y, z bình đẳng nên có thể đặt $t = y + z > 0$. Suy ra $xt + 2yz = 1$ hay $2yz = 1 - xt$. Vì $(y+z)^2 \ge 4yz$ nên $t^2 \ge 2 - 2xt$ suy ra $x \ge \dfrac{2-t^2}{2t}$. Ta có:

$$P = x^2 + (y+z)^2 - 2yz = x^2 + t^2 - 1 + xt$$

$$\ge \left(\frac{2-t^2}{2t}\right)^2 + t^2 - 1 + \frac{2-t^2}{2} = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \ge \sqrt{3}-1.$$

Để xảy ra đẳng thức $P = \sqrt{3}-1$ thì trước hết phải có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2-t^2}{2t} \\ t = y+z>0, y>0, z>0 \\ (y+z)^2 = 4yz \\ \dfrac{3}{4}t^2 = \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-t^2}{2t} \\ y = z = \dfrac{t}{2} \\ t = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1}{t\sqrt{3}} \\ y = z = \dfrac{t}{2} \\ t = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

Vì P là biểu thức thuần nhất đối với x, y, z nên đẳng thức $P = \sqrt{3}-1$ cũng xảy ra với $y = z = \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} > 0$. Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi $y = z = \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} > 0$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Nhận xét. Kỳ này Tạp chí TH&TT xin hoan nghênh hai bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và bạn *Trương Quang An*, tổ 2, hẻm 70/5 Võ Thị Sáu, phường Chánh Lộ, TX. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách trong bài viết của bạn *Nguyễn Văn Xá*.

.LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 55 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.12.2021.

BÀI TOÁN 55. *Giải phương trình*

$$4x^2 - 6x - 1 + x\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 0.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

https://tieulun.hopto.org

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2020 - 2021

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2020 - 2021 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2020 đến tháng 8 năm 2021. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. **Giải Xuất sắc** về môn Toán thuộc về bạn: ***Nguyễn Huy Hoàng***, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**. **Giải Nhất** môn Vật lý thuộc về bạn: ***Nguyễn Thiên Lý***, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2021 - 2022. Sau đây là danh sách **73** bạn đoạt giải Toán và **12** bạn đoạt giải Vật lý năm học 2020 - 2021.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Nguyễn Huy Hoàng, 11Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP.Quy Nhơn, **Bình Định**.

☆ Giải Nhất (7 giải)

1. *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh.
2. *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội, **Hà Nội**.
3. *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**.
4. *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.
5. *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.
6. *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
7. *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa-Vũng Tàu**.
8. *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**.

☆ Giải Nhì (12 giải)

1. *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
2. *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
3. *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
4. *Lê Đức Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
5. *Trương Thị Thu Hà*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
6. *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.
7. *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**.
8. *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**.
9. *Nguyễn Quang Huy*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
10. *Lâm Khánh Hòa*, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng, **Sóc Trăng**.
11. *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân, **Phú Yên**.
12. *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

☆ Giải Ba (25 giải)

1. *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
2. *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh, **Hà Nội**.
3. *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
4. *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
5. *Thái Minh Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
6. *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
7. *Nguyễn Anh Đức*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
8. *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam, **Hà Nội**.
9. *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
10. *Nguyễn Duy Phước*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
11. *Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
12. *Mai Võ Phúc Thành*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.
13. *Lê Mạnh Hùng*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ, **Quảng Trị**.
14. *Nguyễn Trung Kiên*, 8A3, THCS Lâm Thao, huyện Lâm Thao, **Phú Thọ**.
15. *Lê Văn Anh Khoa*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.
16. *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
17. *Võ Nguyên Thăng*, 7D, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**.
18. *Đặng Hoàng Duy*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
19. *Lương Minh Hiếu*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**.
20. *Hoàng Đình Đức*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

https://tieulun.hopto.org

21. *Nguyễn Công Phúc*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
22. *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội.**
23. *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**
24. *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh.**
25. *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2, **Bắc Ninh.**

☆ **Giải Khuyến khích (28 giải)**

1. *Nguyễn Xuân Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.**
2. *Nguyễn Đức Quý*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
3. *Nguyễn Hải Triều*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
4. *Nguyễn Danh Tiến Nam*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
5. *Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
6. *Hà Vinh Quang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
7. *Nguyễn Gia Khánh*, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**
8. *Đinh Mai Phương*, 7C2, PTLC Archimedes, Đông Anh, **Hà Nội.**
9. *Hoàng Phương Ngọc*, 7C2, PTLC Archimedes, Đông Anh, **Hà Nội.**
10. *Trần Anh Đức*, 6C2, PTLC Archimedes, Đông Anh, **Hà Nội.**
11. *Nguyễn Minh Khôi*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**
12. *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**
13. *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, huyện Điện Biên, **Điện Biên.**
14. *Tạ Kim Nam Tuấn*, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**
15. *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
16. *Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
17. *Phan Thị Minh Châu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
18. *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
19. *Nguyễn Vĩnh Trí*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
20. *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
21. *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**
22. *Ngô Quốc Tài*, 8A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Tây Ninh, **Tây Ninh.**
23. *Trần Gia Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ, **Quảng Nam.**
24. *Lê Hồng Anh*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
25. *Hán Vũ Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ.**
26. *Trần Tuấn Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ.**
27. *Ngô Văn Thông*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**
28. *Nguyễn Anh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Chu Văn An, **Hà Nội.**

MÔN VẬT LÝ

☆ **Giải Nhất (1 giải)**

Nguyễn Thiên Lý, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

☆ **Giải Nhì (5 giải)**

1. *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long, **Bạc Liêu.**
2. *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**
3. *Lê Thị Minh Thùy*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
4. *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
5. *Hồ Phạm Phú An*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

☆ **Giải Ba (6 giải)**

1. *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ,**Hà Nội.**
2. *Phạm Bá Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
3. *Phạm Hữu Đăng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**
4. *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**
5. *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
6. *Nguyễn Vĩnh Trí*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại 024.35121607 để nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

https://tieulun.hopto.org

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Xin nhắc lại một số tính chất của lũy thừa đã biết:

Tính chất 1. *Cho n là số nguyên dương.*

1) *Với a, b là số thực ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n-1} > b^{2n-1}.$$

2) *Với a, b là số thực không âm ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}.$$

3) *Với a, b là số thực không dương ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}.$$

4) *Cho a là số thực dương, b là số thực ta có:*

- $-a < b < a \Leftrightarrow b^{2n} < a^{2n}.$
- $a < -b$ *hoặc* $b > a \Leftrightarrow b^{2n} > a^{2n}.$

Tính chất 2. *Với n là số nguyên dương và a, b là số thực ta có:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + .. + C_n^k a^{n-k} b^k + .. + C_n^n b^n$$

(công thức nhị thức Newton).

Sau đây là một số thí dụ có vận dụng các tính chất này.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\left(x^2 + \sqrt[3]{2}x - 1\right)^9 + \left(x^4 + 2x^3 - 2\right)^5 = 9 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có:

$$\mathrm{VT}(1) = \left((x-1)(x+1) + \sqrt[3]{2}(x-1) + \sqrt[3]{2}\right)^9 + \left(x^4 + 2x^3 - 3 + 1\right)^5$$

$$= \left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 + \left[(x-1)\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 3\right) + 1\right]^5$$

$$= \left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 + \left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5.$$

- Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) > 0$ thì

$$(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) > 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 > \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8;$$

$$\left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5 > 1^5 = 1.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) > 9$.

- Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) < 0$ thì

$$(x-1)\left[(x+1)^3 + 2\right] < 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 < \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8;$$

$$\left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5 < 1^5 = 1.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) < 9$.

- Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 - \sqrt[3]{2} \end{array}\right.$.

Khi này $\mathrm{VT}(1) = 9$. Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = 1; x = -1 - \sqrt[3]{2}$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 2\right)^{33} + \left(x^2 + x - \frac{1}{x} + 2\right)^{33} = 3^{33} - 1 \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $x \neq 0$. Khi đó:

$$\mathrm{VT}(1) = \left[1 + x + \frac{1}{x} + (1+x)^2\right]^{33} + \left[1 - x - \frac{1}{x} + (1+x)^2\right]^{33}.$$

Do $(1+x)^2 \geq 0$ nên $1 + x + \frac{1}{x} + (1+x)^2 \geq 1 + x + \frac{1}{x}$.

Theo tính chất 1 ta có:

https://tieulun.hopto.org

$$\left[1+x+\frac{1}{x}+(1+x)^2\right]^{33} \ge \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (2).$$

Tương tự, do $1-x-\frac{1}{x}+(1+x)^2 \ge 1-x-\frac{1}{x}$ nên

$$\left[1-x-\frac{1}{x}+(1+x)^2\right]^{33} \ge \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$VT(1) \ge \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} + \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (4).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \ge 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}} = 2.$$

Theo tính chất 1 với n là số nguyên dương có:

$$\left(\left|x+\frac{1}{x}\right|\right)^{2n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n} \ge 2^{2n}.$$

Đặt $t = x+\frac{1}{x}$ ta có $t^{2n} \ge 2^{2n}$ (5). Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(1+t)^{33} = C_{33}^0 + C_{33}^1 t + C_{33}^2 t^2 + ... + C_{33}^{33} t^{33};$$

$$(1-t)^{33} = C_{33}^0 - C_{33}^1 t + C_{33}^2 t^2 - ... - C_{33}^{33} t^{33}.$$

Suy ra: $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} + \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} = (1+t)^{33} + (1-t)^{33}$

$$= 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \quad (6).$$

Từ (5) suy ra:

$$2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \ge 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 2^2 + .. + C_{33}^{32} 2^{32}\right).$$

Thay $t = 2$ vào (6) ta được:

$$3^{33} - 1 = 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 2^2 + .. + C_{33}^{32} 2^{32}\right).$$

Do đó: $2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \ge 3^{33} - 1$ (7).

Từ (4), (6) và (7) suy ra $VT(1) \ge VP(1)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)^2 = 0 \\ \left(\left|x+\frac{1}{x}\right|\right)^{2n} = 2^{2n} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x = -1$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$(2x^2+x-7)^{21} + (x^2-x-3)^{21} = x^2 + 3^{21} - 5 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có:

$$VT(1) = \left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} + \left[(x^2-4)+1-x\right]^{21}.$$

Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(1+x)^{21} = C_{21}^0 + C_{21}^1 x + C_{21}^2 x^2 + ... + C_{21}^{21} x^{21}.$$

Tương tự:

$$(1-x)^{21} = C_{21}^0 - C_{21}^1 x + C_{21}^2 x^2 - ... - C_{21}^{21} x^{21}.$$

Suy ra: $P(x) = (1+x)^{21} + (1-x)^{21}$

$$= 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 x^2 + .. + C_{21}^{20} x^{20}\right) \ (*).$$

Thay $x = 2$ vào (*) ta được:

$$3^{21} - 1 = 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right).$$

• Với $x^2 > 4$ theo tính chất 1 ta có:

$$\left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} > (1+x)^{21};$$

$$\left[(x^2-4)+1-x\right]^{21} > (1-x)^{21}.$$

Suy ra $VT(1) > P(x)$ (2). Do $x^2 > 2^2$ nên theo tính chất 1 thì với mọi số nguyên dương n có $x^{2n} > 2^{2n}$. Suy ra:

$$P(x) > 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right) + 2C_{21}^2 x^2 - 2C_{21}^2 2^2$$

$$= 3^{21} - 1 + 420(x^2-4) > 3^{21} - 1 + (x^2-4) = VP(1) \ (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra $VT(1) > VP(1)$.

• Với $x^2 < 4$ theo tính chất 1 ta có:

$$\left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} < (1+x)^{21};$$

$$\left[(x^2-4)+1-x\right]^{21} < (1-x)^{21}.$$

Suy ra $VT(1) < P(x)$ (4). Do $0 \le x^2 < 2^2$ nên theo tính chất 1 thì với mọi số nguyên dương n có $x^{2n} < 2^{2n}$. Suy ra:

$$P(x) < 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right) + 2C_{21}^2 x^2 - 2C_{21}^2 2^2$$

$$= 3^{21} - 1 + 420(x^2-4) < 3^{21} - 1 + (x^2-4) = VP(1) \ (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra $VT(1) < VP(1)$.

• Với $x = \pm 2$ thì $VT(1) = VP(1)$. Vậy PT(1) có đúng 2 nghiệm $x = \pm 2$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình :*

$$\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^{44} + (3-x)^{44} = \left(\frac{x}{2}\right)^{44} + 5^{44} \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

https://tieulun.hopto.org

Suy ra: $x+2\ge 0$ và $x+3>0$. Ta có

$\sqrt{4-x^2}\ge 0\ge -(x+2)\Rightarrow \sqrt{4-x^2}-1\ge -(x+3)$.

Lại có:

$$\sqrt{4-x^2}-1\le \sqrt{4}-1=1\le 1+x+2=x+3.$$

Như vậy $-(x+3)\le \sqrt{4-x^2}-1\le x+3$. Theo tính chất 1 có: $\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^{44}\le (3+x)^{44}$. Suy ra $VT(1)\le (3+x)^{44}+(3-x)^{44}$ (2). Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(3+x)^{44}=3^{44}C_{44}^0+3^{43}C_{44}^1x+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}.$$

$$(3-x)^{44}=3^{44}C_{44}^0-3^{43}C_{44}^1x+3^{42}C_{44}^2x^2-...+C_{44}^{44}x^{44}.$$

Suy ra: $(3+x)^{44}+(3-x)^{44}$

$$=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right)(3).$$

Thay $x=2$ vào (3) ta được:

$$5^{44}+1=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right).$$

Do $0\le x^2\le 4=2^2$ nên theo tính chất 1 với mọi số nguyên dương n có $x^{2n}\le 2^{2n}$. Suy ra:

$$2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right)$$

$$\le 2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2 2^2+..+C_{44}^{42}2^{42}\right)+2C_{44}^{44}x^{44}$$

$$=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2 2^2+..+C_{44}^{44}2^{44}\right)+2C_{44}^{44}x^{44}-2C_{44}^{44}2^{44}$$

$$=2x^{44}+5^{44}-2^{45}+1=2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)+5^{44}+1 \quad (4).$$

Vì $0\le x^2\le 4$ nên $0\le\left(\frac{x}{2}\right)^2\le 1$. Suy ra:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{44}\le 1^{22}\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\le 0$$

$$\Rightarrow 2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)\le\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1 \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)+5^{44}+1\le\left(\frac{x}{2}\right)^{44}+5^{44} \quad (6).$$

Từ (2), (3), (4), (6) suy ra $VT(1)\le VP(1)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-2$. Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=-2$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}(2x-3y)^{12}+(3x-2y)^{12}=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right)\\ \dfrac{33-\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5}{1+\left(4x^2-3xy+y^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6}=1\end{cases}.$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất của hệ PT tương đương với

$$\left((2x-3y)^2\right)^6+\left((3x-2y)^2\right)^6=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6$$

$$+\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right) \quad (*).$$

• Xét $4x^2-12xy+4y^2>0$ ta có:

$$4x^2-12xy+4y^2+5y^2>5y^2\ge 0;$$

$$5x^2+4x^2-12xy+4y^2>5x^2\ge 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6>\left(5y^2\right)^6=5^6y^{12} \quad (1)$$

$$\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6>\left(5x^2\right)^6=5^6x^{12} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT(*)>VP(*)$.

• Xét $4x^2-12xy+4y^2<0$ ta có:

$$0\le 4x^2-12xy+4y^2+5y^2<5y^2;$$

$$0\le 5x^2+4x^2-12xy+4y^2<5x^2.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6<\left(5y^2\right)^6=5^6y^{12} \quad (3)$$

$$\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6<\left(5x^2\right)^6=5^6x^{12} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $VT(*)<VP(*)$.

• Xét $4x^2-12xy+4y^2=0$ thấy thỏa mãn PT(*).

Ta có: $4x^2-12xy+4y^2=0$

$$\Leftrightarrow y^2-3xy+x^2=0\Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}x.$$

Thay $y^2-3xy+x^2=0$ vào PT thứ hai của hệ PT đã cho ta được: $\dfrac{33-\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5}{1+\left(3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6}=1$

https://tieulun.hopto.org

$$\Leftrightarrow\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5+\left(3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6=32\ (*).$$

$$VT(*)=\left(\left(x^2+1\right)+2x\sqrt{x^2+1}-2\right)^5$$

$$+\left(x^2+1+3x\sqrt{x^2+1}+2x^2+2\right)^6$$

$$=\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5$$

$$+\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6.$$

Ta có: $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$, suy ra:

$$\sqrt{x^2+1}+x>0.$$

Mặt khác:

$$3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>0.$$

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x>0$ thì

$$\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2>-2$$

và $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2>2.$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5>(-2)^5;$$

$$\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6>2^6.$$

Suy ra $VT(*)>32=VP(*)$.

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x<0$ thì

$$\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2<-2$$

và $0<\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2<2.$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5<(-2)^5;$$

$$\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6<2^6.$$

Suy ra $VT(*)<32=VP(*)$.

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x=0$ thấy thỏa mãn (*). Ta có:

$$\sqrt{x^2+1}+2x=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x^2+1=4x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x^2=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$ Với $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ suy ra:

$y=\dfrac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}$. Vậy hệ PT có 2 nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}\right).$$

Một số tính chất khác xin được trình bày ở số tiếp theo.

BÀI TẬP

Giải các phương trình :

1. $\left(3+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{21}=\left(2+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{19}+2^{21}-1.$

2. $\left(2+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{12}=1+220\left(1+x+\sqrt{1-x^2}\right)^9.$

3. $\left(1+\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)^{44}+\left(1-\sqrt{x}-\sqrt{4-x}\right)^{44}=2^{88}+2^{44}.$

4. $\dfrac{\left(3x^4-1\right)^7+\left(3x^4+1\right)^7}{x^6+21x^4+35x^2+7}=2x.$

5. $\left(x^2-x-2\right)^5+\left(2x^2+x-5\right)^5=152.$

6. $\left(3x^2+x-5\right)^7+\left(2x^2-x-3\right)^7=478.$

7. $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^8+\left(x^2+1+x\sqrt{x^2+1}\right)^8=337.$

8. $\left(\dfrac{(x+1)^3}{x^2+1}\right)^9+\left(x^3-1\right)^9+(3x-1)^9=3^9.$

9. $\left(3x^2+x-5\right)^7+\left(2x^2-x-3\right)^7=14x^6+366.$

10. $\left(3x^2+x-2\right)^{23}+\left(2x^2-x-1\right)^{23}=x^{20}+2^{23}-1.$

11. $$\frac{\left(\sqrt[3]{24x^2+18x+9}-x-1\right)^5+\left(\sqrt[3]{12x^2+2}-3x\right)^5}{5x^4+10x^2+1}=2.$$

12. $\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^{44}+(3-x)^{44}=\dfrac{x^2}{4}+5^{44}.$

13. $\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^{22}+(2-x)^{22}=x^{22}+3^{22}.$

14. $\left(x^5-4x^3+12\right)^3+(x+2)^3=\dfrac{756}{x^9}.$

(Kỳ sau đăng tiếp)

https://tieulun.hopto.org

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 53. *Cho ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx}.$$

Phân tích 1. Ta thấy vai trò của y, z bình đẳng và khác vai trò của x, nên ta dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $y = z = tx\,(t > 0)$. Khi đó

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} = \frac{x^2(1 + 2t^2)}{x^2(2t^2 + 2t)} = \frac{2t^2 + 1}{2t^2 + 2t}.$$

Suy ra

$(2t^2 + 2t)P = 2t^2 + 1 \Leftrightarrow (2P - 2)t^2 + 2Pt - 1 = 0$ (1).

Ta tìm điều kiện của P để PT(1) ẩn t có nghiệm.

Nếu $P = 1$ thì (1) có nghiệm $t = \frac{1}{2}$. Nếu $P \neq 1$ thì

(1) có nghiệm khi $\begin{cases} \Delta' = P^2 + 2P - 2 \geq 0 \\ P \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} P \geq \sqrt{3} - 1 \\ P \leq -\sqrt{3} - 1 \end{array}\right. \\ P \neq 1 \end{cases}$.

Do đó (1) có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} P \geq \sqrt{3} - 1 \\ P \leq -\sqrt{3} - 1 \end{array}\right.$. Nhưng $P > 0$ nên ta dự đoán giá trị $\min P$ là $\sqrt{3} - 1$.

Phân tích 2. Giả sử $\min P = m$, tức là $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} \geq m$ (2), $\forall x, y, z > 0$. Ta biến đổi

(2) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - mxy - 2myz - mzx \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - m(y + z)x + y^2 + z^2 - 2myz \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{m}{2}(y + z)\right)^2 + \left(y^2 + z^2 - 2myz - \frac{m^2}{4}(y + z)^2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{m}{2}(y + z)\right)^2 + \left((1 - \frac{m^2}{4})y^2 - (2m + \frac{m^2}{2})yz + (1 - \frac{m^2}{4})z^2\right) \geq 0.$

Ta sẽ tìm m để

$$\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)y^2 - 2\left(m + \frac{m^2}{4}\right)yz + \left(1 - \frac{m^2}{4}\right)z^2$$

trở thành bình phương của một biểu thức, muốn vậy ta sẽ chọn m sao cho $m + \frac{m^2}{4} = 1 - \frac{m^2}{4} > 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{3}$. Vì $P > 0$ nên $m > 0$. Vì thế ta dự đoán $\min P = m = \sqrt{3} - 1$.

Phân tích 3. Áp dụng BĐT

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

ta có:

$$\begin{aligned} 2t(xy + 2yz + zx) &= 2(tx)y + 2t.2yz + 2z(tx) \\ &\leq \left(t^2x^2 + y^2\right) + 2t\left(y^2 + z^2\right) + \left(z^2 + t^2x^2\right) \\ &= 2t^2x^2 + (2t + 1)y^2 + (2t + 1)z^2. \end{aligned}$$

Ta sẽ chọn số $t > 0$ sao cho

$$2t^2 = 2t + 1 \Leftrightarrow t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Do đó: $2t(xy + 2yz + zx) \leq 2t^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Như vậy $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + 2yz + zx} \geq \frac{1}{t} = \sqrt{3} - 1$.

Phân tích 4. Với $0 < t < 1$, ta áp dụng BĐT Cauchy: $x^2 + 2ty^2 \geq 2\sqrt{2t}.xy$;

$$x^2 + 2tz^2 \geq 2\sqrt{2t}.xz;$$

$$2(1 - t)(y^2 + z^2) \geq 4(1 - t)yz$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{2t}.xy + 2(1 - t)yz + \sqrt{2t}.zx$ (3).

Ta sẽ chọn $t \in (0;1)$ sao cho hệ số của xy, yz, zx ở vế phải của (3) tương ứng tỉ lệ với hệ số của xy, yz, zx trong biểu thức dưới mẫu của P, tức là $\sqrt{2t} = 1 - t$ và được $t = 2 - \sqrt{3}$.

Phân tích 5. Rõ ràng P là biểu thức thuần nhất đối với x, y, z. Do đó, để tìm giá trị nhỏ nhất của P thì trước hết ta sẽ xét các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + 2yz + zx = 1$. Khi đó $P = x^2 + y^2 + z^2$.

https://tieulun.hopto.org

Ta thấy vai trò của y,z bình đẳng nên có thể đặt $t=y+z>0$. Suy ra $xt+2yz=1$ hay $2yz=1-xt$. Vì $(y+z)^2\ge 4yz$ nên $t^2\ge 2-2xt$ suy ra $x\ge\dfrac{2-t^2}{2t}$. Ta có:

$$P=x^2+(y+z)^2-2yz=x^2+t^2-1+xt$$
$$\ge\left(\frac{2-t^2}{2t}\right)^2+t^2-1+\frac{2-t^2}{2}$$
$$=\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{t^2}-1\ge\sqrt{3}-1.$$

Do đó ta dự đoán $\min P=\sqrt{3}-1$.

Từ những phân tích trên đây, chúng ta đưa ra một số cách giải quyết Bài toán 53.

Lời giải 1. Do $x,y,z>0$, ta thấy

$P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1$ tương đương với

$$x^2+y^2+z^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(xy+2yz+zx\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{3}-1)(y+z)x+\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)\ge 0.$$

Xét tam thức bậc hai ẩn x (coi y,z là tham số)

$$f(x)=x^2-(\sqrt{3}-1)(y+z)x+\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)$$

có biệt thức

$$\Delta_x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2(y+z)^2-4\left(y^2+z^2-2(\sqrt{3}-1)yz\right)$$
$$=-2\sqrt{3}\left(y-z\right)^2\le 0,\forall y,z>0,$$

nên $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)\ge 0,\forall x>0$.

Vì thế $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1$ với mọi $x,y,z>0$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}y=z>0\\ x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(y+z)\end{cases}\Leftrightarrow y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Vậy $\min P=\sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Lời giải 2. Với mọi số thực x,y,z ta có:

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(y+z)\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)^2\ge 0\ (4),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x^2-(\sqrt{3}-1)(xy+xz)+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(y^2+2yz+z^2)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}(y^2-2yz+z^2)\ge 0,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\left(\sqrt{3}-1\right)(xy+2yz+zx)\ (5),\forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Vì (4) đúng với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ nên (5) đúng với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$. Đẳng thức ở (5) xảy ra khi

$$x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}(y+z)=y-z=0\Leftrightarrow y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}.$$

Với $x,y,z>0$ thì từ (5) ta có:

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\sqrt{3}-1\quad(6).$$

Đẳng thức ở (6) xảy ra khi $y=z=\dfrac{x}{\sqrt{3}-1}>0$.

Vậy $\min P=\sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y=z=\frac{x}{\sqrt{3}-1}>0.$$

Lời giải 3. Áp dụng BĐT

$a^2+b^2\ge 2ab,\forall a,b\in\mathbb{R}$, ta có:

$$(1+\sqrt{3})(xy+2yz+zx)=2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x\right)y$$
$$+(1+\sqrt{3})2yz+2z\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$\le\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}x^2+y^2\right)+(1+\sqrt{3})\left(y^2+z^2\right)$$
$$+\left(z^2+\frac{2+\sqrt{3}}{2}x^2\right)$$
$$=(2+\sqrt{3})\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Như vậy $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}\ge\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

Đẳng thức xảy ra khi

https://tieulun.hopto.org

$$\begin{cases}\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}x^2 = y^2 = z^2\\ x,y,z>0\end{cases} \Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Lời giải 4. Áp dụng BĐT Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2(2-\sqrt{3})y^2 \ge 2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}.xy \\ x^2 + 2(2-\sqrt{3})z^2 \ge 2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}.xz \\ 2(\sqrt{3}-1)(y^2+z^2) \ge 4(\sqrt{3}-1)yz \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge (\sqrt{3}-1)(xy + 2yz + zx)$$

$$\Rightarrow P = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx} \ge \sqrt{3}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} y^2 = z^2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 = (2-\sqrt{3})y^2 = (2-\sqrt{3})z^2 \\ x,y,z>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi

$$y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} > 0.$$

Lời giải 5. Rõ ràng P là biểu thức thuần nhất đối với x,y,z. Do đó, để tìm giá trị nhỏ nhất của P thì trước tiên ta sẽ xét các x,y,z thỏa mãn $xy+2yz+zx=1$. Khi đó $P = x^2+y^2+z^2$. Ta thấy vai trò của y,z bình đẳng nên có thể đặt $t = y+z>0$. Suy ra $xt+2yz=1$ hay $2yz = 1-xt$. Vì $(y+z)^2 \ge 4yz$ nên $t^2 \ge 2-2xt$ suy ra $x \ge \dfrac{2-t^2}{2t}$. Ta có:

$$P = x^2 + (y+z)^2 - 2yz = x^2 + t^2 - 1 + xt$$

$$\ge \left(\frac{2-t^2}{2t}\right)^2 + t^2 - 1 + \frac{2-t^2}{2} = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \ge \sqrt{3}-1.$$

Để xảy ra đẳng thức $P = \sqrt{3}-1$ thì trước hết phải có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2-t^2}{2t} \\ t = y+z>0, y>0, z>0 \\ (y+z)^2 = 4yz \\ \dfrac{3}{4}t^2 = \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-t^2}{2t} \\ y = z = \dfrac{t}{2} \\ t = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{1}{t\sqrt{3}} \\ y = z = \dfrac{t}{2} \\ t = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow y = z = \frac{x}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

Vì P là biểu thức thuần nhất đối với x,y,z nên đẳng thức $P = \sqrt{3}-1$ cũng xảy ra với $y = z = \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} > 0$. Vậy $\min P = \sqrt{3}-1$, đạt được khi $y = z = \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} > 0$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Nhận xét. Kỳ này Tạp chí TH&TT xin hoan nghênh hai bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và bạn *Trương Quang An*, tổ 2, hẻm 70/5 Võ Thị Sáu, phường Chánh Lộ, TX. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách trong bài viết của bạn *Nguyễn Văn Xá*.

.LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 55 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.12.2021.

BÀI TOÁN 55. *Giải phương trình*

$$4x^2 - 6x - 1 + x\sqrt{2x^2+6x+1} = 0.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

https://tieulun.hopto.org

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 74

PROBLEM. *The graph of $y = f(x)$ is transformed to the graph of $y = f(2x)$. Describe fully the transformation.*

Solution. If we let $t := 2x$, the function $y = f(2x)$ becomes $y = f(t)$ which is somehow similar to $y = f(x)$ except the following: the variable x runs from a to b corresponds to the variable t runs from $\frac{a}{2}$ to $\frac{b}{2}$.

Thus the transformation is stretching in x - direction with the factor $\frac{1}{2}$.

Question: Can you draw the graphs of the functions $y = \sin(x)$ and $y = \sin(2x)$?

TỪ VỰNG

graph	: *đồ thị*
transform	: *biến đổi*
fully	: *một cách đầy đủ*
transformation	: *phép biến đổi*
stretch	: *dãn*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 71

BÀI TOÁN. *Cho hàm số*

$$f:(-\infty;2)\to(3;+\infty), f(x)=x^2-4x+1.$$

Kí hiệu $f^{-1}(x)$ là hàm ngược của hàm $f(x)$. Giải phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$ (1).

Lời giải. Chú ý rằng đồ thị của hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ có thể nhận được bằng cách lấy đối xứng đồ thị của hàm ban đầu qua đường thẳng có phương trình $y = x$.

Từ đó nghiệm của phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$, nếu tồn tại phải là nghiệm của phương trình $f(x) = x$. Xét phương trình

$$f(x) = x, \text{ hay } x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (2).$$

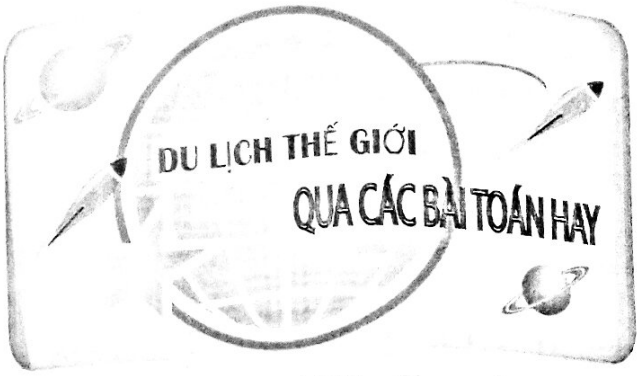
Phương trình (2) có hai nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

Tuy nhiên ta chỉ có thể chấp nhận nghiệm thuộc tập nguồn của hàm f. Do đó phương trình (1) chỉ có một nghiệm $x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Đoàn Ngọc Thiện, Cao Thị Tường Vy*, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Phương Thảo, Nguyễn Hoàng Ngọc, Văn Ngọc Bình, Nguyễn Kỳ Nam, Trương Hồ Bảo Nhi, Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Lê Đức Hiếu*, 10 Toán 1, *Trần Duy Anh*, 10 Anh 1, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10T2, *Nguyễn Thị Khánh Linh, Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

https://tieulun.hopto.org



BÀI TOÁN 62 (IMO, 1988). *Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho ab + 1 chia hết a^2+b^2. Chứng minh rằng là $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ một số chính phương.*

Lời giải. Cách 1. Đặt $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k, k\in\mathbb{Z}^+$

$$\Leftrightarrow a^2-kba+b^2-k=0 \quad (1).$$

Giả sử (a_0,b_0) là nghiệm nguyên dương của (1) sao cho tổng a_0+b_0 nhỏ nhất. Vì a và b trong bài toán là bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử $a_0\ge b_0$. Khi đó a_0 là một nghiệm của phương trình $x^2-kb_0x+b_0^2-k=0$. Suy ra phương trình này còn một nghiệm nữa là a_1. Theo định lý Viète ta có: $\begin{cases}a_0+a_1=kb_0\\ a_0a_1=b_0^2-k\end{cases}\Rightarrow a_1\in\mathbb{Z}$.

• Nếu $a_1<0$, tức là $a_1\le -1$ thì

$0=a_1^2-kb_0a_1+b_0^2-k\ge a_1^2-k+b_0^2-k=a_1^2+b_0^2$

$\Rightarrow b_0=0$, vô lý.

• Nếu $a_1>0$, tức là a_1 nguyên dương thì (a_1,b_0) là nghiệm nguyên dương của (1). Do $a_0\ge b_0$ nên $a_1=\frac{b_0^2-k}{a_0}\le\frac{a_0^2-k}{a_0}<\frac{a_0^2}{a_0}=a_0$. Do vậy: $a_1+b_0<a_0+b_0$, mâu thuẫn với cách chọn (a_0,b_0). Do đó $a_1=0\Rightarrow k=b_0^2$ là số chính phương.

Cách 2. Ta chứng minh quy nạp theo $a+b$. Trước tiên, ta có nhận xét rằng: *Nếu* $a^2+b^2\vdots ab+1$ *thì* $b^4+1\vdots ab+1$.

Thật vậy: $a^2+b^2\vdots ab+1\Rightarrow b^2(a^2+b^2)\vdots ab+1$. Mặt khác $b^2(a^2+b^2)=a^2b^2-1+b^4+1$ nên $b^4+1\vdots ab+1$. Do a, b là các số nguyên dương nên $a+b\ge 2$.

Xét $a+b=2$, suy ra $a=b=1$ và bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với mọi $a+b\le n$, ta chứng minh nó cũng đúng với $a+b=n+1$.

Nếu $a=b$ thì $2a^2\vdots a^2+1\Rightarrow a=b=1$. Từ đó $n=1$, vô lý. Do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a>b$. Theo nhận xét trên, do $a^2+b^2\vdots ab+1$ nên $b^4+1\vdots ab+1$. Đặt $k=\frac{b^4+1}{ab+1}$

$\Rightarrow k=b^4+1-kab\equiv 1 \pmod b$. Vậy tồn tại c để $k=bc+1$. Khi đó:

$$b^4+1=(ab+1)(bc+1)\Rightarrow b^4+1\vdots bc+1 \quad (2).$$

Vì $c^2(b^4+1)=c^2b^4-b^2+b^2+c^2$

$=b^2(b^2c^2-1)+b^2+c^2\vdots bc+1\Rightarrow b^2+c^2\vdots bc+1$.

Do $a>b$ nên $ab+1>b^2+1$, từ đó: $bc+1<b^2+1$. Suy ra $c<b<a$. Vậy $c+b<a+b=n+1$ hay $c+b\le n$. Theo giả thiết quy nạp thì $\frac{b^2+c^2}{bc+1}$ là số chính phương. Từ (2) ta có: $\frac{b^2(a^2+b^2)}{ab+1}=$

$$=\frac{(a^2b^2+ab)-(ab+1)+b^4+1}{ab+1}=ab-1+bc+1=ab+bc.$$

Tương tự: $\frac{b^2(c^2+b^2)}{bc+1}=ab+bc$.

Suy ra: $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{c^2+b^2}{bc+1}$. Vậy $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ là số chính phương với $a+b=n+1$ (đpcm).

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều làm theo cách 1 ở trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, X. Nghĩa Thắng, H. Tư Nghĩa. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

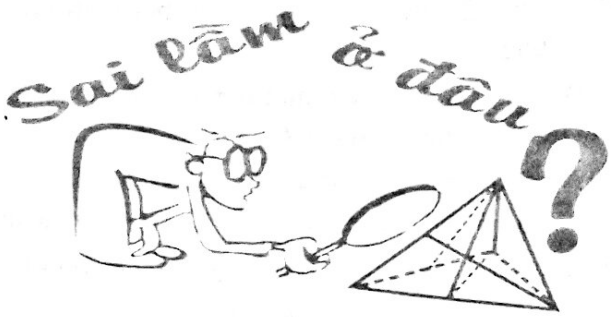
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.12.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 64. *Cho P là điểm nằm trong tam giác ABC và D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB. Tìm tất cả các điểm P sao cho tổng* $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PE}$ *nhỏ nhất.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

https://tieulun.hopto.org



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 529, tháng 7 năm 2021)

Phân tích. Xét BPT: $|x-m| > -x^2+2x+m$ (*).

Rõ ràng với $m=-1$ thì BPT (*) trở thành:

$$|x+1| > -x^2+2x-1 \Leftrightarrow |x+1|+(x-1)^2 > 0.$$

BPT này luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ (lưu ý là hệ $\begin{cases} x+1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ là vô nghiệm). Do đó có thể khẳng định lời giải của bạn *Dũng* là sai.

Bạn *Dũng* đã sai ở chỗ, từ nhận xét:

$$|x-m|+(x-1)^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

suy ra BPT $|x-m|+(x-1)^2 > m+1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m+1<0.$

Đúng là $|x-m|+(x-1)^2 > m+1, \forall x \in \mathbb{R}$, tuy nhiên đây là biểu thức phụ thuộc vào m và GTNN của nó trên $\mathbb{R}$ là hàm số theo m nên để làm theo cách trên cần xác định $f(m)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(|x-m|+(x-1)^2\right)$ và giải BPT : $f(m) > m+1$.

Lời giải đúng (của bạn *La Đại Cương*, GV THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**).

Cách 1. Xét BPT: $|x-m| > -x^2+2x+m$ (*).

TH1: Với $x \ge m$ thì (*) trở thành:

$$x-m > -x^2+2x+m \Leftrightarrow x^2-x-2m > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+8m}{4} > 0 \quad (1).$$

Để thỏa yêu cầu bài toán thì điều kiện cần là (1) đúng với mọi $x \ge m$.

TH1a: Nếu $m \ge \frac{1}{2}$ thì

$$\min_{x\ge m}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+8m}{4}\right)=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+8m}{4}$$

$$=m^2-3m.$$

Do đó để thỏa mãn (1) thì ta phải có:

$$m^2-3m>0 \overset{\text{ĐK}:m\ge\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} m>3.$$

TH1b: Nếu $m<\frac{1}{2}$ thì

$$\min_{x\ge m}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+8m}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1+8m}{4}$$

$$=-\frac{1+8m}{4}.$$

Do đó để thỏa mãn (1) thì ta phải có:

$$-\frac{1+8m}{4}>0 \overset{\text{ĐK}:m<\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} m<-\frac{1}{8}.$$

Tóm lại, những giá trị m thỏa mãn TH1 là:

$$m \in \left(-\infty;-\frac{1}{8}\right)\cup(3;+\infty).$$

TH2. Với $x<m$ thì (*) trở thành:

$$m-x > -x^2+2x+m \Leftrightarrow x^2-3x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<0 \end{array}\right. (2).$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì điều kiện cần là (2) đúng với mọi $x<m$. Do đó ta phải có $m \le 0$.

Từ những kết quả trên thì ta suy ra được các giá trị cần tìm của m là: $m<-\frac{1}{8}$.

Cách 2. Xét BPT: $|x-m| > -x^2+2x+m$ (*).

TH1: Nếu $-x^2+2x+m<0 \Leftrightarrow m<x^2-2x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì thỏa mãn được bài toán.

Mặt khác ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}}\left(x^2-2x\right)=-1$.

Do đó $m<-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2: Nếu $-x^2+2x+m \ge 0$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge x^2-2x \\ \left[\begin{array}{l} x-m > -x^2+2x+m \\ x-m < x^2-2x-m \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge x^2-2x \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{x^2-x}{2} \\ 0<x^2-3x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \ge x^2-2x \\ 0<x^2-3x \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} m \ge x^2-2x \\ m<\dfrac{x^2-x}{2} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right..$$

https://tieulun.hopto.org

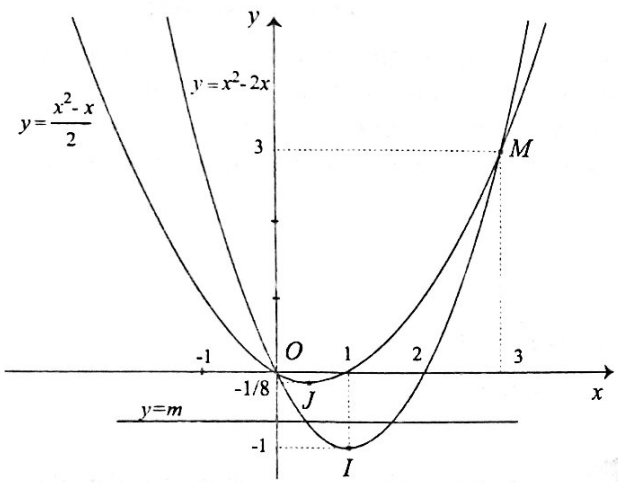
Trên cùng hệ trục Oxy ta thực hiện:

+ Vẽ đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng Ox (tùy thuộc vào giá trị của m).

+ Vẽ parabol $(P): y=x^2-2x$ với đỉnh $I(1;-1)$ và đi qua 2 điểm $O(0;0)$, $M(3;3)$. Đồng thời chú ý đến 2 nhánh tương ứng với $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

+ Vẽ parabol $(P'): y=\dfrac{x^2-x}{2}$ với đỉnh $J\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{8}\right)$ và đi qua 2 điểm $O(0;0)$, $M(3;3)$.

Qua các đồ thị thì ta suy ra được:



+ Để (1) có nghiệm thì $m>0$ (tuy nhiên nghiệm $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$).

+ Với $m\in\left[-1;-\dfrac{1}{8}\right]$ thì (2) được thỏa mãn với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó trong TH2 thì (*) thỏa mãn khi $m\in\left[-1;-\dfrac{1}{8}\right]$.

Tóm lại, các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là: $m\le-\dfrac{1}{8}$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất phương trình có chứa tham số hay. Ngoài hai cách giải trên của bạn *La Đại Cương*, bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng phát phát hiện đúng sai lầm và đóng góp một cách giải tương tự như cách 1 trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHIVI

XÁC SUẤT NÀO?

Đề bài. *Một đoàn tàu gồm 12 toa tàu, mỗi toa đều có thể chở được nhiều hơn 7 người. Ban đầu cả 7 toa đều không có người. Có 7 hành khách lên tàu và vào ngẫu nhiên các toa. Tính xác suất để có đúng 3 toa tàu có người (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).*

A. 0,123. **B.** 0,011. **C.** 0,017. **D.** 0,087.

Bạn Thảo Linh đề xuất lời giải:

Vì 7 hành khánh lên ngẫu nhiên 12 toa tàu nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=12^7$.

Ta sẽ tính xác suất để có đúng 1 toa không có người. Đánh số các toa từ 1 đến 12. Gọi A_i là biến cố toa thứ i không có người, $i=1,2,...,12$. Số cách 7 hành khách lên tàu sao cho toa thứ i không có người là 11^7, với $i=1,2,...,12$. Xác suất để toa thứ i không có người là $P(A_i)=\left(\dfrac{11}{12}\right)^7$, với $i=1,2,...,12$.

Có C_{12}^3 cách chọn ra 3 toa từ 12 toa. Chẳng hạn 3 toa được chọn là các toa a, b, c. Xác suất để các toa a,b,c có người và các toa $i\in\{1,2,...,12\}\setminus\{a,b,c\}$ không có người là:

$$P(A_a).P(A_b).P(A_c).\prod_{i\in\{1,2,...,12\}\setminus\{a,b,c\}}P(A_i)$$

$$=\left(\left(\frac{11}{12}\right)^7\right)^9.\left(1-\left(\frac{11}{12}\right)^7\right)^3.$$

Do vậy, xác suất để có đúng 3 toa không có người là $C_{12}^3.\left(\left(\dfrac{11}{12}\right)^7\right)^9.\left(1-\left(\dfrac{11}{12}\right)^7\right)^3\approx0,087$. Chọn đáp án D.

Bạn có đồng ý với kết quả trên không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

https://tieulun.hopto.org

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 533 (11.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

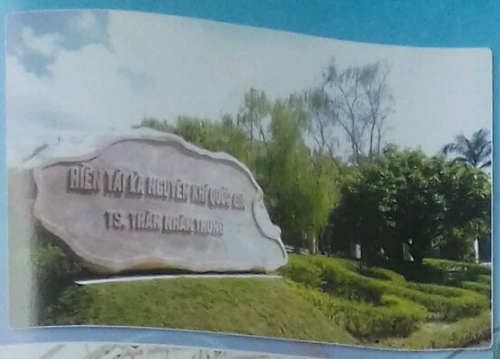
Tổng biên tập : **TS. TRẦN HỮU NAM**
Thư kí Tòa soạn : **ThS. HỒ QUANG VINH**
Phó tổng biên tập : **CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**
TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

https://tieulun.hopto.org



Lễ kỷ niệm 25 năm thành lập Trường THPT Chuyên Bắc Giang (20/11/2016)

*BGH Trường THPT Chuyên Bắc Giang (từ trái qua phải): NGUT **Nguyễn Thị Trúc Vân** - PHT, Nhà giáo **Nguyễn Anh Tuấn** - PHT, Nhà giáo **Trần Duy Phương** - PHT, Nhà giáo **Nguyễn Thị Mai Phương** - PHT*

https://tieulun.hopto.org

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG

30 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Địa chỉ: Đường Hoàng Văn Thụ - P. Ngô Quyền - TP. Bắc Giang

*ThS. **Trần Duy Phương***
Bí thư Đảng ủy - Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng Giáo dục trường THPT Chuyên Bắc Giang

Trường THPT Chuyên Bắc Giang được thành lập ngày 26/8/1991, khi đó mang tên Trường PTTH Năng khiếu tỉnh Hà Bắc. Năm 1997 tỉnh Hà Bắc tách thành tỉnh Bắc Giang và Bắc Ninh, trường đổi tên thành Trường PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, tỉnh Bắc Giang.

Kể từ ngày 18/11/2004 đến nay theo Quy chế trường THPT chuyên của Bộ GD&ĐT và Quyết định của UBND tỉnh Bắc Giang, trường được mang tên THPT Chuyên Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang.

Khi mới thành lập trường chỉ có 8 lớp với 3 môn chuyên (Toán, Vật lí, Tiếng Nga) với 150 học sinh và 22 cán bộ, giáo viên, nhân viên. NGUT *Cao Ngọc Thành* là Hiệu trưởng đầu tiên (1991-2005), tiếp đến là NGUT *Nguyễn Đức Hiền* (2005-2009), nhà giáo *Bạch Đăng Khoa* (2010-2015), NGUT *Hồ Thị Lân* (2015-2019). Đến nay, năm học 2021-2022 này, nhà trường đã có 31 lớp với 12 môn chuyên (Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí, Tiếng Anh, Tiếng Pháp, Tiếng Trung, Tiếng Nhật) gồm 1075 học sinh. Hội đồng Giáo dục nhà trường có 4 Cán bộ Quản lí, Hiệu trưởng: ThS. *Trần Duy Phương*, các Phó Hiệu trưởng: ThS. *Nguyễn Anh Tuấn*, ThS. *Nguyễn Thị Mai Phương*, NGUT *Nguyễn Thị Trúc Vân* và 99 cán bộ, giáo viên, nhân viên (1 Tiến sĩ, 56 Thạc sĩ); có 7 tổ chuyên môn là các tổ Toán-Tin, Vật lí-KTCN, Hóa, Sinh-TD-QP, Ngữ văn, Xã hội, Ngoại ngữ và tổ Văn phòng. Đảng bộ trường có 6 chi bộ với 59 đảng viên.

Trải qua 30 năm xây dựng và phát triển, nhà trường luôn hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ chính trị là trường trọng điểm, có chất lượng giáo dục toàn diện cao nhất tỉnh; là nơi khơi nguồn, phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi, đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao cho địa phương và đất nước. Nhà trường có 1230 lượt học sinh đoạt giải quốc gia (trong đó có 03 giải KHKT), 1 HCB Olympic Toán quốc tế, 2 HCB Olympic Vật lí quốc tế, 1 HCĐ Olympic Hóa học quốc tế, 1 HCV và 1 HCB Olympic Vật lí châu Á, 1 HCĐ Olympic Vật lí châu Âu và nhiều giải Toán, Vật lí khu vực, 1 học sinh vô địch Đường lên đỉnh Olympia lần thứ 13; trong kì thi tuyển sinh Đại học, thi TN THPT, THPTQG có nhiều học sinh đạt điểm tuyệt đối 30/30, nhiều học sinh là thủ khoa các trường Đại học hàng đầu; xếp thứ hạng cao trong tốp các trường có điểm bình quân cao nhất nước. Với mục tiêu giáo dục toàn diện để từ đó phát hiện và bồi dưỡng những tài năng tương lai, không chỉ kiến thức mà vun đắp tâm hồn, vốn sống và bước đầu tạo bản lĩnh cho từng học sinh trong thời đại 4.0; Trường luôn định hướng học sinh chuyên không chỉ xuất sắc trong học tập, có tấm lòng nhân ái, vị tha mà còn phải rất bản lĩnh, khoa học trong tổ chức, xây dựng các chương trình; biết yêu thương, chia sẻ, hợp tác tốt, nhất là trong thời kì hội nhập quốc tế. Chính vì vậy, nhà trường thường xuyên tạo điều kiện để học sinh tham gia, tổ chức các hoạt động ngoại khóa, hoạt động thiện nguyện nhất là thời điểm dịch Covid-19 diễn biến phức tạp... nhằm phát huy tính năng động, sáng tạo của học sinh chuyên. Cùng với kiến thức, đó là hành trang bước vào đời của những chủ nhân tương lai của đất nước.

Với sự quan tâm sâu sắc của các cấp ủy Đảng và Chính quyền, sự nỗ lực vươn lên, nhà trường đã đạt được những thành tích đáng trân trọng và tự hào. Nhà trường liên tục nhiều năm liền đạt danh hiệu Trường tiên tiến xuất sắc, được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba, hạng Nhì, hạng Nhất; nhiều lần được nhận Cờ thi đua của Chính phủ, của Tỉnh và nhiều Bằng khen các cấp. Các tổ chức luôn được công nhận Vững mạnh Xuất sắc. Hội đồng Giáo dục nhà trường có thầy giáo *Trần Văn Chút* được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Nhân dân, 13 thầy cô giáo được phong tặng Nhà giáo Ưu tú và nhiều nhà giáo được tặng Huân chương Lao động của Chủ tịch nước, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, của Chủ tịch UBND tỉnh... Nhiều thế hệ học sinh ra trường đã trưởng thành trên mọi miền đất nước và ở nước ngoài, tô thắm thêm lá cờ truyền thống vẻ vang của nhà trường.

Trên đà phát triển của sự nghiệp trồng người, trường THPT Chuyên Bắc Giang xin cảm ơn sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, của những người đã dành tình cảm và những điều tốt đẹp cho nhà trường. Mong rằng nhà trường sẽ là nơi hội tụ, trở về của các thế hệ cán bộ, giáo viên, nhân viên và học sinh đã từng gắn bó với mái trường thân thương này.

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT11M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2021

https://tieulun.hopto.org

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng