TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 530
Tháng 8 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Harold Seymour Shapiro (1928 - 2021) là Giáo sư Toán học tại Học viện Công nghệ Hoàng gia ở Stockholm, Thụy Điển

CHƯƠNG TRÌNH 50.000 BỘ SÁCH GIÁO KHOA

"CÙNG TIẾP BƯỚC EM ĐẾN TRƯỜNG": GẦN 19.000 BỘ ĐÃ ĐẾN TAY HỌC SINH.

Từ nhiều năm nay, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) luôn coi việc thực hiện công tác xã hội, từ thiện, chung tay hỗ trợ học sinh (HS) có hoàn cảnh khó khăn là trách nhiệm, là nguyện vọng của toàn hệ thống. Trong năm học 2021-2022, phát huy truyền thống tương thân tương ái, NXBGDVN thực hiện Chương trình *"Cùng tiếp bước em đến trường"* trao tặng hơn 50.000 bộ sách giáo khoa (SGK) lớp 1, lớp 2 và lớp 6 cho HS có hoàn cảnh khó khăn, HS là con em thương binh, liệt sĩ trên cả nước. Tổng trị giá trên 10 tỉ đồng. Năm nay, do tình hình dịch bệnh Covid - 19 diễn biến hết sức phức tạp, việc vận chuyển sách đến các tỉnh/thành gặp nhiều khó khăn nhưng ngay từ tháng 5/2021, NXBGDVN đã chủ động làm việc với Sở Giáo dục & Đào tạo các địa phương, tổng hợp số lượng HS có hoàn cảnh khó khăn để gửi tặng SGK đến các em. Tính đến giữa tháng 7/2021, Chương trình *"Cùng tiếp bước em đến trường"* của NXBGDVN đã trao tặng 18.150 bộ SGK đến 23 tỉnh/thành: Bắc Kạn, Điện Biên, Hà Giang, Hải Phòng, Lạng Sơn, Phú Thọ, Quảng Ninh, Thái Nguyên, Tuyên Quang, Vĩnh Phúc, Yên Bái, Hưng Yên, Lào Cai, Lai Châu, Quảng Nam, Đà Nẵng, Bà Rịa - Vũng Tàu, Đồng Nai, Bình Thuận, Ninh Thuận, Long An, Đăk Nông, Lâm Đồng, Vĩnh Long, ... Trong thời gian tới, NXBGDVN tiếp tục phối hợp với các địa phương còn lại để trao tặng toàn bộ số sách tới các em HS có hoàn cảnh khó khăn trước khi năm học mới bắt đầu.

QUAN HỆ GIỮA CÁC ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Cho ΔABC nhọn nội tiếp nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AK, BD, CE của tam giác cắt nhau tại H. Khi đó sẽ có 6 tứ giác nội tiếp $ADHE, ABKD, ACKE, BCDE, BEHK, CDHK$.

Phát hiện thêm các tứ giác nội tiếp khác để giải các bài toán:

+ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

+ Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy.

+ Chứng minh các hệ thức, tính độ dài các cạnh và góc.

I. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

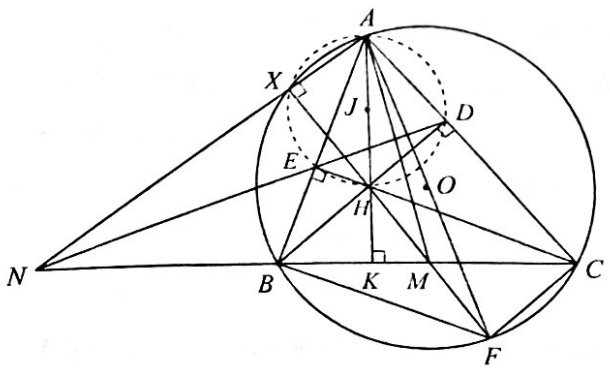
Bài 1.1. *Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ có các đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H, gọi N là giao điểm của DE và BC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $NH \perp AM$.*

Cách 1. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC, X là giao điểm thứ hai của AN với (O). Chứng minh rằng:

a) Năm điểm A, D, E, H, X cùng nằm trên một đường tròn.

b) $NH \perp AM$.

Lời giải.



a) Do A, B, C, X thuộc đường tròn (O), suy ra $NX.NA = NB.NC$. Có bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên đường tròn đường kính BC. Suy ra $NE.ND = NB.NC$. Do đó $NX.NA = NE.ND$. Suy ra bốn điểm A, D, E, X cùng nằm trên một đường tròn. Lại có A, D, E, H cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH. Do đó 5 điểm A, D, E, H, X cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

b) Ta có X thuộc đường tròn đường kính AH, nên $\widehat{AXH} = 90^0 \Rightarrow HX \perp AN$. Gọi XH cắt (O) tại điểm thứ hai F thì $\widehat{AXF} = 90^0$, nên AF là đường kính của đường tròn (O).

Suy ra $FC \perp AC$ mà $BH \perp AC$ suy ra $FC // BH$.

Chứng minh tương tự $FB // CH$. Do đó tứ giác $BHCF$ là hình bình hành, mà M là trung điểm BC. Suy ra X, H, M, F thẳng hàng.

Xét ΔAMN có AK, MX là các đường cao cắt nhau tại H, nên H là trực tâm của ΔAMN.

Suy ra $NH \perp AM$.

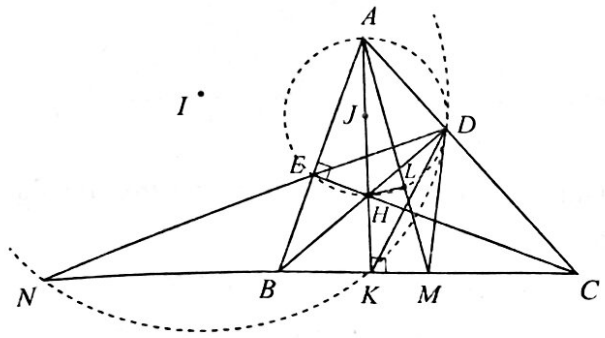
Cách 2. Gọi (J) và (I) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp ΔADE và ΔDKN.

Chứng minh rằng:

a) MD là tiếp tuyến chung của (J) và (I).

b) $NH \perp AM$.

Lời giải.



a) Có ΔBCD vuông tại D, trung tuyến DM. Suy ra $MD = MB$. Do đó ΔMBD cân tại M

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{DBM} = \widehat{CAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

$\Rightarrow MD$ là tiếp tuyến của đường tròn (J).

Ta có: $\widehat{MDC} = \widehat{MCD}$;

$\widehat{MDK} = \widehat{KDC} - \widehat{MDC} = \widehat{ABC} - \widehat{MDC}$ (1)

$\widehat{BND} = \widehat{ABC} - \widehat{BEN} = \widehat{ABC} - \widehat{MCD}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{BND}$. Suy ra MD là tiếp tuyến của đường tròn (I). Do đó MD là tiếp tuyến chung của (J) và (I).

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của AM với (J).

Từ MD là tiếp tuyến của (J) và (I), ta có:

$MD^2 = ML.MA = MK.MN \Rightarrow$ tứ giác $ALKN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ALN} = \widehat{AKN} = 90^0$ hay $NL \perp AM$..

Mà AH là đường kính của (J), nên $HL \perp AM$.

Do đó N, H, L thẳng hàng. Suy ra $NH \perp AM$.

Cách 3. Chứng minh rằng:

a) $NE.ND = NK.NM$;

b) $NH \perp AM$.

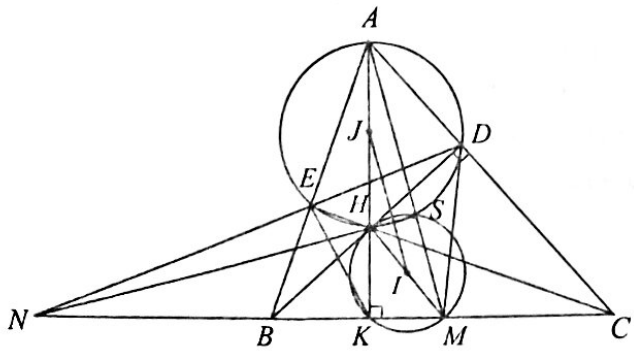
Lời giải. a) Ta có: $\widehat{EDM} = 180^0 - \widehat{ADE} - \widehat{CDM}$

$= 180^0 - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BKE}$, do đó $\widehat{EDM} = \widehat{BKE}$.

Suy ra tứ giác $KEDM$ nội tiếp (đường tròn Euler).

Khi đó ta có $NE.ND = NK.NM$ (1).



b) Gọi J, I lần lượt là tâm đường tròn đường kính AH và HM.

Gọi S_1 là giao điểm thứ hai của NH với đường tròn tâm (J). Khi đó $NH.NS_1 = NE.ND$ (2).

Gọi S_2 là giao điểm thứ hai của NH với đường tròn tâm (I). Khi đó $NH.NS_2 = NK.NM$ (3).

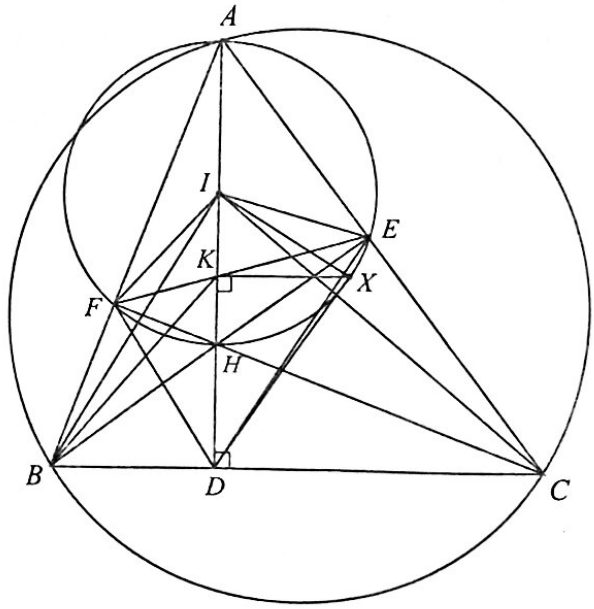
Từ (1), (2) và (3) suy ra $NH.NS_1 = NH.NS_2$ $\Leftrightarrow NS_1 = NS_2$. Vậy S_1 trùng S_2 (đặt là S). Mà $HS \perp IJ$, $IJ \parallel AM \Rightarrow HS \perp AM$ hay $NH \perp AM$.

Bài 1.2. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $(AB < AC)$. Các đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H. Gọi I là trung điểm AH, gọi K là giao điểm của EF và AH. Từ K vẽ đường thẳng vuông góc với AD cắt đường tròn ngoại tiếp ΔAEF tại X.*

a) *Chứng minh DX là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.*

b) *Chứng minh K là trực tâm của tam giác IBC.*

Lời giải. a)



Ta có tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I.

Từ các tứ giác $ACDF, CDHE$ nội tiếp ta chứng minh được: $\widehat{IDF} = \widehat{IDE} = \widehat{ECF}$. Ta có:

$\widehat{ECF} + \widehat{EAF} = 90^0 \Rightarrow 2.\widehat{ECF} + 2.\widehat{EAF} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{EDF} + \widehat{EIF} = 180^0$. Suy ra tứ giác $IEDF$ nội tiếp. Do đó $KE.KF = KI.KD = KH.KA$.

Lại có $KH.KA = (IH - IK)(IA + IK)$

$= IH^2 - IK^2 = IX^2 - IK^2 = KX^2$.

Suy ra $KX^2 = KI.KD$. Do đó ΔDXI vuông tại X.

Nên DX là tiếp tuyến của đường tròn (I).

b) Ta có: $DX^2 = DK.DI = DH.DA$.

Vì $\Delta DBA \backsim \Delta DHC$ (g.g) nên

$DH.DA = DB.DC \Rightarrow DK.DI = DB.DC \Leftrightarrow \dfrac{DK}{DC} = \dfrac{DB}{DI}$.

Suy ra $\Delta DBK \backsim \Delta DIC$ (c.g.c).

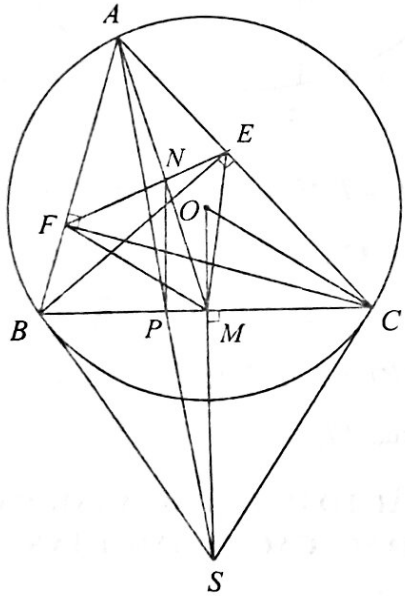
Do đó $\widehat{DBK} = \widehat{DIC}$, suy ra $BK \perp CI$. Xét ΔIBC có ID, BK là các đường cao. Suy ra K là trực tâm ΔIBC.

Bài 1.3. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$, gọi BE và CF là các đường cao của ΔABC. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S, gọi M là giao điểm của BC và OS.*

a) Chứng minh ΔAEM đồng dạng ΔABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

Lời giải.



a) Ta có $OS \perp BC$ tại M là trung điểm của BC.

Tam giác vuông EAB đồng dạng với tam giác vuông MBS (vì $\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{BM}$.

Lại có ΔBEC vuông tại E, EM là đường trung tuyến nên $BM = ME$. Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{ME}$ (1).

Có ΔBME cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MBE}$. Mặt khác

$$\widehat{SBM} + \widehat{ABE} = \widehat{EAF} + \widehat{ABE} = 90^0 = \widehat{AEB}$$

Suy ra

$\widehat{SBA} = \widehat{SBM} + \widehat{ABE} + \widehat{MBE} = \widehat{AEB} + \widehat{MEB} = \widehat{AEM}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$ (c.g.c).

b) $\Delta AEM \backsim \Delta ABS \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{EAN}, \widehat{AME} = \widehat{ASB}$.

Mà tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC, suy ra $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$. Suy ra $\Delta AEN \backsim \Delta ABP$ $\Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NE}{BP}$ (3). Tương tự: $\Delta MAF \backsim \Delta SAC$.

Do đó $\widehat{AMF} = \widehat{ASC}, \widehat{AME} = \widehat{ASB} \Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{BSC}$.

Lại có ΔMEF cân tại M, ΔSBC cân tại S. Suy ra $\widehat{SBP} = \widehat{MEN}$. ΔEMN và ΔBSP có: $\widehat{BSP} = \widehat{EMN}$,

$\widehat{SBP} = \widehat{MEN} \Rightarrow \Delta EMN \backsim \Delta BSP \Rightarrow \dfrac{NE}{BP} = \dfrac{NM}{PS}$ (4).

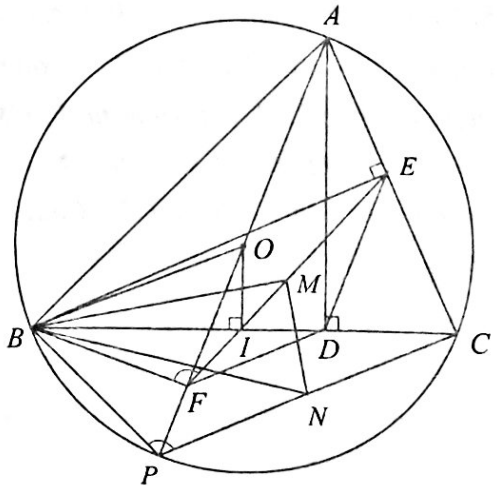
Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NM}{PS} \Rightarrow NP // MS$, mà $SM \perp BC \Rightarrow NP \perp BC$.

Bài 1.4. *Cho ΔABC có ba góc n[illegible] nội tiếp đường tròn (O) và $AB > AC$. Gọi AD, BE là các đường cao của ΔABC, F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO*

a) Chứng minh tứ giác $BEDF$ là hình thang cân và EF đi qua trung điểm của BC.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm EF và CP. Chứng minh $BM \perp MN$.

Lời giải.



a) • Từ giả thiết có A, B, D, E, F cùng nằm trên đường tròn đường kính AB. Tứ giác $ABFD$ nội tiếp nên

$$\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = \widehat{BAO} = \frac{180^0 - \widehat{AOB}}{2}$$

$$\widehat{BDF} = 90^0 - \widehat{ACB} = \widehat{EBC}.$$

Do đó $DF // BE$ nên $BEDF$ là hình thang. Lại có tứ giác $BEDF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $BEDF$ là hình thang cân.

• Gọi I là trung điểm BC, do ΔBEC vuông tại E nên $\widehat{BIE} = 2.\widehat{ACB}$ (1).

Do I là trung điểm BC nên $OI \perp BC$. Suy ra tứ giác $BOIF$ nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{BIF} = \widehat{BOF} = 180^0 - \widehat{AOB} = 180^0 - 2.\widehat{ACB} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BIE} + \widehat{BIF} = 180^0$.

Suy ra E, I, F thẳng hàng hay EF đi qua trung điểm I của BC.

b) Do các tứ giác $ABPC, ABFE$ nội tiếp nên ta có:

$$\widehat{BEF} = \widehat{BAF} = \widehat{BCP}; \widehat{BFE} = 180^0 - \widehat{BAC} = \widehat{BPC}.$$

Do đó ΔBFE đồng dạng ΔBPC (g.g).

Ta có: $\widehat{BEM} = \widehat{BCN}; \frac{BE}{BC} = \frac{EF}{CP} = \frac{EM}{CN}$. Suy ra $\Delta BEM \backsim \Delta BCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{CBN}$;

$\frac{BE}{BC} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{MBN}; \frac{BE}{BM} = \frac{BC}{BN}$.

Do đó $\Delta EBC \backsim \Delta MBN$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{BEC} = 90^0$. Do đó $BM \perp MN$.

Bài 1.5. *Cho ΔABC nhọn $(AC < BC)$ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt trung tuyến CM của ΔABC tại T. Trung tuyến CN của ΔCDE cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại T_1. Chứng minh AB là trung trực của TT_1.*

Lời giải. Gọi O là trung điểm của CH, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$. Từ ΔABD vuông tại D, trung tuyến DM, suy ra ΔMAD cân tại M. Do đó:

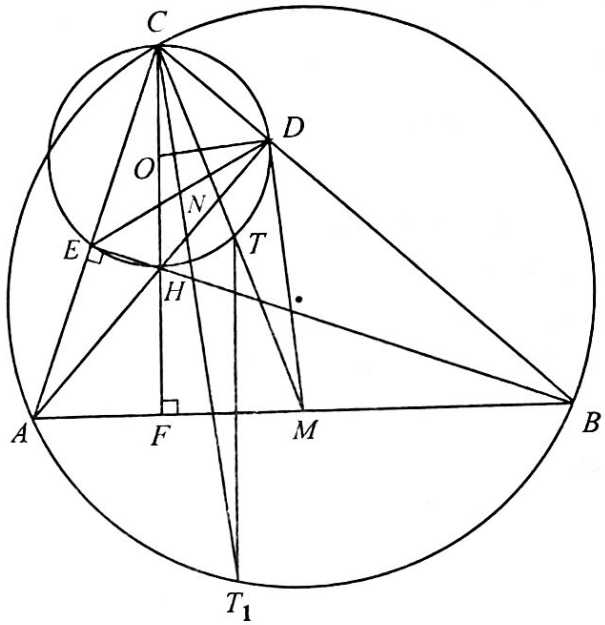
$$\widehat{MDA} = \widehat{MAD} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{DCH}.$$

Vậy MD là tiếp tuyến của (O).

Suy ra: $MA^2 = MD^2 = MT.MC \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MT}{MA}$

$\Rightarrow \Delta MAT \backsim \Delta MCA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAT} = \widehat{MCA}$ (1).

Lại có $\Delta CDE \backsim \Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{DN}{AM}$, $\widehat{CDN} = \widehat{CAB}$. Do đó $\Delta CDN \backsim \Delta CAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NCD} = \widehat{MCA}$ (2).



Lại có $\widehat{NCD} = \widehat{T_1AB}$ (góc nội tiếp) (3).

Từ (1), (2) và (3), ta có $\widehat{MAT} = \widehat{MAT_1}$.

Chứng minh tương tự có $\widehat{MBT} = \widehat{MBT_1}$.

Do đó $\Delta ABT = \Delta ABT_1$ (g.c.g). Suy ra AB là trung trực của TT_1.

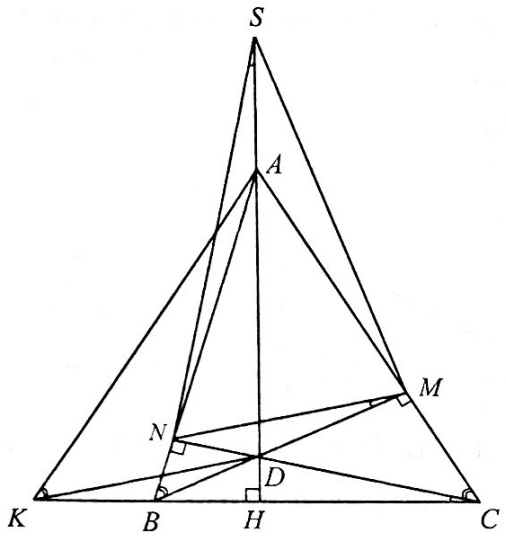
II. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI.

Bài 2.1. *Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm D không trùng với A (D không là trực tâm của ΔABC). Tia BD cắt AC tại M, tia CD cắt AB tại N. Đường thẳng vuông góc với BM tại M và đường thẳng vuông góc với CN tại N cắt nhau tại S. Chứng minh ΔABC cân tại A khi và chỉ khi S, A, H thẳng hàng.*

Lời giải.

• ***Điều kiện cần***: Có ΔABC cân tại A thì AH là trục đối xứng của ΔABC.

Suy ra $\widehat{CNM} = \widehat{BMN}$. Lại có $\widehat{SND} = \widehat{SMD} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{SNM} = \widehat{SMN}$. Suy ra $SN = SM$, nên S nằm trên trung trực MN. Do ΔABC cân tại A nên AH là trung trực của BC và MN. Vậy điểm S nằm trên AH hay S, A, H thẳng hàng.



• ***Điều kiện đủ***: Cho ba điểm S, A, H thẳng hàng. Giả sử $AB < AC$. Gọi K là điểm đối xứng của C qua AH. Ta có: $AK = AC, \widehat{AKD} = \widehat{ACD}$ (1).

Vì $\widehat{SNC} = \widehat{SMB} = \widehat{SHC} = 90^0$ nên ta có các tứ giác nội tiếp: $SNDM, SCHN, SMHB$. Do đó $\widehat{NSD} = \widehat{NMD} = \widehat{NCH}$. Suy ra tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{AKD}$. Do đó tứ giác $AKBD$ nội tiếp.

Khi đó $\widehat{ADM} = \widehat{AKC} = \widehat{ACB} = \widehat{BDH}$

Mà $\widehat{BDH} + \widehat{DBC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{MBC} = 90^0$, hay $BM \perp AC$, mà $AH \perp BC$ suy ra D là trực tâm ΔABC (mâu thuẫn với bài toán là D không là trực tâm của ΔABC).

Chứng minh tương tự $AB > AC$ không xảy ra. Vậy $AB = AC$, nên ΔABC cân tại A.

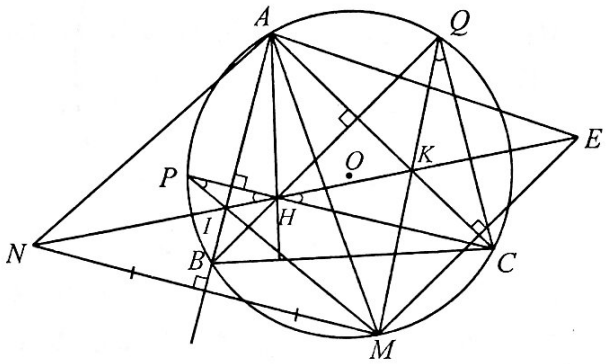
Bài 2.2. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác, M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của (O).*

a) Gọi E là điểm đối xứng của M qua AC, N là điểm đối xứng của M qua AB. Chứng minh E, H, N thẳng hàng.

b) Tìm vị trí của M sao cho độ dài NE lớn nhất.

Lời giải. a) Gọi HE cắt AC tại K, NH cắt AB tại I, BH cắt (O) tại điểm thứ hai Q, CH cắt (O) tại điểm thứ hai P.

Ta có: $\widehat{ACQ} = \widehat{ABQ} = \widehat{ACH}$, $HQ \perp AC$.



Do đó H và Q đối xứng qua AC; M và E đối xứng qua AC. Dẫn đến AC, HE, MQ cùng đi qua K. Chứng minh tương tự AB, NH, MP cùng đi qua I. Theo tính chất đối xứng ta có:

$$\widehat{CHE} = \widehat{CQM}, \widehat{PHN} = \widehat{CPM}.$$

Mà $\widehat{CQM} = \widehat{CPM}$, suy ra $\widehat{CHE} = \widehat{PHN}$. Do đó H, E, N thẳng hàng.

b) Có M và E đối xứng qua AC. Suy ra $AM = AE$, $\widehat{MAC} = \widehat{EAC}$.

Tương tự: $AM = AN$, $\widehat{MAB} = \widehat{NAB}$.

Suy ra: $AE = AN$, $\widehat{NAE} = 2.\widehat{BAC}$.

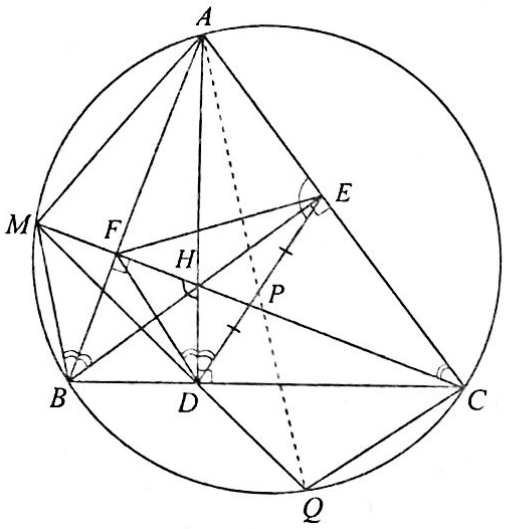
Xét ΔANE có $\widehat{NAE} = 2.\widehat{BAC}$ không đổi, $AE = AN$. Do đó: NE lớn nhất $\Leftrightarrow AE = AN$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (O).

Nhận xét. Có thể thay đề bài phần a) từ "chứng minh E, H, N thẳng hàng" bằng "chứng minh khi điểm M di chuyển trên cung nhỏ BC thì EN luôn luôn đi qua 1 điểm cố định".

Bài 2.3. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $(AB < AC)$. Các đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H. Đường cao CF cắt (O) tại điểm*

thứ hai M, đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q, gọi P là trung điểm của DE. Chứng minh rằng A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có các tứ giác nội tiếp là:

$$ABDE, CDHE, ACDF.$$

Suy ra: $\widehat{ABE} = \widehat{ADE} = \widehat{ACH} = \widehat{ADF}$.

Mà $\widehat{ACH} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp của đường tròn (O)), suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ABM}$ và $AB \perp MH$. Do đó $FM = FH$.

Từ $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$ và $\widehat{DAF} = \widehat{DEH}$, suy ra:

$$\Delta AFD \backsim \Delta EHD \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{HD} \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{DE}{HD}.$$

Từ $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$ và $\widehat{DFH} = \widehat{DAE}$, suy ra:

$$\Delta DHF \backsim \Delta DEA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{HF} = \frac{DE}{HD} \Rightarrow \frac{AE}{MH:2} = \frac{2.PE}{HD} \Rightarrow \frac{AE}{MH} = \frac{PE}{HD}.$$

Xét ΔAPE và ΔMDH có: $\widehat{AED} = \widehat{MHD}$ (cùng bù với $\widehat{DBF}$), $\frac{AE}{MH} = \frac{PE}{HD}$, suy ra:

$$\Delta APE \backsim \Delta MDH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DMC} = \widehat{PAE},$$

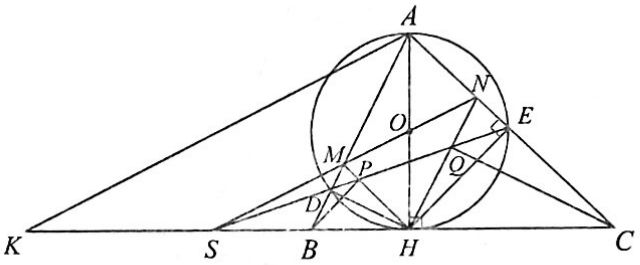
mà $\widehat{DMC} = \widehat{QAC}$ nên $\widehat{PAE} = \widehat{QAC}$, do đó A, P, Q thẳng hàng.

Bài 2.4. *Cho ΔABC nhọn, $AB < AC$. Kẻ đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính AH cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại D và E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S.*

a) *Chứng minh rằng $SB.SC = SH^2$..*

b) *Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M và N, đường thẳng DE cắt HM, HN tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng BP, CQ và AH đồng quy.*

Lời giải.



a) Vì AH là đường kính đường tròn (O), nên $HD \perp AB, HE \perp AC$. Lại có $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$.

Xét ΔAHC vuông tại H, có $\widehat{ACH} = \widehat{AHE}$. Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ECH}$. Do đó tứ giác $BDEC$ nội tiếp. Suy ra $SD.SE = SB.SC$. Ta có SH là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $SH^2 = SD.SE$.

Vậy $SB.SC = SH^2$.

b) Lấy K là điểm đối xứng với H qua S, ta có $SO // AK$. Suy ra: $\frac{BM}{MA} = \frac{BS}{SK} = \frac{BS}{SH}$ (1).

Theo câu a) ta có $SB.SC = SH^2$. Suy ra:

$$SB.(SH + HC) = SH^2$$

$$\Rightarrow SB.HC = SH.(SH - SB) = SH.BH.$$

Suy ra $\frac{SB}{SH} = \frac{BH}{HC}$ (2). Từ (1) và (2) có:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow MH // AC \Rightarrow \widehat{BHP} = \widehat{ACB} = \widehat{ADE}.$$

Do đó tứ giác $BHPD$ nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{BPH} = \widehat{BDH} = 90^0 \Rightarrow BP \perp MH.$$

Mà $MH // AC$ nên $BP \perp AC$, từ đó BP là đường cao của ΔABC. Chứng minh tương tự có CQ là đường cao của ΔABC.

ΔABC có AH, BP, CQ là các đường cao, nên AH, BP, CQ đồng quy.

Nhận xét. Trong lời giải phần a) ta phát hiện thêm tứ giác $BDEC$ nội tiếp. Trong phần b) để chứng minh AH, BP, CQ đồng quy ta chứng minh AH, BP, CQ là các đường cao của tam giác ΔABC. Do O là trung điểm AH nên ta lấy K là điểm đối xứng với H qua S để tạo ra đường trung bình tam giác.

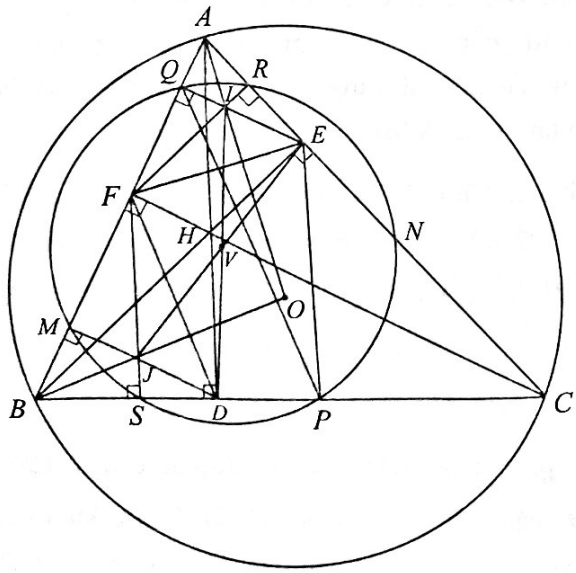
Bài 2.5. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, J, K lần lượt là trực tâm của các tam giác AEF, BFD, CDE.*

a) *Chứng minh DI, EJ, FK đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.*

b) *Chứng minh AI, BJ, CK đồng quy tại O.*

c) *Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ D xuống AB, AC; gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ E xuống BC, AB; gọi R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ F xuống AC, BC. Chứng minh M, N, P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải.



a) Gọi H là trực tâm của ΔABC. ta có:

$$EI \perp AB,\ HF \perp AB \Rightarrow EI \,//\, HF.$$

Chứng minh tương tự có $EH \,//\, IF$.

Do đó $EIFH$ là hình bình hành, nên $EI \,//\, HF,\ EI = HF$ (1).

Chứng minh tương tự $DJ \,//\, HF,\ DJ = HF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $EI \,//\, DJ,\ EI = DJ$. Vậy $DJIE$ là hình bình hành. Do đó DI, EJ cắt nhau tại trung điểm của DI và EJ (3).

Chứng minh tương tự DI, FK cắt nhau tại trung điểm của DI và FK (4).

Từ (3) và (4), suy ra DI, EJ, FK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp, nên $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$.

Xét ΔAOB cân tại O, ta có:

$$\widehat{OAB} = \frac{180^0 - \widehat{AOB}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{AOB}}{2}$$
$$= 90^0 - \widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{AFE}.$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{AFE} = 90^0 \Rightarrow AO \perp EF.$$

Lại có $AI \perp EF$, suy ra A, I, O thẳng hàng, nên AI đi qua O. Chứng minh tương tự có BJ và CK cũng đi qua O. Vậy AI, BJ, CK đồng quy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

c) Từ $HF \,//\, EQ,\ HD \,//\, EP \Rightarrow \dfrac{BF}{BQ} = \dfrac{BH}{BE} = \dfrac{BD}{BP}$

$\Rightarrow BF.BP = BQ.BD$ (5). Tứ giác $DFMS$ nội tiếp nên $BM.BF = BS.BD$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $BM.BQ = BS.BP$. Do đó M, S, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi V là trung điểm của DI, EJ, FK. Do $EP \perp BC,\ JS \perp BC$ nên V nằm trên trung trực của PS. Tương tự V nằm trên trung trực của MQ. Suy ra M, S, P, Q cùng nằm trên một đường tròn tâm V.

Chứng minh tương tự, ta suy ra M, N, P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn tâm V.

Bài 2.6. *Gọi AD, BE, CF là các đường cao của ΔABC nhọn. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE. Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AIC và BJC. Chứng minh $OO' \perp CK$.*

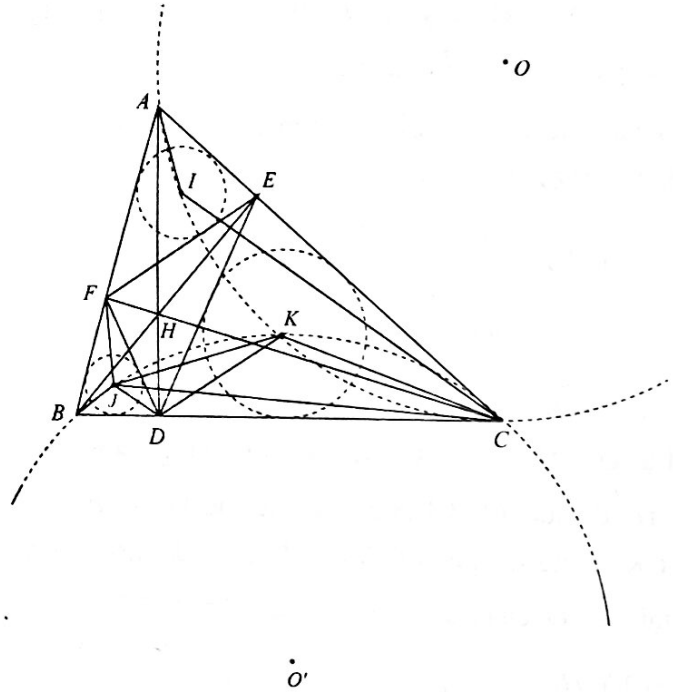
Lời giải. Tứ giác $ACDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB}$.

Tương tự có $\widehat{ABC} = \widehat{DEC}$.

Suy ra $\Delta BDF \backsim \Delta EDC$ (g.g) $\Rightarrow \Delta JDF \backsim \Delta KDC$

$\Rightarrow \dfrac{DJ}{DK} = \dfrac{DF}{DC}$ (1).

Mà $\widehat{FDB} = \widehat{EDC} \Rightarrow \widehat{JDK} = \widehat{FDC}$ (2).



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta DJK \backsim \Delta DFC$ (c.g.c). Suy ra: $\widehat{JKD} = \widehat{FCD}$;

$\widehat{JBD} + \widehat{JKC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{JKD} + \widehat{DKC}$

$= \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{DCF} + \left(180^o - \widehat{KCD} - \widehat{KDC}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} + 90^0 - \widehat{ABC} + 180^0 - \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} - \dfrac{1}{2}\widehat{EDC}$

$= 270^0 - \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} - \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} - \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BJKC$ nội tiếp đường tròn (O') (3).

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $AIKC$ nội tiếp đường tròn (O) (4). Từ (3), (4) và CK là dây chung của (O) và (O'), suy ra $OO' \perp CK$.

III. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC, TÍNH ĐỘ DÀI CÁC CẠNH.

Bài 3.1. *Gọi AD, BE, CF là các đường cao của ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Chứng minh rằng chu vi ΔDEF không đổi khi A, B, C thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ sao cho diện tích của ΔABC luôn bằng a^2.*

Lời giải. Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp, nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$. Gọi AA' là đường kính của đường tròn $(O;R)$.

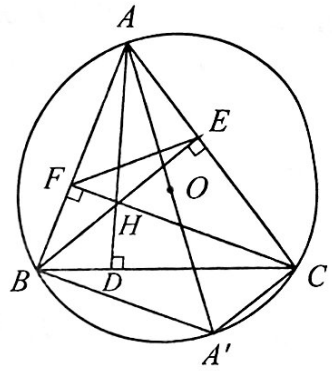
Ta có: $\widehat{FAO} + \widehat{AFE} = \widehat{BAA'} + \widehat{ACB}$

$= \widehat{BAA'} + \widehat{AA'B} = 90^0$.

Suy ra $AO \perp EF$. Do đó:

$S_{AEOF} = \dfrac{1}{2}AO.EF$

$= \dfrac{1}{2}R.EF.$



Tương tự có:

$S_{BDOF} = \dfrac{1}{2}R.DF,$

$S_{CDOE} = \dfrac{1}{2}R.DE.$

Vậy $S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE}$

$= \dfrac{1}{2}.R(EF + DF + DE)$. Suy ra

$DE + EF + DF = \dfrac{2S_{ABC}}{R} = \dfrac{2a^2}{R}$ (không đổi).

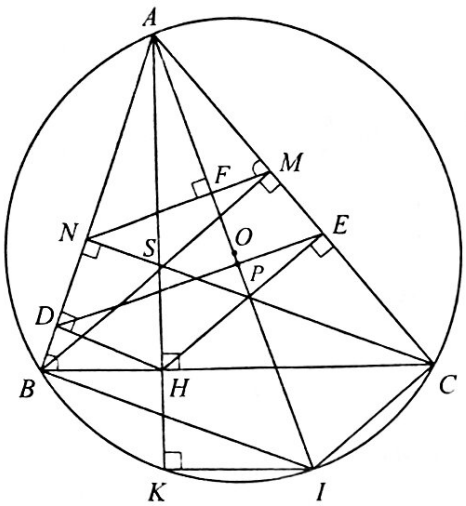
Vậy chu vi ΔDEF không đổi.

Nhận xét. Ta đã chia ΔABC thành ba tứ giác mà mỗi tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau. Từ đó tính được $DE + EF + DF$ theo diện tích tam giác ΔABC và R.

Bài 3.2. *Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$, H là chân đường cao hạ từ A đến BC. Từ H kẻ HD vuông góc với AB $(D \in AB)$, HE vuông góc với AC $((E \in AC)$. Chứng minh rằng $AH = R\sqrt{2}$ khi và chỉ khi D, O, E thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi BM, CN là đường cao ΔABC, BM cắt CN tại S. Gọi AI là đường kính của đường tròn (O); AI cắt DE, MN lần lượt tại P và F.

Ta có $\widehat{ACI} = \widehat{ABI} = 90^0$. Vì tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$. Lại có $\widehat{CBI} = \widehat{CAI}$. Suy ra: $\widehat{CBI} + \widehat{ABC} = \widehat{CAI} + \widehat{AMN} = \widehat{ABI} = 90^0$ hay $\widehat{MAF} + \widehat{AMF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AFM} = 90^0 \Leftrightarrow AI \perp MN$ (1).



Ta có: $SN // HD$ nên $\frac{AN}{AD} = \frac{AS}{AH}$;

$SM // HE$ nên $\frac{AM}{AE} = \frac{AS}{AH}$.

Suy ra: $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow MN // DE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp DE$ tại P.

Ta có: $\Delta APE \backsim \Delta ACI \Rightarrow AE.AC = AP.AI$ (3).

Xét ΔAHC vuông tại H, đường cao HE suy ra $AH^2 = AE.AC$ (4). Từ (3) và (4) suy ra:

$$AH^2 = AP.AI \Rightarrow AH^2 = AP.2R.$$

Do đó $AH = R\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $2R^2 = AP.2R$ $\Leftrightarrow AP = R \Leftrightarrow D, O, E$ thẳng hàng.

Nhận xét. Trong bài toán trên ta đã vẽ thêm đường cao BM, CN của ΔABC để từ đó chứng minh $AO \perp DE$ Bài toán liên quan độ dài đường cao AH với bán kính R của đường tròn (O), nên ta vẽ thêm đường kính AI để giải bài toán.

Bài 3.3. *Cho ΔABC có trực tâm H. Gọi $(O; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác, gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ΔABC. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ O đến ba cạnh BC, CA, AB.*

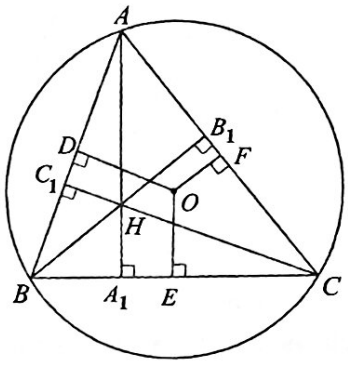
a) *Chứng minh $HA + HB + HC = 2(d_a + d_b + d_c)$.*

b) *Giả sử ΔABC nhọn. Chứng minh $HA + HB + HC \geq 6r$ (*).*

c) *Bất đẳng thức (*) còn đúng khi ΔABC có góc tù không? Vì sao?*

Lời giải. a) Gọi E, F, D thứ tự là trung điểm BC, AC, AB. Ta có $OE = d_a, OF = d_b, OD = d_c$.

Ta có: $EF // AB, EF = \frac{1}{2}AB$.



Ta có: $\Delta OEF \backsim \Delta HAB$ (g. g)

$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2}AH \Rightarrow HA = 2d_a.$$

Chứng minh tương tự có: $HB = 2d_b; HC = 2d_c$

$$\Rightarrow HA + HB + HC = 2(d_a + d_b + d_c).$$

b) Tam giác ABC nhọn, nên điểm O nằm trong tam giác. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

Ta chứng minh:

$$d_a + d_b + d_c = OE + OF + OD = R + r.$$

Thật vậy, từ tứ giác $ADOF$ nội tiếp, theo định lí Ptolemy ta có : $OA.DF = AF.OD + AD.OF$

$$\Rightarrow R.\frac{a}{2} = \frac{b}{2}.OD + \frac{c}{2}.OF.$$

Tương tự: $R.\frac{b}{2} = \frac{a}{2}.OD + \frac{c}{2}.OE;$

$$R.\frac{c}{2} = \frac{a}{2}.OF + \frac{b}{2}.OE.$$

Suy ra:

$$R.\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = OD.\frac{a+b}{2} + OE.\frac{b+c}{2} + OF.\frac{a+c}{2}$$

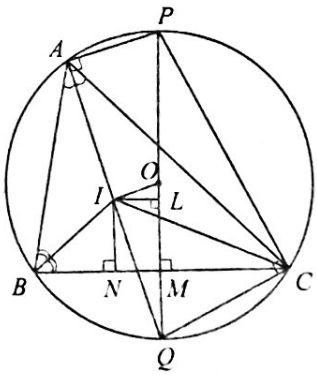
$$\Rightarrow Rp = OD\left(p - \frac{c}{2}\right) + OE.\left(p - \frac{a}{2}\right) + OF\left(p - \frac{b}{2}\right).$$

$$= (OD + OE + OF)p - \left(\frac{OD.c}{2} + \frac{OE.a}{2} + \frac{OF.b}{2}\right)$$

$\Rightarrow Rp = (OD + OE + OF)p - S$

$\Rightarrow OD + OE + OF = \dfrac{Rp + S}{p} = R + r.$

Vậy $d_a + d_b + d_c = R + r$ (1)



Chứng minh $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Thật vậy, giả sử tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm Q. Kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) cắt BC tại M.

Vẽ $IN \perp BC, IL \perp PQ, (N \in BC, L \in PQ)$.

Có $IN = ML = r$, có $IL^2 = OI^2 - OL^2 = IQ^2 - QL^2$

$\Rightarrow OI^2 = OL^2 + IQ^2 - QL^2 = |OQ - QL|^2 + IQ^2 - QL^2$

$= OQ^2 + QL^2 - 2.OQ.QL + IQ^2 - QL^2$

$= R^2 + IQ^2 - 2R.QL$.

Từ ΔQIC cân tại $Q \Rightarrow QI = QC$. Suy ra $OI^2 = R^2 + QC^2 - 2R.QL$

Có ΔCPQ vuông tại C, nên $QC^2 = 2R.QM$.

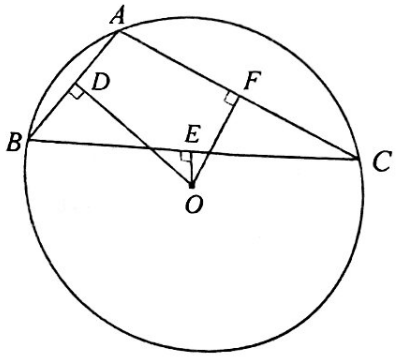
Do đó $OI^2 = R^2 + 2R.QM - 2R.QL = R^2 - 2Rr$

Suy ra $R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d_a + d_b + d_c \geq 3r$.

Vậy $HA + HB + HC \geq 6r$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi O trùng I, khi và chỉ khi ΔABC đều.

c) Bất đẳng thức (*) vẫn còn đúng khi ΔABC tù.



Chẳng hạn $\widehat{A} > 90^0$. Tương tự câu b) ta có:

$R.\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2}.OD + \dfrac{c}{2}.OF$; $R.\dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{2}.OD - \dfrac{c}{2}.OE$;

$R.\dfrac{c}{2} = \dfrac{a}{2}.OF - \dfrac{b}{2}.OE$.

Vậy $Rp = OD.\dfrac{a+b}{2} + OF.\dfrac{a+c}{2} - OE.\dfrac{b+c}{2}$

$= OD.\left(p - \dfrac{c}{2}\right) + OF\left(p - \dfrac{b}{2}\right) - OE.\left(p - \dfrac{a}{2}\right).$

$= p(OD + OE + OF)$

$- \left(OD.\dfrac{c}{2} + OF.\dfrac{b}{2} - OE.\dfrac{a}{2}\right) - 2OE.p$

$= p(OD + OE + OF) - S - 2OE.p$

Suy ra: $p(OD + OE + OF) = Rp + S + 2OE.p$

$= (R + r + 2.OE)p.$

Dẫn đến: $OD + OE + OF > R + r \geq 3r$

$\Rightarrow d_a + d_b + d_c > 3r \Rightarrow HA + HB + HC > 6r.$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$, M là trung điểm của cạnh BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng:

a) ΔSMP đồng dạng với ΔDHF.

b) $\dfrac{EF}{FQ} = \dfrac{BC}{CD}$.

2. Cho AH là đường cao của ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt các tiếp tuyến tại B và C của (O) lần lượt tại M, N. Chứng minh HA là phân giác của $\widehat{MHN}$.

3. Cho ΔABC với trực tâm H (H khác A, B, C) và M là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua H vuông góc với HM cắt đường thẳng AB ở E và cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh ΔMEF cân.

(*Xem tiếp trang 45*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI, NĂM HỌC 2021-2022

VÒNG 1

Câu I. ĐK: $-8 \le x \le 5$.

Đặt $a=\sqrt{5-x}, b=\sqrt{x+8}$ $(a,b\ge 0)$. Khi đó ta có:

$$a^2=5-x,\ b^2=x+8 \text{ nên } a^2+b^2=13.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$13a+18b=53+b^2+3ab$$
$$\Leftrightarrow 13a+18b=40+a^2+2b^2+3ab$$
$$\Leftrightarrow 8(a+b)+5(a+2b)=(a+b)(a+2b)+40$$
$$\Leftrightarrow (a+b-5)(a+2b-8)=0.$$

TH1: $a+b=5 \Rightarrow a=5-b$. Mà $a^2+b^2=13$ suy ra:

$$(5-b)^2+b^2=13 \Leftrightarrow 2b^2-10b+25=13$$

$$\Leftrightarrow 2b^2-10b+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1 \end{array}\right.: \text{thỏa mãn.}$$

TH2: $a+2b=8 \Rightarrow a=8-2b$. Mà $a^2+b^2=13$ suy ra: $(8-2b)^2+b^2=13 \Leftrightarrow 5b^2-32b+64=13$

$$\Leftrightarrow 5b^2-32b+51=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\dfrac{17}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{89}{25} \end{array}\right.: \text{thỏa}$$

mãn. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$$1; -4; \frac{89}{25}.$$

Câu II. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2x^4+2y^4+12x^2y^2=2 \\ 2x(x+y)^4=2(x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^4+(x-y)^4=2 \\ (x+y+x-y)(x+y)^4=2(x-y) \end{cases}.$$

Đặt $u=x+y,\ v=x-y$ ta có: $\begin{cases} u^4+v^4=2 \\ u^4(u+v)=2v \end{cases}$

$$\Rightarrow u^4(u+v)=v(u^4+v^4) \Leftrightarrow u^5=v^5 \Leftrightarrow u=v$$

$\Rightarrow 2u^4=2 \Leftrightarrow u=\pm 1$ thu được:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Đáp số: $x=1, y=0$; $x=-1, y=0$.

Câu III. Giả sử n thỏa mãn các điều kiện của bài toán, ta có:

$$2n+1=2(n-3)+7=2(n-4)+9$$
$$=2(n-5)+11=2(n-6)+13.$$

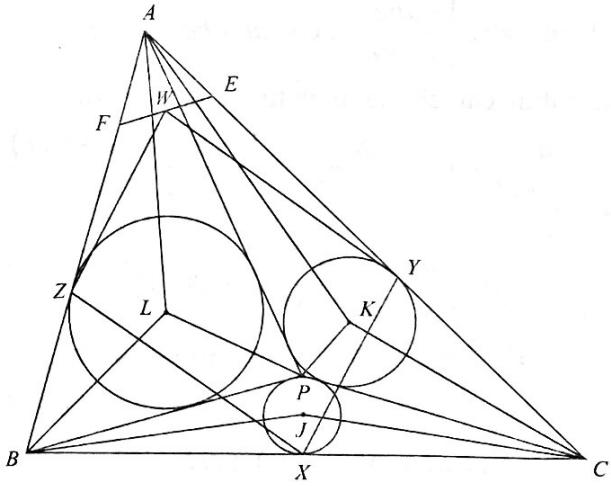
Từ giả thiết của bài toán suy ra:

$$2n+1\equiv 0 \pmod 7,\quad 2n+1\equiv 0 \pmod 9,$$
$$2n+1\equiv 0 \pmod{11},\quad 2n+1\equiv 0 \pmod{13}.$$

Vì từng cặp 2 số bất kỳ trong các số 7, 9, 11, 13 là nguyên tố cùng nhau nên $7\times 9\times 11\times 13 \mid 2n+1$ $\Leftrightarrow 9009 \mid 2n+1 \Rightarrow 2n+1=m.9009$ (m là số nguyên dương) $\Rightarrow n$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2n+1$ nhỏ nhất $\Rightarrow m=1$. Ta thu được:

$$2n+1=9009 \Rightarrow n=\frac{9008}{2}=4504.$$

Câu IV.



1) Ta có biến đổi góc như sau:

$$\widehat{BJC}+\widehat{CKA}+\widehat{ALB}=90^0+\frac{\widehat{BPC}}{2}+90^0+\frac{\widehat{CPA}}{2}$$
$$+90^0+\frac{\widehat{APB}}{2}=270^0+180^0=450^0.$$

2) Khi $PB=PC$ thì X là trung điểm BC. Lấy E, F lần lượt đối xứng với C, B qua Y, Z. Do $XYWZ$ là hình bình hành nên trong tứ giác $BCEF$ thì W là trung điểm EF. Từ đó ta có:

$$AE = AC - CE = AC - 2CY$$
$$= AC - (CP + CA - PA) = PA - PC.$$

Tương tự thì $AF = PA - PB$. Mà $PB = PC$ nên $AE = AF$. Lại do W là trung điểm EF nên AW là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Câu V. Giả sử k số được chọn là $x_1 < x_2 < ... < x_k$.

• Trong dãy trên không tồn tại cặp 2 số dạng $(x, x+1)$ vì tổng 2 số luôn chia hết cho hiệu của chúng bằng 1. Không tồn tại cặp số dạng $(x, x+2)$ vì tổng 2 số bằng $2x+2$ chia hết cho hiệu của chúng bằng 2. Suy ra $x_{i+1} - x_i \geq 3$.

• Áp dụng kết quả trên suy ra

$$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_2 \geq 1+3 \Rightarrow x_3 \geq 1+2.3 \Rightarrow ... \Rightarrow x_k \geq 1+(k-1)3.$$

Ta có: $2021 \geq x_k \geq 1+(k-1)3 = 3k-2 \Rightarrow k \leq \dfrac{2023}{3}$

$$\Rightarrow k \leq \left[\frac{2023}{3}\right] = 674 = k_{\max}.$$

• Giá trị lớn nhất đạt được khi ta chọn dãy con $1, 4, 7, 10, ..., 3.674-2$. Khi đó tổng của 2 số bất kỳ chia cho 3 dư 2. Hiệu của 2 số bất kỳ chia hết cho 3 $\Rightarrow$ tổng của 2 số bất kỳ không chia hết cho hiệu của chúng. Vậy giá trị lớn nhất của k là 674.

VÒNG 2

Câu I. 1) Kí hiệu $S = a+b+c$ ta có:

$$1 = (S-a)(S-b)(S-c)$$
$$= S^3 - (a+b+c)S^2 + (ab+bc+ca)S - abc$$

suy ra: $\dfrac{1+abc}{a+b+c} = ab+bc+ca.$

Kí hiệu: $P = \dfrac{1+abc}{a+b+c}$, ta có: $ab+bc+ca = P$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{a^2 + \frac{1+abc}{a+b+c}} + \frac{b}{b^2 + \frac{1+abc}{a+b+c}} = \frac{1+abc+ab(a+b+c)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a^2+P} + \frac{b}{b^2+P} = P + ab \quad (*).$$

Ta có: $a^2 + P = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$

$$b^2 + P = b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a).$$

Lưu ý: $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} = P + ab$$
$$\Leftrightarrow a(b+c) + b(c+a) = P + ab$$
$$\Leftrightarrow ab + bc + ca = P \text{ (đúng).}$$

2) Đặt $u = x+2y, v = xy$ ta có: $\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 11 \\ 3uv + 31 = 9u + 13v \end{cases}$.

Cộng theo vế 2 phương trình suy ra:

$$3uv + u^2 + 2v^2 + 20 = 9u + 13v$$
$$\Leftrightarrow (u+v)(u+2v) + 20 = 5(u+v) + 4(u+2v)$$
$$\Leftrightarrow (u+v-4)(u+2v-5) = 0.$$

• $\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+2v^2=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4-v \\ (4-v)^2 + 2v^2 = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3v^2 - 8v + 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v=1, u=3 \\ v=\frac{5}{3}, u=\frac{7}{3} \end{array}\right..$$

- Với $u = 3, v = 1$ ta có:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow y(3-2y) = 1 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1, x = 1;\ y = \frac{1}{2}, x = 2.$$

- Với $u = \dfrac{7}{3}, v = \dfrac{5}{3}$ ta có:

$$\begin{cases} x+2y = \frac{7}{3} \\ xy = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow y\left(\frac{7}{3} - 2y\right) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow y(7-6y) = 5$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 5 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

• $\begin{cases} u+2v=5 \\ u^2+2v^2=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5-2v \\ (5-2v)^2 + 2v^2 = 11 \end{cases}$

$$\Rightarrow 6v^2 - 20v + 14 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v=1, u=3 \text{ (đã xét)} \\ v=\frac{7}{3}, u=\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Với $u = \dfrac{1}{3}, v = \dfrac{7}{3}$ ta có:

$$\begin{cases} x+2y=\dfrac{1}{3} \\ xy=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}-2y\right)=\frac{7}{3} \Leftrightarrow y(1-6y)=7$$

$$\Leftrightarrow 6y^2-y+7=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Đáp số: $x=1, y=1; x=2, y=\dfrac{1}{2}$.

Câu II. 1) Xét $x>1 \Rightarrow 3^x \equiv 0 \pmod 9$

$\Rightarrow 3^x+29 \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod 9$. Ta có:

$$2^{6k}=(63+1)^k \equiv 1 \pmod 9,$$

$$2^{6k+1}=(63+1)^k.2 \equiv 2 \pmod 9,$$

$$2^{6k+2}=(63+1)^k.4 \equiv 4 \pmod 9,$$

$$2^{6k+3}=(63+1)^k.8 \equiv 8 \pmod 9,$$

$$2^{6k+4}=(63+1)^k.16 \equiv 7 \pmod 9;$$

$$2^{6k+5}=(63+1)^k.2 \equiv 5 \pmod 9,$$

suy ra y có dạng $y=6k+1$.

Ta có:

$$2^y=2^{6k+1}=(65-1)^k.2 \equiv \pm 2 \pmod{13} \quad (1).$$

Ta cũng có:

$$3^{3k}=(26+1)^k \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{3k}+29 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$3^{3k+1}=(26+1)^k.3 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{3k+1}+29 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$3^{3k+2}=(26+1)^k.9 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow 3^{3k+2}+29 \equiv 12 \pmod{13}.$$

Tóm lại: $3^x+29 \equiv 4,6,12 \pmod{13}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra 2 vế không đồng dư khi chia cho 13 nên với $x>1$ thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $x=1$ ta thu được đáp số $x=1, y=5$.

2) Viết lại giả thiết dưới dạng:

$$(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)=12.$$

Ta có:

$$\frac{a+1}{a^2+10a+21}=\frac{a+1}{12+(a+1)^2+8(a+1)}$$

$$\le \frac{a+1}{4}\left[\frac{1}{12+(a+1)^2}+\frac{1}{8(a+1)}\right].$$

Tương tự:

$$\frac{b+1}{b^2+10b+21} \le \frac{b+1}{4}\left[\frac{1}{12+(b+1)^2}+\frac{1}{8(b+1)}\right];$$

$$\frac{c+1}{c^2+10c+21} \le \frac{c+1}{4}\left[\frac{1}{12+(c+1)^2}+\frac{1}{8(c+1)}\right].$$

Suy ra:

$$M \le \frac{1}{4}\left[\frac{a+1}{12+(a+1)^2}+\frac{b+1}{12+(b+1)^2}+\frac{c+1}{12+(c+1)^2}\right]+\frac{3}{32}.$$

Đặt: $x=a+1, y=b+1, z=c+1 \Rightarrow xy+yz+zx=12$

$\Rightarrow x^2+12=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z);$

$y^2+12=(y+z)(y+x);\ z^2+12=(z+x)(z+y)$

$$\Rightarrow M \le \frac{1}{4}\left[\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\right]+\frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow M \le \frac{1}{4}.\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{3}{32}$$

$$\le \frac{1}{2}.\frac{xy+yz+zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}+\frac{3}{32}.$$

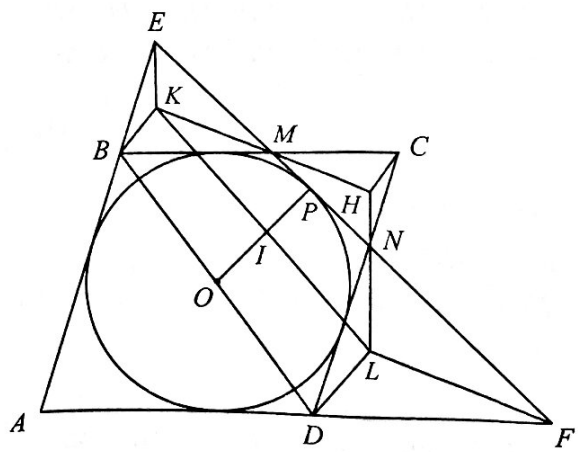
Ta có:

$$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)=36 \Rightarrow x+y+z \ge 6$$

$$\Rightarrow M \le \frac{9}{16(x+y+z)}+\frac{3}{32} \le \frac{9}{16.6}+\frac{3}{32}=\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}.$$

$\max M=\dfrac{3}{16}$ khi $a=b=c=1$.

Câu III. 1) Dễ thấy O là trung điểm BD và OP, BK, DL song song với nhau do cùng vuông góc với EF. Từ đó trong hình thang $BKLD$ có OP đi qua trung điểm I của KL theo tính chất đường trung bình.

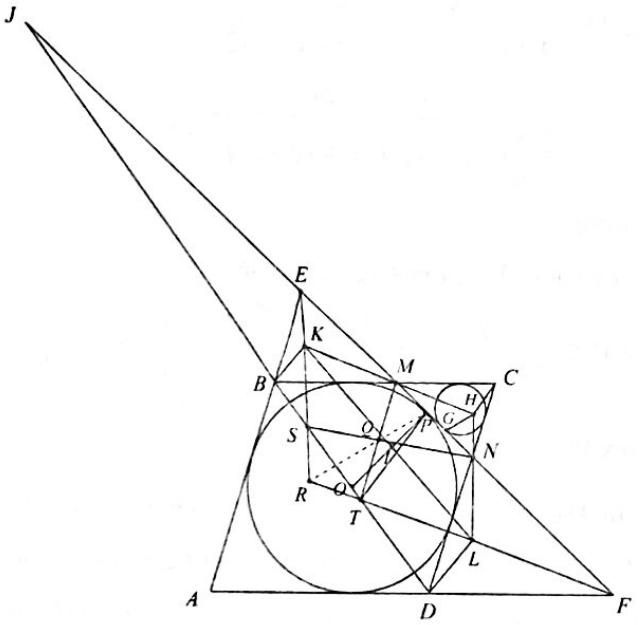


2) Ta có biến đổi tỷ số:

$$\frac{2OI}{CH}=\frac{BK+DL}{CH}=\frac{BK}{CH}+\frac{DL}{CH}=\frac{EM}{MN}+\frac{FN}{MN}$$
$$=\frac{EF-MN}{MN}=\frac{EF}{MN}-1.$$

Từ đó: $\frac{OI}{CH}-\frac{EF}{2MN}=-\frac{1}{2}$ không đổi.

3) Dễ thấy ES cắt FT tại R là trực tâm tam giác AEF. Do $\Delta AEF \backsim \Delta CNM$ có trực tâm tương ứng là R, H; có tiếp điểm của các đường tròn nội tiếp với các cạnh EF và NM tương ứng là P, G nên RP // HG, vậy ta sẽ chứng minh P, Q, R thẳng hàng thì bài toán hoàn tất.



Gọi giao điểm của BD và EF là J. Theo định lý Menelaus thì NS, MT, PR đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{NP}{NE}.\frac{SE}{SR}=\frac{MP}{MF}.\frac{TF}{TR}\Leftrightarrow\frac{NP}{NE}:\frac{MP}{MF}=\frac{TF}{TR}.\frac{SR}{SE}$$
$$\Leftrightarrow\frac{PN}{PM}.\frac{MF}{NE}=\frac{JF}{JE}\quad(1).$$

Ta lại có biến đổi:

$$\frac{MF}{NE}=\frac{MF}{BD}.\frac{BD}{NE}=\frac{JF}{JD}.\frac{JD}{JN}=\frac{JF}{JN}\quad(2).$$

Từ (2) ta thấy:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{PN}{PM}=\frac{JN}{JE}\Leftrightarrow\frac{PN}{PM}=\frac{DN}{BE}\Leftrightarrow\frac{PN}{PM}=\frac{NF}{ME}\quad(3).$$

Ta lại có (O) là đường tròn bàng tiếp của tam giác CMN nên $PM = GN$, $PN = GM$. Lại chú ý các tam giác CMN và AFE có tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh MN, EF tương ứng là G và P, ta có biến đổi tỷ số:

$$\frac{PN}{PM}=\frac{GM}{GN}=\frac{PF}{PE}=\frac{PF-PN}{PE-PM}=\frac{EN}{EM}.$$

Từ đây suy ra (3) đúng, ta có điều phải chứng minh.

Câu IV. Ký hiệu $b_i=2\frac{a_i}{1+a_i^2}\ (i=1,2,\ldots,2021)$, ta thu được bài toán tương đương:

Giả sử $b_1,b_2,\ldots,b_{2021}$ *là những số thực thỏa mãn* $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2021}=0$ và $|b_i|\le 1, i=1,2,\ldots,2021$.

Chứng minh rằng tồn tại k nguyên, $1\le k\le 2021$ *sao cho:* $|b_1+2b_2+3b_3+\ldots+kb_k|\le\frac{2k+1}{4}$.

• Ta có thể giả sử $b_1>0$ vì :

Nếu $b_1=0$ thì tồn tại $k=1$ bài toán thỏa mãn;

Nếu $b_1<0$ ta đưa về trường hợp $b_1>0$ bằng cách giải tương tự với dãy $(-b_i)$

(vì $|-b_i|\le 1, \sum(-b_i)=-\sum b_i=0$).

• Ký hiệu $S_0=0, S_j=\sum_{i=1}^{j} ib_i$ với j = 1, 2, …, 2021

thì $S_j-S_{j-1}=jb_j\Leftrightarrow b_j=\frac{S_j-S_{j-1}}{j}$.

Ta có:

$$0=\sum_{j=1}^{2021}b_j=\sum_{j=1}^{2021}\frac{S_j-S_{j-1}}{j}=(S_1-S_0)+\left(\frac{S_2}{2}-\frac{S_1}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{S_3}{3}-\frac{S_2}{3}\right)+\left(\frac{S_4}{4}-\frac{S_3}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{S_{2021}}{2021}-\frac{S_{2020}}{2021}\right)$$
$$\Rightarrow 0=\frac{1}{1.2}S_1+\frac{1}{2.3}S_2+\frac{1}{3.4}S_3$$
$$+\ldots+\frac{1}{2020.2021}S_{2020}+\frac{S_{2021}}{2021}.$$

(*Xem tiếp trang 16*)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2021 - 2022

VÒNG 1

(*Dành cho tất cả các thi sinh; thời gian làm bài: 120 phút*)

Câu 1 (*2 điểm*). 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{5x-1}}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m^2x+m-1$ $(m\neq 0)$ và đường thẳng $y=9x+2$ song song.

3) Tính diện tích tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

4) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 5 cm và bán kính đáy 3 cm.

Câu 2 (*1,5 điểm*). Cho biểu thức

$$Q=\left(\frac{x^2}{x^2-\sqrt{x^3}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

với $x>0; x\neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức Q.

2) Tìm x để biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3 (*2,5 điểm*). 1) Cho phương trình

$$x^2-(2m+1)x+m^2+3=0 \quad (1)$$

(với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2$.

2) Giải phương trình

$$x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0.$$

Câu 4 (*3 điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB>AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AP. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE.AC=AF.AB$.

2) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF và AH. Chứng minh IK song song với AP.

3) Gọi M là giao điểm của IK và BC; N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh rằng $\widehat{HMC}=\widehat{HAN}$.

Câu 5 (*1 điểm*). 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}8\sqrt{x^2y+y}=3\left(x^2-y+1\right)\\ x^2+9y^2=\dfrac{13}{9}.\end{cases}$$

2) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leq 2021$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}}\leq\frac{2021}{3}.$$

VÒNG 2

(*Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin; thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu 1 (*2 điểm*).

a) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

b) Cho đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=1$, $P(3)=3$, $P(7)=31$. Tính giá trị của $P(10)$.

☞

☞ **Câu 2** (*2 điểm*). a) Giải phương trình

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+4=\frac{7x^2}{x+1}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(2x+1)=y(x+y-2)+1 \\ 4\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+2}=11-x. \end{cases}$$

Câu 3 (*3 điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D $(D\neq A)$. Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy điểm G khác C sao cho $AG>GC$; một đường tròn có tâm là K đi qua A, G và cắt đoạn thẳng AD tại điểm P nằm bên trong tam giác ABC. Đường thẳng GK cắt đường tròn (O) tại điểm M $(M\neq G)$.

a) Chứng minh các tam giác KPG, ODG đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh GP, MD là hai đường thẳng vuông góc.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng OD và KP, đường thẳng qua A và song song với BC cắt đường tròn (K) tại điểm E $(E\neq A)$. Chứng minh rằng tứ giác $DGFP$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{EGF}=90^0$.

Câu 4 (*1,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2y^2(y-x)=5xy^2-27$.

b) Cho $p_1, p_2, \ldots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Câu 5 (*1,5 điểm*).

a) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2$.

b) Xét hai tập hợp A, B khác $\varnothing$ thỏa mãn $A\cap B=\varnothing$ và $A\cup B=\mathbb{N}^*$. Biết rằng A có vô hạn phần tử và tổng của mỗi phần tử thuộc A với mỗi phần tử thuộc B là phần tử thuộc B. Gọi x là phần tử bé nhất thuộc B thỏa mãn $x\neq 1$. Hãy tìm x.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(*5/7/136 Phan Đình Phùng - TP. Nam Định*)
Giới thiệu

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (*Tiếp theo trang 14*)

Vì $S_1=b_1>0$ nên tồn tại k nhỏ nhất $(2\leq k\leq 2021)$ mà $S_k<0$ (1).

• Theo giả thiết ta có:

$$k\geq |kb_k|=|S_k-S_{k-1}|=S_{k-1}-S_k$$

(vì theo (1) ta có: $S_k<0, S_{k-1}>0$)

$\Rightarrow k\geq |S_{k-1}|+|S_k|$ (2).

Nếu có đồng thời 2 bất đẳng thức

$$|S_{k-1}|>\frac{2(k-1)+1}{4} \text{ và } |S_k|>\frac{2k+1}{4}$$

suy ra:

$$|S_{k-1}|+|S_k|>\frac{2(k-1)+1}{4}+\frac{2k+1}{4}=k,$$

mâu thuẫn với (2). Vậy phải có:

$$|S_{k-1}|\leq\frac{2(k-1)+1}{4} \text{ hoặc } |S_k|\leq\frac{2k+1}{4}.$$

Suy ra tồn tại k hoặc $k-1$ thỏa mãn bài toán.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG
TRẦN QUANG HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)
Giới thiệu

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

LÊ PHÚC LỮ (*ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh*)
TRẦN QUỐC TÚ (*THPT Gia Định, TP. Hồ Chí Minh*)
TRẦN BÁ ĐẠT (*Wayne State University, USA*)

Tạp chí TH & TT đã nhiều lần có các bài viết đề cập đến chủ đề "phương trình tiếp tuyến" như: số 363 tháng 09/2007, số 420 tháng 06/2012, số 460 tháng 10/2015, ... Trong bài viết này, các tác giả không đề cập lại các dạng cơ bản, phổ biến mà giới thiệu các bài toán mới lạ có liên quan, đặc biệt trong các đề thi THPT Quốc gia. Ngoài ra, ta sẽ không dùng điều kiện tiếp xúc giữa hai đồ thị mà chỉ giới hạn ở công thức phương trình tiếp tuyến quen thuộc.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý 1. *Cho điểm M có hoành độ x_0 trên đồ thị (C) của đường cong $y = f(x)$. Khi đó, hệ số góc của đường tiếp tuyến (d) của (C) tại M là $k = f'(x_0)$, và vì thế*

$$(d):\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh một tính chất hay sử dụng sau đây:

Định lý 2. *Cho đa thức $f(x)$ có bậc lớn hơn 1 với đồ thị (C) và đường thẳng (d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0. Khi đó phương trình hoành độ giao điểm giữa (C),(d) sẽ có nghiệm kép (hoặc nghiệm bội ba trở lên) là $x = x_0$.*

Chứng minh. Từ PT tiếp tuyến (d), ta có PT hoành độ giao điểm là:

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f(x)\ \ (*).$$

Do đa thức $f(x) - f(x_0)$ chia hết cho $x - x_0$ nên ta viết $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x)$. Đạo hàm hai vế của đẳng thức này, ta được:

$$f'(x) = (x - x_0)g'(x) + g(x).$$

Cho $x = x_0$, ta có ngay $f'(x_0) = g(x_0)$, thay lại vào (*), ta có:

$$(x - x_0)g(x) = g(x_0)(x - x_0) \text{ hay}$$

$$(x - x_0)(g(x) - g(x_0)) = 0.$$

Điều này cho thấy PT(*) có nghiệm kép (hoặc nghiệm bội ba trở lên) là $x = x_0$.

Chú ý rằng kết quả này cũng đúng đối với các hàm phân thức hữu tỷ.

Tính chất. *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên D, đạt cực trị tại $x = x_0 \in D$ và tồn tại đạo hàm $f'(x_0)$. Khi đó, tiếp tuyến tại x_0 sẽ song song hoặc trùng với trục hoành Ox.*

Chứng minh. Theo giả thiết thì ta sẽ có $f'(x_0) = 0$ và từ đó, hệ số góc của tiếp tuyến tương ứng là 0 nên ta suy ra ngay kết quả trên.

Nhờ áp dụng tính chất này, ta có thể giải quyết nhiều bài toán tương giao đồ thị liên quan đến tiếp tuyến rất gọn nhẹ.

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC.

Bài 1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm cấp hai là $f''(x) = x^2\cos x$. Hỏi trên miền $[2;4]$, tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu thì hệ số góc lớn nhất?*

Lời giải. Câu trả lời là $x = 2$.

Chú ý rằng $[2;4] \subset \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ nên $f''(x) = x^2\cos x < 0,\ \forall x \in [2;4]$ và $f'(x)$ nghịch biến. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại x_0 chính là $f'(x_0) \le f'(2),\ \forall x_0 \in [2;4]$.

Bài 2. *Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2020$ của đồ thị hàm số*

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-2020)(x-2021).$$

Lời giải. Rõ ràng ta cần tính $f'(2020)$ và $f(2020)$. Trước hết, dễ thấy rằng $f(2020) = 0$. Ngoài ra, đạo hàm của $f(x)$ sẽ gồm tổng của 2021 số hạng, mà mỗi số hạng gồm tích của 2020 thừa số. Khi thay $x = 2020$ vào, hầu hết các số hạng sẽ bằng 0, chỉ còn duy nhất một số hạng khác 0, thay 2020 vào, ta được:

$$f'(2020) = (2020-1)(2020-2)\cdots$$
$$\ldots(2020-2019)(2020-2021) = -2019!.$$

Từ đó ta viết được PT tiếp tuyến là:

$$y = -2019!(x-2020).$$

Bài 3 (Thi HSG TP. Hồ Chí Minh 2017) *Cho hàm số f xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(-x) = (x^2+2x+4)f(x+2)$$

và $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 0$.

Lời giải. Thay $x = 0$ và $x = -2$, ta có:

$$f^2(0) = 4f(2) \text{ và } f^2(2) = 4f(0).$$

Suy ra: $f^4(0) = 16f^2(2) = 64f(0) \Rightarrow f(0) = 4$ và $f(2) = 4$. Đạo hàm hai vế của đẳng thức đã cho, ta có: $-2f'(-x)\cdot f(-x) = (2x+2)\cdot f(x+2)$

$$+(x^2+2x+4)\cdot f'(x+2).$$

Lại thay $x = 0$ và $x = -2$, ta có:

$$-2f'(0)\cdot f(0) = 2\cdot f(2) + 4\cdot f'(2)$$

và $\quad -2f'(2)\cdot f(2) = -2\cdot f(0) + 4\cdot f'(0)$

hay $-2f'(0) = 2 + f'(2)$ và $-2f'(2) = -2 + f'(0)$. Giải hệ này, ta được $f'(0) = -2$. Vậy PT tiếp tuyến cần tìm là:

$$f(x) = -2(x-0) + 4 \text{ hay } f(x) = -2x + 4.$$

Nhận xét. Qua hai bài toán trên, ta thấy một điều cơ bản là: để viết PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, ta sẽ phải tính $f'(x_0)$ và $f(x_0)$. Ngược lại, từ PT tiếp tuyến cho trước, ta cũng sẽ có được hai thông tin tương ứng đó. Điều này được khai thác nhiều ở các bài "hàm ẩn", tức là không biết biểu thức tường minh của hàm số $f(x)$.

Bài 4. *Cho các hàm số*

$$y = f(x),\ y = f(f(x)),\ y = f(x^2+4)$$

có các đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Đường thẳng $x = 2$ cắt $(C_1),(C_2),(C_3)$ theo thứ tự tại M, N, P. Biết rằng phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt là $y = 3x+2$ và $y = 12x-5$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P.

Lời giải. Ta có PT tiếp tuyến của (C_1) tại M là $y = 3(x-2)+8$ nên $f'(2) = 3$ và $f(2) = 8$. Tương tự, PT tiếp tuyến của (C_2) tại N là $y = 12(x-2)+19$ nên $f'(2)\cdot f'(f(2)) = 12$ và $f(f(2)) = 19$.

Do $f'(2) = 3$ nên $f'(f(2)) = 4$. Suy ra $f(8) = 19$ và $f'(8) = 4$.

Chú ý rằng $(f(x^2+4))' = 2xf'(x^2+4)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến (C_3) tại P là $k = 4f'(8) = 16$. Từ đó, PT tiếp tuyến cần tìm là

$$y = 16(x-2)+19 = 16x-13.$$

Bài 5 (Thi HSG TP. Hồ Chí Minh 2019) *Cho hàm số $y = (x^2-1)^2$ có đồ thị (C). Xét điểm M di chuyển trên (C) và có hoành độ $a \in (-1;1)$. Tiếp tuyến của (C) ở M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt và khác M. Tính giá trị lớn nhất của tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.*

Lời giải. PT tiếp tuyến (d) của (C) ở M là

$$y = (4a^3-4a)(x-a) + a^4 - 2a^2 + 1$$

hay $\quad y = (4a^3-4a)x - 3a^4 + 2a^2 + 1.$

PT hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$(x^2-1)^2 = (4a^3-4a)x - 3a^4 + 2a^2 + 1.$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-2) = 0.$$

Do đó, hoành độ x_B, x_C là nghiệm của PT:

$$x^2+2ax+3a^2-2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 = 2-2a^2$$

nên với điều kiện $a \in (-1;1)$ thì PT có 2 nghiệm phân biệt. Theo định lý Viète thì $\begin{cases} x_B + x_C = -2a \\ x_B x_C = 3a^2 - 2 \end{cases}$

nên ta tính được:

$$x_B^2 + x_C^2 = 4 - 2a^2, x_B^4 + x_C^4 = -2(7a^4 - 4a^2 - 4).$$

Tung độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$T = \frac{(x_B^2 - 1)^2 + (x_C^2 - 1)^2}{2} = -7a^4 + 6a^2 + 1.$$

Khảo sát hàm số này trên $(-1;1)$, ta tìm được:

$$\max T = \frac{16}{7} \text{ đạt được khi } a = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Bài 6 (Dựa theo đề THPTQG 2018). *Một đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 1 tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$. Tính diện tích hình phẳng tạo bởi đồ thị hai hàm số $(C), (d)$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$.*

Lời giải. PT (d) có dạng $y = x + m$, thì vì tính tiếp xúc đã cho nên PT $x + m = \frac{ax+b}{x-1}$ sẽ có nghiệm kép $x = 2$ (vì khi quy đồng lên, ta có phương trình bậc hai), tức là có đẳng thức

$$x + m - \frac{ax+b}{x-1} = \frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

Đến đây, ta tính được diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^{0} \left|(x+m) - \frac{ax+b}{x-1}\right| dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{(x-2)^2}{1-x} dx = \frac{7}{2} + \ln 2 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 7 (Thi thử THPTQG 2019). *Xét hàm số $y = f(x)$ với đồ thị (C) và có đạo hàm là*

$$f'(x) = 2x(x-2)(2x+1).$$

Xác định hệ số góc k của đường thẳng tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải. Vì $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x$ nên ta có $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + c$ với c là hằng số. Gọi $(d): y = kx + e$ là PT tiếp tuyến cần tìm thì PT hoành độ giao điểm $(C),(d)$ là $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + c = kx + e$ sẽ có hai nghiệm bội là $x = m, x = n$ phân biệt; tuy nhiên vì bậc của PT này là 4 nên hai nghiệm trên đều phải là bội 2. Ta viết lại:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - kx + c - e = (x-m)^2(x-n)^2.$$

Đồng nhất hệ số x^3 và x^2 trong đẳng thức trên, ta có: $\begin{cases} -2(m+n) = -2 \\ m^2 + n^2 + 4mn = -2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} m + n = 1 \\ 2mn = -3 \end{cases}$.

Cuối cùng, ta tính được k thông qua hệ số của x, cụ thể là $k = 2mn(m+n) = -3$.

Bài 8. *Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$. Điểm $A(x_0, y_0)$ nằm trên (C) thỏa mãn tiếp tuyến (d) của (C) tại A cắt (P) tại hai điểm B, C sao cho tam giác OBC cân tại O. Tìm tất cả các giá trị có thể có của x_0.*

Lời giải. Ta có nhận xét rằng: ΔOBC cân tại O khi và chỉ khi BC song song với trục Ox (*điều này không khó, bạn đọc có thể tự chứng minh*). Từ đây suy ra tiếp tuyến $(d) // Ox$ kéo theo số x_0 phải là điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ nên ta tìm được hai điểm cực trị là $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 2$. Tuy nhiên, với $x_0 = 2$ thì $y_0 < 0$ nên ta phải loại trường hợp này. Giá trị $x_0 = 1$ là số duy nhất thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Nhờ việc liên hệ điều kiện tam giác cân với cạnh đáy song song với trục hoành, ta đã xử lý bài toán rất gọn gàng. Tiếp theo là một bài toán cũng dùng ý tưởng tương tự.

Bài 9 (Thi HSG TP. Hồ Chí Minh 2020). *Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx$ và $g(x) = \frac{x-m}{x-1}$, tham số $m \neq 1$ lần lượt có đồ thị là $(C_1),(C_2)$. Biết rằng tồn tại đúng hai số $x_0 \in (2;3)$ sao cho nếu gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ x_0 thuộc $(C_1),(C_2)$ và d_1, d_2 cắt nhau ở A, còn d_1, d_2 cắt trục Ox ở B, C thì $AB = AC$. Tìm tất cả các giá trị m.*

Lời giải. Ta biết rằng hệ số góc của AB, AC lần lượt là $f'(x_0), g'(x_0)$. Ngoài ra, tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi hai hệ số góc trên là đối

nhau và $\# 0$ nên ta cần có $f'(x_0) = -g'(x_0) \# 0$. Ta đưa về bài toán tìm m để PT trên có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $f'(x) = x - m$ và $g'(x) = \dfrac{m-1}{(x-1)^2}$ nên ta có

PT: $m - x_0 = \dfrac{m-1}{(x_0-1)^2} \# 0 \Leftrightarrow m = x_0 + \dfrac{x_0 - 1}{x_0^2 - 2x_0}$.

Xét hàm số $h(t) = t + \dfrac{t-1}{t^2-2t}$ với $t \in (2;3)$. Ta có:

$$h'(t) = 1 - \frac{t^2-2t+2}{t^2(t-2)^2} = \frac{(t-1)^2(t^2-2t-2)}{t^2(t-2)^2}.$$

Suy ra $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{3} \in (2;3)$. Khảo sát hàm này trên $(2;3)$, ta thấy tất cả các giá trị cần tìm của m là: $1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} < m < \dfrac{11}{3}$.

Bài 10. *Xét m là tham số thực thay đổi sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị là A, B. Gọi d_1, d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến kẻ từ A, B đến (C) và d_1, d_2 không song song với trục hoành Ox. Chứng minh rằng $d_1 // d_2$ và tìm m sao cho gốc tọa độ O cách đều hai đường thẳng đó.*

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = m \\ y = m - 4 \end{array}\right..$$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến của (C) thì $(d): y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + (x_0^3 - 3x_0^2 + m)$.

- Nếu (d) qua $A(0;m)$ thì

$$m = (3x_0^2 - 6x_0)(-x_0) + \left(x_0^3 - 3x_0^2 + m\right),\ x_0 \neq 0.$$

Khai triển ra và giải được $x_0 = \dfrac{3}{2}$.

- Nếu (d) qua $B(2;m-4)$ thì

$$m - \frac{28}{3} = (3x_0^2 - 6x_0)(-x_0) + \left(\frac{1}{3}x_0^3 - 3x_0^2 + m\right),\ x_0 \neq 2.$$

Khai triển ra và giải được $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó thay vào PT tiếp tuyến, ta có:

(d_1): $y = -\dfrac{9}{4}x + m$ và $(d_2): y = -\dfrac{9}{4}x + m + \dfrac{1}{2}$.

Thay tọa độ $O(0;0)$ vào các phương trình đường thẳng, ta có hai đại lượng là $m, m + \dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra điều kiện cần tìm là $m\left(m + \dfrac{1}{2}\right) < 0$.

Chú ý. *Ta có thể dùng tính chất đối xứng qua điểm uốn của đồ thị để suy ra ngay $d_1 // d_2$.*

Bài 11. *Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C). Xét các điểm A, B thay đổi thuộc (C), A thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song nhau và cắt trục tung lần lượt ở E, F. Hỏi có bao nhiêu cặp điểm A, B có hoành độ nguyên để $EF < 2021$?*

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3$ nên theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} y'(x_A) = y'(x_B) \\ x_A \neq x_B \end{cases} \Leftrightarrow x_A = -x_B.$$

PT tiếp tuyến tại A là $y = (3x_A^2 - 3)(x - x_A) + y_A$ nên ta có ngay:

$$y_E = (3x_A^2 - 3)(-x_A) + (x_A^3 - 3x_A + 1) = -2x_A^3 + 1.$$

Tương tự, ta có $y_F = -2x_B^3 + 1$ nên $EF = 2\left|x_A^3 - x_B^3\right| = 4\left|x_A\right|^3 = 4x_A^3$ (do $x_A > 0$). Ta cần có $EF < 2021$ và $y_A > 0$ nên $0 < x_A^3 < \dfrac{2021}{4}$ và $x_A^3 - 3x_A + 1 > 0$. Từ đó ta thấy $x_A \in \{2, 3, \ldots, 7\}$, ứng với mỗi giá trị này, ta tìm được duy nhất một điểm A và B, tức là sẽ có 6 cặp điểm (A, B) thỏa mãn.

Bài 12. *Xét đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^3 + 3ax + b$ với a, b là các số thực và $a < -1$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Chứng minh rằng (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.*

Lời giải. Tương tự bài trên, gọi $m = x_M$ và $n = x_N$ thì $m + n = 0$ và $m^2 = n^2 = 1 - a > 0$. Ta có $n - m = 2n$ và $y_N - y_M = 2n^3 + 6an$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2a; 2n^3 + 6an) \parallel (1; n^2 + 3a) = (1; 2a + 1)$.

Từ đó ta viết được PT MN là:

$$(2a+1)(x+n)-(y+n^3+3an-b)=0.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến MN là:

$$d[O;MN]=1 \Leftrightarrow \frac{|(2a+1)n-(n^3+3an-b)|}{\sqrt{(2a+1)^2+1}}=1.$$

Chú ý rằng $(2a+1)n-(n^3+3an-b)$

$$=(2a+1)n-n(2a+1)+b=b$$

nên $|b|=\sqrt{4a^2+4a+2}$. Tiếp theo, ta có $f'(x)=3x^2+3a$ nên hoành độ hai điểm cực trị là $x=\pm\sqrt{-a}$ và tương ứng ta tìm được $y_{CD}=-2a\sqrt{-a}+b$, $y_{CT}=2a\sqrt{-a}+b$ nên

$$y_{CD}y_{CT}=4a^3+b^2=4a^3+4a^2+4a+2.$$

Xét hàm số $f(a)=4a^3+4a^2+4a+2$ với $a<-1$ thì $f'(a)=12a^2+8a+4>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$ nên hàm số f đồng biến và $f(a)<f(-1)<0$. Điều này chứng tỏ $y_{CD}y_{CT}<0$. Vì hai điểm cực trị nằm khác phía với Ox nên nhờ vẽ bảng biến thiên, (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt.

Bài 13 (Thi thử ĐH của trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh 2016) *Với m là tham số thực, xét hàm số sau với đồ thị (C):*

$$f(x)=\frac{1}{5}(m-1)x^5+(m+1)x^2+(3m-3)x.$$

Giả sử tồn tại hai điểm A,B thuộc (C) mà tiếp tuyến của (C) tại A,B vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $\frac{1}{3}<m<3$.

Lời giải. Ta có: $f'(x)=(m-1)x^4+2(m+1)x+(3m-3)$.

Do tồn tại $A,B\in(C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại A,B vuông góc với nhau nên tích hệ số góc của chúng là -1, suy ra $f'(x_A)f'(x_B)=-1$ hay hai số $f'(x_A),f'(x_B)$ trái dấu nhau. Theo định lý hàm liên tục thì PT $f'(x)=0$ phải có nghiệm. Mặt khác, ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (m-1)x^4+2(m+1)x+(3m-3)=0$$

hay $m=\frac{x^4-2x+3}{x^4+2x+3}=1-\frac{4x}{x^4+2x+3}$. Theo BĐT Cauchy thì $x^4+3=x^4+1+1+1\ge 4|x|$ nên $x^4+2x+3>0,\forall x$. Do đó:

$$\begin{cases}x^4+2x+3\ge -2x\\ x^4+2x+3\ge 6x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x}{x^4+2x+3}\le\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{4x}{x^4+2x+3}\ge -2\end{cases}.$$

Suy ra $1-\frac{2}{3}\le m\le 1-(-2)\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le m\le 3$. Ứng với $m=3$, ta có:

$$f'(x)=2x^4+8x+6=2(x+1)^2(x^2-2x+3)\ge 0,\forall x$$

nên không thỏa mãn. Tương tự với $m=\frac{1}{3}$ thì $f'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^2(x^2+2x+3)\le 0$, cũng không thỏa mãn. Vậy nên ta có $\frac{1}{3}<m<3$.

Sau đây là một số bài toán trắc nghiệm với cùng chủ đề để bạn đọc tự rèn luyện thêm.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3+mx+1-m$ có đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) tại $A(1;2)$, cắt (C) tại B. Gọi S là tập hợp m thỏa mãn $AB=3\sqrt{2}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. 2 **B.** 1 **C.** -6 **D.** -8.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=(1+x^2)^5$, viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại x_0 thỏa mãn $f^{(9)}(x_0)=10!$, với $f^{(9)}(x_0)$ là đạo hàm cấp 9 của $f(x)$ tại $x=x_0$.

A. $y=160x+32$ **B.** $y=160x-128$

C. $y=160x+128$ **D.** $y=160x-32$.

Bài 3. Cho hàm số $y=x^3+m$. Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ là 1. Nếu khoảng cách từ O đến d là $\sqrt{10}$ thì giá trị của m là bao nhiêu?

(*Xem tiếp trang 24*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/530 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn điều kiện: $35(xyz+x+z)=52(xy+1)$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T2/530 (Lớp 7). Quanh đường tròn viết n số thực khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tích của hai số đứng kề nó. Tìm n và tìm các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết là a và b.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T3/530. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a < b < c$ và $\frac{1}{[a;b]}+\frac{1}{[b;c]}=\frac{1}{2020}$. Tìm giá trị lớn nhất của a.

CAO VĂN DŨNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T4/530. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường trung trực của đoạn thẳng AH lần lượt cắt các cạnh AB, AC tại P và Q. Trên tia đối của tia AO lấy điểm D (D không trùng A). Các tia DB, DC lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm khác là E và F. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DO, đường thẳng này lần lượt cắt các tia BF, CE, OP, OQ tại M, N, S, T. Chứng minh $MT = NS$.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, Bình Định)

Bài T5/530. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2-2xy+2\sqrt{2xy-y^2}=1$.

NGUYỄN LÁI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/530. Cho các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 1$ và $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1).$$

ĐÀO VĂN TRUNG
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

Bài T7/530. Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta luôn có:

$$|m_a-m_b|+|m_b-m_c|+|m_c-m_a| \geq \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

với a,b,c,m_a,m_b,m_c thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/530. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, có các đường cao BE, CF. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại S, OA cắt EF tại K. Gọi N là trung điểm của FC. Chứng minh rằng $\widehat{SAC}=\widehat{NKF}$.

TRẦN ĐẠI LỘ
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên)

Bài T9/530. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $\sin a+\sqrt{3}\cos b=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sin b+\sqrt{3}\cos a$.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/530. Cho x, y, z là các số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn $0 < x < y < z < p$. Biết x^3, y^3, z^3 có cùng số dư khi chia cho p, chứng minh $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho $x+y+z$.

TRẦN BÁ DUY LINH
(79 Nguyễn Huệ, phường 2, TX. Vĩnh Long, Vĩnh Long)

☞

☞ **Bài T11/530.** Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$$

với mọi số thực x, y.

NGUYỄN THỊ HIẾU NGUYÊN
(SV ĐH Y Dược TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/530. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm K bất kỳ; phân giác của các góc $\widehat{ADK}$ và $\widehat{BCK}$ cắt AB lần lượt tại E và F. Trên AC lấy điểm M sao cho MF song song với BD. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt DE tại N. Chứng minh rằng $AE^2+BF^2=2MN^2$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L1/530. Hai chất điểm A và B dao động điều hòa với cùng biên độ. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$), hai chất điểm đều đi qua vị trí cân bằng theo chiều dương. Biết chu kì dao động của các chất điểm A và B lần lượt là T và $0,5T$. Tính tỉ số giữa tốc độ của chất điểm A và tốc độ của chất điểm B tại thời điểm $t=\dfrac{T}{12}$.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/530. Đặt một điện áp xoay chiều vào hai đầu đoạn mạch $AMNB$. Trong đó, đoạn mạch AM chứa điện trở thuần R, đoạn MN chứa cuộn dây không thuần cảm có độ tự cảm L và điện trở r hoạt động. Biểu thức điện áp giữa hai đầu các đoạn mach AN, MB và NB lần lượt là

$$u_{AN}=2\sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi);\ U_{MB}=2U\cos(\omega t+\varphi);$$

$$U_{NB}=U'\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Xác định tỉ số $\dfrac{r}{R}$.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/530 (For 6th grade). Find integers x, y, z satisfying $35(xyz+x+z)=52(xy+1)$.

Problem T2/530 (For 7th grade). We mark n different real numbers on a circle ($n \geq 3$) such that each number is the product of its two adjacent numbers. If the first two numbers are a and b, then determine n and all other numbers.

Problem T3/530. Given positive integers a, b, c satisfying $a < b < c$ and $\dfrac{1}{[a;b]}+\dfrac{1}{[b;c]}=\dfrac{1}{2020}$.

Find the maximum value of a.

Problem T4/530. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (O). Let H be the orthocenter of ABC. The perpendicular bisector of AH respectively intersects the sides AB, AC at P and Q. On the opposite ray of the ray AO choose a point D (D is different from A). The rays DB, DC respectively intersect (O) at E and F other than B and C. Through D draw perpendicular line to DO, this line intersects BF, CE, OP, OQ respectively at M, N, S, T. Prove that $MT = NS$.

Problem T5/530. Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying $x^2-2xy+2\sqrt{2xy-y^2}=1$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/530. Consider all numbers a, b, c satisfying $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 1$ and $a + b + c = 2$. Find the maximum value of the expression

$$P=(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1).$$

Problem T7/530. For an arbitrary triangle ABC, show that

$$|m_a-m_b|+|m_b-m_c|+|m_c-m_a| \geq \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

☞

☞ where a, b, c, m_a, m_b, m_c respectively are the lengths of the sides BC, CA, AB and the medians from the vertices A, B, C.

Problem T8/530. Given an acute triangle ABC ($AB < AC$) inscribed in a circle O. Let BE, CF be two altitudes of the triangle. The line EF intersects the line BC at S, OA intersects EF at K. Let N be the midpoint of FC. Show that $\widehat{SAC} = \widehat{NKF}$.

Problem T9/530. Consider all pairs of real numbers a, b such that $\sin a + \sqrt{3}\cos b = 2$. Find the minimum value of the expression $P = \sin b + \sqrt{3}\cos a$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/530. Suppose that x, y, z are positive numbers and p is a prime number satisfying $0 < x < y < z < p$. Given that x^3, y^3, z^3 have the same remainder when dividing by p. Show that $x^2 + y^2 + z^2$ is divisible by $x + y + z$.

Problem T11/530. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

for all real numbers x, y.

Problem T12/530. Given the square $ABCD$. On the side AB choose an arbitrary point K. The angle bisectors of the angles $\widehat{ADK}$ and $\widehat{BCK}$ intersect AB respectively at E and F. On AC, choose the point M such that MF is parallel to BD. From M draw the line parallel to AB and it intersects DE at N. Show that $AE^2 + BF^2 = 2MN^2$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

CÁC BÀI TOÁN ... (*Tiếp theo trang 21*)

A. $m \in \{-8; 12\}$ **B.** $m = 12$

C. $m = \pm 2\sqrt{5}$ **D.** $m \in \{-14; 6\}$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f^3(1-x) + f(1-x^2) = 3x^2 - x \text{ với mọi } x.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y = 3x - 4$ **B.** $y = x - 1$

C. $y = -x + 1$ **D.** $y = x + 1$.

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(-2) = 3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ là $y = 3x + 4$. Đặt $g(x) = f^2(x)$, tính $g'(-2)$.

A. -4 **B.** -12 **C.** 12 **D.** 6.

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm A thuộc trục tung và tung độ thuộc $[-2021; 2021]$ để từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) mà hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2021 **B.** 2019 **C.** 2020 **D.** 2018.

Bài 7. Cho hai đường cong $(H): y = \dfrac{1}{x}$ và $(C): y = x^3 - 3x^2 - 8x + 1$. Điểm $A(x_0, y_0)$ nằm trên (C) thỏa mãn tiếp tuyến tại A của (C) cắt (P) tại hai điểm B, C sao cho $OB = OC$. Gọi tập giá trị có thể có của x_0 là S. Tính tích các phần tử của S.

A. 0 **B.** 4 **C.** -3 **D.** 7.

Bài 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C). Xét hai điểm $A, B \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm này song song với nhau. Các tiếp tuyến này cắt hai tiệm cận của (C) tại các điểm M, N, P, Q. Tính chu vi nhỏ nhất của tứ giác có các đỉnh là M, N, P, Q.

A. 8 **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 4.

Bài T1/526 (Lớp 6). *Cho hai số m, n nguyên dương và nguyên tố cùng nhau thỏa mãn m + n = 90. Tìm giá trị lớn nhất của tích m.n.*

Lời giải. *Nhận xét*: Từ $m + n = 90$ suy ra hai số nguyên dương m, n phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà m, n nguyên tố cùng nhau nên m, n là hai số lẻ. Giả sử $m > n$ thì hiệu $m - n = 2k$ là số nguyên dương chẵn. Nếu $m - n = 2$, do $m + n = 90$ thì $m = 46$ và $n = 44$ (không thỏa mãn). Vậy $k \geq 2$.

Cách 1. Từ $m - n = 2k$ có $90 = n + m = n + n + 2k = 2(n + k)$ suy ra $n = 45 - k$ và $m = 45 + k$. Tích $T = m.n = (45 + k)(45 - k) = 45^2 - k^2$. Để tích $T = m.n$ lớn nhất thì k^2 nhỏ nhất, tức là $k = 2$, lúc đó $n = 43$ và $m = 47$ với tích lớn nhất là

$$T = 47.43 = 2021.$$

Cách 2. Từ $(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2m.n$

và $(m - n)^2 = m^2 + n^2 - 2m.n$ có tích

$4T = 4m.n = (m + n)^2 - (m - n)^2 = 90^2 - (m - n)^2$.

Để tích $4m.n$ lớn nhất thì $(m - n)^2$ nhỏ nhất, tức là $m - n = 4$, lúc đó $m = 47$ và $n = 43$ với tích là $T = 47.43 = 2021$. Vậy tích $T = m.n$ lớn nhất khi $(m; n)$ bằng (47; 43) hoặc (43; 47).

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt. **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Hải Yến, Lưu Thanh Hà*, 6A1, THCS Kim Xá, Vĩnh Tường; **Nghệ An**: *Đinh Trần Đức Phúc*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Đinh A Na, Nguyễn Sỹ Đức Trí, Thái Bá Nhân, Nguyễn Thái Triệu, Bùi Thị Thùy Linh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Đặng Ngọc Duy*, 5A, TH Kế An 3, H. Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/525 (Lớp 7). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^{2021} + n + 1$ là số nguyên tố.*

Lời giải. (Của nhiều bạn) Khi $n = 1$ thì $n^{2021} + n + 1 = 3$ là số nguyên tố. Với $n \geq 2$ ta có:

$$n^{2021} + n + 1 = \left(n^{2021} - n^2\right) + \left(n^2 + n + 1\right)$$
$$= n^2\left(n^{2019} - 1\right) + \left(n^2 + n + 1\right)$$

là một đa thức chia hết cho $n^2 + n + 1$, vì $n^{2019} - 1 = \left(n^3\right)^{673} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1 = (n - 1)\left(n^2 + n + 1\right)$. Vậy khi $n > 1$ thì $n^{2021} + n + 1$ là hợp số. Tất cả giá trị nguyên dương n sao cho $n^{2021} + n + 1$ là số nguyên tố là $n = 1$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Thái Minh Quân*, 7B, *Đinh A Na, Nguyễn Trọng Bảo, Nguyễn Sỹ Đức Trí, Nguyễn Quốc Hoàng Anh, Thái Bá Nhân, Nguyễn Thái Triệu, Bùi Thị Thùy Linh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS xã Pom Lót, huyện Điện Biên; **Bình Định:** *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 7A4, THCS phường Bình Định, thị xã An Nhơn; **Hà Nội:** *Hoàng Tuấn Anh*, 7T, THCS Lương Thế Vinh; **Sóc Trăng:** *Đặng Ngọc Duy*, 5A, TH Kế An 3, H. Kế Sách.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/526. *Giải phương trình*

$$x^4 - 6x - 1 = 2(x + 4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}.$$

Lời giải. ĐK: $2x^3 + 8x^2 + 6x + 1 \geq 0$ (1).

Phương trình đã cho có thể viết thành :

$$x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 +$$
$$+2(x + 4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1} + \left(2x^3 + 8x^2 + 6x + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + 4\right)^2 = \left(x + 4 + \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}\right) \times$$
$$\times \left(x^2 + 2x + 8 + \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}\right) = 0 \ (2).$$

Vì thừa số thứ hai

$$x^2 + 2x + 8 + \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}$$
$$= (x + 1)^2 + 7 + \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1} > 0$$

nên $(2) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}$

$\Leftrightarrow x^4 = 2x^3 + 8x^2 + 6x + 1$ (3)

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2x+1\right)-4x\left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2+2x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^2-4x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-4x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2\pm\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Các giá trị này là nghiệm của (3) và thỏa mãn điều kiện (1). Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là $\left\{-1;\ 2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}\right\}$.

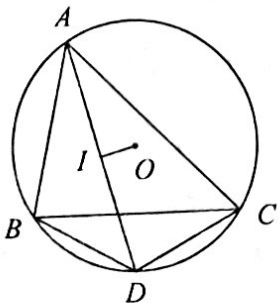
Nhận xét. Điểm chung trong lời giải của các bạn là biến đổi bài toán để được một phương trình dạng tích; loại các thừa số luôn dương, được $(x+1)^2\left(x^2-4x-1\right)=0$; suy ra kết quả.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Phú Thọ: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành, *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo, TP. Hưng Yên, *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Thái Minh Quân*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/526. *Cho tam giác nhọn ABC có AB + AC = 2BC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M là điểm chính giữa của cung lớn BC. Đường thẳng MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại N. Đường thẳng OI cắt BC tại P. Chứng minh rằng đường thẳng PN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.*



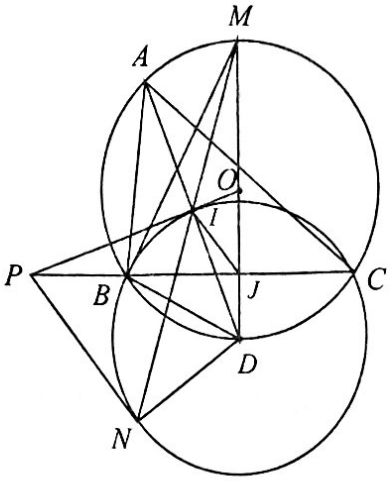
Lời giải. Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC, ta có kết quả quen thuộc $DB = DI = DC$ nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABDC$ ta có:

$$AB.CD + AC.BD = AD.BC.$$

Suy ra: $(AB + AC).DI = BC.DA.$

Từ giả thiết $AB + AC = 2BC$, suy ra $DA = 2DI$.



Do đó I là trung điểm AD, suy ra $\widehat{AIO}=90°$. Gọi J là trung điểm của BC, dễ thấy M, O, J, D thẳng hàng và $MD \perp BC$. Vì MD là đường kính của (O) nên $MB \perp DB$, suy ra MB là tiếp tuyến của đường tròn (D). Áp dụng tính chất phương tích ta có $MB^2 = MI.MN$. Lại áp dụng hệ thức trong tam giác vuông MBD ta có $MB^2 = MJ.MD$.

Suy ra $MI.MN = MJ.MD$, dẫn tới tứ giác $IJDN$ là tứ giác nội tiếp (1).

Vì $PI \perp DI$ nên tứ giác $PIJD$ nội tiếp (2)

Từ (1), (2) suy ra P, I, J, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính PD, nên $PN \perp DN$. Do đó PN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/526. *Xác định tất cả các cặp số nguyên (a; b) sao cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+2ax-3a-1=0 & (1) \\ y^2-2by+x=0 & (2) \end{cases}$$

có đúng 3 nghiệm thực (x; y) phân biệt.

Lời giải. Nhận thấy với mỗi giá trị x thì PT(2) ẩn y có không quá hai nghiệm. Vì vậy, để hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt thì PT(1) ẩn x phải có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta_x = a^2+3a+1>0$ (*).

Với ĐK(*), PT(1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ ở đó: $x_1 = -a - \sqrt{a^2+3a+1}$; $x_2 = -a + \sqrt{a^2+3a+1}$.

Thay x_1, x_2 thì PT(2) ẩn y có dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} y^2 - 2by + x_1 = 0 & (3) \\ y^2 - 2by + x_2 = 0 & (4) \end{array}\right..$$

Nhận thấy với mỗi giá trị x_1, x_2 thì mỗi PT(3) và PT(4) ẩn y có không quá hai nghiệm. Do đó để hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt thì xảy ra hai khả năng:

a) PT(3) có nghiệm kép và PT(4) có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} \Delta'_3 = b^2 - x_1 = 0 \\ \Delta'_4 = b^2 - x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = x_1 \\ b^2 > x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 > x_2$$

(điều này mâu thuẫn vì $x_1 < x_2$).

b) PT(4) có nghiệm kép và PT(3) có hai nghiệm phân biệt, tức là: $\begin{cases} \Delta'_3 = b^2 - x_1 > 0 \\ \Delta'_4 = b^2 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 > x_1 \\ b^2 = x_2 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} a^2 + 3a + 1 > 0 \\ b^2 = -a + \sqrt{a^2+3a+1} \ (5) \end{cases}$.

Ta cần xác định các số nguyên a, b sao cho

$a^2 + 3a + 1 = c^2$ $(c \in \mathbb{N}^*)$ (6) $\Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 4 = 4c^2$

$\Leftrightarrow (2a+3)^2 - (2c)^2 = 5 \Leftrightarrow (2a+2c+3)(2a-2c+3) = 5.$

Do $c \in \mathbb{N}^*$ nên $2a + 2c + 3 > 2a - 2c + 3$, mà $5 = (-1).(-5) = 1.5$ nên xảy ra hai trường hợp:

- $\begin{cases} 2a+2c+3 = 5 \\ 2a-2c+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2a+2c+3 = -1 \\ 2a-2c+3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases}$.

Với $a = 0$ thay vào (5) tìm được $b^2 = 0$, nên $b = 0$. Với $a = -3$ thay vào (5) tìm được $b^2 = 4$, nên b bằng 2 hoặc -2. Vậy các cặp số nguyên (a, b) để hệ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

$$(0\,;1), (0\,;-1), (-3\,;2), (-3\,;-2).$$

Nhận xét. Bài này yêu cầu tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình bậc hai có hai ẩn số có ba nghiệm thực phân biệt. Rất ít bạn tham gia giải. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Trần Minh Tú*, 9C. THCS Lương Thế Vinh; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 8A1. THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/526. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1.$$

Lời giải. Do a, b, c là các số thực dương nên ta có

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca > c^2 + ab + bc + ca = (b+c)(c+a).$$

Suy ra: $\dfrac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Tương tự: $\dfrac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} \geq \dfrac{(b-c)^2}{(a+b+c)^2}$;

$$\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

Do đó:

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc loại đơn giản. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Tuấn Đạt*, 10T, THPT Tam Nông, Tam Nông; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Nguyễn Thùy Linh*, 10T2, *Phạm Đức Mạnh*, 10T1, *Trần Văn Quân*, *Bùi Huy Tài*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Văn Huy*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định**: *Vũ Tiến Đạt*, 10T, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Với ĐK(*), PT(1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ ở đó: $x_1 = -a - \sqrt{a^2+3a+1}$; $x_2 = -a + \sqrt{a^2+3a+1}$.

Thay x_1, x_2 thì PT(2) ẩn y có dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} y^2 - 2by + x_1 = 0 & (3) \\ y^2 - 2by + x_2 = 0 & (4) \end{array}\right..$$

Nhận thấy với mỗi giá trị x_1, x_2 thì mỗi PT(3) và PT(4) ẩn y có không quá hai nghiệm. Do đó để hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt thì xảy ra hai khả năng:

a) PT(3) có nghiệm kép và PT(4) có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} \Delta'_3 = b^2 - x_1 = 0 \\ \Delta'_4 = b^2 - x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = x_1 \\ b^2 > x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 > x_2$$

(điều này mâu thuẫn vì $x_1 < x_2$).

b) PT(4) có nghiệm kép và PT(3) có hai nghiệm phân biệt, tức là: $\begin{cases} \Delta'_3 = b^2 - x_1 > 0 \\ \Delta'_4 = b^2 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 > x_1 \\ b^2 = x_2 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} a^2 + 3a + 1 > 0 \\ b^2 = -a + \sqrt{a^2+3a+1} \ (5) \end{cases}$.

Ta cần xác định các số nguyên a, b sao cho

$a^2 + 3a + 1 = c^2$ $(c \in \mathbb{N}^*)$ (6) $\Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 4 = 4c^2$

$\Leftrightarrow (2a+3)^2 - (2c)^2 = 5 \Leftrightarrow (2a+2c+3)(2a-2c+3) = 5.$

Do $c \in \mathbb{N}^*$ nên $2a + 2c + 3 > 2a - 2c + 3$, mà $5 = (-1).(-5) = 1.5$ nên xảy ra hai trường hợp:

- $\begin{cases} 2a + 2c + 3 = 5 \\ 2a - 2c + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2a + 2c + 3 = -1 \\ 2a - 2c + 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases}$.

Với $a = 0$ thay vào (5) tìm được $b^2 = 0$, nên $b = 0$. Với $a = -3$ thay vào (5) tìm được $b^2 = 4$, nên b bằng 2 hoặc -2. Vậy các cặp số nguyên (a, b) để hệ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

$$(0 ; 1), (0 ; -1), (-3 ; 2), (-3 ; -2).$$

Nhận xét. Bài này yêu cầu tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình bậc hai có hai ẩn số có ba nghiệm thực phân biệt. Rất ít bạn tham gia giải. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Trần Minh Tú*, 9C. THCS Lương Thế Vinh; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 8A1. THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/526. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:* $\dfrac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \dfrac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \dfrac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1.$

Lời giải. Do a, b, c là các số thực dương nên ta có

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca > c^2 + ab + bc + ca = (b+c)(c+a).$$

Suy ra: $\dfrac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Tương tự: $\dfrac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} \geq \dfrac{(b-c)^2}{(a+b+c)^2}$;

$$\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

Do đó: $\dfrac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \dfrac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \dfrac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$

$$\geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc loại đơn giản. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Tuấn Đạt*, 10T, THPT Tam Nông, Tam Nông; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Nguyễn Thùy Linh*, 10T2, *Phạm Đức Mạnh*, 10T1, *Trần Văn Quân*, *Bùi Huy Tài*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Văn Huy*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định**: *Vũ Tiến Đạt*, 10T, *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/526. *Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao là h_a, h_b, h_c và nửa chu vi p thỏa mãn hệ thức $h_a^2+h_b^2+h_c^2=p^2$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.*

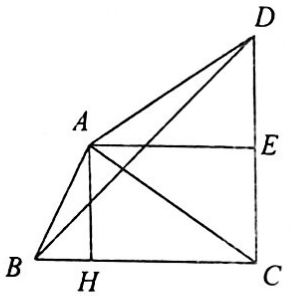
Giải. Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2\le p^2 \quad (*).$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Chứng minh 1. (Của các bạn *Phạm Đức Mạnh, Đoàn Hoàng Quân, Trần Văn Quân*, [1])

Dựng $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{HA}$, $AE\perp CD$. Khi ấy $CE=HA=\dfrac{CD}{2}$. Suy ra tam giác ACD cân và $AC=AD$. Theo Định lí Pythagore:



$$BC^2+CD^2=BD^2\le(AB+AD)^2=(AB+AC)^2.$$

Suy ra $4AH^2=CD^2\le(AB+AC)^2-BC^2$

hay $h_a^2=\dfrac{CD^2}{4}\le\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4}$. Tương tự:

$$h_b^2\le\frac{(a+c)^2-b^2}{4};\ h_c^2\le\frac{(a+b)^2-c^2}{4}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta suy ra:

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2\le\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{4}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{4}=p^2.$$

Chứng minh 2. (Của tác giả và nhiều bạn khác)

Đặt $x=a+b-c,\ y=b+c-a,\ z=a+c-b.$ Khi ấy: $a=\dfrac{x+z}{2}, b=\dfrac{x+y}{2}, c=\dfrac{y+z}{2}$,

$$2p=a+b+c=x+y+z.$$

Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{4}.$$

Vì $x+y\ge2\sqrt{xy}$ nên $\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}$. Do đó:

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2=\left(\frac{2S}{a}\right)^2+\left(\frac{2S}{b}\right)^2+\left(\frac{2S}{b}\right)^2$$

$$=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$=\frac{(x+y+z)xyz}{4}\left(\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{4}{(x+z)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}\right)$$

$$\le\frac{(x+y+z)xyz}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{(x+y+z)^2}{4}=p^2.$$

Nhận xét. Trong [1] có khá nhiều bất đẳng thức liên quan đến h_a, h_b, h_c, trong đó có (*).

[1] Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2017.

Bài này dễ. Nhiều bạn, trong đó có cả các bạn học sinh THCS và THPT không chuyên tham gia giải. Tất cả các bạn đều có lời giải đúng.

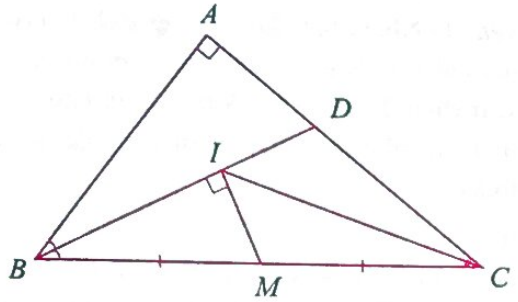
Bà Rịa – Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Hồ Phạm Tú An*, 12T1, *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Nguyễn Trọng An*, 10A1, THPT Hoài Đức A, *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên**: *Nguyễn Thùy Linh*, 10 Toán 2, *Phạm Đức Mạnh, Đoàn Hoàng Quân*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Phú Thọ**: *Nguyễn Tuấn Đạt*, 10A1, THPT Tam Nông; **Phú Yên**: *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường phổ thông Duy Tân; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, *Lê Hùng Tiến Quốc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, H. Kế Sách; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, *Phan Tất Hoàng Minh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc**: *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/526. *Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và AC > AB, AM là trung tuyến. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp đáy. Giả sử IM vuông góc với BI. Tính giá trị biểu thức*

$$T=\frac{V_{S.AIB}}{V_{S.AIC}}+\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.BIC}}+\frac{V_{S.BIC}}{V_{S.AIB}}.$$

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của BI và AC. Khi đó:

$$\widehat{DIC}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=45^0 \Rightarrow \widehat{MIC}=45^0$$

$\Rightarrow \Delta MIC=\Delta DIC$ (g.c.g) $\Rightarrow MC=CD$.

Từ tính chất đường phân giác ta thấy:

$$\frac{MC}{BC}=\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{AC}{BC+AB}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow BC+AB=2AC$ (1).

Mặt khác do $AC^2=BC^2-AB^2=2AC(BC-AB)$, nên

$AC=2(BC-AB)\Rightarrow AC-2BC+2AB=0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AC-2BC+2(2AC-BC)=0\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}\ (3).$$

Từ (3) kết hợp với (1) có:

$$\frac{BC+AB}{2BC}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}\ (4)\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\ (5).$$

Dựng $SH\perp(ABC)$ và gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ (3), (4), (5) ta có:

$$T=\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AB}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AC}+\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AC}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.BC}+\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.BC}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AB}$$

$$=\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{3}=\frac{193}{60}.$$

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều có đáp số đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Vĩnh Phúc**: *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Tất Đạt*, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/526. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{3}{2^n-1}\ (1).$$

Lời giải. Cách 1. Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên: $(b+c)-a>0$; $(c+a)-b>0$; $(a+b)-c>0$. Suy ra:

$(b+c)^n-a^n>0$; $(c+a)^n-b^n>0$; $(a+b)^n-c^n>0$.

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}-\frac{1}{2^n-1}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}-\frac{1}{2^n-1}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}-\frac{1}{2^n-1}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^na^n-(b+c)^n}{(2^n-1)\left[(b+c)^n-a^n\right]}+\frac{2^nb^n-(c+a)^n}{(2^n-1)\left[(c+a)^n-b^n\right]}+\frac{2^nc^n-(a+b)^n}{(2^n-1)\left[(a+b)^n-c^n\right]}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^na^n-(b+c)^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{2^nc^n-(a+b)^n}{(a+b)^n-c^n}>0\ (2).$$

Biểu thức ở vế trái của các BĐT (1) và (2) là các biểu thức đối xứng nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a\ge b\ge c>0$. Khi đó:

$$\begin{cases}2^na^n-(b+c)^n\ge0\ge2^nc^n-(a+b)^n\\0<(b+c)^n-a^n\le(c+a)^n-b^n\le(a+b)^n-c^n\end{cases}.$$

Suy ra: $\dfrac{2^na^n-(b+c)^n}{(b+c)^n-a^n}\ge\dfrac{2^na^n-(b+c)^n}{(c+a)^n-b^n}$ (3);

$\dfrac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}=\dfrac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}$ (4);

$$\frac{2^n c^n-(a+b)^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{2^n c^n-(a+b)^n}{(c+a)^n-b^n}\quad(5).$$

Cộng từng vế (3), (4), (5) ta được:

$$VT(2)\ge\frac{\left[2^n a^n-(b+c)^n\right]+\left[2^n b^n-(c+a)^n\right]+\left[2^n c^n-(a+b)^n\right]}{(c+a)^n-b^n}.$$

Mặt khác:

$$\left[2^n a^n-(b+c)^n\right]+\left[2^n b^n-(c+a)^n\right]+\left[2^n c^n-(a+b)^n\right]$$
$$=\left[2^{n-1}(a^n+b^n)-(a+b)^n\right]+\left[2^{n-1}(b^n+c^n)-(b+c)^n\right]$$
$$+\left[2^{n-1}(c^n+a^n)-(c+a)^n\right]\ge 0\quad(6).$$

BĐT(6) đúng là do áp dụng BĐT trung bình lũy thừa để đánh giá từng biểu thức trong dấu móc vuông. Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra khi $a=b=c$. Vậy (1) được chứng minh.

Cách 2. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$x^n+y^n\ge\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}},\forall x,y>0,n\in\mathbb{N}^*\quad(*)$$

bằng quy nạp.

Với $n=1$ thì (*) hiển nhiên đúng. Giả sử (*) đúng với mọi $k\le n$, tức là: $x^k+y^k\ge\frac{(x+y)^k}{2^{k-1}},\forall k\le n.$

Ta có: $x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$

$$\ge(x+y).\frac{(x+y)^k}{2^{k-1}}-xy.\frac{(x+y)^{k-1}}{2^{k-2}}$$
$$=\frac{(x+y)^{k-1}\left[(x+y)^2-2xy\right]}{2^{k-1}}$$
$$=\frac{(x+y)^{k-1}(x^2+y^2)}{2^{k-1}}$$
$$\ge\frac{(x+y)^{k-1}(x+y)^2}{2^{k-1}.2}=\frac{(x+y)^{k+1}}{2^k}.$$

Vậy BĐT(*) đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (*) đúng với mọi n nguyên dương.

Áp dụng BĐT(*) ta có: $2^{n-1}(a^n+b^n)\ge(a+b)^n$;

$2^{n-1}(b^n+c^n)\ge(b+c)^n$; $2^{n-1}(c^n+a^n)\ge(c+a)^n$.

Suy ra: $\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(a+c)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}$

$$=\frac{(a^n)^2}{a^n\left[(b+c)^n-a^n\right]}+\frac{(b^n)^2}{b^n\left[(a+c)^n-b^n\right]}+\frac{(c^n)^2}{c^n\left[(a+b)^n-c^n\right]}$$
$$\ge\frac{(a^n+b^n+c^n)^2}{a^n(b+c)^n+b^n(c+a)^n+c^n(a+b)^n-\left[(a^n)^2+(b^n)^2+(c^n)^2\right]}$$
$$\ge\frac{3(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}{2^{n-1}a^n(b^n+c^n)+2^{n-1}b^n(c^n+a^n)+2^{n-1}c^n(a^n+b^n)-(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}$$
$$=\frac{3(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}{(2^n-1)(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}=\frac{3}{2^n-1}.$$ Do đó:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(a+c)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{3}{2^n-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã sử dụng BĐT(*) (ở cách 2) để giải bài này. Ngoài cách chứng minh bằng quy nạp như ở cách 2, BĐT(*) có thể được chứng minh gọn hơn bằng phương pháp hàm số hoặc sử dụng BĐT Hoder.

2) Cách giải 1 là của bạn *Ngô Văn Thái*, tác giả đề toán, cách giải 2 thuộc về bạn *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và một số bạn khác. Ngoài hai cách giải trên, các bạn tham gia còn đưa ra một số cách giải khác. Ngoài bạn *Huy*, các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông, *Đào Quang Anh*, 8E1, TH, THCS &THPT Everest, Q. Bắc Từ Liêm; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tuấn Đạt*, 10A1, THPT Tam Nông, H. Tam Nông; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, H. Kế Sách; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn. TP. Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

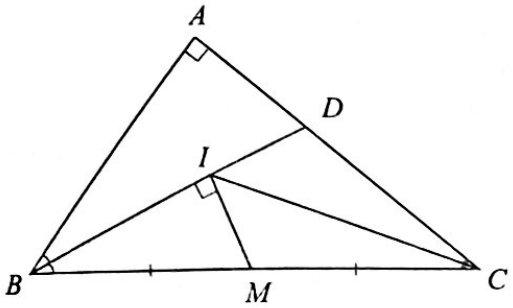
Bài T10/526. *Với mỗi số nguyên dương n, đặt* $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}\right]$, *trong đó ký hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tìm tất cả các số nguyên dương n để* S_n *là lũy thừa của một số nguyên tố.*

Lời giải. (Dựa theo ý của bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Bài T8/526. *Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và AC > AB, AM là trung tuyến. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp đáy. Giả sử IM vuông góc với BI. Tính giá trị biểu thức*

$$T=\frac{V_{S.AIB}}{V_{S.AIC}}+\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.BIC}}+\frac{V_{S.BIC}}{V_{S.AIB}}.$$

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của BI và AC. Khi đó:

$$\widehat{DIC}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=45^0\Rightarrow\widehat{MIC}=45^0$$

$\Rightarrow \Delta MIC=\Delta DIC$ (g.c.g) $\Rightarrow MC=CD$.

Từ tính chất đường phân giác ta thấy:

$$\frac{MC}{BC}=\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{AC}{BC+AB}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow BC+AB=2AC$ (1).

Mặt khác do $AC^2=BC^2-AB^2=2AC(BC-AB)$, nên

$AC=2(BC-AB)\Rightarrow AC-2BC+2AB=0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AC-2BC+2(2AC-BC)=0\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}\ (3).$$

Từ (3) kết hợp với (1) có:

$$\frac{BC+AB}{2BC}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}\ (4)\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\ (5).$$

Dựng $SH\perp(ABC)$ và gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ (3), (4), (5) ta có:

$$T=\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AB}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AC}+\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AC}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.BC}+\frac{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.BC}{\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}r.AB}$$

$$=\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{3}=\frac{193}{60}.$$

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều có đáp số đúng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Vĩnh Phúc**: *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Tất Đạt*, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Phạm Ngọc Long*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/526. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{3}{2^n-1}\ (1).$$

Lời giải. Cách 1. Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên: $(b+c)-a>0$; $(c+a)-b>0$; $(a+b)-c>0$. Suy ra:

$(b+c)^n-a^n>0$; $(c+a)^n-b^n>0$; $(a+b)^n-c^n>0$.

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}-\frac{1}{2^n-1}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}-\frac{1}{2^n-1}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}-\frac{1}{2^n-1}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^na^n-(b+c)^n}{(2^n-1)\left[(b+c)^n-a^n\right]}+\frac{2^nb^n-(c+a)^n}{(2^n-1)\left[(c+a)^n-b^n\right]}+\frac{2^nc^n-(a+b)^n}{(2^n-1)\left[(a+b)^n-c^n\right]}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^na^n-(b+c)^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{2^nc^n-(a+b)^n}{(a+b)^n-c^n}>0\ (2).$$

Biểu thức ở vế trái của các BĐT (1) và (2) là các biểu thức đối xứng nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a\ge b\ge c>0$. Khi đó:

$$\begin{cases}2^na^n-(b+c)^n\ge0\ge2^nc^n-(a+b)^n\\0<(b+c)^n-a^n\le(c+a)^n-b^n\le(a+b)^n-c^n\end{cases}.$$

Suy ra: $\dfrac{2^na^n-(b+c)^n}{(b+c)^n-a^n}\ge\dfrac{2^na^n-(b+c)^n}{(c+a)^n-b^n}$ (3);

$\dfrac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}=\dfrac{2^nb^n-(c+a)^n}{(c+a)^n-b^n}$ (4);

$$\frac{2^n c^n-(a+b)^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{2^n c^n-(a+b)^n}{(c+a)^n-b^n}\quad(5).$$

Cộng từng vế (3), (4), (5) ta được:

$$VT(2)\ge\frac{\left[2^n a^n-(b+c)^n\right]+\left[2^n b^n-(c+a)^n\right]+\left[2^n c^n-(a+b)^n\right]}{(c+a)^n-b^n}.$$

Mặt khác:

$$\left[2^n a^n-(b+c)^n\right]+\left[2^n b^n-(c+a)^n\right]+\left[2^n c^n-(a+b)^n\right]$$
$$=\left[2^{n-1}(a^n+b^n)-(a+b)^n\right]+\left[2^{n-1}(b^n+c^n)-(b+c)^n\right]$$
$$+\left[2^{n-1}(c^n+a^n)-(c+a)^n\right]\ge 0\quad(6).$$

BĐT(6) đúng là do áp dụng BĐT trung bình lũy thừa để đánh giá từng biểu thức trong dấu móc vuông. Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra khi $a=b=c$. Vậy (1) được chứng minh.

Cách 2. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$x^n+y^n\ge\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}},\forall x,y>0,n\in\mathbb{N}^*\quad(*)$$

bằng quy nạp.

Với $n=1$ thì (*) hiển nhiên đúng. Giả sử (*) đúng với mọi $k\le n$, tức là: $x^k+y^k\ge\frac{(x+y)^k}{2^{k-1}},\forall k\le n.$

Ta có: $x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$

$$\ge(x+y).\frac{(x+y)^k}{2^{k-1}}-xy.\frac{(x+y)^{k-1}}{2^{k-2}}$$
$$=\frac{(x+y)^{k-1}\left[(x+y)^2-2xy\right]}{2^{k-1}}$$
$$=\frac{(x+y)^{k-1}(x^2+y^2)}{2^{k-1}}$$
$$\ge\frac{(x+y)^{k-1}(x+y)^2}{2^{k-1}.2}=\frac{(x+y)^{k+1}}{2^k}.$$

Vậy BĐT(*) đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (*) đúng với mọi n nguyên dương.

Áp dụng BĐT(*) ta có: $2^{n-1}(a^n+b^n)\ge(a+b)^n$;

$2^{n-1}(b^n+c^n)\ge(b+c)^n$; $2^{n-1}(c^n+a^n)\ge(c+a)^n$.

Suy ra: $\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(a+c)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}$

$$=\frac{(a^n)^2}{a^n\left[(b+c)^n-a^n\right]}+\frac{(b^n)^2}{b^n\left[(a+c)^n-b^n\right]}+\frac{(c^n)^2}{c^n\left[(a+b)^n-c^n\right]}$$
$$\ge\frac{(a^n+b^n+c^n)^2}{a^n(b+c)^n+b^n(c+a)^n+c^n(a+b)^n-\left[(a^n)^2+(b^n)^2+(c^n)^2\right]}$$
$$\ge\frac{3(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}{2^{n-1}a^n(b^n+c^n)+2^{n-1}b^n(c^n+a^n)+2^{n-1}c^n(a^n+b^n)-(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}$$
$$=\frac{3(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}{(2^n-1)(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)}=\frac{3}{2^n-1}.$$ Do đó:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(a+c)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}\ge\frac{3}{2^n-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã sử dụng BĐT(*) (ở cách 2) để giải bài này. Ngoài cách chứng minh bằng quy nạp như ở cách 2, BĐT(*) có thể được chứng minh gọn hơn bằng phương pháp hàm số hoặc sử dụng BĐT Hoder.

2) Cách giải 1 là của bạn *Ngô Văn Thái*, tác giả đề toán, cách giải 2 thuộc về bạn *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và một số bạn khác. Ngoài hai cách giải trên, các bạn tham gia còn đưa ra một số cách giải khác. Ngoài bạn *Huy*, các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông, *Đào Quang Anh*, 8E1, TH, THCS &THPT Everest, Q. Bắc Từ Liêm; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tuấn Đạt*, 10A1, THPT Tam Nông, H. Tam Nông; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, H. Kế Sách; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn. TP. Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/526. *Với mỗi số nguyên dương n, đặt* $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}\right]$, *trong đó ký hiệu [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tìm tất cả các số nguyên dương n để S_n là lũy thừa của một số nguyên tố.*

Lời giải. (Dựa theo ý của bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Dễ chứng minh rằng:

$$k+2<\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}<k+3.$$

Do đó $\left[\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}\right]=k+2$. Vậy

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+2)=\frac{n(n+5)}{2}\Rightarrow n(n+5)=2p^m.$$

Ta có $n=1$ thỏa mãn ($p=3, m=1$). Xét $n>1$.

TH1: $n=2p^a, n+5=p^b, a+b=m.$

$$2p^a+5=p^b>p^a\Rightarrow b>a\Rightarrow 5=p^a\left(p^{b-a}-2\right)$$

Nếu $a>0$, ta có: $p^a=5, p^{b-a}-2=1$

$\Rightarrow p=5, p^{b-a}=3$, mâu thuẫn. Vậy $a=0$, do đó $n=2$. Thử lại thỏa mãn.

TH2: $n=p^a, n+5=2p^b, a+b=m.$

$p^a+5=2p^b$. Nếu $b\ge a$ thì $5=p^a\left(2p^{b-a}-1\right)$.

Do $n>1$ nên $a>0$. Vậy $p^a=5, 2p^{b-a}-1=1$

$\Rightarrow p=5, p^{b-a}=1\Rightarrow p=5, a=b=1$. Vậy $n=5$. Thử lại thỏa mãn.

Nếu $a>b$ $\Rightarrow 5=p^b\left(2-p^{a-b}\right)$, mâu thuẫn vì $p^{a-b}\ge 2$. Vậy có 3 giá trị là: $n=1$, $n=2$ và $n=5$.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải đúng, tuy rằng chưa thật ngắn gọn:

Hà Nội: *Đào Quang Anh*, 8E1, TH, THCS & THPT Everest, Q. Bắc Từ Liêm, *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/526. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x+f(y))=f(x), \forall x,y\in\mathbb{Z}$ (1).*

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Nhận xét rằng mọi hàm hằng $f(x)=C$ thỏa mãn điều kiện bài ra ứng với mỗi $C\in\mathbb{Z}$.

Xét trường hợp khi $f(x)$ không phải là hàm hằng. Theo (1) thì với mỗi y nguyên cố định, ta được: $f(x\pm f(y))=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow f(x+|f(y)|)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}.$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ a ($2\le a\in\mathbb{Z}^+$) nào đó.

Gọi q ($2\le q\in\mathbb{Z}^+$) là chu kỳ cơ sở của $f(x)$. Khi đó, ứng với mọi $a\in\mathbb{Z}^+$ mà $f(x+a)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$ đều có a chia hết cho q. Thật vậy, nếu $a=mq+r$ với $q\in\mathbb{Z}, 0<r<q$ thì

$$f(x+a)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow f(x+mq+r)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow f(x+r)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$, mâu thuẫn.

Vậy tập hợp các giá trị của $f(x)$ là $\{f(0), f(1), \ldots, f(q-1)\}$ và $f(y)$ chia hết cho q với mọi $y\in\mathbb{Z}$.

Đặt $f(k)=qa_k\in\mathbb{Z}$ với $a_k\in\mathbb{Z}$, $k=0,1,\ldots,q-1$.

Ta nhận được các hàm $f(x)=qa_k$ khi $x=k\pmod q$, $a_k\in\mathbb{Z}$, thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận: Tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện bài toán là: $f(x)\equiv C\in\mathbb{Z}$ và $f(x)=qa_k$ khi $x=k\pmod q$ với $1<q\in\mathbb{Z}^+$, $a_k\in\mathbb{Z}$ tùy ý.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm trong số học và rất ít bạn tham gia giải. Đa số các bạn gửi đến Tòa soạn đều biết sử dụng đồng dư để biểu diễn nghiệm của phương trình. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** *Bùi Huy Tài*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên.

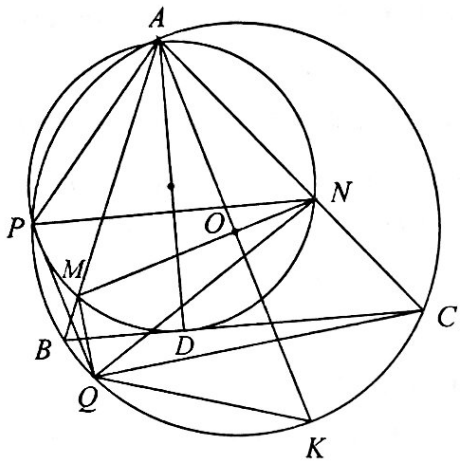
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/526. *Cho tam giác nhọn ABC, (O; R) là đường tròn ngoại tiếp. Đường cao $AD=\sqrt{2}R$. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của AB, AC và đường tròn đường kính AD. P là giao điểm thứ hai của (O; R) và đường tròn đường kính AD. Q là điểm đối xứng của P qua MN. Chứng minh rằng*

a) $2S_{AMN}=S_{ABC}$.

b) $\widehat{BQN}=\widehat{CQM}=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.



1) Gọi K là giao điểm thứ hai của AO và (O). Dễ thấy các tam giác AMN, ABC đồng dạng ngược hướng tỉ số k.

Từ đó, chú ý rằng AD, AK theo thứ tự là đường kính của các đường tròn (AMN), (O), suy ra:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{AD}{AK}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}R}{2R}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

2) Theo phần 1, $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AO}{AD}$ (1). Từ đó, chú ý rằng các tam giác AMN, ABC đồng dạng ngược hướng và AO, AD là hai đường đẳng giác của góc (AB, AC), suy ra $O \in MN$ và

$$(AK, MN) \equiv (AO, MN) \equiv (BC, AD) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Do đó Q thuộc (O) và K là điểm đối xứng của A qua MN. Vậy:

$$\begin{aligned}(QB, QN) &\equiv (QB, QK) + (QK, QN)\\ &\equiv (AB, AK) + (PN, PA) \pmod{\pi}\\ &\equiv (AM, AO) + (MN, MA)\\ &\equiv (MN, AO) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{BQN} = \frac{\pi}{2}$. Tương tự: $\widehat{CQM} = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, có 9 bạn tham gia giải, tuy nhiên lời giải của một vài bạn quá dài, có bạn phải sử dụng phép nghịch đảo và định lí Pascal.

2) Ý tưởng chứng minh $\widehat{BQN} = \frac{\pi}{2}$ trong lời giải trên thuộc về bạn *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**. Với một học sinh lớp 8, biết sử dụng góc định hướng để làm toán, điều đó rất đáng khen.

3) Xin nêu tên cả 8 bạn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11A1, THPT Yên Phong 1, H. Yên Phong; **Hưng Yên:** *Phạn Đức Mạnh*, 10T, *Trần Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Văn Huy*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế: **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/526. *Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là L_A = 50 dB, tại B là L_B = 30 dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà CB = 2CA. Xác định mức cường độ âm tại C.*

Lời giải. Ta có:

$$L_A - L_B = 10\lg\frac{I_A}{I_B} = 10\lg\left(\frac{SB}{SA}\right)^2 = 20 \text{ dB}$$

$\Rightarrow SB = 10SA$; $SC = 4SA$.

$$L_A - L_C = 10\lg\left(\frac{SC}{SA}\right)^2 = 10\lg 16 \approx 12 \text{ dB}.$$

$\Rightarrow L_C = 38$ dB.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*, 11T1, *Nguyễn Trường Duy*, 10T1, THPT huyên Nguyễn Quang Diệu, **Đồng Tháp**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/526. *Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở R = 100 Ω, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (H). Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 400\cos^2(50\pi t + \pi)(V)$. Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch.*

Lời giải. Ta có:

$$u = 400\cos^2(50\pi t + \pi) = 200 + 200\cos 100\pi t.$$

Tổng trở của mạch đối với dòng xoay chiều:

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = 200\ \Omega.$$

Cường độ dòng hiệu dụng của thành phần dòng điện xoay chiều: $I_1 = \dfrac{200/\sqrt{2}}{200} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ A.

Cường độ của dòng điện không đổi: $I_2 = \dfrac{200}{100} = 2$ A.

Cường độ dòng điện hiệu dụng I trong mạch thỏa mãn: $I^2R = I_1^2R + I_2^2R \Rightarrow I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ A.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào gửi về Tòa soạn cho bài này!

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

ĐÍNH CHÍNH

Trên TH&TT: • Số 528, tháng 6.2021 trong mục *Đề ra kỳ này*, Bài T2/528 đã viết:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}.$$

Xin được sửa là: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2020}} + \dfrac{1}{a_{2021}}$.

• Số 529, tháng 7.2021 trong mục *Đề ra kỳ này* Bài T7/529 đã đăng trùng với Bài T6/521, tháng 11.2020. Xin được giới thiệu Bài T7/529 mới có nội dung:

Bài T7/529. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho

$$(x+1)(x^4+1) \vdots y \text{ và } (y+1)(y^4+1) \vdots x.$$

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội

Tòa soạn TH&TT thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

****

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI. Số xuôi ngược

(Đề đăng trên TH&TT số 525, tháng 3, 2021)

Bài toán. *Hãy tìm các số nguyên dương gồm bốn chữ số viết trong hệ thập phân sao cho tích của số đó với số viết ngược của nó là một số xuôi ngược gồm bảy chữ số.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là $s = \overline{abcd}$ với $a \geq 1$, $d \geq 1$, các chữ số a, b, c, d có thể bằng nhau. Theo giả thiết có tích $T = \overline{abcd}.\overline{dcba} = \overline{eghkhge}$ (1).

Khai triển (1) ta có:

$$T = e.10^6 + g.10^5 + h.10^4 + k.10^3 + h.10^2 + g.10 + e$$
$$= (a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d)(d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a)$$
$$= ad.10^6 + (ac + bd)10^5 + (ab + bc + cd)10^4$$
$$+ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)10^3 + (ab + bc + cd)10^2$$
$$+ (ac + bd)10 + ad.$$

Từ đó xét các hệ số lần lượt của 10^6 và 10^0, 10^5 và 10, 10^4 và 10^2, 10^3 thì chỉ có thể là:

$e = ad \leq 9$; $g = ac + bd \leq 9$; $h = ab + bc + cd \leq 9$;

$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 9$ (2).

Từ điều kiện cuối cùng của (2) thì mỗi chữ số a, b, c, d đều nhỏ hơn 3 và không có quá hai chữ số bằng 2, lại do $a \geq 1$; $d \geq 1$ nên xảy ra các trường hợp sau:

1) $a = d = 1, b = c = 0$
2) $a = d = 1, b = 0, c = 1$ (hoặc $b = 1, c = 0$)
3) $a = d = 1, b = 0, c = 2$ (hoặc $b = 2, c = 0$)
4) $a = d = 1, b = c = 1$
5) $a = d = 1, b = 1, c = 2$ (hoặc $b = 2, c = 1$)
6) $a = d = 1, b = c = 2$
7) $a = d = 2, b = c = 0$
8) $a = d = 2, b = 0, c = 1$ (hoặc $b = 1, c = 0$)
9) $a = d = 2, b = c = 1$
10) $a = 2, d = 1, b = c = 0$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = c = 0$)
11) $a = 2, d = 1, b = 0, c = 1$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 1, c = 0$)
12) $a = 2, d = 1, b = 1, c = 0$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 0, c = 1$)
13) $a = 2, d = 1, b = 0, c = 2$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 2, c = 0$)
14) $a = 2, d = 1, b = 2, c = 0$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 0, c = 2$)
15) $a = 2, d = 1, b = c = 1$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = c = 1$)
16) $a = 2, d = 1, b = 1, c = 2$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 2, c = 1$)
17) $a = 2, d = 1, b = 2, c = 1$
(hoặc $a = 1, d = 2, b = 1, c = 2$).

Bài toán có 13 nghiệm $s = \overline{abcd}$ với $a \geq d$ (không kể thứ tự hai thừa số $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$), đó là $(s; T)$ bằng: (1001; 1002001), (1011; 1113111), (1021; 1226221), (1111; 1234321), (1121;1357531), (2002; 4008004), (2012; 4229224), (2001;2005002), (2011; 2216122), (2101; 2126212), (2021;2429242), (2201; 2249422), (2111; 2347432).

Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**, đã giải và tìm được toàn bộ các nghiệm số của bài toán.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

VỀ MỘT TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA ĐA THỨC MONIC HỆ SỐ NGUYÊN

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Đa thức hệ số nguyên (đa thức có tất cả các hệ số đều là các số nguyên) là một trong những vấn đề quan trọng trong đa thức, một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số, Giải tích, Lý thuyết số, ... Trong lớp các bài toán đa thức hệ số nguyên, chúng ta đặc biệt chú ý đến các bài toán đa thức monic (đa thức có hệ số cao nhất bằng 1). Bài viết sau xin trình bày về một tính chất phổ dụng và thú vị của đa thức monic hệ số nguyên: Định lý nghiệm hữu tỉ của đa thức.

1. ĐỊNH LÝ NGHIỆM HỮU TỈ. *Cho đa thức*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0,$$

có tất cả các hệ số $a_i, i=0,1,2,...,n$ *đều nguyên. Nếu* $x=\frac{p}{q},(p,q)=1$ *là nghiệm hữu tỉ của* f *thì* $p|a_0, q|a_n$.

Chứng minh. Vì $x=\frac{p}{q},(p,q)=1$ là nghiệm của đa thức f nên $a_n.\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}.\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+...+a_1.\frac{p}{q}+a_0=0$

$$\Leftrightarrow a_n.p^n+a_{n-1}.q.p^{n-1}+...+a_1.q^{n-1}.p+a_0.q^n=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_n.p^n=-\left(a_{n-1}.q.p^{n-1}+...+a_1.q^{n-1}.p+a_0.q^n\right)\vdots q\\ a_0.q^n=-\left(a_n.p^n+a_{n-1}.q.p^{n-1}+...+a_1.q^{n-1}.p\right)\vdots p\end{cases}.$$

Ta chú ý rằng $(p,q)=1$ nên $a_n\vdots q, a_0\vdots p$ hay $p|a_0, q|a_n$.

2. MỘT SỐ HỆ QUẢ VÀ NHẬN XÉT QUAN TRỌNG

a) Hệ quả 1. *Cho f là đa thức monic có hệ số nguyên. Nếu f có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là một số nguyên.*

Chứng minh. Theo định lý nghiệm hữu tỉ, vì $a_n=1$ nên $q=\pm 1$, do đó $x=\frac{p}{q}$ là số nguyên.

Nhận xét 1. *Cho n là một số nguyên dương và* $m>1$ *là một số nguyên. Khi đó, nếu* $\sqrt[m]{n}$ *là một số hữu tỉ thì* $\sqrt[m]{n}$ *cũng là một số nguyên.*

Chứng minh. Thật vậy, đặt $x=\sqrt[m]{n}$, suy ra x là nghiệm hữu tỉ của phương trình $x^m-n=0$. Vì $f(x)=x^m-n$ là một đa thức monic hệ số nguyên nên theo hệ quả 1, mọi nghiệm hữu tỉ của nó đều nguyên.

Dựa vào hệ quả 1, chúng ta có cơ sở kiểm định một đa thức hệ số nguyên cho trước có nghiệm là một số nguyên, hữu tỉ hay vô tỉ hay không.

b) Hệ quả 2. *Cho a, b là các số hữu tỉ sao cho a + b và ab đều là các số nguyên. Khi đó a, b đều là các số nguyên.*

Chứng minh. Xét đa thức

$$f(x)=x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b).$$

Khi đó a,b là các nghiệm hữu tỉ của đa thức $f(x)$ monic hệ số nguyên, nên theo hệ quả 1, suy ra a,b đều nguyên.

Hệ quả 2 có thể mở rộng như sau: *Cho* a,b,c *là các số hữu tỉ sao cho* $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ *đều là các số nguyên. Khi đó, cả ba số* a,b,c *đều nguyên.*

c) Hệ quả 3. *Cho* a,b,c *là các số nguyên,* $a\neq 0$. *Nếu phương trình* $ax^2+bx+c=0$ *có nghiệm hữu tỉ, thì định thức* $\Delta=b^2-4ac$ *phải là một số chính phương.*

Chứng minh. Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỉ x, ta có:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$\Leftrightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac \text{ hay } \sqrt{\Delta}=|2ax+b|.$$

Vì $|2ax+b|$ là số hữu tỉ nên suy ra $\sqrt{\Delta}$ cũng là số hữu tỉ (không âm). Mặt khác $\Delta=b^2-4ac$ là số nguyên nên theo nhận xét 1, suy ra $\sqrt{\Delta}$ cũng là số nguyên, hay Δ là số chính phương.

d) Hệ quả 4. *Cho f là một đa thức hệ số nguyên và* $x=\frac{p}{q}$ $((p,q)=1)$ *là nghiệm hữu tỉ của f. Khi đó tồn tại đa thức g với hệ số nguyên sao cho* $f(x)=(qx-p)g(x)$.

Chứng minh. Giả sử

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0).$$

Ta xét đa thức $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$.

Khai triển đẳng thức $f(x)=(qx-p)g(x)$ và đồng nhất hệ số, ta có: $-pb_0=a_0$, $qb_0-pb_1=a_1$, ..., $qb_{n-2}-pb_{n-1}=a_{n-1}$, $qb_{n-1}=a_n$.

Ta thu được: $b_0=-\frac{a_0}{p}, b_1=-\frac{qa_0+pa_1}{p^2}$,

$$..., b_{n-1}=-\frac{q^{n-1}a_0+pq^{n-2}a_1+...+p^{n-1}a_{n-1}}{p^n}=\frac{a_n}{q}.$$

Ta sẽ chứng minh các hệ số $b_i, i=0,...,n-1$ đều là các số nguyên. Trước hết, theo định lý về nghiệm hữu tỉ, vì $x=\frac{p}{q}$ là nghiệm hữu tỉ của đa thức f nên $b_{n-1}=\frac{a_n}{q}$ là một số nguyên. Tiếp theo ta sẽ chứng minh p^{k+1} là ước của $\left(q^ka_0+pq^{k-1}a_1+...+p^ka_k\right)$, $k=0,...,n-2$. Thật vậy, ta có: $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}$

$$+a_kp^kq^{n-k}+...+a_oq^n=0.$$

Suy ra p^{k+1} chia hết

$$a_kp^kq^{n-k}+...+a_oq^n=q^{n-k}\left(a_kp^k+...+a_0q^k\right).$$

Vì p^{k+1} và q^{n-k} nguyên tố cùng nhau nên suy ra p^{k+1} chia hết $\left(a_kp^k+...+a_0q^k\right)$.

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1. *Chứng minh rằng* $x_0=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ *là một số vô tỉ.*

Lời giải. Giả sử $x_0=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là một số hữu tỉ. Ta có: $x_0^3=2+4+3\sqrt[3]{8}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=6+6x_0$ hay $x_0^3-6x_0-6=0$. Đa thức $f(x)=x^3-6x-6$ là đa thức monic nên nghiệm hữu tỉ của nó phải là số nguyên và là ước của 6. Chú ý rằng $2<\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}<4$ nên $x_0=3$. Tuy nhiên $f(3)=3\neq 0$ (vô lý). Vậy $x_0=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là một số vô tỉ.

Bài toán 2 [Australia, 2001]. *Xác định tất cả các giá trị nguyên của m để tất cả các nghiệm của đa thức* $f(x)=3x^3-3x^2+m$ *đều là các số hữu tỉ.*

Lời giải. Nếu $m=0$ thì đa thức f có các nghiệm là 0, 1. Ngược lại, ta sẽ chứng minh nếu các nghiệm của đa thức này đều là các số hữu tỉ, thì $m=0$. Thật vậy, giả sử tất cả các nghiệm của đa thức đều là các số hữu tỉ, dạng $x=\frac{a}{b}$, $(a,b)=1$, $b>0$. Khi đó: $3a^3-3a^2b+b^3m=0$.

Suy ra b là ước của $3a^3$. Nhưng $(a,b)=1$ nên b là ước của 3, do đó $b=1$ hoặc $b=3$. Nếu $b=3$ thì $a^3-3a^2+9m=0$, suy ra 3 là ước của a, vô lí vì $(a,b)=1$. Vì vậy $b=1$, suy ra $m=3a^2(1-a)$. Phương trình $f(x)=0$ được viết lại dưới dạng:

$$x^3-x^2-a^3+a^2=(x-a)\left[x^2+(a-1)x+a^2-a\right].$$

Định thức của tam thức bậc hai trong tích trên là $(1-a)(3a+1)$. Vì a là số nguyên nên tam thức có nghiệm khi $(1-a)(3a+1)\geq 0$ hay $a=0$ hoặc $a=1$. Do đó $m=0$.

Bài toán 3. *Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (a,b) sao cho $a^2+b^2<2021$ và $a^2b \mid (b^3-a^3)$.*

Lời giải. Đặt $k=\dfrac{b^3-a^3}{a^2b}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{a}{b}, k\in\mathbb{Z}$. Khi đó $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+k\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1=0$. Xét đa thức monic $f(x)=x^3+kx^2-1$ với hệ số nguyên có nghiệm hữu tỉ $r=\dfrac{a}{b}>0$, khi đó theo hệ quả 1, r là ước của -1, suy ra $r=1$. Do đó $a=b$ và $a^2+b^2=2a^2<2021$ hay $1\le a\le 31$. Vậy có 31 cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn bài toán.

Bài toán 4. *Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x sao cho x^2+x+6 là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại số hữu tỉ x sao cho x^2+x+6 là số chính phương, hay tồn tại số nguyên dương a sao cho $x^2+x+6=a^2$ hay $x^2+x+6-a^2=0$. Vì $f(x)=x^2+x+6-a^2$ là đa thức monic hệ số nguyên, nên theo hệ quả 1, mọi nghiệm hữu tỉ của nó đều nguyên, suy ra x là một số nguyên. Ta có: $x^2+x+6=a^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+24=4a^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2+23=4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2a+2x+1)(2a-2x-1)=23.$$

Vì $1\le 2a-2x-1<2a+2x+1$ nên chỉ xảy ra trường hợp $\begin{cases}2a-2x-1=1\\2a+2x+1=23\end{cases}$.

Giải hệ phương trình này ta được $a=6$ và $x=5$.

Bài toán 5. *Cho x là một số thực thỏa mãn điều kiện x^2-x là một số nguyên khác 1 và x^3-2x cũng là một số nguyên. Chứng minh rằng x cũng là một số nguyên.*

Lời giải. Đặt $x^2-x=a, x^3-2x=b\ (a,b\in\mathbb{Z}, a\ne 1)$.

Ta có: $b=x^3-2x=(x^3-x^2-x)+(x^2-x)$

$$=x(x^2-x-1)+(x^2-x)=x(a-1)+a.$$

Vì $a\ne 1$ nên $x=\dfrac{b-a}{a-1}$ hay x là một số hữu tỉ.

Khi đó, vì $x^2-x-a=0$ nên theo hệ quả 1, suy ra x là một nghiệm hữu tỉ của đa thức monic hệ số nguyên, do đó x là một số nguyên.

Bài toán 6. [George Stoica, Crux problem 4579, Vol47 (2021), Astria MO, 2016] *Cho a,b,c là các số nguyên khác 0 sao cho $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng các số $\dfrac{ab}{c},\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b}$ đều nguyên.*

Lời giải. Xét đa thức:

$$f(x)=\left(x-\frac{ab}{c}\right)\left(x-\frac{bc}{a}\right)\left(x-\frac{ca}{b}\right)$$

$$=x^3-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)x^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)x-abc.$$

Ta nhận thấy $f(x)$ là đa thức monic hệ số nguyên. Sử dụng hệ quả 2, suy ra các nghiệm hữu tỉ của $f(x)$ là các giá trị $\dfrac{ab}{c},\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b}$ đều nguyên.

Bài toán 7. *Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c sao cho $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$ và $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$ đều là các số nguyên.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương a,b,c sao cho $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$ và $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$ đều là các số nguyên. Xét đa thức:

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)$$

$$=x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)x-1.$$

Rõ ràng $f(x)$ là đa thức monic hệ số nguyên có các nghiệm hữu tỉ là $\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}$, nên theo hệ quả 2, các nghiệm này đều là các số nguyên. Vì

$\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}=1$ và $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ đều là các số nguyên nên suy ra $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=1$ hay $a=b=c$.

Bài toán 8 [Việt Nam MO, 2007]. *Cho x,y là các số nguyên khác -1 sao cho $\frac{x^4-1}{y+1}+\frac{y^4-1}{x+1}$ cũng là một số nguyên. Chứng minh rằng $x^4y^{44}-1$ chia hết cho $x+1$.*

Lời giải. Đặt $a=\frac{x^4-1}{y+1}$ và $b=\frac{y^4-1}{x+1}$. Ta có a,b là các số hữu tỉ và $a+b$ là một số nguyên.

Vì $ab=\frac{x^4-1}{y+1}.\frac{y^4-1}{x+1}=(x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1)$ nên ab cũng là một số nguyên.

Sử dụng hệ quả 2, suy ra a,b đều là các số nguyên, tức là y^4-1 chia hết cho $x+1$ hay

$$y^4\equiv 1\left(\mathrm{mod}(x+1)\right)\Rightarrow y^{44}\equiv 1\left(\mathrm{mod}(x+1)\right).$$

Mặt khác, ta có $x^4\equiv 1\left(\mathrm{mod}(x+1)\right)$.

Từ đó suy ra $x^4y^{44}\equiv 1\left(\mathrm{mod}(x+1)\right)$ hay $x^4y^{44}-1$ chia hết cho $x+1$.

Bài toán 9 [Balkan, 2006]. *Tìm tất cả các bộ ba số hữu tỉ dương (m,n,p) sao cho các số*

$$m+\frac{1}{np},n+\frac{1}{pm},p+\frac{1}{mn}$$

đều là các số nguyên.

Lời giải. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương m,n,p sao cho $m+\frac{1}{np},n+\frac{1}{pm},p+\frac{1}{mn}$ đều là các số nguyên. Đặt $a=mnp$, khi đó các số $\frac{a+1}{np},\frac{a+1}{pm},\frac{a+1}{mn}$ là các số nguyên nên tích của chúng cũng nhận giá trị nguyên, tức là $\frac{(a+1)^3}{a^2}$ là một số nguyên, hay tồn tại số nguyên k sao cho $(a+1)^3=ka^2$.

Từ đó suy ra a là nghiệm hữu tỉ (dương) của đa thức monic hệ số nguyên:

$$g(x)=(x+1)^3-kx^2=x^3+(3-k)x^2+3x+1.$$

Sử dụng hệ quả 1, suy ra $a=1$. Điều này dẫn đến $\frac{a+1}{np}=\frac{2}{np}=2m$ là một số nguyên. Lý luận tương tự, ta cũng có $2n,2p$ đều là các số nguyên. Mặt khác $2m.2n.2p=8mnp=8a=8=1.1.8=1.2.4=2.2.2$.

Từ đó, ta nhận được các bộ ba số hữu tỉ dương là $(1,1,1),\left(2,\frac{1}{2},1\right),\left(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ và các hoán vị của chúng.

Bài toán 10 [Kvant M1740]. *Cho a,b,c là các số nguyên dương sao cho*

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Chứng minh rằng ab,bc,ca và $ab+bc+ca$ đều là các số chính phương.

Lời giải. Điều kiện bài toán có thể viết lại dưới dạng: $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow a^2-2(b+c)a+b^2+c^2-2bc=0.$$

Xem biểu thức trên là một phương trình bậc hai ẩn a, ta có: $\Delta=4(b+c)^2-4(b^2+c^2-2bc)=16bc.$

Vì phương trình (ẩn a) trên có nghiệm hữu tỉ (nguyên) a nên theo hệ quả 3, suy ra $\Delta=16bc$ là số chính phương, hay bc là số chính phương. Lập luận tương tự, ta cũng có ab,ac đều là các số chính phương.

Đặt $bc=x^2$ ($x\in\mathbb{N}$), khi đó $a=b+c\pm 2x$ hay $b+c=a\pm 2x$. Suy ra :

$$ab+bc+ca=x^2+a(b+c)$$
$$=x^2+a(a\pm 2x)=(a\pm 2x)^2.$$

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 11. *Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có các hệ số đều là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng f không có nghiệm hữu tỉ.*

Lời giải. Giả sử f có nghiệm hữu tỉ, sử dụng hệ quả 3, suy ra $\Delta=b^2-4ac$ là số chính phương lẻ (vì b lẻ). Do đó $\Delta\equiv 1\pmod 8$. Vì a,b,c đều là các số nguyên lẻ nên ta có thể đặt:

$$a=2m+1, b=2n+1, c=2p+1 (m,n,p\in\mathbb{N}).$$

Khi đó : $\Delta=b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2m+1)(2p+1)$

$$=4n^2+4n+1-4(4mp+2m+2p+1)$$
$$=4n(n+1)-16mp-8(m+p+1)+5.$$

Suy ra $\Delta\equiv 5\pmod 8$, mâu thuẫn với kết quả $\Delta\equiv 1\pmod 8$. Vậy f không thể có nghiệm hữu tỉ.

Bài toán 12. *Cho f là một đa thức có hệ số nguyên và thỏa mãn điều kiện $|f(a)|=|f(b)|=1$, với a,b là các số nguyên phân biệt.*

a) *Chứng minh rằng nếu $|a-b|>2$ thì f không có nghiệm hữu tỉ.*

b) *Chứng minh rằng nếu $|a-b|=2$ thì f nghiệm hữu tỉ là $\frac{a+b}{2}$.*

Lời giải. a) Giả sử $x=\frac{p}{q}((p,q)=1)$, là nghiệm hữu tỉ của f, sử dụng hệ quả 4, ta có: $f(x)=(qx-p)g(x)$, trong đó $g(x)$ cũng là đa thức hệ số nguyên. Suy ra:

$$1=|f(a)|=|(qa-p)g(a)|=|qa-p|.|g(a)|.$$

Từ đó dẫn đến $|qa-p|=|g(a)|=1$. Tương tự ta cũng có $|qb-p|=1$. Từ đây, ta có đánh giá:

$$|qa-qb|=|(qa-p)-(qb-p)|$$
$$\le|qa-p|+|qb-p|=2 \quad (*),$$

hay $|q||a-b|\le 2$. Chú ý rằng $|q|\ge 1$ nên $|a-b|\le 2$, vô lý.

b) Từ đánh giá trên, ta đã có $|q||a-b|\le 2$. Vì $|a-b|=2$ nên suy ra $|q|\le 1$. Mặt khác $|q|\ge 1$, do đó ta phải có đẳng thức $|q|=1$. Khi đó đẳng thức ở (*) xảy ra, tức là $qa-p$ và $p-qb$ cùng dấu. Chú ý rằng, $|qa-p|=|qb-p|=1$ nên

$$qa-p=p-qb\Leftrightarrow q(a+b)=2p$$
$$\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a+b}{2}.$$

Bài toán 13. *Cho $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là một đa thức hệ số nguyên với ad là số lẻ và abc là số chẵn. Chứng minh rằng $f(x)$ có nghiệm vô tỉ.*

Lời giải. Với $i=1,2,3$, giả sử các nghiệm x_i của $f(x)$ đều hữu tỉ, đặt $x_i=\frac{p_i}{q_i}$, với $(p_i,q_i)=1$. Sử dụng định lý nghiệm hữu tỉ, ta có $p_i|d$ và $q_i|a$. Vì ad lẻ nên suy ra p_i,q_i đều lẻ. Áp dụng định lý Viète, ta có:

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2+x_3=\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}$$
$$=\frac{p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3}=\frac{\beta}{\alpha};$$

$$\frac{c}{a}=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{p_1}{q_1}.\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_2}{q_2}.\frac{p_3}{q_3}+\frac{p_3}{q_3}.\frac{p_1}{q_1}=\frac{\gamma}{\alpha},$$

trong đó $(\beta,\alpha)=(\gamma,\alpha)=1$.

Chú ý rằng các giá trị p_i,q_i $(i=1,2,3)$ đều lẻ nên α,β,γ đều lẻ, hay abc lẻ (mâu thuẫn).

Bài toán 14. *Cho $n\ge 2$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức*

$$f(x)=x^n+2x^{n-1}+3x^{n-2}+\ldots+nx+n+1$$

không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải. Giả sử f có nghiệm hữu tỉ. Vì f là đa thức monic hệ số nguyên nên theo hệ quả 1, mọi nghiệm hữu tỉ của f đều nguyên. Nhận thấy rằng $x=1$ không là nghiệm của đa thức f nên ta có biến đổi:

$$f(x)=\left(x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1\right)+\ldots+(x+1)+1$$
$$=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}+\frac{x^n-1}{x-1}+\ldots+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}$$
$$=\frac{\frac{x^{n+2}-1}{x-1}-n-2}{x-1}=\frac{x^{n+2}-(n+2)x+n+1}{(x-1)^2}.$$

Do đó, nghiệm của f cũng là nghiệm của $g(x)=x^{n+2}-(n+2)x+n+1$ và ngược lại, hay mọi nghiệm (hữu tỉ) của đa thức g đều nguyên. Chú ý rằng $-1,0$ đều không là nghiệm của $g(x)$. Ta sẽ chứng minh mọi nghiệm $r\neq 1$ của $g(x)$ đều thỏa mãn $|r|<2$. Thật vậy, giả sử $|r|\geq 2$. Khi đó:

$$2^{n+1}|r|\leq\left|r^{n+1}\right||r|=\left|r^{n+2}\right|=\left|(n+2)r-(n+1)\right|$$
$$\leq(n+2)|r|+(n+1)<(2n+3)|r|.$$

Suy ra $2^{n+1}<2n+3$, nhưng điều này không thể xảy ra với mọi $n\geq 2$. Vậy ta phải có $|r|<2$. Vì r nguyên nên $r\in\{-1,0\}$, vô lý.

Bài toán 15 [Japan MO, 2009]. *Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên và $n\neq 0$ là một số nguyên sao cho $P(n^2)=0$. Chứng minh rằng với mọi số hữu tỉ dương a, ta đều có $P(a^2)\neq 1$.*

Lời giải. Đặt $\deg P=d$ và $P(x)=(x-n^2)Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức hệ số nguyên. Giả sử tồn tại số hữu tỉ dương $a=\frac{p}{q},(p,q)=1$ sao cho $P(a^2)=1$. Khi đó: $1=P(a^2)=(a^2-n^2)Q(a^2)$

$$=\frac{1}{q^{2d}}\left(q^{2d-2}Q\left(\frac{p^2}{q^2}\right)\right)\left(p^2-q^2n^2\right),$$

hay $\left(q^{2d-2}Q\left(\frac{p^2}{q^2}\right)\right)\left(p^2-q^2n^2\right)=q^{2d}$.

Vì $\deg Q=d-1$ nên $q^{2d-2}Q\left(\frac{x}{q^2}\right)$ là một đa thức hệ số nguyên. Do đó $q^{2d-2}Q\left(\frac{p^2}{q^2}\right)$ là một số nguyên hay $p^2-q^2n^2$ là ước số của q^{2d}.

Vì $(p,q)=1$ nên $\left(q,p^2-q^2n^2\right)=1$ hay $\left(q^{2d},p^2-q^2n^2\right)=1$. Suy ra:

$$p^2-q^2n^2=(p-qn)(p+qn)=\pm 1.$$

Vì p,q,n đều là các số nguyên dương nên không thể có $p+qn=\pm 1$. Mâu thuẫn này kết thúc bài toán.

Cuối cùng là một số bài tập tự luyện.

Bài tập 1. Tìm các nghiệm hữu tỉ của đa thức

$$f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2.$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng số $\alpha=\sqrt[3]{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$ là một số vô tỉ.

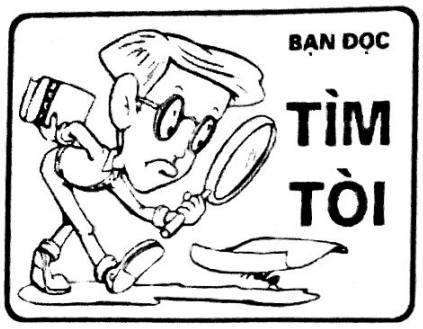
Bài tập 3. Cho $f(x)$ là đa thức có bậc chẵn và các hệ số đều là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm hữu tỉ.

Bài tập 4 [*Ukraina MC, 2016*]. Có tồn tại hay không số thực x để các số $x+\sqrt{2}$ và $x^4+\sqrt{2}$ đều là các số hữu tỉ?

Bài tập 5. Cho $\overline{abc}$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài tập 6. Cho x,y là các số nguyên khác -1 thỏa mãn $\frac{x^3+1}{y+1}+\frac{y^3+1}{x+1}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng $x^{30}-1$ chia hết cho $y+1$.

Bài tập 7. [*Belarus 2017*]. Cho số nguyên $k\geq 2$. Giả sử $\overline{a_0a_1\ldots a_n}$ là biểu diễn dưới dạng thập phân của 65^k. Chứng minh rằng đa thức $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ không có nghiệm hữu tỉ.



MỘT TÍNH CHẤT VỀ HAI ĐƯỜNG KÍNH LIÊN HỢP CỦA ELIP

NGUYỄN BÁ TRÌNH
(TP. Hồ Chí Minh)

Phát biểu tính chất: *Diện tích của hình bình hành nội tiếp trong elip* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *lớn nhất khi hình bình hành có hai đường chéo là hai đường kính liên hợp của elip và diện tích đó bằng 2ab.*

Cách chứng minh bằng phương pháp cực trị

Xét hình bình hành *MNPQ* bất kỳ, nội tiếp trong elip có phương trình: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Nhắc lại rằng hai đường kính của elip được gọi là *liên hợp* nếu mỗi đường kính sẽ chia đôi những dây song song với đường kính còn lại. Ta cũng có kết quả: Với elip có phương trình chính tắc trên, nếu hai đường kính có phương trình $y = k_1x$ và $y = k_2x$ thì hai đường kính đó là liên hợp khi và chỉ khi $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

Xét đường kính *MP* bất kỳ và cố định, một đường kính *NQ* quay quanh tâm *O*. Để tính diện tích hình bình hành *MNPQ*, ta tính diện tích ΔMON.

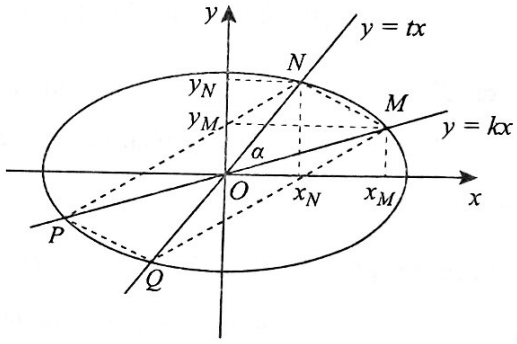
Gọi *k* là hệ số góc của đường thẳng *OM* và *t* là hệ số góc của đường thẳng *ON*. Đường thẳng *OM* có phương trình: $y = kx$ và đường thẳng *ON* có phương trình: $y = tx$.

Vì *M* là giao điểm của elip và đường thẳng *OM* nên tọa độ điểm *M* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}.$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases}x_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}\\ y_M^2=\frac{a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}\end{cases}$.

Tương tự ta có: $\begin{cases}x_N^2=\frac{a^2b^2}{a^2t^2+b^2}\\ y_N^2=\frac{a^2b^2t^2}{a^2t^2+b^2}\end{cases}$.



Đặt α là số đo góc giữa *OM* và *ON*, *S* là diện tích ΔOMN, ta có: $S^2=\frac{1}{4}OM^2ON^2\sin^2\alpha$ (1).

Ta có: $OM^2=x_M^2+y_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}+\frac{a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}$

$$=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2k^2+b^2} \quad (2).$$

Tương tự ta có: $ON^2=\frac{a^2b^2(1+t^2)}{a^2t^2+b^2}$ (3)

Thay $\tan\alpha=\tan(OM,ON)=\frac{t-k}{1+kt}$ vào đẳng thức $\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ta có:

$$\sin^2\alpha = \frac{(t-k)^2}{(1+kt)^2+(t-k)^2} = \frac{(t-k)^2}{(1+k^2)(1+t^2)} \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$$S^2 = \frac{1}{4}.\frac{a^4b^4}{a^2k^2+b^2}.\frac{(t-k)^2}{a^2t^2+b^2} \quad (5).$$

Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{\Delta OMN}$ nên diện tích hình bình hành $MNPQ$ lớn nhất khi diện tích tam giác OMN lớn nhất, nghĩa là khi S^2 lớn nhất.

Trong biểu thức tính S^2, vì đường thẳng OM cố định nên k không đổi, kéo theo biểu thức $\frac{a^4b^4}{a^2k^2+b^2}$ không đổi. Vậy diện tích hình bình hành $MNPQ$ lớn nhất khi biểu thức $\frac{(t-k)^2}{a^2t^2+b^2}$ lớn nhất. Đặt $y = \frac{(t-k)^2}{a^2t^2+b^2}$. Ta có:

$$y' = \frac{2(a^2t^2+b^2)(t-k)-2(t-k)^2a^2t}{(a^2t^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{2(t-k)((a^2t^2+b^2)-a^2t(t-k))}{(a^2t^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{2(t-k)(a^2kt+b^2)}{(a^2t^2+b^2)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (t-k)(a^2kt+b^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k \\ t = -\frac{b^2}{a^2k} \end{array}\right..$$

Ta xét dấu đạo hàm y'.

• *Trường hợp* $k \neq 0$.

- Nếu $k > 0$ ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{b^2}{a^2k}$		k		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$\frac{1}{a^2}$	↗	$\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{a^2}$

- Nếu $k < 0$ ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		k		$-\frac{b^2}{a^2k}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$\frac{1}{a^2}$	↘	0	↗	$\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2}$	↘	$\frac{1}{a^2}$

Từ hai bảng biến thiên ta thấy:

y đạt cực đại khi $t = \frac{-b^2}{a^2k}$ (6) $\Leftrightarrow kt = \frac{-b^2}{a^2}$.

Điều đó có nghĩa là hai đường chéo MP và NQ của hình bình hành là hai đường kính liên hợp của elip. Giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) có thể tính trực tiếp bằng cách thay $t = k$, $t = -\frac{b^2}{a^2k}$ vào hàm y nhưng cũng có thể tính theo cách sau, chẳng hạn với $k > 0$ thì:

$$y_{CĐ} = \frac{(t-k)^2}{a^2t^2+b^2} = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{2(t-k)}{2a^2t}$$

$$= \frac{2\left(\frac{-b^2}{a^2k}-k\right)}{2a^2t.\frac{-b^2}{a^2k}} = \frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2}.$$

Dễ thấy rằng với $k > 0$ (hoặc $k < 0$) thì $\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2} > \frac{1}{a^2}$, do đó $y_{CĐ} = \max y$ với mọi t.

Khi đó theo (5) ta có:

$$\max S^2 = \frac{1}{4}.\frac{a^4b^4}{a^2k^2+b^2}.\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$\Rightarrow \max S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \max S_{MNPQ} = 4S = 2ab.$$

• *Trường hợp* $k = 0$. Theo (6) thì t không xác định. Đây là trường hợp hai đường kính MP và NQ nằm trên hai trục tọa độ và hình bình hành $MNPQ$ trở thành hình thoi có độ dài các đường chéo bằng độ dài các trục của elip là $2a$ và $2b$ và có diện tích bằng $2ab$.

Vậy tính chất đã được chứng minh với mọi k.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 71

PROBLEM. *Consider the function*

$$f:(-\infty;2)\to(3;+\infty), f(x)=x^2-4x+1.$$

Denote $f^{-1}(x)$ *the inverse function of* $f(x)$. *Solve the equation* $f(x)=f^{-1}(x)$.

***Solution*:** Notice that the graph of the inverse function $y=f^{-1}(x)$ can be obtained by reflecting the graph of the original function $y=f(x)$ in the line $y=x$.

Hence the solution of the equation $f(x)=f^{-1}(x)(1)$, if exists, must be the solution of the equation $f(x)=x$.

Consider the equation $f(x)=x$, or $x^2-5x+1=0$ (2). The equation (2) has two solution $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. However, we can only accept the solution which lies in the domain of f. Therefore equation (1) has only one solution $x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$.

TỪ VỰNG

inverse function : *hàm ngược*

graph : *đồ thị*

reflection (in the line) : *đối xứng (qua đường thẳng)*

domain : *tập nguồn*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 68

BÀI TOÁN. *Khoảng thời gian T để làm một cái hộp là 5 phút, khi ta làm tròn đến phút. Giới hạn khoảng thời gian làm 20 cái hộp là bao nhiêu?*

Lời giải. Để làm một cái hộp, thời gian thực tế *T* cần là nửa đoạn đóng [4.5 ; 5.5). Do đó cận dưới thời gian làm 20 cái hộp là:

$$20 \times 4.5 = 90 \text{ phút},$$

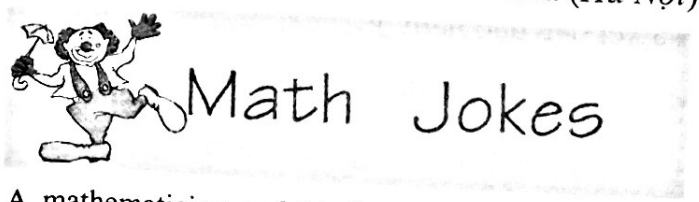
và cận trên thời gian làm 20 cái hộp là:

$$20 \times 5.5 = 110 \text{ phút}.$$

Vì vậy câu trả lời là 90 phút và 110 phút.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Văn Ngọc Bình*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



A mathematician and his best friend, an engineer, attend a public lecture on geometry in thirteen-dimensional space.

"*How did you like it?*" the mathematician wants to know after the talk.

"My head's spinning", the engineer confesses. "*How can you develop any intuition for thirteen-dimensional space?*"

"*Well, it's not even difficult. All I do is visualize the situation in arbitrary N-dimensional space and then set N = 13.*"

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 51. *Cho bốn số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2.$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT đề ra là N

Cách 1. Vì $N=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}$

nên theo BĐT Schwarz ta có:

$$N\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db}.$$

Xét tính đúng đắn của BĐT sau:

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db}\ge 2$$

hay $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

$$\ge 2ab+4ac+2bc+4bd+2cd+2da$$

$\Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2\ge 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng này hiển nhiên đúng.

Suy ra $N\ge 2$. Dấu bằng của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Cách 2. Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}$$

$$\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{(a+c)(b+d)+2ac+2bd}\quad (1).$$

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta được:

$(a+c)(b+d)+2ac+2bd$

$$\le(a+c)(b+d)+\frac{(a+c)^2}{2}+\frac{(b+d)^2}{2}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{2}\quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $N\ge\frac{2(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=2$

Cách 3. Đặt $P=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}$;

$$Q=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Dễ thấy $P+Q=4$. Theo BĐT Cauchy ta được:

$$N+P=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(b+c)(c+d)(d+a)(a+b)}}=4;$$

$$N+Q=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}$$

$$=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right).$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+Q\ge\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4.$$

Do đó $N+P+N+Q\ge 8$ hay $N\ge 2$.

Cách 4. Đặt $P=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a}-\frac{1}{a+b}$.

Ta có: $N=\left(\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\right)-1+aP$

$$N=\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\right)-1-bP$$

Theo BĐT Cauchy: $N\ge 3-1+aP=2+aP$ (3)

$N\ge 3-1-bP=2-bP$ (4).

Nếu $P\ge 0$ theo (3) ta được $N\ge 2$. Nếu $P\le 0$ theo (4) ta được $N\ge 2$. Tóm lại $N\ge 2$.

Cách 5. Đặt $P=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}$;

$$Q=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Theo BĐT Cauchy cho bốn số thì:

$$N+P=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\ge 4.$$

Mà $P+Q=4\Rightarrow N\ge Q$. Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+Q=\frac{(a+c)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b+d)^2}{(b+d)(c+d)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(d+a)}+\frac{(d+b)^2}{(d+b)(a+b)}$$

$$\geq\frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{(a+c)(b+c)+(b+d)(c+d)+(c+a)(d+a)+(d+b)(a+b)}$$

$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4$. Vậy $N\geq 2$.

Cách 6. Đặt

$$P=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}$$

$$Q=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}$$

Dễ thấy $P+Q=4$.

$$N+P=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)(c+d)}+\frac{(c+d)^2}{(c+d)(d+a)}+\frac{(d+a)^2}{(d+a)(a+b)}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+P\geq\frac{(a+b+b+c+c+d+d+a)^2}{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+d)+(c+d)(d+a)+(d+a)(a+b)}$$

$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4$ (5).

$$N+Q=\frac{(a+c)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b+d)^2}{(b+d)(c+d)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(d+a)}+\frac{(d+b)^2}{(d+b)(a+b)}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+Q\geq\frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{(a+c)(b+c)+(b+d)(c+d)+(c+a)(d+a)+(d+b)(a+b)}$$

$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4$ (6).

Từ (5), (6) suy ra : $N+P+N+Q\geq 8$ hay $N\geq 2$.

Chú ý. Năm 1954 nhà Toán học người Mỹ *H. Shapiro* đã mở rộng bất đẳng thức Nesbitt thành giả thuyết: *Với $x_1,x_2,...,x_n$ là n số thực dương thì*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+...+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}\quad(*).$$

Ngày nay giả thuyết (*) được gọi là BĐT Shapiro, song phải mất nhiều năm sau đó các nhà Toán học mới chứng minh được BĐT Shapiro đúng ở một số trường hợp riêng trong đó có $n = 4, 5, 6$.

Quả thật bất đẳng thức Shapiro với hình thức đơn giản nhưng để chứng minh được nó có đúng hay không với n tự nhiên tùy ý lại là một điều không đơn giản. Sau gần 4 thập kỷ, tính từ ngày giả thuyết (*) do *Shapiro* đề xuất, vào năm 1989 nhà Toán học *Troesch* đã kết thúc công cuộc tìm kiếm lời giải bài toán bằng việc sử dụng toán học cao cấp cùng máy tính số hiện đại, chứng minh hoàn tất định lý sau đây "*Bất đẳng thức Shapiro đúng với mọi n chẵn, $n < 13$ và n lẻ, $n < 24$, còn với mọi giá trị khác của n thì bất đẳng thức Shapiro sai*".

Bất đẳng thức Shapiro ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất khi $n = 4$ (bài toán nêu trên) cũng đã là một bài toán đẹp hay và khó chứng minh. Lời giải cách 1, 2, 3 được tác giả sưu tầm từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, cách 4 được tác giả đưa ra đăng trong Tạp chí TH&TT số 270 tháng 12 năm 1999, cách 5 do tác giả mới tìm ra trong thời gian gần đây.

NGÔ VĂN THÁI

(*Tổ 9, phường Hoàng Diệu, thành phố Thái Bình*)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải trên của bạn *Ngô Văn Thái*, người giới thiệu đề toán, các bạn sau cũng đóng góp một số cách giải tương tự như những cách giải trong bài viết: *Nguyễn Văn Huy*, 11 Toán 1, *Lê Thủy Tiên*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, tổ 2, hẻm 70/5 Võ Thị Sáu, phường Chánh Lộ, TP. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**. Xin hoan nghênh các bạn

.LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 53 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.9.2021.

BÀI TOÁN 53. *Cho ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*

$$N+Q=\frac{(a+c)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b+d)^2}{(b+d)(c+d)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(d+a)}+\frac{(d+b)^2}{(d+b)(a+b)}$$

$$\geq\frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{(a+c)(b+c)+(b+d)(c+d)+(c+a)(d+a)+(d+b)(a+b)}$$

$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4$. Vậy $N\geq 2$.

Cách 6. Đặt

$$P=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}$$

$$Q=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}$$

Dễ thấy $P+Q=4$.

$$N+P=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)(c+d)}+\frac{(c+d)^2}{(c+d)(d+a)}+\frac{(d+a)^2}{(d+a)(a+b)}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+P\geq\frac{(a+b+b+c+c+d+d+a)^2}{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+d)+(c+d)(d+a)+(d+a)(a+b)}$$

$$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4 \quad (5).$$

$$N+Q=\frac{(a+c)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b+d)^2}{(b+d)(c+d)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(d+a)}+\frac{(d+b)^2}{(d+b)(a+b)}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$N+Q\geq\frac{(a+c+b+d+c+a+d+b)^2}{(a+c)(b+c)+(b+d)(c+d)+(c+a)(d+a)+(d+b)(a+b)}$$

$$=\frac{4(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}=4 \quad (6).$$

Từ (5), (6) suy ra : $N+P+N+Q\geq 8$ hay $N\geq 2$.

Chú ý. Năm 1954 nhà Toán học người Mỹ *H. Shapiro* đã mở rộng bất đẳng thức Nesbitt thành giả thuyết: *Với $x_1,x_2,...,x_n$ là n số thực dương thì*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+...+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2} \quad (*).$$

Ngày nay giả thuyết (*) được gọi là BĐT Shapiro, song phải mất nhiều năm sau đó các nhà Toán học mới chứng minh được BĐT Shapiro đúng ở một số trường hợp riêng trong đó có $n = 4, 5, 6$.

Quả thật bất đẳng thức Shapiro với hình thức đơn giản nhưng để chứng minh được nó có đúng hay không với n tự nhiên tùy ý lại là một điều không đơn giản. Sau gần 4 thập kỷ, tính từ ngày giả thuyết (*) do *Shapiro* đề xuất, vào năm 1989 nhà Toán học *Troesch* đã kết thúc công cuộc tìm kiếm lời giải bài toán bằng việc sử dụng toán học cao cấp cùng máy tính số hiện đại, chứng minh hoàn tất định lý sau đây "*Bất đẳng thức Shapiro đúng với mọi n chẵn, n < 13 và n lẻ, n < 24, còn với mọi giá trị khác của n thì bất đẳng thức Shapiro sai*".

Bất đẳng thức Shapiro ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất khi $n = 4$ (bài toán nêu trên) cũng đã là một bài toán đẹp hay và khó chứng minh. Lời giải cách 1, 2, 3 được tác giả sưu tầm từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, cách 4 được tác giả đưa ra đăng trong Tạp chí TH&TT số 270 tháng 12 năm 1999, cách 5 do tác giả mới tìm ra trong thời gian gần đây.

NGÔ VĂN THÁI
(*Tổ 9, phường Hoàng Diệu, thành phố Thái Bình*)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải trên của bạn *Ngô Văn Thái*, người giới thiệu đề toán, các bạn sau cũng đóng góp một số cách giải tương tự như những cách giải trong bài viết: *Nguyễn Văn Huy*, 11 Toán 1, *Lê Thủy Tiên*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, tổ 2, hẻm 70/5 Võ Thị Sáu, phường Chánh Lộ, TP. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**. Xin hoan nghênh các bạn

.**LÊ MAI** (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 53 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.9.2021.

BÀI TOÁN 53. *Cho ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+2yz+zx}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*

QUAN HỆ GIỮA ... (*Tiếp theo trang 10*)

4. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) ở M và N (F nằm giữa E và M). Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMDH.

5. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C. Gọi P là giao điểm của BC và EF. Qua điểm D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC, CF lần lượt tại Q, R, S. Chứng minh:

a) $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$ và D là trung điểm của QS;

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

6. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) có trực tâm H, nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính AA'. Gọi AD là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ $(D \in BC)$; gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AH.

a) Lấy K là điểm đối xứng với H qua đường thẳng AD. Chứng minh K nằm trên đường thẳng AA'

b) Chứng minh đường thẳng IM đi qua hình chiếu vuông góc của H lên đường thẳng AD.

c) Gọi E là giao điểm của AD và HM. Đường thẳng HK cắt AB, AC lần lượt tại Q, P. Chứng minh Q, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của E lên AB, AC.

7. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp ΔBKN cắt đường tròn (O) tại M (M khác B). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC.

a) Chứng minh EK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBKN.

b) Chứng minh $EM \perp MB$.

8. Cho ΔABC nhọn các đường cao BK và CL cắt nhau tại H, gọi M là trung điểm cạnh BC. Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $HP = HQ$ khi và chỉ khi $MP = MQ$.

9. Cho ΔABC với $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF; gọi EF cắt BC tại G. Gọi K là hình chiếu của C trên AG; AD cắt CK tại H; AC cắt HF tại L. Chứng minh rằng A là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ΔFKL.

(Bài này được viết nhân kỷ niệm 20 năm bài viết đầu tiên của tác giả được đăng trên Tạp chí TH&TT)

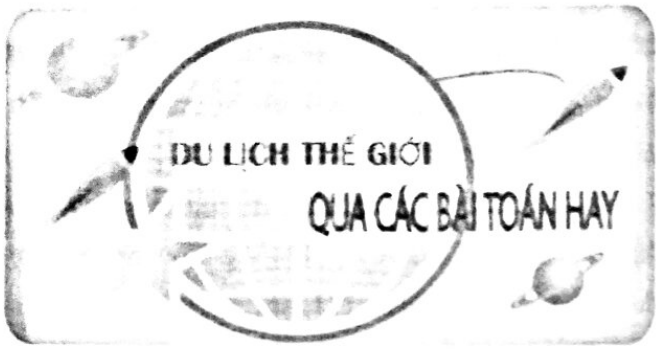
****

ĐỐ VUI

DÁN NHÃN

Doanh nghiệp A chuyển ba thùng hàng mẫu quần, áo cho ba bạn hàng khác nhau ở nước ngoài qua đường hàng không. Một thùng gồm các mẫu quần; một thùng gồm các mẫu áo; một thùng có cả mẫu quần và mẫu áo. Các nhãn dán vào các thùng hàng ghi rõ địa chỉ nhận hàng kèm theo thông tin: MẪU QUẦN; MẪU ÁO; MẪU QUẦN – ÁO. Thật trớ trêu khi các thùng hàng đã được đóng chắc chắn, nhãn đã dán, đã chuyển qua cửa kiểm tra an ninh, nhân viên vận chuyển chuẩn bị chuyển hàng ra máy bay thì mới nhận được thông tin không có thùng hàng nào dán đúng nhãn cả. Mỗi chiếc quần hoặc áo đều được đựng trong một túi ni lông riêng (túi hàng). Nếu mở nắp thùng hàng thì chỉ nhìn thấy túi hàng trên cùng. Thời gian còn lại để dán lại nhãn cho các thùng trước khi chuyển ra máy bay chỉ đủ để mở nắp được đúng một thùng hàng, thay đổi lại các nhãn dán vào các thùng hàng cho đúng và không được nhấc túi hàng ra khỏi thùng hàng. Làm thế nào có thể dán lại các nhãn cho các thùng hàng đó? Mời các bạn chỉ giúp.

NGUYỄN THANH GIANG
(*Hưng Yên*)

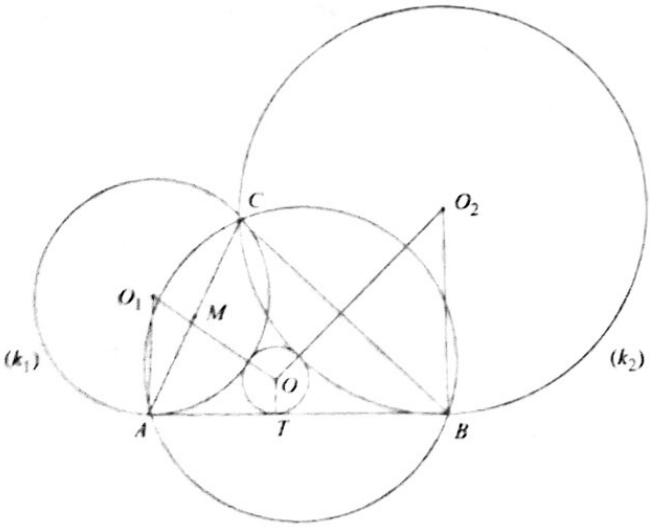


BÀI TOÁN 59 (Problem 10.2, 1996, the Winter mathematical competitions in Bulgaria). *Cho tam giác ABC có R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn (k_1) và (k_2), hai đường tròn này đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AB tương ứng tại A và B.*

a) Chứng minh rằng ba số R_1, R, R_2 lập thành một cấp số nhân.

b) Tính các góc của tam giác ABC nếu đường tròn tiếp xúc với (k_1), (k_2) và đường thẳng AB có bán kính bằng $\frac{R}{4}$.

Lời giải.



a) Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Kí hiệu O_1, O_2 lần lượt là tâm hai đường tròn (k_1), (k_2). Khi đó O_1 là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại A và đường trung trực của AC. Gọi M là trung điểm AC thì ta có: $\widehat{MAO_1} = \left|90^0 - \widehat{A}\right|$, do đó:

$$R_1 = O_1A = \frac{AM}{\cos\left(90^0 - A\right)} = \frac{AC}{2\sin A}.$$

Theo định lí hàm số sin ta có: $R_1 = R.\frac{b}{a}$ (1).

Tương tự: $R_2 = R.\frac{a}{b}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $R_1R_2 = R^2$. Do đó ba số R_1, R, R_2 lập thành một cấp số nhân.

b) Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với (k_1), (k_2) và đường thẳng AB. Kí hiệu T là điểm tiếp xúc của đường tròn này với đường thẳng AB và r là bán kính của nó. Xét hình thang vuông $ATOO_1$, ta có:

$$AT = \sqrt{(R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2} = 2\sqrt{R_1r}.$$

Tương tự:

$$BT = \sqrt{(R_2 + r)^2 - (R_2 - r)^2} = 2\sqrt{R_2r}.$$

Do đó: $c = AT + BT = 2\sqrt{R_1r} + 2\sqrt{R_2r}$. Suy ra:

$$r = \frac{c^2}{4(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}.$$

Sử dụng (1) và (2) ta được: $r = \frac{abc^2}{4R(a+b)^2}$ (3).

Vì $\frac{ab}{(a+b)^2} \le \frac{1}{4}$ và $c^2 \le 4R^2$ nên từ (3) ta có: $r \le \frac{1}{4}R$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$ và $c = 2R$.

Lúc đó ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^0, \widehat{C} = 90^0$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào gửi bài giải này về Tòa soạn.

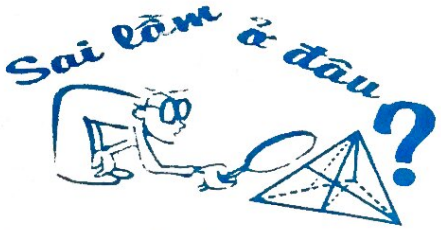
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 61. *Một điểm trong mặt phẳng tọa độ Đề Các vuông góc được gọi là điểm "hỗn hợp" (mixed point) nếu một trong hai thành phần tọa độ của nó là số hữu tỷ, thành phần kia là số vô tỷ. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực sao cho đồ thị của đa thức đó không chứa bất kỳ điểm hỗn hợp nào.*

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*



GIẢI ĐÁP: **ĐÁP ÁN NÀO!**

(Đề đăng trên TH&TT số 526, tháng 4 năm 2021)

Phân tích. Bạn *Thành Trung* sai ở chỗ, áp dụng kết quả: Cho đường tròn (*C*) có tâm *I*, bán kính *R* và đường tròn (*C'*) có tâm *I'*, bán kính *R'*. Điểm *A* thay đổi thuộc (*C*), điểm *B* thay đổi thuộc (*C'*). Đoạn thẳng *AB* có độ dài lớn nhất là *II'* + *R* + *R'*. Với *A*, *B* không có ràng buột nào thêm. Còn trong bài toán này thì, ngoài *A* thuộc (*C*), *B* thuộc (*C'*), còn thêm ràng buột giữa *A* và *B* là *OA*, *OB* vuông góc (*O* là gốc tọa độ). Để giải bài toán này đúng theo hướng khai thác tính chất hình học trong số phức của bạn *Thành Trung* ta sử dụng kiến thức: Điểm *A* thay đổi thuộc (*C*) có tâm *I*, bán kính *R*. Điểm *M* cố định, độ dài *MA* lớn nhất là *MI* + *R*. Ta sửa lại bài giải của bạn *Thành Trung* như sau:

Lời giải đúng. Gọi $z_1 = x + yi$ (x , $y \in \mathbb{R}$), có điểm biểu diễn là *A*(*x*; *y*), khi đó theo giả thiết của đề bài ta có $z_2 = -y + xi$, có điểm biểu diễn là *B*(–*y*; *x*).

Khi đó: $|z_1 + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$, suy ra *A* thuộc đường tròn (*C*) có tâm *I*(–1; 1) và bán kính *R* = 1. Ta lại có: $|z_1 + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_2}{i} + 1 - i\right| = 1$

$$\Leftrightarrow |z_2 + 1 + i| = 1 \Leftrightarrow (-y+1)^2 + (x+1)^2 = 1,$$

suy ra *B* thuộc đường tròn (C') có tâm *I'*(–1; –1) và bán kính *R'* = 1. Từ *A*(*x*; *y*) và *B*(–*y*; *x*), suy ra *OA*, *OB* vuông góc. Khi đó, ta có:

$$|z_1 - z_2|^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 \le (OI + R)^2 + (OI' + R')^2$$
$$\le 2(\sqrt{2}+1)^2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \le 2 + \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi có *A*, *B* lần lượt thuộc (*C*) và (*C'*) thỏa mãn $\begin{cases} OA = OI + R \\ OB = OI' + R' \end{cases}$, điều này đúng. Vậy $m = 2 + \sqrt{2}$. Chọn A.

Lời bình. Có thể lời giải theo hướng của bạn *Thành Trung* chưa tối ưu, tuy nhiên, cách giải này giúp ta khai thác được tính chất hình học của số phức để giải toán trắc nghiệm về số phức. Có thể không hay trong bài toán này, nhưng trong một số bài toán khác thì cách giải này giúp ta có kết quả nhanh hơn. Ta có thể giải bài toán trên theo hướng đại số như sau:

Gọi $z_1 = x + yi$ (x , $y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_2 = -y + xi$. Khi đó: $|z_1 + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Vậy tồn tại $t \in \mathbb{R}$ để: $x = -1 + \sin t$ và $y = 1 + \cos t$. Do đó:

$$|z_1 - z_2|^2 = (x+y)^2 + (y-x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$
$$= 2[3 - 2(\sin t - \cos t)] = 6 - 4\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \le 6 + 4\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow m = \sqrt{2} + 2$. Chọn A.

Nhận xét. Các bạn tham gia bài này đã không phát hiện được sai lầm trong lời giải.

KIHIVI

TÍNH TỔNG !

Đề bài. *Cho cấp số nhân* (u_n) *thoả mãn* $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. *Tính tổng* $S_{2021} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_{2021}}$.

Sau đây là lời giải của bạn Hải: Gọi u_1, q lần lượt là số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n), thì số hạng tổng quát là $u_n = u_1.q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 + u_1 q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1(1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Suy ra $u_n = u_1.q^{n-1} = 16.2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó:

$$S_{2021} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16.2^1} + \frac{1}{16.2^2} + ... + \frac{1}{16.2^{2020}}$$
$$= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2020}}\right).$$

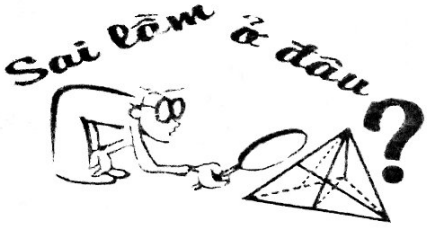
Xét $P = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2020}}$. Nhận thấy các số hạng của *P* là một cấp số nhân nên

$$P = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow S_{2021} = \frac{1}{16}\left(2 - \frac{1}{2^{2020}}\right) = \frac{2^{2021} - 1}{2^{2024}}.$$

Bạn có tìm ra đáp số giống của bạn Hải không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



GIẢI ĐÁP: ĐÁP ÁN NÀO!

(*Đề đăng trên TH&TT số 526, tháng 4 năm 2021*)

Phân tích. Bạn *Thành Trung* sai ở chỗ, áp dụng kết quả: Cho đường tròn (*C*) có tâm *I*, bán kính *R* và đường tròn (*C'*) có tâm *I'*, bán kính *R'*. Điểm *A* thay đổi thuộc (*C*), điểm *B* thay đổi thuộc (*C'*). Đoạn thẳng *AB* có độ dài lớn nhất là *II'* + *R* + *R'*. Với *A*, *B* không có ràng buột nào thêm. Còn trong bài toán này thì, ngoài *A* thuộc (*C*), *B* thuộc (*C'*), còn thêm ràng buột giữa *A* và *B* là *OA*, *OB* vuông góc (*O* là gốc tọa độ). Để giải bài toán này đúng theo hướng khai thác tính chất hình học trong số phức của bạn *Thành Trung* ta sử dụng kiến thức: Điểm *A* thay đổi thuộc (*C*) có tâm *I*, bán kính *R*. Điểm *M* cố định, độ dài *MA* lớn nhất là *MI* + *R*. Ta sửa lại bài giải của bạn *Thành Trung* như sau:

Lời giải đúng. Gọi $z_1 = x + yi$ (x , $y \in \mathbb{R}$), có điểm biểu diễn là *A*(*x*; *y*), khi đó theo giả thiết của đề bài ta có $z_2 = -y + xi$, có điểm biểu diễn là *B*(−*y*; *x*).

Khi đó: $|z_1 + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$, suy ra *A* thuộc đường tròn (*C*) có tâm *I*(−1; 1) và bán kính *R* = 1. Ta lại có: $|z_1 + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_2}{i} + 1 - i\right| = 1$

$$\Leftrightarrow |z_2 + 1 + i| = 1 \Leftrightarrow (-y+1)^2 + (x+1)^2 = 1,$$

suy ra *B* thuộc đường tròn (C') có tâm *I'*(−1; −1) và bán kính *R'* = 1. Từ *A*(*x*; *y*) và *B*(−*y*; *x*), suy ra *OA*, *OB* vuông góc. Khi đó, ta có:

$$|z_1 - z_2|^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 \le (OI + R)^2 + (OI' + R')^2$$
$$\le 2(\sqrt{2}+1)^2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \le 2 + \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi có *A*, *B* lần lượt thuộc (*C*) và (*C'*) thỏa mãn $\begin{cases} OA = OI + R \\ OB = OI' + R' \end{cases}$, điều này đúng. Vậy $m = 2 + \sqrt{2}$. Chọn A.

Lời bình. Có thể lời giải theo hướng của bạn *Thành Trung* chưa tối ưu, tuy nhiên, cách giải này giúp ta khai thác được tính chất hình học của số phức để giải toán trắc nghiệm về số phức. Có thể không hay trong bài toán này, nhưng trong một số bài toán khác thì cách giải này giúp ta có kết quả nhanh hơn. Ta có thể giải bài toán trên theo hướng đại số như sau:

Gọi $z_1 = x + yi$ (x , $y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z_2 = -y + xi$. Khi đó: $|z_1 + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Vậy tồn tại $t \in \mathbb{R}$ để: $x = -1 + \sin t$ và $y = 1 + \cos t$. Do đó:

$$|z_1 - z_2|^2 = (x+y)^2 + (y-x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$
$$= 2[3 - 2(\sin t - \cos t)] = 6 - 4\sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \le 6 + 4\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow m = \sqrt{2} + 2$. Chọn A.

Nhận xét. Các bạn tham gia bài này đã không phát hiện được sai lầm trong lời giải.

KIHIVI

TÍNH TỔNG !

Đề bài. *Cho cấp số nhân* (u_n) *thoả mãn* $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. *Tính tổng* $S_{2021} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_{2021}}$.

Sau đây là lời giải của bạn Hải: Gọi u_1, q lần lượt là số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n), thì số hạng tổng quát là $u_n = u_1.q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 + u_1 q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1(1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Suy ra $u_n = u_1.q^{n-1} = 16.2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó:

$$S_{2021} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16.2^1} + \frac{1}{16.2^2} + ... + \frac{1}{16.2^{2020}}$$
$$= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2020}}\right).$$

Xét $P = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2020}}$. Nhận thấy các số hạng của *P* là một cấp số nhân nên

$$P = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow S_{2021} = \frac{1}{16}\left(2 - \frac{1}{2^{2020}}\right) = \frac{2^{2021} - 1}{2^{2024}}.$$

Bạn có tìm ra đáp số giống của bạn Hải không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 530 (8.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

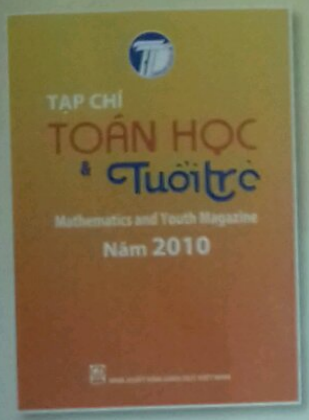
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

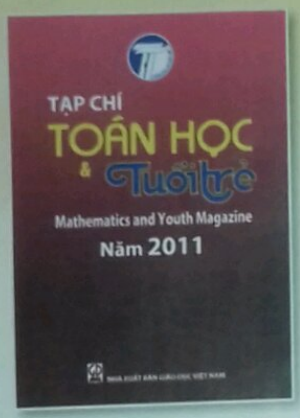
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

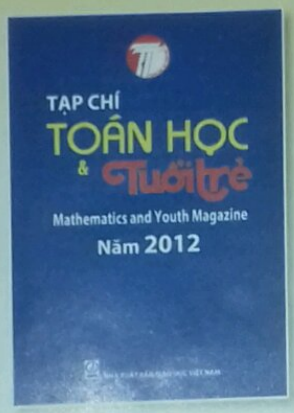
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

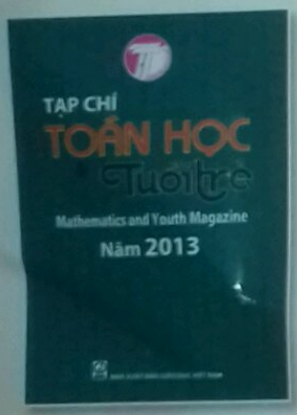
Bộ đóng tập

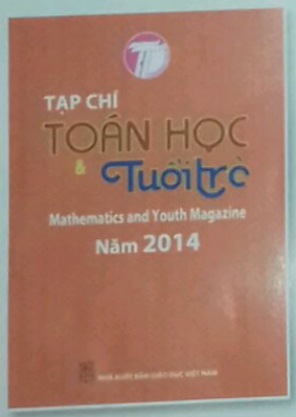
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

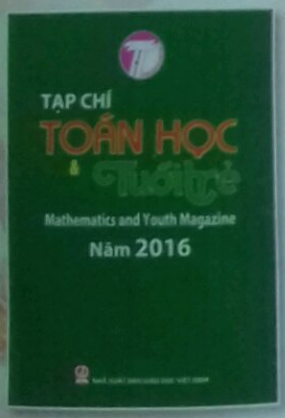


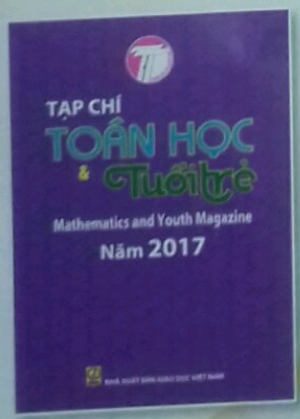


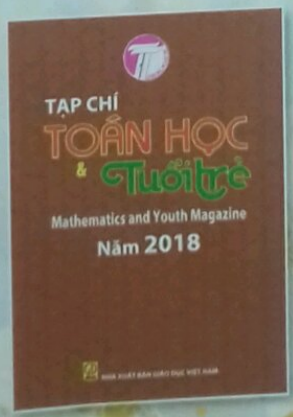


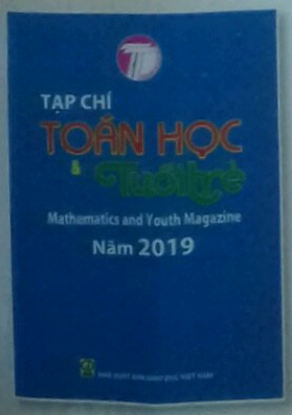


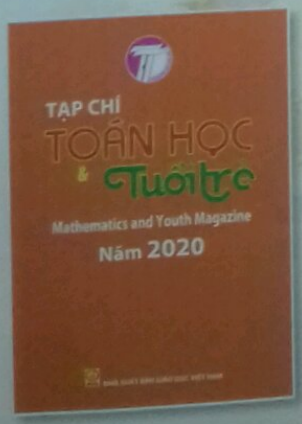












Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: [illegible]

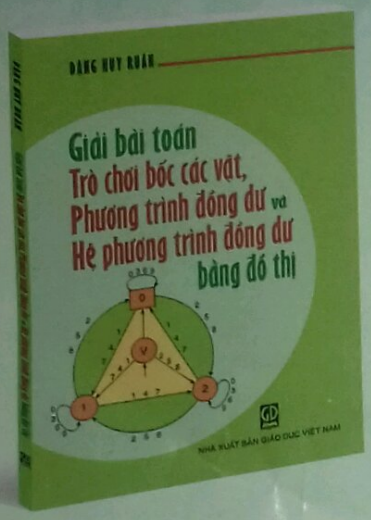
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối cùng của sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT8M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2021
Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng