TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 531
Tháng 9 - 2021
ISSN: 2734-9284

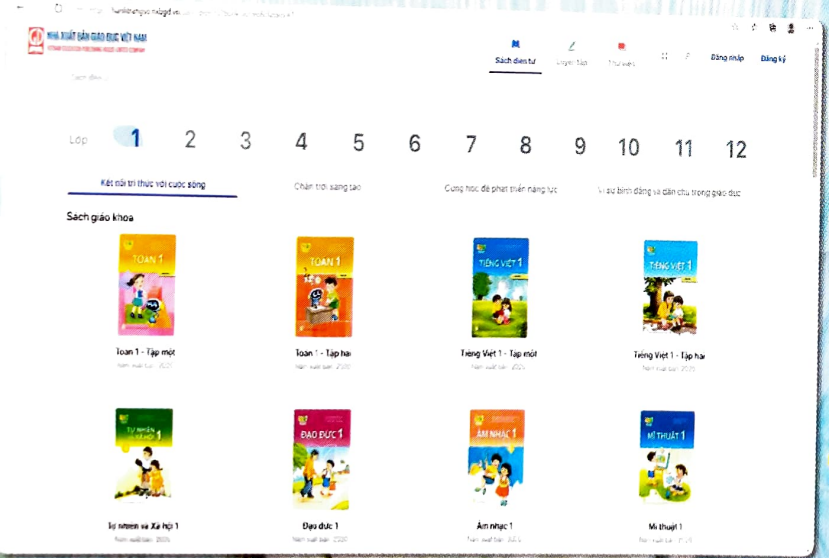
VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

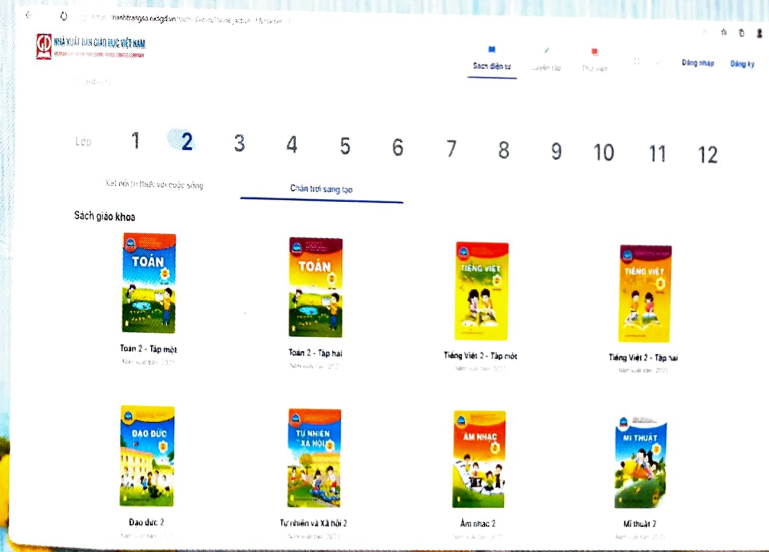
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

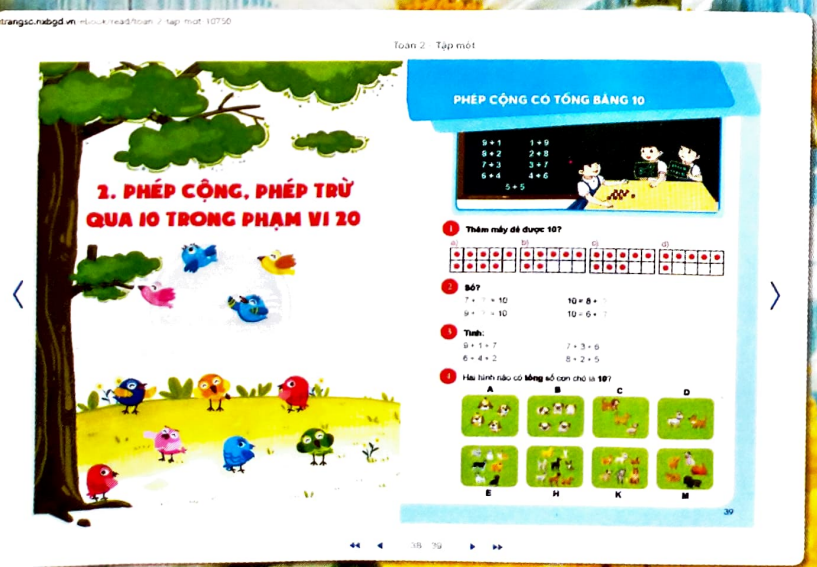
Rafael Bombelli (1526-1572)

Trong thời gian một số địa phương thực hiện giãn cách xã hội để phòng chống dịch bệnh Covid 19, nếu chưa thể mua sách giáo khoa bản giấy, quý thầy cô, quý phụ huynh và các em học sinh có thể truy cập website: https://hanhtrangso.nxbgd.vn để sử dụng miễn phí phiên bản điện tử sách giáo khoa, sách bài tập, sách giáo viên.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã xây dựng trang **Hành trang số** và số hóa toàn bộ sách giáo khoa, một số sách bài tập và sách giáo viên. Không cần đăng nhập hay m tài khoản, quý độc giả vẫn có thể đọc sách một các dễ dàng và thuận tiện.







THỦ THUẬT GHÉP ĐIỀU KIỆN TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

BÙI MINH TRUNG
(GV THCS Mỹ Long Nam, Cầu Ngang, Trà Vinh)

Bất đẳng thức mà các biến của nó bị ràng buộc thêm bởi một đẳng thức, bất đẳng thức khác được xem như bất đẳng thức có ràng buộc điều kiện. Khi chứng minh bất đẳng thức dạng này thông thường chúng ta sẽ biến đổi biểu thức cần chứng minh làm xuất hiện điều kiện hoặc biến đổi biểu thức điều kiện đi đến bất đẳng thức cần chứng minh. Sau đây tác giả xin giới thiệu một thủ thuật ghép điều kiện vào biểu thức trong chứng minh bất đẳng thức. Đây là thủ thuật hay và hiệu quả nhằm làm mất đi điều kiện đưa bài toán trở về bài toán chứng minh không điều kiện có thể được dùng để tham khảo.

Thí dụ 1. *Cho hai số thực không âm x và y thỏa mãn:* $-x-\sqrt{xy}+4y-4\sqrt{y}+16=0$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=2x-3\sqrt{xy}+y$.

Hướng dẫn. Ta có:

$$P=-x-\sqrt{xy}+4y-4\sqrt{y}+16+2x-3\sqrt{xy}+y$$
$$=x-4\sqrt{xy}+5y-4\sqrt{y}+16$$
$$=\left(x-4\sqrt{xy}+4y\right)+\left(y-4\sqrt{y}+4\right)+12$$
$$=\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{y}-2\right)^2+12\ge 12.$$

Vậy minP = 12 tại $x=16; y=4$.

Thí dụ 2. *Cho các số thực* $a,b,c>0$ *và* $ab+bc+ca=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le 2(a+b+c).$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$2\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{a^2+ab+bc+ca}$$
$$=2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$
$$\le 2a+b+c.$$

Tương tự: $2\sqrt{b^2+1}\le 2b+a+c;$

$$2\sqrt{c^2+1}\le 2c+a+b.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1})\le 4(a+b+c).$$

Suy ra đpcm.

Thí dụ 3 (Đề thi chuyên Toán tỉnh Trà Vinh, năm học 2014 – 2015). *Cho các số thực* a,b,c *thỏa mãn* $a+b+c+d=2$. *Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2+2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2-a-b-c-d+2$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)^2+1$$
$$\ge 1.$$

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Thí dụ 4. *Cho các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn:* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ge 64.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}=\frac{a+a+b+c}{a}$$
$$\geq\frac{2\sqrt{a^2}+2\sqrt{bc}}{a}$$
$$\geq\frac{2.2\sqrt{\sqrt{a^2}.\sqrt{bc}}}{a}=\frac{4\sqrt[4]{a^2bc}}{a}.$$

Tương tự: $1+\frac{1}{b}\geq\frac{4\sqrt[4]{b^2ac}}{b}$;

$$1+\frac{1}{c}\geq\frac{4\sqrt[4]{c^2ab}}{c}.$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64\frac{\sqrt[4]{(abc)^4}}{abc}=64.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Thí dụ 5 (Đề tuyển sinh vào lớp 10, tỉnh Bắc Ninh, năm học 2018 – 2019). *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=4a^2+6b^2+3c^2$.*

Hướng dẫn. Ta có:

$$A=4a^2+6b^2+3c^2=4a^2+6b^2+3c^2-24+24$$
$$=4a^2+6b^2+3c^2-8a-8b-8c+24$$
$$=4(a-1)^2+6\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(c-\frac{4}{3}\right)^2+12\geq 12.$$

Vậy min$A=12$ tại $a=1; b=\frac{2}{3}; c=\frac{4}{3}$.

Thí dụ 6. *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$B=\sqrt{\frac{xy}{xy+3z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+3x}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+3y}}.$$

Hướng dẫn. Ta thấy con số 3 xuất hiện trong điều kiện và trong biểu thức B. Đây là điểm then chốt cho lời giải bài toán này.

Ta có: $\sqrt{\frac{xy}{xy+3z}}=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}$

$$=\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right).$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{yz+3x}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\right)$;

$$\sqrt{\frac{zx}{zx+3y}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}\right).$$

Do đó: $B=\sqrt{\frac{xy}{xy+3z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+3x}}+\sqrt{\frac{zx}{zx+3y}}\leq\frac{3}{2}$

Vậy $\max B=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Ở thí dụ trên con số 3 rất dễ nhận dạng vị trí thay vào trong biểu thức. Nếu điều kiện là số 1 thì hơi khó nhìn và đòi hỏi người giải phải mất nhiều thời gian hơn trong việc ghép điều kiện.

Thí dụ 7. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1.$$

Hướng dẫn.

Ta thay điều kiện $abc=1$ bởi điều kiện $\sqrt[3]{abc}=1$ thì bất đẳng thức cần chứng minh sẽ có dạng:

$$\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{b+c+\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{c+a+\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Đặt $x=\sqrt[3]{a}>0$; $y=\sqrt[3]{b}>0$; $z=\sqrt[3]{c}>0$, ta được:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}.$$

Mặt khác: $x^3+y^3\geq xy(x+y)$

$$\Rightarrow x^3+y^3+xyz\geq xy(x+y+z)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{xy(x+y+z)}=\frac{1}{xyz}.\frac{z}{x+y+z}.$$

Tương tự: $\frac{1}{y^3+z^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}.\frac{x}{x+y+z}$;

$$\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}.\frac{y}{x+y+z}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 8. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le 3.$$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}\right);$$

$$\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{c+b}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 9 (Trích đề Toán chuyên tỉnh Quãng Ngãi, năm học 2021 - 2022). *Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b)=4$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}\ge 1.$$

Hướng dẫn.

Khai thác giả thiết:

$$(c+a)(c+b)=4$$

dưới dạng $\frac{2}{(c+a)(c+b)}=2$

ta có:

$$VT=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}-\frac{2}{(c+a)(c+b)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{c+b}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{16}+\frac{1}{2}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}.\frac{(a-b)^2}{16}}+\frac{1}{2}$$

$$=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|a-b|=2\\(c+a)(c+b)=4\end{cases}$.

Thí dụ 10 (Trích đề HSG Toán tỉnh Bạc Liêu, năm học 2014 - 2015). *Cho a, b, c là cac số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh*

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}\ge 2+ab+bc+ca.$$

Hướng dẫn.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}}$$

$$=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}.$$

Mà $\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}$

$$\le\frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}$$

$$\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$=1$$

suy ra:

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 8. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le 3.$$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{1}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}\right);$$

$$\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{c+b}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 9 (Trích đề Toán chuyên tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2021 - 2022). *Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b)=4$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}\ge 1.$$

Hướng dẫn.

Khai thác giả thiết

chuyển dạng

ta có:

$$VT=\frac{1}{(a-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}}$$

$$=1.$$

Dấu bằng xảy ra k

Thí dụ 10 (Trích đ năm học 2014 - 201

dương thỏa mãn: a

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+}{1+bc}}$$

Hướng dẫn.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{}{a^2+b^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab+2c}{a^2+b^2+}}$$

$$=\frac{ab+}{\sqrt{(ab+2c^2)(}}$$

Mà $\sqrt{(ab+2c^2)(}\le\dfrac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}$

$$\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 8. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le 3.$$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}\right);$$

$$\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{c+b}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 9 (Trích đề Toán chuyên tỉnh Quãng Ngãi, năm học 2021 - 2022). *Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b)=4$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}\ge 1.$$

Hướng dẫn.

Khai thác giả thiết:

$$(c+a)(c+b)=4$$

dưới dạng $\frac{2}{(c+a)(c+b)}=\frac{1}{2}$

ta có:

$$VT=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}-\frac{2}{(c+a)(c+b)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{c+b}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{16}+\frac{1}{2}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}.\frac{(a-b)^2}{16}}+\frac{1}{2}$$

$$=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|a-b|=2\\(c+a)(c+b)=4\end{cases}$.

Thí dụ 10 (Trích đề HSG Toán tỉnh Bạc Liêu, năm học 2014 - 2015). *Cho a, b, c là cac số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh*

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}\ge 2+ab+bc+ca.$$

Hướng dẫn.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}}$$

$$=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}.$$

Mà $\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}$

$$\le\frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}$$

$$\le\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$=1$$

suy ra:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}$$
$$\geq ab+2c^2.$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}\geq ac+2b^2;$$

$$\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}\geq bc+2a^2.$$

Suy ra:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}$$
$$\geq 2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}$$
$$\geq 2+ab+bc+ca.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 11 (Trích đề tuyển sinh chuyên Toán, tỉnh Nam Định, năm học 2021 - 2022). *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh*

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2.$$

Hướng dẫn. Thay giả thiết vào vế trái bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$\frac{a(a+b+c)+bc}{b+c}+\frac{b(a+b+c)+ca}{c+a}+\frac{c(a+b+c)+ab}{a+b}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+a)(b+c)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq 2.$$

Quan sát thấy rằng:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\cdot\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}}$$
$$=2(a+b),$$

vì thế:

$$2\left(\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+a)(b+c)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\right)$$
$$\geq 4(a+b+c)=4.$$

Suy ra: $\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Thí dụ 12 (Trích đề tuyển sinh chuyên Toán, tỉnh Hà Nam, năm học 2021 - 2022). *Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng:* $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geq 512.$

Hướng dẫn. Ta có:

$$\frac{1}{x^2}-1\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2}-1$$
$$=\frac{[(x+y)+(x+z)](y+z)}{x^2}$$
$$\geq\frac{2\sqrt{(x+y).(x+z)}.(y+z)}{x^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{1}{y^2}-1\geq\frac{2\sqrt{(y+x)(y+z)}.(x+z)}{y^2};$$

$$\frac{1}{z^2}-1\geq\frac{2\sqrt{(z+x)(z+y)}.(x+y)}{z^2}.$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức ta thu được:

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$$
$$\geq\frac{8(x+y)^2.(y+z)^2.(x+z)^2}{x^2y^2z^2}.$$

Mặt khác: $(x+y)^2\geq 4xy;$

$(y+z)^2\geq 4yz;$

$(x+z)^2\geq 4xz,$

Suy ra: $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geq\frac{8.4^3.x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}$

$=512.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2021-2022

VÒNG 1

Câu 1. 1) Biểu thức xác định khi và chỉ khi

$$\frac{x^2+1}{5x-1} \ge 0 \Leftrightarrow 5x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{5}$$

(vì $x^2+1>0, \forall x$).

2) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2=9 \\ m-1\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 3 \\ m\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

3) Gọi AM là đường cao tam giác ABC, tính được

$$AM=3 \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\frac{1}{2}.3.2\sqrt{3}=3\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

4) Hình nón có chiều cao $h=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{cm}$.

Thể tích hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi 3^2.4=12\pi\text{ cm}^3$.

Câu 2. 1) Với ĐK : $x>0; x\ne 1$, ta có:

$$Q=\left(\frac{x^2}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$=\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{x+25}{\sqrt{x}}=\frac{x+25}{\sqrt{x}}.$$

2) Với ĐK $x>0; x\ne 1$, ta có:

$$Q=\sqrt{x}+\frac{25}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{25}{\sqrt{x}}}$$

$\Rightarrow Q\ge 10$. Vậy min$Q=10$, xảy ra khi

$$\sqrt{x}=\frac{25}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=25.$$

Câu 3. 1) a) PT (1) có:

$$\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+3)=4m-11.$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=4m-11\ge 0 \Leftrightarrow m\ge\frac{11}{4}$.

b) PT có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m>\frac{11}{4}$ (*).

Ta có: $1<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>2 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>2 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \end{cases}.$$

Theo định lý Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1.x_2=m^2+3 \end{cases}$,

suy ra: $\begin{cases} 2m+1>2 \\ m^2+3-(2m+1)+1>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{2} \\ m^2-2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$$

(vì $m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0$ với mọi m).

Kết hợp ĐK(*) ta được $m>\frac{11}{4}$.

2) Với ĐK: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x^2+8x+4\ge 0 \end{cases}$ ta có:

$$x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)+\sqrt{2x+1}-\sqrt{(x+1)^2+3(2x+1)}=0.$$

Đặt $a=x+1\ (a>0)$; $b=\sqrt{2x+1}\ (b\ge 0)$ khi đó

PT trở thành: $a+b=\sqrt{a^2+3b^2}$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=a^2+3b^2 \Leftrightarrow b(a-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=b \end{array}\right..$$

+ TH1: $b=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

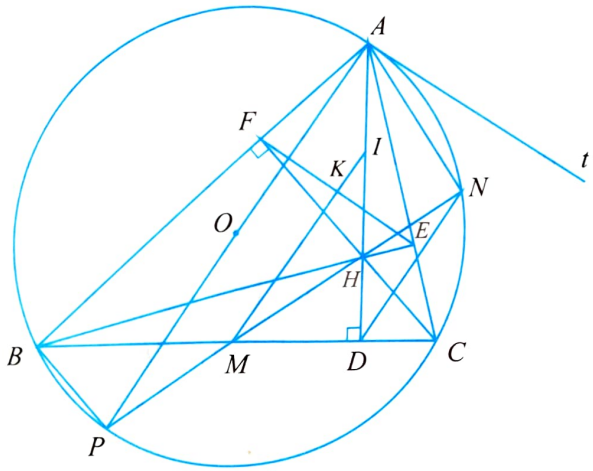
+ TH2: Với $a=b \Rightarrow x+1=\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=2x+1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).

Vậy PT có hai nghiệm $x=-\frac{1}{2}; x=0$.

Lưu ý: Học sinh có thể chuyển vế: $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2+8x+4}$ rồi bình phương hai vế và đưa phương trình về phương trình tích.

Câu 4.



1) Vì BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$. Suy ra 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$ (cùng bù với góc $\widehat{FEC}$) và chung góc A, suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔABC (g.g).

Suy ra $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\Leftrightarrow AE.AC=AF.AB.$

2) Ta có E và F cùng nhìn đoạn AH một góc 90^0 nên tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AH. Lại có K là trung điểm của dây cung EF suy ra $IK\perp EF$. (1)

Kẻ tiếp tuyến At (hình vẽ) của đường tròn tâm O ta suy ra $AP\perp At$ (2).

Khi đó $\widehat{CAt}=\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ (3).

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{CAt}$, do đó At và EF song song (5). Từ (2) và (5) suy ra $AP\perp EF$, kết hợp với (1) suy ra IK song song với AP.

3) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC, IK là đường trung trực của dây cung EF nên M là trung điểm của BC.

Có BP // CH vì cùng vuông góc với AB; CP // BH vì cùng vuông góc với AC. Suy ra tứ giác $BPCH$ là hình bình hành nên 3 điểm P, M, H thẳng hàng, do đó 4 điểm P, M, H, N thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{ANM}=90^0$ mà $\widehat{ADM}=90^0$ suy ra tứ giác $ANDM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NMD}=\widehat{NAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{ND}$) hay $\widehat{HMC}=\widehat{HAN}$.

Câu 5. 1) ĐK: $y\ge 0$. Chia 2 vế của PT(1) cho $x^2+1>0$ ta được: (1) $\Leftrightarrow 8\sqrt{\dfrac{y}{x^2+1}}=3-\dfrac{3y}{x^2+1}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{y}{x^2+1}}$ $(t\ge 0)$ ta có PT:

$3t^2+8t-3=0$, giải PT được $t=\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn.

Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{9}\left(x^2+1\right)$ thay vào (2) ta được:

$$x^2+\frac{1}{9}\left(x^2+1\right)^2=\frac{13}{9}\Leftrightarrow x^4+11x^2-12=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-12\end{array}\right.\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$. Khi đó $y=\dfrac{2}{9}$ thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)$ là $\left(-1;\dfrac{2}{9}\right);\left(1;\dfrac{2}{9}\right)$.

2) Với $\forall a,b,c>0$ ta có:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

$$\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Với $x;y;z$ là các số dương ta có:

$$7x^2-2xy+4y^2=(2x+y)^2+3(x-y)^2\ge(2x+y)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}\ge 2x+y\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}$$

$$\le\frac{1}{2x+y}=\frac{1}{x+x+y}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

2) Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi $y=z$. Suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{7z^2-2yz+4x^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi $z=x$. Cộng các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}\right) \le \frac{2021}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{2021}$.

VÒNG 2

Câu 1. a) + Ta có:

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=1+2(ab+bc+ca).$$

Suy ra $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$.

+ Từ $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

suy ra $S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$.

b) + Đặt $P(x)=ax^2+bx+c$ thì có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=P(1)=1 \\ 9a+3b+c=P(3)=3 \\ 49a+7b+c=P(7)=31 \end{cases}.$$

+ Giải hệ được $a=1$, $b=-3$, $c=3$.

+ Suy ra: $P(x)=x^2-3x+3$ nên

$$P(10)=10^2-3.10+3=73.$$

Cách khác:

+ Thấy $P(x)-x$ có nghiệm là $x=1, x=3$ nên có $P(x)-x=a(x-1)(x-3)$.

+ Từ $P(7)=31$ nên

$$31-7=a(7-1)(7-3) \Leftrightarrow a=1.$$

+ Vậy $P(x)=(x-1)(x-3)+x \Rightarrow P(10)=73$.

2) a) + ĐK: $x \ne -1$.

+ PT đã cho tương đương với

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+4=\frac{7x^2}{x+1}-\frac{2x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2-5.\frac{x^2}{x+1}+4=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}=1 \ (1) \quad \text{hoặc} \quad \frac{x^2}{x+1}=4 \ (2)$$

+ Giải (1) được $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

+ Giải (2) được $x=2\pm2\sqrt{2}$.

Tập nghiệm của PT là: $\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; 2\pm2\sqrt{2}\right\}$.

Cách khác: Quy đồng và rút gọn ta được:

$$x^4-5x^3-x^2+8x+4=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2-4x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ x^2-4x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=2\pm2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn điều kiện)

2) b) Xét hệ $\begin{cases} x(2x+1)=y(x+y-2)+1 \ (1) \\ 4\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+2}=11-x \ (2) \end{cases}$

+ Điều kiện xác định: $x \ge -3$ và $y \ge -2$.

+ Ta có $(1) \Leftrightarrow y^2+y(x-2)-2x^2-x+1=0$

$$\Leftrightarrow (y-1-x)(y-1+2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=1-2x \end{array}\right..$$

+ Với $y=x+1$, thay vào (2) ta được:

$$6\sqrt{x+3}=11-x \Leftrightarrow \begin{cases} 11-x \ge 0 \\ 36(x+3)=(11-x)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow x=29-6\sqrt{23}.$$

Khi $x = 29 - 6\sqrt{23}$ thì $y = x + 1 = 30 - 6\sqrt{23}$ (thỏa mãn ĐK).

+ Với $y = 1 - 2x$, thay vào (2) ta được:

$$4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11 - x$$

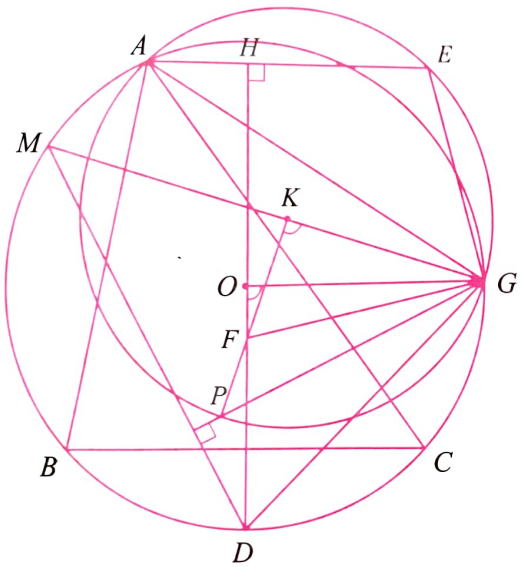
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3-2x} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi đó có $y = 1 - 2x = -1$ (thỏa mãn ĐK).

+ *Kết luận*: Hệ cho có đúng hai bộ nghiệm $(x; y)$ là $\left(29 - 6\sqrt{23}; 30 - 6\sqrt{23}\right)$, $(1; -1)$.

Câu 3.



a) + Xét đường tròn (O) có $\widehat{DOG} = 2\widehat{DAG}$.

+ Xét đường tròn (K) có $\widehat{PKG} = 2\widehat{PAG}$.

Suy ra $\widehat{DOG} = \widehat{PKG}$ (1).

+ Tam giác PKG cân ở K và tam giác DOG cân ở O (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác này đồng dạng với nhau.

b) Có $\widehat{MGP} = \widehat{KGP} = 90^0 - \dfrac{\widehat{GKP}}{2} = 90^0 - \widehat{DAG}$.

Mặt khác $\widehat{DAG} = \widehat{DMG}$ nên $\widehat{MGP} + \widehat{DMG} = 90^0$, suy ra $GP \perp DM$. Ta có:

$$\widehat{FPG} = \widehat{KPG} = \widehat{ODG} = \widehat{FDG},$$

suy ra tứ giác $DGFP$ nội tiếp. Do đó $\widehat{DFG} = \widehat{DPG}$. Tứ giác $APGE$ nội tiếp nên $\widehat{DPG} = \widehat{AEG}$. Suy ra $\widehat{AEG} = \widehat{DFG}$ hay $\widehat{HEG} = \widehat{DFG}$ với H là giao điểm của OD và AE. Suy ra tứ giác $HEGF$ nội tiếp.

$OD \perp BC$ nên $OD \perp AE$, suy ra $\widehat{FHE} = 90^0$, do đó $\widehat{EGF} = 180^0 - \widehat{FHE} = 90^0$.

Câu 4. a) + Giả sử có $x, y \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu. Ta có $y^2\left(x^3 - x^2y + 5x\right) = 27$ (1). Suy ra 27 chia hết cho y^2 nên $y^2 \in \{1; 9\}$ hay $y \in \{1; 3\}$.

+ Xét $y = 1$, thay vào (1) có:

$$x^3 - x^2 + 5x = 27 \Leftrightarrow x\left(x^2 - x + 5\right) = 27.$$

Điều này chứng tỏ x là ước nguyên dương của 27 và có $5x \le 27 \Leftrightarrow x \le \dfrac{27}{5}$, suy ra $x = 1$ hoặc $x = 3$. Thử trực tiếp hai trường hợp này thấy không thỏa mãn.

+ Xét $y = 3$, thay vào (1) có:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1$. Vậy $(x; y) = (1; 3)$.

b) + Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 6k \pm 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $p^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k$ chia hết cho 12.

+ Áp dụng có $\left(p_1^2 - 1\right) + \left(p_2^2 - 1\right) + \ldots + \left(p_{12}^2 - 1\right)$ chia hết cho 12. Suy ra $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Cách viết khác:

+ Từ $p = 3k \pm 1 \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ suy ra $p^2 - 1 = 9k^2 \pm 6k$ chia hết cho 3.

+ Từ $p = 4k \pm 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, khi đó có $p^2 - 1 = 16k^2 \pm 8k$ chia hết cho 4. Suy ra $p^2 - 1$ chia hết cho 12.

(Xem tiếp trang 10)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC
NĂM HỌC 2021 - 2022
VÒNG 1

(*Thời gian làm bài: 120 phút; Dành cho tất cả các thi sinh*)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (*2 điểm*)

Trong các câu sau, mỗi câu chỉ có một lựa chọn đúng. Em hãy ghi vào bài làm chữ cái in hoa đứng trước lựa chọn đúng (Ví dụ: Câu 1 nếu chọn A là đúng thì viết 1.A).

Câu 1. Biểu thức $P=\sqrt{x-2021}$ có nghĩa khi và chỉ khi:

A. $x\ge 2021$ **B.** $x>2021$

C. $x<2021$ **D.** $x\le 2021$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=ax^2$ (a là tham số) đi qua điểm $M(-1;4)$. Giá trị của a bằng

A. -4 **B.** 1 **C.** 4 **D.** -1.

Câu 3. Tổng hai nghiệm của phương trình $2x^2+7x-3=0$ là

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\cos\widehat{ABC}=\frac{1}{3}, BC=9$ cm. Độ dài cạnh AB bằng

A. 27cm. **B.** $6\sqrt{2}$ cm. **C.** 6cm. **D.** 3cm.

II. PHẦN TỰ LUẬN (*8 điểm*)

Câu 5 (*1,25 điểm*). Giải phương trình $x^2-x-2=0$.

Câu 6 (*1,25 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-y=-4\\2x+3y=1\end{cases}.$$

Câu 7 (*1 điểm*). Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x-m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_1;y_2)$ sao cho $y_1+y_2+x_1^2x_2^2=6(x_1+x_2)$.

Câu 8 (*1 điểm*). Hai đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tiếp tục làm phần việc còn lại. Kể từ khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất của đội B tăng gấp đôi, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Câu 9 (*3 điểm*). Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ tia Ax (nằm giữa hai tia AB, AO) cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F).

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AB^2=AE.AF$ và $\widehat{OEF}=\widehat{OHF}$, với H là giao điểm của AO và BC.

c) Đường thẳng qua E song song với BF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng AK cắt đường thẳng BF tại M. Chứng minh rằng $MC=2.HF$.

Câu 10 (*0,5 điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc\le 1$. Chứng minh rằng $\frac{a(1-b^3)}{b^3}+\frac{b(1-c^3)}{c^3}+\frac{c(1-a^3)}{a^3}\ge 0$.

VÒNG 2

(*Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin; thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu 1 (*3,5 điểm*)

a) Giải phương trình $4x^2-x-3=2\sqrt{x+2}$.

b) Giải phương trình $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0\end{cases}$.

Câu 2 (*1,5 điểm*)

a) Cho các số nguyên x, y, z thoả mãn

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

Chứng minh rằng xyz chia hết cho 24.

Câu 2 (*2 điểm*). a) Giải phương trình

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+4=\frac{7x^2}{x+1}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(2x+1)=y(x+y-2)+1 \\ 4\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+2}=11-x. \end{cases}$$

Câu 3 (*3 điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D $(D\neq A)$. Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy điểm G khác C sao cho $AG>GC$; một đường tròn có tâm là K đi qua A, G và cắt đoạn thẳng AD tại điểm P nằm bên trong tam giác ABC. Đường thẳng GK cắt đường tròn (O) tại điểm M $(M\neq G)$.

a) Chứng minh các tam giác KPG, ODG đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh GP, MD là hai đường thẳng vuông góc.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng OD và KP, đường thẳng qua A và song song với BC cắt đường tròn (K) tại điểm E $(E\neq A)$. Chứng minh rằng tứ giác $DGFP$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{EGF}=90^0$.

Câu 4 (*1,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2y^2(y-x)=5xy^2-27$.

b) Cho $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Câu 5 (*1,5 điểm*).

a) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a+bc}{b+c}+\dfrac{b+ca}{c+a}+\dfrac{c+ab}{a+b}\geq 2$.

b) Xét hai tập hợp A, B khác $\varnothing$ thỏa mãn $A\cap B=\varnothing$ và $A\cup B=\mathbb{N}^*$. Biết rằng A có vô hạn phần tử và tổng của mỗi phần tử thuộc A với mỗi phần tử thuộc B là phần tử thuộc B. Gọi x là phần tử bé nhất thuộc B thỏa mãn $x\neq 1$. Hãy tìm x.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***Giới thiệu***

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ... *(Tiếp theo trang 8)*

+ Áp dụng suy ra $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Câu 5 . a) + Ta có:

$$\frac{a+bc}{b+c}=\frac{a(a+b+c)+bc}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}.$$

Tương tự thì BĐT cần chứng minh được viết lại thành $\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq 2.$

+ Theo BĐT Cauchy có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}.\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}}=2(a+b)\ (1).$$

Tương tự: $\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq 2(b+c)$ (2);

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq 2(c+a)\quad (3).$$

Cộng vế các BĐT (1), (2), (3) suy ra đpcm.

b) + Chứng minh $1\in B$: Giả sử ngược lại, $1\in A$, khi đó với $x\in B$ có $x+1\in B$.

Có $1\in A, x+1\in B$, suy ra $x+2=1+(x+1)\in B$.

Cứ như vậy có $x, x+1, x+2, \ldots$ đều nằm trong B nên suy ra A là tập hữu hạn, mâu thuẫn. Vậy có $1\in B$.

+ Xét $x\geq 4$: Do $1<x-2<x$ nên từ tính bé nhất của x trong B suy ra $x-2\in A$, suy ra $x-1=(x-2)+1$ thuộc B, điều này lại mâu thuẫn với tính bé nhất của x trong B.

Vậy phải có $x=2$ hoặc $x=3$.

+ Với $x=2$, cách chọn A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3 và B là tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 3 thỏa mãn yêu cầu.

Với $x=3$, cách chọn A là tập hợp các số nguyên dương chẵn và B là tập hợp các số nguyên dương lẻ thỏa mãn yêu cầu.

Tóm lại $x=2$ hoặc $x=3$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Thái Bình) ***Giới thiệu***

SỰ TIẾN HÓA CỦA HỆ THỐNG SỐ TOÁN HỌC

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Số là khái niệm toán học quan trọng nhất. Nhà toán học nổi tiếng người Đức *L.Kronecker* (1823-1891) từng nói rằng: "*Thượng đế đã tạo ra số tự nhiên, tất cả các hệ thống số còn lại đều là công trình sáng tạo của con người*".

Từ tuyên ngôn nổi tiếng này, ta nghiệm ra rằng đối với toán học, người ta xem các số tự nhiên như là những số có trước cùng với hai phép toán cơ bản thực hiện được trên các số đó là *phép cộng* và *phép nhân*. Rồi trên đó người ta xây dựng các định luật của số học các số tự nhiên: *định luật giao hoán, kết hợp và phân phối* và các định luật này phải *bảo toàn trong mọi bước mở rộng tập hợp số*.

Từ tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ được xem là xuất hiện từ thời tiền sử ở Ai cập Cổ đại, khái niệm số càng ngày càng được mở rộng để đáp ứng nhu cầu khách quan và bản thân toán học. Sự mở rộng phạm vi số thường diễn ra bằng cách đưa thêm vào những số mới.

Sự mở rộng đó cần tuân thủ *Nguyên lý mở rộng hệ thống số* [1] khẳng định rằng: "*Việc đưa thêm số mới vào cần được tiến hành sao cho các định luật* [*số học*] *của phạm vi số đã biết ban đầu vẫn phải bảo toàn trong phạm vi số đã mở rộng được*".

Lịch sử tiến hóa của hệ thống số toán học đã trải qua con đường cơ bản là: Số tự nhiên $\mathbb{N} \to$ số nguyên $\mathbb{Z} \to$ số hữu tỷ $\mathbb{Q} \to$ số thực $\mathbb{R} \to$ số phức $\mathbb{C}$ và thu được bao hàm thức

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1. MỞ RỘNG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN ĐẾN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

Trước hết ta hãy lưu ý đến "sự mở rộng tự nhiên" nhờ sự sáp nhập các phân số $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ (được xem là đã tồn tại từ thời tiền sử ở Ai Cập cổ đại) vào cùng với chính các số tự nhiên. Sự mở rộng tự nhiên này nhằm đáp ứng nhu cầu bản thân toán học và thực tiễn *quy vấn đề đo về vấn đề đếm*.

Bước quan trọng trong sự phát triển khái niệm số tự nhiên là nhận thức được *tính vô hạn* của nó và từ đó người ta mới phát triển được Phép quy nạp toán học. Nói nhận thức tính vô hạn của $\mathbb{N}$ là quan trọng bởi lẽ vô hạn là gì vẫn là vấn đề cần luận giải. Ta xem, hơn hai nghìn năm trước khi nói về sự vô hạn của tập hợp các số nguyên tố có lẽ chính *Euclid* cũng đã né tránh một cách khéo léo việc dùng thuật ngữ vô hạn khi ông khẳng định : "*Số các số nguyên tố tồn tại nhiều hơn bất cứ một số lượng nào định gán cho nó*".

Sự mở rộng từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{Z}$ chủ yếu nhằm đáp ứng nhu cầu nội tại của toán học là thực hiện được phép toán ngược của phép cộng là *phép trừ* . Sự mở rộng từ số dương sang số âm gặp rất nhiều khó

[1] R.Courant, H.Robbins, *Toán học là gì?*, Hà Nội – 1984.

khăn mặc dù số âm đã xuất hiện từ lâu. Theo nhà toán học và lịch sử khoa học *J.Struik* (1894-2000) thì lần đầu tiên trong lịch sử toán học số âm xuất hiện trong tác phẩm *"Cửu chương toán thuật"* từ thời Nhà Hán (thế kỷ II Tr.CN) ở Trung Quốc do nhà bác học Trung Quốc *Trần Sanh* (năm 152 Tr.CN) biên soạn. Tiếp nữa số âm cũng xuất hiện và được *Diophantus* sử dụng trong các tính toán trung gian của "Số học" của ông vào thế kỷ IV. Sau đó, trong các tác phẩm của các nhà toán học Ấn Độ số âm xuất hiện với tên gọi là *"món nợ"*...

Tuy vậy, số âm được thừa nhận một cách triệt để chỉ sau khi công trình *"Nghệ thuật vĩ đại..."* (1545) của *H. Cardano* (1501-1576) ra đời.

Sự mở rộng tập hợp số tự nhiên gắn liền với sự sáp nhập các số nguyên âm và số zero vào với các số tự nhiên. Việc đưa số zero vào là để biểu thị cho hiệu $a - a$. Cùng với đó, các ký hiệu -1, -2, -3,... được đưa vào kèm với định nghĩa $b - a = -(a - b)$ nếu $b < a$ là để phép trừ luôn luôn thực hiện được trong tập hợp số nguyên (số dương, số âm và số zero).

Cần lưu ý rằng khi đưa vào những ký hiệu mới (số mới) điều cốt lõi là cần định nghĩa các phép toán trên các số mới sao cho các định luật cơ bản của số học vẫn được bảo toàn. Chẳng hạn, quy tắc dấu $(-1)(-1) = +1$ [2] là cơ sở của phép nhân các số âm được hình thành do ta đòi hỏi luật phân phối $a(b + c) = ab + ac$ phải bảo toàn. Thật vậy, nếu $(-1)(-1) = -1$ thì với $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ thì luật phân phối sẽ không thỏa mãn. Quy tắc về dấu này của phép nhân số âm là "*Không thể chứng minh được*".

[2] R.Courant. H.Robbins; Sách đã dẫn.

Kết quả của sự mở rộng là thu được *hệ thống số nguyên gồm: các số nguyên dương, nguyên âm và số zero*. Tập hợp số nguyên được ký hiệu bởi chữ $\mathbb{Z}$ là chữ cái đầu của từ tiếng Đức là Zahl có nghĩa là số. Như vậy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. MỞ RỘNG TIẾP ĐẾN HỆ THỐNG SỐ HỮU TỶ

Sự sáng tạo ra các phân số (âm và dương) với tư cách là những ký hiệu mới về số *sánh ngang hàng* với các số nguyên cùng với việc định nghĩa các phép toán sao cho các Định luật cơ bản của số học được bảo toàn đã đảm bảo cho sự thực hiện không hạn định phép trừ và phép chia (cho số khác 0). Cần lưu ý rằng nếu thừa nhận phép chia cho zero thì từ đẳng thức đúng $1.0 = 2.0$ sẽ đi đến một số điều vô nghĩa $1 = 2$.

Tập hợp mọi số nguyên, phân số (âm và dương) và số zero có tên gọi chung là số hữu tỷ và được ký hiệu là $\mathbb{Q}$, chữ cái đầu của từ Quotient, nghĩa là tỷ số. Từ đó mỗi số hữu tỷ hoặc là số nguyên hoặc được biểu diễn dưới dạng tỷ số của hai số nguyên, tức là dưới dạng $\frac{p}{q}$, trong đó $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Số hữu tỷ $\frac{p}{q}$ còn có thể hiểu diễn dưới dạng *phân số thập phân hữu hạn* (PSTPHH) hoặc một *phân số thập phân vô hạn tuần hoàn* (PSTPVHTH) nhờ phương pháp chia "kéo dài" thông thường trong số học

p	q
	$\alpha,a_1a_2...a_m...$

tức là: $\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_m...$ (1).

Nhờ quy tắc dấu nên ở đây ta chỉ cần trình bà

cho $\frac{p}{q}$, $p > 0, q > 0$ là đủ.

Trong số học người ta đã chứng minh rằng kết qu

của phép chia "*kéo dài*" (1) là khai triển thập phâ

một trong hai dạng sau đây. Hoặc đó là PSTPHH

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_m = \alpha, a_1a_2...a_m000..., a_m > 0 \quad (2)$$

hoặc đó là PSTPVHTH

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_nb_1b_2...b_n...$$

$$= \alpha,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n), n < q \quad (3).$$

Ở đây, trường hợp (2) luôn luôn đưa được v

trường hợp (3) nhờ biểu diễn.

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_{m-1}(a_m-1)999... \text{ (tại sao?)} \quad (4).$$

Do đó dạng thập phân của mọi số hữu tỷ đều có

tính chất tuần hoàn. Chẳng hạn, số

$$0,2365 = 0,2365000... = 0,2364999...$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng: *Mọi PSTPVHTH*

$\alpha,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n)$ đều là số hữu tỷ xác định được

theo công thức

$$R = \alpha, a_1a_2\ldots a_m + \frac{b_1b_2\ldots b_n}{\underbrace{99\ldots9}_{n}}10^{-m} \qquad (5)$$

trong đó $b_1b_2...b_n$ và $\underbrace{99...9}_{n}$ đều là những số

nguyên với các chữ số tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$ và

$\underbrace{9,9,...,9}_{n}$. Chẳng hạn, áp dụng (5) ta có:

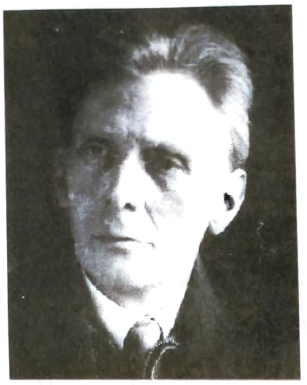
1) $1,237(06) = 1,237 + 0,000\,(06)$

$$= 1,237 + \frac{06}{99}10^{-3} = 1,237 + \frac{6}{99000}$$

2) $0,2(371) = \frac{2,(371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{990}10^{-1}$

$$= \frac{2}{10} + \frac{371}{9990}.$$

"Mọi dãy tăng và bị chặn các số hữu tỷ đều có giới hạn" nhà toán học Xô Viết, Viện sĩ *A. Y.Khinchin* (1894 - 1959) đã đưa ra *Quy ước phát hiện số vô tỷ*[3] được phát biểu dưới dạng: *"Nếu có một dãy tăng và bị chặn các số hữu tỷ không có giới hạn hữu tỷ thì nó được gán cho một số mới nào đó (gọi là số vô tỷ) để làm giới hạn"*. Và ông khẳng định: *"Quy ước này cũng chính là Nguyên lý tổng quát để phát hiện ra các số vô tỷ*[4].



A. Y. Khinchin (1894-1859)

Số mới nói trên có vai trò như là *giới hạn ngoài hữu tỷ* của dãy các số hữu tỷ tăng và bị chặn. Chẳng hạn: dãy $a_1 = 1$; $a_2 = 1,4$; $a_3 = 1,41,...$ các giá trị gần đúng của phép khai căn bậc hai của 2 là dãy tăng và bị chặn ($0 < a_n < 2$) các số hữu tỷ có giới hạn ngoài hữu tỷ là $\sqrt{2}$. Do đó người ta đưa vào số mới ký hiệu $\sqrt{2}$ để làm giới hạn cho nó và $\lim a_n = \sqrt{2}$. Tương tự, các căn bậc hai của số không chính phương đều là giới hạn của dãy các số hữu tỷ được chọn một cách thích hợp ("các căn gần đúng").

Viện sĩ *A.Y.Khinchin* viết: *"Nhờ nguyên lý này người ta đã phát hiện được toàn thể các số vô tỷ. Toàn thể các số vô tỷ xác định như vậy thực tế là đã hết và về sau ta sẽ không còn đưa vào được số mới nào khác các số xác định theo Quy ước của chúng ta."* (Sách đã dẫn, tr.65).

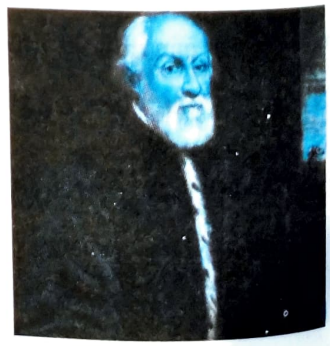
[3, 4] A.Khinchin, *Giáo trình giản yếu giải thích toán học*; Hà Nội – 1961.

4. MỞ RỘNG TIẾP ĐẾN HỆ THỐNG SỐ PHỨC

Có lẽ ý niệm đầu tiên về số phức xuất hiện vào thế kỷ XVI bởi *H.Cardano* (1501 - 1576), *R.Bombelli* (1526-1572) và một số nhà toán học Italia khác. Ý niệm đó gắn liền với phát minh ra lời giải đại số các phương trình bậc ba. Cùng với phát minh đó người ta đã phát hiện ra một trường hợp kỳ lạ. Đó là trường hợp khi cả ba nghiệm của phương trình bậc ba (với hệ số thực) đều là nghiệm thực thì *bất luận thế nào* trong lời giải đại số của phương trình bậc ba đó *phép khai căn bậc ba của số phức là không tránh khỏi*. Và, chính *Cardano* đã gọi trường hợp này là *bất khả quy*.

Tên gọi số phức như ngày nay là do nhà toán học Pháp *L.Carnot* (1753-1823) đặt ra từ năm 1803. Trước đó, nói chung các biểu thức dạng $a+b\sqrt{-1}$, $b \neq 0$ xuất hiện khi giải phương trình bậc hai và bậc ba đều được *Cardano* gọi là *"phần tử ngụy biện"*, còn *R.Descartes* (1596-1650) thì gọi là *"số ảo"* hay *"đại lượng ảo"*. Thậm chí *G.Leibniz* (1646-1716) đã gọi đại lượng ảo là *"loài lưỡng cư sống giữa thực và ảo"*, *I.Newton* thì *không xem đại lượng ảo thuộc khái niệm số*. Có lẽ những tên gọi này ít nhiều đều bắt nguồn từ sự hiện diện của biểu thức *"đầy phi lý"* trong trường số thực $\mathbb{R}$ mà họ gặp là $\sqrt{-1}$ (?).

Năm 1572, *R.Bombelli* đã cho ra đời cuốn sách *"Đại số"* (1572) trong đó lần đầu tiên ông xác lập các quy tắc số học trên các số phức cho đến phép khai căn bậc ba. Do đó ông đã có công khắc phục trường hợp bất khả quy.



Rafael Bombelli (1526-1572)

Ông xem các số thực và ký hiệu trừu tượng $\sqrt{-1} \overset{def}{=} i$ (ký hiệu Euler, 1777) là sánh ngang hàng với nhau rồi thực hiện các phép toán cộng và nhân chúng với nhau như đối với số bình thường. Kết quả thu được là các phép toán đó thỏa mãn các định luật của số học trong $\mathbb{R}$ là giao hoán, kết hợp và phân phối. Điều còn đặc biệt hơn là kết quả tính toán không dẫn đến bất cứ mâu thuẫn nào.

Trong tác phẩm *"Lịch sử toán học từ cổ đại đến đầu thế kỷ XIX"* (Nauka - Moscow, 1970) có đoạn viết: "*Chính R. Bombelli đã đưa ra tám quy tắc nhân các đại lượng ảo với các số thực và do đó ông là người đầu tiên đặt nền móng vững chắc cho lý thuyết số phức*". Sử dụng ký hiệu của *Euler*, tám quy tắc đó có dạng:

$(\pm 1)i = \pm i$; $(+i)(+i) = -1$; $(-i)(+i) = +1$;

$(\pm 1)(-i) = \mp i$; $(+i)(-i) = 1$; $(-i)(-i) = -1$.

Nhờ những quy tắc này Ông đã chứng tỏ được rằng mọi biểu thức chứa những *"phần tử ngụy biện"* của Cardano đều biểu diễn được dưới dạng $A + Bi$; $A, B \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp bất khả quy, *nghiệm thực có thể coi là tổng của hai đại lượng ảo* $a + bi$ *và* $a - bi$; $a,b \in \mathbb{R}$.

Từ những luận giải đó đã dẫn người ta đến ý niệm mở rộng tập hợp số thực $\mathbb{R}$ bằng cách ghép thêm cho nó một phần tử là chính ký hiệu i để thu được $\mathbb{R} \cup \{i\} = \mathbb{C}$ trong đó $\mathbb{C}$ là chữ cái đầu của từ Complex.

Do tất cả các phần tử của $\mathbb{R} \cup \{i\}$ có thể cộng, nhân với nhau một cách bình đẳng và vô hạn định trên cơ sở các quy tắc trên nên *trong* $\mathbb{R} \cup \{i\}$ *phải chứa mọi đa thức hệ số thực có thể có với "đối số là i"*, trong đó đơn giản nhất là *những đa thức bậc nhất đối với i* dạng $z = a + bi = a + ib$ với a, b là những số thực tùy ý. Vào thế kỷ XVI - XVII người ta gọi chúng là *"những đại lượng ảo"*. Các phép toán trên các biểu thức này phải tuân thủ định nghĩa các phép toán trên các đa thức, trong đó theo quy tắc Bombelli thì $i^2 = -1$.

Từ những luận cứ và lý giải ở trên người ta đi đến

Định nghĩa. Tập hợp các biểu thức dạng

$$z = a + bi,\ t = c + di, \ldots\ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$$

được gọi là *tập hợp số phức* (ký hiệu là $\mathbb{C}$) và mỗi biểu thức đó được gọi là *một số phức* nếu trên $\mathbb{C}$ quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân được đưa vào theo các điều kiện sau đây:

1) *Quan hệ bằng nhau*: $a+bi = c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

2) *Phép cộng*: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

3) *Phép nhân*: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$.

Các phép toán 2) và 3) bảo toàn các luật cơ bản của số học. Đối với các phép toán này còn tồn tại phép toán ngược là phép trừ và phép chia (cho số khác 0). Đặc biệt phép khai căn thực hiện được vô hạn định và căn bậc n của số phức là có n giá trị.

Đến đây, nếu còn chút gì nghi ngờ đối với số ảo (số phức) thì có lẽ nó đã hoàn toàn tiêu tan khi nhà toán học Na Uy *C.Wessel* đưa ra minh họa hình học đầy đủ về số phức và các phép tính trên chúng trong công trình công bố năm 1799. Đối với toán học ngày nay số ảo đã không ảo hơn chút nào so với chính các số thực...

Caspar Wessel
(1745-1818)

Điều đặc biệt cần lưu ý là *đối với các số phức người ta không định nghĩa được các khái niệm "lớn hơn" và "bé hơn". Do đó giữa các số phức với nhau không bao giờ được nối liền bởi dấu lớn hơn hoặc dấu bé hơn.*

Trở lên là con đường tiến hóa diệu kỳ của hệ thống số trong toán học. Về sau, *C. Weierstrass* (1815-1897) đã xác lập rằng *tập hợp số phức* $\mathbb{C}$ *không thể mở rộng thành tập hợp rộng hơn bằng cách ghép thêm số mới để trong tập hợp số rộng hơn thu được vẫn bảo toàn mọi phép toán và mọi định luật số học đã đúng trong tập hợp số phức.*

GIÁO ÁN SOẠN NHƯ THẾ NÀO LÀ HỢP LÝ

NGUYỄN QUANG THI
(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Chúng ta biết rằng, trong chương trình cải cách giáo khoa mới thì giáo viên (GV) soạn giáo án theo công văn 5512 của Bộ giáo dục và Đào tạo ban hành. Theo lộ trình bắt đầu từ năm học 2021 – 2022 là GV dạy lớp 6 và các năm tiếp theo là tăng dần từ lớp 7 cho đến lớp 12. Tại thời điểm này, một số địa phương đang tập huấn cho GV dạy lớp 6 soạn theo mẫu đó. Tuy nhiên, nhiều GV bày tỏ e ngại về mẫu giáo án vì họ cho rằng như vậy là không khả thi, chưa thiết thực và những ngôn từ trong giáo án mẫu còn hoa mỹ. Là một GV lâu năm trong nghề xin trao đổi mấy ý kiến như sau:

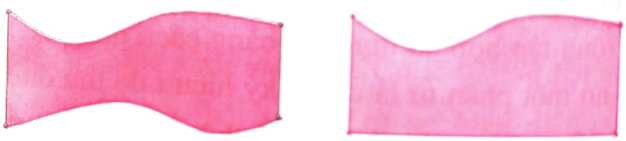
1. *Về ưu điểm:* Mẫu giáo án theo công văn 5512 của Bộ giáo dục và Đào tạo ban hành rất thuận thiện cho công tác kiểm tra. Tổ trưởng, tổ phó, hiệu phó chuyên môn và chuyên viên của phòng giáo dục hay sở giáo dục kiểm tra rất thuận tiện. Họ chỉ cần tìm từng nội dung mà nội dung đó phải đầy đủ các bước, bước nào không có coi như giáo án chưa đạt yêu cầu đề ra; từ đó, họ góp ý cho GV viên dễ dàng hơn.

2. *Về nhược điểm:* Mỗi GV dạy mỗi tuần từ 17 đến 19 tiết. Nếu soạn theo mẫu giáo án của Bộ ban hành thì một tiết soạn từ 10 đến 15 trang. Như vậy, GV soạn không kịp và nếu có soạn kịp thì cũng không chuyển tải hết nội dung đã soạn đến với học sinh (HS) vì quá dài dòng. Hơn nữa, tiết lý thuyết, tiết luyện tập và tiết thực hành do mục đích khác nhau nên các bước yêu cầu soạn cũng khác nhau. Do đó, soạn chung một mẫu là không phù hợp.

3. *Giáo án soạn như thế nào là hợp lý:* Ai cũng biết, giáo án là kịch bản của GV, người lãnh đạo không nên bắt các GV phải soạn cùng một mẫu vì khi đó sẽ làm mất đi sự sáng tạo của GV. Theo tôi, giáo án gọi là hợp lý là giáo án cần ngắn gọn và súc tích và nội dung thể hiện rõ các bước: *Hoạt động khởi động, hoạt động hình thành kiến thức, hoạt động vận dụng* là được. Khi dạy GV cần giúp HS lĩnh hội kiến thức một cách tự nhiên và không gượng ép. Để đạt được điều đó thì giáo án thỏa hai yêu cầu sau:

- Dẫn dắt học sinh vào bài mới một cách tự nhiên: Bằng kinh nghiệm và sự sáng tạo của mình GV tạo hứng thú để lôi cuốn HS vào bài mới thông qua hệ thống câu hỏi, thông qua trò chơi. Sau đây tôi đưa ra một số ví dụ để chia sẻ:

+ Khi dạy bài: "*Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng*" thì GV có thể dẫn dắt: Ai cũng biết tính diện tích hình tam giác, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông. Nhưng khi gặp những hình phẳng sau:



liệu chúng ta có tính diện tích của chúng được không? Vậy bài học hôm nay giúp chúng ta trả lời câu hỏi đó và giáo viên bắt đầu vào bài mới.

+ Khi dạy bài: "*Phương trình đường thẳng*" ở lớp 10 và lớp 12 thì giáo viên dẫn dắt thông qua trò chơi: "*Tìm từ khóa thông qua các câu hỏi*":

Câu hỏi 1: Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ...?

Học sinh trả lời: Cùng ***phương***.

Câu hỏi 2: Khi một sự việc nào đó xảy ra, để nắm bắt thông tin người quản lý thường yêu cầu nhân viên viết gì ...?

Học sinh trả lời: Bản tường ***trình***.

Câu hỏi 3: Những người có công to lớn với đất nước khi qua đời tên họ thường được đặt cho ...?

Học sinh trả lời: tên *đường*, *phố*.

Câu hỏi 4: Để diễn tả ruộng đồng mênh mông, bao la, người ta còn dùng từ ruộng đồng …?

Học sinh trả lời: *Thẳng* cánh cò bay.

Vậy từ khóa là: "*Phương trình đường thẳng*". Từ đó, giáo viên vào bài mới.

- Chuyển từ phần này sang phần khác bằng tình huống nêu vấn đề: Sự tinh tế của GV giúp HS biết được nội dung tiếp theo mình học vấn đề gì. Sau đây tôi đưa ra ví dụ để chia sẻ

+ Khi dạy bài: "*Đường tròn*", GV dạy xong nội dung 1 là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Giáo viên cho học sinh khai triển phương trình đường tròn ra:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\left(c=a^2+b^2-R^2\right) \quad (1)$$

Để chuyển sang nội dung 2 là nhận dạng phương trình đường tròn. GV nói rằng: Mọi phương trình đường tròn đều đưa về dạng (1). Ngược lại phương trình dạng (1) có phải là phương trình đường tròn hay không, nội dung thứ 2 giúp ta trả lời câu hỏi đó" và giáo viên vào phần 2.

+ Khi dạy bài: "*Cấp số cộng*", GV dạy xong nội dung 1 là định nghĩa cấp số cộng $u_{n+1}=u_n+d$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Để chuyển sang nội dung 2 là tìm số hạng tổng quát. Giáo viên đưa ra câu hỏi: Nếu ta biết u_1 và d, liệu rằng ta có tính được số hạng u_n với n rất lớn được không? HS bắt đầu suy nghĩ không thể tính từ u_1 đến u_n được vì rất lâu (nếu n lớn). GV sẽ nói trong nội dung phần 2 giúp ta trả lời câu hỏi đó và giáo viên chuyển sang phần 2, …

Bây giờ, tôi giới thiệu một tiết giáo án không có các cụm từ: *Hoạt động khởi động*, *hoạt động hình thành kiến thức*, *hoạt động vận dụng* nhưng bạn đọc vẫn thấy thực chất nội dung các bước đó vẫn có trong giáo án.

Bài ĐƯỜNG ELIP (SGK nâng cao)

(Tiết 1: Định nghĩa và phương trình chính tắc của elip)

I. Mục tiêu: Học xong bài này HS cần đạt các yêu cầu sau:

1. Về kiến thức

- Hiểu và nắm vững định nghĩa elip.
- Hiểu và nắm vững phương trình chính tắc của elip.

2. Về kỹ năng

- Biết nhận dạng phương trình chính tắc của elip. Vẽ hình đúng và đẹp
- Biết cách viết phương trình chính tắc của elip khi biết các yếu tố xác định nó.
- Giải bài toán liên quan đến bán kính qua tiêu của điểm trên elip.

3. Về tư duy và thái độ

- Linh hoạt trong việc nhận dạng và viết phương trình chính tắc của elip đựa vào bài toán cho.
- Tích cực hoạt động và trả lời các câu hỏi của giáo viên đưa ra.
- Khơi dậy sự đam mê và yêu thích bộ môn Toán khi liên hệ toán học vào thực tiễn.
- Phát triển được tư duy logic và tư duy thuật toán. Biết vận dụng đại số vào hình học.

4. Định hướng hình thành phẩm chất, năng lực

- Năng lực chung: Năng lực hợp tác, chia sẻ và giao tiếp.

- Năng lực chuyên biệt: Năng lực tự học, tự phát hiện ra vấn đề và tìm cách giải quyết. Năng lực biết quy lạ thành quen.

II. Chuẩn bị

1. Giáo viên: Giáo án, thước kẻ, sách giáo khoa, bảng phụ để hướng dẫn học sinh đường elip và máy tính.

2. Học sinh:

- Đọc trước nội dung bài học ở nhà. Sách, vở, bút, thước, máy tính bỏ túi.

- Các bảng phụ để tập vẽ đường elip và làm bài tập theo nhóm.

III. Phương pháp: Vận dụng linh hoạt các PPDH nhằm giúp học sinh chủ động, tích cực trong phát hiện chiếm lĩnh tri thức, như: trình diễn, thuyết trình, giảng giải, gợi mở vấn đáp, nêu vấn đề, … trong đó phương pháp chính là: giảng giải, gợi mở vấn đáp và hoạt động nhóm.

IV. Tiến trình dạy học

1. Ổn định lớp.

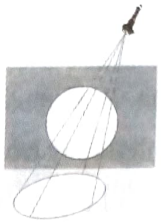
2. Kiểm tra bài cũ.

3. Bài mới.

GV dẫn dắt để vào bài mới: Giáo viên cho học sinh quan sát một số hình minh họa

GV đặt câu hỏi 1: Bóng của một đường tròn in trên mặt đất bằng phẳng dưới ánh sáng của bóng đèn như hình vẽ là đường gì?

HS thảo luận và trả lời câu hỏi: Là một đường elip.

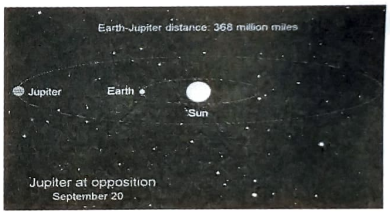


GV đặt câu hỏi 2: Nếu ta đổ một ít nước màu vào cốc thủy tinh và cho cốc nghiêng thì mặt thoáng của nước được giới bởi một đường gì?

HS thảo luận và trả lời câu hỏi: Giới hạn bởi một đường elip.

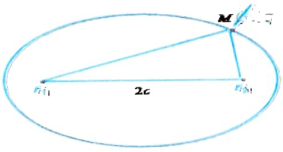
GV đặt câu hỏi 3: Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo các quỹ đạo là các đường gì?

HS thảo luận và trả lời câu hỏi: Là các đường elip.



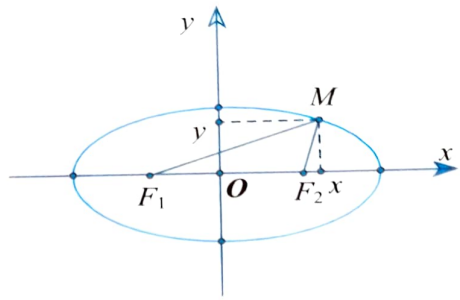
Từ đó giáo viên nói: Tiết học hôm nay chúng ta học bài **ĐƯỜNG ELIP**

Hoạt động 1: Tiếp cận định nghĩa đường elip

Hoạt động của GV và HS	Ghi bảng - Trình chiếu
GV: - Hướng dẫn học sinh cách vẽ elip.  - Giải thích: F_1 và F_2 gọi là các tiêu điểm. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip. **HS**: - Học sinh thao tác vẽ elip. - Khi M di chuyển trên (E) thì chu vi ΔMF_1F_2 không đổi, tổng MF_1 và MF_2 luôn bằng $2a$. - Hiểu rõ và ghi vào vở.	**1. Định nghĩa đường elip** + Phát biểu định nghĩa (SGK) + Tóm tắt: $(E) = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a,\ a > 0\}$. F_1 và F_2 gọi là các tiêu điểm. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

GV dẫn dắt để chuyển sang nội dung thứ 2: "Chúng ta đã biết từ định nghĩa đường tròn, ta xây dựng được phương trình đường tròn. Vậy từ định nghĩa đường elip liệu ta có xây dựng được phương trình elip không? nội dung thứ 2 giúp ta trả lời câu hỏi đó". Giáo viên bắt đầu sang nội dung 2.

Hoạt động 2. Tiếp cận phương trình chính tắc của elip

Hoạt động của GV và HS	Ghi bảng - Trình chiếu
GV đặt câu hỏi 4: Hãy cho biết tọa độ của các tiêu điểm F_1 và F_2 ? **HS thảo luận và trả lời câu hỏi:** $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. **GV đặt câu hỏi 5**: Giả sử $M(x;y)\in(E)$, hãy tính MF_1 và MF_2 ?. Khi đó, các đoạn thẳng MF_1, MF_2 gọi là bán kính qua tiêu của điểm M. *Hướng dẫn*: Dùng công thức khoảng cách để tính. **HS thảo luận và trả lời câu hỏi:** Tính toán được $\begin{cases} MF_1 = a+\frac{c}{a}x \\ MF_2 = a-\frac{c}{a}x \end{cases}$ **GV đặt câu hỏi 6:** Từ $MF_1 = a+\frac{c}{a}x$ và $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ rút gọn ta được gì ?. *Hướng dẫn*: Ta có: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a+\frac{c}{a}x$ **HS thảo luận và trả lời câu hỏi**: Tính toán rút gọn được đẳng thức $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. **GV**: - Hướng dẫn: Nếu đặt $b^2=a^2-c^2$ thì ta được $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$. - Ngược lại: Nếu điểm $M(x;y)$ thỏa mãn (1) thì $M\in(E)$.	**2. Phương trình chính tắc của elip** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.  Ta có: $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. Tính $MF_1 = a+\frac{c}{a}x$ và $MF_2 = a-\frac{c}{a}x$. MF_1, MF_2 gọi là các ***bán kính qua tiêu*** của điểm M. *Kết luận*: $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a>b>0)$ (1) gọi là *phương trình chính tắc* của elip đã cho.

Hoạt động 3: Luyện tập

Hoạt động của GV và HS	Ghi bảng - Trình chiếu
GV đặt câu hỏi 7 (trắc nghiệm): Từ thí dụ 1, hãy chỉ ra phương trình chính tắc của elip? **HS thảo luận và trả lời câu hỏi**: - Các nhóm chủ động thảo luận để chọn đáp án phù hợp. - Trả lời đáp án: **B**.	**Thí dụ 1**. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của elip ?* **A.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=-1$. **D.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=0$. *Đáp án*: **B**.

- Giải thích: chỉ có **đáp án B** là đúng. Các đáp án còn lại là sai vì không phải là PT chính tắc.

GV đặt câu hỏi 8 (trắc nghiệm): Từ thí dụ 2, hãy chỉ ra đáp án nào ***sai***?.

Hướng dẫn: Trước hết tìm a và b, sau đó tìm c thì có kết quả của đề bài.

HS thảo luận và trả lời câu hỏi:

- Các nhóm chủ động thảo luận để chọn đáp án phù hợp.
- Trả lời đáp án: D
- Giải thích: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Vậy ta chọn đáp **D**.

GV đặt câu hỏi 9 (trắc nghiệm): Từ thí dụ 3, hãy tính MF_2?

Hướng dẫn: Biết $a = 4$ và biết $MF_1 + MF_2 = 8$

$\Rightarrow MF_2 = 2$.

HS thảo luận và trả lời câu hỏi:

- Các nhóm chủ động thảo luận để chọn đáp án phù hợp.
- Trả lời đáp án: A
- Giải thích: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$. Theo định nghĩa, ta có: $MF_1 + MF_2 = 2a = 8$

$\Rightarrow MF_2 = 2$. Vậy chọn đáp án A.

GV đặt câu hỏi 10 (tự luận):

Từ thí dụ 4, hãy lập phương trình chính tắc của elip?.

Hướng dẫn: Gọi PT chính tắc của elip có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Thay tọa độ M và N vào thì tìm được a và b.

HS thảo luận và trả lời câu hỏi:

- Các nhóm chủ động thảo luận để chọn cách giải.
- Một học sinh đại diện các nhóm lên trình bày.
- Đáp số: PT chính tắc $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Hoạt động 4: Ứng dụng elip vào thực tiễn

Hoạt động của GV và HS

GV giới thiệu tính chất đặc biệt của "Phòng thì thầm" và giải thích: Nếu như tại một tiêu điểm ta đặt một nguồn sáng (hoặc nguồn âm), thì ánh sáng hay âm thanh sẽ phản xạ qua bề mặt của elip và tập trung tại điểm kia và ngược lại.

Thí dụ 2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình chính tắc là:*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

*Trong các các đáp dưới đây, đáp án nào **sai**?*

A. $a = 5, b = 4$. **B.** $a = 5, c = 3$.

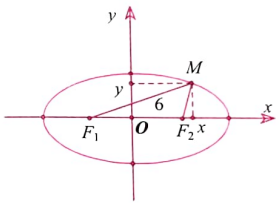
C. $b = 4, c = 3$. **D.** $a = 5, c = 2$.

Đáp án: **D**.

Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip có phương trình chính tắc là:* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Nếu M là điểm nằm trên elip sao cho thì $MF_1 = 6$ *thì* MF_2 *bằng:*

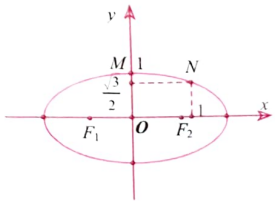
A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{7}$.



Đáp án: **A**.

Thí dụ 4. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc đi qua hai điểm* $M(0;1)$, $N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

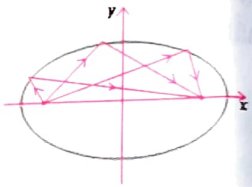
Đáp số: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.



Ghi bảng - Trình chiếu

Nhà nghệ thuật tạc tượng quốc gia số 1 ở Washinhton D.C (Mỹ) là một phòng hình bầu dục được gọi là *phòng thì thầm* vì hình dạng đặc biệt của nó làm cho âm thanh phản xạ từ các bức tường một cách đặc biệt. Có hai vị trí mà hai người đứng ở đó

Nhà nghệ thuật tạc tượng có thiết kế đặc biệt dạng hình bầu dục là nửa của khối hình được tạo nên khi quay một elip quanh trục lớn của nó (ellipsoid). Do đó nếu hai người đứng ở vị trí là hai tiêu điểm thì có thể nghe tiếng thì thầm của nhau mặc dù họ cách xa nhau.



GV đặt câu hỏi 11: "Có thể xác định vị trí mà hai người đứng để có thể nghe được tiếng thì thầm của nhau không nếu biết kích thước nhà tạc tượng?" và từ đó GV hướng dẫn HS làm thí dụ 5.

HS thảo luận và trả lời câu hỏi

- Các nhóm chủ động thảo luận để chọn cách giải khi nắm được tính chất đặc biệt của "phòng thì thầm".
- Mỗi nhóm cử đại diện trả lời.

GV kết luận, sau đó gợi ý để HS phát hiện, tìm những ví dụ khác có ứng dụng của elip trong thực tế.

có thể nghe tiếng thì thầm của nhau mặc dù họ cách xa nhau. Nếu đứng ở các vị trí khác thì không nghe được tiếng thì thầm như vậy.

Để xác định vị trí mà hai người đứng có thể nghe được tiếng thì thầm của nhau, chúng ta xét ví dụ sau.

Thí dụ 5. *Trong một elip, âm thanh hay ánh sáng đến từ một tiêu điểm được phản xạ qua tiêu điểm kia. Để nghe được người khác thì thầm hai người cần đứng tại các tiêu điểm của elip. Phòng thì thầm ở Tòa nhà tạc tượng quốc gia (Mỹ) có thiết diện ngang là một elip với chiều rộng 46 feed và chiều dài là 96 feed. Viết phương trình của elip và xác định hai điểm mà tại đó hai người cần đứng để nghe tiếng thì thầm của nhau.*

Lời giải. Giả sử tâm elip tại gốc tọa độ và trục lớn nằm trên Ox, thì elip có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Độ dài trục lớn: $2a=96 \Rightarrow a=48$; Độ dài trục nhỏ: $2b=46 \Rightarrow b=23$. Do đó elip có phương trình:

$$\frac{x^2}{2304}+\frac{y^2}{529}=1.$$

Hai người cần đứng ở hai tiêu điểm của elip. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $2c$. Ta có:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{48^2-23^2}=\sqrt{1775}\approx 42 \text{ ft}.$$

Do đó để hai điểm cần tìm là $(0; -42)$ và $(0; 42)$.

(Chú ý: 1 foot (ft) ≈ 30,48 cm; 42 ft ≈ 12,8 m).

4. Củng cố

- Học sinh nắm được định nghĩa và phương trình chính tắc của đường elip.
- Biết nhận dạng và viết phương trình chính tắc của elip.
- Trò chơi trả lời câu hỏi (có câu hỏi chuẩn bị sẵn).

5. Hướng dẫn về nhà: Chuẩn bị trước nội dung phần 3 của bài học và làm bài tập 30, 32 trong sách giáo khoa, trang 102 – 103.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/531 (Lớp 6). Chứng tỏ rằng $(2^{m+1}+1).(2^m+1) \vdots 3$ với số tự nhiên m tùy ý.

NGUYỄN VĂN BẰNG

(GV THCS Mỹ Châu, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

Bài T2/531 (Lớp 7). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho khi viết 6^n+1 trong hệ thập phân ta được một số có tất cả các chữ số bằng nhau.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T3/531. Cho các số thực dương a và b thay đổi thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $[a]=[b]$, $a<b$. Chứng minh $\dfrac{1+b^2}{1+a^2}<2,5$.

(Trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x).

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài T4/531. Cho hình vuông $ABCD$. Một góc vuông xAy quay quanh A, có cạnh Ax cắt các đường thẳng BC và CD theo thứ tự tại M và N, cạnh Ay cắt hai đường thẳng BC và CD theo thứ tự tại P và Q. Đường thẳng QM cắt NP ở R. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh bốn điểm I, B, K, D thẳng hàng.

LÊ THỊ THẢO

(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T5/531. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^4b+b^4c+c^4a+abc(a^3+b^3+c^3)\ge(a+b+c)(3abc-1).$$

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/531. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thì trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình vô nghiệm

$$\sqrt{a+b}\,x^2-2\sqrt{a}\,x+\sqrt{c}=0;$$
$$\sqrt{b+c}\,x^2-2\sqrt{b}\,x+\sqrt{a}=0;$$
$$\sqrt{c+a}\,x^2-2\sqrt{c}\,x+\sqrt{b}=0.$$

NGUYỄN THANH HIÊN

(GV THPT Nguyễn Du, TTr. Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T7/531. Cho tam giác ABC có $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Gọi G là trọng tâm tam giác đó, chứng minh rằng: $\dfrac{GA^2}{bc}+\dfrac{GB^2}{ca}+\dfrac{GC^2}{ab}\ge 1$.

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T8/531. Cho tam giác ABC ($AB<AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt (O) tại D, cắt BC tại E. Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AD. Chứng minh $\sqrt{AD.EH}=\dfrac{AC-AB}{2}$.

TRẦN THANH HƯNG

(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

Bài T9/531. Giải phương trình

$$2021^x=1+2019x+\log_{2021}(1+2020x).$$

ĐÀO VĂN NAM

(GV TH, THCS & THPT Everest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/531. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) nguyên tố cùng nhau sao cho $(2^m-1)(2^n-1)$ là một số chính phương.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/531. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y))+y+f(x)=f(f(x+y))+yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/531. Cho tứ giác lồi $ABCD$. (I_1), (I_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác ADC, BDC. T_1T_2 là tiếp tuyến chung ngoài khác CD của (I_1), (I_2) (trong đó T_1 thuộc (I_1) và T_2 thuộc (I_2)). Chứng minh rằng AT_1, BT_2, I_1I_2 đồng quy.

NGUYỄN DUY PHƯỚC
(nguyenduyphuoc@gmail.com)

Bài L1/531. Có bốn điểm theo thứ tự O, M, N, P cùng nằm trên một sợi dây dài, đàn hồi, căng ngang. Biết $MN = 2NP$. Cho O dao động điều hoà. Trên dây có sóng truyền đi với biên độ không đổi. Biết phương trình sóng tại M và P lần lượt là :

$$u_M = a\cos\left(100t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ và } u_P = a\cos\left(100t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Hãy viết phương trình sóng tại N.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/531. Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch:

$$i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right) \text{ (A) và } i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)$$

(A). Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/531 (For 6th grade). For an arbitrary natural number m, show that

$$(2^{m+1}+1).(2^m+1) \vdots 3.$$

Problem T2/531 (For 7th grade). Find all positive integer n so that all the digits of the number 6^n+1, written in the decimal system, are equal.

Problem T3/531. Given positive numbers a and b satisfying $[a]=[b]$, $a<b$. Show that

$$\frac{1+b^2}{1+a^2} < 2,5.$$

(The notation $[x]$ denotes the integral part of the number x).

Problem T4/531. Given a square $ABCD$. A right angle xAy rotates about A. The ray Ax intersects BC and CD respectively at M and N. The ray Ay intersects BC and CD respectively at P and Q. The line QM meets NP at R. Let I and K respectively be the midpoints of PN and QM. Prove that I, B, K, D are collinear.

Problem T5/531. Given positive numbers a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^4b+b^4c+c^4a+abc(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(3abc-1).$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/531. Given positive numbers a, b, c. Show that at least one of the following equations does not have solution

$$\sqrt{a+b}\,x^2 - 2\sqrt{a}\,x + \sqrt{c} = 0;$$

$$\sqrt{b+c}\,x^2 - 2\sqrt{b}\,x + \sqrt{a} = 0;$$

$$\sqrt{c+a}\,x^2 - 2\sqrt{c}\,x + \sqrt{b} = 0.$$

(*Xem tiếp trang 32*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/527. *Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng kết quả của bốn số: $a + b$, $a - b$, $a.b$, $a : b$ bằng 1575.*

Lời giải. Tổng kết quả của bốn số $a + b$, $a - b$, $a.b$, $a : b$ là:

$$(a + b) + (a - b) + a.b + (a : b)$$
$$= 2a + a.b + (a : b) = 1575,$$

hay $1575b = 2ab + a.b^2 + a$

hay $a(2b + b^2 + 1) = 1575b$ hay $a(b + 1)^2 = 1575b$.

Do tổng kết quả của bốn số $a + b$, $a - b$, $a.b$, $a : b$ là số nguyên dương 1575 nên $a : b$ là số nguyên k, hay $a = bk$ với số b nguyên dương. Thay $a = bk$ vào đẳng thức trên được:

$bk(b + 1)^2 = 1575b$, suy ra: $k(b + 1)^2 = 3^2.5^2.7$.

Xét số chính phương $(b + 1)^2 > 1$, xảy ra ba trường hợp sau.

1) $(b + 1)^2 = 3^2$ và $k = 5^2.7 = 175$, lúc đó $b = 2$ và $a = 2.175 = 350$;

2) $(b + 1)^2 = 5^2$ và $k = 3^2.7 = 63$, lúc đó $b = 4$ và $a = 4.63 = 252$;

3) $(b + 1)^2 = 15^2$ và $k = 7$, lúc đó $b = 14$ và $a = 14.7 = 98$.

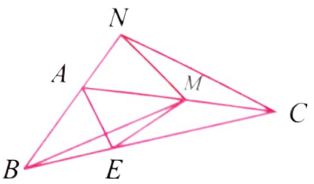
Bài toán có 3 nghiệm như trên.

Nhận xét. Một số bạn thiếu nghiệm thứ ba. Các bạn sau có lời giải đúng. **Nghệ An**: *Nguyễn Trọng Bảo, Thái Bá Nhân, Bùi Thị Thùy Linh, Nguyễn Văn Lâm*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/527. *Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$; $\widehat{B} = 40^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AB = AM. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{AMN} = 40^0$. Tính số đo góc $\widehat{BNC}$.*

Lời giải. (Của nhiều bạn) Ta lấy E trên cạnh AC sao cho AE vuông góc BM. Do tam giác AMB cân tại A, cho nên AE là phân giác góc A và là trung trực của BM.



Từ sự đối xứng qua AE, ta có $\widehat{AME} = \widehat{B} = 40^0$ và $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \widehat{CAN} = 60^0$.

Từ $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 40^0$, $AB = AM$, $\widehat{AMN} = 40^0$, tam giác BAE và tam giác MAN bằng nhau (g.c.g). Suy ra $AE = AN, BE = NM$. Vì $EM = BE$ nên $ME = MN$. Do $AN = AE$ và $ME = MN$, suy ra AC là trung trực NE, do đó $\widehat{NCA} = \widehat{C}$. Do $\widehat{C} = 180^0 - 120^0 - 40^0 = 20^0$, cho nên $\widehat{NCA} = 20^0$.

Vậy $\widehat{BNC} = \widehat{A} - \widehat{NCA} = 120^0 - 20^0 = 100^0$.

Nhận xét : Các bạn sau đây có đáp số đúng: **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Duy Khánh Huyền, Lê Thị Yến Nhi, Nguyễn Quỳnh Anh, Đặng Thị Ngọc Minh, Nguyễn Vũ Duy, Trần Tuấn Đạt, Nguyễn Minh Quân*, 7A, THCS Xuân Diệu, *Nguyễn Bảo Minh Anh*, 7A, THCS Đặng Dung, Tùng Lộc, Can Lộc; **Nghệ An**: *Thái Minh Quân, Nguyễn Hải Triều, Nguyễn Kinh Anh Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định**: *Nguyễn Nguyên Thịnh*, THCS Bình Định, An Nhơn; **Quảng Trị**: *Võ Nguyên Thăng*, 7D, THCS Trưng Vương, Đông Hà; **Điện Biên**: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, Điện Biên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/527. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

$$0 \le x + y \le 6 \text{ và } x - \frac{1}{x^3} = y - \frac{1}{y^3}.$$

Lời giải. ĐK: $x \ne 0$; $y \ne 0$.

Nhận thấy: $x - \frac{1}{x^3} = y - \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow x - y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}$

$$\Leftrightarrow x-y=-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3} \quad (1).$$

• Nếu $x-y=0$ thì $x=y$. Kết hợp với $0\le x+y\le 6$ và điều kiện $x\ne 0;\ y\ne 0$ ta tìm được $(x;y)=(1;1),(2;2),(3;3)$.

• Nếu $x-y\ne 0$ thì

Cách 1. Từ (1) ta có: $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3y^3}=-1$; mà

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0 \quad (\text{do } y\ne 0)$$

suy ra: $xy<0$. Biến đổi

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^3y^3}=-1\Leftrightarrow x^2+xy+y^2+x^3y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+x^3y^3-xy=0$$

$$\Leftrightarrow xy(xy-1)(xy+1)=-(x+y)^2 \quad (2).$$

Do x, y là các số nguyên nên $xy(xy-1)(xy+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6. Từ (2) suy ra $(x+y)^2 \vdots 6$, do đó $(x+y)\vdots 6$ mà $0\le x+y\le 6$ nên $x+y\in\{0;6\}$.

- Nếu $x+y=0$, từ (2) suy ra $xy(xy-1)(xy+1)=0$. Kết hợp với $xy<0$, tìm được $xy=-1$. Từ đó ta có:

$$(x;y)=(1;-1),(x;y)=(-1;1).$$

- Nếu $x+y=6$, từ (2) suy ra với $xy(xy-1)(xy+1)=-36\Leftrightarrow t^3-t+36=0$ (3) với $t=xy$. Do x, y là các số nguyên và $xy<0$ nên t là số nguyên âm, lại từ (3) suy ra t là ước số của 36. Tức là $t\in\{-1;-2;-3;-4;-6;-9;-12;-18;-36\}$, thay các giá trị này vào (3) đều không thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên (x, y) nghiệm đúng phương trình đã cho là $(-1;1),(1;-1),(1;1),(2;2),(3;3)$.

Cách 2. Từ (1) suy ra

$$x^2+xy+y^2+x^3y^3=0 \ (4),$$

mà $x^2+y^2>0$ nên $xy+x^3y^3<0$

$$\Leftrightarrow xy(1+x^2y^2)<0\Leftrightarrow xy<0 \ (\text{do } 1+x^2y^2>0).$$

Vai trò x, y là như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $x>0$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x=1$ thì thay vào (4) tìm được $y=-1$.

- Xét $x\ge 2$, do $xy<0$ nên $y\le -1$, suy ra $x-y\ge 3$. Lại có $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}<\frac{1}{2^3}+1<2$, điều này mâu thuẫn với $x-y=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}$ (loại).

Vậy các cặp số nguyên (x, y) nghiệm đúng phương trình đã cho là: $(-1;1)$, $(1;-1)$, $(1;1)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

Nhận xét. Bài này yêu cầu giải phương trình với nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện cho trước. Các bạn tham gia giải đều theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Điện Biên**: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, Điện Biên; **Phú Thọ**: *Ngô Đức Dũng, Nguyễn Đức Quý*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Đinh Ana*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

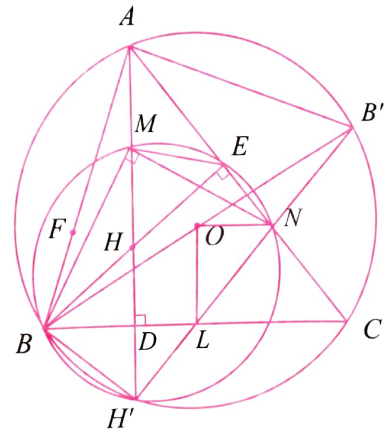
Bài T4/527. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AH, kẻ tia MN vuông góc với BM, N thuộc AC. Chứng minh rằng ON // BC và EM = R cosA.*

Lời giải. Gọi L là trung điểm của BC. Dễ thấy

$$ME=\frac{1}{2}AH=OL=R\cos A$$

Ta chỉ còn cần chứng minh $ON // BC$.

Cách 1.

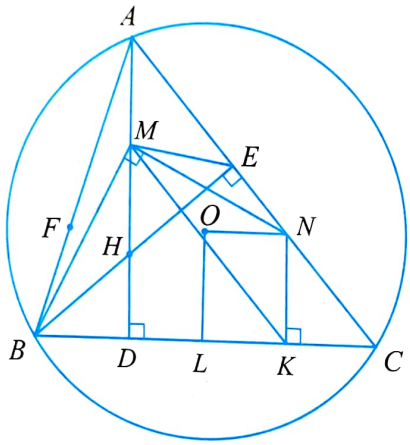


Gọi H' là điểm đối xứng với H qua BC thì theo kết quả quen thuộc có $H'\in(O)$. Ta có:

$$\widehat{H'ME} = 2\widehat{HAE} = 2\widehat{HBC} = \widehat{H'BE}.$$

Suy ra tứ giác $BMEH'$ nội tiếp. Lại có, tứ giác $BMEN$ nội tiếp đường tròn đường kính BN, suy ra $\widehat{BH'N} = 90^0$. Kẻ đường kính BB' của (O), suy ra H', N, B' thẳng hàng, và $B'C \perp BC$ $\Rightarrow B'C // AH'$, nên $AH'CB'$ là hình thang cân. Vậy ON là trung trực của AH', do đó $ON // BC$.

Cách 2.



Hạ $NK \perp BC$ tại K.

Dễ thấy các điểm B, E, M, N, K thuộc đường tròn đường kính BN.

Tứ giác $MENK$ nội tiếp nên

$$\widehat{MKN} = \widehat{MEA} \quad (1)$$

Lại có: $\widehat{MEA} = \widehat{MAE}$ (tính chất) (2);

$\widehat{MAE} = \widehat{KNC}$ (đồng vị) (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{MKN} = \widehat{KNC} \Rightarrow KM // AC$.

Vậy $AMKN$ là hình bình hành, do đó:

$$NK = AM = \frac{1}{2}AH = OL.$$

Do đó $OLKN$ là hình chữ nhật, dẫn tới $ON // BC$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 8E1, THCS Everest, Bắc Từ Liêm.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/527. *Giải phương trình:*

$$x^2\sqrt[4]{2-x^4} - x^4 + x^3 - 1 = 0.$$

Lời giải. ĐK: $2 - x^4 \ge 0$. Từ bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, suy ra:

$$\frac{1}{4}(a+b)^4 \le (a^2+b^2)^2 \le 2(a^4+b^4).$$

Do đó: $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$ (1).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2\left(\sqrt[4]{2-x^4} + x\right) = 1 + x^4 \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\left(\sqrt[4]{2-x^4} + x\right)^4 \le 8\left(2 - x^4 + x^4\right) = 16$$

$\Rightarrow \sqrt[4]{2-x^4} + x \le 2$. Do đó:

$$\text{VT}(2) = x^2\left(\sqrt[4]{2-x^4} + x\right) \le 2x^2 \le 1 + x^4 = \text{VP}(2).$$

Như vậy phương trình (2) thỏa mãn khi và chỉ khi dấu đẳng thức của các bất đẳng thức trên xảy ra, nghĩa là:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2-x^4} = x \\ x^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{2-x^4} + x \le 2.$$

Tổng quát của bất đẳng thức (1):

Nếu a, b là hai số thực không âm ta có bất đẳng thức

$$(a+b)^n \le 2^{n-1}(a^n + b^n),\ n \ge 2, n \in \mathbb{N};$$

Nếu n là số tự nhiên chẵn thì a, b có thể là hai số thực bất kỳ.

Các bạn tự chứng minh nhé.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hưng Yên: *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành, *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo, TP. Hưng Yên; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 8E1, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai

Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Đình Lê Vũ*, 9A2, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/527. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$8(2-x)(2-y)(2-z)\ge(x+yz)(y+xz)(z+xy).$$

Lời giải. Tất cả các bất đẳng thưc được dùng trong lời giải này được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực không âm. Đặt: $a=|x|, b=|y|$, $c=|z|$, ta có:

- $2(2-y)(2-z)=8-4(y+z)+2yz$
$$=(2-y-z)^2+4-(y+z)^2+2yz$$
$$\ge 4-y^2-z^2 \quad (1).$$
- $|(y+zx)(z+xy)|\le(b+ca)(c+ab)$
$$\le\frac{(b+ca+c+ab)^2}{4}=\frac{(b+c)^2(1+a)^2}{4}$$
$$\le(b^2+c^2)(1+a^2)=(3-a^2)(1+a^2).$$
- $|x+yz|\le a+bc\le a+\frac{b^2+c^2}{2}=a+\frac{3-a^2}{2}=\frac{4-(a-1)^2}{2}\le 2.$

Do đó:

$$(x+yz)(y+zx)(z+xy)\le|x+yz||(y+zx)(z+xy)|$$
$$\le 2(3-a^2)(1+a^2)=2(3-x^2)(1+x^2) \quad (2).$$

Chú ý rằng $x^2+y^2+z^2=3$ nên $x^2\le 3$, suy ra $x<2$. Bởi vậy kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$$8(2-x)(2-y)(2-z)\ge 4(2-x)(1+x^2)$$
$$=2\left[3+(x-1)^2-x^2\right](1+x^2)$$
$$\ge 2(3-x^2)(1+x^2)$$
$$\ge(x+yz)(y+zx)(z+xy).$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức cơ bản, hay. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 8E1, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Quận Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Yên**: *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường phổ thông Duy Tân; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/527 *Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $A\le B\le C\le 90^0$ và*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}+\dfrac{2}{\sin C}\ge 6, & (a)\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\cos A\ge\cos(B-C)-\sin B & (b)\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C\le\frac{13}{8}$.

Lời giải (của tác giả *Nguyễn Văn Thông*)

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$x^4+y^4\ge\frac{(x+y)^4}{8} \qquad (1)$$

và $$x^4+y^4+z^4\ge\frac{(x+y+z)^4}{27} \qquad (2).$$

Từ giả thiết (*a*) ta có:

$$\frac{1}{2\sin A}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge 3.$$

Áp dụng (2) ta được:

$$X:=\frac{1}{16\sin^4 A}+\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}$$
$$\ge\frac{\left(\dfrac{1}{2\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\dfrac{1}{2\sin C}\right)^4}{27}\ge\frac{3^4}{27}=3 \quad (3).$$

Từ điều kiện (*b*) ta có:

$$(b)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\sin B\ge\cos(B-C)+\cos A$$
$$=2\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}=2\sin C\sin B$$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\ge 2.$ Áp dụng (1) ta được:

$$Y:=\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}\ge\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)^4}{8}\ge\frac{2^4}{8}=2 \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$X\sin^4 A+\left(\sin^4 B-\sin^4 A\right)Y+\left(\sin^4 C-\sin^4 B\right)\frac{1}{\sin^4 C}$$

$$=\left(\frac{1}{16\sin^4 A}+\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}\right)\sin^4 A$$

$$+\left(\sin^4 B-\sin^4 A\right)\left(\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}\right)$$

$$+\left(\sin^4 C-\sin^4 B\right)\frac{1}{\sin^4 C}=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+1=\frac{13}{8}.$$

Do $X\ge 3, Y\ge 2,\ 0<\sin C\le 1$ nên:

$$\frac{13}{8}=X\sin^4 A+\left(\sin^4 B-\sin^4 A\right)Y+\left(\sin^4 C-\sin^4 B\right)\frac{1}{\sin^4 C}$$

$$\ge 3\sin^4 A+2\left(\sin^4 B-\sin^4 A\right)+\sin^4 C-\sin^4 B$$

$$=\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, tức là

$$\frac{1}{2\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}=\frac{1}{\sin C}=1,$$

hay $\sin C=1, \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin A=\frac{1}{2}.$

Vậy $\widehat{A}=30^0, \widehat{B}=60^0, \widehat{C}=90^0.$

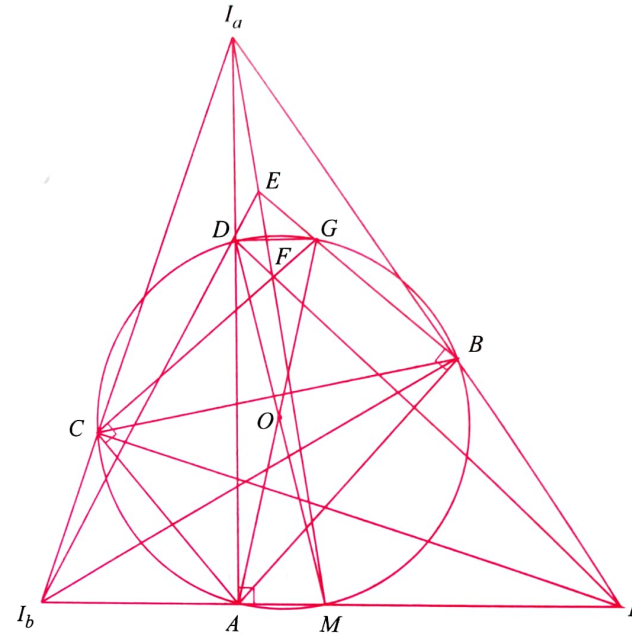
Nhận xét. Đây là bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thỏa mãn hai điều kiện (*a*) và (*b*). Đây là một bài khó theo nghĩa cần biết sử dụng kĩ thuật khéo léo biến đổi, vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, giả thiết và đánh giá số hạng, vì vậy có ít bạn tham gia gửi bài này. Các bạn có lời giải tốt là: **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/527. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), I_a, I_b, I_c tương ứng là là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. AI_a cắt (O) tại D khác A. Trên I_bD, I_cD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{ABC}=2\widehat{I_aBE}$, $\widehat{ACB}=2\widehat{I_aCF}$, E, F nằm trong tam giác I_aBC. Chứng minh rằng EF cắt I_bI_c tại một điểm nằm trên (O).*

Lời giải. Vì A, B, C là chân ba đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$, nên (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Do đó nếu gọi M là trung điểm I_bI_c thì M thuộc đường tròn (O). Ta sẽ chứng minh EF đi qua M. Thật vậy, do $2\widehat{I_aBE}=\widehat{ABC}=2\widehat{ABI_b}$ nên $\widehat{ABE}=\widehat{I_bBI_a}=90^0$.

Tương tự, $\widehat{ACF}=90^\circ$. Gọi G là giao điểm của BE và CF thì G thuộc đường tròn (O) và G đối xứng với A qua O, do đó $DG \parallel I_bI_c$. Chú ý rằng M là trung điểm của I_bI_c, theo dấu hiệu nhận biết của chùm điều hòa thì $D(GM, FE)=-1$.



Mặt khác, dễ thấy $DB=DC$, $MB=MC$ suy ra $DB.MC=DC.MB$, dẫn đến $MBDC$ là tứ giác điều hòa. Do vậy $G(DM, FE)=-1=D(GM, FE)$. Từ đó ba điểm E, F, M thẳng hàng. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. 1) Cũng có thể giải bài toán trên theo hướng: *Gọi N là trung điểm của BC, chỉ ra hai đường thẳng I_aN và I_aE đẳng giác đối với góc $\widehat{I_bI_aI_c}$. Khi đó ta cũng suy ra được ba điểm E, F, M thẳng hàng.*

2) Tất cả các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Văn Quân, Hà Vinh Quang, Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường Phổ thông Duy Tân; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu;

Sóc Trăng: *Lê Hồ Trọng Tín*, 9A7, THCS Kế Sách, huyện Kế Sách; **TP. Hồ Chí Minh**: *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/527. *Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ với a, b là các số nguyên. Biết rằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) đều là những số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho có chứa đúng 11 số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a^2+b^2$.*

Lời giải (của tác giả đề toán). Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Gọi m là một giá trị thuộc miền giá trị của hàm số $f(x)$. Khi đó phương trình $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}=m$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (m-1)x^2-ax+m-b=0$ (*) có nghiệm.

• Với $m=1$ thì phương trình trở thành:

$$-ax+1-b=0 \Leftrightarrow ax=1-b.$$

Phương trình trên có nghiệm khi $a\neq 0$ hoặc $a=0, b=1$.

• Với $m\neq 1$ thì phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=a^2-4(m-1)(m-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2-4(b+1)m-a^2+4b\leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b+1-\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2}\leq m\leq \frac{b+1+\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta có tập giá trị của hàm số $f(x)$ là

$$T=\left[\frac{b+1-\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2};\frac{b+1+\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2}\right].$$

Vì giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là các số nguyên và tập giá trị của hàm số $f(x)$ có chứa đúng 11 số nguyên nên

$$\frac{b+1+\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2}-\frac{b+1-\sqrt{a^2+(b-1)^2}}{2}=10$$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-1)^2}=10$. Suy ra $T=\left[\dfrac{b-9}{2};\dfrac{b+11}{2}\right]$.

Do giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là các số nguyên nên b là số lẻ. Ta có $a^2+(b-1)^2=100$ thì xảy ra 4 trường hợp sau:

- TH1: $\begin{cases}a^2=100\\(b-1)^2=0\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=101$.

- TH2: $\begin{cases}a^2=0\\(b-1)^2=100\end{cases}$. Trường hợp này không có đồng thời giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

- TH3: $\begin{cases}a^2=36\\(b-1)^2=64\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2\in\{117;85\}$.

- TH4: $\begin{cases}a^2=64\\(b-1)^2=36\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2\in\{113;89\}$.

Suy ra $a^2+b^2\in\{85;89;101;113;117\}$.

Vậy $\max(a^2+b^2)=117$ và $\min(a^2+b^2)=85$.

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Có ít bạn tham gia giải bài này và có 3 bạn dùng phương pháp miền giá trị (như lời giải trên), còn lại thì các bạn dùng công cụ đạo hàm để giải. Một số bạn nhầm khi lấy $\max M=221$ vì với $a=0$, $b=11$ thì $f(x)$ không có đồng thời giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Các bạn có lời giải tốt là: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 9E1, TH, THCS&THPT Everest, Hoàng Quốc Việt, Bắc Từ Liêm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/527. *Với mỗi số nguyên dương n, ta kí hiệu $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n).f(n+1)...f(n+k-1)$ là số chính phương.*

Lời giải (dựa trên ý của bạn *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**).

Ta có:

$$f(n)=(n^2+n+1)^2+1=(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right].$$

Do đó $A=f(n)f(n+1)...f(n+k-1)$

$$=(n^2+1)\left[(n+k)^2+1\right].T$$

ở đó $T=\left[(n+1)^2+1\right]^2\left[(n+2)^2+1\right]^2\ldots\left[(n+k-1)^2+1\right]^2$.

Do đó A là số chính phương khi và chỉ khi

$M=\left(n^2+1\right)\left[(n+k)^2+1\right]$ là số chính phương.

Ta có: $M=\left[n(n+k)+1\right]^2+k^2$. Nếu k lẻ thì $n(n+k)+1$ lẻ nên $M\equiv 1+1=2 \pmod 4$ không là số chính phương. Do đó k chẵn.

• Với $k=2$, đặt $M=c^2$. Ta có: $c^2=\left(n^2+2n+1\right)^2+4$

$\Rightarrow\left[c-\left(n^2+2n+1\right)\right]\left[c+\left(n^2+2n+1\right)\right]=4$

$\Rightarrow\left[c-\left(n^2+2n+1\right)\right]=2,\left[c+\left(n^2+2n+1\right)\right]=2$

$\Rightarrow n^2+2n+1=0$: vô lý.

• Với $k=4$. Ta có: $c^2=\left(n^2+4n+1\right)^2+16$

$\Rightarrow\left[c-\left(n^2+4n+1\right)\right]\left[c+\left(n^2+4n+1\right)\right]=16$

$\Rightarrow\left[c-\left(n^2+4n+1\right)\right]=2,\left[c+\left(n^2+4n+1\right)\right]=8$

$\Rightarrow n^2+4n-2=0$: không tồn tại n nguyên dương thỏa mãn.

• Với $k=6$. Chọn $n=1$ thì $M=100$ là số chính phương. Vậy k nhỏ nhất là $k=6$.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài toán này với các cách giải khác nhau. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 9E1, THCS Everest, Bắc Từ Liêm; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/527. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x)+y)=f(f(x))-yf(x)+f(-y)-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Lời giải (theo đa số các bạn).

Giả sử $f(x)$ là nghiệm của bài toán thì $a:=f(0)\neq 0$. Thật vậy, nếu $f(0)=0$ thì khi thay $x=0,y=0$ vào (1) sẽ dẫn đến $0=-2$: vô lý.

Thay $x=0$ vào (1), ta được:

$$f(a+y)=f(a)-ay+f(-y)-2,\ \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(a+y)-f(-y)=f(a)-ay-2,\ \forall y\in\mathbb{R}\quad (2).$$

Nhận xét rằng vế phải của (2) là đa thức bậc nhất nên vế phải là ánh xạ toàn ánh lên $\mathbb{R}$. Suy ra tập hợp $\{f(x)-f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.

Thay y bởi $-f(y)$ vào (1), ta được:

$$f\left[f(x)-f(y)\right]=f(f(x))+f(y)f(x)+f(f(y))-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (3).$$

Thay $y=x$ vào (3), ta được:

$$a=f(f(x))+f(x)f(x)+f(f(x))-2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(f(x))=\frac{a-f^2(x)}{2}+1\quad (4).$$

Thế (4) vào (3), ta thu được:

$$f\left[f(x)-f(y)\right]=\frac{a-f^2(x)}{2}+1+f(y)f(x)+\frac{a-f^2(y)}{2}+1-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f\left[f(x)-f(y)\right]=a-\frac{\left[f(x)-f(y)\right]^2}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)=a-\dfrac{x^2}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay vào (1) ta thu được $a=2$.

Nhận xét. Đa số các bạn đều giải theo cách trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thủy Tiên*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Hà Vinh Quang, Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Nam:** *Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/527. *Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) với AD là đường kính của (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc DC, DB. G thuộc EF sao cho $\dfrac{GF}{GE}=\dfrac{FB}{CE}$. Chứng minh rằng CG và AF cắt nhau trên (O).*

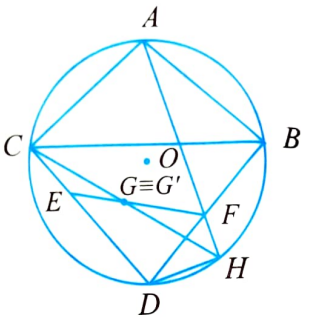
Lời giải (theo bạn *Thái Quang Phát*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

Gọi H là giao điểm thứ hai của AF và (O); G' là giao điểm CH và EF. Dễ thấy:

$\widehat{CG'E} = \widehat{HG'F}$;

$\widehat{G'HF} = \widehat{CHA}$;

$\Delta FDH \sim \Delta FAB$.



Từ đó, áp dụng định lí sin cho các tam giác $G'CE$, $G'HF$, suy ra:

$$\frac{G'E}{G'F} = \frac{G'E}{CE}.\frac{HF}{G'F}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{\sin\widehat{G'CE}}{\sin\widehat{CG'E}}.\frac{\sin\widehat{HG'F}}{\sin\widehat{G'HF}}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{\sin\widehat{G'CE}}{\sin\widehat{G'HF}}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{\sin\widehat{HCD}}{\sin\widehat{CHA}}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{HD}{CA}.\frac{CE}{HF} = \frac{HD}{BA}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{HF}{BF}.\frac{CE}{HF}$$

$$= \frac{CE}{BF} = \frac{GE}{GF}.$$

Lại có G và G' cùng thuộc đoạn EF. Vậy G trùng G' (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ có 10 bạn tham gia giải.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Hưng Yên:** *Hà Vinh Quang*, *Phạm Văn Thông*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Quảng Nam:** *Trần Gia Huy*, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kì; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hoàng Ngọc*, 10T1, *Nguyễn Thị Thanh Thu*, *Nguyễn Quang Huy*, 11T1, *Phạm Ngọc Long*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân.

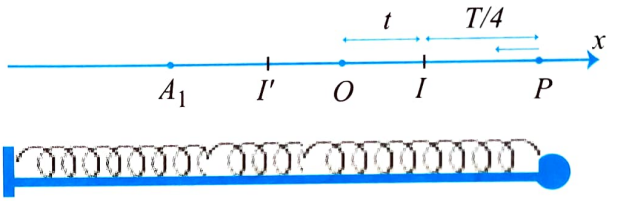
3) Có nhiều lời giải thuần túy hình học nhưng dài hơn lời giải của bạn *Phát*.

4) Bạn *Nguyễn Huy Hoàng* đề nghị rằng đề bài cần nói rõ các điểm E, F, G, theo thứ tự thuộc các đoạn CD, BD, EF.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/527. *Một con lắc lò xo nằm ngang gồm vật nặng có khối lượng $m = 0{,}1$ kg, lò xo có độ cứng $k = 10$ N/m, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng ngang là $\mu = 0{,}1$. Kéo con lắc tới vị trí sao cho lò xo dãn 5 cm rồi thả nhẹ. Xác định khoảng thời gian từ lúc dao động đến khi lò xo không biến dạng lần đầu tiên. Lấy $g = 10$ m/s^2.*

Lời giải.



Khi vật đi từ P về O, lực ma sát hướng ngược lại nên tâm dao động dịch chuyển từ O đến I sao cho:

$$OI = \frac{F_{ms}}{k} = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0{,}1.0{,}1.10}{10}$$
$$= 0{,}01\text{m} = 1\text{cm}.$$

Biên độ so với I là $A = OP - OI = 4$ cm.

Chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{5}$ (s).

Tần số góc: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10$ rad/s.

Thời gian đi từ P đến O:

$$t = \frac{T}{4} + \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{IO}{IP} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{10}\arcsin\frac{1}{4} \approx 0{,}1823\text{s}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*, 12T1; *Nguyễn Trường Duy*, 10T1; *Huỳnh Đăng Khoa*, 11 Lí 1; *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/527. *Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn AM có điện trở $R = 200\,\Omega$ và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu của đoạn mạch một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U và có tần số thay đổi được. Điều chỉnh tần số để cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại thì thấy điện áp trên đoạn mạch AM lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với cường độ dòng điện. Xác định tổng trở của đoạn mạch.*

Lời giải. Ta có:

$$U_C = I.Z_C = \frac{U}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{L^2C^2\omega^4 - \left(R - \frac{2L}{C}\right)\omega^2 + 1}}.$$

Khi tần số dòng điện thay đổi, để U_C đạt cực đại ta có: $\omega = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{Z_L}{R}.\frac{Z_C - Z_L}{R} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

Theo bài ra hiệu điện thế giữa 2 điểm A, M lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với dòng điện nên:

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{Z_L}{R} = 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $Z_C - Z_L = \frac{R}{2}$.

Do đó tổng trở của mạch bằng:

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}R \approx 223,6\,\Omega.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào gửi bài giải cho bài vật lý này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

PROBLEMS ...

(*Tiếp theo trang 23*)

Problem T7/531. Given a triangle ABC with $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Let G be the centroid of the triangle. Prove that

$$\frac{GA^2}{bc} + \frac{GB^2}{ca} + \frac{GC^2}{ab} \geq 1.$$

Problem T8/531. Given a triangle ABC ($AB < AC$) inscribed in a circle (O). The angle bisector of A intersects (O) at D, intersect BC at E. Let M be the midpoint of BC, and H the perpendicular prejection of M on AD. Prove that $\sqrt{AD.EH} = \frac{AC - AB}{2}$.

Problem T9/531. Solve the equation

$$2021^x = 1 + 2019x + \log_{2021}(1 + 2020x).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/531. Find all pairs of co-prime positive integers (m, n) so that $(2^m - 1)(2^n - 1)$ is a perfect square.

Problem T11/531. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(f(x + y)) + yf(x)$$

for all arbitrary real numbers x, y.

Problem T12/531. Given a convex quadrilateral $ABCD$. Let (I_1), (I_2) respectively be the incircles of ADC, BDC. Assume that T_1T_2 is the other external tangent of (I_1), (I_2) (where T_1 belongs to (I_1) and T_2 belongs to (I_2)). Show that AT_1, BT_2, I_1I_2 are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

CÁCH TIẾP CẬN PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC BA BIẾN

HOÀNG NGỌC HÙNG
(GV THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong dòng chảy của toán học, đặc biệt là toán học sơ cấp, bài toán *Bất đẳng thức* (BĐT) và bài toán *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất* (GTLN, GTNN) của một biểu thức luôn tiềm ẩn những nét hay, sự độc đáo và hướng người yêu toán khát khao khám phá. Bài toán này thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi tuyển sinh đại học, các kỳ thi chọn học sinh giỏi Tỉnh, Quốc gia, Khu vực và Olympic Quốc tế.

Có rất nhiều phương pháp giải bài toán BĐT và tìm GTLN, GTNN của một biểu thức. Nhiều nhà toán học nổi tiếng đều có BĐT mang tên mình như: Cauchy, Bunyakovsky, Schwarz, Jensen, Nesbitt,... Có những lời giải hết sức ngắn gọn, súc tích, có những lời giải mà mỗi chúng ta khi tiếp cận đều thực sự bất ngờ với những kỹ thuật biến đổi, xử lý thật tinh tế. Tuy nhiên với những biến đổi và xử lý như thế, học sinh thường cảm thấy bối rối mỗi khi giải hoặc nghiên cứu lời giải.

Trong quá trình công tác, giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, ôn thi tốt nghiệp THPT, tôi thường xuyên hướng đến những lời giải mang tính tự nhiên và có tính giải thuật. Một lời giải tự nhiên sẽ mang đến cho học sinh nhiều tự tin, động lực để khám phá bài toán bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức ba biến - một phần không thể thiếu của các bài toán BĐT. Phương pháp dồn biến là một trong những phương pháp đưa ra lời giải có tính giải thuật và rất tự nhiên để chứng minh một BĐT hoặc tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

2. CƠ SỞ LÝ LUẬN

a) Điều kiện và phương pháp chuẩn hóa

Định lý. *Cho $H(x, y, z)$ là một đa thức đẳng cấp bậc k, nghĩa là $H(tx, ty, tz) = t^k H(x, y, z)$ và biểu thức $F(x, y, z)$ thỏa mãn $F(x, y, z) = F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Khi đó giá trị của $F(x, y, z)$ trên miền*

$$\{(x, y, z) \mid H(x, y, z) = a,\ a > 0\}$$

không thay đổi khi a thay đổi.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $M(x, y, z)$ sao cho $H(x, y, z) = a_1$; $M'(x', y', z')$ sao cho $H(x', y', z') = a_2$; với $a_1, a_2 > 0$. Ta có:

$$H(x,y,z) = a_1 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} H(x,y,z) = a_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}\right)^k H(x,y,z) = a_2$$

$$\Leftrightarrow H\left(\sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}x, \sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}y, \sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}z\right) = a_2.$$

Đặt $x' = \sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}x, y' = \sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}y, z' = \sqrt[k]{\frac{a_2}{a_1}}z$. Khi đó ta có $H(x', y', z') = a_2$, suy ra $F(x', y', z') = F(x, y, z)$.

Mặt khác: $M \in \{H(x,y,z) = a_1\} \Leftrightarrow M' \in \{H(x',y',z') = a_2\}$.

Kết luận: Như vậy để tìm giá trị của $F(x, y, z)$ trên miền $H(x, y, z)$ ta chỉ cần tìm giá trị của $F(x, y, z)$ trên miền $H(x, y, z) = a$ cố định thích hợp.

b) Kỹ thuật sắp bộ thứ tự

+ Nếu $F(x, y, z)$ là một biểu thức đối xứng ba biến. Không mất tính tổng quát ta luôn đưa ra giả sử được rằng: $x \le y \le z$ hoặc $x \ge y \ge z$.

+ Nếu $F(x, y, z)$ là một biểu thức hoán vị vòng quanh. Không mất tính tổng quát ta luôn giả sử được rằng: $x = \max\{x; y; z)$; $x = \min\{x; y; z)$ hoặc giả sử rằng x là số nằm giữa y và z.

c) Cơ sở phương pháp dồn biến "đẩy về tâm" của bất đẳng thức ba biến

Phương pháp dồn biến "đẩy về tâm" là cách nói rất mộc mạc của phương pháp dồn về các biến bằng nhau hoặc 2 biến bằng nhau. Nghĩa là cực trị đạt tại tất cả các biến bằng nhau, hoặc một số biến bằng nhau. Giả sử bài toán của chúng ta có dạng $f(x;y;z) \geq 0$ với x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện nào đó.

Khi đó mong muốn của chúng ta là sẽ có đánh giá $F(x;y;z) \geq F(x;t;t)$ với t là cách đặt nào đó liên quan đến hai biến còn lại. Ở phương pháp này t là biến thực đẩy hai biến y và z lại gần nhau. Nên chúng ta gọi là phương pháp dồn biến "đẩy về tâm".

Tùy vào giả thiết của bài toán mà ta có cách dồn biến khác nhau, sao cho khi đặt t thì điều kiện ban đầu vẫn thỏa mãn. Thí dụ một số cách đặt như sau trong trường hợp bài toán có thể giải quyết được bằng phương pháp dồn biến "đẩy về tâm":

+ Nếu cho x, y, z không âm và $x + y + z = a > 0$, đặt $t = \dfrac{y+z}{2}$.

+ Nếu cho x, y, z không âm và $xyz = a > 0$, đặt $t = \sqrt{yz}$.

+ Nếu cho x, y, z không âm và $x^2 + y^2 + z^2 = a$, đặt $t = \sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{2}}$.

+ Nếu cho x, y, z không âm và $xy + yz + zx = a$, chọn $t > 0$ sao cho $t^2 + 2tx = a$.

d) Cơ sở phương pháp dồn biến "đẩy ra biên" đối với bất đẳng thức ba biến

Phương pháp dồn biến "đẩy ra biên" là cách nói rất mộc mạc của phương pháp dồn một số biến về biên. Nghĩa là cực trị của BĐT đạt được tại giá trị biên. Giả sử bài toán của chúng ta có dạng $f(x;y;z) \geq 0$ với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện nào đó.

Khi đó mong muốn của chúng ta là sẽ có đánh giá $F(x;y;z) \geq F(0;s;t)$... ...với s, t là cách đặt nào đó liên quan đến các biến còn lại. Ở phương pháp này chúng ta đã dồn 1 biến ra biên. Nên chúng ta gọi là phương pháp dồn biến "đẩy ra biên".

Thí dụ một số cách đặt như sau trong trường hợp bài toán có thể giải quyết được bằng phương pháp dồn biến "đẩy ra biên" :

+ Nếu cho x, y, z không âm và $x + y + z = a > 0$, ta có cách đặt sau:

$$s = x + y, t = z \quad \text{hoặc} \quad s = y + \frac{x}{2}; t = z + \frac{x}{2}.$$

+ Nếu cho x, y, z không âm và $xyz = a > 0$, đặt $s = \sqrt{x}y; t = \sqrt{x}z$.

+ Nếu cho x, y, z không âm và $xy + yz + zx = a > 0$, đặt $s = x + y; t = \dfrac{a}{x+y}$.

+ Nếu cho x, y, z không âm và $xy + yz + zx = a$, chọn $t > 0$ sao cho $t^2 + 2tx = a$

e) Những lưu ý khi sử dụng phương pháp dồn biến

+ Tác giả nhận thấy có sự giống nhau tương đối của bài toán BĐT và bài toán Tìm GTLN, GTNN của biểu thức nên các bài toán trong bài viết được sắp xếp theo mức độ khó dễ của cách chứng minh dựa vào cách cảm nhận của tác giả.

+ Trong một số bài toán phức tạp có thể sử dụng các BĐT Cauchy, Schwarz, ... để làm đơn giản biểu thức cần chứng minh.

+ Vấn đề lựa chọn các biến t, s phải tồn tại và thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán.

+ Khi đã chứng minh được $F(x;y;z) \geq F(x;t;t)$, ... hoặc $F(x;y;z) \geq F(0;s;t)$, ... nghĩa là số biến ban đầu đã được giảm về 2 biến. Nếu có điều kiện ràng buộc của hai biến chúng ta chỉ cần khảo sát biểu thức một biến.

+ Khi trình bày bài viết này chúng tôi đã cố gắng sử dụng những phép biến đổi sơ cấp nhất để chứng minh $F(x;t;t) \geq 0$ hoặc $F(0;s;t) \geq 0$ hoặc tìm GTLN và GTNN của các biểu thức này để học sinh lớp 10 có thể tiếp cận một cách dễ dàng. Tuy nhiên công cụ đạo hàm được tác giả sử dụng trong một số trường hợp phức tạp hơn.

+ Vấn đề khảo sát một hàm số như bậc hai, bậc ba, ... tác giả không đưa ra bảng biến thiên mà chỉ kết luận vấn đề.

3. MỘT SỐ THÍ DỤ

a) Phương pháp dồn biến "đẩy về tâm"

Thí dụ 1 (Đề thi HSG Tỉnh Hà Tĩnh lớp 10 năm học 2016 -2017). *Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 4.$$

Phân tích.

- Nhận thấy rằng dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ nên chúng ta sử dụng phương pháp dồn biến "đẩy về tâm".
- Biểu thức có dạng đối xứng nên ta có thể giả sử $a\le b\le c$ hoặc $a\ge b\ge c$.
- Ta dồn biến theo trung bình cộng vì có điều kiện $a+b+c=3$.

Lời giải. Đặt $F(a;b;c)=a^2+b^2+c^2+abc-4$.

Do tính đối xứng của a, b, c, không mất tính tổng quát giả sử $a\le b\le c$. Khi đó:

$F(a;t;t)=a^2+2t^2+at^2-4$, với $t=\dfrac{b+c}{2}$ và $0\le a\le 1$. Xét $H=F(a;b;c)-F(a;t;t)$

$$=b^2+c^2-\frac{(b+c)^2}{2}+abc-a\frac{(b+c)^2}{4}$$

$$=\frac{(b-c)^2(2-a)}{4}\ge 0.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$F(a;t;t)=a^2+2t^2+at^2-4\ge 0.$$

Do $a=3-2t$ nên $1\le t\le\dfrac{3}{2}$. Ta có:

$$F(a;t;t)=(3-2t)^2+2t^2+(3-2t)t^2-4$$

$$=-2t^3+9t^2-12t+5=(t-1)^2(-2t+5)\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}b=c\\t=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1.$

Thí dụ 2. *Cho $a,b,c>0$ có $abc=1$. Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{6}{a+b+c}\ge 5.$

Phân tích.

- Nhận thấy rằng dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Nên chúng ta sử dụng phương pháp dồn biến "đẩy về tâm".
- Biểu thức có dạng đối xứng nên ta có thể giả sử $a\le b\le c$ hoặc $a\ge b\ge c$.
- Ta dồn biến theo trung bình nhân.

Lời giải. Xét $F(a;b;c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{6}{a+b+c}-5.$

Đặt $t=\sqrt{bc}>0$, ta hi vọng chứng minh được $F(a;b;c)\ge F(a;t;t)$. Ta có:

$$H=F(a;b;c)-F(a;t;t)$$

$$=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{6}{a+b+c}-\frac{6}{a+2\sqrt{bc}}.$$

$$=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{bc}-\frac{6\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{(a+b+c)(a+2\sqrt{bc})}$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2.\frac{(a+b+c)(a+2\sqrt{bc})-6bc}{bc(a+b+c)(a+2\sqrt{bc})}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, suy ra $a\ge\dfrac{b+c}{2}$. Khi đó: $(a+b+c)(a+2\sqrt{bc})-6bc$

$$\ge\frac{3(b+c)}{2}.\left(\frac{b+c}{2}+2\sqrt{bc}\right)-6bc$$

$$\ge 3\sqrt{bc}.3\sqrt{bc}-6bc=3bc>0.$$

Vậy $H\ge 0$. Ta cần chứng minh $F(a;t;t)\ge 0$. Từ giả thiết ta có: $at^2=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{t^2}$. Ta có:

$$F(a;t;t)=\frac{1}{a}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\frac{6}{a+2t}-5$$

$$=t^2+\frac{2}{t}+\frac{6}{\frac{1}{t^2}+2t}-5=\frac{2t^6-10t^4+11t^3-5t+2}{t(1+2t^3)}$$

$$=\frac{(t-1)^2(2t^4+4t^3-4t^2-t+2)}{t(1+2t^3)}\ge 0.$$

Thật vậy ta có: $2t^4+4t^3-4t^2-t+2$

$$=\left(2t^4-2t^3+\frac{1}{2}t^2\right)+\left(6t^3-6t^2+\frac{3}{2}t\right)+\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+2$$

$$=2t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+6t\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+2\right)>0$$

với mọi $t>0$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} b = c \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Thí dụ 3. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c \le 3.$$

Phân tích.

- Nhận thấy rằng dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Từ đó chúng ta sử dụng phương pháp dồn biến "đẩy về tâm".
- Biểu thức có dạng đối xứng nên ta có thể giả sử $a \le b \le c$ hoặc $a \ge b \ge c$.
- Ta dồn biến theo biến t không âm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a^2 + 2t^2 + at^2 = 4$.

Lời giải. Chọn t không âm thỏa mãn:

$$a^2 + t^2 + t^2 + at^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = 2 - a \le 2.$$

Theo giả thiết ta có: $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \ge a^2$, suy ra $2 - a \ge 0$. Do đó t luôn tồn tại. Theo cách đặt ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + abc = a^2 + 2t^2 + at^2$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + at^2 = b^2 + c^2 + abc \ge 2bc + abc$$

$$\Rightarrow 2(t^2 - bc) + a(t^2 - bc) \ge 0 \Leftrightarrow (2 + a)(t^2 - bc) \ge 0$$

$\Rightarrow t^2 \ge bc$. Đặt $F(a,b,c) = a + b + c$, ta cần chứng minh: $F(a,b,c) \le F(a,t,t)$

$$\Leftrightarrow a + b + c \le a + 2t \Leftrightarrow (b + c)^2 \le 4t^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \le 4t^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - (b^2 + c^2) + 2t^2 - 2bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - (4 - a^2 - abc) + 2t^2 - 2bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - \left[\left(a^2 + 2t^2 + at^2\right) - a^2 - abc\right] + 2t^2 - 2bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow abc - at^2 + 2t^2 - 2bc \ge 0$$

$\Leftrightarrow (2 - a)(t^2 - bc) \ge 0$: luôn đúng.

Ta chỉ cần chứng minh:

$$F(a,t,t) \le 3 \Leftrightarrow a + 2t - 3 \le 0 \Leftrightarrow (2 - t^2) + 2t - 3 \le 0$$

$\Leftrightarrow -(1 - t)^2 \le 0$: luôn đúng.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 4. (Canada 2002). *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \ge a + b + c, \text{ với mọi } a, b, c \text{ dương.}$$

Phân tích. Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$, nên ta sử dụng phương pháp dồn biến "đẩy về tâm" với cách dồn biến theo trung bình cộng.

Lời giải. Ký hiệu $F(a,b,c) = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$. Đặt $t = \frac{b + c}{2}$. Xét

$$H = F(a,b,c) - F(a,t,t) = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} - \left(\frac{a^3}{t^2} + \frac{2t^3}{at}\right)$$

$$= a^3\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{b} - 2t^2\right)$$

$$= \frac{a^3(b - c)^2}{bc(b + c)^2} + \frac{1}{2abc}(b - c)^2(2b^2 + 2c^2 + 3bc) \ge 0.$$

Ta cần chứng minh $F(a,t,t) = \frac{a^3}{t^2} + \frac{2t^3}{at} \ge a + 2t$.

Ta có: $\frac{a^3}{t^2} + \frac{2t^2}{a} - a - 2t = \frac{a(a - t)(a + t)}{t^2} + \frac{2t(t - a)}{a}$

$$= (a - t)\left(\frac{a(a + t)}{t^2} - \frac{2t}{a}\right) = \frac{1}{t^2 a}(a - t)^2(a^2 + 2at + 2t^2) \ge 0.$$

Vậy ta có $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \ge a + b + c$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Nhận xét. Do tính đồng bậc của bất đẳng thức nên ta có thể chuẩn hóa $a + b + c = 3$, khi đó bài toán sẽ giải quyết đơn giản hơn.

Thí dụ 5 (Thailand 2003). *Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $a + b + c \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge a + b + c.$$

Phân tích. - Từ điều kiện ràng buộc và đánh giá

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \ge 9$$

ta thiết lập được điều kiện $a + b + c \ge 3$.

- Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$, nên ta sử dụng phương pháp dồn biến đẩy về tâm với cách dồn biến theo trung bình cộng.

Lời giải. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$(a + b + c)^2 \ge \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \ge 9$$

$\Rightarrow a + b + c \ge 3.$

Ký hiệu $F(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-a-b-c$, đặt $t=\frac{b+c}{2}$, ta có $a+2t\ge 3$. Xét

$$F(a,b,c)-F(a,t,t)=b^3+c^3-2t^3$$

$$=b^3+c^3-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^3=\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}\ge 0.$$

Ta cần chứng minh $F(a,t,t)\ge 0$.

Ta có:

$$a^3+2t^3+6\ge\left(a^3+1+1\right)+\left(2t^3+2+2\right)$$

$$\ge 3a+6t=(a+2t)+2(a+2t)\ge a+2t+6.$$

Suy ra $a^3+2t^3\ge a+2t$ hay $F(a,t,t)\ge 0$. Vậy $a^3+b^3+c^3\ge a+b+c$ (đpcm).

Thí dụ 6 (Bất đẳng thức Schur). *Cho $a,b,c\ge 0$, chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Phân tích.

- Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$, nên ta hi vọng sử dụng được phương pháp dồn biến về tâm.
- Ở bài toán này không có điều kiện ràng buộc các biến nên ta có thể có nhiều cách dồn biến khác nhau. Tuy nhiên phải lựa chọn cách dồn biến sao cho để chứng minh BĐT $F(a,b,c)\ge F(a,t,t)$ là đơn giản nhất.

Lời giải. Xét $F(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc$

$$-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b).$$

Đặt $t=\frac{b+c}{2}$, khi đó ta hi vọng rằng có BĐT $F(a,b,c)\ge F(a,t,t)$. Xét $H=F(a,b,c)-F(a,t,t)$

$$=a^3+b^3+c^3+3abc-a^2(b+c)-b^2(c+a)$$

$$-c^2(a+b)-\left[a^3+2t^3+3at^2-2a^2t-2t^2(t+a)\right]$$

$$=b^3+c^3+3abc-b^2(c+a)-c^2(a+b)$$

$$-\left[\frac{(b+c)^3}{4}+3a\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{(b+c)^2}{4}(b+c+2a)\right]$$

$$=\left(b^3+c^3\right)-\frac{(b+c)^3}{4}+\left(3abc-3a\frac{(b+c)^2}{4}\right)$$

$$+\left[\frac{(b+c)^2}{4}(b+c+2a)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\right]$$

$$=\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}-3a\frac{(b-c)^2}{4}+\frac{(b-c)^2(b+c)}{4}-2a\frac{(b-c)^2}{4}$$

$$=(b-c)^2\left(b+c-\frac{5}{4}a\right).$$

Do biểu thức đã cho có dạng hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a=\min\{a;b;c\}$. Khi đó $b+c-\frac{5}{4}a\ge 0$, suy ra:

$$(b-c)^2\left(b+c-\frac{5}{4}a\right)\ge 0 \text{ hay } F(a,b,c)\ge F(a,t,t).$$

Vấn đề còn lại ta cần chứng minh $F(a,t,t)\ge 0$.

Ta có: $F(a,t,t)=a^3+2t^3+3at^2-2a^2t-2t^2(t+a)$

$$=a^3+at^2-2a^2t=a(a-t)^2\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} b=c \\ a=t=\frac{b+c}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

Thí dụ 8 (IMO 1984). *Cho x, y, z không âm thỏa mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng*

$$0\le xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}.$$

Phân tích. Đặt $F(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$.

- Dễ dàng chứng minh được $F(x,y,z)\ge 0$.
- Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$. Ta sử dụng phương pháp dồn biến đẩy về tâm để chứng minh $F(x,y,z)\le\frac{7}{27}$, dồn biến theo trung bình cộng.

Lời giải. Đặt $F(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$.

• Ta chứng minh $F(x,y,z)\ge 0$. Ta có:

$$F(x,y,z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz$$

$$=(x+y)xy+(y+z)yz+(x+z)xz+xyz\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1, y=0, z=0$ hoặc các hoán vị.

• Ta chứng minh $F(x,y,z) \le \frac{7}{27}$. Đặt $t = \frac{y+z}{2}$, suy ra: $x + 2t = 1$, ta chứng minh:

$$F(x,y,z) \le F(x,t,t).$$

Do biểu thức có tính đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử $x \le y \le z$, khi đó $x \le \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{2}$. Xét $H = F(x,y,z) - F(x,t,t)$

$= xy + yz + zx - 2xyz - (2xt + t^2 - 2xt^2)$

$= x(y-t) + x(z-t) + yz - t^2 - 2x(yz - t^2)$

$= -\frac{(y-z)^2}{4} + 2\frac{x(y-z)^2}{4} = \frac{-(y-z)^2}{4}(1-2x) \le 0.$

Ta chỉ cần chứng minh

$$F(x,t,t) = 2xt + t^2 - 2xt^2 \le \frac{7}{27}$$

$\Leftrightarrow 4t^3 - 5t^2 + 2t \le \frac{7}{27} \Leftrightarrow 9\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 (12t - 7) \le 0$:

đúng với mọi t thỏa mãn $\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y = z \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Thí dụ 8 (Belarus 1999). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \ge \frac{3}{2}$.*

Phân tích.

- Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$, nên ta sử dụng được phương pháp dồn biến về tâm.

- Tuy nhiên nếu ta dồn biến theo trung bình cộng các bình phương ta sẽ gặp một chút rắc rối khi chứng minh $F(a,b,c) - F(a,t,t) \ge 0$. Vì thế chúng ta chuyển về dồn biến theo trung bình cộng của b và c thông qua đánh giá:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2.$$

Lời giải. Ta có: $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2$, suy ra: $a + b + c \le 3$. Ký hiệu:

$$F(a,b,c) = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca},$$

đặt $t = \frac{b+c}{2}$, ta có: $a + 2t \le 3$. Ta chứng minh $F(a,b,c) - F(a,t,t) \ge 0$. Thật vậy:

$$F(a,b,c) - F(a,t,t) = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} - \left(\frac{1}{1+at} + \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+ta}\right)$$

$$= \frac{a(t-b)}{(1+ab)(1+at)} + \frac{a(t-c)}{(1+ca)(1+at)} + \frac{t^2 - bc}{(1+bc)(1+t^2)}$$

$$= \frac{a^2(c-b)^2}{2(1+at)(1+ab)(1+ac)} + \frac{(b-c)^2}{4(1+bc)(1+t^2)} \ge 0.$$

Ta cần chứng minh $F(a,t,t) = \frac{2}{1+at} + \frac{1}{1+t^2} \ge \frac{3}{2}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó $t \le a$ và $0 < t \le 1$. Ta có:

$$F(a,t,t) \ge \frac{2}{1+(3-2t)t} + \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{2}{1+3t-2t^2} + \frac{1}{1+t^2} = \frac{3+3t}{(1+3t-2t^2)(1+t^2)}.$$

Ta có: $\frac{3+3t}{(1+3t-2t^2)(1+t^2)} \ge \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2 + t + 1) \ge 0$: luôn đúng.

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 3 \\ t = 1 \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Thí dụ 9 (Đề thi HSG lớp 10, tỉnh Hà Tĩnh, năm 2009-2010). *Cho tam giác ABC. Gọi a, b, c theo thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C. Tìm GTNN của $P = \frac{a^3}{m_a^3} + \frac{b^3}{m_b^3} + \frac{c^3}{m_c^3}$.*

Phân tích.

- Đây là bài toán tìm GTNN của một biểu thức trong một bài toán hình học phẳng.

- Để sử dụng được phương pháp dồn biến chúng ta cần đưa về thuần nhất với một kiểu ẩn a, b, c và tìm mối liên hệ giữa chúng.

- Bằng cách sử dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác $m_a = \sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}$ ta có đánh giá sau: $\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{a^2}{a.m_a} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}a^2}{\sqrt{3a^2}.\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} \ge \frac{2\sqrt{3}a^2}{b^2+c^2+a^2}.$$

Từ đó chúng ta có điều kiện ràng buộc

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}.$$

- Do đó, ta dồn biến theo trung bình cộng.

Lời giải. Ta có: $\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{a^2}{a.m_a} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}a^2}{\sqrt{3a^2}.\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} \ge \frac{2\sqrt{3}a^2}{b^2+c^2+a^2}.$$

Tương tự: $\dfrac{b}{m_b} \ge \dfrac{2\sqrt{3}.b^2}{b^2+c^2+a^2}$; $\dfrac{c}{m_c} \ge \dfrac{2\sqrt{3}.c^2}{b^2+c^2+a^2}$.

Đặt $x = \dfrac{a}{m_a}$, $y = \dfrac{b}{m_b}$, $z = \dfrac{c}{m_c}$, ta có:

$x + y + z \ge 2\sqrt{3}$. Ta cần tìm GTNN của $P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$. Xét

$H = P(x,y,z) - P(x,t,t) = y^3 + z^3 - 2t^3$

$= \dfrac{3(y-z)^2(y+z)}{4} \ge 0$ với $t = \dfrac{y+z}{2}$.

Ta cần tìm GTNN của $P(x, t, t)$.Sử dụng BĐT Cauchy, ta có: $P(x,t,t) = x^3 + 2t^3$

$$= \left(x^3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right) + \left(2t^3 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right) - 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\ge 4(x+2t) - 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \ge \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Nhận xét. Hướng dẫn chấm của bài toán này được trình bày theo cách khác, không sử dụng phương pháp dồn biến.

b) Phương pháp dồn biến "đẩy ra biên"

Thí dụ 1. *Cho a, b, c thỏa mãn* $\begin{cases} 0 \le a,b,c \le 2 \\ a+b+c=3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

Phân tích. Dễ thấy $a = b = c$ thì dấu bằng không xảy ra. Xét $c = 0$, khi đó BĐT trở thành $a^2 + b^2 \le 5$ với điều kiện $a + b = 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2$, $b = 1$ hoặc $a = 1$, $b = 2$. Từ đó ta có thể sử dụng phương pháp "đẩy ra biên".

Lời giải. Đặt $F(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$, $t = a + c$, $s = b$. Xét $F(t,s,0) - F(a,b,c)$

$$= (a+c)^2 + b^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2ac \ge 0.$$

Suy ra $F(a,b,c) \le F(s,t,0)$. Ta chỉ cần chứng minh BĐT đúng với trường hợp $c = 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b$, suy ra:

$$2a \ge a + b = 3 \Rightarrow a \ge \frac{3}{2}.$$

Ta có: $a^2 + b^2 \le 5 \Leftrightarrow a^2 + (3-a)^2 \le 5$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 6a + 4 \le 0 \Leftrightarrow 2(a-1)(a-2) \le 0$: luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ và các hoán vị.

Thí dụ 2. *Cho a, b, c không âm. Chứng minh rằng*

$$27(a^2b + b^2c + c^2a + abc) \le 4(a+b+c)^3.$$

Phân tích.

- Dễ thấy $a = b = c$ thỏa mãn dấu đẳng thức, nên ta có thể sử dụng phương pháp dồn biến về tâm. Cách này dành cho bạn đọc như là một bài tập đề nghị.

- Giả sử $c = 0$ khi đó ta có $27a^2b \le 4(a+b)^3$. Khi đó dấu bằng xảy ra khi $a = 2b$. Do đó ta cũng có thể sử dụng phương pháp dồn biến đẩy ra biên.

Lời giải. Đặt

$F(a;b;c) = 27(a^2b + b^2c + c^2a + abc) - 4(a+b+c)^3$.

Ta có: $H = F(a;b;c) - F(a+c;b;0)$

$= 27(a^2b + b^2c + c^2a + abc) - 27(a+c)^2b$

$= -27(a-b)(b-c)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là nằm giữa a và c khi đó $(a-b)(b-c) \ge 0$. Vì thế $H \le 0$. Dấu

bằng xảy ra khi $a = b = c$. Ta cần chứng minh BĐT đúng khi $c = 0$. Ta có:

$$27a^2b \le 4(a+b)^3 \Leftrightarrow 4a^3 - 15a^2b + 12ab^2 + 4b^3 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2(4a+b) \ge 0$: luôn đúng.

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2b$, $c = 0$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Rõ ràng với cách dồn biến đẩy ra biên, bài toán được hoàn toàn chứng minh với những biến đổi rất sơ cấp và đơn giản. Đa thức trong bài toán đồng bậc nên có thể chuẩn hóa $a + b + c = 3$.

Bài 3. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + a + 2b + 3c$.*

Phân tích. Bằng cách thử một vài giá trị ta thấy rằng với $a = b = c = 1$ thì P không đạt được giá trị lớn nhất.

Xét $a = 0$, ta có:

$$P = 2b + 3c = 2b + 3(3-b) = 9 - b \le 9$$

Xét $b = 0$, ta có:

$$P = a^2 + a + 3c = a^2 + a + 3(3-a) = a^2 - 2a + 9 \ge 9$$

(tồn tại giá trị của a).

Xét $c = 0$, ta có:

$$P = a^2 + a + 2b = a^2 + a + 2(3-a) = a^2 - a + 6 \ge 9$$

(tồn tại giá trị của a).

Từ những phân tích trên ta thấy rằng P có thể đạt giá trị lớn nhất khi $b = 0$ hoặc $c = 0$.

Tuy nhiên để sử dụng phương pháp dồn biến "đẩy ra biên" trong bài toán không có tính đối xứng và không có tính hoán vị vòng quanh này ta cần xét một vài trường hợp.

Lời giải. Xét $a = 0$, ta có: $P = 9 - b \le 9$, dấu bằng xảy ra khi $b = 0$. Đặt $t = a + c$, $s = b$ và $F(a,b,c) = a^2 + a + 2b + 3c$. Khi đó:

$$F(a,b,c) - F(t,s,0)$$
$$= a^2 + a + 2b + 3c - \left[(a+c)^2 + (a+c) + 2b\right]$$
$$= 2c - 2ac - c^2 \le 0.$$

Suy ra $F(a,b,c) \le F(t,s,0)$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của P khi $c = 0$. Ta có: $P = a^2 - a + 6$.

Xét $a = \max\{a, b\}$. Do $a = \max\{a, b\}$, suy ra $a \ge \frac{3}{2}$. Khảo sát P trên $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$ ta có GTLN của P là 12 đạt được khi $a = 3$.

Xét $b = \max\{a, b\}$. Do $b = \max\{a, b\}$, suy ra $0 \le a \le \frac{3}{2}$. Khảo sát P trên $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ ta có GTLN của P là $\frac{27}{4}$ khi $a = \frac{3}{2}$.

So sánh các giá trị ta thấy P đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$.

Thí dụ 4 (VMO 2008). *Cho x, y, z là các số thực không âm đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right) \ge 4 \quad (*).$$

Phân tích. Dễ thấy $x = y = z$ thì BĐT(*) không tồn tại. Xét $z = 0$, khi đó ta có:

$$(*) \Leftrightarrow xy\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right) \ge 4 \quad (**).$$

BĐT (**) là đẳng cấp nên ta đặt $y = ax$ với $a > 0$. Khi đó biểu thức đưa về một biến theo a. Ta hi vọng có được điều phải chứng minh.

Lời giải. Đặt

$$F(x,y,z) = (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right).$$

Không mất tính tổng quát giả sử $z = \min\{x, y, z\}$.

Xét $H = F(x,y,z) - F(s,t,0)$ với $s = x - z$, $t = y - z$.

Ta có: $F(x,y,z) - F(s,t,0)$

$$= \frac{z(2x+2y-z)\left[(y-z)^2(z-x)^2 + (x-y)^2(z-x)^2 + (x-y)^2(y-z)^2\right]}{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2} \ge 0.$$

Ta chỉ cần xét trường hợp $z = 0$. Ta có:

$$F(x,y,0) = xy\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Đặt $y = ax$ với $a > 0$ và $a \ne 1$. Ta cần chứng minh:

$$F(x,ax,0) = \frac{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1}{a(a-1)^2} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(a + \frac{1}{a} - 3\right)^2 \ge 0: \text{luôn đúng.}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a+\frac{1}{a}-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ a=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy ta có:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right)\geq 4.$$

Dấu bằng BĐT xảy ra với các bộ số $(t;at;0), t>0$ với $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}; a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc các hoán vị.

Thí dụ 5. *Cho a, b, c không âm có ít nhất một số khác 0 thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng*

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)\leq 12(a+b)(b+c)(c+a) \quad (*).$$

Phân tích.

- Để ý rằng dấu bằng không xảy ra khi $a=b=c$.
- Xét trường hợp $c=0$, khi đó ta có bất đẳng thức:

$$(a^3+b^3)a^3b^3\leq 12(a+b)ab$$

$$\Rightarrow (a^2-ab+b^2)a^2b^2\leq 12 \Leftrightarrow (9-3ab)a^2b^2\leq 12.$$

Đặt $t=ab$. Ta có: $3t^3-9t^2+12\geq 0$

$$\Leftrightarrow 3(t-2)^2(t+1)\geq 0: \text{ luôn đúng.}$$

- Từ đó ta sẽ vận dụng phương pháp dồn biến ra biên.

Lời giải. Dễ thấy nếu $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ thì BĐT(*) luôn đúng. Xét $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$.

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\leq 12$$

Đặt $F(a,b,c)=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$.

Khi đó: $F(a+c,b,0)=\left[(a+c)^2-(a+c)b+b^2\right](a+c)^2b^2$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$, suy ra: $(a+c)^2-(a+c)b+b^2$

$$=a^2-ab+b^2+(2ac+c^2-bc)\geq a^2-ab+b^2;$$

$$b^2\geq b^2-bc+c^2;$$

$$(c+a)^2\geq c^2-ca+a^2.$$

Suy ra: $\left[(a+c)^2-(a+c)b+b^2\right](a+c)^2b^2$

$$\geq (a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$

hay $F(a,b,c)\leq F(a+c,b,0)$.

Ta chỉ cần chứng minh (*) đúng trong trường hợp $c=0$, tức là:

$$(a^2-ab+b^2)a^2b^2\leq 12 \Leftrightarrow (9-3ab)a^2b^2\leq 12.$$

Đặt $t=ab$, ta có: $3t^3-9t^2+12\geq 0$

$$\Leftrightarrow 3(t-2)^2(t+1)\geq 0: \text{ luôn đúng.}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} ab=2 \\ a+b=3 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=1, c=0 \text{ và các hoán vị.}$$

Thí dụ 6. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng*

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)\leq 36(ab+bc+ca) \quad (*).$$

Phân tích.

- Để ý rằng dấu bằng không xảy ra khi $a=b=c$.
- Xét trường hợp $c=0$, khi đó ta có BĐT: $(a^3+b^3)a^3b^3\leq 36ab$. Đến bước này ta thấy dấu bằng cũng không xảy ra khi $a=b$. Tuy nhiên:

$$(a^3+b^3)a^3b^3\leq 36ab \Leftrightarrow (27-9ab)a^2b^2\leq 36.$$

- Từ đó ta vận dụng phương pháp dồn biến "đẩy ra biên" với cách đặt $t=a$, $s=b+c$. Ta cần chứng minh $F(a,b,c)\geq F(t,s,0)$, với

$$F(a,b,c)=(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)-36(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$. Đặt

$$F(a,b,c)=(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)-36(ab+bc+ca).$$

Khi đó:

$$F(a,b+c,0)=(a^3+(b+c)^3)a^3(b+c)^3-36a(b+c).$$

Ta cần chứng minh $F(a,b,c)\leq F(a,b+c,0)$.

Ta có: $a^3+b^3+c^3\leq a^3+(b+c)^3$ (1) và

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\leq a^3b^3+a^3c^3+c^3a^3$$

$$\leq (a^3b^3+a^3b^2c+c^3a^3)+2a^3b^2c+3a^3bc^2$$

$$=a^3(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)=a^3(b+c)^3 \quad (2);$$

Mặt khác: $36(ab+bc+ca)\geq 36a(b+c)$

$$\Leftrightarrow -36(ab+bc+ca)\leq -36a(b+c) \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $F(a,b,c)\leq F(a,b+c,0)$.

Xét $c=0$, từ (*) ta có:

$$(a^3+b^3)a^2b^2\leq 36 \text{ với } a+b=3.$$

Đặt $t = ab$, khi đó $0 \le t \le \frac{9}{4}$, BĐT trở thành

$$t^2(27-9t) \le 36 \Leftrightarrow t^3 + 4 \ge 3t^2 \ (**).$$

Để chứng minh (**) chúng ta có nhiều cách

Cách 1 (Biến đổi tương đương).

$t^3 - 3t^2 + 4 \ge 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t+1) \ge 0$ (luôn đúng)

Dấu bằng xảy ra khi t = 2

Cách 2 (Sử dụng BĐT Cauchy). Ta có:

$$t^3 + 4 = \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{2} + 4 \ge 3\sqrt[3]{\frac{t^3}{2}.\frac{t^3}{2}.4} = 3t^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

Cách 3 (Sử dụng đạo hàm).

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4$ với $0 \le t \le \frac{9}{4}$, lập BBT của hàm số $f(t)$ trên $\left[0;\frac{9}{4}\right]$. Ta có $f(t) \ge f(2) = 0$.

Dấu bằng của BĐT(*) xảy ra khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ ab = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 0 \text{ và các hoán vị.}$$

4. KẾT LUẬN

Phương pháp dồn biến đã được một số tác giả trình bày trong bài viết của mình như *Phan Thành Việt, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Kim Hùng, Đinh Ngọc An, ...* Với các bài viết này các tác giả khai thác một số thí dụ cơ sở minh họa cho phương pháp. Ở bài viết này chúng tôi đã trình bày chuyên sâu theo một vấn đề, đó là sử dụng phương pháp dồn biến cho bất đẳng thức ba biến. Các bài toán đưa ra đều có những phân tích, nhận xét để định hướng phương pháp giải. Các bài toán trình bày trong bài viết là những đề từ những cuộc thi chọn HSG cấp Tỉnh, Quốc gia, Khu vực và Olympic Quốc tế, một số bài toán được sưu tầm hoặc được sáng tác.

Để thành thạo phương pháp, bạn đọc có thể làm các bài tập đề nghị sau

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. (A – 2011). Cho x, y, z là 3 số thực thuộc $[1;4]$ và $x \ge y; x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Bài 2. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(b^2 + bc + c^2\right)\left(c^2 + ca + a^2\right) \le 3.$$

Bài 3. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{3+2^x} + \sqrt{3+2^y} + \sqrt{3+2^z} \ge 6$.

Bài 4. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3a^3 + a + 2b + 3c.$$

Bài 5. Cho x, y, z không âm và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge \frac{1}{4}$.

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

Bài 7. Cho ba số thực dương tùy ý x, y, z. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Bài 8. Cho ba số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của $P = \frac{(a+b+c)^6}{ab^2c^3}$.

Bài 9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \le \frac{9}{2}.$$

Bài 10. Cho a, b, c không âm và thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \ge \frac{5}{2}.$$

****

THÔNG BÁO

Hiện nay do giá giấy và công in tăng cao, để có thể tiếp tục phục vụ bạn đọc, được sự đồng ý của Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục, từ tháng 9/2021 tờ ***Toán học và Tuổi trẻ*** xin được điều chỉnh giá bìa:

Từ **15000 đồng/1 số** thành **18000 đồng/1 số**.

Vậy Tòa soạn ***Toán học và Tuổi trẻ*** thông báo để bạn đọc được biết. Rất mong bạn đọc tiếp tục đọc, viết bài ủng hộ Tạp chí.

Tạp chí trân trọng cám ơn.

BBT

BÀI

PROBLEM. *Show, by induction, that*

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} \quad (1),$$

where n is an arbitrary positive integer.

Solution. For $n=1$, it is clear that (1) holds. Both sides are equal to 1.

Suppose that (1) holds for $n=k$, i.e.

$$1^2-2^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} \quad (2).$$

We need to show that (1) holds for $n=k+1$.

Consider

$$S=1^2-2^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2.$$

From (2), we have

$$S=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2.$$

****

BÀI DỊCH SỐ 69

BÀI TOÁN. *Có 15 điểm được đánh dấu trên một đường tròn. Kẻ tất cả các dây cung của đường tròn nối bởi hai điểm bất kỳ trong số các điểm đã cho. Một cặp dây cung được gọi là " tự do" nếu hai dây cung này không cắt nhau và không có điểm đầu mút chung. Tìm số cặp dây cung "tự do".*

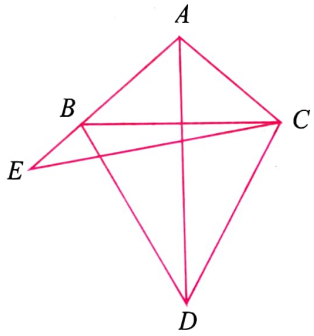
(**Chú ý**: Đây là một bài toán trong kỳ thi kiểm tra đầu vào Đại học ở Singapore).

Lời giải. Ta đếm số tứ giác từ 15 điểm đã đánh dấu trên đường tròn trước. Với mỗi tứ giác sẽ có hai cặp dây cung "tự do", đó là hai cặp cạnh đối diện của tứ giác này.

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 52. *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 100^0$. Trên tia AB lấy điểm E sao cho AE = BC. Tính số đo $\widehat{AEC}$.*

Lời giải. *Cách 1.* Dựng tam giác đều BCD sao cho D và A nằm khác phía bờ là đường thẳng BC. Khi đó:



$$\begin{cases} \widehat{ACD} = 100^0 \\ CD = CB = AE \end{cases}$$

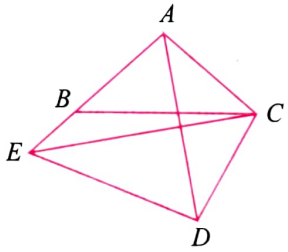
$\Rightarrow \Delta EAC = \Delta DCA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ADC}$.

Mặt khác $\Delta DBA = \Delta DCA$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 30^0$. Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 2. Dựng tam giác đều AED sao cho D và C nằm cùng phía bờ là đường thẳng AB. Khi đó:

$$\begin{cases} \widehat{CAD} = 40^0 \\ AD = AE = BC \end{cases}$$



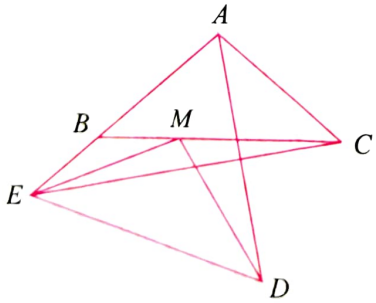
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = CD$

$\Rightarrow \Delta CAE = \Delta CDE$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{CED} = 30^0$. Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 3.



Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BE$. Dựng tam giác đều MCD sao cho D và A nằm hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC.

Khi đó: $\begin{cases} \widehat{ACD} = 100^0 \\ CD = CM = CA \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta CAD$ (c.g.c)

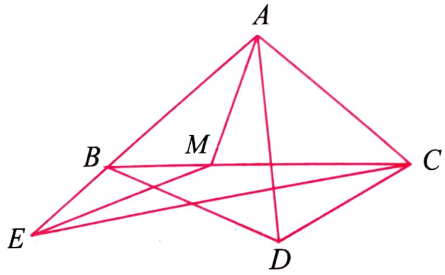
$\Rightarrow AD = BC = AE \Rightarrow \Delta AED$ cân tại A.

Lại có $\widehat{CAD} = 40^0 \Rightarrow \widehat{EAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta AED$ đều.

$\Rightarrow \Delta CAE = \Delta CDE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{CED} = 30^0$.

Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 4.



Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BE$. Dựng tam giác đều ABD sao cho D và C nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB. Khi đó:

$$\begin{cases} \widehat{CAD} = 40^0;\ \widehat{DBC} = 20^0 \\ AD = BD = BA = AC = CM \end{cases}.$$

Ta có:

ΔACM cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAM} = 70^0 \Rightarrow \widehat{MAE} = 30^0$.

ΔACD cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACD} = 70^0 \Rightarrow \widehat{DCB} = 30^0$.

Lại có: ΔBEM cân tại $B \Rightarrow \widehat{BEM} = \dfrac{\widehat{ABM}}{2} = 20^0$

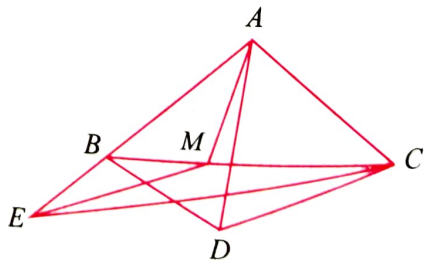
$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta DCB$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = DB = MC$

$\Rightarrow \Delta MEC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEC} = \dfrac{\widehat{BME}}{2} = 10^0$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{AEM} + \widehat{MEC} = 30^0$.

Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 5.



Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BE$. Dựng tam giác đều ACD sao cho D và B nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC.

Khi đó: $\begin{cases} \widehat{BAD} = 40^0;\ \widehat{DCB} = 20^0 \\ DA = DC = AC = CM = AB \end{cases}$.

Ta có:

ΔACM cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAM} = 70^0 \Rightarrow \widehat{MAE} = 30^0$.

ΔABD cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABD} = 70^0 \Rightarrow \widehat{DBC} = 30^0$.

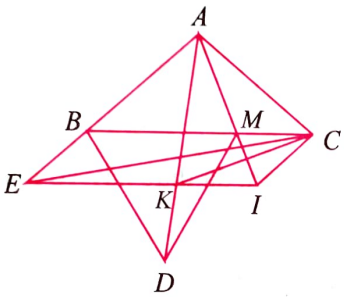
Lại có: ΔBEM cân tại $B \Rightarrow \widehat{BEM} = \dfrac{\widehat{ABM}}{2} = 20^0$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta DBC$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = DC = MC$

$\Rightarrow \Delta MEC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEC} = \dfrac{\widehat{BME}}{2} = 10^0$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{AEM} + \widehat{MEC} = 30^0$. Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 6. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Dựng tam giác đều BMD sao cho B và D nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC. Đường thẳng qua C và song song với AB cắt tia AM ở I. Khi đó:



$$\begin{cases} \widehat{DBA} = 100^0 \\ DB = BM = AB = AC \end{cases}.$$

Ta có: ΔABD cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA} = 40^0$,

$\widehat{ICB} = \widehat{CBA} = 40^0;\ \widehat{IMC} = \widehat{AMB} = 70^0$

$\Rightarrow \Delta CMI$ cân tại $C \Rightarrow CI // = BE$.

Do đó $EBCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{IEB} = 40^0$.

Tia AD cắt EI ở K, suy ra: ΔKEA cân tại K

$\Rightarrow \Delta KAE = \Delta ABC$ (g.c.g)

$\Rightarrow KE = KA = AB = AC = BM$

$\Rightarrow KI = CM = IC \Rightarrow \widehat{IKC} = 20^0$.

Lại có: $\widehat{KAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta AKC$ đều

$\Rightarrow KA = KC \Rightarrow KE = KC$

$\Rightarrow \Delta EKC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KEC} = \dfrac{\widehat{IKC}}{2} = 10^0$

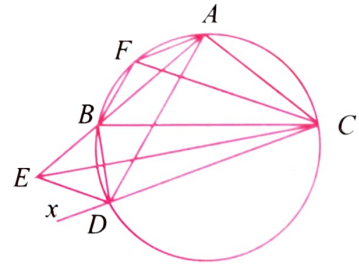
$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{AEI} - \widehat{IEC} = 30^0$. Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

Cách 7. Kẻ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = 20^0$. Trên tia Cx lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Suy ra:

$\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 80^0 \Rightarrow \widehat{EBD} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{ACD} = 60^0 \Rightarrow$ tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (Ω) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 20^0$.

Tia phân giác $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (Ω) ở F. Khi đó:



$FA = FB = BD$

và $\widehat{FAB} = \widehat{FCB} = 20^0$

$\Rightarrow \widehat{FAC} = 120^0$

$\Rightarrow \Delta FAC = \Delta DBA$ (c.g.c) $\Rightarrow FC = DA$

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta CBF$ (c.g.c)

$\Rightarrow ED = BF = BD \Rightarrow \Delta EBD$ đều

$\Rightarrow EB = ED;\ \widehat{BED} = 60^0$. Lại có $\Delta EBC = \Delta EDC$ (c.c.c) nên $\widehat{BEC} = 30^0$. Vậy $\widehat{AEC} = 30^0$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Nhận xét. Bạn *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao, **Phú Thọ** đóng góp 1 lời giải tương tự cách 2 của bạn *Đoàn Cát Nhơn*; bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đưa ra một cách giải theo hướng sử dụng định lý hàm số sin cho ΔAEC; Bạn *Nguyễn Hồng Gấm*, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị** cũng đưa ra 8 cách giải cho bài toán này trong đó đa số như các cách giải đã nêu. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 54 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.10.2021.

BÀI TOÁN 54. *Cho x là số thực thỏa mãn $|x| < 1$ và $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng*

$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

BÀI TOÁN 60 (Bài 3, 43rd IMO, 2002). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m; n) với m, n ≥ 3 để tồn tại vô hạn các số nguyên dương x sao cho* $\frac{x^m + x - 1}{x^n + x^2 - 1}$ *là một số nguyên.*

Lời giải. Cách 1. Hiển nhiên $m > n$. Gọi $q(x)$, $r(x)$ là các đa thức có hệ số nguyên và $\deg(r(x)) < n$ sao cho: $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1) + r(x)$.

Khi đó $x^n + x^2 - 1$ chia hết $r(x)$ với vô hạn các số nguyên dương x. Nhưng với x đủ lớn thì $x^n + x^2 - 1 > r(x)$ (vì $\deg(r(x)) < n$). Do đó $r(x) = 0$. Vậy

$$x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1),$$

ở đây $q(x) = x^{m-n} + a_{m-n-1}x^{m-n-1} + \ldots + a_0$.

Ta có: $x^m + x - 1 = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1)$

$$+(1-x)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1),$$

do đó $x^n + x^2 - 1$ phải chia hết

$$x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1.$$

Vì vậy, đặc biệt, với $m \geq 2n - 1$ thì $x^n + x^2 - 1$ phải chia hết

$$(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1) - x^{m-2n+1}(x^n + x^2 - 1)$$

$$= x^{m-n} - x^{m-2n+3} + x^{m-2n+1} - 1 \qquad (*).$$

Ta có thể viết (*) thành

$$x^{m-2n+3}(x^{n-3} - 1) + (x^{m-(2n-1)} - 1),$$

biểu thức này âm với mọi $x \in (0;1)$, trừ khi $n - 3 = 0$ và $m - (2n - 1) = 0$. Như vậy, trừ khi $n = 3$, $m = 5$ thì (*) không có nghiệm thuộc khoảng (0; 1). Thế nhưng $x^n + x^2 - 1$ (ước của (*)) lại có nghiệm trong khoảng (0; 1) bởi vì nó nhận giá trị -1 tại $x = 0$ và 1 tại $x = 1$. Vậy ta phải có $m = 5$, $n = 3$. Dễ thấy các giá trị $m = 5$, $n = 3$ thỏa mãn đầu bài.

Cách 2. Tiến hành như cách 1 cho tới (*).

Nếu $m = 2n - 1$ thì (*) trở thành: $x^{n-1} - x^2$.

Lúc đó nếu $n = 3$ thì (*) = 0 và ta tìm được $m = 5$, $n = 3$ thỏa mãn đề bài.

Khi $n > 3$, ta viết: $x^{n-1} - x^2 = x^2(x^{n-3} - 1)$.

Đa thức này không có nghiệm trong khoảng (0; 1) trong khi $x^n + x^2 - 1$ lại có nghiệm trong khoảng (0; 1), do đó $x^n + x^2 - 1$ không thể là ước của (*).

Nếu $m > 2n - 1$, thì (*) có thể viết thành:

$$(x-1)\left(x^{m-n+1} + x^{m-n-2} + \ldots + x^{m-2n+3} + \right.$$

$$\left. + x^{m-2n} + x^{m-2n+1} + \ldots + 1\right).$$

Như trên, đa thức này vô nghiệm trong khoảng (0; 1) mà $x^n + x^2 - 1$ lại có nghiệm trong khoảng (0; 1), nên $x^n + x^2 - 1$ không thể là ước của (*).

Tóm lại ta chỉ tìm được $m = 5$, $n = 3$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Các bạn: *Trần Văn Quân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** và bạn *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** cũng đưa ra cách giải tương tự như cách giải trên. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.10.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 62. *Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho ab + 1 chia hết* $a^2 + b^2$. *Chứng minh rằng là* $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ *một số chính phương.*

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*

GIẢI ĐÁP: SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM $f(|x|)$

(Đề đăng trên TH&TT số 527, tháng 5 năm 2021)

Phân tích. Bạn *Ánh* đã ngộ nhận rằng đạo hàm của $f(|x|)$ là $f'(|x|)$. Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, hàm $u(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(c;d)$ và $u(x)\in(a;b), \forall x\in(c;d)$, thì hàm $f(u(x))$ có đạo hàm trên khoảng $(c;d)$ là

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)).u'(x), \forall x\in(c;d).$$

Như vậy đạo hàm của $f(|x|)$ không phải là $f'(|x|)$.

Lời giải đúng. Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\|x\|)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là 3. Chọn đáp án **B.**

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện đúng sai lầm và đã đưa ra lời giải chính xác. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

LỜI GIẢI CÓ THIẾU SÓT?

Trong giờ luyện tập thầy giáo ra đề bài như sau:

Bài toán. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình* $\begin{cases} xy-x+y=2 \\ m(x+y)-xy+1=0 \end{cases}$ *có nghiệm duy nhất.*

Sau một lúc giải, nhiều học sinh có kết quả $m=1;\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Thầy giáo gọi một học sinh lên bảng trình bày lời giải. Sau đây là lời giải được học sinh đó trình bày trên bảng:

Ta có:

$$\begin{cases} xy-x+y=2 \\ m(x+y)-xy+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+1)=x+2 & (1) \\ m(x+y)-xy+1=0 & (2) \end{cases}.$$

Dễ thấy $x=-1$ không thỏa mãn (1) do đó:

$$(1) \Leftrightarrow y=\frac{x+2}{x+1}.$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (m-1)x^2+(2m-1)x+2m+1=0.$$

Vì y xác định duy nhất theo (1) bởi x nên hệ có nghiệm duy nhất khi (2) có nghiệm duy nhất $x\neq -1$.

Với $m=1$ ta có $(2)\Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;\frac{1}{2})$

$\Rightarrow m=1$ là giá trị cần tìm.

Với $m\neq 1$, phương trình (2) là phương trình bậc hai. Hệ có nghiệm duy nhất khi (2) có nghiệm kép $x\neq -1$. Điều đó xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta=-4m^2+5=0 \\ -\frac{2m-1}{2(m-1)}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ -1\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m=1;\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Sau khi xem lời giải thầy giáo kết luận lời giải có thiếu sót. Theo bạn lời giải có thiếu sót ở đâu?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 531 (9.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

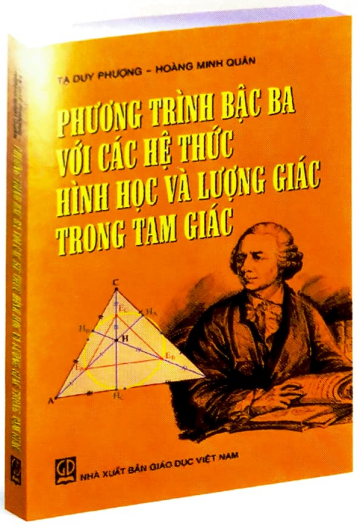
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

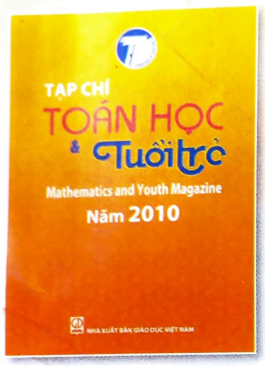
- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Điện thoại Fax: phát hành: 024. 35121606

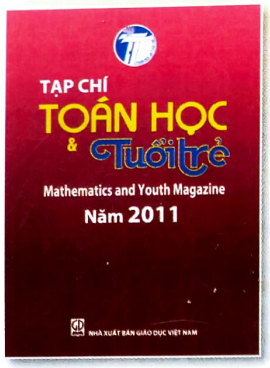
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

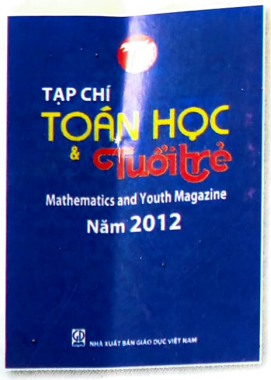
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

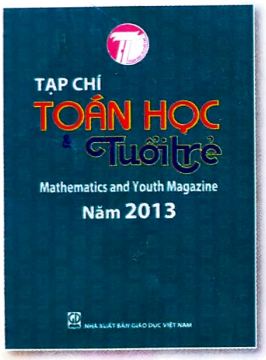
Bộ đóng tập

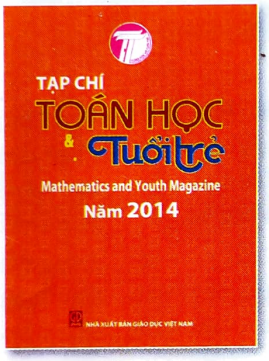
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

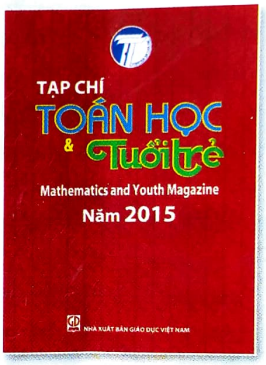


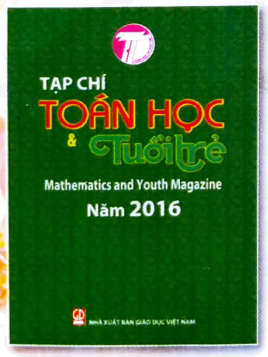


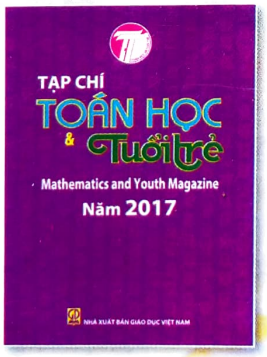


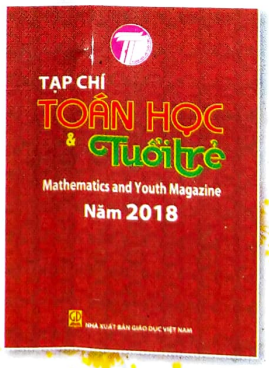


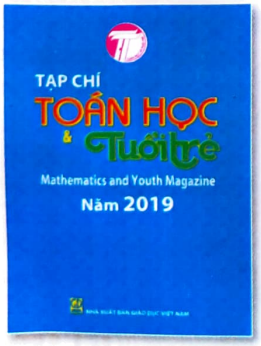


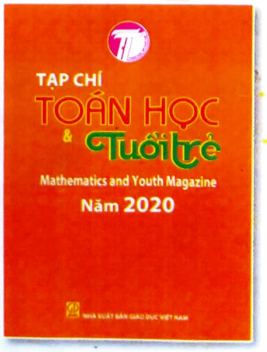












Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8B19M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2021

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng

Ở đây, trường hợp (2) luôn luôn đưa được về trường hợp (3) nhờ biểu diễn.

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_{m-1}(a_m-1)999... \text{ (tại sao?)} \quad (4).$$

Do đó dạng thập phân của mọi số hữu tỷ đều có tính chất tuần hoàn. Chẳng hạn, số

$$0,2365 = 0,2365000... = 0,2364999...$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng: *Mọi PSTPVHTH $\alpha,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n)$ đều là số hữu tỷ xác định được theo công thức*

$$R = \alpha, a_1a_2\ldots a_m + \frac{b_1b_2\ldots b_n}{\underbrace{99...9}_{n}}10^{-m} \qquad (5)$$

trong đó $b_1b_2...b_n$ và $\underbrace{99...9}_{n}$ đều là những số nguyên với các chữ số tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$ và $\underbrace{9,9,...,9}_{n}$. Chẳng hạn, áp dụng (5) ta có:

1) $1,237(06) = 1,237 + 0,000\,(06)$

$$= 1,237 + \frac{06}{99}10^{-3} = 1,237 + \frac{6}{99000}$$

2) $0,2(371) = \dfrac{2,(371)}{10} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{371}{990}10^{-1}$

$$= \frac{2}{10} + \frac{371}{9990}.$$

Tồn tại những cách khác nhau để định nghĩa số thực. Ta sẽ sử dụng phương pháp biểu diễn số thực dưới dạng *phân số thập phân vô hạn.* (

Các PSTPVHTH không vét hết tập hợp mọ PSTPVH có thể có. Điều đó có nghĩa là tồn tại cá PSTPVH không tuần hoàn. Chẳng hạn, xé PSTPVH a = 0,123...101112... được thành lậ theo quy tắc: sau dấu phẩy ta viết liên tiếp mọi s tự nhiên 1, 2, ..., n, n+1, ... Dựa vào cấu trúc củ số a và bằng phương pháp phản chứng có th chứng minh ngay rằng đó là phân số thập phân v hạn không tuần hoàn. *Những phân số thập phâ vô hạn không tuần hoàn được gọi là số vô tỷ.* Tậ hợp các số vô tỷ được ký hiệu bằng chữ "i" in ha nét $\mathbb{I}$. Như vậy $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, trong đó c

$\mathbb{Q}$ và $\mathbb{I}$ đều *trù mật khắp nơi* trong $\mathbb{R}$.

Một nét đặc trưng của tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là tín liên tục của nó (*continuum số*). Nhờ đó mà ngoa bốn phép tính thông thường thỏa mãn các địn luật của số học người ta còn đưa vào được phé toán cơ bản của giải tích là *phép qua giới hạn.*

Từ đó, dựa vào điều khẳng định:

Nhờ quy tắc dấu nên ở đây ta chỉ cần trình bày cho $\frac{p}{q}$, $p > 0, q > 0$ là đủ.

Trong số học người ta đã chứng minh rằng kết quả của phép chia "*kéo dài*" (1) là khai triển thập phân một trong hai dạng sau đây. Hoặc đó là PSTPHH.

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_m = \alpha, a_1a_2...a_m000..., a_m > 0 \quad (2)$$

hoặc đó là PSTPVHTH

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_mb_1b_2...b_nb_1b_2...b_n...$$

$$= \alpha,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n), n < q \quad (3).$$

Ở đây, trường hợp (2) luôn luôn đưa được về trường hợp (3) nhờ biểu diễn.

$$\frac{p}{q} = \alpha,a_1a_2...a_{m-1}(a_m-1)999... \text{ (tại sao?)} \quad (4).$$

Do đó dạng thập phân của mọi số hữu tỷ đều có tính chất tuần hoàn. Chẳng hạn, số

$$0,2365 = 0,2365000... = 0,2364999...$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng: *Mọi PSTPVHTH* $\alpha,a_1a_2...a_m(b_1b_2...b_n)$ *đều là số hữu tỷ xác định được theo công thức*

$$R = \alpha,a_1a_2...a_m + \frac{b_1b_2...b_n}{\underbrace{99...9}_{n}}10^{-m} \quad (5)$$

trong đó $b_1b_2...b_n$ và $\underbrace{99...9}_{n}$ đều là những số nguyên với các chữ số tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$ và $\underbrace{9,9,...,9}_{n}$. Chẳng hạn, áp dụng (5) ta có:

1) $1,237(06) = 1,237 + 0,000\,(06)$

$$= 1,237 + \frac{06}{99}10^{-3} = 1,237 + \frac{6}{99000}$$

2) $0,2(371) = \frac{2,(371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{990}10^{-1}$

$$= \frac{2}{10} + \frac{371}{9990}.$$

3. MỞ RỘNG TIẾP ĐẾN HỆ THỐNG SỐ THỰC

Hệ thống số hữu tỷ hoàn toàn không giải quyết được bài toán thực hành đo các đoạn thẳng bởi vì tồn tại những đoạn thẳng với độ dài không biểu thị được bằng số hữu tỷ. Chẳng hạn, đường chéo hình vuông cạnh bằng đơn vị là một đoạn thẳng như vậy. (2)

Vì lý do này, bên cạnh các số hữu tỷ cần đưa thêm vào những số khác: đó là *số vô tỷ*. Tập hợp mọi số hữu tỷ và số vô tỷ được gọi là *tập hợp số thực* và được ký hiệu là $\mathbb{R}$ trong đó $\mathbb{R}$ là chữ cái đầu của từ *Realis* có nghĩa là thực. (3)

Tồn tại những cách khác nhau để định nghĩa số thực. Ta sẽ sử dụng phương pháp biểu diễn số thực dưới dạng *phân số thập phân vô hạn*. (4)

Các PSTPVHTH không vét hết tập hợp mọi PSTPVH có thể có. Điều đó có nghĩa là tồn tại các PSTPVH không tuần hoàn. Chẳng hạn, xét PSTPVH $a = 0,123...101112...$ được thành lập theo quy tắc: sau dấu phẩy ta viết liên tiếp mọi số tự nhiên 1, 2, ..., n, n+1, ... Dựa vào cấu trúc của số a và bằng phương pháp phản chứng có thể chứng minh ngay rằng đó là phân số thập phân vô hạn không tuần hoàn. *Những phân số thập phân vô hạn không tuần hoàn được gọi là số vô tỷ*. Tập hợp các số vô tỷ được ký hiệu bằng chữ "i" in hai nét $\mathbb{I}$. Như vậy $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, trong đó cả $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{I}$ đều *trù mật khắp nơi* trong $\mathbb{R}$.

Một nét đặc trưng của tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là tính liên tục của nó (*continuum số*). Nhờ đó mà ngoài bốn phép tính thông thường thỏa mãn các định luật của số học người ta còn đưa vào được phép toán cơ bản của giải tích là *phép qua giới hạn*.

Từ đó, dựa vào điều khẳng định:

Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Đình Lê Vũ*, 9A2, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/527. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$8(2-x)(2-y)(2-z)\ge(x+yz)(y+xz)(z+xy).$$

Lời giải. Tất cả các bất đẳng thức được dùng trong lời giải này được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực không âm. Đặt: $a=|x|, b=|y|$, $c=|z|$, ta có:

• $2(2-y)(2-z)=8-4(y+z)+2yz$

$$=(2-y-z)^2+4-(y+z)^2+2yz$$
$$\ge 4-y^2-z^2 \quad (1).$$

• $|(y+zx)(z+xy)|\le(b+ca)(c+ab)$

$$\le\frac{(b+ca+c+ab)^2}{4}=\frac{(b+c)^2(1+a)^2}{4}$$
$$\le(b^2+c^2)(1+a^2)=(3-a^2)(1+a^2).$$

• $|x+yz|\le a+bc\le a+\frac{b^2+c^2}{2}=a+\frac{3-a^2}{2}=\frac{4-(a-1)^2}{2}\le 2.$

Do đó:

$$(x+yz)(y+zx)(z+xy)\le|x+yz||(y+zx)(z+xy)|$$
$$\le 2(3-a^2)(1+a^2)=2(3-x^2)(1+x^2) \quad (2).$$

Chú ý rằng $x^2+y^2+z^2=3$ nên $x^2\le 3$, suy ra $x<2$. Bởi vậy kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$$8(2-x)(2-y)(2-z)\ge 4(2-x)(1+x^2)$$
$$=2\left[3+(x-1)^2-x^2\right](1+x^2)$$
$$\ge 2(3-x^2)(1+x^2)$$
$$\ge(x+yz)(y+zx)(z+xy).$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức cơ bản, hay. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội**: *Đào Quang Anh*, 8E1, THCS Everest, Hoàng Quốc Việt, Quận Bắc Từ Liêm; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Yên**: *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường phổ thông Duy Tân; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/527 *Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $A\le B\le C\le 90^0$ và*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}+\dfrac{2}{\sin C}\ge 6, & (a)\\[2mm] \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\cos A\ge\cos(B-C)-\sin B & (b)\end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C\le\frac{13}{8}$.

Lời giải (của tác giả *Nguyễn Văn Thông*)

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$x^4+y^4\ge\frac{(x+y)^4}{8} \quad (1)$$

và $$x^4+y^4+z^4\ge\frac{(x+y+z)^4}{27} \quad (2).$$

Từ giả thiết (*a*) ta có:

$$\frac{1}{2\sin A}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge 3.$$

Áp dụng (2) ta được:

$$X:=\frac{1}{16\sin^4 A}+\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}$$
$$\ge\frac{\left(\dfrac{1}{2\sin A}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\dfrac{1}{2\sin C}\right)^4}{27}\ge\frac{3^4}{27}=3 \quad (3).$$

Từ điều kiện (*b*) ta có:

$$(b)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\sin B\ge\cos(B-C)+\cos A$$
$$=2\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}=2\sin C\sin B$$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge 2$. Áp dụng (1) ta được:

$$Y:=\frac{9}{16\sin^4 B}+\frac{1}{\sin^4 C}\ge\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)^4}{8}\ge\frac{2^4}{8}=2 \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$X\sin^4 A+(\sin^4 B-\sin^4 A)Y+(\sin^4 C-\sin^4 B)\frac{1}{\sin^4 C}$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 72

PROBLEM. *Show, by induction, that*

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2} \quad (1),$$

where n is an arbitrary positive integer.

Solution. For $n=1$, it is clear that (1) holds. Both sides are equal to 1.

Suppose that (1) holds for $n=k$, i.e.

$$1^2-2^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} \quad (2).$$

We need to show that (1) holds for $n=k+1$.

Consider

$$S=1^2-2^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2.$$

From (2), we have

$$S=(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2.$$

Hence

$$S=(-1)^{k+1}(k+1)\left(\frac{k}{2}-(k+1)\right)$$

$$=(-1)^{k+1}(k+1)\left(\frac{k-2k-2}{2}\right),$$

or $S=(-1)^{k+2}\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

We have shown that (1) also holds for $n=k+1$. By induction principle, we are done.

Question: *Can you find another proof without using induction ?*

TỪ VỰNG

induction	*: qui nạp*
principle	*: nguyên lý*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 69

BÀI TOÁN. *Có 15 điểm được đánh dấu trên một đường tròn. Kẻ tất cả các dây cung của đường tròn nối bởi hai điểm bất kỳ trong số các điểm đã cho. Một cặp dây cung được gọi là " tự do" nếu hai dây cung này không cắt nhau và không có điểm đầu mút chung. Tìm số cặp dây cung "tự do".*

(**Chú ý**: Đây là một bài toán trong kỳ thi kiểm tra đầu vào Đại học ở Singapore).

Lời giải. Ta đếm số tứ giác từ 15 điểm đã đánh dấu trên đường tròn trước. Với mỗi tứ giác sẽ có hai cặp dây cung "tự do", đó là hai cặp cạnh đối diện của tứ giác này.

Do đó số cặp dây cung "tự do" cần tìm là $C_{15}^4\times 2$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Văn Ngọc Bình, Nguyễn Kỳ Nam, Trương Hồ Bảo Nhi*, 10 Toán 1, *Trần Duy Anh*, 10 Anh 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 11T1, *Lê Ngọc Cương, Trần Nữ Minh Thư*, 11T2, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)