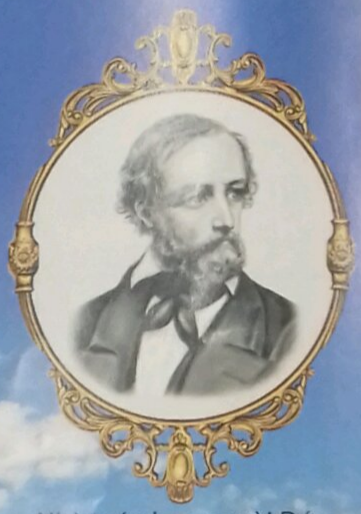
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

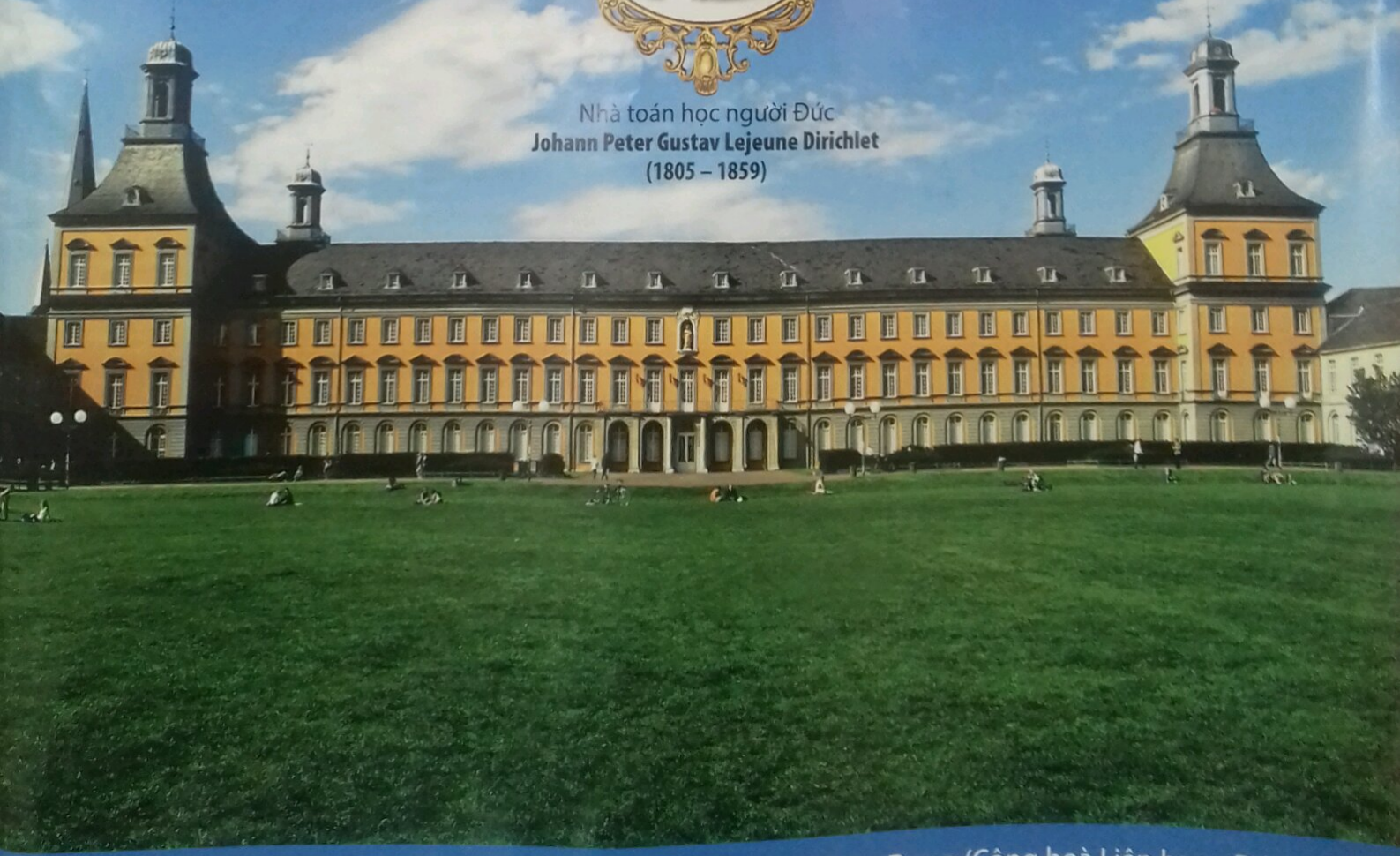
Số 532
Tháng 10 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học người Đức
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805 – 1859)

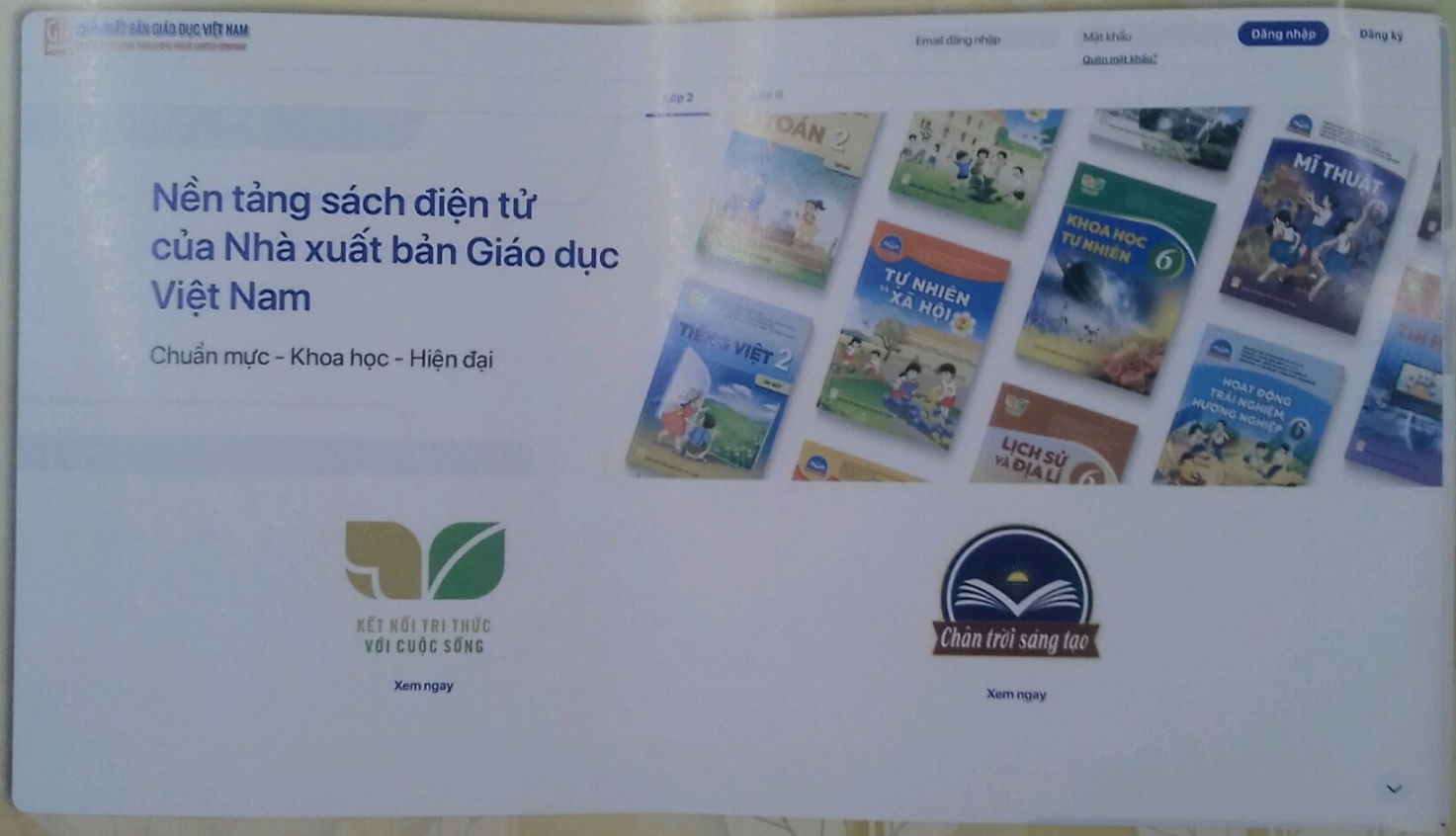


Đại học Bonn (Cộng hoà Liên bang Đức)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CHỈ CÔNG BỐ PHIÊN BẢN ĐIỆN TỬ SÁCH GIÁO KHOA TRÊN TRANG HÀNH TRANG SỐ

Hiện nay, trên một số website có đăng tải sách giáo khoa, sách bổ trợ của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam dưới hình thức chuyển thể sang phiên bản điện tử và cho tải về miễn phí.



Trong đó, sách giáo khoa các lớp 1, 2, 6 theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam là bản in thử. Việc đăng tải và cho phép tải về các phiên bản điện tử sách giáo khoa, sách bổ trợ này khi chưa được sự cho phép của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam là hành vi vi phạm bản quyền sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam. Đồng thời, nội dung của các phiên bản điện tử này không được Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam kiểm soát nên không đảm bảo tính chính xác, khoa học và cập nhật.

Nhằm thực hiện các quy định của pháp luật về bản quyền, sở hữu trí tuệ và bảo vệ lợi ích của học sinh, phụ huynh, giáo viên, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam thông báo: Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam chỉ công bố phiên bản điện tử sách giáo khoa từ lớp 1 đến lớp 12 và một số sách bổ trợ, sách giáo viên các lớp 1, 2, 6 theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018 do Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ bản quyền tại địa chỉ website duy nhất: hanhtrangso.nxbgd.vn

NXBGDVN

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

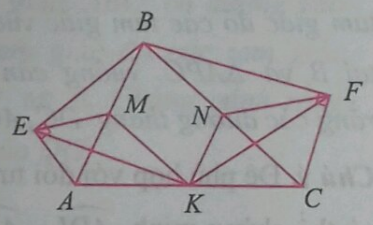
HOÀNG VIỆT DŨNG (*GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An*)
NGUYỄN ANH TUẤN (*GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An*)

Việc tìm tòi mở rộng hay khai thác một bài toán thành các bài toán mới sẽ giúp cho học sinh khắc sâu kiến thức đồng thời tạo cho các em sự hứng thú và niềm đam mê yêu thích môn học. Bài viết này chúng ta sẽ khai thác một bài toán hình học lớp 8 như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác ABE, BCF lần lượt vuông tại E, F sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{BCF} = \alpha$. Gọi K là trung điểm của AC, chứng minh tam giác KEF cân tại K và $\widehat{EKF} = 2\alpha$.*

Lời giải (h.1).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC thì KM và KN là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow KM = \frac{1}{2}BC$ và $KN = \frac{1}{2}AB$ (1).



Hình 1

Mặt khác: EM, FN lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔABE và ΔCBF $\Rightarrow EM = \frac{1}{2}AB$ và $FN = \frac{1}{2}BC$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = NF$ và $EM = NK$ (3).

Lại có:

$$\begin{cases} \widehat{EMK} = \widehat{EMA} + \widehat{AMK} = (180^\circ - 2\alpha) + \widehat{ABC} \\ \widehat{KNF} = \widehat{CNF} + \widehat{KNC} = (180^\circ - 2\alpha) + \widehat{ABC} \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{EMK} = \widehat{KNF}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra:

$\Delta EMK = \Delta KNF$ (c.g.c) $\Rightarrow KE = KF, \widehat{NKF} = \widehat{MEK}$

$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{EKM} + \widehat{MKN} + \widehat{NKF}$

$= \widehat{EKM} + \widehat{ABC} + \widehat{MEK} = \widehat{EKM} + \widehat{MEK} + \widehat{ABC}$

$= 180^\circ - \widehat{EMK} + \widehat{ABC}$

$= 180^\circ - \left[(180^\circ - 2\alpha) + \widehat{ABC}\right] + \widehat{ABC} = 2\alpha.$

• Nếu $\alpha = 30^\circ$ thì $\widehat{EKF} = 60^\circ$ từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác ABE, BCF vuông lần lượt tại E, F sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{BCF} = 30^\circ$. Gọi K là trung điểm của AC. Chứng minh tam giác KEF đều.*

• Nếu $\alpha = 45^\circ$ thì $\widehat{EKF} = 90^\circ$ từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác ABE, BCF vuông cân lần lượt tại E, F. Gọi K là trung điểm của AC. Chứng minh tam giác KEF vuông cân.*

• Nếu $\alpha = 60^\circ$ thì $\widehat{EKF} = 120^\circ$ từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác ABE, BCF vuông lần lượt tại E, F sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{BCF} = 30^\circ$. Gọi K là trung điểm của AC. Tính các góc của tam giác KEF.*

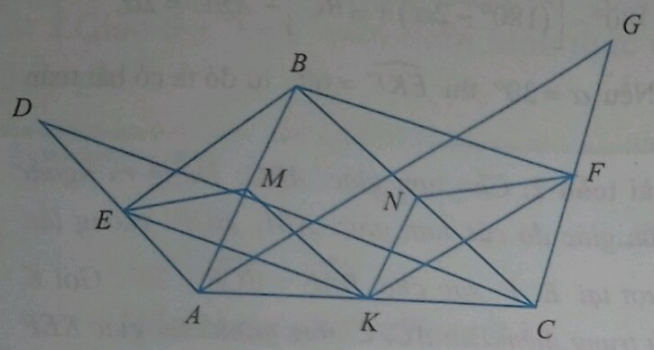
• Gọi D là điểm đối xứng với A qua E và G là điểm đối xứng của C qua F (h.2). Khi đó ta có EK, FK lần lượt là đường trung bình của ΔACD và $\Delta CAG \Rightarrow CD = 2EK$ và $AG = 2KF$.

Mà theo bài toán 1 ta có $KE = KF$ và $\widehat{EKF} = 2\alpha$ nên ta có $CD = AG$ và góc nhọn tạo bởi CD và AG bằng 2α (nếu $\alpha < 45^\circ$) hoặc bằng $180^\circ - 2\alpha$ (nếu $\alpha > 45^\circ$). Bằng cách cho α nhận

các giá trị đặc biệt bằng $45°$ hay $60°$ ta có các bài toán quen thuộc sau:

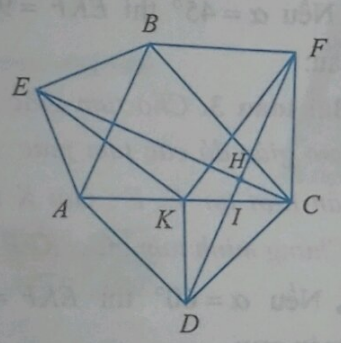
Bài toán 5. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác ABD, BCG vuông cân tại B. Chứng minh rằng $CD = AG$ và $AG \perp CD$.*

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều ABD, BCG. Chứng minh rằng $CD = AG$ và tính góc nhọn tạo bởi CD và AG* (h.2).



Hình 2

• Khi $\alpha = 45°$ thì các tam giác ABE và BCF lần lượt vuông cân tại E và F. Ta vẽ thêm ΔADC nằm ngoài tam giác ABC và vuông cân tại D (h.3). Khi đó theo bài toán 1 ta có

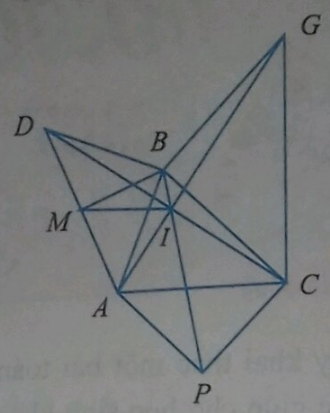


Hình 3

$KE = KF$. Mặt khác $KD = KC$ và $\widehat{DKF} = \widehat{CKE}$ $\left(= 90° + \widehat{KCF}\right) \Rightarrow \Delta DKF = \Delta CKE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KDF} = \widehat{KCE}$. Gọi H, I lần lượt là giao điểm của DF với AC và EC ta có $90° = \widehat{KDF} + \widehat{KID}$ $= \widehat{KCE} + \widehat{KID} = \widehat{KCE} + \widehat{HIC} \Rightarrow \Delta HIC$ vuông tại $H \Rightarrow DF \perp CE$. Chứng minh tương tự ta có $EF \perp BD$ và $AF \perp DE$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác vuông cân ABE, BCF, ADC lần lượt tại E, F, D. Chứng minh rằng các đường thẳng EC, BD, AF đồng quy.*

• Ở bài toán 5 ta có $AG \perp CD$, gọi I là giao điểm của AG và CD. Vì $\widehat{ABD} = \widehat{AID} = 90°$ nên tứ giác $AIBD$ nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{ADI} = \widehat{ABI}$ (h.4) (1). Dựng ra ngoài ΔABC tam giác APC vuông cân tại P, ta có $AD = AB.\sqrt{2}$



Hình 4

và $AC = AP.\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB.\sqrt{2}}{AP.\sqrt{2}} = \dfrac{AB}{AP}$ (2). Mặt khác: $\widehat{DAC} = \widehat{BAP}$ $\left(= 90° + \widehat{BAC}\right)$ (3). Từ (2) và (3) $\Rightarrow \Delta DAC \sim \Delta BAP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABP}$ (4). Từ (1) và (4) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ABI} \Rightarrow$ ba điểm B, I, P thẳng hàng. Từ đó ta có bài toán mới sau:

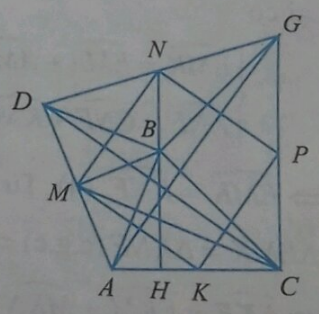
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác vuông cân ABD, BCG tại B và ΔAPC vuông cân tại P. Chứng minh rằng các đường thẳng DC, AG và BP đồng quy.*

Chú ý. Để phù hợp với đối tượng học sinh lớp 8 ta có thể chứng minh $\widehat{ADI} = \widehat{ABI}$ như sau: Gọi M là trung điểm của AD ta có các tam giác MDI, MBI, MAB cân tại M $\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{MBI} - \widehat{MBA}$

$$= \frac{180° - \widehat{BMI}}{2} - \frac{1}{2}\widehat{DMB} = \frac{180° - \left(\widehat{BMI} + \widehat{DMB}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{AMI} = \widehat{ADI}.$$

• Ở bài toán 3 nếu gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, DG, GC (h.5) ta có MK, MN, NP, KP lần là đường trung bình của các tam giác ADC, ADG, DGC, GCA mà ta lại có $MK = KP$ và $MK \perp KP$ $\Rightarrow$ tứ



Hình 5

giác $MKPN$ là hình vuông. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác vuông cân ABD, BCG tại B. Gọi K, M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, AD, DG, GC. Chứng minh rằng tứ giác $MKPN$ là hình vuông.*

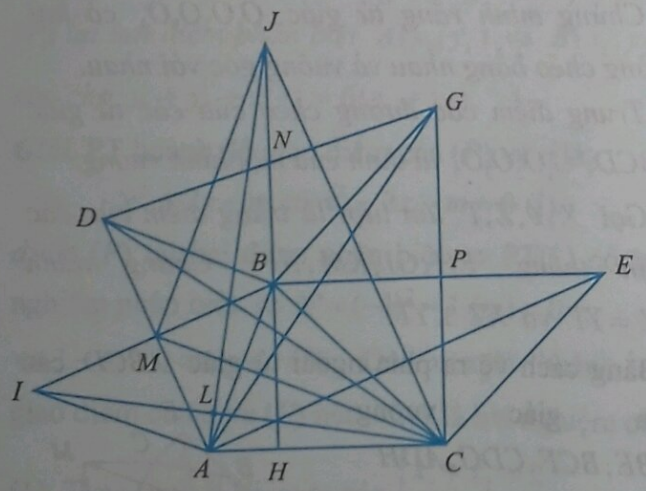
• Do tứ giác $MKPN$ là hình vuông $MN = MK$ và $\widehat{NMK} = 90°$, mà $\widehat{BMA} = 90°$ suy ra $\widehat{NMB} = \widehat{KMA}$ (h.5). Xét ΔMBN và ΔMAK có: $MN = MK$; $\widehat{NMB} = \widehat{KMA}$; $MB = MA$

$\Rightarrow \Delta MBN = \Delta MAK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MAK}$

$\Rightarrow 45° + \widehat{DBN} = 45° + \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DBN} = \widehat{BAC}$ (1).

Kéo dài BN cắt AC tại H thì ta có $\widehat{DBN} + \widehat{ABH} = 90°$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ABH} = 90° \Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó ta có bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC có đường cao BH. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác vuông cân ABD, BCG tại B. Chứng minh rằng BH đi qua trung điểm của DG.*



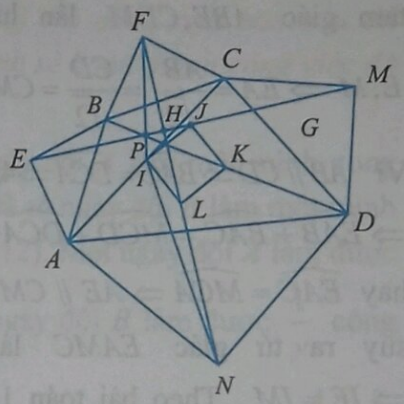
Hình 6

• Nếu lấy các điểm I, J lần lượt đối xứng với điểm B qua M và N thì ta có $BJ = AC$ và $AI = AB$ (h.6). Mà $\widehat{DBN} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ABJ} = \widehat{IAC}$. Từ đó suy ra: $\Delta ABJ = \Delta IAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{ICA}$.

Gọi K là giao điểm của JA và IC thì ta có $90° = \widehat{AJB} + \widehat{JAH} = \widehat{ICA} + \widehat{JAH} \Rightarrow AJ \perp IC$. Tương tự nếu lấy E đối xứng với B qua P thì ta có $AE \perp CJ$. Như vậy BH, CI, AE là ba đường cao của ΔJAC nên ba đường thẳng BH, CI, AE đồng quy. Từ đó ta có bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC có đường cao BH. Dựng ra ngoài tam giác đó các hình vuông $ABDI$, $BCEG$. Chứng minh rằng các đường thẳng BH, AE, CI đồng quy.*

• Xét bài toán 1 với $\alpha = 45°$ và tam giác ABC được thay bằng tứ giác $ABCD$, vẽ ra ngoài tứ giác đó các tam giác ABE, BCF, CDM, ADN lần lượt vuông cân tại E, F, M, N (h.7). Gọi I là trung điểm của AC, theo bài toán 1 ta có $IE = IF$ và $IM = IN$. Mà



Hình 7

$90° + \widehat{FIM} = \widehat{FIN} = \widehat{EIM}$ nên ta có:

$$\Delta FIN = \Delta EIM \ (c.g.c) \Rightarrow FN = EM$$

và $\widehat{IEM} = \widehat{IFN}$. Gọi P, H lần lượt là giao điểm của EM với FI và FN, ta có $90° = \widehat{IEN} + \widehat{IPE} = \widehat{IFN} + \widehat{IPE} = \widehat{IFN} + \widehat{FPH}$ $\Rightarrow \Delta FPH$ vuông tại $H \Rightarrow FN \perp EM$.

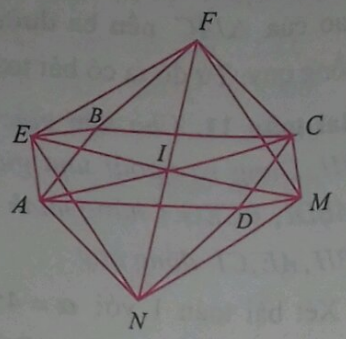
Gọi J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EM, BD, FN. Vì $\Delta FIN = \Delta EIM$ $\Delta MIJ = \Delta NIL$ (c.g.c) $\Rightarrow IJ = IL$ và $\widehat{MIJ} = \widehat{NIL}$ $\Rightarrow \widehat{MIJ} + \widehat{MIL} = \widehat{NIL} + \widehat{MIL} = 90° \Rightarrow \Delta IJL$ vuông cân tại I. Tương tự ΔJKL vuông cân tại K, do đó tứ giác $IJKL$ là hình vuông. Từ đó ta có bài toán hay và khó sau:

Bài toán 12. *Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra ngoài tứ giác đó các tam giác ABE, BCF, CDM, ADN lần lượt vuông cân tại E, F, M, N.*

a) *Chứng minh rằng $EM = FN$ và $EM \perp FN$.*

b) *Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, EM, BD, FN. Chứng minh rằng tứ giác $IJKL$ là hình vuông.*

• Bây giờ ta thay tứ giác $ABCD$ ở bài toán 12 thành hình bình hành $ABCD$ (h. 8). Gọi I là trung điểm của AC, vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$. Mà các tam giác ABE, CDM lần lượt vuông cân tại $E, M \Rightarrow EA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = CM$ (1).



Hình 8

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DCA} \Rightarrow 45° + \widehat{BAC} = 45° + \widehat{DCA}$

$\Rightarrow \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \widehat{MCD} + \widehat{DCA}$

hay $\widehat{EAC} = \widehat{MCA} \Rightarrow AE \parallel CM$ (2). Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $EAMC$ là hình bình hành $\Rightarrow IE = IM$. Theo bài toán 1 ta có $IE = IF$ và $IN = IM$. Suy ra $IE = IM = IF = IN$ (3). Mặt khác theo bài toán 12 ta lại có $EM \perp FN$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $EFMN$ là hình vuông.

Từ đó ta có có bài toán sau:

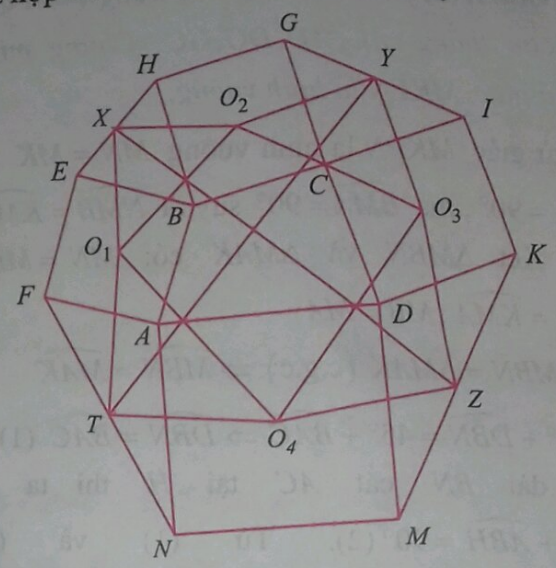
Bài toán 13. *Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng ra ngoài hình bình hành đó các tam giác ABE, BCF, CDM, ADN lần lượt vuông cân tại E, F, M, N. Chứng minh rằng tứ giác $EFMN$ là hình vuông.*

• Bên ngoài tứ giác $ABCD$ vẽ các hình vuông $ABEF, BCGH, CDKI, ADMN$ (h.9).

Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EH, GI, KM, NF; O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của các hình vuông trên. Khi đó theo bài toán 9 ta có các tam giác $O_2XO_2, O_2YO_3, O_3ZO_4, O_4TO_1$ lần lượt vuông cân tại X, Y, Z, T.

Xét tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ có các tam giác vuông cân $O_2XO_2, O_2YO_3, O_3ZO_4, O_4TO_1$ nằm ngoài tứ giác nên theo bài toán 12 ta có $XZ = YT$ và $XZ \perp YT$.

Kết hợp bài toán 12 ta có bài toán hay và khó sau:



Hình 9

Bài toán 14 (*Tạp chí Toán Tuổi thơ 2, số 72*). *Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 theo thứ tự là tâm các hình vuông $ABEF, BCGH, CDKI, ADMN$ có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA dựng ra phía ngoài tam giác.*

a) *Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.*

b) *Trung điểm các đường chéo của các tứ giác $ABCD$, $O_1O_2O_3O_4$ là đỉnh của một hình vuông.*

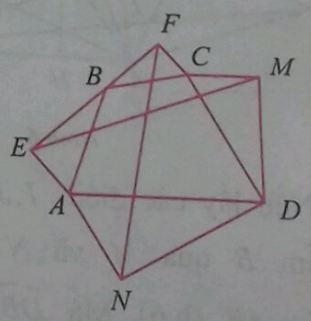
c) *Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EH, GI, KM, NF. Chứng minh $XZ = YT$ và $XZ \perp YT$.*

• Bằng cách vẽ ra phía ngoài tứ giác $ABCD$ các tam giác vuông ABE, BCF, CDG, ADH sao cho

$$\widehat{ABE} = \widehat{CBF} = 30°$$

và $$\widehat{ADH} = \widehat{CDG} = 30°$$

(h.10) ta cũng tạo ra được bài toán sau:



Hình 10

(*Xem tiếp trang 19*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, NĂM HỌC 2021 - 2022

VÒNG 1

I. Phần trắc nghiệm

Câu	1	2	2	2
ĐA	A	C	B	D

I. Phần tự luận

Câu 5. *Giải phương trình* $x^2 - x - 2 = 0$.

Giải. Ta thấy: $a - b + c = 1 - (-1) + (-2) = 0$ nên PT có hai nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = 2$.

Câu 6. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

Giải. $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 4 \\ 2x + 3(3x + 4) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 4 \\ 11x + 12 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 4 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 7. *Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d: $y = 2x - m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_1; y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2)$.*

Giải. PT hoành độ giao điểm của (P) và d là:

$$x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0 \ (1).$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (-1)^2 - 1.(m) > 0$ $\Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$ (*). Do x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của d và (P) nên x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$.

Do $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in d$ nên

$$y_1 = 2x_1 - m,\ y_2 = 2x_2 - m.$$

Suy ra: $y_1 + y_2 + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2)$

$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 2m + x_1^2 x_2^2 = 6(x_1 + x_2)$

$\Leftrightarrow -2m + x_1^2 x_2^2 = 4(x_1 + x_2) \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array}\right.$

So sánh với ĐK(*) ta được $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 8. *Hai đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tiếp tục làm phần việc còn lại. Kể từ khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất của đội B tăng gấp đôi, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?*

Giải. Gọi x là số ngày đội A làm một mình xong công việc ($x > 8$); y là số ngày đội B làm một mình xong công việc ($y > 12$). Một ngày đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc, một ngày đội B làm được $\frac{1}{y}$ công việc. Suy ra một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. Hai đội làm chung công việc thì hoàn thành trong 12 ngày nên một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ công việc. Do đó ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1). Hai đội làm chung 8 ngày được $8.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ công việc. Khi làm một mình, năng suất đội B tăng lên gấp đôi nên lúc đó một ngày đội B làm được $\frac{2}{y}$ công việc. Do đó trong 8 ngày tiếp theo đội B làm được $8.\frac{2}{y} = \frac{16}{y}$ công việc. Từ đó ta có PT:

$$8.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{16}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{x} + \frac{24}{y} = 1 \quad (2).$$

Từ (1) suy ra $\frac{1}{y} = \frac{1}{12} - \frac{1}{x}$ thay vào (2) ta được:

$\frac{8}{x}+24\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{8}{x}+2-\frac{24}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{x}=1 \Leftrightarrow x=16$,

suy ra $\frac{1}{y}=\frac{1}{12}-\frac{1}{16}=\frac{1}{48} \Rightarrow y=48$. So sánh với ĐK ta được $x = 16$, $y = 48$. Vậy với năng suất ban đầu thì đội A làm một mình sẽ hoàn thành công việc trong 16 ngày, đội B làm một mình sẽ hoàn thành công việc trong 48 ngày.

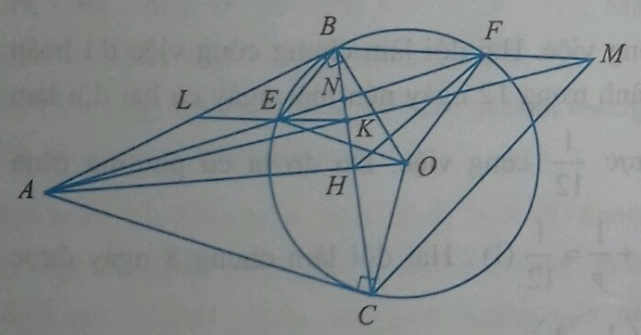
Câu 9. *Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ tia Ax (nằm giữa hai tia AB, AO) cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F).*

a) *Chứng minh rằng tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn.*

b) *Chứng minh rằng* $AB^2 = AE.AF$ *và* $\widehat{OEF}=\widehat{OHF}$, *với H là giao điểm của AO và BC.*

c) *Đường thẳng qua E song song với BF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng AK cắt đường thẳng BF tại M. Chứng minh rằng MC = 2.HF.*

Giải.



a) Do AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO}=90^0, \widehat{ACO}=90^0$. Xét tứ giác $ABOC$ ta có: $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=90^0+90^0=180^0$, suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{ABE}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BE}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung), $\widehat{AFB}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BE}$ (góc nội tiếp). Từ đó: $\widehat{ABE}=\widehat{AFB}$. Xét hai tam giác ABE và tam giác AFB ta có: $\widehat{ABE}=\widehat{AFB}$ (theo chứng minh trên). Mặt khác: $\widehat{BAE}=\widehat{BAF}$ (góc chung). Suy ra $\Delta ABE \sim \Delta AFB \Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2=AE.AF$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABO vuông tại B với đường cao BH ta được: $AH.AO=AB^2$ (2). Từ (1) và (2) ta được: $AE.AF=AH.AO$ (3). Từ (3) ta được $\frac{AE}{AO}=\frac{AH}{AF}$, kết hợp với $\widehat{OAE}=\widehat{FAH}$ (góc chung) nên $\Delta OAE \sim \Delta FAH$ (c.g.c), từ đó $\widehat{AOE}=\widehat{AFH}$. Suy ra tứ giác $OHEF$ nội tiếp đường tròn, vậy $\widehat{OEF}=\widehat{OHF}$.

c) Gọi N là giao điểm của BC và EF. Theo câu b) ta có $\widehat{OHF}=\widehat{OEF}$ và $\widehat{AHE}=\widehat{OFE}$ (cùng bù với $\widehat{OHE}$). Tam giác OEF cân tại O, suy ra $\widehat{OFE}=\widehat{OEF}$, từ ba đẳng thức trên ta được $\widehat{OHF}=\widehat{AHE}$ (4). Do $BC \perp OA$ nên $\widehat{OHF}=90^0-\widehat{NHF}$, $\widehat{AHE}=90^0-\widehat{NHE}$, kết hợp với (4) ta được $\widehat{NHF}=\widehat{NHE}$, suy ra HN là phân giác của $\widehat{EHF}$. Mà $AH \perp HN$, suy ra AH là phân giác ngoài của $\widehat{EHF}$. Theo tính chất của đường phân giác của ΔEHF ta được:

$$\frac{NE}{NF}=\frac{HE}{HF}=\frac{AE}{AF} \quad (5).$$

Gọi L là giao điểm EK với AB. Ta có $KE \parallel BF$ nên $\frac{KE}{BF}=\frac{NE}{NF}$. Lại có $NE \parallel BF$ nên $\frac{LE}{BF}=\frac{AE}{AF}$.

Kết hợp với (5) ta được:

$$\frac{LE}{BF}=\frac{KE}{BF} \Rightarrow LE=KE \quad (6).$$

Cũng theo định lí Thales ta suy ra:

$\frac{LE}{BF}=\frac{AE}{AF}=\frac{KE}{FM}$, kết hợp với (6) ta được $BF = FM$ hay F là trung điểm của BM. Do H là trung điểm của BC suy ra HF là đường trung bình của ΔBCM, suy ra $MC = 2HF$.

Câu 10. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện* $abc \le 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a(1-b^3)}{b^3}+\frac{b(1-c^3)}{c^3}+\frac{c(1-a^3)}{a^3} \ge 0.$$

Giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a-ab^3}{b^3}+\frac{b-bc^3}{c^3}+\frac{c-ca^3}{a^3} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3} \ge a+b+c.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta được:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}.\frac{a}{b^3}.\frac{1}{a^2}}=\frac{3}{b^2}$$

$$\frac{b}{c^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{c^3}.\frac{b}{c^3}.\frac{1}{b^2}}=\frac{3}{c^2}$$

$$\frac{c}{a^3}+\frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c}{a^3}.\frac{c}{a^3}.\frac{1}{c^2}}=\frac{3}{a^2}.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$2.\frac{a}{b^3}+2.\frac{b}{c^3}+2.\frac{c}{a^3}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{3}{a^2}+\frac{3}{b^2}+\frac{3}{c^2}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

$$\ge\frac{abc}{ab}+\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}$$

$$=a+b+c$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge a+b+c.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

VÒNG 2

Câu 1. a) *Giải phương trình* $4x^2-x-3=2\sqrt{x+2}$.

b) *Giải phương trình* $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

c) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0\end{cases}.$$

Giải. a) ĐK: $x\ge-2$. PT tương đương với:

$$4x^2=x+3+2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 4x^2=x+2+2\sqrt{x+2}+1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\sqrt{x+2}+1\\2x=-\sqrt{x+2}-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=2x-1\\\sqrt{x+2}=-2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\ge0\\x+2=(2x-1)^2\end{cases}\\\begin{cases}-2x-1\ge0\\x+2=(-2x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\4x^2-5x-1=0\end{cases}\\\begin{cases}x\le-\frac{1}{2}\\4x^2+3x-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5+\sqrt{41}}{8}\\x=-1\end{array}\right..$$

b) ĐK: $x\ne-2$ (1). Ta có:

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=5$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2-2.x.\frac{2x}{x+2}+2.x.\frac{2x}{x+2}=5$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5.$$

Đặt $t=\frac{x^2}{x+2}$, thay vào PT trên ta được:

$$t^2+4t=5\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+2}=1\\\frac{x^2}{x+2}=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\x^2+5x+10=0\end{array}\right.$$

+ Với $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

+ Với $x^2+5x+10=0$: PT này vô nghiệm vì $\Delta=5^2-4.10=-15<0$.

So sánh với ĐK(1) ta được tập nghiệm của PT là $S=\{-1;2\}$.

c) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\2x^2-2xy+y^2-xy+3x-2y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\2x(x-y)-y(x-y)+2x-y+x-y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\(2x-y)(x-y)+2x-y+x-y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\(2x-y+1)(x-y+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\ (1)\\\left[\begin{array}{l}2x-y+1=0\\x-y+1=0\end{array}\right.\end{cases}$$

+) Với $2x-y+1=0 \Leftrightarrow y=2x+1$ thay vào (1) ta có:

$x^2+(2x+1)^2+x+2x+1=8 \Leftrightarrow 5x^2+7x-6=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, y=-3 \\ x=\dfrac{3}{5}, y=\dfrac{11}{5} \end{array}\right..$$

+) Với $x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$ thay vào (1) ta có:

$x^2+(x+1)^2+x+x+1=8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-3, y=-2 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của hệ là: $S=\left\{(1;2),(-3;-2),(-2;-3),\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right)\right\}$.

Câu 2. a) *Cho các số nguyên x, y, z thoả mãn*

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

Chứng minh rằng xyz chia hết cho 24.

b) *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a; b; c) sao cho $(a+b+c)^2-2a+2b$ là số chính phương.*

Giải. a) • Nếu cả ba số cùng lẻ thì vế trái lẻ, còn vế phải chẵn vô lí.

• Nếu trong ba số đó có ít nhất một số chẵn, chẳng hạn là số x:

+ Nếu trong hai số y, z đều lẻ thì $y^2+z^2 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \equiv 2 \pmod 4$ vô lí do vế phải chia hết cho 4.

+ Nếu trong hai số y, z có một số chẵn và một số lẻ thì vế trái lẻ, vế phải chẵn vô lí.

+ Như vậy trong hai số y, z không có số lẻ suy ra các số x, y, z đều chẵn, suy ra $xyz \vdots 8$ (1).

Giả sử xyz không chia hết cho 3, suy ra x, y, z đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow x^2, y^2, z^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \pmod 3$

$\Rightarrow 2xyz \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow xyz \vdots 3$, mâu thuẫn!

Do đó $xyz \vdots 3$ (2). Từ (1) và (2) ta được $xyz \vdots 24$.

b) Ta có: $(a+b+c)^2-2a+2b$

$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)+1-4a-2c-1$

$=(a+b+c+1)^2-4a-2c-1<(a+b+c+1)^2$ (1).

Mặt khác $(a+b+c)^2-2a+2b$

$=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+1+4b+2c-1$

$=(a+b+c-1)^2+4b+2c-1>(a+b+c-1)^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta được:

$(a+b+c-1)^2<(a+b+c)^2-2a+2b<(a+b+c+1)^2$,

kết hợp với $(a+b+c)^2-2a+2b$ là số chính phương nên $(a+b+c)^2-2a+2b=(a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow -2a+2b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

Vậy $(a;b;c)=(x;x;y)$, trong đó x, y là hai số nguyên dương tuỳ ý.

Câu 3. *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\sqrt{a+b+ab+1}+c=6$. Chứng minh rằng:*

a) $a+b+2c \geq 10$.

b) $\dfrac{2a+1}{a+1}+\dfrac{2b+1}{b+1}+\dfrac{2c+2}{c+2} \leq 5$.

Giải. a) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta được: $a+b+2c=a+1+b+1+2c-2$

$$\geq 2\sqrt{(a+1)(b+1)}+2c-2$$

$$=2\left(\sqrt{ab+a+b+1}+c\right)-2=10.$$

b) $\dfrac{2a+1}{a+1}+\dfrac{2b+1}{b+1}+\dfrac{2c+2}{c+2} \leq 5$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2-\frac{2a+1}{a+1}+2-\frac{2b+1}{b+1}+2-\frac{2c+2}{c+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \geq 1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT Schwarz ta được:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}+\frac{2}{c+2}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{ab+a+b+1}}+\frac{1}{c+2}\right)$$

$$\geq 2\left(\frac{4}{\sqrt{ab+a+b+1}+c+2}\right)=1.$$

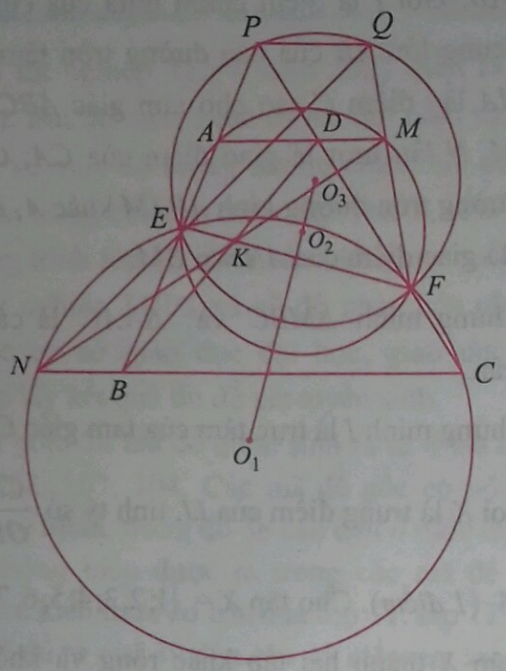
Câu 4. *Cho hình thang ABCD (AD song song với BC), AD < BC). Các điểm E, F lần lượt thuộc các cạnh AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường thẳng AD tại điểm M (M không trùng với A và D, D nằm giữa A và M), đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt đường thẳng BC tại điểm N (N không trùng với B và C, B nằm giữa C và N). Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm P, đường thẳng EN cắt đường thẳng FM tại điểm Q. Chứng minh rằng:*

a) *Tứ giác EFQP nội tiếp đường tròn.*

b) *PQ song song với BC và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PQE, AMF, CEN cùng nằm trên một đường thẳng.*

c) *Các đường thẳng MN, BD, EF đồng quy tại một điểm.*

Giải.



a) Ta có: $\widehat{EPF} = 180^0 - \widehat{PAD} - \widehat{PDA}$

$= 180^0 - \widehat{QFE} - \widehat{PDA}$ (do tứ giác $AEFM$ nội tiếp)

$= 180^0 - \widehat{QFE} - \widehat{FCN}$ (do $BC \parallel AD$)

$= 180^0 - \widehat{QFE} - \widehat{QEF}$ (do tứ giác $EFCN$ nội tiếp)

$= \widehat{EQF}$.

Suy ra $\widehat{EPF} = \widehat{EQF}$. Mà P, Q thuộc nửa mặt phẳng bờ EF nên tứ giác $EFQP$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $EFQP$ nội tiếp nên $\widehat{QPF} = \widehat{QEF}$. Do tứ giác $EFCN$ nội tiếp nên $\widehat{QEF} = \widehat{NCF}$.

Từ hai đẳng thức trên ta được hai góc (ở vị trí so le trong) $\widehat{QPF} = \widehat{NCF} \Rightarrow PQ \parallel BC$. Do đường tròn ngoại tiếp các tam giác PQE, AMF, CEN cùng chung dây cung EF nên tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác này nằm trên trung trực của EF suy ra các tâm này thẳng hàng.

c) Gọi K là giao điểm của MN và BD, ta sẽ chứng minh E, K, F thẳng hàng bằng cách sử dụng định lí Menelaus cho ΔBDP.

Do $PQ \parallel BN, AM \parallel BN, DM \parallel PQ$ nên theo định lí Thales ta có:

$$\frac{EP}{EB} = \frac{PQ}{NB};\ \frac{NB}{DM} = \frac{KB}{KD};\ \frac{FD}{FP} = \frac{MD}{PQ}..$$

Xét ΔBDP với các điểm E, K, F ta có:

$$\frac{EP}{EB}.\frac{KB}{KD}.\frac{FD}{FP} = \frac{PQ}{NB}.\frac{NB}{DM}.\frac{DM}{PQ} = 1.$$

Do đó theo định lí Menelaus đảo cho ΔBDP với các điểm E, K, F ta được E, K, F thẳng hàng hay EF đi qua K. Do đó MN, BD, EF đồng quy tại điểm K.

Câu 5. *Thầy Quyết viết các số nguyên 1, 2, 3..., 2021, 2022 lên bảng. Thầy Quyết thực hiện việc thay số như sau: Mỗi lần thay số, thầy chọn ra hai số bất kì trên bảng, xoá hai số này đi và viết lên bảng số trung bình cộng của hai số vừa xoá. Sau 2021 lần thay số như vậy, trên bảng còn lại duy nhất một số.*

a) *Chứng minh rằng số còn lại trên bảng có thể là số 2021.*

b) *Chứng minh rằng số còn lại trên bảng có thể là số 2006.*

Giải. a) Đầu tiên ta xoá hai số 1 và 3 rồi viết lên bảng số 2, tiếp tục xoá hai số 2 và 2 rồi viết lên bảng một số 2. Sau hai lần thay số, các số còn lại trên bảng là 2,4,5,...,2021, 2022.

Lần 3, thay số 2 và 4 trên bảng bằng số 3 ta được:

3, 5,...., 2021, 2022

$\Rightarrow \frac{3+5}{2}, 6, 7, ..., 2021, 2022 \Rightarrow 4, 6, 7, ..., 2021, 2022$

$\Rightarrow \frac{4+6}{2}, 7, ..., 2021, 2022 \Leftrightarrow 5, 7, ..., 2021, 2022 \Rightarrow ...$

Cứ như vậy, sau 2020 lần thay số được: 2020, 2022. Tiếp tục thay bằng trung bình cộng (lần thứ 2021) thì trên bảng còn lại số 2021.

b) Làm giống như phần a) thì sau một số lần thay số, ta được các số trên bảng là:

2004, 2006, 2007, 2008, 2009,..., 2021, 2022.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2021 - 2022

(Thời gian làm bài: 150 phút; Dành cho tất cả các thi sinh)

Câu 1. *(1,5 điểm)* Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình:

$$9x^2=\left(x^2+x-5\right)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+xy^2+2y^3=0 \\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4 \end{cases}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn:

$$m(m+1)(m+2)=n^2.$$

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+xy=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}..$$

Câu 4. *(2,5 điểm)*. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung lớn AB của của đường tròn tâm I, bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM.

a) Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMM.

c) Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỷ số $\frac{CJ}{OK}$.

Câu 5. *(1 điểm)*. Cho tập $X=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, chia tập X thành hai tập khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại ba số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn: $a+c=2b$.

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh) ***Giới thiệu***

****

☞ HƯỚNG DẪN GIẢI ...

Bây giờ ta làm giống như phần a) nhưng làm từ cuối: $2004, 2006, 2007, ...2021, 2022$

$\Rightarrow 2004, 2006, 2007, ...2019, \frac{2020+2022}{2}, 2021$

$\Rightarrow 2004, 2006, 2007, ...2019, 2021, 2021$

$\Rightarrow 2004, 2006, 2007, ...2018, \frac{2019+2021}{2}$

$\Rightarrow 2004, 2006, 2007, ..., 2018, 2020 \Rightarrow ...$

Thì sau một số lần thay số ta được các số trên bảng là: 2004, 2006, 2007, 2009.

Tiếp tục thay hai số 2007, 2009 bởi 2008. Thay hai số 2004, 2008 bởi 2006. Khi đó trên bảng còn hai số 2006, tiếp tục thay bằng trung bình cộng của chúng thì trên bảng còn lại duy nhất một số 2006. Mỗi lần thay số, số các số trên bảng giảm đi 1. Ban đầu trên bảng có 2022 số, cuối cùng còn lại một số, vậy thầy Quyết đã thực hiện đúng 2021 lần thay số.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***Giới thiệu***

PHÂN TÍCH, BÌNH LUẬN MỘT SỐ CÂU VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021

TRƯƠNG QUỐC TOẢN và BAN QUẢN TRỊ
NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2021 diễn ra trong hai đợt. Bài thi môn Toán cả hai đợt năm nay nhìn chung về mức độ tương đương nhau; nội dung đề thi nằm trong chương trình cấp THPT, chủ yếu là chương trình lớp 12, đảm bảo kiến thức cơ bản để xét tốt nghiệp THPT và có độ phân hóa phù hợp để các cơ sở giáo dục đại học, giáo dục nghề nghiệp lấy kết quả thi để xét tuyển sinh.

Đề thi gồm 24 mã đề được sinh ra từ 4 mã đề gốc 101, 102, 103, 104. Các mã đề gốc có nội dung tương tự nhau, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 45 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, từ câu 46 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT. Học sinh có học lực khá, giỏi; có kỹ năng phân tích, tổng hợp, tính toán, liên hệ hệ tốt với các kiến thức nội bộ toán học thì mới có thể hoàn thành tốt bài thi.

Để có cái nhìn một cách toàn diện về đề thi môn Toán cả hai đợt năm 2021, bên cạnh việc chỉ ra những kiến thức cơ bản vận dụng, những kỹ năng cần thiết để trả lời nhanh câu hỏi trắc nghiệm và chỉ ra những sai lầm mà các em thường gặp khi giải toán. Ban quản trị **NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** xin giới thiệu với quý thầy cô và các em học sinh bài viết: "***Phân tích, bình luận một số các câu vận dụng, vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT năm 2021***". Hy vọng, bài viết sẽ giúp quý thầy cô có cái nhìn toàn diện về bài thi môn Toán năm 2021, đồng thời giúp các em học sinh có tài liệu tham khảo ôn thi TNTHPT năm 2022 và rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm bài thi môn Toán.

Câu 39 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Cho hàm số* $f(x)=\begin{cases}2x+5 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+4 & khi\ x<1\end{cases}$. *Giả sử F là nguyên hàm của f trên* $\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $F(0)=2$. *Giá trị của* $F(-1)+2F(2)$ *bằng*

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải. $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}.$$

Vì $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}.$$

Do hàm số F có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên F liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số F liên tục tại $x=1$. Suy ra:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+5x+C_1\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^3+4x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+5+C_1=1+4+2\Leftrightarrow C_1=1$$

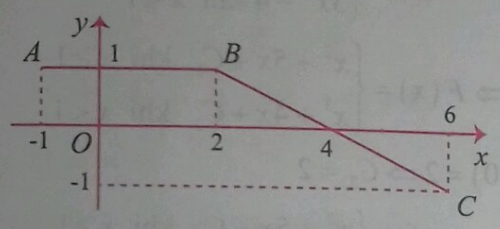
$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}.$$

Vậy $F(-1)+2F(2)=-3+2.15=27\Rightarrow$ chọn **A.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi yêu cầu tính giá trị của biểu thức chứa các giá trị của nguyên hàm tại một điểm. Khó khăn mà học sinh gặp phải trong câu hỏi này là hàm số cho bởi nhiều công thức và xác định hằng số C của nguyên hàm thỏa mãn yêu cầu giả thiết của bài toán. Để giải quyết câu hỏi này trước tiên học sinh phải có kỹ năng thành thạo tính nguyên hàm và mấu chốt để giải quyết câu hỏi này là tìm hằng số C thỏa mãn giả thiết của câu hỏi thông qua tính chất liên tục của hàm số đã cho tại điểm* $x=1$.

• *Một số sai lầm học sinh thường gặp khi giải câu này là: Thứ nhất, sau khi tìm được hàm số $F(x)$ học sinh thay cả hai giá trị $-1;2$ vào công thức $F(x)=x^3+4x+2$ hoặc thay hai giá trị $-1;2$ vào hai công thức ngược lại sẽ dẫn đến chọn đáp án D. Thứ hai, khi tìm hàm số $F(x)$ không sử dụng tính chất liên tục của hàm số $F(x)$ tại điểm $x=1$ nên tìm được $F(x)=\begin{cases} x^2+5x+2 & \text{khi } x\ge 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$, sẽ dẫn đến chọn đáp án B.*

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 39 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình dưới.*



Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 40 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn*

$$\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0?$$

A. 27. **B.** *Vô số.* **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải. Điều kiện xác định của BPT là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]$ với $x>-25$. BPT có dạng $A(x)\le 0$.

Ta có: $3^{x^2}-9^x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Vậy có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn $\Rightarrow$ chọn **C.**

Nhận xét: • Đây là câu hỏi giải bất phương trình tích chứa biểu thức mũ và logarit. Để giải bất phương trình tích $f(x).g(x)\le 0$ thông thường ta lập bảng xét dấu $f(x).g(x)$. Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình. Trong quá trình xét dấu, học sinh cần lưu ý đến tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit. Hoặc có thể tiếp cận cách giải khác chia các trường hợp của $f(x)$ sau khi đã nêu điều kiện xác định của BPT: $f(x).g(x)\le 0$

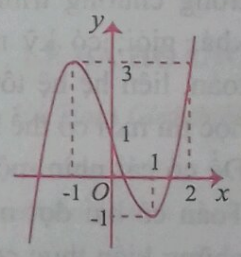
$\Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)\le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$.

• Một số sai lầm học sinh thường gặp khi giải câu này là: Thứ nhất, không tìm điều kiện xác định của bất phương trình, sau khi giải sẽ chọn đáp án B; Thứ hai, dựa vào bảng xét dấu không lấy nghiệm của bất phương trình tại các điểm dấu bằng của bất phương trình xảy ra, dẫn đến chọn đáp án A hoặc D.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 40 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2+1)-\log_3(x+21)\right]\left(16-2^{x-1}\right)\ge 0$?*

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** *Vô số.*

Câu 41 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là*

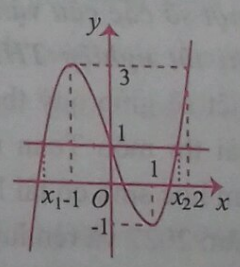


A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số ta có

$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=x_1\ (x_1<-1) & (1) \\ f(x)=0 & (2). \\ f(x)=x_2\ (1<x_2<2) & (3) \end{array}\right.$$

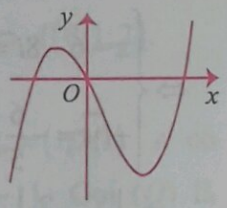
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra: PT(1) có đúng 1 nghiệm, PT(2) và (3) mỗi PT có 3 nghiệm phân biệt và khác các nghiệm của các PT còn lại. Do đó PT ban đầu có 7 nghiệm phân biệt nhau $\Rightarrow$ chọn **D.**



Nhận xét: • *Đây là câu hỏi quy về xét sự tương giao giữa đồ thị của hàm hợp của hàm số bậc 3 chưa xác định (hàm hợp của hàm ẩn)* $y = f(f(x))$ *và đường thẳng* $y = k$, *trong đó* k *là hằng số cho trước và đồ thị của hàm số* $y = f(x)$ *cũng cho trước. Để giải câu hỏi này học sinh phải nắm vững bài toán tương giao; có kỹ năng quan sát để xác định hoành độ giao điểm đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *và đường thẳng* $y = k$.

• *Một số sai lầm thường gặp khi học sinh giải câu này là: Thứ nhất, quy việc tìm số nghiệm của PT* $f(f(x)) = 1$ *tương đương với số nghiệm của PT* $f(x) = 0$, *dẫn đến chọn đáp án B. Thứ hai, thiếu kỹ năng lập luận nên ngộ nhận mỗi PT* $(1),(2),(3)$ *đều có 3 nghiệm phân biệt dẫn đến chọn đáp án A.*

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 41 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cho hàm số* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$. *Hàm số* $y = f'(x)$ *có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình* $3f(x) - 4 = 0$ *là*



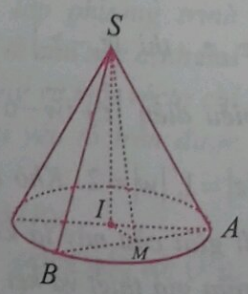
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 42 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng* 60° *ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh* $4a$. *Diện tích xung quanh của (N) bằng:*

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải. Gọi I là tâm đáy nón. Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Rightarrow \widehat{SMI} = 60^\circ$. Do tam giác SAB đều cạnh $4a$ $\Rightarrow SM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.



Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a; IM = a\sqrt{3}$. Xét ΔIMA vuông tại M ta có $IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$. Khi đó $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{7}.4a = 4\sqrt{7}\pi a^2 \Rightarrow$ chọn **D.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi quen thuộc tính diện tích xung quanh của hình nón. Để tính diện tích xung quanh của hình nón ta áp dụng công thức* $S_{xq} = \pi rl$. *Trong bài toán này đường sinh* $l = 4a$, *nên chúng ta chỉ cần xác định bán kính r của hình nón (N) thông qua giả thiết bài toán.*

Để làm được câu hỏi này ngoài việc nhớ công thức tính diện tích xung quanh của hình nón còn yêu cầu học sinh thành thạo cách xác định thiết diện của mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón với hình nón và xác định được góc giữa hai mặt phẳng.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 42 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng* $3a$, *ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng* $16a^2$. *Diện tích xung quanh của (T) bằng*

A. $\dfrac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$.

C. $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 43 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Trên tập hợp các số phức, xét phương trình* $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ *(m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm* z_0 *thỏa mãn* $|z_0| = 7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

TH1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$, khi đó PT có nghiệm thực z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7 \Rightarrow z_0 = \pm 7$.

Thay $z_0 = 7$ vào PT đã cho ta được $m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$ (thỏa mãn $m \geq -\dfrac{1}{2}$). Thay $z_0 = -7$ vào PT đã cho ta được $m^2 + 14m + 63 = 0$ (vô nghiệm). Trường hợp này có 2 giá trị m thỏa mãn.

TH2: PT không có nghiệm thực, có nghiệm phức $\Leftrightarrow \Delta' = 2m+1<0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. Chú ý rằng nếu PT có nghiệm z_0 thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm của PT, do đó theo định lí Viète ta có:

$$m^2 = z_0.\overline{z}_0 = |z_0|^2 = 7^2 \Leftrightarrow m = \pm 7.$$

Đối chiếu điều kiện $m<-\frac{1}{2}$ trường hợp này ta được $m=-7$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn $\Rightarrow$ chọn **B.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi quen thuộc tìm các giá trị của tham số m để PT bậc hai với hệ số thực có nghiệm phức thỏa mãn điều kiện cho trước. Để giải giải quyết câu hỏi này trước tiên học sinh cần tính biệt thức Δ; xét hai trường hợp $\Delta \ge 0, \Delta < 0$, đồng thời lưu ý khai thác điều kiện $|z_0| = 7$ và nếu z_0 là một nghiệm phức của PT đã cho thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm của nó để giải quyết trường hợp $\Delta < 0$.*

• *Một số sai lầm thường gặp khi học sinh giải câu này là: Thứ nhất, chỉ xét trường hợp PT có nghiệm thực thỏa mãn điều kiện, từ đó chọn đáp án A. Thứ hai, không xét trường hợp PT có nghiệm thực thỏa mãn điều kiện, từ đó chọn đáp án C. Thứ ba, xét các các trường hợp của Δ nhưng không kiểm tra lại các giá trị của tham số tìm được, từ đó chọn đáp án D.*

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 48 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực (a; b) sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2 = 3+3i$?*

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 44 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng*

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-6-8i$ và $-i\overline{w}$. Ta có:

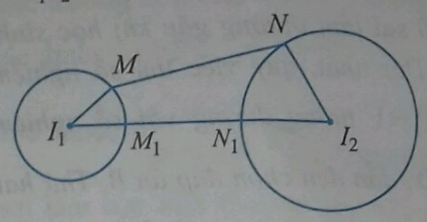
$$|z|=1 \Leftrightarrow |(z-6-8i)+(6+8i)|=1 \Leftrightarrow MI_1 = 1,$$

với $I_1(-6;-8)$. Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C_1) tâm $I_1(-6;-8)$ và bán kính $R_1=1$.

Ta có $|-i\overline{w}| = |-i|.|\overline{w}| = 2$ nên tập hợp điểm N là đường tròn (C_2) tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2=2$. Tính được $I_1I_2=10$. Ta có:

$$|z+i\overline{w}-6-8i| = MN$$

$$\Rightarrow \min P = I_1I_2 - R_1 - R_2 = 10-1-2 = 7.$$



Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv M_1; N \equiv N_1$ (hình vẽ)

khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{I_2M} = \frac{9}{10}\overrightarrow{I_2I_1} \\ \overrightarrow{I_2N} = \frac{1}{5}\overrightarrow{I_2I_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(-\frac{27}{5};-\frac{36}{5}\right) \\ N\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-6-8i = -\frac{27}{5}-\frac{36}{5}i \\ -i\overline{w} = -\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \\ w = \frac{8}{5}+\frac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow$$

$|z-w| = \left|-1-\frac{2}{5}i\right| = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow$ chọn **D.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi tìm môđun của số phức hay, có nhiều các giải khác nhau, tùy khả năng và thói quen, người giải có thể lựa chọn phương pháp khác nhau để giải bài toán. Để giải quyết câu hỏi này yêu cầu học sinh phải nắm vững ý nghĩa hình học, môđun của số phức, các tính chất hình học.*

Mấu chốt trong lời giải trên là sử dụng tính chất: Nếu M_1, M_2 lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 thì $|z_1-z_2| = M_1M_2$ và khéo léo trong việc biểu diễn $|z+i\overline{w}-6-8i| = MN$ thông qua giả thiết $|z|=1, |w|=2$. Khó khăn mà học sinh gặp phải khi đi giải câu này là không thiết lập được mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận của câu hỏi để chuyển yêu cầu của câu hỏi đã cho về bài toán thường gặp.

Ngoài cách tiếp cận lời giải câu hỏi trên, có thể sử dụng bất đẳng thức đại số để giải câu hỏi này.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 43 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $|z-w|=4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của . bằng*

A. $\sqrt{41}$. **B.** $5-2\sqrt{2}$. **C.** $5-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 45 (Đề thi TN THPT đợt 1_mã 101). *Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình*

A. $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-4}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}$. **D.** $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

Lời giải. Tọa độ giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}\\ x+2y+z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=2\end{cases}\Rightarrow A(0;1;2).$$

(P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;2;1)$. d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Khi đó hình chiếu vuông góc d' của d trên (P) là giao tuyến của (P) và (Q). Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=[\vec{u}_d,\vec{n}_P]=(3;-2;1)$. Do đó d' có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(4;2;-8)$.

Suy ra: $d':\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}\Rightarrow$ chọn **C.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi quen thuộc về lập phương trình đường thẳng. Để lập phương trình đường thẳng thông thường chúng ta cần xác định hai yếu tố: một điểm thuộc đường thẳng và một véctơ chỉ phương. Trong bài toán này, hai yếu tố trên được xác định thông qua các bước sau:*

+ Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P);

+ Dựng mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P);

+ Hình chiếu vuông góc d' của d trên (P) là giao tuyến của (P) và (Q) nên d' có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]$ ($\vec{u}=[\vec{n}_P,[\vec{u}_d,\vec{n}_P]]$).

Ngoài cách giải trên, có thể tiếp cận lời giải bằng cách

+ Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P).

+ Chọn một điểm M trên d, $(M\neq A)$.

+ Tìm hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) là H.

+ PT đường thẳng cần tìm đi qua hai điểm A và H.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 46 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3;1;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là*

A. $\begin{cases}x=3+t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+t\\ y=4-2t\\ z=-3+3t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3+3t\\ y=5-2t\\ z=-1+t\end{cases}$.

Câu 46 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng*

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải. Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b$; $f''(x)=6x+2a$; $f'''(x)=6$;

$$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+6.$$

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6 nên không giảm tổng quát, $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 và $g(x_1)=-3$, $g(x_2)=6$.

PT độ giao điểm của hai đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là: $\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+6$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|$$

$=2\ln 2\Rightarrow$ chọn **D.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi khá lạ với học sinh về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cho bởi hàm số chưa xác định công thức (hay còn gọi là hàm ẩn) và đường $y=1$. Học sinh khá lúng túng khi giải quyết câu này, bởi thông thường học sinh sẽ xác định hàm ẩn thông qua giả thiết. Từ đó, đưa về bài toán quen thuộc.*

Để giải quyết bài toán này học sinh phải nhớ công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường; thiết lập phương trình hoành độ giao điểm, biến đổi và thiết lập liên hệ nó với biểu thức $g'(x)$ để tìm cận; Biến đổi công thức tính diện tích hình phẳng về bài toán tính tích phân quen thuộc.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 44 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng*

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

Câu 47 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x}$?*

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải. Giả sử tồn tại $y\in\mathbb{Z}$ để PT trên có nghiệm $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$. Suy ra $1+xy>0$.

Lấy lôgarit cơ số 27 hai vế, PT đã cho tương đương với $3x^2+(y-9)x-\log_{27}(1+xy)=0$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2+(y-9)x-\log_{27}(1+xy)$ với $x\in\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

• Với $y<0$, do $\begin{cases}1+xy>0\\ x>\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow y>-\dfrac{1}{x}$, suy ra $-3<y<0$ hay $y\in\{-1;-2\}$.

- Với $y=-1$, ta có: $f(x)=3x^2-10x-\log_{27}(1-x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\dfrac{2}{3};1\right)$.

Do $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-5$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$ suy ra PT có nghiệm trên $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

- Với $y=-2$, ta có $f(x)=3x^2-11x-\log_{27}(1-2x)$ là hàm số liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

Do $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-3$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}f(x)=+\infty$ suy ra PT có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$.

• Với $y=0$, PT trở thành $3x^2-9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ không thỏa mãn.

• Với $y\geq 10$, ta có:

$$f'(x)=6x+(y-9)-\frac{y}{3(1+xy)\ln 3},$$

$$f''(x)=6+\frac{y^2}{3(1+xy)^2\ln 3}>0,\forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right).$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$. Do đó

$$f'(x)>f'\left(\frac{1}{3}\right)=2+(y-9)-\frac{y}{(3+y)\ln 3}>0$$

(vì $(3+y)\ln 3>y\Rightarrow-\dfrac{y}{(3+y)\ln 3}>-1$).

Suy ra $f(x)$ là đồng biến trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Suy ra

$$f(x)>f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{y}{3}-\log_{27}\left(1+\frac{y}{3}\right)-\frac{8}{3}.$$

Xét hàm số $g(t)=t-\log_{27}(1+t)$, $t>0$. Dễ thấy $g'(t)=1-\frac{1}{3(1+t)\ln 3}>0,\forall t>0$, suy ra $g(t)$ là hàm đồng biến, do đó $f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{y}{3}\right)-\frac{8}{3}\geq g\left(\frac{10}{3}\right)-\frac{8}{3}>0$. Suy ra $f(x)>0,\forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$. Do đó PT trên không có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{3};3\right)$.

• Với $1\leq y\leq 9$. Hàm số $f(x)=3x^2+(y-9)x-\log_{27}(1+xy)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Ta lại có hàm số $g(t)=t-\log_{27}(1+t)$, đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{y}{3}-\log_{27}\left(1+\frac{y}{3}\right)-\frac{8}{3}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{y}{3}\right)-\frac{8}{3}\leq g(3)-\frac{8}{3}<0,\forall y\in[1;9]$,

Mặt khác

$$f(3)=3y-\log_{27}(1+3y)=g(3y)\geq g(3)>0,$$

$\forall y\in[1;9]$. Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right).f(3)<0$. Do đó PT trên có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu $\Rightarrow$ chọn **C.**

Nhận xét: *• Đây là câu hỏi liên quan đến phương trình mũ chứa hai biến, có thể là câu khó nhất của đề thi. Để giải quyết được câu hỏi này yêu cầu học sinh phải có vốn kiến thức tổng hợp như: Dựa vào giả thiết đã cho tìm cho các biến; Coi y như tham số, lấy lôgarit cơ số 27 hai vế, sau đó đưa phương trình về dạng $f(x)=0$; sử dụng phương pháp hàm số để xét hàm số $f(x)$ trên mỗi miền con của tham số y; đồng thời sử dụng các kết quả quen thuộc như:*

+ Nếu f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $a\geq e$ thì hàm số $f(x)=\log_a(1+x)-x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

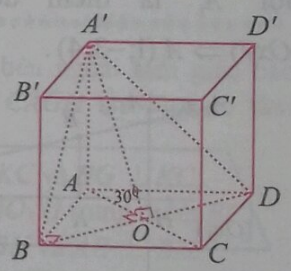
• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 45 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x=y(e^x+xy-2x^2-3)$?*

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 48 (Đề thi TNTHPT đợt 1_mã 101). *Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng*

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $BD\perp OA$ và $BD\perp AA'$ nên $BD\perp(A'OA)$ $\Rightarrow BD\perp OA'$. Lại có: $(A'BD)\cap(ABCD)=BD$.



Do đó $\widehat{A'OA}=30^0$ (hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD=2a$ nên $OA=a$ và $AB=AD=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA=a$ và $\widehat{A'OA}=30^0$ nên $AA'=OA.\tan 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V=AB.AD.AA'=a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3\Rightarrow$ chọn **D.**

Nhận xét: *• Đây là câu hỏi quen thuộc tính thể tích của khối hộp chữ nhật, để giải quyết được câu này yêu cầu học sinh phải nắm vững công thức tính thể tích khối hộp; cách xác định góc giữa hai mặt phẳng; thiết lập mối liên hệ giữa đường cao với giả*

thiết đã cho của bài toán để tính chiều cao của khối hộp.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 47 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng*

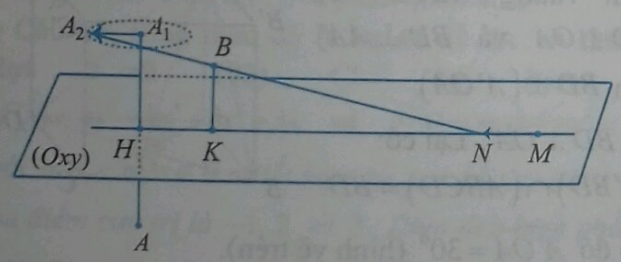
A. $64\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Câu 49 (Đề thi TNTHPT đợt 1_Mã 101). *Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$, $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=2$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng*

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{53}$.

Lời giải. Vì $z_A.z_B=-8<0$ nên A,B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B trên mặt phẳng (Oxy), ta tìm được $H(1;-3;0)$, $K(-2;1;0)$.

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua $(Oxy)\Rightarrow A_1(1;-3;4)$.



Gọi A_2 là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{MN}$, suy ra $A_1A_2=2$. Tức là, điểm A_2 thuộc đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng song song với (Oxy) và có tâm A_1, bán kính $R=2$. Khi đó:

$$|AM-BN|=|A_1M-BN|=|A_2N-BN|\le A_2B$$

Dấu "=" xảy ra khi N là giao điểm của A_2B với mp(Oxy) và $|AM-BN|=A_2B$ max khi $\overrightarrow{A_1A_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{HK}$. Suy ra

$$\overrightarrow{A_1A_2}=-\frac{|\overrightarrow{A_1A_2}|}{|\overrightarrow{HK}|}\overrightarrow{HK}=\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};0\right),$$

Do đó: $A_2\left(\frac{11}{5};-\frac{23}{5};4\right)$. Từ đó, ta tìm được $A_2B=\sqrt{53}$. Vậy $\max|AM-BN|=\sqrt{53}\Rightarrow$ chọn **D.**

Nhận xét: • *Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức chứa độ dài các đoạn thẳng thay đổi. Để giải quyết được bài toán này yêu cầu học sinh phải huy động được tổng hợp nhiều kiến thức như: Xác định điểm đối xứng qua mặt phẳng, kỹ năng đánh giá bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối; bài toán quỹ tích; xác định hình chiếu của một điểm trên một mặt phẳng; điều kiện để hai vectơ ngược hướng.*

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 50 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm M cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a,b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90°$?*

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 50 (Đề thi TN THPT đợt 1_mã 101). *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+5x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?*

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có:

$g(-x)=f(|-x^3-5x|+m)=f(|x^3+5x|+m)=g(x)$, do đó $g(x)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$. Theo bài ra ta có $2a+1\ge 3\Leftrightarrow a\ge 1$, vì vậy ta cần tìm m để hàm số $g(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương. Với $x>0$ thì $g(x)=f(x^3+5x+m)$.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=7, x=\pm 3$.

$$g'(x)=(3x^2+5)f'(x^3+5x+m),$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3+5x+m=7 & (1) \\ x^3+5x+m=3 & (2) \\ x^3+5x+m=-3 & (3) \end{array}\right..$$

Đặt $u(x)=x^3+5x+m, u'(x)=3x^2+5>0, \forall x \geq 0$.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	m ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1), (2) và (3) nếu có nghiệm $x>0$ thì đó là nghiệm duy nhất.

PT $g'(x)=0$ có nghiệm $x>0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong ba phương trình (1), (2) (3) có nghiệm $x>0$, điều này tương đương với $m<\max\{-3;3;7\}=7$. Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;...;6\} \Rightarrow$ có 6 giá trị của tham số m thỏa mãn $\Rightarrow$ chọn **A.**

Nhận xét: • *Đây là câu hỏi tìm điều kiện của tham số m để hàm hợp của hàm ẩn $g(x)=f(|u(x)|+m)$ có n điểm cực trị.*

Để giải được câu hỏi này học sinh phải vận dụng tổng hợp nhiều kiến thức như: Các bước tìm điểm cực trị của hàm số; áp dụng cho hàm hợp chứa dấu giá trị tuyệt đối; tính chất của hàm số chẵn, từ đó quy về bài toán tìm điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+5x+m)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ngoài cách tiếp cận lời giải trên, có thể giải quyết câu hỏi này bằng phép đặt ẩn phụ và khảo sát trực tiếp hàm hợp.

• Câu hỏi cùng mức độ **(Câu 49 đề thi TNTHPT đợt 2_mã 102).** *Cho hàm số $f(x)=x^4-12x^3+30x^2+(3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?*

A. 25. **B.** 27. **C.** 26. **D.** 28.

****

KHAI THÁC ... *(Tiếp theo trang 4)*

Bài toán 15. *Cho tứ giác ABCD. Dựng ra ngoài tứ giác đó các tam giác vuông ABE, BCF, CDM, ADN sao cho $\widehat{ABE}=\widehat{CBF}=30°$ và $\widehat{ADH}=\widehat{CDG}=30°$. Chứng minh rằng $EM=FN$ và hai đường thẳng EM, FN cắt nhau tạo thành một góc bằng $60°$.*

CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trên các cạnh của tam giác *ABC* dựng các tam giác đều *BAC'* và *CAB'* nằm ngoài tam giác *ABC*. Chứng minh rằng:

a) *AA'=BB'=CC'*.

b) Ba đường *AA', BB', CC'* đồng quy tại *O*.

2. Cho tam giác *ABC*. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông *BCIJ, ABEF, ACMN* và gọi *O, P, Q* lần lượt là tâm của chúng. Gọi D là trung điểm *AB*.

a) Chứng minh rằng *DOP* là tam giác vuông cân đỉnh *D*.

b) Chứng minh rằng $AO \perp PQ$ và *AO=PQ*.

3. Cho tam giác *ABC*. Vẽ bên ngoài tam giác các hình vuông *ABDK, BCEF, CAGH* lần lượt có tâm O_1, O_2, O_3.

a) Chứng minh rằng $BG = KC$ và $BG \perp KC$.

b) Chứng minh rằng $IO_1 = IO_3$ (*I* trung điểm *BC*).

c) Chứng minh rằng $AE = BH$ và $AE \perp BH$.

4. Cho tam giác *ABC*. Phía ngoài tam giác *ABC* dựng các hình vuông *BCDE, ACFG, ABKH* rồi vẽ tiếp các hình bình hành *BEQK, CDPF*. Chứng minh rằng tam giác *APQ* vuông cân.

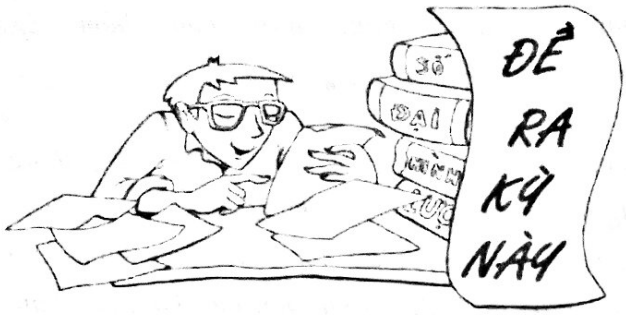
5. Cho hình bình hành *ABCD*. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các hình vuông *ABEF* và *ADGH*.

a) Chứng minh $AC = FH$ và $AC \perp FH$.

b) Gọi *O* là tâm đối xứng của hình vuông *ADGH*. Chứng minh $OF \perp OC$ và $BH \perp CE$.

c) Chứng minh ΔECG vuông cân.

6. Dựng ra phía ngoài tứ giác *ABCD* các tam giác *BAX, BCY, DCZ, DAT* cân tại các đỉnh *A* và *C* sao cho $\widehat{BAX}=\widehat{DAT}=\widehat{BCY}=\widehat{DCZ}=\alpha$. Gọi *E, F, G, H* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *BX, BY, DZ, DT*. Chứng minh *EG=HF* và *EG,EF* cắt nhau tạo thành một góc α.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/532 (Lớp 6). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$.

TRƯƠNG QUANG AN
(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/532 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^0$; $\widehat{B}=40^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AB=AM$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{AMN}=40^0$. Tính số đo góc $\widehat{BNC}$.

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS xã Thanh Yên, huyện Điện Biên, Điện Biên)

Bài T3/532. Tìm phần nguyên của biểu thức

$$A=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$$

với n là số nguyên dương.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN *(Hải Phòng)*

Bài T4/532. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn (O) đường kính AD. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Đường phân giác ngoài ở đỉnh I của tam giác BIC cắt AB, CD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với AB tại E, đường thẳng vuông góc với CD tại F và đường thẳng OI đồng quy.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/532. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x-y)+3y^2+x(1-3y)=y \\ 3\sqrt{3x^2-9y+2}+\sqrt[3]{y^3-21}+3=x \end{cases}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/532. Cho n số thực dương $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 3)$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)}\geq\frac{n}{2}.$$

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Bài T7/532. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Bài T8/532. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 theo thứ tự là khoảng cách từ điểm O đến các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SDA). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ $\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_4^2}$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T9/532. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{r_a}{a\sin A}+\frac{r_b}{b\sin B}+\frac{r_c}{c\sin C}\geq 3.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
(GV ĐHGD, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/532. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n!$ chia hết cho 2^{n-1}.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/532. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn $f(x+y)=f(f(x)).f(y)$ với mọi số thực x và y. Chứng minh rằng f là hàm hằng.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T12/532. Gọi (O), (I) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp (tâm O), nội tiếp (tâm I) của tam giác ABC. Đường tròn (D) tiếp xúc trong với (O) tại X đồng thời tiếp xúc với các cạnh AB, AC. M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AX kẻ từ X và tiếp tuyến của (D) song song với BC (tiếp tuyến này nằm cùng phía với X so với BC). Chứng minh AM, BC và OI đồng quy.

TRẦN VIỆT HÙNG

(Xã Phú Tân, huyện Châu Thành, Sóc Trăng)

Bài L1/532. Sóng dừng trên một sợi dây có dạng $u = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos(20\pi t + \varphi - \frac{\pi}{2})(cm)$. Với x đo bằng (cm), t đo bằng (s).

a) Tính vận tốc truyền sóng dọc theo sợi dây.

b) Xác định những vị trí trên dây có biên độ dao động bằng 1 cm.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/532. Đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R mắc nối tiếp với cuộn dây có điện trở r hoạt động. Điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở, cuộn dây và hai đầu đoạn mạch lần lượt là 35 V, 85 V và $75\sqrt{2}$ V. Cuộn dây tiêu thụ công suất 40 W. Xác định tổng điện trở thuần của toàn mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/532 (For 6th grade). Find integral solutions of the equation

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4.$$

Problem T2/532 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{A} = 120^0$; $\widehat{B} = 40^0$. On the side AC choose M so that $AB = AM$. On the opposite ray of the ray AB choose N so that $\widehat{AMN} = 40^0$. Find the size of the angle $\widehat{BNC}$.

Problem T3/532. Find integral part of the expression $A = \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)^2$ where n is an positive integer.

Problem T4/532. Given a quadrilateral $ABCD$ inscribed in a semicircle (O) with the diameter AD. Let I be the intersection between AC and BD. The external angle bisector of the angle I of BIC intersects AB, CD respectively at E and F. Show that the line perpendicular to AB at E, the line perpendicular to CD at F, and the line OI are concurrent.

Problem T5/532. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2(x-y) + 3y^2 + x(1-3y) = y \\ 3\sqrt{3x^2 - 9y + 2} + \sqrt[3]{y^3 - 21} + 3 = x \end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/532. Given n positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$. Prove that

$$\frac{a_1^2}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2^2}{a_3(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1(a_n+a_1)} \geq \frac{n}{2}.$$

Problem T7/532. Given real numbers x, y, z satisfying $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Find the maximum and minimum values of the expression

$$P = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

Problem T8/532. Given a pyramid $S.ABCD$. Let O be the intersection between AC and BD. Let h_1, h_2, h_3, h_4 respectively be the distances from O to the planes (SAB), (SBC), (SCD), (SDA). Show that two planes (SAC) and (SBD) are perpendicular if and only if $\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2} = \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_4^2}$.

Problem T9/532. Given a triangle ABC with the lengths of the sides BC, CA, AB respectively are a, b, c. Let r_a, r_b, r_c respectively be the radii of the escribed circles opposite to the angles A, B, C. Show that $\frac{r_a}{a\sin A} + \frac{r_b}{b\sin B} + \frac{r_c}{c\sin C} \geq 3$.

PROBLEMS IN ...

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/532. Find all positive integers n so that $n!$ is divisible by 2^{n-1}.

Problem T11/532. Given a continuous function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying $f(x+y)=f(f(x)).f(y)$ for any pair of real numbers x and y. Show that f is a constant function.

Problem T12/532. Let (O), (I) respectively be the circumcircle and the incircle of ABC. Let (D) be the circle which is internally tangent to (O) at X and is tangent to the sides AB, AC. Let M be the intersection between the line perpendicular to AX at X and the tangent of (D) parallel to BC (this tangent is in the same side with X determining by BC). Show that AM, BC and OI are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

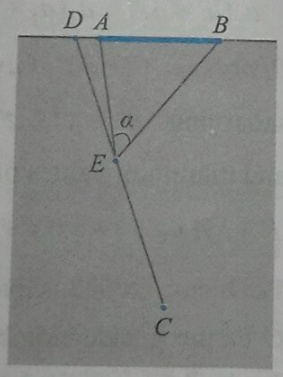
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

****

ĐỐ VUI

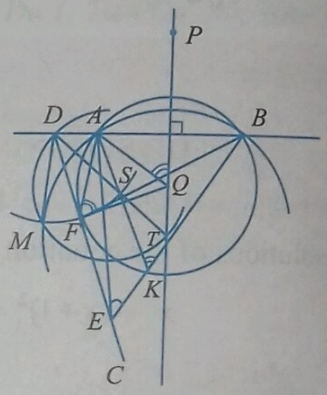
TÌM VỊ TRÍ SÚT BÓNG

Trong một trận luyện tập bóng đá một tiền đạo đang dẫn bóng từ điểm C muốn sút bóng vào khung thành được thể hiện bởi đoạn thẳng AB trên mặt phẳng sân cỏ. Do trước mặt tiền đạo này có hậu vệ đội bạn nên tiền đạo đó không thể tiến thẳng vào khung thành mà phải dẫn bóng chạy theo đường thẳng CD và đến điểm E thì sút bóng vào khung thành AB. Biết rằng điểm D thuộc tia đối của tia AB, đường thẳng CD không cắt đường tròn đường kính AB và góc $\widehat{ADC}$ là góc nhọn. Điểm C khá xa khung thành AB như ở hình vẽ. Bằng thước thẳng và compa, bạn hãy xác định vị trí điểm E khi sút bóng sao cho góc sút $\alpha=\widehat{AEB}$ là lớn nhất và giải thích câu trả lời.



Lời giải. 1. *Tìm điểm có góc sút lớn nhất.* Gọi PT là đường trung trực của đoạn thẳng AB với điểm T nằm trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB, còn điểm P không nằm trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB. Giả sử dựng được đường tròn tâm Q đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng CD tại điểm F thì $\alpha=\widehat{AFB}=\frac{1}{2}\widehat{AQB}=\widehat{AQP}$. Do chỉ có một đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng CD nên điểm Q được xác định duy nhất (điểm Q là giao điểm của đường thẳng PT và đường trung trực của đoạn thẳng AF), do đó góc $\widehat{AQP}=\alpha$ là không đổi.

Gọi E là điểm tùy ý trên đoạn thẳng CD (E khác các điểm D, F; điểm E có thể nằm trên đoạn thẳng CF hoặc đoạn thẳng DF). Do điểm E nằm ngoài đường tròn tâm Q nên EB phải cắt đường tròn tâm Q tại điểm K. Vì $\widehat{AKB}$ là góc ngoài của tam giác AEK nên $\widehat{AEB}<\widehat{AKB}=\widehat{AFB}=\alpha$. Vậy góc sút lớn nhất từ một điểm trên đoạn thẳng CD là góc sút từ điểm F với $\widehat{AFB}=\alpha$. (điểm E có thể nằm trên đoạn thẳng CF hoặc đoạn thẳng DF).



2. *Cách dựng đường tròn tâm Q.*

- Dựng đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính, chúng cắt nhau tại hai điểm T, P thì đường thẳng TP là đường trung trực của đoạn thẳng AB.
- Dựng đường tròn tâm T đi qua hai điểm A, B.
- Dựng đường tròn đường kính DT tâm S, đường tròn này cắt đường tròn tâm T tại điểm M.
- Dựng đường tròn tâm D bán kính DM, đường tròn này cắt đoạn thẳng CD tại điểm F.
- Dựng đường tròn tâm Q đi qua ba điểm A, B, F, với điểm Q là giao điểm của đường thẳng PT và đường trung trực của đoạn thẳng AF.

3. *Chứng minh* điểm F là tiếp điểm của đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng CD.

Theo cách dựng trên thì DM vuông góc với MT, do đó DM là tiếp tuyến của đường tròn tâm T kẻ từ điểm D, suy ra $DA.DB=DM^2$, từ đó có $DA.DB=DF^2$. Hệ thức này chứng tỏ DF là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm A, B, F.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

Bài T1/528. *Cho A là số tự nhiên chỉ có hai ước số nguyên tố là p và q. Gọi S là tổng tất cả các ước số dương của A. Chứng minh rằng $S < 2A$.*

Lời giải. Số A có dạng $A = p^m q^n$ với p, q là hai số nguyên tố lẻ phân biệt và $m \geq 1$, $n \geq 1$. Trong đề bài đăng trên TH&TT số 528 tháng 6 năm 2021 in thiếu từ : *lẻ*. Giả sử p, q là hai số nguyên tố lẻ phân biệt và $p \geq 3$, $q \geq 5$ (nếu $p \geq 5$, $q \geq 3$ thì chỉ việc đổi kí hiệu p với q).

Tổng tất cả các ước số dương của $A = p^m q^n$ là

$$S = (1 + p + p^2 + ... + p^m) + (1 + p + p^2 + ... + p^m)q + ... + (1 + p + p^2 + ... + p^m)q^n$$

$$= (1 + p + p^2 + ... + p^m)(1 + q + q^2 + ... + q^n)$$

$$= \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$ Xét hiệu số:

$$U = 2A - S = 2p^m q^n - S$$

$$= 2p^m q^n - \frac{1}{(p-1)(q-1)}(p^{m+1} - 1)(q^{n+1} - 1)$$

$$= \frac{1}{(p-1)(q-1)} V$$

với $V = 2p^m q^n (p - 1)(q - 1) - (p^{m+1} - 1)(q^{n+1} - 1)$.

Ta biến đổi:

$$V = 2p^{m+1}q^{n+1} - 2p^{m+1}q^n - 2p^m q^{n+1} + 2p^m q^n - p^{m+1}q^{n+1} + p^{m+1} + q^{n+1} - 1$$

$$= p^m q^n (pq - 2p - 2q + 2) + p^{m+1} + q^{n+1} - 1$$

$$= p^m q^n [(p - 2)(q - 2) - 2] + p^{m+1} + q^{n+1} - 1.$$

Với $p \geq 3$, $q \geq 5$ thì $(p - 2)(q - 2) - 2 \geq 1 > 0$ nên $V > 0$. Từ đó và từ $(p - 1)(q - 1) > 0$ nên

$$U = 2A - S > 0, \text{ tức là } S < 2A.$$

Nhận xét. Tất cả các bạn gửi bài giải đều chỉ xét $A = pq$ vì chưa hiểu kĩ đề bài.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/528. *Gọi a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất ($n \in \mathbb{N}^*$), ví dụ: $\sqrt{1} = 1 = a_1$; $\sqrt{2} \approx 1,4 \Rightarrow a_2 = 1$; $\sqrt{3} \approx 1,7 \Rightarrow a_3 = 2$; ... Hãy tính*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2020}} + \frac{1}{a_{2021}}.$$

Lời giải. Xét một số tự nhiên x, số các số n thỏa $a_n = x$ là các số thỏa mãn bất phương trình $x - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < x + \frac{1}{2}$. Ta có một cách tương đương là $x^2 - x + \frac{1}{4} < n < x^2 + x + \frac{1}{4}$ chỉ có đúng $2x$ số (là các số từ $x^2 - x + 1$ đến $x^2 + x$). Có $44^2 + 44 = 1936 + 44 = 1980 < 2021$. Từ 1981 đến 2021 có 41 số, và các số n này thỏa mãn $45^2 - 45 + \frac{1}{4} < n < 45^2 + 45 + \frac{1}{4}$ cho nên đều có giá trị a_n bằng 45. Vậy

$$\sum_{n=1}^{2021} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{1980} \frac{1}{a_n} + \sum_{n=1981}^{2021} \frac{1}{a_n}$$

$$= \sum_{i=1}^{44} \frac{2i}{i} + \sum_{i=1981}^{2021} \frac{1}{45} = 88 + \frac{41}{45}.$$

Nhận xét. Không có bạn nào gửi bài có đáp số đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/528. *Tìm tất cả các bộ bốn số nguyên dương (x, y, z, t) thỏa mãn:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 54 \\ \dfrac{xz}{(x+y)(z+t)} = \dfrac{23}{104} \\ x > z,\ x + y > z + t \end{cases}.$$

Lời giải. Vì (x, y, z, t) là bộ bốn số nguyên dương và $\frac{xz}{(x+y)(z+t)} = \frac{23}{104}$, $(23;104) = 1$ nên tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn

$$\begin{cases} xz = 23a \\ (x+y)(z+t) = 104a \end{cases}.$$

Vì $\begin{cases} x + y + z + t = 54 \\ (x+y)(z+t) = 104a \end{cases}$ nên $x + y$, $z + t$ là các nghiệm nguyên dương của phương trình bậc hai

$u^2 - 54u + 104a = 0$ với $\Delta' = 27^2 - 104a$ là số chính phương. Từ $\Delta' = 27^2 - 104a \geq 0$ $\Rightarrow a \leq \frac{729}{104}$. Vì a là số nguyên dương nên $a \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

• Với $a = 1$ phương trình $u^2 - 54u + 104 = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} u = 2 \\ u = 52 \end{array}\right.$.

Vì $x + y > z + t$ nên $\begin{cases} x + y = 52 \\ z + t = 2 \end{cases}$.

Lại có $\begin{cases} xz = 23 \\ x > z \\ z + t = 2 \end{cases}$ suy ra:

$$\begin{cases} x = 23 \\ z = t = 1 \end{cases}; \quad y = 52 - x = 52 - 23 = 29.$$

Ta được $(x, y, z, t) = (23, 29, 1, 1)$ thỏa mãn bài toán.

• Với $a \in \{2,3,4,5,6\}$, $\Delta' = 27^2 - 104a$ không phải là số chính phương (bạn đọc tự kiểm tra).

• Với $a = 7$: phương trình $u^2 - 54u + 104.7 = 0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} u = 26 \\ u = 28 \end{array}\right.$. Vì $x + y > z + t$ nên $\begin{cases} x + y = 28 \\ z + t = 26 \end{cases}$. Lại có $\begin{cases} xz = 23.7 \\ x > z \end{cases}$ suy ra:

$$\begin{cases} x = 23 \\ z = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 23.7 = 161 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $x < 54$ nên $\begin{cases} x = 23 \\ z = 7 \end{cases}$. Kết hợp với $\begin{cases} x + y = 28 \\ z + t = 26 \end{cases}$ ta được $(x, y, z, t) = (23, 5, 7, 19)$ thỏa mãn bài toán. Vậy có hai bộ số (x, y, z, t) thỏa mãn bài toán là $(23, 29, 1, 1)$ và $(23, 5, 7, 19)$.

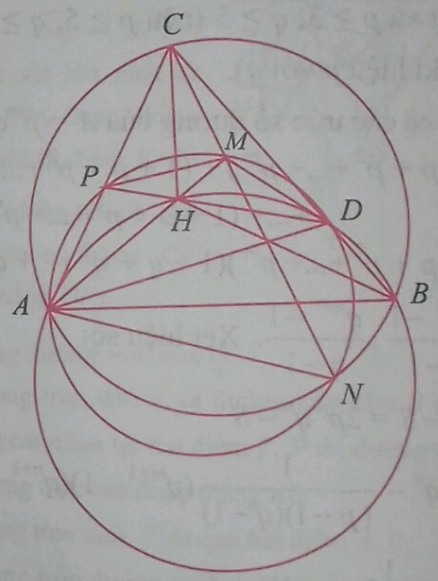
Nhận xét. Bước quan trọng của lời giải là chứng minh tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn $\begin{cases} xz = 23a \\ (x + y)(z + t) = 104a \end{cases}$ suy ra $a \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$; xét từng giá trị của a ta được kết qủa của bài toán.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS xã Pom Lót, huyện Điện Biên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/528. *Cho tam giác nhọn ABC (CA < CB), có trực tâm H. Gọi D là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH (D khác B). Gọi P là giao điểm của DH với AC. Gọi M là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác APD (M khác A) và N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tam giác APD (N khác A). Chứng minh ba điểm C, M, N thẳng hàng.*

Lời giải. Cách 1.



Vì tứ giác $AHDB$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{HDC} = \widehat{HAB} = \widehat{HCD}.$$

Suy ra AH là trung trực của CD. Do đó AM là tia phân giác của góc $\widehat{PAD}$, nên $MP = MD$. Kết hợp với tứ giác $APMD$ nội tiếp và tính chất trực tâm ta có:

$$\widehat{MDP} = \widehat{MPD} = \widehat{MAD} = \widehat{MAC} = \widehat{HBC}.$$

Lại có $\widehat{ADH} = \widehat{ABH}$, suy ra:

$$\widehat{ANM} = \widehat{ADM} = \widehat{ADP} + \widehat{PDM}$$
$$= \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = \widehat{ABC} = \widehat{ANC}.$$

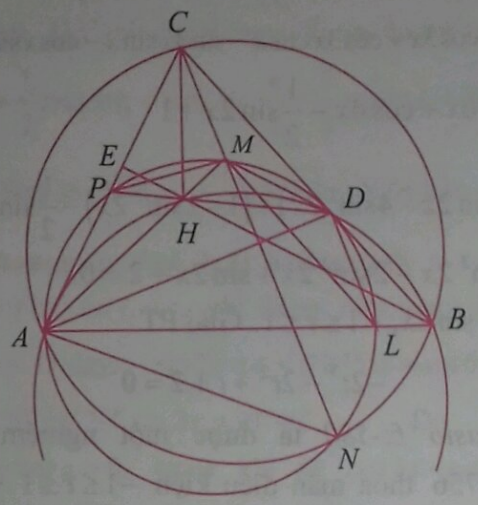
Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{ANC}$, dẫn tới C, M, N thẳng hàng.

Cách 2. Kí hiệu (APD) là đường tròn ngoại tiếp tam giác APD.

Gọi L là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (APD), E là chân đường cao đỉnh B của tam giác ABC. Các tứ giác $AHDB$ và $APDL$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{DLA} = \widehat{DPE},\ \widehat{DAB} = \widehat{DHB} = \widehat{PHE}.$$

Suy ra: $\widehat{DLA} + \widehat{DAL} = \widehat{HPE} + \widehat{PHE} = 90°$.



Do đó: $\widehat{ADL} = 90° \Rightarrow \widehat{AML} = \widehat{ADL} = 90°$.

Từ $AM \perp ML$, $AM \perp BC$, suy ra $ML \,//\, BC$ (1).

Mặt khác, tứ giác $AMLN$ và $ANBC$ nội tiếp nên

$$\widehat{LMN} = \widehat{LAN} = \widehat{BAN} = \widehat{BCN} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra C, M, N thẳng hàng.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo; **Sóc Trăng:** *Lê Hồ Trọng Tín*, 9A7, THCS Kế Sách, H. Kế Sách.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/528. *Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $4b^2 + c^2 = ac$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2a}{a+2b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.*

Lời giải. Cách 1. Đặt $2b = x$, $c = y$, $\frac{a}{2} = z$ (x, y, z là các số dương). Khi đó từ $4b^2 + c^2 = ac$ suy ra $x^2 + y^2 = 2yz$. Ta có:

$$P = \frac{4z}{2z+x} + \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z}$$

$$= \frac{4z}{2z+x} + \frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} \quad (1).$$

Áp dụng BĐT Schwarz

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

với x, z là các số dương (đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$), ta có:

$$\frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} \ge \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2xy+2yz}$$

$$= \frac{(x+y)^2}{4yz+2xy} \ge \frac{4xy}{4yz+2xy} = \frac{2x}{2z+x} \quad (2)$$

(vì $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \ge 2xy + 2xy = 4xy$).

Từ (1) và (2) suy ra

$$P \ge \frac{4z}{2z+x} + \frac{2x}{2z+x} = \frac{2(2z+x)}{2z+x} = 2.$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2xy} = \dfrac{y}{y^2+2yz} \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 2yz \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

$\Rightarrow a = 4b = 2c$. Vậy $\min P = 2$ khi $a = 4b = 2c$.

Cách 2. Trước hết ta chứng minh BĐT:

Với $xy \ge 1$, ta có: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \ge \frac{2}{1+xy}$ (*).

Thật vậy, xét hiệu: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{1+xy}$

$$= \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy}\right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy}\right)$$

$$= \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)}$$

$$= \frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \ge 0 \text{ do } xy \ge 1.$$

Trở lại bài toán, đặt $x^2 = \frac{c}{b}$; $y^2 = \frac{a}{c}$ thì $xy = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Ta có: $ac = 4b^2 + c^2 \ge 2\sqrt{4b^2c^2} = 4bc \Rightarrow \frac{a}{b} \ge 4 > 1$.

Do đó $xy > 1$. Khi đó áp dụng BĐT (*), ta có:

$$\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}} + \frac{1}{1+\frac{a}{c}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

$$\ge \frac{2}{1+xy} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(t\ge 2)$. Ta có:

$$P\ge \frac{2.\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+2}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{2t^2}{t^2+2}+\frac{2}{1+t}=\frac{2t^2}{t^2+2}+\frac{4}{2+2t}$$

$$\ge \frac{2t^2}{t^2+2}+\frac{4}{2+t^2}=2 \quad (\text{do } t\ge 2 \text{ nên } t^2\ge 2t).$$

$P=2$ khi $a=4b=2c$.

Vậy min$P=2$ khi $a=4b=2c$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều làm theo một trong hai cách như trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 9E1. THCS Everest, Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo, TP. Hưng Yên; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tấn Phúc*, 8/1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Vĩnh Long; **Sóc Trăng:** *Lê Hồ Trọng Tín*, 9A7, THCS Kế Sách, H. Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/528. *Giải phương trình*

$$\sin 3x-\cos 3x+\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin 3x+\cos x}-\frac{1}{\cos 3x-\sin x} \quad (1).$$

Lời giải 1 (của các bạn *Nguyễn Thị Phương Thảo*, *Cao Thị Tường Vy* và nhiều bạn khác).

Đặt $a=\sin 3x+\cos x$; $b=\cos 3x-\sin x$. ĐK để PT(1) có nghĩa là $\begin{cases} a=\sin 3x+\cos x\ne 0\\ b=\cos 3x-\sin x\ne 0\end{cases}$ (*).

Với ĐK(*) thì (1) có thể viết dưới dạng

$$a-b=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\Leftrightarrow (a-b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=b\ne 0 \text{ hoặc } ab+1=0.$$

TH1: $a=b\ne 0$. Ta có:

$\sin 3x+\cos x=\cos 3x-\sin x.$

$\Leftrightarrow \sin 3x+\sin x=\cos 3x-\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=-2\sin 2x\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ (2). PT(2) tương ương với:

- $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$: thỏa mãn (*).
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ không thỏa mãn (*).

TH2: $ab+1=0$. Ta có:

$ab+1=(\sin 3x+\cos x)(\cos 3x-\sin x)+1$

$=\sin 3x\cos 3x+\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x-\cos x\sin x+1$

$=\frac{1}{2}\sin 6x+\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+1$

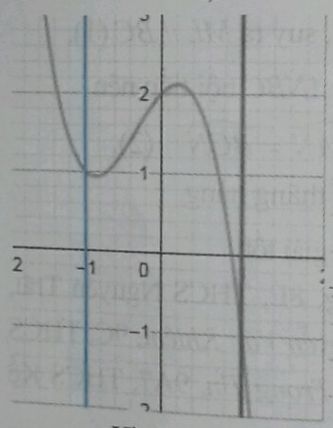
$=\frac{1}{2}(3\sin 2x-4\sin^3 2x)+(1-2\sin^2 2x)-\frac{1}{2}\sin 2x+1$

$=-2\sin^3 2x-2\sin^2 2x+\sin 2x+2=0.$

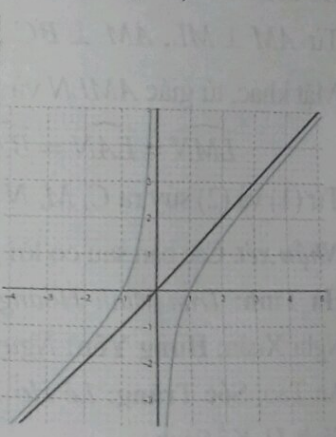
Đặt $t=\sin 2x$, $-1\le t\le 1$. Giải PT

$$-2t^3-2t^2+t+2=0 \quad (3)$$

trên *Casio fx-580* ta được một nghiệm thực $t_1\approx 0.8756$ thỏa mãn điều kiện $-1\le t\le 1$ và hai nghiệm phức $t_{2,3}\approx -0.93\pm 0.51i$ (h.1)



Hình 1



Hình 2

Ta có: $\sin 2x=t_1\approx 0.87556\Leftrightarrow$

$2x=\arcsin t_1+k2\pi$ hoặc $2x=\pi-\arcsin t_1+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi$

(thỏa mãn ĐK(*)). *Đáp số*: PT(1) có ba họ nghiệm

$$x=\frac{k\pi}{2};\ x=\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi;$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

"Lời giải 2". Với ĐK(*) thì (1) tương đương với

$$\sin 3x+\cos x-\frac{1}{\sin 3x+\cos x}=\cos 3x-\sin x-\frac{1}{\cos 3x-\sin x} \quad (4)$$

Hàm số $f(t):=t-\frac{1}{t}$ có $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0$ với mọi $t\ne 0$ nên nó đồng biến trên mỗi khoảng các định

$(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ (h.2). Suy ra

$$f(t_1)=f(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2,$$

tức là $f(\sin 3x+\cos x)=f(\cos 3x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos x=\cos 3x-\sin x\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}.$$

Nhận xét. **1)** Cách giải 2 làm *mất hai họ nghiệm*

$$x=\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi;\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin t_1+k\pi.$$

Lí do: Hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t}$ chỉ đồng biến trên *từng khoảng xác định* (h.2). Khẳng định $f(t_1)=f(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2$ chỉ đúng *trên từng khoảng xác định*. Ở đây: $\sin 2x=t_1\approx 0.87556\approx \sin 61^o6'41''$ $\Rightarrow x\approx 30^o33''20''\Rightarrow 3x=91^o40'$. Do đó $\sin 3x+\cos x>0$, trong khi đó $\cos 3x-\sin x<0$, Do đó từ $f(t_1)=f(t_2)$ chưa thể suy ra $t_1=t_2$ vì $t_1=\sin 3x+\cos x>0$ và $t_2=\cos 3x-\sin x<0$ thuộc hai khoảng xác định khác nhau. *Sai lầm này khá tế nhị*. Các bạn cẩn thận khi áp dụng lí thuyết và phương pháp.

2) Nhiều bạn cẩn thận giải *tường minh* phương trình bậc ba. Điều này không cần thiết, chỉ cần sử dụng máy tính (thí dụ, *Casio fx 580*) và phần mềm *GeoGebra* (có thể dễ dàng lấy về miễn phí từ mạng), để vẽ đồ thị và biết đích xác phương trình (3) có duy nhất một nghiệm thực và nghiệm gần đúng bằng $\sin 2x=t_1\approx 0.87556\approx \sin 61^o6'41''$.

3) Một số bạn làm theo cách 2 và mất nghiệm, một số bạn khác giải theo cách 1 nhưng vẫn có những thiếu sót như viết lẫn lộn hai số đo góc (theo độ và theo radian) trong cùng một công thức, xét thiếu trường hợp, ...

4) Các bạn sau đây có lời giải đúng (theo cách 1): **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo* 11A1, THPT Yên Phong số 2; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng* 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Hồ Phạm Phú An, Huỳnh Hữu Hậu*, 12T1, *Nguyễn Trường Duy* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân* 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Cao Thị Tường Vy* 11A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình* 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long* 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương* 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/528. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=a+b+c+\frac{8}{abc}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Từ giả thiết ta có:

$$(a^2+2ab+b^2)-2c(a+b)+c^2\ge 4ab.$$

Do đó: $(a+b-c)^2\ge 4ab$.

Để ý rằng $a\ge b\ge c>0$ nên $a+b-c>0$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số dương ta có:

$$P=a+b+c+\frac{8}{abc}=\frac{a+b-c}{2}+\frac{a+b-c}{2}+2c+\frac{8}{abc}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.2c.\frac{8}{abc}}=4\sqrt[4]{\frac{4(a+b-c)^2}{ab}}\ge 4\sqrt[4]{16}=8.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a+b-c}{2}=2c=\frac{8}{abc}\\ (a+b-c)^2=4ab\end{cases}$. Giải hệ này ta tìm được: $a=4, b=c=1$. Khi đó $P=8$.

Vậy $\min P=8$.

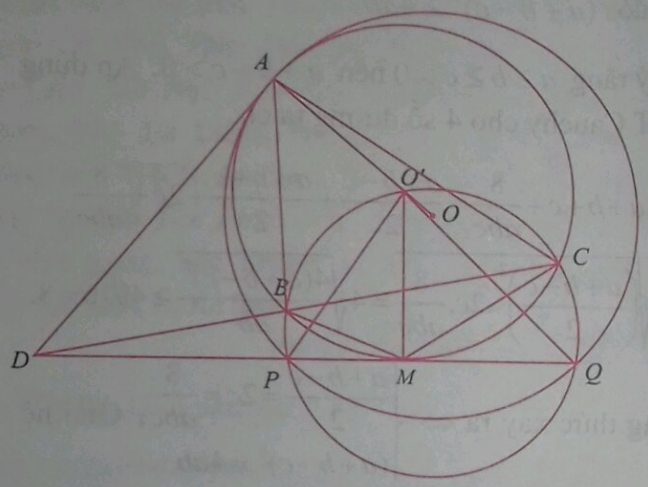
Nhận xét. Đây là bài toán chứng minh bất đẳng thức cơ bản, tất cả các bạn gửi lời giải về Tòa soạn đều có lời giải đúng và tương tự như cách giải trên. Các bạn có lời giải ngắn gọn là: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 11A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 9E1, TH, THCS, THPT Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đoàn Quang Minh*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long, Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê

Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Trần Công Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/528. *Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O';R')$ $(R > R')$ tiếp xúc trong với nhau tại A và M là điểm trên $(O';R')(M \neq A)$. Tiếp tuyến tại M của $(O';R')$ cắt $(O; R)$ tại P, Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $O'PQ$ cắt $(O';R')$ tại B, C. Chứng minh rằng tứ giác $ABMC$ là tứ giác điều hòa (tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau).*

Lời giải.



Kẻ tiếp tuyến chung tại A của đường tròn (O) và đường tròn (O'). Tiếp tuyến chung này cắt đường thẳng PQ tại D. Khi đó DA là trục đẳng phương của (O) và (O'); PQ là trục đẳng phương của (O) và đường tròn $(O'PQ)$; BC là trục đẳng phương của (O') và đường tròn $(O'PQ)$. Từ đó DA, PQ, BC đồng quy (tại D) hay ba điểm D, B, C thẳng hàng. Mặt khác:

$$\Delta DMB \sim \Delta DCM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DM};$$

$$\Delta DAB \sim \Delta DCA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DA}.$$

Từ đó chú ý rằng $DM = DA$, ta thấy $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Kết hợp với $ABMC$ là tứ giác nội tiếp, chúng ta kết luận rằng $ABMC$ là tứ giác điều hòa.

Nhận xét. Tất cả các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc**: *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Văn Huy*, *Từ Nguyễn Đức Anh*, 11 Toán 1, *Lê Thủy Tiên*, 11 Toán 2, *Phạm Ngọc Long*, *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng**: *Mai Trung Nguyên*, 10 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường Phổ thông Duy Tân; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Tiền Giang**: *Mai Võ Phúc Thành*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Sóc Trăng**: *Lê Hồ Trọng Tín*, 9A7, THCS Kế Sách, huyện Kế Sách; **TP. Hồ Chí Minh**: *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/528. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với các số thực dương x, y, z ta luôn có:*

$$\frac{x}{y+z}(1+\cos A)+\frac{y}{z+x}(1+\cos B)+\frac{z}{x+y}(1+\cos C) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Lời giải. Ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

Do đó: $$\frac{1+\cos A}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{q+r}{2}$$

(trong đó kí hiệu $q = \tan\frac{B}{2}, r = \tan\frac{C}{2}$).

Tương tự: $$\frac{1+\cos B}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{r+p}{2};$$

$$\frac{1+\cos C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{p+q}{2}\quad (p=\tan\frac{A}{2}).$$

Chú ý: $\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow pq+qr+rp=1$ $(p,q,r>0$, vì $0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2})$.

Bởi vậy BĐT cần chứng minh

$$\frac{x}{y+z}(1+\cos A)+\frac{y}{z+x}(1+\cos B)+\frac{z}{x+y}(1+\cos C)$$
$$\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y+z}(q+r)+\frac{y}{z+x}(r+p)+\frac{z}{x+y}(p+q)\geq\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)(p+q+r)\geq\frac{x.p}{y+z}+\frac{y.q}{z+x}+\frac{z.r}{x+y}+\sqrt{3}\ (1)$$

Hai lần áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\frac{x.p}{y+z}+\frac{y.q}{z+x}+\frac{z.r}{x+y}+\sqrt{3}$$
$$\leq\sqrt{\left[\left(\frac{x}{y+z}\right)^2+\left(\frac{y}{z+x}\right)^2+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2\right](p^2+q^2+r^2)}$$
$$+\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{2(pq+qr+rp)}$$

$$\leq\sqrt{\left[\left(\frac{x}{y+z}\right)^2+\left(\frac{y}{z+x}\right)^2+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2+\frac{3}{2}\right]\left[p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)\right]}$$

$$\leq\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)(p+q+r)\ (2)$$ vì

$$\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)^2-\left[\left(\frac{x}{y+z}\right)^2+\left(\frac{y}{z+x}\right)^2+\left(\frac{z}{x+y}\right)^2+\frac{3}{2}\right]$$
$$=\frac{F}{2(x+y)(y+z)(z+x)}$$

trong đó: $F=4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]$
$-3(x+y)(y+z)(z+x)$
$=4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]$
$-3[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz]$
$=z(x-y)^2+x(y-z)^2+y(z-x)^2\geq 0.$

Từ (1) và (2) ta suy ra khẳng định của bài toán. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ và $p=q=r$ hay $x=y=z$ và ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên sử dụng các kiến thức cơ bản của lượng giác tam giác, nhiều biến đổi đại số cơ bản, hay. Trong các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn chỉ có một bạn có lời giải đúng : *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/528. *Cho hai hộp, mỗi hộp chứa các viên bi trắng và đen. Tổng số các viên bi trong hai hộp là 25. Từ mỗi hộp, lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi. Tìm xác suất để 2 viên bi lấy ra khác màu nếu biết hộp nào nhiều bi hơn thì số bi đen nhiều hơn và xác suất để hai viên lấy ra cùng màu đen là 0,42.*

Lời giải (của tác giả đề toán): Gọi số bi trong hộp thứ nhất và thứ hai tương ứng là m_1 và m_2.

Số bi đen trong hộp thứ nhất và thứ hai tương ứng là k_1 và k_2. Không mất tổng quát giả sử $m_1\leq m_2$.

Ta có: $P(2\text{ bi đen})=\frac{k_1}{m_1}.\frac{k_2}{m_2}=0{,}42=\frac{21}{50}$

$\Rightarrow 21m_1m_2=50k_1k_2\Rightarrow m_1m_2\,\vdots\,5.$

Do $m_1+m_2=25$ nên $m_1\,\vdots\,5, m_2\,\vdots\,5$. Xảy ra hai trường hợp:

a) Trường hợp 1: $m_1=5, m_2=20$. Suy ra: $k_1k_2=42$. Vì $k_1\leq 5, k_2\leq 20$ nên $k_1=3, k_2=14$.

Vậy số bi trắng trong hộp thứ nhất và thứ hai tương ứng là 2 và 6. Do đó:

$$P(2\text{ bi trắng})=\frac{2}{5}.\frac{6}{20}=0{,}12.$$

Vậy $P(2$ bi khác màu$)=1-0{,}42-0{,}12=0{,}46$.

b) Trường hợp 2: $m_1=10, m_2=15$. Suy ra: $k_1k_2=63\Rightarrow k_1=7, k_2=9$. Do đó:

$$P(2\text{ bi trắng})=\frac{3}{10}.\frac{6}{15}=0{,}12.$$

Vậy $P(2$ bi khác màu$)=1-0{,}42-0{,}12=0{,}46$.

Kết luận: Xác suất để hai viên bi lấy ra khác màu là 0,46.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay, nhưng không khó. Tuy nhiên chỉ có 3 bạn tham gia giải bài này và giải đúng là: **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11 THPT Duy Tân; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12T, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/528. *Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to(0+\infty)$ thỏa mãn* $\frac{1}{2015}\le\left(\frac{f(x)}{f(r)}\right)^{\frac{1}{(x-r)^2}}\le 2015, \forall x\in\mathbb{R}, \forall r\in\mathbb{Q}, x\ne r$ (1)

Lời giải (theo đa số các bạn). Giả sử $f(x)$ là nghiệm của bài toán thì

$$(1)\Leftrightarrow (2015)^{-(x-r)^2}\le\frac{f(x)}{f(r)}\le(2015)^{(x-r)^2}$$

$$\Leftrightarrow -(x-r)^2\le\log_{2015}\frac{f(x)}{f(r)}\le(x-r)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\log_{2015}f(x)-\log_{2015}f(r)\right|\le(x-r)^2$$

hay $\quad |g(x)-g(r)|\le(x-r)^2, \forall x\in\mathbb{R}, \forall r\in\mathbb{Q}, x\ne r$ (2)

trong đó $g(x)=\log_{2015}f(x)$.

Xét cặp số thực $x, y\,(x<y)$ tùy ý và số hữu tỷ $r\in(x,y)$, ta có:

$$2(x-y)^2-(x-r)^2-(y-r)^2$$
$$=x^2+y^2-2r^2-4xy+2rx+2ry$$
$$=(x-r)(x+r)+(y-r)(y+r)+2x(r-y)+2y(r-x)$$
$$=(x-r)(x+r-2y)+(y-r)(y+r-2x)>0.$$

Kết hợp với (2) ta được:

$$0\le|g(x)-g(y)|\le|g(x)-g(r)|+|g(r)-g(y)|$$
$$\le(x-r)^2+(r-y)^2<2(x-y)^2 \quad (3).$$

Suy ra: $\lim\limits_{y\to x}|g(x)-g(y)|=\lim\limits_{x\to y}|g(x)-g(y)|=0$

hay $\quad \lim\limits_{x\to t}g(x)=g(t), \forall t\in\mathbb{R}.$

Vậy $g(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (3), với mỗi $t\in\mathbb{R}$, ta có: $\left|\frac{g(x)-g(t}{x-t}\right|<2|x-t|$, với $x\ne t$,

suy ra: $\lim\limits_{x\to t}\left|\frac{g(x)-g(t}{x-t}\right|\le\lim\limits_{x\to t}2|x-t|$

$$\Leftrightarrow g'(t)=0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Vậy $g(t)$ là hàm hằng nên $f(t)=2015^{g(t)}$ là hàm hằng dương. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận: Nghiệm của bài toán là $f(t)=C, C>0$.

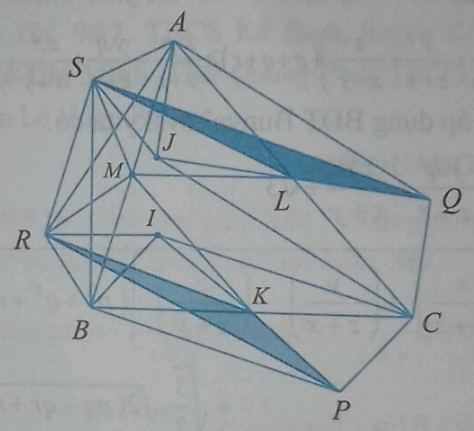
Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm trên tập trù mật $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$. Chỉ có hai bạn tham gia giải là: **Quảng Nam:** *Trần Gia Huy*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/528. *Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác BCP, ACQ, ABR và BAS đôi một đồng dạng với nhau. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của BC, CA. Chứng minh rằng hai tam giác RPK và SQL có cùng diện tích.*

Lời giải. Trong lời giải này, để biểu thị hai tam giác ABC, XYZ đồng dạng và cùng hướng, ta viết $\Delta ABC\backsim\Delta XYZ$; để biểu thị hai tam giác ABC, XYZ bằng nhau và ngược hướng, ta viết $\Delta ABC\cong\Delta XYZ$.

Gọi M là trung điểm của AB; I, J theo thứ tự là điểm đối xứng của P, Q qua K, L.



Dễ thấy: $\Delta ASB\backsim\Delta AJC\Rightarrow\Delta ASJ\backsim\Delta ABC$

$\Rightarrow\Delta ASJ\backsim\Delta AML\Rightarrow\Delta ASM\backsim\Delta AJL.$

$\Delta BAR\backsim\Delta BIC\Rightarrow\Delta BRI\backsim\Delta BAC$

$\Rightarrow\Delta BRI\backsim\Delta BMK\Rightarrow\Delta BRM\backsim\Delta BIK.$

Vậy, chú ý rằng $\Delta ASM\cong\Delta BRM$ và M, K, L theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA, ta có:

$$\frac{JS}{IR}\cdot\frac{JL}{IK}=\frac{JS}{AS}\cdot\frac{BR}{IR}\cdot\frac{JL}{AL}\cdot\frac{BK}{IK}\cdot\frac{AL}{BK}$$
$$=\frac{CB}{AB}\cdot\frac{BA}{CA}\cdot\frac{SM}{AM}\cdot\frac{BM}{RM}\cdot\frac{AC}{BC}=1;$$

$$(\overline{JL},\overline{JS})\equiv(\overline{JL},\overline{JA})+(\overline{JA},\overline{JS})$$
$$\equiv(\overline{SM},\overline{SA})+(\overline{CA},\overline{CB})\,(\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv-(\overline{RM},\overline{RB})-(\overline{CB},\overline{CA})$$
$$\equiv-(\overline{IK},\overline{IB})-(\overline{IB},\overline{IR})$$
$$\equiv-(\overline{IK},\overline{IR})\,(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Do đó: $S_{SLQ} = S_{SLJ} = \frac{1}{2} JS.JL \sin \widehat{SJL}$

$$= \frac{1}{2} IR.IK \sin \widehat{RIK} = S_{RKJ} = S_{RKP}.$$

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ có 2 bạn tham gia giải: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

2) Các tam giác *JLS* và *IKR* đồng dạng ngược hướng.

NGUYỄN MINH HÀ

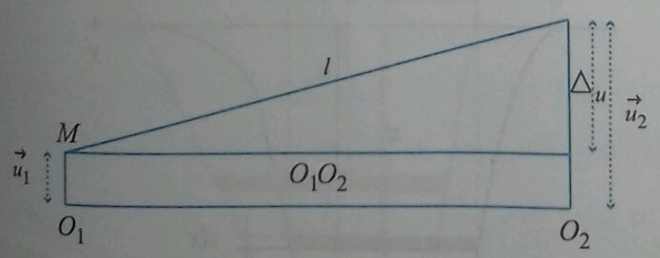
Bài L1/528. *Cho M, N là hai điểm trên một mặt nước phẳng lặng cách nhau 20 cm. tại điểm O trên đường thẳng MN và nằm ngoài đoạn MN, người ta đặt nguồn dao động theo phương vuông góc với mặt nước với phương trình u = 5cosωt (cm), tạo ra sóng trên mặt nước với bước sóng λ = 15 cm. Xác định khoảng cách xa nhất và gần nhất giữa hai phần tử môi trường tại M và N khi có sóng truyền qua.*

Lời giải. Khoảng cách ngắn nhất giữa *M* và *N* là:

$$l_{min} = MN = 20 \text{ cm}.$$

Giả sử sóng truyền qua *M* rồi đến *N*, thì dao động tại *M* sớm pha hơn dao động tại *N* là:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(MN)}{\lambda} = \frac{8\pi}{3}.$$



Chọn gốc thời gian để phương trình dao động tại *M* là: $u_1 = 5\cos\omega t$ (cm) thì phương trình dao động tại *N* là: $u_2 = 5\cos(\omega t - \frac{8\pi}{3})$ (cm).

Độ lệch li độ của hai phần tử tại *M* và *N*:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = 5\cos(\omega t - \frac{8\pi}{3}) - 5\cos\omega t$$

$$= 5\sqrt{3}\cos(\omega t - \frac{5\pi}{3}) \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow \Delta u_{max} = 5\sqrt{3}$ cm.

Khoảng cách xa nhất giữa hai phần tử tại *M* và *N*:

$$l_{max} = \sqrt{(O_1O_2)^2 + (\Delta_{U\max})^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{19} \text{ (cm)}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*; *Huỳnh Hữu Hậu*; 12T1, *Nguyễn Trường Duy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp;** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/528. *Trên đoạn mạch điện xoay chiều có bốn điểm theo đúng thứ tự A, M, N và B. Giữa hai điểm A và M chỉ có điện trở thuần, giữa hai điểm M và N chỉ có cuộn dây, giữa hai điểm N và B chỉ có tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều 175V – 50Hz thì điện áp hiệu dụng trên đoạn AM là 25V, trên đoạn MN là 25V và trên đoạn NB là 175V. Xác định hệ số công suất của toàn mạch.*

Lời giải. Nếu cuộn dây thuần cảm thì:

$$U_{AN}^2 = U_{AM}^2 + \left(U_{MN} - U_{NB}\right)^2.$$

Thay số đề bài cho hệ thức trên không thỏa mãn nên cuộn dây có điện trở thuần *r*.

Do $U_{AM} = U_{MN}$ nên $Z_L^2 + r^2 = R^2$ (1).

Lại có $U_{AB} = U_{NB} = 7U_{AM}$ nên ta có:

$$Z_C^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 49R^2 \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $r = \frac{24}{25}R$; $Z_L = \frac{7}{25}R$.

Do đó $\cos\varphi = \frac{R+r}{Z} = \frac{\frac{49}{25}R}{7R} = 0,28.$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Đồng Tháp:** *Hồ Phạm Phú An, Huỳnh Hữu Hậu* 12T1, *Nguyễn Trường Thọ, Nguyễn Trường Duy* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

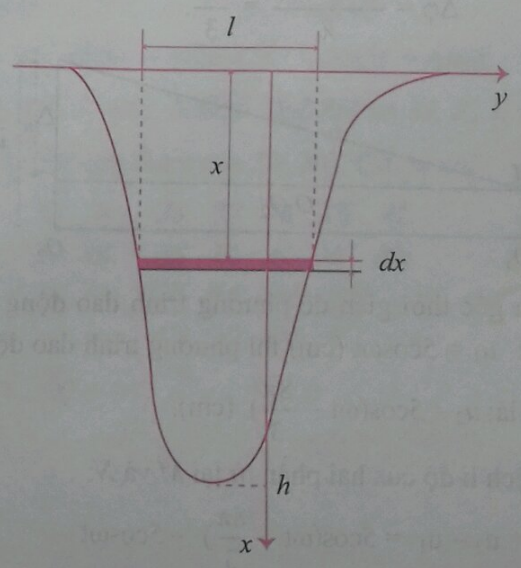
TÍNH LIÊN MÔN TRONG CÙNG MỘT BÀI TOÁN

HOÀNG NGỰ HUẤN - PHẠM TUẤN CƯỜNG
LÊ THỊ HƯƠNG GIANG (*Đại học Mỏ - Địa chất*)

Trong nhiều sách giáo khoa toán về đại số và giải tích có chủ đề: "*Các ví dụ áp dụng tích phân trong vật lý và hình học*". Phân bố chương trình dành cho nó là hai tiết. Điều đó có nghĩa là học sinh phải "chạy" qua các bài tập. Ngoài ra, danh sách các bài toán dạng này là rất lớn, gồm các dạng bài như: Xác định công xây dựng kim tự tháp, tính lượng chất lỏng chảy ra hay bơm vào bình, xác định năng lượng hay lực tác động giữa các vật thể có hình khối khác nhau, tính moment quán tính của vật, chuyển động của vật trước sức cản của môi trường (sức cản tỷ lệ thuận với vận tốc của vật hay tỷ lệ thuận với bình phương vận tốc), bài toán về sự nhân lên của vi trùng, phân rã phóng xạ, về sự nguội lạnh của vật thể hay sự hụt điện tích của các dây dẫn, ... Rất nhiều giáo viên "không lưu ý" tới chủ đề này. Đưa những chủ đề này vào chuẩn bị cho kỳ thi "*Tốt nghiệp THPT Quốc gia*" là không mấy khả quan. Ngoài ra ở nhiều trường phổ thông ở nước ngoài, tích phân và ứng dụng của nó được nghiên cứu rất tỷ mỉ. Chương trình của họ có định hướng thực nghiệm tốt hơn của ta.

Theo ý kiến của chúng tôi, đối với các học sinh có sự ham thích với các môn toán lý cần có thêm một khóa học bổ sung theo chuyên đề ứng dụng của tích phân xác định với thời lượng là 5 hay 6 tiết. Dưới đây chúng tôi sẽ đưa ra bài toán về ứng dụng của tích phân có liên quan tới một số lĩnh vực của toán học. Đó là bài toán về áp suất của chất lỏng lên tấm phẳng dựng đứng có hình dạng xác định (ví dụ như cái bè trên sông, vỏ của tàu thuyền).

Trên hình 1 là tấm phẳng đứng chịu áp lực của chất lỏng. Mực của chất lỏng trùng với trục Oy. Lực tác động lên khoảng có độ dài l và chiều cao nhỏ dx bằng $dF = \rho gx \cdot l \cdot dx$, *trong đó* ρgx *là áp suất của chất lỏng có mật độ* ρ *lên chiều sâu* x, $g \approx 9.80665\,\frac{m}{c^2}$ *là gia tốc rơi tự do. Như vậy áp lực của chất lỏng lên toàn bộ tấm phẳng bằng tích phân*



Hình 1

$$F = \int_0^h \rho \cdot g \cdot x \cdot l(x)\,dx \quad (1).$$

Công thức có dạng tổng quát và bạn đọc chỉ cần chọn hình dạng cụ thể của tấm phẳng và các dữ liệu số để tính toán.

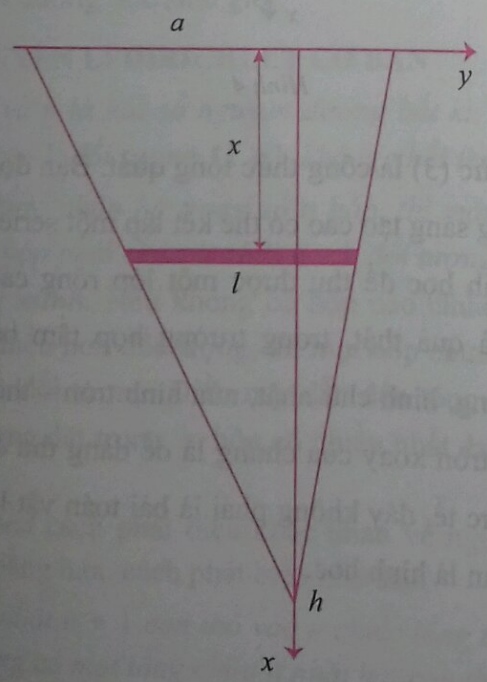
Ta cũng có thể xem xét công thức này dưới một góc cạnh khác. Nếu coi tích $l \cdot dx$ là phần tử diện tích và đưa vào tọa độ của khối tâm của bản phẳng bằng tích phân $x_c = \frac{1}{S_0}\int_0^h x\,dS$, trong đó S_0 là diện tích của tấm phẳng. Khi đó, ta thu được công thức tính áp lực lên tấm phẳng

$$F = \rho \cdot g \cdot x_c \cdot S_0 \quad (2).$$

Bài toán 1. *Giả sử tấm phẳng đứng có hình dạng là tam giác với đáy là a trùng với mực nước, chiều cao của tam giác là h (h.2). Từ sự đồng dạng của các tam giác, suy ra tỷ lệ* $\frac{a}{l} = \frac{h}{h-x}$. *Từ đây ta có*

$$L(x) = a\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Tính áp lực theo công thức (1):



Hình 2

$$F = \rho \cdot g \cdot \int_0^h a\left(x - \frac{x^2}{h}\right)dx$$

$$= \rho \cdot g \cdot a \cdot \frac{h^2}{6}.$$

Như đã biết, khối tâm của tam giác nằm tại giao điểm của các trung tuyến. Vì vậy ta có thể thu được công thức một cách đơn giản hơn bằng cách thay $x_c = \frac{h}{3}$ – tọa độ của khối tâm của tam giác và diện tích $S_0 = \frac{1}{2}ah$.

Bài toán 2. *Giả sử biên của tấm bản là parabol dạng* $y^2 = a^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ (h.3).

Vì $l = 2y = 2a \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{h}}$ *nên ta phải tính tích phân*

$$F = 2\rho g a \int_a^h x\sqrt{1 - \frac{x}{h}}\,dx$$

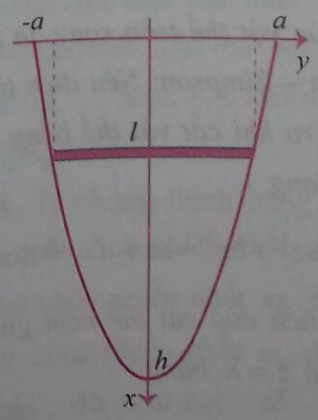
hay $$F = 2\rho g a h^2 \int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt.$$

Biến đổi ta thu được

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(1-t)^3}\,d(1-t) - \int_0^1 \sqrt{1-t}\,d(1-t)$$

$$= \frac{4}{15}.$$

Như vậy $F = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot g \cdot a \cdot h^2$.



Hình 3

Mặc dù tích phân này cũng xuất hiện trong chương trình phổ thông nhưng nó vẫn được coi là rất khó. Có một cách để tránh bài toán khó này. Đó là: ta chỉ cần chú ý tới công thức (2). Vấn đề là tích $x_c \cdot S_0$ xuất hiện ở định lý: Thể tích vật tròn xoay tạo bởi hình phẳng quay xung quanh trục không cắt hình phẳng và cùng nằm trong mặt phẳng này bằng diện tích hình phẳng nhân với độ dài đường tròn đi qua khối tâm của nó

$$V = 2\pi \cdot x_c \cdot S_0 .$$

Như vậy công thức tính áp lực là rất đơn giản

$$F = \rho \cdot g \cdot \frac{V}{2\pi} \quad (3)$$

trong đó V là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tấm bản quay quanh trục Oy. Vì ta đang làm việc với vật thể tròn xoay xung quanh trục Oy nên ta cần phải tìm tích phân đơn giản hơn để tính so với phương pháp đầu tiên:

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 2\pi \cdot h^2 \int_0^a \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 dy$$
$$= \frac{16}{15}\pi \cdot a \cdot h^2 .$$

Bài toán 3. *Giả sử tấm bản đứng có hình dạng là nửa elip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (h.4). *Khi đó ta có thể tiến hành tính toán đơn giản hơn một cách rõ rệt. Để tính thể tích của vật thể tròn xoay, ta sẽ sử dụng định lý Newton – Simpson: Nếu diện tích của tiết diện được tạo ra khi cắt vật thể bằng mặt phẳng* $z = const$ *có dạng*

$$S(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, \quad 0 \le z \le h$$

thì phần diện tích của vật thể nằm giữa các mặt phẳng $z = 0$ *và* $z = h$ *bằng*

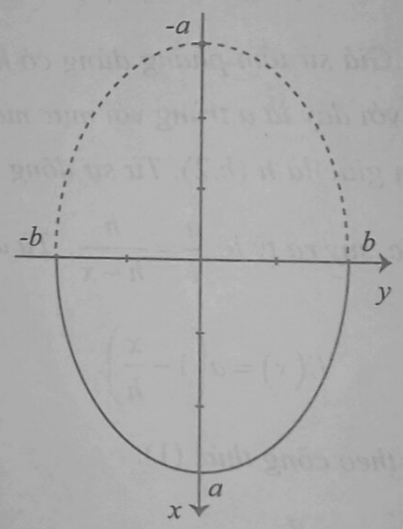
$$V = \frac{h}{6}\left(S(0) + S(h) + 4S\left(\frac{h}{2}\right)\right).$$

Trong trường hợp của chúng ta $S(-b) = S(b) = 0$ (tiết diện suy biến tại một điểm) và $S(0) = \pi a^2$ (tiết diện là đường tròn bán kính là a), ta thu được

$$V = \frac{2b}{6}\left(S(-b) + 4\pi a^2 + S(b)\right)$$
$$= \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Vì vậy áp lực bằng

$$F = \frac{2}{3}\rho \cdot g \cdot a^2 \cdot b.$$



Hình 4

Công thức (3) là công thức tổng quát. Bạn đọc với khả năng sáng tạo cao có thể kết lập một series các hình hình học để thu được một lớp rộng các bài toán. Và quả thật, trong trường hợp tấm bản là hình thang, hình chữ nhật, nửa hình tròn – thể tích của vật tròn xoay của chúng là dễ dàng thu được. Trên thực tế, đây không phải là bài toán vật lý mà hoàn toàn là hình học.

ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN CỬU HUY
(Trường THPT Thái Phiên, Đà Nẵng)

Nguyên lí Dirichlet (*Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, 1805-1859, nhà toán học người Đức) hay còn gọi là nguyên lí những chiếc lồng nhốt các chú thỏ hoặc nguyên lí chuồng bồ câu, được *Dirichlet* phát biểu đầu tiên vào năm 1834 và nó có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học, đặc biệt là trong lí thuyết số. Đây là công cụ rất hữu ích và không thể thiếu khi gặp những bài toán mà các phương pháp thông thường không mang lại hiệu quả. Lợi thế của nguyên lí Dirichlet là ta có thể chỉ ra sự tồn tại của một đối tượng mà không cần quan tâm đến tính chất của đối tượng đó, nhưng trong thực tế nhiều bài toán chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi. Nguyên lí Dirichlet thực chất là một định lí về tập hữu hạn. Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng nguyên lí Dirichlet như là một phương pháp giải toán liên quan đến việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các bài toán số học, số học - tổ hợp mà ít được đề cập tới nhiều trong các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi.

1. NGUYÊN LÍ DIRICHLET CƠ BẢN

Cho k và n là hai số nguyên dương bất kì. Nếu ít nhất $kn+1$ đối tượng ($k \geq 1$ không nhất thiết hữu hạn) được phân bố trong số n hộp, thì một trong số các hộp phải chứa ít nhất $k+1$ đối tượng.

Chứng minh. Nếu không có hộp nào chứa $k+1$ hoặc nhiều hơn đối tượng, thì mọi hộp chứa nhiều nhất k đối tượng. Điều này dẫn đến tổng số các đối tượng đặt trong n hộp có nhiều nhất kn, mâu thuẫn.

Có nhiều cách phát biểu khác nhau về nguyên lí này, chẳng hạn, cách phát biểu như sau:

• *Nếu nhốt n + 1 con thỏ vào n chiếc lồng thì bao giờ cũng có một lồng chứa ít nhất hai con thỏ.*

• *Cho S là tập không rỗng và giả sử $S_1, S_2, ..., S_n$ là một phân hoạch của S (tức là, $S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n = S$ và $S_i \cap S_j = \varnothing$ với $i \neq j$). Nếu $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ là các phần tử phân biệt trong S thì có một $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho ít nhất hai trong số các phần tử này là thuộc S_k.*

2. NGUYÊN LÍ DIRICHLET MỞ RỘNG

Nguyên lí Dirichlet thứ nhất. *Nếu m đối tượng được đặt trong n hộp, thì ít nhất một hộp chứa $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ hoặc nhiều hơn đối tượng, trong đó $[x]$ kí hiệu là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Nếu mỗi hộp chứa nhiều nhất $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ đối tượng, thì tổng số các đối tượng sẽ nhiều nhất là $n\left[\frac{m-1}{n}\right] \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1$. Điều này là mâu thuẫn vì ban đầu số đối tượng có tất cả là m.

Hệ quả 1. *Giả sử $m_1, m_2, ..., m_n$ là n số nguyên dương. Nếu $m_1 + m_2 + \cdots + m_n + 1$ đối tượng được đặt trong n hộp, thì hộp thứ nhất chứa ít nhất $m_1 + 1$ đối tượng, hoặc hộp thứ hai chứa ít nhất $m_2 + 1$ đối tượng, ..., hoặc hộp thứ n chứa ít nhất $m_n + 1$ đối tượng.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Nếu hộp thứ nhất chứa nhiều nhất m_1 đối tượng, và hộp thứ hai chứa nhiều nhất m_2 đối tượng, ..., và hộp thứ n chứa nhiều nhất m_n đối tượng, thì tổng số các đối tượng sẽ nhiều nhất

$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Điều này là mâu thuẫn vì số đối tượng có tất cả là $m_1 + m_2 + \cdots + m_n + 1$.

Nguyên lí Dirichlet thứ hai. *Nếu m đối tượng được đặt trong n hộp, thì ít nhất một hộp chứa* $\left[\frac{m}{n}\right]$ *hoặc ít hơn đối tượng.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Nếu mỗi hộp đều chứa nhiều hơn $\left[\frac{m}{n}\right]$ đối tượng, tức là chứa ít nhất $\left[\frac{m}{n}\right]+1$ đối tượng, thì tổng số các đối tượng sẽ ít nhất là $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right) > n \cdot \frac{m}{n} = m.$ Vì ta bắt đầu với m đối tượng nên điều này là không thể.

Hệ quả 2. *Giả sử $m_1, m_2, \ldots, m_n$ là n số nguyên dương. Nếu $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$ đối tượng được đặt trong n hộp, thì hộp thứ nhất chứa nhiều nhất $m_1 - 1$ đối tượng, hoặc hộp thứ hai chứa nhiều nhất $m_2 - 1$ đối tượng, ..., hoặc hộp thứ n chứa nhiều nhất $m_n - 1$ đối tượng.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Nếu hộp thứ nhất chứa ít nhất m_1 đối tượng, hộp thứ hai chứa ít nhất m_2 đối tượng, ..., và hộp thứ n chứa ít nhất m_n đối tượng, thì tổng số các đối tượng sẽ ít nhất là $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Điều này là mâu thuẫn vì ban đầu ta chỉ có $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1$ đối tượng.

Để giải một bài toán bằng cách sử dụng nguyên lí Dirichlet ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu đề bài, xác định hai đối tượng của bài toán. Số lượng mỗi đối tượng trong giả thiết của bài toán dạng này là các số nguyên dương.

Bước 2: Xây dựng thuật giải:

- Tiến hành phân chia các đối tượng trong giả thiết của bài toán thành hai tập hợp các đối tượng $\{A\}$, $\{B\}$. Đây là bước quan trọng nhất của tiến trình giải toán. Việc phân chia như vậy thường dựa trên tính chất của từng loại yếu tố.

- Xác định và so sánh số phần tử của mỗi tập hợp $\{A\}$, $\{B\}$, tập hợp nào có số phần tử lớn hơn được chọn làm *"thỏ"*, tập hợp kia được chọn làm *"lồng"*. Nếu trong bài toán đang xét ta đã chỉ ra được hai tập hợp các đối tượng tương ứng với *"thỏ"* và *"lồng"*, thì bài toán được giải quyết xong.

3. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 3.1. *Cho $S = \{1, 2, \ldots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương lớn nhất n sao cho có một tập con A gồm n phần tử của S có tính chất: Tổng của bất kì hai số trong A là không chia hết cho hiệu của chúng.*

Lời giải. Giả sử $M = \{3k+1 \mid k = 0, 1, \ldots, 673\}$, thì $M \subset S, M \neq S$ và $|M| = 674$ (Chú ý: Kí hiệu $|X|$ để chỉ số các phần tử của tập X). Vì hiệu của bất kì hai số thuộc M là một bội của 3 và tổng của bất kì hai số thuộc M không là bội của 3 nên tổng của bất kì hai số trong M là không chia hết cho hiệu của chúng. Vì vậy giá trị lớn nhất cần tìm không nhỏ hơn 674. Tiếp theo, ta giả sử tập S được phân thành 674 tập con như sau: $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \ldots, \{2017, 2018, 2019\}, \ldots, \{2020, 2021\}$. Ta lấy bất kì 675 số từ S, thì theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất $\left[\frac{675-1}{674}\right]+1 = 2$ số thuộc cùng tập con và hiệu của chúng không vượt quá 2. Giả sử hai số là a và b, $a > b$. Nếu $a - b = 1$, thì $a + b$ chia hết cho $a - b$. Nếu $a - b = 2$, thì a và b là cùng tính chẵn lẻ. Khi đó $a + b$ là chẵn, do đó $a + b$ cũng chia hết cho $a - b$. Vậy số nguyên dương lớn nhất cần tìm là bằng 674.

Thí dụ 3.2. *Cho $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. Đặt $A_1 = \{k \in S, 2 \mid k\}$; $A_2 = \{k \in S, 3 \mid k\}$;

$A_3 = \{k \in S, 5 \mid k\}$; $A_4 = \{k \in S, 7 \mid k\}$

và $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Khi đó, ta có:

$|A_1| = 140, |A_2| = 93, |A_3| = 56, |A_4| = 40$,

$|A_1 \cap A_2| = 46, |A_1 \cap A_3| = 28, |A_1 \cap A_4| = 20$,

$|A_2 \cap A_3| = 18, |A_2 \cap A_4| = 13, |A_3 \cap A_4| = 8$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 9, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 6$,

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 4, |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$. Do đó:

$$|A| = (140 + 93 + 56 + 40) - (46 + 28 + 20 + 18 + 13 + 8) + (9 + 6 + 4 + 2) - 1 = 216.$$

Vậy với 5 số tùy ý (đôi một khác nhau) của A, ta đều có thể tìm được ít nhất 2 số ở trong cùng một tập $A_i (1 \le i \le 4)$ và hai số trong cùng tập A_i này rõ ràng là không nguyên tố cùng nhau, Do vậy số n cần tìm phải lớn hơn 216. Ta sẽ chứng minh $n = 217$ thỏa mãn bài toán đã cho.

Đặt $B_1 = A \setminus \{2,3,5,7\}$

$B_2 = \{11^2, 11\cdot13, 11\cdot17, 11\cdot19, 11\cdot23, 13^2, 13\cdot17, 13\cdot19\}$,

$P = S \setminus (B_1 \cup B_2)$.

Ta có $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ và P chứa số 1 và tất cả các số nguyên tố có trong S. Xét tập hợp T tùy ý chứa 217 số. Nếu $|T \cap P| \ge 5$ ta có ngay điều phải chứng minh. Vậy chỉ cần xét trường hợp khi $|T \cap P| \le 4$. Khi đó:

$$|T \cap (S \setminus P)| \ge 217 - 4 = 213.$$

Điều này chứng tỏ rằng từ tập hợp tất cả các hợp số trong S (tất cả gồm $|S \setminus P| = 220$ số) có nhiều nhất là 7 số không nằm trong T. Đặt:

$M_1 = \{2\cdot23, 3\cdot19, 5\cdot17, 7\cdot13, 11\cdot11\}$,

$M_2 = \{2\cdot29, 3\cdot23, 5\cdot19, 7\cdot17, 11\cdot13\}$,

$M_3 = \{2\cdot21, 3\cdot29, 5\cdot23, 7\cdot19, 11\cdot17\}$,

$M_4 = \{2\cdot37, 3\cdot31, 5\cdot29, 7\cdot23, 11\cdot19\}$,

$M_5 = \{2\cdot41, 3\cdot37, 5\cdot31, 7\cdot29, 11\cdot23\}$,

$M_6 = \{2\cdot43, 3\cdot41, 5\cdot37, 7\cdot31, 13\cdot17\}$,

$M_7 = \{2\cdot47, 3\cdot43, 5\cdot41, 7\cdot37, 13\cdot19\}$,

$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}$.

Rõ ràng $M_i \subset S \setminus P$ $(i = 1,2,...,8)$ và mọi phần tử của M_i đôi một nguyên tố cùng nhau. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 chỉ số $i_0 (1 \le i_0 \le 8)$ sao cho $M_{i_0} \subset T$. Ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 3.3. *Tìm số nguyên dương nhỏ nhất k sao cho trong tập con bất kì của $\{1,2,...,16\}$ với k phần tử, có hai số phân biệt a,b để $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử $M = \{1,2,...,16\}$. Ta dễ thấy tập con $S = \{2,4,6,...,14,16\}$ chứa tất cả 8 số chẵn không thỏa mãn yêu cầu bài toán vì với mỗi cặp số $a,b \in S$, $a^2 + b^2$ luôn luôn là một hợp số. Do đó k phải lớn hơn 8.

Bằng cách tính trực tiếp của tất cả các tổng $a^2 + b^2$ với $a,b \in M$, ta có thể nhận được một phân hoạch của M bao gồm 8 tập con, mỗi một tập con trong số 8 tập con đó có hai phần tử với tổng bình phương là một số nguyên tố:

$$M = \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{5,8\} \cup \{6,11\} \cup \{7,10\} \cup \{9,16\} \cup \{12,13\} \cup \{14,15\}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong số bất kì 9 phần tử của M có tồn tại hai phần tử mà thuộc cùng tập con của phân hoạch. Nói một cách khác, trong bất kì tập con với 9 phần tử của M luôn luôn tồn tại hai số phân biệt a,b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố. Vì vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $k = 9$. Để ý rằng phân hoạch nói trên không phải là duy nhất.

Thí dụ 3.4. *Tìm số các phần tử lớn nhất của một tập con L của $\{1,2,3,...,2023\}$ sao cho hiệu của bất kì hai phần tử phân biệt của L là không bằng 4.*

Lời giải. Đặt $A = \{1,2,...,2023\}$. Trước tiên, bằng cách lấy modulo 4, ta có thể phân tập A thành bốn tập con L_0, L_1, L_2 và L_3, trong đó

$$L_i = \{n \in A : n \equiv i \pmod 4\}, \text{ với } i = 0,1,2,3.$$

Khi đó trong mỗi L_1, L_2, L_3 có 506 số nhưng chỉ có 505 số thuộc L_0. Với tập L_1, ta sắp xếp tất cả các số theo thứ tự tăng dần, và xét 253 cặp được

tạo thành bởi các phần tử của nó $(1,5),(9,13),(17,21)$, ..., $(2017,2021)$.

Giả sử $L \subset A$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và L chứa nhiều hơn 253 phần tử thuộc L_1. Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai phần tử, giả sử là $a > b$, thuộc cùng một cặp trong 253 cặp nói trên. Kéo theo, $a - b = 4$, mâu thuẫn. Mặt khác, vì $\{1;9;17;\ldots;2017\} \subset L_1$, có đúng 253 phần tử và hiệu hai phần tử bất kì luôn khác 4 nên L có thể chứa tối đa 253 số thuộc L_1. Tương tự, ta cũng chỉ ra được L có thể chứa tối đa 253 số thuộc mỗi tập hợp L_2, L_3, L_0. Từ đó suy ra số phần tử lớn nhất của L có thể có là $4.253 = 1012$.

Thí dụ 3.5. *Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho với bất kì các tập con m - phần tử W của $X = \{1,2,\ldots,2001\}$, có hai phần tử u và v (không nhất thiết phân biệt) trong W mà $u + v = 2^n$ với số nguyên dương n nào đó.*

Lời giải. Số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm là 999. Cách tiếp cận của chúng ta là chia tập X thành các tập con đơn (có kích thước 1) và các tập con đôi (có kích thước 2) với các tập con đơn chứa các lũy thừa của 2 và các tập con đôi có dạng $\{u,v\}$ với $u + v = 2^n$, trong đó n là số nguyên dương nào đó. Ta bắt đầu tạo thành các tập $\{u,v\}$ mà $u + v = 2048$. Bằng cách thực hiện giảm dần các số đối với $u = 2001$ đến 1025, để hình thành các tập đôi

$$\{2001,47\}, \{2000,48\}, \ldots, \{1025,1023\}$$

và lúc này tập đơn là $\{1024\}$. Sau khi sử dụng hết các số lớn hơn 64, ta lặp lại quy trình với $u + v = 64$ là lũy thừa nhỏ nhất của 2 và lớn hơn 46. Lần này ta nhận được:

$$\{46,18\}, \{45,19\}, \ldots, \{33,31\}, \{32\}.$$

Tiếp tục theo cách tương tự bắt đầu từ 17, ta tạo thành $\{17,15\}$ và $\{16\}$. Cuối cùng, bắt đầu với 14, ta nhận được: $\{14,2\}, \{13,3\}, \ldots, \{9,7\}, \{8\}$, với $\{1\}$ là tập cuối cùng.

Tiếp theo, xét bất kì tập con $W \subset X$ với $|W| = 999$. Nếu bất kì trong số các tập đơn mà ta đã tạo thành (1,8,16,32 và 1024) là thuộc W, thì ta có ngay hai phần tử (bằng nhau) của W mà tổng là một lũy thừa của 2. Mặt khác, ta có $\frac{2001-5}{2} = 998$ các tập đôi, và nếu cả hai phần tử của bất kì tập đôi là trong W, một lần nữa ta lại có hai phần tử mà tổng là một lũy thừa của 2. Khi đó theo nguyên lí Dirichlet, thì $m = 999$.

Vấn đề còn lại là chỉ ra một tập của S có kích thước 998 mà không có hai phần tử có tổng là một lũy thừa của 2. Ta thực hiện điều này bằng cách đặt phần tử lớn nhất của mỗi một tập đôi trong S, tức là, đặt: $S_3 = \{9,\ldots,14\}$, $S_4 = \{17\}$, $S_5 = \{33,\ldots,46\}$, $S_{10} = \{1025,\ldots,2001\}$, ta có: $S = S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_{10}$.

Dễ dàng thấy rằng nếu $u \in S_j, v \in S_k, j < k$, ta có $2^k < u + v < 2^{k+1}$, trong khi đó nếu $j = k$, thì $2^{k+1} < u + v < 2^{k+2}$. Như vậy, không có hai phần tử của S mà tổng là một lũy thừa của 2 (đpcm).

Thí dụ 3.6. *Cho tập X gồm 56 phần tử. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho với bất kì 15 tập con của X, nếu hợp của mỗi 7 tập trong số các tập con này chứa ít nhất n phần tử, thì tồn tại 3 trong số 15 tập con mà giao là khác rỗng.*

Lời giải. Giá trị nhỏ nhất cần tìm của n là 41.

Thật vậy, trước hết, ta chứng minh rằng $n = 41$ thỏa mãn điều kiện. Giả sử tồn tại 15 tập con của X, hợp của mỗi 7 tập trong số 15 tập con này chứa ít nhất 41 phần tử, và không tồn tại 3 trong số 15 tập con mà giao là khác rỗng.

Vì mỗi phần tử của X chỉ có thể thuộc 2 trong số 15 tập con (vì nếu ngược lại thì ta có thể thêm một số phần tử nữa vào các tập nào đó trong số 15 tập con và điều kiện vẫn đúng) cho nên ta có thể giả sử rằng mỗi phần tử của X thuộc đúng 2 trong số 15 tập con. Theo nguyên lí Dirichlet, thì có một tập trong số 15 tập con (giả sử đó là tập A) sao cho $|A| \geq \left[\frac{2 \cdot 56 - 1}{15}\right] + 1 = 8$. Giả sử 14 tập còn lại là $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$.

Giả sử I là một tập con có 7 phần tử của tập hợp $\{1;2;\ldots;14\}$, ta kí hiệu $\mathcal{W}=\left\{\bigcup_{i\in I}A_i\right\}$. Gọi y là tổng số phần tử của tất cả các tập hợp thuộc $\mathcal{W}$. Theo giả thiết phản chứng, mỗi tập hợp $W=\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathcal{W}$ có ít nhất 41 phần tử nên $y\geq 41C_{14}^7$. Với mỗi $a\in X$, nếu $a\notin A$ thì a thuộc đúng 2 trong số các tập $A_1,A_2,\ldots,A_{14}$. Vì vậy a được đếm $C_{14}^7-C_{12}^7$ lần. Nếu $a\in A$ thì a chỉ thuộc một tập trong số các tập $A_1,A_2,\ldots,A_{14}$. Do đó a được đếm $C_{14}^7-C_{13}^7$ lần. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}41C_{14}^7\leq y&\leq(56-|A|)\left(C_{14}^7-C_{12}^7\right)+|A|\left(C_{14}^7-C_{13}^7\right)\\&=56\left(C_{14}^7-C_{12}^7\right)-|A|\left(C_{13}^7-C_{12}^7\right)\\&\leq 56\left(C_{14}^7-C_{12}^7\right)-8\left(C_{13}^7-C_{12}^7\right),\end{aligned}$$

tức là, $140712\leq 140448$, mâu thuẫn.

Tiếp theo, ta chứng minh $n\geq 41$.

Nếu $n\leq 40$, giả sử $X=\{1,2,\ldots,56\}$, gọi

$A_i=\{i,i+7,i+14,i+21,i+28,i+35,i+42,i+49\}, i=\overline{1,7}$

$B_j=\{j,j+8,j+16,j+24,j+32,j+40\}, j=\overline{1,8}.$

Ta dễ dàng thấy rằng

$$|A_i|=8, i=\overline{1,7}, |A_i\cap A_j|=0\ (1\leq i<j\leq 7);$$

$$|B_j|=7, j=\overline{1,8}, |B_i\cap B_j|=0\ (1\leq i<j\leq 8);$$

$$|A_i\cap B_j|=1\ (1\leq i\leq 7, 1\leq j\leq 8).$$

Với mỗi 3 trong số 15 tập con sẽ có 2 tập mà cả hai là A_i, hoặc cả hai là B_j. Vì vậy giao của 3 tập là rỗng. Nhưng với mỗi 7 trong số 15 tập con, chẳng hạn, $A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_s}$ và $B_{j_1},B_{j_2},\ldots,B_{j_t}$ $(s+t=7)$, ta có:

$$\begin{aligned}&\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cdots\cup A_{i_s}\cup B_{j_1}\cup B_{j_2}\cdots\cup B_{j_t}\right|\\&=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_s}|+|B_{j_1}|+|B_{j_2}|+\cdots+|B_{j_t}|-st\\&=8s+7t-st=8s+7(7-s)-s(7-s)\\&=(s-3)^2+40\geq 40.\end{aligned}$$

Do đó $n\geq 41$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $n=41$.

Thí dụ 3.7. *Kí hiệu $S(n)$ là tổng của tất cả các chữ số của một số nguyên dương n trong hệ cơ số 10. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của $S(m)$, trong đó m là bội dương của 2003.*

Lời giải. Trước hết ta có một số nhận xét sau:

• ***Nhận xét 1.*** *Số nguyên dương nhỏ nhất m mà thỏa mãn $10^m\equiv 1\pmod{2003}$ là 1001.*

Thật vậy, vì $1001=7\cdot 11\cdot 13$, các ước dương của 1001 là 1,7,11,13,77,91,143 và 1001. Để ý rằng $10^{1001}\equiv 1\pmod{2003}$ và do đó, nếu k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $10^k\equiv 1\pmod{2003}$, thì k phải là một ước dương của 1001. Bằng cách tính trực tiếp, ta có $10^1,10^7,\ldots,10^{143}$ tất cả không đồng dư với 1 bởi $\pmod{2003}$.

• ***Nhận xét 2.*** *Không tồn tại một bội dương của 2003 mà có dạng 10^k+1 với $k\in\mathbb{N}$.*

Thật vậy, nếu không như vậy, tức là, có $k\in\mathbb{N}$ sao cho $10^k+1\equiv 0\pmod{2003}$ thì $10^{2k}\equiv 1\pmod{2003}$ và theo nhận xét 1, $2k$ là một bội của 1001. Từ đây suy ra rằng k chia hết cho 1001 (do ƯCLN $(2,1001)=1$) và vì vậy kéo theo $10^k\equiv 1\pmod{2003}$, mâu thuẫn.

• ***Nhận xét 3.*** *Tồn tại một bội dương của 2003 mà có dạng 10^k+10^h+1 với $k,h\in\mathbb{N}$.*

Thật vậy, xét 2002 các số nguyên dương $a_1,\ldots,a_{1001},b_1,\ldots,b_{1001}$, trong đó a_k,b_k lần lượt là các phần dư của phép chia của 10^k và -10^k-1 cho 2003. Ta có $a_k\neq 0$, $b_k\neq 2002$ và theo nhận xét 2 cũng có $a_k\neq 2002, b_k\neq 0$ với mọi $k=\overline{1,1001}$. Vì vậy tất cả các số a_k,b_k này là thuộc tập $\{1,2,\ldots,2001\}$. Theo nguyên lí Dirichlet, thì có hai số bằng nhau. Hơn nữa, $a_i\neq a_j, b_i\neq b_j$, vì ngược lại, nếu với $1\leq i<j\leq 1001$ mà $a_i=a_j$ hoặc $b_i=b_j$, thì $1\leq j-i\leq 1000$ và $10^j-10^i\equiv 10^i\left(10^{j-i}-1\right)\equiv 0\pmod{2003}$ hay $10^{j-i}\equiv 1\pmod{2003}$. Điều này mâu thuẫn với

nhận xét 1. Vì vậy có $k,h \in \{1,2,...,1001\}$ sao cho $a_k = b_h$, hay $10^k + 10^h + 1 \equiv 0 \pmod{2003}$.

Bây giờ trở lại bài toán đã cho. Giả sử m là một bội dương của 2003. Ta dễ dàng thấy rằng m không có dạng 10^k và $2 \cdot 10^k$ với $k \in \mathbb{N}$. Theo nhận xét 2, ta có $S(m) \geq 3$. Nói một cách khác, nếu $h,k \in \mathbb{N}$ thì $S(10^k + 10^h + 1) = 3$ và theo nhận xét 3, tồn tại một bội dương m_0 của 2003 sao cho $S(m_0) = 3$. Như vậy giá trị nhỏ nhất của $S(m) = 3$.

Thí dụ 3.8. *Cho tập $X = \{1,2,3,...,15\}$. Ký hiệu M là tập con của X thoả mãn điều kiện: Tích 3 phần tử bất kì của M đều không phải là số chính phương. Hãy tìm số phần tử lớn nhất của tập M.*

Lời giải. Ta coi bộ ba phần tử của tập X với tích là số chính phương như là một bộ *xấu*. Chia tập X thành 5 tập con rời nhau:

$M_1 = \{1,4,9\}, M_2 = \{2,6,12\}, M_3 = \{3,5,15\}$,

$M_4 = \{7,8,14\}, N = \{10,11,13\}$.

Các bộ ba trong mỗi tập M_i đều là những bộ xấu.

Nếu $|M| \geq 12$ thì ít nhất hai trong số 5 tập con trên là tập con của M. Khi đó, có i để $M_i \subset M$. Do vậy, có ít nhất một bộ xấu được chứa trong tập M. Từ đó suy ra $|M| \leq 11$.

Nếu $|M| = 11$ thì phải có một trong năm tập trên là tập con của M. Bởi vì M_i không thể chứa trong M với $i = \overline{1,4}$ nên $N \subset M$. Từ đó suy ra với mỗi $i = \overline{1,4}$, có đúng hai phần tử của M_i thuộc M (1).

Tiếp theo, vì $N \subset M$ nên $10 \in M$. Khi đó các tập con $\{1;4;9\}, \{2,5\}, \{6;15\}, \{7;8;14\}$ là rời nhau và không chứa trong M (vì $\{2;5;10\}$ và $\{6;10;15\}$ là các bộ xấu). Lúc này,

• Nếu 3 hoặc 12 không thuộc M thì từ (1) suy ra ba trong bốn số $2;6;5;15$ thuộc M. Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet ta có một trong hai tập hợp là $\{2;5\}$ hoặc $\{6;15\}$ chứa trong M, mâu thuẫn.

• Nếu 3 và 12 đều thuộc M thì cũng theo (1) suy ra tập $\{1;4;9\}$ có hai phần tử thuộc M, do đó M chứa ít nhất một bộ xấu, mâu thuẫn. Vậy $|M| \leq 10$.

Xét tập $M = \{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\}$ với $|M| = 10$. Không có ba số nào từ tập M là một bộ ba xấu. Như vậy, số phần tử lớn nhất của tập M là bằng 10.

Thí dụ 3.9. *Cho 5 số nguyên phân biệt, xét 10 hiệu được tạo bởi các cặp của các số này (để ý rằng một số hiệu này có thể là bằng nhau). Tìm số nguyên lớn nhất có thể có để chia hết tích của 10 hiệu này, bất kể 5 số nguyên đã cho ban đầu.*

Lời giải. Nếu năm số nguyên là $1,2,3,4,5$, thì tích của mười hiệu là

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 288.$$

Bây giờ giả sử cho năm số nguyên phân biệt a,b,c,d,e. Ta sẽ chứng tỏ 288 là giá trị cần tìm để chia hết tích P của mười hiệu được tạo bởi các cặp của các số này.

Trước hết, ta sẽ chứng tỏ rằng 2^5 là một ước của P. Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất ba trong số năm số, không mất tính tổng quát, ta gọi là a,b,c là đồng dư modulo 2. Một lần nữa lại theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất hai trong số các số này, ta gọi là a và b là đồng dư modulo 4. Do đó, tích $|a-b| \times |a-c| \times |b-c|$ tạo thành nhân tử 2^4 cho P. Nếu d và e là đồng dư modulo 2, thì nhân tử $|d-e|$ tạo thành một nhân tử bổ sung 2 cho P. Ngược lại, nếu d và e là phân biệt modulo 2 thì khi đó ít nhất một trong số chúng, gọi là d, là đồng dư với a,b,c modulo 2. Vì vậy hiệu $|a-d|$ tạo thành một nhân tử bổ sung 2 cho P. Do đó, P chia hết cho 2^5.

Tiếp theo, ta sẽ chứng tỏ rằng 3^2 là một ước của P. Theo nguyên lí Dirichlet, ít nhất hai trong số năm số, không mất tính tổng quát, ta gọi là a và b là đồng dư modulo 3. Do đó, hiệu $|a-b|$ tạo thành một nhân tử 3 cho P. Nếu ba số còn lại là phân biệt modulo 3, thì ít nhất một trong số chúng, không mất tính tổng quát, ta gọi là c, là

đồng dư với a và b modulo 3. Do đó, hiệu $|a-c|$ tạo thành một nhân tử bổ sung 3 cho P. Ngược lại, nếu ba số còn lại là không phân biệt modulo 3 thì theo nguyên lí Dirichlet chắc chắn có hai trong số chúng, không mất tính tổng quát, ta gọi là c và d, là đồng dư modulo 3. Vì vậy hiệu $|c-d|$ tạo thành một nhân tử bổ sung 3 cho P. Do đó, P chia hết cho 3^2. Vì P chia hết cho cả 2^5 và 3^2, mà 2^5 và 3^2 là hai số nguyên tố cùng nhau, nên P chia hết cho $2^5 \times 3^2 = 288$. Vậy số nguyên lớn nhất cần tìm là 288.

Thí dụ 3.10. *Cho tập M gồm 2003 số nguyên dương phân biệt sao cho không có số nào trong chúng có ước nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng M chứa ít nhất một tập hợp con gồm 4 phần tử mà tích của 4 phần tử này là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.*

Lời giải. Vì có 9 số nguyên tố không lớn hơn 23 là: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23$. Vì thế trong mỗi phần tử k của tập hợp M (từ giả thiết) đều có dạng:

$$k = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_9^{k_9} \quad (*),$$

ở đây k_i là các số nguyên không âm với mọi $i = \overline{1,9}$. Với mỗi phần tử k của tập hợp M ta gán tương ứng với một dãy $(x_1, x_2, ..., x_9)$, trong đó $x_i = 0$ nếu số mũ k_i của p_i trong (*) là chẵn và $x_i = 1$ nếu k_i là lẻ. Tập hợp các dãy $(x_1, x_2, ..., x_9)$ trong đó $x_i = 1, i = \overline{1,9}$ gồm 2^9 phần tử

Theo nguyên lí Dirichlet mọi tập hợp con chứa không ít hơn $2^9 + 1$ phần tử của M chứa ít nhất hai số nguyên phân biệt, mà ta gọi chúng là a_1, b_1, trong đó a_1, b_1 cùng ứng với một dãy $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$ nào đó, tức là

$$a_1 = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_9^{k_9},\ b_1 = p_1^{k_1'} \cdot p_2^{k_2'} \cdots p_9^{k_9'}.$$

Do a_1, b_1 cùng ứng với một dãy chung $(x_1, x_2, \ldots, x_9)$ nên k_i, k_i' có cùng tính chẵn lẻ với mọi $i = \overline{1,9}$. Từ đó ta có:

$$a_1 b_1 = p_1^{k_1 + k_1'} \cdot p_2^{k_2 + k_2'} \cdots p_9^{k_9 + k_9'} = c^2.$$

Nói cách khác đi ta lấy đi một cặp như thế từ tập M, thì còn lại $2003 - 2 > 2^9 + 1$ số.

Áp dụng nguyên lí Dirichlet một lần nữa và tiếp tục lấy đi những cặp như thế cho đến khi còn lại $2^9 + 1$ số trong M.

Để ý rằng $2003 > 3(2^9 + 1)$ (vì $3(2^9 + 1) = 1539$), nên ta có thể lấy đi $2^9 + 1$ cặp (a, b), lúc đó số còn lại của M vẫn là:

$$2003 - 2(2^9 + 1) = 977 > 513 = 2^9 + 1.$$

Xét $2^9 + 1$ cặp lấy đi (ứng với mỗi cặp a_i, b_i) ta có $a_i b_i = c_i^2$. Ta có $c_i = \sqrt{a_i b_i}$. Số c_i không thể chứa các thừa số nguyên tố khác $p_1, p_2, ..., p_9$ (do các a_i, b_i cũng như vậy). Vì vậy lại theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất một cặp (c_i, c_j) sao cho $c_i c_j = d^2$, với d là các số nguyên, suy ra:

$$d^4 = c_i^2 \cdot c_j^2 = a_i \cdot b_i \cdot a_j \cdot b_j \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 3.11. *Ta nói rằng một tập các số nguyên dương S được gọi là tốt nếu có một hàm $f : \mathbb{N} \to S$ sao cho không có số nguyên k với $2 \le k \le 2017$ có thể được viết thành $\dfrac{xf(x)}{yf(y)}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $S = \{1, 2017, 2017^2, ..., 2017^n\}$ là tốt, hoặc chứng minh rằng không tồn tại số nguyên như vậy.*

Lời giải. Ta khẳng định $n = 10$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Thật vậy, ta nhận thấy tập S không thể là tốt với $n \le 9$ và để ý trong trường hợp này $|S| = n + 1 \le 10$. Theo nguyên lí Dirichlet, hai trong số các số $1, 2, 2^2, ..., 2^{10}$ có cùng ảnh bởi f. Nếu các giá trị này là 2^i và 2^j với $i < j$, ta đặt $x = 2^j$ và $y = 2^i$ thì ta nhận được:

$$\frac{xf(x)}{yf(y)} = \frac{2^j f(2^j)}{2^i f(2^i)} = 2^{j-i},$$ là một số nguyên nằm giữa 2 và $2^{10} = 1024$.

Tiếp theo ta muốn xây dựng một hàm f với $n = 10$. Kí hiệu $g(k)$ là số của các số nguyên tố

trong phân tích nhân tử của k, được tính bởi phép nhân (chẳng hạn, $g(2^a3^b)=a+b$). Thế thì ta thấy rằng chỉ duy nhất số nguyên dương với $g(k)=0$ là $k=1$, và số k nhỏ nhất với $g(k)\geq 11$ là $k=2^{11}=2048$. Khi đó $1\leq g(k)\leq 10$ với mọi $2\leq k\leq 2017$.

Để ý rằng $g(2017)=1$ và $g(2017^k)=k$. Vì 1 và 11 là nguyên tố cùng nhau, nên các số $g(1),g(2017),...,g(2017^{10})$ có các phần dư khác nhau khi chia cho 11. Với mọi n, chọn $f(n)$ từ S để $g(n)+g(f(n))$ là chia hết cho 11. Theo cách này, nếu $yf(y)$ chia hết $xf(x)$ với x và y nào đó. thì ta có

$$g\left(\frac{xf(x)}{yf(y)}\right)=\underbrace{g(x)+g(f(x))}_{\text{chia hết cho 11}}-\underbrace{(g(y)+g(f(y)))}_{\text{chia hết cho 11}}$$

là chia hết cho 11. Đặc biệt, $\frac{xf(x)}{yf(y)}$ không thể là một số nguyên nằm giữa 2 và 2017.

Thí dụ 3.12. *Cho n và r là hai số nguyên dương. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m thỏa mãn điều kiện sau: với mỗi cách phân tập $\{1,2,...,m\}$ thành r tập con $A_1,A_2,...,A_r$ $(A_i\cap A_j\neq\varnothing, i\neq j)$, tồn tại hai số a và b trong một tập con A_i $(1\leq i\leq r)$ sao cho $1\leq\frac{a}{b}\leq 1+\frac{1}{n}$.*

Lời giải. Kí hiệu giá trị nhỏ nhất của m là m_0 (giá trị của m_0 có thể nhận được từ phân tích dưới đây). Giả sử rằng $m<m_0$. Đặt $A_j=\{i \mid i\equiv j \pmod r, i\leq m\}$ $(j=1,2,...,r)$. Thế thì với bất kì hai số a,b trong một tập con với $a>b$, ta có $b\leq a-r<m_0-r$. Như vậy

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}>1+\frac{r}{m_0-r}.$$

Khi đó với $m_0=nr+r$, ta có $\frac{a}{b}>1+\frac{1}{n}$. Do đó điều kiện trong câu hỏi không thể đúng. Tiếp theo, với $m=m_0=nr+r$, xét $(r+1)$ các số $nr,nr+1,...,nr+r$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại $a>b$ sao cho a và b đều trong cùng tập hợp con. Thế thì $a-b\leq r, b\geq nr$, nên

$$1<\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\leq 1+\frac{r}{b}\leq 1+\frac{r}{nr}=1+\frac{1}{n}.$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất cần tìm của m là $m_0=nr+r$.

Thí dụ 3.13. *Cho $n>1$ là một số nguyên, k là số của các nhân tử nguyên tố phân biệt của n. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên với $1<a<\frac{n}{k}+1$ sao cho $n\mid a^2-a$.*

Lời giải. Giả sử $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của n. Vì $p_1^{\alpha_1},...,p_k^{\alpha_k}$ là đôi một nguyên tố cùng nhau, nên theo định lí Trung Hoa về phần dư, với mỗi i, $1\leq i\leq k$, các phương trình đồng dư $\begin{cases}x\equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}\\ x\equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}\end{cases}, j\neq i$ có nghiệm duy nhất x_i modulo n. Giả sử $A\subset\{x_1,x_2,...,x_k\}$. Đặt

$S(A)=\sum\varepsilon_i x_i$, với $\varepsilon_i=\begin{cases}1 & \text{nếu } x_i\in A\\ 0 & \text{nếu } x_i\notin A\end{cases}$.

Khi đó:

- Nếu $x_i\in A$ thì $S(A)\equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, kéo theo $S(A)(S(A)-1)\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.
- Nếu $x_i\notin A$ thì $S(A)\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, kéo theo $S(A)(S(A)-1)\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$.

Vậy với mỗi $i\leq k$, ta luôn có $S(A).(S(A)-1)\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Mặt khác, $p_1^{\alpha_1},...,p_k^{\alpha_k}$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra $S(A).(S(A)-1)\equiv 0 \pmod n$. Đặc biệt $S(A)\equiv 0 \pmod n$ hoặc $S(A)\equiv 1 \pmod n$ khi và chỉ khi $\varepsilon_1=\varepsilon_2=...=\varepsilon_k$ (*).

Đặt $S_0=n$, S_r là phần dư không âm nhỏ nhất của $x_1+x_2+\cdots+x_r$ modulo n, $r=1,2,...,k$. Như vậy $S_k=1$. Với mọi $1\leq r\leq k-1$, $S_r\neq 0$. Vì có $k+1$ các số $S_0,S_1,...,S_k$ là thuộc đoạn $[1,n]$, nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại $0\leq l<m\leq k$, sao

cho S_l, S_m cùng nằm trong khoảng $\left(\frac{jn}{k}, \frac{(j+1)n}{k}\right]$, $(0 \le j \le k-1)$, trong đó $l=0$ và $m=k$ là không xảy ra một đồng thời.

Như vậy, $|S_l - S_m| < \frac{n}{k}$. Kí hiệu $y_1 = S_1$, $y_r = S_r - S_{r-1} (r = 2,3,...,k)$. Khi đó $y_r \equiv x_r \pmod n$ $(r = 1,2,...,k)$. Xét các trường hợp sau:

Nếu $S_m - S_l > 1$ thì

$$a = y_{l+1} + y_{l+2} + \cdots + y_m = S_m - S_l \in \left(1, \frac{n}{k}\right)$$

là nghiệm của phương trình $x^2 - x \equiv 0 \pmod n$.

Nếu $S_m - S_l = 1$ thì

$$n \mid (y_1 + y_2 + \cdots + y_l) + (y_{m+1} + y_{m+2} + \cdots + y_k),$$

nghĩa là $n \mid (x_1 + x_2 + \cdots + x_l) + (x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_k)$.

Để ý rằng $m > l$, mâu thuẫn với (*).

Nếu $S_m - S_l = 0$ thì $n \mid (y_{l+1} + y_{l+2} + \cdots + y_m)$, nghĩa là $n \mid (x_{l+1} + x_{l+2} + \cdots + x_m)$, mâu thuẫn với (*).

Nếu $S_m - S_l < 0$ thì

$$a = (y_1 + y_2 + \cdots + y_l) + (y_{m+1} + \cdots + y_k)$$
$$= S_k - (S_m - S_l) = 1 - (S_m - S_l)$$

là nghiệm của phương trình $x^2 - x \equiv 0 \pmod n$ và $1 < a < 1 + \frac{n}{k}$.

Tóm lại, tồn tại số a thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thí dụ 3.14. *Cho $S = \{1,2,3,4,....,100000\}$. Tìm giá trị lớn nhất của k sao cho bất kì tập con A của S với $|A| = 2021$ chứa hai số phân biệt a và b mà $|a-b| \le k$.*

Lời giải. Ta xét các tập con của S như sau:

$S_1 = \{1,2,3,...,49,50\}$,

$S_2 = \{51,52,53,...,99,100\}$,

$S_3 = \{101,102,103,...,149,150\}$

.....

$S_{2000} = \{99951,99952,99953,...,99999,100000\}$.

Nói một cách khác, $S_i = \{50i-49, 50i-48, ..., 50i\}$ với $i = 1,2,...,2000$. Để ý rằng S được phân hoạch thành các tập con $S_1, S_2, ..., S_{2000}$. Theo nguyên lí Dirichlet, với bất kì tập con A của S mà $|A| = 2021$, tồn tại i với $1 \le i \le 2000$ sao cho $|A \cap S_i| \ge 2$. Giả sử $a, b \in A \cap S_i$. Rõ ràng ta nhận thấy $|a-b| \le 49$. Để chứng tỏ 49 là giá trị lớn nhất có thể có của k, ta tìm một tập con $A \subseteq S$ với $|A| = 2021$ sao cho $|a-b| \ge 49$ với bất kì các số phân biệt $a, b \in A$. Gọi

$$A = \{49j+1 : j = 0,1,2,...,2020\}$$
$$= \{1,50,99,148,...,98981\}.$$

Khi đó A là một tập con của S với $|A| = 2021$ và $|a-b| \ge 49$ với bất kì $a, b \in A$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $k = 49$.

Thí dụ 3.15. *Xét tập $M = \{1,2,3,...,9,10\}$ và $A_1, A_2, ..., A_n$ là dãy các tập con khác rỗng và phân biệt của M sao cho $|A_i \cap A_j| \le 3$ với mọi $i \ne j$ $(i, j \in \{1,2,...,n\})$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của n.*

Lời giải. Trước hết, để n lớn nhất thì trong các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ phải chứa tất cả các tập con khác rỗng và có không quá 3 phần tử của tập $\{1,2,3,...,9,10\}$. Số lượng các tập này là

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 = 175.$$

Gọi $B_1, B_2, ..., B_m$ là các tập con còn lại sau khi loại 175 tập có không quá 3 phần tử nêu trên từ các tập $A_1, A_2, ..., A_n$. Rõ ràng:

$$n_{\max} = m_{\max} + 175 \text{ và } |B_i| \ge 4, \forall i = \overline{1,m}.$$

Nếu $m \ge C_{10}^4$ thì trong mỗi tập hợp $B_1, B_2, ..., B_m$ ta trích ra 1 tập con có 4 phần tử bất kì và rõ ràng các tập này cũng là tập con có 4 phần tử của tập hợp $\{1,2,3,...,9,10\}$. Do $m \ge C_{10}^4$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 tập con có 4 phần tử (giả sử là tập con B_i và B_j) trùng nhau. Suy ra $|B_i \cap B_j| \ge 4$, mâu thuẫn. Như vậy $m \le C_{10}^4$.

Mặt khác, trong C_{10}^4 tập con phân biệt có 4 phần tử của M thì giao của hai tập bất kì luôn có số phần tử không vượt quá 3, thỏa mãn yêu cầu. Do đó $m_{\max} = C_{10}^4 = 210$. Vậy $n_{\max} = 175 + 210 = 385$ là giá trị lớn nhất cần tìm (các tập $A_1, A_2, ..., A_{385}$ thỏa mãn đề bài chính là các tập con có không quá 4 phần tử của tập M).

Từ bài toán trên ta nhận thấy rằng, trong trường hợp tổng quát, khi thay 10 bởi n và 3 bởi $k < n$ ta cũng thu được kết quả tương tự là

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k.$$

Thí dụ 3.16. *Cho A và B là hai tập con của $\{1,2,3,...,100\}$ thỏa mãn $|A| = |B|$ và $A \cap B = \varnothing$. Nếu $n \in A$ luôn kéo theo $2n+2 \in B$. Tìm giá trị lớn nhất của $|A \cup B|$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $|A \cup B| \le 66$, hay tương đương $|A| \le 33$. Với mục đích này, ta chỉ cần chứng minh rằng, nếu A là một tập con của $\{1,2,...,49\}$ với 34 phần tử, thì phải có tồn tại $n \in A$ sao cho $2n+2 \in A$. Ta chứng minh như sau:

Phân chia $\{1,2,...,49\}$ thành 33 tập con:

$\{1,4\},\{3,8\},\{5,12\},...,\{23,48\}$: có 12 tập con;

$\{2,6\},\{10,22\},\{14,30\},\{18,38\}$: có 4 tập con;

$\{25\},\{27\},\{29\},...,\{49\}$: có 13 tập con;

$\{26\},\{34\},\{42\},\{46\}$: có 4 tập con.

Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất một tập con với 2 phần tử trong số các tập hợp trên cũng là một tập con của A. Điều này có nghĩa là tồn tại $n \in A$ sao cho $2n+2 \in A$.

Mặt khác, giả sử

$$A = \{1,3,5,...,23,2,10,14,18,25,27,29,...,49,26,34,42,46\}$$

$$B = \{2n+2 \mid n \in A\}.$$

Ta tìm được rằng A và B thỏa mãn điều kiện bài toán và $|A \cup B| = 66$.

4. CÁC BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

1. Cho $x_1, x_2, ..., x_5$ là các số thực. Tìm số nguyên dương lớn nhất n có tính chất sau: nếu n tổng phân biệt nào đó có dạng $x_p + x_q + x_r$ (với $1 \le p < q < r \le 5$) là bằng 0, thì $x_1 = x_2 = \cdots = x_5 = 0$.

2. Cho m là một số nguyên cố định lớn hơn 1. Dãy $x_0, x_1, x_2, ...$ được xác định như sau: $x_i = 2^i$ nếu $0 \le i \le m-1$; $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i-j}$ nếu $i \ge m$. Tìm số lớn nhất k để dãy chứa k số hạng liên tiếp chia hết cho m.

3. Cho k là một số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho trong số bất kì n các số nguyên dương tồn tại hai số mà tổng hoặc hiệu là chia hết cho $2k$.

4. Cho M là tập con của $S = \{1,2,...,2000\}$ sao cho hiệu của bất kì hai số của M không phải là 5 cũng không phải là 8. Hỏi tập M có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

5. Giả sử xóa n các số trong tập $S = \{1, 2, ..., 2005\}$ sao cho trong số các số còn lại, không có số nào bằng tích của hai số kia. Tìm các số nguyên dương nhỏ nhất n có tính chất nói trên.

6. Ta gọi tổng của một tập hợp các số là tổng các phần tử của nó. Cho S là một tập hợp các số nguyên dương, không lớn hơn 15. Giả sử không có hai tập con rời nhau của S có tổng bằng nhau. Tổng lớn nhất mà một tập S với tính chất đã cho có thể có là bao nhiêu?

7. Chứng minh rằng với mọi tập $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gồm n số thực, tồn tại một tập con khác rỗng S của X và một số nguyên m sao cho $\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \le \frac{1}{n+1}$.

8. Với số nguyên $k, n \ge 1$, ta ký hiệu $A_k(n)$ cho số các số nguyên dương không vượt quá n và chia hết cho ít nhất một trong k số nguyên tố đầu tiên; ký hiệu $B_k(n)$ cho số nguyên dương lớn nhất t để tồn tại một tập gồm t số nguyên dương không vượt n sao cho trong tập đó không thể chọn ra $k+1$ số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng đôi một. Chứng minh rằng $B_k(n) \ge A_k(n)$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 73

PROBLEM. *The graph of $y = f(x)$ is transformed to the graph of $y = f(2x)$. Describe fully the transformation.*

Solution. If we let $t := 2x$, the function $y = f(2x)$ becomes $y = f(t)$ which is somehow similar to $y = f(x)$ except the following: the variable x runs from a to b corresponds to the variable t runs from $\frac{a}{2}$ to $\frac{b}{2}$.

Thus the transformation is stretching in x - direction with the factor $\frac{1}{2}$.

Question: Can you draw the graphs of the functions $y = \sin(x)$ and $y = \sin(2x)$?

TỪ VỰNG

graph	: *đồ thị*
transform	: *biến đổi*
fully	: *một cách đầy đủ*
transformation	: *phép biến đổi*
stretch	: *dãn*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 70

BÀI TOÁN. *Tìm số hạng tiếp theo của dãy số sau*: 1; 11; 21; 1211; 111221; ...

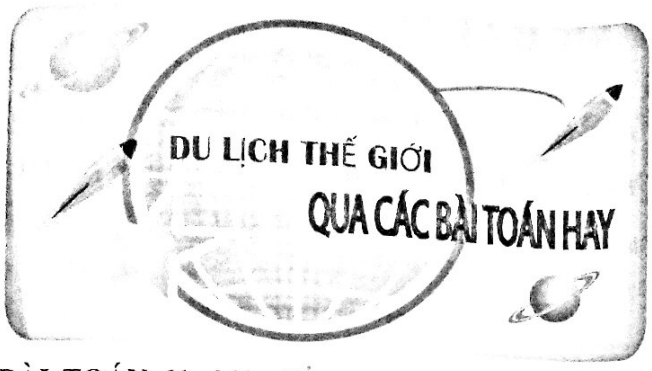
Lời giải. Dãy số bắt đầu với số 1. Số hạng tiếp theo được xác định từ số hạng trước đó bằng cách đọc số theo từng chữ số và đọc nhóm các số được lặp lại một cách liên tiếp. Ví dụ, nhìn vào số hạng đầu tiên rồi đọc một số 1, thì số hạng thứ hai của dãy là 11; nhìn vào số hạng thứ hai của dãy rồi đọc hai số 1, thì số hạng thứ ba của dãy là 21, và cứ tiếp tục như thế, ...

Số hạng thứ sáu của dãy số trên theo quy luật đó là 312211.

Lưu ý: Dãy số trên được gọi là *dãy Conway Nhìn – và Nói* . *John Conway* là một nhà toán học nổi tiếng. Rất nhiều người đã quan tâm đến dãy số trên và nghiên cứu nó một cách nghiêm túc.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Phương Thảo*, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Văn Ngọc Bình*, *Nguyễn Kỳ Nam*, *Trương Hồ Bảo Nhi*, *Trần Thị Thanh Thư*, 11 Toán 1, *Trần Duy Anh*, 10 Anh 1, *Võ Thị Bảo Ngọc*, 10T2, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



BÀI TOÁN 61. *Một điểm trong mặt phẳng tọa độ Đề Các vuông góc được gọi là điểm hỗn hợp (mixed point) nếu một trong hai thành phần tọa độ của nó là số hữu tỷ, thành phần kia là số vô tỷ. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực sao cho đồ thị của đa thức đó không chứa bất kỳ điểm hỗn hợp nào.*

Lời giải. Xét đa thức tổng quát dạng:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

với $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có các trường hợp sau đây xảy ra:

• TH1: $n = 0$, khi đó $P(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dễ thấy trường hợp này không thỏa mãn bài toán (chẳng hạn: với c hữu tỷ thì điểm $(\sqrt{2}, c)$ thuộc đồ thị của đa thức, với c vô tỷ thì điểm $(0, c)$ cũng thuộc đồ thị của đa thức).

• TH2: $n = 1$, khi đó $P(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Trong trường hợp này ta thấy đa thức cần tìm có dạng $P(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$. Thật vậy, nếu x hữu tỷ thì do a, b hữu tỷ nên $P(x) = ax + b$ hữu tỷ; nếu x vô tỷ thì do a, b hữu tỷ, $a \neq 0$ nên $P(x) = ax + b$ vô tỷ. Do đó các điểm $(x, P(x))$ không là điểm hỗn hợp và đồ thị của $P(x)$ không chứa bất cứ điểm hỗn hợp nào.

• TH2: $n \geq 2$, khi đó yêu cầu của bài toán là tìm đa thức bậc $n \geq 2$ sao cho $P(x)$ nhận giá trị hữu tỷ với mọi x hữu tỷ và $P(x)$ nhận giá trị vô tỷ với mọi x vô tỷ. Ta sẽ chứng minh không có đa thức nào thỏa mãn các điều kiện này.

Ta có bổ đề quen thuộc sau: *Giả sử* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, *khi đó hệ cơ sở* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *với* $n \geq 2$ *là độc lập tuyến tính.*

• Xét yêu cầu thứ nhất: $P(x)$ nhận giá trị hữu tỷ với mọi x hữu tỷ, ta cần chứng minh tất cả các hệ số của $P(x)$ là số hữu tỷ. Thật vậy, giả sử có một hệ số a_m, $0 \leq m \leq n$ là vô tỷ. Ta có:

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_m + \ldots + a_1 + a_0 \in \mathbb{Q};$$

$$P(2) = 2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 2^m a_m + \ldots + 2a_1 + a_0 \in \mathbb{Q};$$

.....

$$P(n+1) = (n+1)^n a_n + \ldots + (n+1)^m a_m + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q};$$

Sử dụng bổ đề trên ta nhận thấy có thể sử dụng một tổ hợp tuyến tính với các số hữu tỷ $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n + 1)$ để đưa được về dạng: $a.a_m = b$ với điều $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$, này là vô lý.

Vậy tất cả các số của $P(x)$ là số hữu tỷ.

• Xét yêu cầu thứ hai, ta chứng minh yêu cầu này không thỏa mãn, tức là với $\forall a \in \mathbb{Q}$ thì

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a,\ n \geq 2, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = \overline{1,n}$$

luôn có ít nhất một nghiệm hữu tỷ là sai. Thật vậy chọn $m > 0$ là số hữu tỷ đủ lớn để tất cả các phương trình sau có nghiệm hữu tỷ b_1, b_2, ..., b_{n+1}:

$$P(b_1) = a_n b_1^n + \ldots + a_1 b_1 + a - m = 0;$$

$$P(b_2) = a_n b_2^n + \ldots + a_1 b_2 + a - 2m = 0;$$

.....

$$P(b_{n+1}) = a_n b_{n+1}^n + \ldots + a_1 b_{n+1} + a - (n+1)m = 0.$$

Dễ thấy b_1, b_2, ..., b_{n+1} khác 0 và khác nhau từng đôi một nên xem hệ phương trình trên ẩn a_1, a_2, ..., a_n thì sử dụng bổ đề trên và phép khử ta chứng minh được $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, suy ra vô lý.

Vật tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Nhận xét. Lời giải trên là của bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**. Xin hoan nghênh bạn.

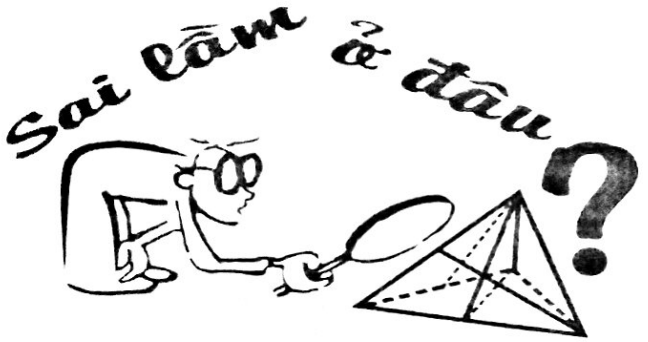
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.11.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 63. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương* $(x; y)$ *sao cho* $x^{y^2} = y^x$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 528, tháng 6 năm 2021)

Phân tích sai lầm.

Trong lời giải bạn học sinh đã sai ở chỗ đặt:

$$u = x + y,\ v = xy$$

mà quên chưa xét điều kiện để có nghiệm (x, y) là

$$(x+y)^2 \geq 4xy \text{ hay } u^2 \geq 4v.$$

Lời giải đúng. Đặt $u = x + y;\ v = xy$ khi đó $x > 0; y > 0 \Leftrightarrow u > 0;\ v > 0$.

Ta có: $\begin{cases} u + v = m + 1 \\ uv = m \end{cases}$ (*). Dễ thấy hệ (*) có $(u;v) = (m;1);(1;m)$.

Để hệ đã cho có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0$ thì hệ (*) có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $u > 0; v > 0$ và $u^2 \geq 4v$ hay

$$\begin{cases} (u+v)^2 \geq 4uv \\ u + v > 0 \\ uv > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m^2 \geq 4 \\ 1 \geq 4m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 \geq 4m \\ m + 1 > 0 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -2; m \geq 2 \\ m \leq \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ 0 < m \leq \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0$ khi $0 < m \leq \dfrac{1}{4}$ hoặc $m \geq 2$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện đúng sai lầm và đã đưa ra lời giải chính xác. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Trong giờ luyện tập thầy giáo ra bài toán:

Tìm cực trị của hàm số $y = (1 + \cos x)\sin x$.

Bạn *Mạnh* đã đưa ra lời giải như sau:

$$y' = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$
$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1);$$
$$y'' = -2\sin 2x - \sin x;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• $y''(\pi + k2\pi) = 0 \Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại các điểm $x = \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

• $y''\left(\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ và

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

• $y''\left(-\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ và

$$y_{CT} = y\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Theo bạn lời giải trên đúng chưa? Nếu sai bạn hãy chỉ ra chỗ sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 532 (10.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

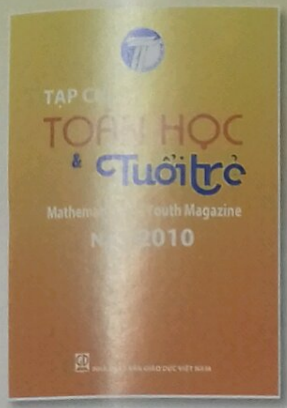
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HOÀ

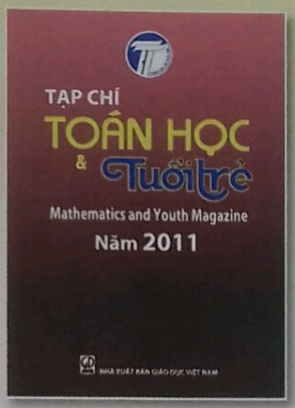
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

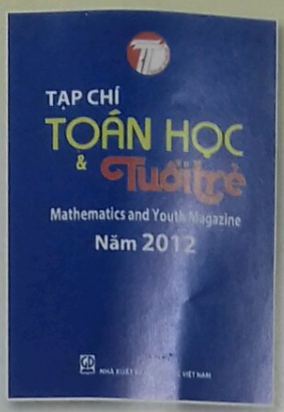
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

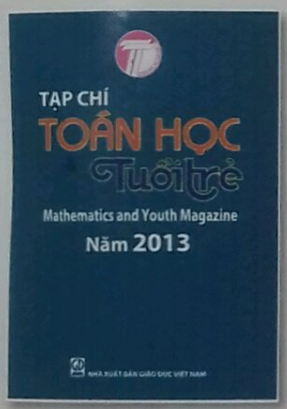
Bộ đóng tập

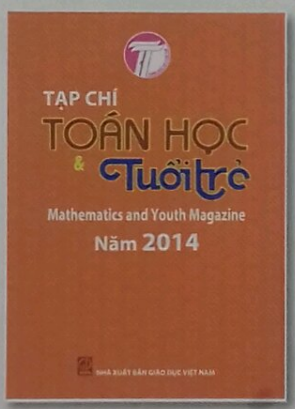
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

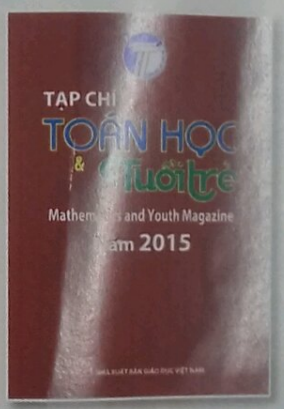


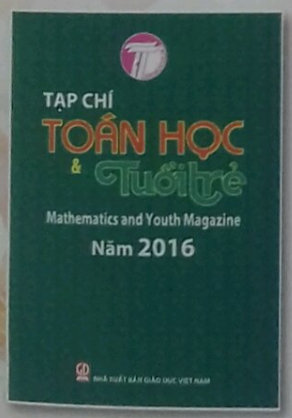


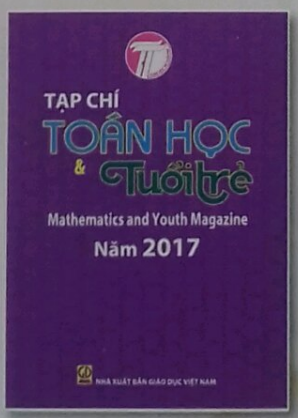


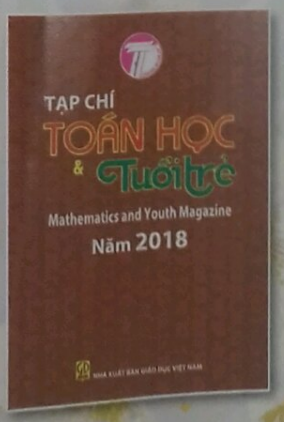


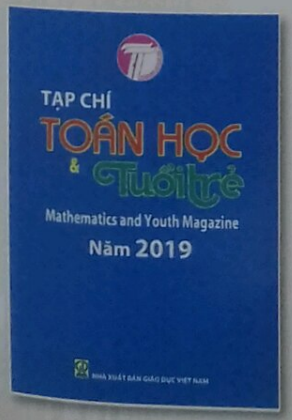


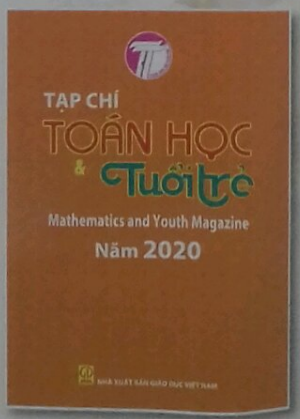












Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

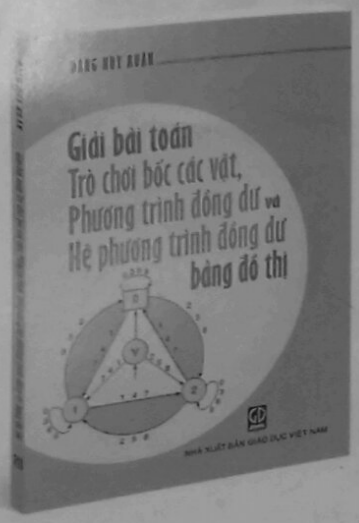
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT10M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2021
Giá: 38.000 đồng
Mười tám nghìn đồng