



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 529

Tháng 7 - 2021

ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com



Nhà vật lý, nhà toán học người Ý Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

<https://tieulun.hopto.org>

ĐẶT SÁCH GIÁO KHOA TRÊN NHÀ SÁCH SỐ VỚI 3 BƯỚC ĐƠN GIẢN

hi công nghệ số ngày càng phát triển, việc mua SGK cho con cũng trở nên đơn giản hơn bao giờ hết. Thay vì đến cửa hàng mua sách, quý thầy/cô, quý phụ huynh và các em học sinh có thể đặt mua SGK trực tiếp trên Fanpage Nhà Sách Số với các bước như sau:

Bước 1: Tham khảo các đầu sách trong danh mục "Cửa hàng" trên Fanpage Nhà Sách Số.

Bước 2: Cung cấp thông tin đặt hàng cho Nhà Sách Số trong mục tin nhắn trên Fanpage với các thông tin cơ bản như:

- Họ tên người mua hàng
- Tên sách cần mua kèm số lượng cụ thể
- Số điện thoại người nhận hàng
- Địa chỉ nhận hàng

Bước 3: Quý khách thanh toán và nhận hàng theo phương thức chuyên khoản hoặc tiền mặt.

Thông tin chi tiết xin liên hệ:

Facebook Nhà Sách Số: <https://www.facebook.com/nhasachsonxbgdvn/>

Hotline: 19004503

Website: <https://nhasachso.nxbgd.vn/>

Email: hotro.nss@acsgroup.edu.vn



- Quý thầy cô, quý phụ huynh có thể hoàn toàn yên tâm khi mua sách giáo khoa trên Nhà Sách Số. Nhà Sách Số luôn cam kết:
- Cung cấp sách giáo khoa với giá niêm yết được in sau mỗi cuốn sách.
 - Đảm bảo cung ứng đúng và đủ với từng nhu cầu đặt sách (bao gồm sách bộ và sách lẻ)
 - Sách được xuất trực tiếp từ Nhà Xuất Bản Giáo dục Việt Nam. Trên mỗi cuốn sách giáo khoa có đầy đủ tem và mã code của NXBGDVN.

NHÀ SÁCH SỐ: MUA CHÍNH THỐNG – ĐẶT CHỦ ĐỘNG – NHẬN KỊP THỜI



**ỨNG DỤNG
CỦA MỘT HÀNG ĐANG THỰC BẮC HẢI**

NGUYỄN KH
(Gi' Lương' Linh Hương')

Trong bài viết này, chúng ta sẽ xem xét một số ứng dụng của một hàng đang thực bắc hải trong bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức. Trước tiên chúng ta tìm hiểu một mở rộng của một hàng đang thực bắc hải.

1. MỞ RỘNG MỘT HÀNG ĐANG THỰC BẮC HẢI.

$$\text{Từ } \begin{cases} (x+y)^2 = (x^2+y^2)+2(xy) \\ (x-y)^2 = (x^2+y^2)-2(xy) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 \\ xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \end{cases}$$

$$\text{suy ra: } \begin{aligned} a(x^2+y^2)+b(xy) &= \frac{2a+b}{4}(x+y)^2 + \frac{2a-b}{4}(x-y)^2. \end{aligned}$$

Với $ax^2+bxy+cy^2$ thì như thế nào?

Để trả lời câu hỏi này ta tìm m, n, k sao cho:

$$(a+b+c)(ax^2+bxy+cy^2) = (mx+ny)^2 + k(x-y)^2 \quad (1)$$

Vì x, y (với $a+b+c \neq 0$). Vì (1) đúng $\forall x, y$ nên

$$\begin{cases} a(a+b+c) = m^2 + k & (2) \\ b(a+b+c) = 2mn - 2k & (3) \\ c(a+b+c) = n^2 + k & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2), (3), (4) suy ra: } (m+n)^2 = (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+b+c \\ m+n = -a-b-c \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $m+n = a+b+c$. Từ (2), (3) suy

$$\text{ra: } 2m(m+n) = (2a+b)(a+b+c) \Rightarrow m = \frac{2a+b}{2}.$$

$$\text{Dễ dàng tính được } n = \frac{2c+b}{2} \text{ và } k = \frac{4ac-b^2}{4}.$$

- Trường hợp 2: $m+n = -a-b-c$, ta cũng

$$\text{được: } m = -\frac{2a+b}{2}, n = -\frac{2c+b}{2} \text{ và } k = \frac{4ac-b^2}{4}$$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có kết luận:

Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $ax^2+bxy+cy^2$

$$= \frac{[(2a+b)x + (2c+b)y]^2}{4(a+b+c)} + \frac{4ac-b^2}{4(a+b+c)}(x-y)^2$$

Đặc biệt, nếu $\begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ 4ac-b^2 = 0 \end{cases}$ thì

$$(a+b+c).f(x,y) \geq 0, \forall x, y$$

trong đó $f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$.

2. MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 1 (Thi HSG lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1996-1997)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu

thức $K = x^2+y^2$.

Lời giải. Ta có:

$$\bullet \quad x^2+y^2-xy=4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 3(x-y)^2 = 16;$$

$$K = x^2+y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

$$\text{Do đó: } 2K = [(x+y)^2 + 3(x-y)^2] - 2(x-y)^2$$

$$= 16 - 2(x-y)^2 \leq 16 \Rightarrow K \leq 8.$$

Khi $x=y=2$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $K=8$. Vậy giá trị lớn nhất của K bằng 8.

$$\bullet \quad 6K = [(x+y)^2 + 3(x-y)^2] + 2(x+y)^2$$

$$= 16 + 2(x+y)^2 \geq 16 \Rightarrow K \geq \frac{8}{3}.$$

Khi $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện đề

bài) thì $K = \frac{8}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của K bằng

$\frac{8}{3}$.

Thí dụ 2 (ĐH khối A, 2006)

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn

$$x(x+y) = x^2 + y^2 - xy \quad \text{Tìm giá trị lớn nhất của}$$

biểu thức $4 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

Lời giải. Vì $xy \neq 0$ nên $x^2 + y^2 > 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-y)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy > 0$$

$$\Rightarrow xy(x+y) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} > 0.$$

Ta có: $xy(x+y) = x^2 + y^2 - xy$

$$= \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{xy(x+y)} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \leq 4 \quad (\text{chú ý } x+y \neq 0).$$

Như vậy: $0 < \frac{x+y}{xy} \leq 4 \Rightarrow \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \leq 16$.

$$\text{Do đó: } A = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3}$$

$$= \frac{xy(x+y)^2}{x^3 y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \leq 16.$$

Khi $x = y = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì

$A = 16$. Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

Thí dụ 3 (ĐH khối A, 2009).

Cho hai số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có

$$(x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z) \leq 5(x+y+z)^3.$$

Lời giải. Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$, ta có:

$$x = \frac{a+c-b}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}.$$

Khi đó điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$ trở thành:

$$\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = 3 \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

$$\Leftrightarrow [(a+c)-b][(a+c)+b]$$

$$= 3[b+(c-a)][b-(c-a)]$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac \quad (1).$$

Bất đẳng thức phải chứng minh có dạng

$a^3 + c^3 + 3abc \leq 5b^3$ (2) với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện (1).

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - ac$

$$= \frac{1}{4}(a+c)^2 + \frac{3}{4}(a-c)^2 \geq \frac{1}{4}(a+c)^2$$

$$\Rightarrow b \geq \frac{a+c}{2} \Rightarrow \sqrt{ac} \Rightarrow b^2 \geq ac.$$

Như vậy ta có: $2b - a - c \geq 0$ và $b^2 - ac \geq 0$.

Ta cũng có: (2) $\Leftrightarrow 5b^3 \geq (a+c)(a^2 + c^2 - ac) + 3abc$

$$\Leftrightarrow 5b^3 \geq (a+c)b^2 + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 3(b^2 - ac) + b(2b - a - c) \geq 0.$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $3x^2 + xy + 2y^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = x^2 + 3xy - y^2$.

Lời giải. Đặt $A = 3x^2 + xy + 2y^2$ thì $A \leq 2$. Ta có:

$$K + A = (2x + y)^2 \geq 0 \Rightarrow K \geq -A \geq -2 \Rightarrow K \geq -2.$$

Khi $x = \frac{\sqrt{2}}{3}, y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $K = -2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của K bằng -2.

Ta cũng có:

$$K - \frac{13}{23}A = x^2 + 3xy - y^2 - \frac{13}{23}(3x^2 + xy + 2y^2)$$

$$= -\frac{(4x-7y)^2}{23} \leq 0$$

$$\Rightarrow K \leq \frac{13}{23}A \leq \frac{26}{23} \Rightarrow K \leq \frac{26}{23}.$$

Khi $x = \frac{7\sqrt{46}}{69}, y = \frac{4\sqrt{46}}{69}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $K = \frac{26}{23}$. Vậy giá trị lớn nhất của K bằng

$$\frac{26}{23}.$$

Nhận xét. Ta có thể tìm số

$$-\frac{13}{23} \text{ bằng cách xét } K + \alpha A = (3\alpha + 1)x^2 + (\alpha + 3)xy + (2\alpha - 1)y^2 \text{ và}$$

giải phương trình $4(3\alpha + 1)(2\alpha - 1) - (\alpha + 3)^2 = 0$.

Thí dụ 5 (ĐH khối B, 2008).

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\bullet P - 3 = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} - 3$$

$$= -\frac{(x-3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow P \leq 3. \text{ Khi } x = \frac{3\sqrt{10}}{10}, y = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ (thỏa mãn điều}$$

kiện đề bài) thì $P = 3$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

$$\bullet P + 6 = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} + 6 = \frac{2(2x + 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow P \geq -6. \text{ Khi } x = \frac{3\sqrt{13}}{13}, y = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ (thỏa mãn}$$

điều kiện đề bài) thì $P = -6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -6.

Nhận xét. Số -3 và số 6 được tìm bằng cách xét $P + \alpha = \frac{(\alpha + 2)x^2 + 2(\alpha + 6)xy + 3\alpha y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$ và giải

$$\text{phương trình } 4(\alpha + 2)3\alpha - [2(\alpha + 6)]^2 = 0.$$

Thí dụ 6 (Bài 4 (143) báo Toán Tuổi thơ).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{2x^3 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^3 + 3yz + 4z^2} + \sqrt{2z^3 + 3zx + 4x^2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt{2x^3 + 3xy + 4y^2} = \sqrt{\frac{(7x+11y)^2}{36} + \frac{23}{36}(x-y)^2}$$

$$\geq \sqrt{\frac{(7x+11y)^2}{36}} = \frac{7x+11y}{6}$$

$$\sqrt{2y^3 + 3yz + 4z^2} \geq \frac{7y+11z}{6}$$

$$\sqrt{2z^3 + 3zx + 4x^2} \geq \frac{7z+11x}{6}$$

Từ đây suy ra:

$$P \geq 3(x+y+z) \geq 3(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 3$$

$\Rightarrow P \geq 3$. Khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $P = 3$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

Thí dụ 7. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4x^2 - xy + 2y^2} + \frac{1}{4y^2 - yz + 2z^2} + \frac{1}{4z^2 - zx + 2x^2}$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{4x^2 - xy + 2y^2} \leq \frac{9}{2x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1).$$

$$\text{Thật vậy } (1) \Leftrightarrow (2x+y)(11x+4y) \leq 9(4x^2 - xy + 2y^2)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 14(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (2).$$

$$\text{Rõ ràng (2) đúng, vậy (1) đúng. Mặt khác}$$

Từ đây suy ra: $\frac{11x+4y}{4x^2-xy+2y^2} \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$.

Chúng minh tương tự cũng có:

$$\frac{11y+4z}{4y^2-yz+2z^2} \leq \frac{2}{y} + \frac{1}{z}; \frac{11z+4x}{4z^2-zx+2x^2} \leq \frac{2}{z} + \frac{1}{x}.$$

Suy ra: $P \leq 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 \left(\frac{xy+yz+zx}{xyz} \right) = 9$.

Khi $x=y=z=1$ (thỏa mãn điều kiện đề) thì $P=9$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9.

Nhận xét. BDT(1) có được bằng cách: Tìm α, β

sao cho $\frac{11x+4y}{4x^2-xy+2y^2} \leq \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}$ đúng với

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ đồng thời dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thí dụ 8 (Thi vào 10, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu, 2020). Cho các số thực dương a, b . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a+b) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2a^2-ab+b^2}} \right).$$

Lời giải. Với mọi số thực dương a, b ta có:

$$P = \sqrt{2}(a+b) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3b^2+(a-b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{3a^2+b^2+(a-b)^2}} \right)$$

$$\leq \sqrt{2}(a+b) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3b^2}} + \frac{1}{\sqrt{3a^2+b^2}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{(b+a)^2}{(a^2+b^2)+2a^2}} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2)+2b^2}} \right)$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{2a^2}} + \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{2b^2}} \right)$$

$$\leq \sqrt{2} \sqrt{2 \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{2a^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{2b^2} \right)} = 2\sqrt{2}.$$

Khi $a=b=1$ thì $P=2\sqrt{2}$. Vậy $\max P=2\sqrt{2}$.

3. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1 (ĐH khối A, 2003). Cho ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Bài 2 (Bài T9/419 Tập chí Toán học & Tuổi trẻ)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$15 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 10 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + 2012.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

Bài 3 (Bài T11/423 Tập chí Toán học & Tuổi trẻ)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt{x+12y+8} = 2xy+y+5 \end{cases}$$

Bài 4 (Thi vào 10 chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, 2009-2010, vòng 2)

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{a+b+c}{5}.$$

Bài 5. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+2xy+4y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=x^2+6xy+12y^2$.

Bài 6. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2>0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x^2-2xy+9y^2}{x^2+2xy+5y^2}.$$

Bài 7 (Thi HSG TP. Bắc Ninh, lớp 8, 2020-2021)

Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Bài 8. Với hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2>0$. Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{2x+4y+3}{x^2+2xy+4y^2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HÀ TĨNH NĂM HỌC 2020-2021

PHẦN I. Phần ghi kết quả

Câu 1.

$$A = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}} = \sqrt{3} + 1.$$

Câu 2. Vì $x=3+\sqrt{2}$ nên

$$M = \frac{\sqrt{x^2-6x+16}}{x^3-5x^2+x-1} = \frac{-3}{8}.$$

Câu 3. $C+O+V+I+D=25$.

Câu 4. Hết đồng X có 272 thí sinh.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = 2a^2 + b^2 - 2ab - 8a + 2b + 12.$$

bằng 2 khi $a=3, b=2$.

Câu 6. $AC=60\sqrt{3}$ m.

Câu 7. Nghiệm của hệ: $\begin{cases} x(x+1)-y(y+1)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

$$\text{là } (x;y) \in \left\{ (1;-2), (-2;1), \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2} \right) \right\}.$$

Câu 8. $m = \frac{23}{16}; m = \frac{25}{16}$.

Câu 9. $BE = \frac{12}{5} = 2,4$ cm.

Câu 10. $\widehat{PQA} = 40^\circ$.

PHẦN II. Tự luận

Câu 11. $(x^2-1)(x+3)(x+5)=9$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=9$$

$$\Leftrightarrow [(x-1)(x+5)][(x+1)(x+3)]=9$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=9 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2+4x+4 = (x+2)^2 \Rightarrow t \geq 0.$$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$(t-9)(t-1)=9 \Leftrightarrow t^2-10t+9=9 \Leftrightarrow (t-10)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=10 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } t=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

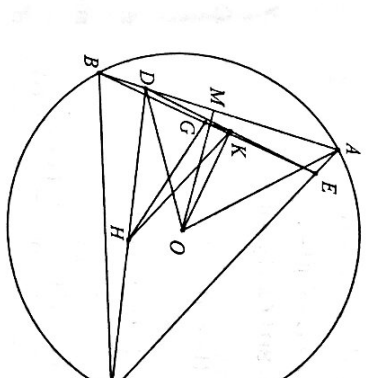
$$\text{Nếu } t=10 \Rightarrow (x+2)^2=10 \Leftrightarrow x=-2 \pm \sqrt{10}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2, -2+\sqrt{10}, -2-\sqrt{10}\}$.

Câu 12. a) Vì $DA > BD$ nên

$$DA > \frac{DA+DB}{2} = \frac{AB}{2} = AM$$

nên M nằm giữa A và D .



Theo bài ra suy ra $OM \perp AB$.

Từ định lý Pythagore suy ra:

$$OA^2 = AM^2 + MO^2; OD^2 = MD^2 + MO^2.$$

$$\text{Suy ra: } OA^2 - OD^2 = AM^2 - MD^2$$

$$= (AM - DM)(AM + DM) = (BM - DM).AD = BD.AD.$$

b) Theo bài ra ta có $KG \parallel AB; KH \parallel AC$, suy ra:

$$\widehat{GKH} = \widehat{BAC} \quad (1) \text{ và } \frac{KG}{KH} = \frac{2KG}{2KH} = \frac{BD}{CE}.$$

Mặt khác chứng minh tương tự như câu a ta có:

$$OA^2 - OE^2 = AE.EC.$$

$$\text{Mà } OE = OD \text{ nên } BD.AD = AE.EC \Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AE}{AD}.$$

$$\text{Do đó } \frac{KG}{KH} = \frac{AE}{AD} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra:}$$

$$\widehat{AEAD} \sim \widehat{AGHK} \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{KGH} = \widehat{DEA} = 180^\circ - \widehat{KEC} \quad (3).$$

Mà $KH \parallel CE$ nên $\widehat{EKH} + \widehat{KEC} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{EKH} = 180^\circ - \widehat{KEC}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{KGH} = \widehat{EKH}$ (dpcm).

Câu 13. Theo bài ra ta có: $2P + 1 = (x + y + z)^2$.

Cách 1. Từ giả thiết suy ra: $x^2 < 1; y^2 < 1$

$$\Rightarrow 0 < (1 - x^2)(1 - y^2) \leq \left[\frac{2 - (x^2 + y^2)}{2} \right]^2.$$

Mặt khác: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

$$\Rightarrow (xy + z)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2).$$

Do đó theo BDT Cauchy ta thấy:

$$(xy + z)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) \leq \left[\frac{2 - (x^2 + y^2)}{2} \right]^2$$

$$\Rightarrow xy + z \leq \frac{2 - (x^2 + y^2)}{2}$$

$$\Rightarrow z \leq \frac{2 - (x^2 + y^2)}{2} \Rightarrow -xy = \frac{2 - (x + y)^2}{2} \quad (1).$$

Ta có: $(x + y - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 1 \geq 2(x + y)$

$$\Leftrightarrow x + y \leq \frac{(x + y)^2 + 1}{2} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra:}$$

$$x + y + z \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

$$2P + 1 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{5}{8}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi}$$

$$x = y = z = \frac{1}{2}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } P = \frac{5}{8}.$$

Cách 2. Ta chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Thật vậy, nếu $xyz > \frac{1}{8} \Rightarrow 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

$$\geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2 + 2xyz} > 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

(vô lí). Suy ra $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Ta chứng minh BDT: Với x, y, z là các số dương ta luôn có:

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz \quad (*).$$

Thật vậy, ta nhận thấy:

$$(x + y - z) + (y + z - x) = 2y > 0;$$

$$(y + z - x) + (z + x - y) = 2z > 0;$$

$$(x + y - z) + (z + x - y) = 2x > 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \geq 0.$$

$$\text{Nếu } 9 - 4s \leq 0 \Leftrightarrow s \geq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow s^3 - 2s = s(s^2 - 2) > 0, xyz(9 - 4s) \leq 0 \quad (\text{vô lí}).$$

$$\text{Suy ra: } 9 - 4s > 0. \text{ Khi đó:}$$

$$(9 - 4s)xyz \geq s^3 - 2s \Leftrightarrow xyz \geq \frac{s^3 - 2s}{9 - 4s}.$$

$$\text{Do } xyz \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{s^3 - 2s}{9 - 4s} \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8s^3 - 16s \leq 9 - 4s \quad (\text{do } 9 - 4s > 0)$$

$$\Leftrightarrow (2s - 3)(4s^2 + 6s + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow s \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{suy ra: } x + y + z \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

Từ bài ra ta cũng có:

$$2P + 1 = (x + y + z)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{5}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P = \frac{5}{8} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Cách 3. Từ giả thiết suy ra: $0 < x, y, z < 1$.

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}},$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}},$$

$$z = \frac{c}{\sqrt{(b+c)(a+c)}} \quad (a, b, c > 0).$$

$$\text{Khi đó: } x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} +$$

$$\frac{b^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{c^2}{(b+c)(a+c)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$= \frac{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) + 2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} = 1 \quad (c > 0).$$

$$\text{Do đó: } x + y + z =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+c} \cdot \frac{c}{b+c}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c}}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

Từ bài ra ta cũng có:

$$2P + 1 = (x + y + z)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{5}{8}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{5}{8}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Cách 4. Theo chứng minh trong cách 2 ta suy ra

$$xyz \leq \frac{1}{8} \text{ và } 0 < x, y, z < 1$$

$$\text{nên trong 3 số } x, y, z \text{ tồn tại ít nhất một số không}$$

$$\text{lớn hơn } \frac{1}{2}. \text{ Giả sử } x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH1: Nếu } y \leq \frac{1}{2}; z \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y + z \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{TH2: Nếu } y \geq \frac{1}{2}; z \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xyz - \frac{xy + yz + zx}{2} + \frac{x + y + z}{4} - \frac{1}{8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2xyz - (xy + yz + zx) + \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết suy ra:}$$

$$1 - (x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) + \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) \leq 3.$$

$$\text{Áp dụng BDT } \frac{(x + y + z)^2}{3} \leq (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2(x + y + z)^2}{3} \leq 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Suy ra:}$$

$$\frac{2(x + y + z)^2}{3} + 2(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 8(x + y + z)^2 - 6(x + y + z) - 9 \leq 0$$

(Xem tiếp trang 9)

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN,
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI, NĂM 2021**

VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 90 phút; Dành cho tất cả các thí sinh)

Câu I (2 điểm). Giải phương trình

$$13\sqrt{5-x} + 18\sqrt{x+8} = 61 + x + 3\sqrt{(5-x)(x+8)}.$$

Câu II (2 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 1 \\ x(x+y)^3 = x-y \end{cases}$$

Câu III (2 điểm). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13 ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.

Câu IV (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB .

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 150 phút; Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin)

Câu I (4 điểm).

1) Với a, b, c là những số thực thỏa mãn $a+b+c \neq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{c}{c^2(a+b+c)+1+abc} = \frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x^2y^2 = 1 \\ 3xy(x+2y) + 31 = 9x + 18y + 13xy \end{cases}$$

Câu II (2 điểm).

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 29 = 2^y$.



1) Chứng minh rằng OP đi qua trung điểm I của KL .

2) Gọi H là trực tâm tam giác CMN . Chứng minh rằng $\frac{OI}{CH} - \frac{EF}{2MN} = -\frac{1}{2}$.

3) Gọi giao điểm của EK, FL với BD lần lượt là S, T . Gọi giao điểm của NS và MT là Q . Đường tròn nội tiếp của tam giác CMN tiếp xúc MN tại G . Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và GH song song.

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 7)

$$\Leftrightarrow [2(x+y+z)-3][4(x+y+z)+3] \leq 0$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) - 3 \leq 0 \quad (\text{do } 4(x+y+z) + 3 > 0)$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{TH3: } y \geq \frac{1}{2}; z \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt: } x = \frac{1}{2} - a \Rightarrow 0 \leq a < \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{2} + b \Rightarrow 0 \leq b < \frac{1}{2};$$

$$z = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 \leq c < \frac{1}{2}.$$

Thay vào giả thiết:

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+c\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)\left(\frac{1}{2}+c\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + b + c - a + \frac{3}{4}$$

$$+ 2\left(\frac{1}{8} + \frac{b+c-a}{4} + \frac{bc-ab-ac}{2} - abc\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{2}(b+c-a) + bc - ab - ac - 2abc = 0$$

Câu IV (1 điểm).

Giải sử $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ là những số thực thỏa mãn

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2} = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k ($1 \leq k \leq 2021$) sao cho

$$\left| \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{ka_k}{1+a_k^2} \right| \leq \frac{2k+1}{8}.$$

**NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM HÙNG,
TRẦN QUANG HƯNG**

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) Giải mẫu

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(b+c-a) + 2bc - 2ab - 2ac - 4abc = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(b+c-a) = 2ab + 2ac + 4abc - 2bc$$

$$\Rightarrow 2ab + 2ac + 4abc - 2bc - 2(a^2 + b^2 + c^2) = -b^2 - c^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2 \leq 0.$$

$$\text{Do đó: } 3(b+c-a) \leq 0 \Leftrightarrow b+c-a \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y+z = \frac{3}{2} + (b+c-a)$$

$$\leq \frac{3}{2}.$$

Từ bài ra ta cũng có:

$$2P+1 = (x+y+z)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{5}{8}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{5}{8}$ khi $x=y=z = \frac{1}{2}$.

LÊ BÁ HOÀNG
*(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)
Giới thiệu*



SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA ĐỂ KIỂM TRA GIẢI THUYẾT HÌNH HỌC

Nguyễn Thị Hồng Hạnh⁽¹⁾, Tạ Duy Phương⁽²⁾, Phạm Thanh Tâm⁽³⁾,
Nguyễn Thị Bích Thủy⁽⁴⁾, Trần Lê Thủy⁽⁵⁾, Nguyễn Hoàng Vũ⁽⁶⁾,
(1) Trường THPT Quang Trung, Đông Đa, Hà Nội; (2) Công tác viên Trần Toán học, Hà Nội;
(3) Đại học Bách Khoa Hà Nội; (4) Khoa Toán Cơ-Tin, ĐHQG Hà Nội; (5) Trường ĐH Giao thông Vận tải, Hà Nội; (6) Trường THPT Nguyễn Huệ, Hà Nội.

1. Nhập đề. Ta đã biết Định lý Torricelli sau.

Bài toán 1 (Torricelli). *Vẽ bốn ngoài tam giác ABC những tam giác đều ABD, BCE, ACF . Khi đó AE, BF, CD đồng quy.*

Trong Tập chỉ Toán học và Tuổi trẻ số 253 (tháng 7/1998), Nguyễn Văn Ban đặt giả thuyết mở rộng định lý Torricelli như sau.

Giả thuyết 2 (Nguyễn Văn Ban, [1]). *Vẽ bốn ngoài tam giác ABC những tam giác cân ABD, BCE, ACF sao cho*

$$AD = BD = BE = CE = CF = AF.$$

Khi đó AE, BF, CD đồng quy.

Nguyễn Văn Ban [1] đã cho một phân ví dụ cụ thể bằng số chỉ ra giả thuyết trên là sai nhờ tính toán theo phương pháp tọa độ.

Bài báo đã có phản hồi từ nhiều bạn đọc và đã được tổng kết, bổ sung bởi Nguyễn Việt Hải trong [3]. Thi dụ, ta có các kết quả sau.

Bài toán 3 (Lê Hữu Dũng, THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, [3]). *Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác ABD, BCE, ACF cân tại đỉnh D, E, F và ba tam giác này đồng dạng, thì các đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.*

Bài toán 4 (Nguyễn Hữu Bình, THPT Tùng Thiện, Hà Tây, [3]). *Về phía ngoài tam giác cân ABC dựng các tam giác cân ABD, BCE, ACF sao cho $AD = BD = BE = CE = CF = AF$. Khi đó AE, BF, CD đồng quy.*

Và một số bài toán khác (xem [3]).

Trong [3] cũng chỉ ra điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AE, BF, CD đồng quy (thêm một giả thiết khá hợp lý là các điểm D, E, F theo thứ tự phải nằm bên trong các góc $\widehat{ACB}, \widehat{BAC}, \widehat{ABC}$).

Các bài toán trên có hai dữ liệu: Tam giác ABC và các tam giác ABD, BCE, ACF được vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tựa trên các cạnh của tam giác ABC . Câu hỏi đặt ra là: Khi nào thì các đường thẳng AE, BF, CD đồng quy?

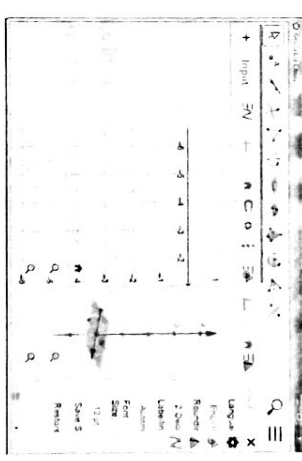
Nếu tam giác ABC bất kì thì các tam giác ABD, BCE, ACF phải thỏa mãn thêm tính chất nào đó (Bài toán 1 và Bài toán 3). Hoặc nếu thu hẹp lớp tam giác ABC (Bài toán 4; ABC cân) thì điều kiện đặt lên các tam giác ABD, BCE, ACF nhẹ đi. Hoặc tìm điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AE, BF, CD đồng quy. Các ý tưởng này đã phần nào được phân tích và thực hiện trong [3] và [9].

Bài viết này có mục đích giới thiệu cách sử dụng phần mềm *GeoGebra* để kiểm tra tính đúng đắn của các bài toán và giả thuyết trên nói riêng và gợi ý bạn đọc sử dụng *GeoGebra* để kiểm tra các giả thuyết hình học và toán học nói chung.

2. Giới thiệu *GeoGebra*. *GeoGebra* là một phần mềm miễn phí, có thể cài đặt thậm chí trên điện thoại di động và sử dụng trong dạy và học

tất cả các lĩnh vực toán: Số học, Đại số, Giải tích, Thống kê, Hình học, Hình học giải tích,... Hơn nữa, phần mềm *GeoGebra* có cài đặt tiếng Việt, vì vậy nó rất hữu hiệu trong dạy và học ở cả hai cấp Phổ thông và Đại học của Việt Nam. Mặt khác, *GeoGebra* vừa có thể vẽ hình động vừa tự động tính toán và thông báo lên màn hình (tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng, diện tích, độ lớn của góc,...), vì vậy rất thuận tiện trong kết hợp giữa hình học và tính toán đại số.

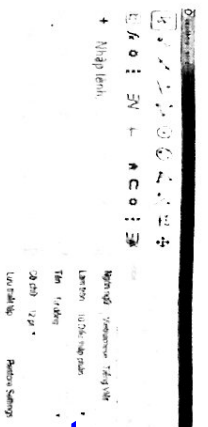
Có thể dễ dàng tải miễn phí và cài đặt phần mềm *GeoGebra* trên điện thoại di động hoặc máy tính cá nhân (xem [2]). Sau khi cài đặt, biểu tượng của *GeoGebra* được hiển thị trên màn hình máy tính. Nháy đúp vào biểu tượng, màn hình sẽ hiện giao diện của *GeoGebra*. Giao diện cơ bản của *GeoGebra* thường có hình ảnh (tiếng Anh) sau (Hình 1):



Hình 1: Giao diện cơ bản của *GeoGebra*

Để chuyển sang Tiếng Việt, hãy nháy vào biểu tượng (góc trên cùng màn hình), vào Settings (thiết lập), kéo chuột để tìm Vietnamese (tiếng Việt).

Muốn xóa tọa độ, hoặc thay đổi vùng làm việc, ta nháy vào phím $+$ và $\times$ (Hình II).



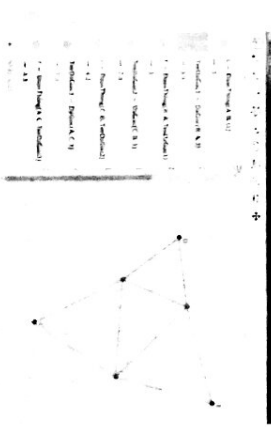
Hình II: Giao diện tiếng Việt không có tọa độ

3. Kiểm tra các giả thuyết hình học ở mục Ta có thể sử dụng *GeoGebra* để kiểm tra giả thuyết hình học nêu trong **Nhập đề** một cách dễ dàng như sau.

Bài toán 1 (Torricelli). Tam giác ABC bất kì và các tam giác ABD, BCE, ACF đều.

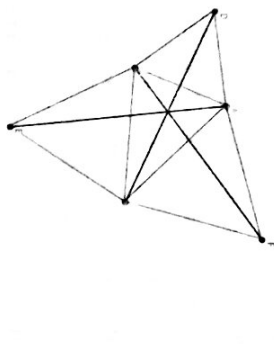
Bước 1.1: Nháy chuột vào biểu tượng (đa giác), chọn Đa giác, rê chuột sang vùng làm việc và nháy để được các điểm A, B, C . Ta được tam giác ABC .

Bước 1.2: Nháy chuột vào biểu tượng (đa giác), chọn Đa giác đều, rê chuột sang vùng làm việc, nháy vào các điểm B, A . Máy hỏi (4 đỉnh?). Khai báo lại: 3 (tam giác đều) và bấm phím OK. Máy tự động vẽ và kí hiệu tam giác đều ABD . Tương tự cho tam giác BCE và ACF .



Bước 1.3: Vào biểu tượng Vào đoạn thẳng . Nối A với E, C với D,

B với F. *GeoGebra* tự động đặt tên các đường thẳng AE, BF, CD tương ứng là p, q, r . Hình vẽ cho thấy ba đường thẳng p, q, r đồng quy (Hình 1).



Hình 1: Kiểm tra Định lý Torricelli (Bài toán 1)

Vào + Nhập lệnh:

DòngQuy(p, q, r). Máy trả lời: true (đúng).

Đề tìm tương hơn nữa, nhập lệnh

GiaoDiem($\langle$ Đôi tương $\rangle, \langle$ Đôi tương $\rangle$) với

Đôi tương là $p, q, (q, r, p, r)$ được kết quả $(-0.6910516605; 0.2025792896)$ là giao điểm của các đường thẳng (cho hình đã vẽ):

$$G = \text{GiaoDiem}(p, q)$$

$$- (-0.6910516605 \quad 0.2025792896)$$

$$H = \text{GiaoDiem}(q, r)$$

$$- (-0.6910516605 \quad 0.2025792896)$$

$$I = \text{GiaoDiem}(p, r)$$

$$- (-0.6910516605 \quad 0.2025792896)$$

Như vậy, có thể tìm tương chắc chắn các đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.

Hơn nữa, vào biểu tượng và di chuột để thay đổi tam giác ABC , các điểm D, E, F sẽ thay đổi theo, nhưng các đường thẳng AE, BF, CD luôn luôn đồng quy.

Giải thuyết 2. Tam giác ABC bất kì và các tam giác ABD, BCE, ACF bên ngoài tam giác ABC sao cho

$$AD = BD = CE = BE = AF = CF.$$

Bước 2.1: Vẽ tam giác ABC (xem Bước 1.1).

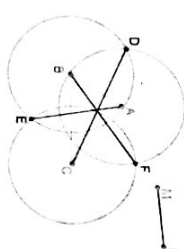
Bước 2.2: Lấy đoạn, thì dự $MN = R = 3$ cm.

Bước 2.3: Vẽ đường tròn d, e, f có tâm

A, B, C bán kính R như công cụ Compas

Các đường tròn này cắt nhau tại D, E, F . Khi ấy $AD = BD = CE = BE = AF = CF$.

Bước 2.4: Nối A với E, C với D, B với F . Hình vẽ cho thấy ba đường thẳng AE, BF, CD (*GeoGebra* tự động kí hiệu là h, i, j) có vẻ đồng quy (Hình 2a).



Hình 2a: Ba đường thẳng p, q, r có vẻ đồng quy

Để kiểm tra, ta vào + Nhập lệnh

lệnh: **DòngQuy(h, i, j)**. Máy trả lời: false (sai).

Đề kiện, ta đổi tên h, i, j thành p, q, r .

Nhập lệnh **GiaoDiem($\langle$ Đôi tương $\rangle, \langle$ Đôi tương $\rangle$)**, thì

toạ độ giao điểm các đường thẳng h, i, j không đồng quy:

$$G = \text{GiaoDiem}(p, q)$$

$$- (-0.66 \quad 0.54)$$

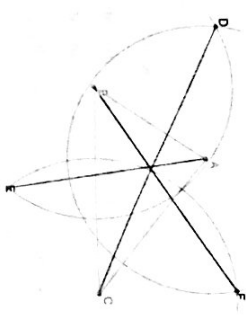
$$H = \text{GiaoDiem}(q, r)$$

$$- (-0.91 \quad 0.65)$$

$$I = \text{GiaoDiem}(p, r)$$

$$- (-0.56 \quad 0.8)$$

Vào biểu tượng và dùng chuột để phóng to hình, ta thấy các đường thẳng AE, BF, CD không đồng quy (Hình 2b).



Hình 2b: Ba đường thẳng p, q, r không đồng quy

Hơn nữa, vào biểu tượng và di chuột để

thay đổi tam giác ABC , hoặc đoạn thẳng MN , các điểm D, E, F sẽ thay đổi theo, các đường thẳng AE, BF, CD có vẻ đồng quy, nhưng khi phóng to thì thấy chúng không đồng quy.

Như vậy, có thể tìm tương chắc chắn, trong hầu hết các trường hợp, các đường thẳng AE, BF, CD không đồng quy.

Bài toán 3. Tam giác ABC bất kì, vẽ các tam giác cân ABD, BCE, ACF bên ngoài tam giác ABC và đồng dạng

Bước 3.1: Vẽ tam giác ABC (xem Bước 1.1).

Bước 3.2: Lấy đoạn $MN = R$. Thì dự, $R = 3$ cm.

Bước 3.3: Dựng các đường tròn tâm B và tâm C bán kính MN (Kí hiệu: J). Chúng cắt nhau tại E .

Bước 3.4: Vẽ các đường tròn tâm A và B , bán kính $\frac{MN \times AB}{BC}$ bằng các lệnh như bên dưới.

Tương tự cho các đường tròn tâm A và C , bán kính $\frac{MN \times AC}{BC}$. Ta được các tam giác cân

ABD, BCE, ACF đồng dạng.

$$k : \text{ĐườngTròn} \left(B, \frac{\text{ĐộDài}(f)}{\text{ĐộDài}(a)} \right)$$

$$- (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 1.6$$

$$q : \text{ĐườngTròn} \left(A, \frac{\text{ĐộDài}(f)}{\text{ĐộDài}(a)} \right)$$

$$- (x + 2.1)^2 + (y + 1.7)^2 = 1.6$$

$$h : \text{ĐườngTròn} \left(A, \frac{\text{ĐộDài}(f)}{\text{ĐộDài}(a)} \right)$$

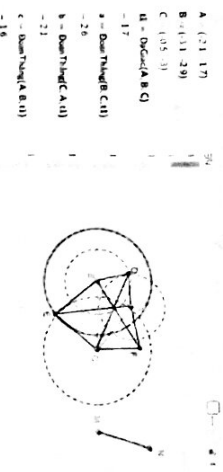
$$- (x + 2.1)^2 + (y + 1.7)^2 = 3.1$$

$$p : \text{ĐườngTròn} \left(C, \frac{\text{ĐộDài}(f)}{\text{ĐộDài}(a)} \right)$$

Bước 3.5: Kẻ các đường thẳng AE, BF, CD . Nhập lệnh **DòngQuy(i, j)** được kết quả là true

$$o = \text{DòngQuy}(i, j)$$

$$- \text{true}$$



Bài toán 4. Vẽ đoạn thẳng BC . Vào và

Đường tương tự

để vẽ đường trung trực của đoạn thẳng BC . Lấy điểm A trên đường thẳng này. Ta được tam giác ABC cân. Lập lại các bước 2.2 - 2.4 ở Bài toán 2. Các đường thẳng AE, BF, CD luôn đồng quy khi A di chuyển trên trung trực của BC (tam giác ABC cân, Hình 4).

-
- A diagram of a four-lobed flower, likely a carnation, with a central star-like structure. The lobes are labeled A, B, C, and D. The central structure has points labeled E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A compass rose is shown at the bottom right, indicating North (N) and South (S).

[2] Bùi Việt Hà. Bài giảng tập huấn phần mềm Geogebra, <https://www.academia.edu/Geogebra>.

[3] Nguyễn Việt Hải. *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 tháng đồng quy). Toàn học và Tuổi trẻ, trang 207-209.

[4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Ngọc M., T. Daw Bwema. Sử dụng Geogebra để

[2] Bùi Việt Hà, *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu>

[3] Nguyễn Việt Hải, *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 tháng đồng quy: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 1999), trang 20-21. In lại trong [8], trang 207-209.

[4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng 100...001 ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.

[5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *GeoGebra-một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỳ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trang học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.

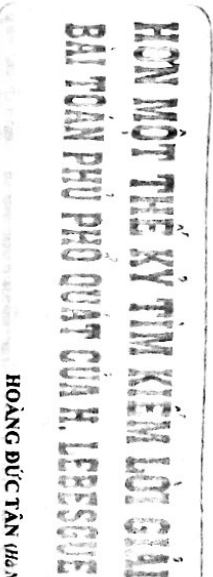
- [2] Bùi Việt Hà. *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu/>
- [3] Nguyễn Việt Hải. *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 tháng đồng quy: Toán học và Tuổi trẻ, trang 207-209. 1999), trang 20-21. In lại trong [8], trang 207-209.
- [4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương. *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng $100...001$ ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.
- [5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương. *GeoGebra-một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỳ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trung học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.
- [6] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy. *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, in book *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021, pp. 1-20 (accepted).
- [7] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ. *Use GeoGebra in teaching definite integral*. *Proceedings of the 3rd International Conference on Mathematics Education and Research*, 2021, pp. 1-10.

- [2] Bùi Việt Hà, *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu/GeoGebra>.
- [3] Nguyễn Việt Hải, *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 tháng đồng quy), Toán học và Tuổi trẻ, trang 207-209, 1999).
- [4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng $100...001$ ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.
- [5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *GeoGebra-một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỳ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Tạp chí Toán học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.
- [6] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, in book *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021, pp. 1-20 (accepted).
- [7] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ, *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (ICICCT), 11 and 12 September, Thái Lan, 2020, in the Springer Series *Learning and Analytics in Intelligent Systems*, (Margarita N. Favorskaya, Sheng-Lung Peng, Milan Simic, Basim

- [2] Bùi Việt Hà. *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu/GeoGebra>.
- [3] Nguyễn Việt Hải. *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 năm 1999), trang 20-21. In lại trong [8], trang 207-209.
- [4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương. *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng $100...001$ ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.
- [5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương. *GeoGebra-một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỳ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trang học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.
- [6] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy. *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, in book *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021, pp. 1-20 (accepted).
- [7] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ. *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (ICICCT), 11 and 12 September, Thái Lan, 2020, in the Springer Series *Learning and Analytics in Intelligent Systems*, (Margarita N. Favorskaya, Sheng-Lung Peng, Milan Simic, Basim Alhalaidi, Souvik Pal Editors) 2021, pp. 327-336.
- [8] *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học & Tuổi trẻ*,

- [2] Bùi Việt Hà, *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu/GeoGebra>.
- [3] Nguyễn Việt Hải, *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4-1999), trang 20-21. In lại trong [8], trang 207-209.
- [4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng $100...001$ ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.
- [5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *GeoGebra-môi công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỷ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trường học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.
- [6] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, in book *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021, pp. 1-20 (accepted).
- [7] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vu, *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (ICICCT), 11 and 12 September, Thái Lan, 2020, in the Springer Series *Learning and Analytics in Intelligent Systems*, (Margarita N. Favorskaya, Sheng-Lung Peng, Milan Simic, Basim Alhaidi, Souvik Pal Editors) 2021, pp. 327-336.
- [8] *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học & Tuổi trẻ*, Quyển 5, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010, trang 205-209.

- [2] Bùi Việt Hà, *Bài giảng tập huấn phần mềm GeoGebra*, <https://www.academia.edu/GeoGebra>.
- [3] Nguyễn Việt Hải, *Bản luận về cách vẽ ba đường thẳng đồng quy*: Toán học và Tuổi trẻ, số 262 (số 4 tháng đồng quy: Toán học và Tuổi trẻ, trang 207-209. 1999).
- [4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng $100...001$ ra thừa số nguyên tố*, Toán học và Tuổi trẻ, Số 517 (7-2020), trang 15-21.
- [5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phương, *GeoGebra-một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỳ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trang học Cơ sở Cầu Giấy, 02/05/2019, trang 66-79.
- [6] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, in book *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021, pp. 1-20 (accepted).
- [7] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ, *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (IICICT), 11 and 12 September, Thái Lan, 2020, in the Springer Series *Learning and Analytics in Intelligent Systems*, (Margarita N. Favorskaya, Sheng-Lung Peng, Milian Simic, Basim Alhaddidi, Souvik Pal Editors) 2021, pp. 327-336.
- [8] *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học & Tuổi trẻ*, Quyển 5, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010, trang 205-209.
- [9] Michael de Villiers, *A generalization of the Fermat-Torricelli point*, The Mathematical Gazette, 19 (1985), 374-378. <https://doi.org/10.1093/mg/19.4.374>.



opto.org

PHỤ PHỔ QUÁT CỦA H. LEESQUE
HOÀNG ĐỨC TÂN (thứ năm)
Định lý 1 (Pail). Bất kỳ hình phẳng nào có đường kính 1 đều có thể được bao trong một hình lục giác đều với các cạnh $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và trong mỗi hình lục giác đều nhỏ hơn, nơi chúng chạm vào là không thể.
Chúng ta nội tiếp một đường tròn ở trong lục giác đang xét, chọn hai đỉnh không kề nhau và

Định lý 1 (Pá). Bất kỳ hình phẳng nào có đường kính 1 đều có thể được bao trong một hình lục giác đều với các cạnh $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và tổng chiều dài của các cạnh bằng 2.

Định lý 1 (Pál). Bất kỳ hình phẳng nào có đường kính 1 đều có thể được bao trong một hình lục giác đều với các cạnh $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và tổng mỗi hình lục giác đều nhỏ hơn, nơi chúng chạm vào là không thể.

Chúng ta nội tiếp một đường tròn ở trong các giác đang xét, chọn hai đỉnh không kề nhau và cũng không đối nhau theo đường kính và sau khi nó hai đỉnh kề với các đỉnh này của tam giác bằng các đường thẳng tiếp tuyến với đường tròn đang xét và vuông góc với đường kính của hình lục giác đi ra từ các đỉnh này. Hình bát giác kết quả cũng là một "tám phủ phổ quát" của các hình phẳng có đường kính 1.

Theo chi dẫn dưới đây bạn đọc có thể tự mình hoàn thiện việc chứng minh Định lý Pál.

Chi dẫn chứng minh. Chọn một đoạn thẳng 1 tùy ý và kẻ hình này giữa các đường thẳng hỗ trợ song song với 1. Vì chúng có một điểm thuộc hình nên chiều rộng của dải giữa các đoạn thẳng này không vượt quá 1. Quay đường thẳng 1 một góc 60° theo chiều kim đồng hồ và lặp lại phép dựng đã chỉ ra ở trên, chúng ta sẽ có

Định lý 1 (Pál). Bất kỳ hình phẳng nào có đường kính 1 đều có thể được bao trong một hình lục giác đều với các cạnh $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và tổng độ dài không thể.

Chúng ta nối tiếp một đường tròn ở trong góc đang xét, chọn hai đỉnh không kề nhau mà cũng không đối nhau theo đường kính và sau khi nó hai đỉnh kề với các đỉnh này của tam giác bằng các đường thẳng tiếp tuyến với đường tròn đang xét và vuông góc với đường kính của hình lục giác đi ra từ các đỉnh này. Hình bất giác kết quả cũng là một "tám phủ phổ quát" của các hình phẳng có đường kính 1.

Theo chỉ dẫn dưới đây bạn đọc có thể tự mình hoàn thiện việc chứng minh Định lý Pál.

Chỉ dẫn chứng minh. Chọn một đoạn thẳng 1 tùy ý và kẻ hình này giữa các đường thẳng hỗ trợ song song với 1. Vì chúng có một điểm thuộc hình nên chiều rộng của dải giữa các đoạn thẳng này không vượt quá 1. Quay đường thẳng 1 một góc 60° theo chiều kim đồng hồ và lặp lại phép dựng đã chỉ ra ở trên, chúng ta sẽ có thêm một dải nửa bao phủ hình này. Xoay đường 1 thêm một góc 60° nữa, chúng ta sẽ có dải thứ ba. Giao điểm của 3 dải này là một hình lục giác đều bao phủ hình phẳng này. Xét hai cạnh đối diện của nó, nằm trên các cạnh của dải thứ nhất. Nếu độ dài của chúng không bằng nhau, thì bạn có thể căn bằng chúng theo cách

sau. Hình lục giác xây dựng được xác định duy nhất dọc theo hướng của đường thẳng l . Chúng ta bắt đầu quay liên tục đường thẳng l theo chiều kim đồng hồ. Đối với mỗi vị trí mới của nó $l(\varphi)$ (được xác định bởi góc quay φ), xét một lục giác đều có góc bằng nhau được dựng dọc theo đường thẳng $l(\varphi)$ và ký hiệu độ dài các cạnh của nó được xác định ở trên qua $a(\varphi)$ và $b(\varphi)$. Có thể kiểm tra rằng $a(\varphi)$ và $b(\varphi)$ là các hàm tuần hoàn liên tục với chu kỳ 2π , và hiển nhiên rằng $a(\varphi + \pi) = b(\varphi)$, $b(\varphi + \pi) = a(\varphi)$. Vì hàm liên tục $f(\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi)$ ở hai đầu đoạn $[0, \pi]$ nhận các giá trị có các dấu khác nhau

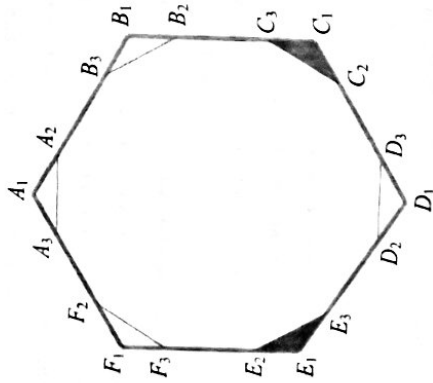
$$f(0) = a(0) - b(0) = b(\varphi) - a(\varphi) = -f(\varphi),$$

nên tại một điểm nào đó của đoạn này $f(\varphi)$ bằng 0, tức là tồn tại một số φ_0 để $b(\varphi_0) = a(\varphi_0)$, vì vậy khi chọn $l = l(\varphi_0)$, các cạnh đối diện của a và b bằng nhau trong lục giác đã dựng. Nếu khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1 thì ta có thể tăng lên 1 để hình lục giác đều mở rộng ra nhưng hai cạnh đối diện vẫn bằng nhau. Xét một cặp cạnh đối diện khác (không nhất thiết phải bằng nhau) và tăng (nếu cần) khoảng cách giữa chúng để cạnh a và b vẫn bằng nhau như trước. Lặp lại phép biến đổi này (nếu cần), ta sẽ nhận được một hình lục giác bao gồm các cạnh a và b bằng nhau, trong đó khoảng cách giữa tất cả các cặp cạnh đối diện bằng 1. Hình lục giác này dọc theo độ dài của cạnh a được xác định duy nhất nếu nó tồn tại. Nếu độ dài của a bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$, thì nó sẽ chính xác. Nếu độ dài a nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$ và khoảng cách giữa tất cả các cặp cạnh đối diện

vẫn bằng 1, thì cạnh b sẽ lớn hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$, có nghĩa là trường hợp này là không thể có. Tương tự, trường hợp $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$ là không thể có. Do đó, phù hợp xây dựng là một hình lục giác đều với các cạnh $\frac{1}{\sqrt{3}}$ và chiều rộng 1. Chúng ta nội tiếp

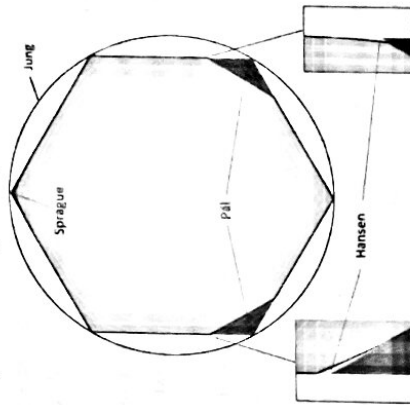
một hình tròn trong hình lục giác đang xét và cắt khỏi nó sáu hình tam giác kẻ với các đỉnh của nó bằng các đường thẳng tiếp tuyến với hình tròn này tại giao điểm của nó với các đường chéo của nó. Vì khoảng cách giữa các tam giác đối diện không nhỏ hơn 1 nên sẽ không có một điểm bên trong nào của chúng bị che bởi tam phủ. Sẽ có ít nhất ba hình tam giác trông như vậy, và hai trong số chúng chắc chắn sẽ không liên nhau, nhưng cũng không đối diện. Cắt chúng ra, chúng ta sẽ có một tam phủ cho hình này.

Hình lục giác đều của Pál (nội tiếp trong hình tròn Jung) có diện tích 0,86602540... và tam phủ có diện tích nhỏ hơn được ông tìm thấy (bằng cách cắt bỏ đi 2 hình tam giác nhỏ màu đỏ khỏi lục giác đều này) có diện tích 0,84529946... (hình 1).



Hình 1

Năm 1936, Roland Sprague [2] chỉ ra rằng một khu vực của Pál bao phủ gần một góc được giới hạn bởi hai vòng cung có thể bị loại bỏ thêm tạo ra một tam phủ phổ quát có diện tích là 0,844137708435... Đến năm 1992, Hansen [3] đã giảm bớt diện tích này hơn nữa bằng cách loại bỏ thêm hai mảnh bé xiu từ hình lục giác của Pál, ông tuyên bố rằng diện tích của những vùng này là 4×10^{-11} và 6×10^{-16} . Hóa ra ông đã tính toán sai. Thực ra diện tích của hai vùng đó là $3,7507 \times 10^{-11}$ và $8,4460 \times 10^{-21}$. Khi đó tam phủ phổ quát của Hansen có diện tích là 0,844137708416.... Cái tiến này là quá nhỏ so với sự giảm diện tích tam phủ của Sprague. Hình 2 dưới đây tổng kết các sự cắt giảm (màu đỏ) để có tam phủ phổ quát có diện tích nhỏ hơn (hình của Philip Gibbs).



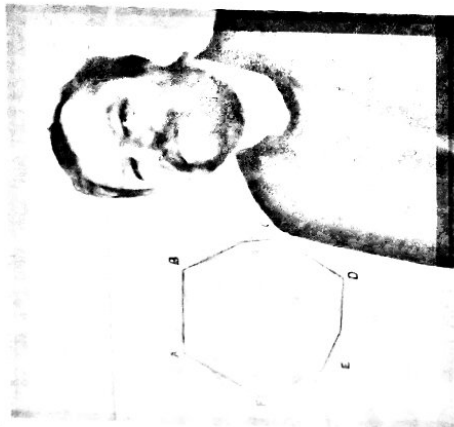
Hình 2. Phụ phổ quát tối thiểu từ các kết quả đến năm 1992.

Vào năm 2014, Philip Gibbs (nhà toán học nghiệp dư Israel) đã chạy mô phỏng máy tính trên 200 hình phẳng có đường kính 1 được tạo ngẫu nhiên. Những mô phỏng đó cho thấy ông có thể cắt bớt một số khu vực xung quanh góc trên cùng của tam phủ phổ quát nhỏ nhất trước đó. Ông đã biến các mô phỏng đó thành một chứng minh [4]. Cùng các cộng sự ông đã hoàn

thiện chứng minh đó (khả phức tạp) để có được kết quả xuất sắc (xem [5]).

Định lý 2. Tồn tại một phủ phổ quát (của các tập có đường kính 1) có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng 0,8441153.

Trong chứng minh đó Gibbs đã tìm ra cách loại bỏ bớt đi một diện tích lớn hơn khoảng một triệu lần so với diện tích bị loại bỏ của Hansen: một con số không lồ $2,233 \times 10^{-5}$. Nhờ đó ông đã tạo ra một tam phủ phổ quát có diện tích là 0,844115376859....



Nhà toán học Philip Gibbs đã giảm kích thước của tam phủ phổ quát nhỏ nhất được biết đến bằng cách sử dụng các kỹ thuật lấy cảm hứng từ com pa và thước thẳng.

P. Gibbs tự tin rằng mình có thể làm tốt hơn thế. Trong một thông báo được đăng trực tuyến gần đây, ông cho biết đã xây dựng được một tam phủ phổ quát có diện tích chỉ là 0,84409359. Chiến lược của ông là di chuyển tất cả các hình phẳng có đường kính 1 vào một góc của tam phủ phổ quát mà ông đã tìm thấy vài năm trước đó, sau đó loại bỏ bất kỳ khu vực nào còn lại ở góc đối diện. Tuy nhiên, việc do

lượng chính xác việc cắt giảm diện tích đã được chứng minh là chính xác. Các kỹ thuật Gibbs sử dụng đều chỉ là hình học sơ cấp, nhưng ông phải thực hiện với độ chính xác có thể khiến mọi người phải khâm phục.

Tại sao họ chỉ có thể cắt bỏ được ít thế? Do năm 2005, Peter Brass và Melvyn Shier đã chứng minh rằng "Không có bản phủ phổ quát nào (của các tập có đường kính 1) có thể nhỏ hơn 0,832" bằng cách kết hợp hình tròn và hình tam giác với một ngũ giác đều [6], do vậy ta thấy rằng không thể cắt bỏ quá nhiều diện tích so với kỷ lục hiện tại.

Bạn đọc thân mến!

Vậy là con đường đi tìm lời giải của bài toán vẫn còn đang được tiếp tục, các nhà toán học hy vọng sẽ sớm có lời giải của bài toán này. Hy vọng có sự tiếp sức của các bạn trẻ yêu toán Việt Nam.

Trong không gian ba chiều, các định lý phủ phổ quát sau đây đã được biết đến. Công trình đầu tiên thuộc về nhà toán học người Mỹ Gale.

Định lý 3 (Gale). Mọi vật thể không gian có đường kính 1 có thể được bao phủ bởi một tư diện đều với cạnh $\sqrt{6}$ và một hình bát diện đều

có cạnh $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Công trình thứ hai đã được chứng minh một cách độc lập bởi nhà toán học Israel Grünbaum và nhà toán học Hungary Heppes.

Định lý 4 (Grünbaum-Heppes). Chứng ta cần biết mọi hình bất diện đều có cạnh $\frac{\sqrt{6}}{2}$ bao hình

chóp kẻ với ba đỉnh của nó bởi những mặt phẳng song song với các mặt phẳng chéo của

hình bát diện và tiếp xúc với hình cầu nội tiếp hình bát diện. Ta nhận được khối đa diện 11 - mặt là một phủ phổ quát cho các vật thể có đường kính đơn vị.

Bạn đọc có thể xem chứng minh của các định lý này trong [7].

Vào năm 1997, V.Y. Makeyev đã chỉ ra rằng phủ phổ quát của bất kỳ tập hợp đường kính 1 nào cũng là một khối hình thoi - một khối đa diện được giới hạn bởi 12 mặt hình thoi giống nhau, có khoảng cách giữa các mặt song song là 1. Hơn nữa, ông đã chỉ ra rằng có thêm ba mặt nữa là một mặt phẳng như trong trường hợp của một khối bát diện.

TU LIỆU THAM KHẢO

- [1] Julius (Gyula) Pál, "Über ein elementares Variationsproblem", Danske Mat.-Fys. Meddelelser III. 2. (1920).
- [2] Roland P. Sprague, "Über ein elementares Variationsproblem", Matematiska Tidskrift Ser. B: 96–99, (1936).
- [3] H.C. Hansen, "Small Universal covers for sets of unit diameter", Geometriae Dedicata 42 (1992) 205-213, (1992)
- [4] Philip E. Gibbs, "A New Slant on Lebesgue's Universal Covering Problem", arXiv:1401.8217, (2014).
- [5] John C. Baez, Karine Bagdasaryan, Philip E. Gibbs, "The Lebesgue Universal Covering Problem", Journal of Computational Geometry 6(1), 288–299, (2015).
- [6] P. Brass, M. Sharifi: "A lower bound for Lebesgue's universal cover problem", International Journal on Computational Geometry & Applications 15 (2005) 537–544.
- [7] Болтянский В. Г., Гохберг И. И. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: «Наука», 1965.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/529 (Lớp 6). Cho

$$A = \frac{1 \cdot 2022 + 2 \cdot 2021 + 3 \cdot 2020 + \dots + 2022 \cdot 1}{2^2 + 6^2 + 12^2 + \dots + (k \cdot (k+1))^2 + \dots + 4090506^2}$$

Hãy so sánh A với $\frac{1}{2}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhứt Quang, Dò Lương, Nghệ An)

Bài T2/529 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A.

Lấy hai điểm phân biệt M, N bên trong tam giác sao cho AM = CN, BM = AN. Đường thẳng BM cắt AN tại E, CN cắt AM tại F. Chứng minh AE = AF.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/529. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 25 \geq 7x + 8y + 9z.$$

NGUYỄN ĐỨC TRUÔNG

(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài T4/529. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HA. Trên tia AB lấy điểm E sao cho AE = AC. Chứng minh khoảng cách từ E đến BC thì bằng DC.

PHẠM TUẤN KHAI (Hà Nội)

Bài T5/529. Giải phương trình

$$8x^4 + 32x^3 + 32x^2 - x - 3 = 0.$$

LÊ HOÀI BÁC

(Lớp 3B, Khoa Toán, DHSF Huế, TP. Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/529. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq \frac{13}{27}(a+b+c)^3.$$

CAO HAI VÂN

(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T7/529. Cho các số thực dương x, y ∈ (0; 2)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt[4]{2} \sqrt{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}.$$

TU HỮU SON

(Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Bài T8/529. Cho tam giác đều ABC cạnh a, tiếp xúc tròn (O). Một điểm M di động trên đường tròn (O). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16} MA^4 + MB^4 + MC^4.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/529. Cho tam giác ABC có số đo các góc A, B, C lập thành cấp số nhân công bội q = 2; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; số đo độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c của tam giác là các hệ số của phương trình

$$x^3 + m_a x^2 + m_b x + m_c = 0 \quad (1).$$

Chứng minh rằng nếu

$$x_0 < \frac{2(R^2 + 4)}{4},$$

thì nghiệm của phương trình (1) thì

TRINH TUẤN

(Hà Nội)

TIỀN TỐI OLYMPIC TOÀN

Bài T10/529. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 = 19^{x^2 + y^2 + 1} \quad (6 - z).$$

NGUYỄN THÀNH CHUÔNG

(GV THPT Chuyên THPT Archimedes Đồng Anh, Hà Nội)

Bài T11/529. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow S$ là một tập bị chặn thỏa mãn $f^2(0) + f(0) = 0$ và

$$|f(x+y^2+z^2) - f(x) - f^2(y) - f^3(z)| \leq \frac{1}{2}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$|f(x) - f(-x)| \leq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/529. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các điểm X, Y thuộc (O) sao cho $AX \parallel BC, BY \parallel AC$. Gọi Z, T theo thứ tự là giao điểm của XY với $AC, BC, O_1, O_2, O_3, O_4$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXZ, BYT, CYT, CXZ . Chứng minh $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/529 (For 6th grade). Given

$$A = \frac{1}{2^2+6^2+12^2+\dots+(k(k+1))^2+\dots+4090506^2}$$

Compare A and $\frac{1}{2}$.

Problem T2/529 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A . Choose 2 different points M, N inside the triangle so that $AM = CN, BM = AN$. The lines BM and AN intersect at E , the lines CN and AM intersect at F . Show that $AE = AF$.

Problem T3/529. Given real numbers x, y, z satisfying $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$. Prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 25 \geq 7x + 8y + 9z.$$

Problem T4/529. Given a right triangle ABC with the right angle A and the altitude AH . On

Bài L1/529. Một con lắc lò xo treo thẳng đứng, điểm treo cố định dao động với tần số 5 Hz. Trong một chu kì thời gian lò xo bị giãn bằng 2 lần thời gian lò xo bị nén. Lấy $\pi^2 = 10, g = 10 \text{ m/s}^2$. Tính gia tốc cực đại của vật.

VIỆT CUÔNG (Hà Nội)

Bài L2/529. Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Mạch AM chứa biến trở R , đoạn mạch MB chứa điện trở thuần r mắc nối tiếp với cuộn cảm thuần có độ tự cảm L . Đặt vào AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng và tần số không đổi. Điều chỉnh R đến giá trị 80 Ω thì công suất tiêu thụ trên biến trở đạt cực đại và tổng trở của đoạn mạch AB chia hết cho 40. Tính hệ số công suất của đoạn mạch AM và AB .

THANH LÂM (Hà Nội)

the ray HC we choose D so that $HD = HA$. On the ray AB we choose E so that $AE = AC$. Prove that the distance from E to BC is equal to the length DC .

Problem T5/529. Solve the equation

$$8x^4 + 32x^3 + 32x^2 - x - 3 = 0.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/529. Given a triangle ABC . Let $BC = a, CA = b, AB = c$. Show that

$$3(a^3 + b^3 + c^3) + 4abc \geq \frac{13}{27}(a+b+c)^3.$$

Problem T7/529. Given the numbers $x, y \in (0, 1)$. Find the minimum value of the expression

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{12\sqrt{x}\sqrt{1-y} - y^2 + y\sqrt{1-x^2}}.$$

(Xem tiếp trang 12)



Bài T1/525. Tìm bốn số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn $a > 3b > 6c > 12d$ và

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749.$$

Lời giải. Từ giả thiết có $a > 3b, b > 2c, c > 2d$.

Trong bốn số a, b, c, d thỏa mãn

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$$

thì phải có ít nhất một số chẵn, số nguyên tố chẵn duy nhất là 2, mà $a > b > c > d$ nên chỉ xảy ra $d = 2$, dẫn đến $c > 2d = 4$ nên $c \geq 5$.

Thay $d = 2$ vào đẳng thức trên được

$$a^2 - b^2 + c^2 = 1749 + 2^2 = 1753.$$

Ta có $1753 = a^2 - b^2 + c^2 > 9b^2 - b^2 + 25$

$$= 8b^2 + 25,$$

hay là $8b^2 < 1728$, suy ra $b^2 < 216$.

Do b là số nguyên tố thì $b \leq 13$ vì $17^2 = 289$.

Từ $2c < b \leq 13$ và $c \geq 5$ nên $c = 5$.

Vì $b > 2c = 10$ nên chỉ xảy ra $b = 11$ hoặc $b = 13$.

Với $b = 11$ thì $1753 = a^2 - b^2 + c^2 = a^2 - 121 + 25$, hay là $a^2 = 1849$ nên $a = 43$ là số nguyên tố.

Với $b = 13$ thì $1753 = a^2 - b^2 + c^2 = a^2 - 169 + 25$, hay là $a^2 = 1897$ nên a không là số nguyên.

Vậy bốn số nguyên tố cần tìm là

$$a = 43, b = 11, c = 5, d = 2.$$

Nhận xét. Sau khi có $d = 2$ và $c \geq 5$ xét

$$1749 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > 9b^2 - b^2 + 3d^2$$

$$= 8b^2 + 12$$

nhên có $8b^2 < 1737$, hay là $b^2 < 218$. Do b là số nguyên tố thì $b \leq 13$, rồi tiếp tục lập luận tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải đúng. Hà Nội:

Nguyễn Phúc Hoàng, 6C1, THCS Archimedes, Đống Anh; Nghệ An: Nguyễn Thái Triều, 6A,

THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Sóc Trăng: Huỳnh Gia Bảo, 6A2, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HÀ

Bài T2/525. Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} = 20^\circ$). Gọi D, E là hai điểm thuộc AC sao cho D nằm giữa A và $E, AD = CE = BC$. Tính số đo góc $\widehat{DBE}$.

Lời giải. (Dựa trên ý tưởng của lời giải các bạn gửi) Ta dựng tam giác đều BCK (xem hình vẽ). Do tam giác cân ABC có góc $\hat{A} = 20^\circ$ cho nên $\hat{B} = 80^\circ$.

Ta có $\widehat{CBE} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$

vì tam giác CEB cân tại C . Vì

$$\hat{B} = 80^\circ \text{ và } \widehat{KBC} = 60^\circ, \text{ cho}$$

nhên $\widehat{ABK} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$. Để thấy hai tam giác ABK và BAD bằng nhau (c.g.c) cho ta $BD = AK$, và do đó hai tam giác AKD và BDK bằng nhau (c.c.c). Hai cặp tam giác bằng nhau này cho ta 2 cặp góc tương ứng bằng nhau $\widehat{ABD} = \widehat{BAK} = 10^\circ$ và $\widehat{DBK} = \widehat{KAD} = 10^\circ$. Mặt khác ta có:

$$\widehat{EBK} = \widehat{CBK} - \widehat{EBC} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ.$$

$$\widehat{Vây} \widehat{DBE} = \widehat{EBK} + \widehat{DBK} = 20^\circ.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp số đúng:

Nghệ An: Nguyễn Thị Kim Anh, Nguyễn Thị Minh

Hồng, 7A, Nguyễn Hai Triều, Thái Minh Quân,

Nguyễn Văn Việt, Đào Phương Anh, Nguyễn Thái

Hồng Anh, Hoàng Văn Quyết, 7B, THCS Lý Nhật

Quang, Đô Lương; Hoàng Mai Linh, Cao Thị Khánh

Chi, Cao Long, 7A, Đào Anh Dũng, Hồ Hoàng Vũ,

7B, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, Lâm Trọng

Phúc, 7B, THCS Dõn Công, TP. Vinh; Vĩnh Phúc:

Phùng Thu Thủy, Nguyễn Quỳnh Hương, 7A, THCS

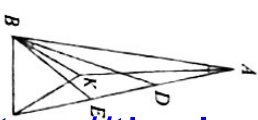
Yên Lạc; Yên Lạc; Quang Trí; Tô Nguyễn Thuần,

7D, THCS Trung Vương, TP. Đồng Hà; Sóc Trăng:

Huỳnh Gia Bảo, 6A2, THCS Kế An, Kế Sách; Điện

Biên: Nguyễn Ngọc Diệp, 7B3, THCS xã Pom Lót,

huyện Điện Biên.



<https://tieulun.hopto.org>

Bài T3/525. Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ trong đó a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên m để $f(m) = f(2021), f(2022)$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng:

$$f(f(x) + x) = f(x)f(x+1), \forall x \quad (1).$$

Thật vậy, ta có vế trái

$$\begin{aligned} f(f(x) + x) &= (f(x) + x)^2 + a(f(x) + x) + b \\ &= f^2(x) + 2f(x)x + x^2 + af(x) + ax + b \\ &= f^2(x) + 2f(x)x + af(x) + f(x) \\ &= f(x)[f(x) + 2x + a + 1] \\ &= f(x)[x^2 + ax + b + 2x + a + 1] \\ &= f(x)[(x+1)^2 + a(x+1) + b] \\ &= f(x)f(x+1). \end{aligned}$$

Hệ thức (1) được chứng minh. Với $x = 2021$ và đặt $m = f(2021) + 2021$ ta có m là số nguyên thỏa mãn $f(m) = f(2021)f(2022)$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Điều kiện chốt của bài toán là chứng minh $f(f(x) + x) = f(x)f(x+1), \forall x$.

Tất cả các bạn đều làm theo cách trên.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

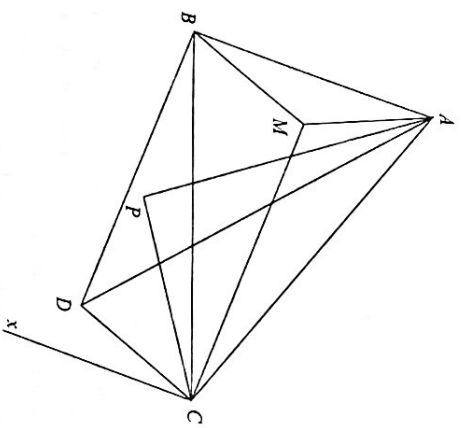
Thanh Hòa: Chu Thanh Ngọc, 8D, THCS Như Bả Sơn, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Phú Thọ:** Đỗ Ngọc Tiến, Trần Quốc Khánh, Nguyễn Đức Quý, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** Võ Gia Minh, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** Trần Minh Tú, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/525. Cho M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC , sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Dựng hình bình hành $BMCD$. Chứng minh rằng đường phân

giác của góc $\widehat{BAC}$ và đường phân giác của góc $\widehat{MCD}$ vuông góc với nhau.

Lời giải.



Cách 1. Gọi P là giao điểm của phân giác các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MCD}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{PAC} + \widehat{ACP} &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{ACM} + \widehat{MCP} \\ &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACM}}{2} + \frac{\widehat{ABM}}{2} + \frac{\widehat{MCB} + \widehat{BCD}}{2} \\ &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACM} + \widehat{MCB}}{2} + \frac{\widehat{ABM} + \widehat{MBC}}{2} \\ &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} + \frac{\widehat{CBA}}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{APC} = 90^\circ$, hay $AP \perp CP$. Ta có điều phải chứng minh.

Cách 2 (Theo bạn Ngô Thị An Bình, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An).

Gọi P là giao điểm của phân giác các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MCD}$. Vẽ tia $Cx \parallel AB$ và Cx thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A .

Dễ thấy: $\widehat{MBA} = \widehat{DCx}$ (vì $BM \parallel CD, BA \parallel Cx$).

Suy ra CP là phân giác trong của góc $\widehat{ACx}$.

Lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{ACx} = 180^\circ$ (trong cùng phía).

Suy ra $\widehat{PAC} + \widehat{ACP} = 90^\circ$. Vậy $AP \perp CP$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn tham gia đều cho lời giải đúng và chủ yếu giải theo cách 1. Ngoài bạn Bình, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Nghệ An: Nguyễn Cảnh Nam Khánh, 8D, Lương Viết Lương, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** Trần Minh Tú, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Phú Thọ:** Đỗ Ngọc Tiến, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **TP. Vinh:** Trần Minh Hoàng, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/525. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy^2 + x + y + z = xy + yz + zx + 2 \\ \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{z^2 - z + 1} = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lời giải. Biến đổi phương trình (1), ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow xy(z-1) - y(z-1) - x(z-1) + (z-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow (xy - y - x + 1)(z-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1) = 1 \quad (3). \end{aligned}$$

Theo (3), ta có thể đặt:

$$x-1 = \frac{bc}{a^2}; y-1 = \frac{ca}{b^2}; z-1 = \frac{ab}{c^2} \quad (abc \neq 0).$$

$$\text{Suy ra: } x^2 - x + 1 = \left(\frac{bc}{a^2} + 1\right)^2 = \frac{bc}{a^2} = \frac{a^4 + a^2bc + b^2c^2}{a^4}.$$

Tương tự, ta có:

$$y^2 - y + 1 = \frac{b^4 + ab^2c + c^4a^2}{b^4}; z^2 - z + 1 = \frac{c^4 + abc^2 + a^2b^2}{c^4}.$$

Gọi vế trái của (2) là Q và áp dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

(với x, y, z là các số dương; đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}, \text{ ta có:}$$

$$Q = \frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + ab^2c + c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4 + abc^2 + a^2b^2}$$

$$\geq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$(\text{để thấy } a^4 + a^2bc + b^2c^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}b^2c^2 > 0)$$

tương tự: $b^4 + ab^2c + c^2a^2 > 0, c^4 + abc^2 + a^2b^2 > 0$).

Mặt khác: $abc(a+b+c) = abca + abbc + caab$

$$\leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Do đó

$$\begin{aligned} Q &\geq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

$Q = 1$ khi và chỉ khi $a = b = c$. Từ đó $x = y = z = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x; y; z) = (2; 2; 2).$$

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều làm theo cách tương tự như trên. Có bạn sau khi biến đổi ra phương trình (3), đã đặt

$$x-1 = a; y-1 = b; z-1 = c \quad (\text{với } abc = 1), \text{ thì}$$

$$x^2 - x + 1 = a^2 + a + 1; y^2 - y + 1 = b^2 + b + 1;$$

$$z^2 - z + 1 = c^2 + c + 1 \text{ rồi thay vào (2) cũng tìm ra kết quả. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:}$$

Phú Thọ: Trần Quốc Khánh, Đỗ Ngọc Tiến, Nguyễn Đức Quý, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Trần Minh Tú, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Hưng Yên:** Lê Trọng Nghĩa, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** Ngô Thị An Bình, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/525. Cho các số thực x, y, z lớn hơn 1 thỏa mãn: $x + y + z + 2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1} \geq 3\sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Nhận xét: $x + y + z + 2 = xy + z$

$$\Leftrightarrow (xy + x + y + 1) + (yz + y + z + 1) + (zx + z + x + 1)$$

$$= xy + yz + zx + x + y + z + 3$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) + (y + 1)(z + 1) + (z + 1)(x + 1)$$

$$= (x + 1)(y + 1)(z + 1)$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 1$$

$$(\text{trong đó kí hiệu } a = \frac{1}{x+1}; b = \frac{1}{y+1}; c = \frac{1}{z+1}).$$

Chú ý $x, y, z > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} > a, b, c > 0$. Ta có:

$$a = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1-a}{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{(1-a)^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2a}}{a}$$

$$= \frac{1-2a}{\sqrt{a(a(1-2a))}}$$

$$\geq 3\sqrt{3} \cdot (1-2a),$$

vì theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực

$$\text{đương thì: } a \cdot a \cdot (1-2a) \leq \left(\frac{a+a+(1-2a)}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Tương tự:

$$\sqrt{y^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}(1-2b); \sqrt{z^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}(1-2c).$$

Do đó:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}[3 - 2(a+b+c)] = 3\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Lương Minh Hiền, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; Hà Nội: Trần Minh Tú,

9C, THCS Lương Thế Vinh; Hà Tĩnh: Trần Minh Hoàng, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân;

Quảng Bình: Nguyễn Trần Hoàng, 10T2, Phạm Gia Hưng, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP.

Đông Hới; Lâm Đồng: Trần Công Minh, 10T, THPT chuyên Bảo Lộc; Bình Định: Vũ Tiến Đạt,

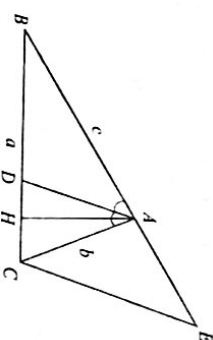
10T, Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Bà Rịa - Vũng Tàu: Phan Trung Kiên,

11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; Đồng Tháp: Lê Huỳnh Nhật Nguyên, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu; Tiền Giang: Trần Hoài An, Mái Vôi Phước Thành, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; Sóc Trăng: Lý Hoàng Nhật, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/S25. Tìm tất cả các tam giác ABC có độ dài các cạnh là các số nguyên dương thỏa mãn độ dài cạnh AC bằng độ dài phân giác trong góc A.

Lời giải.



Kí hiệu $AD = l_a$ là độ dài đường phân giác trong của góc A. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt BA kéo dài tại E. Ta có các tính chất sau của đường phân giác.

$$\text{Tính chất 1: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC};$$

$$\text{Tính chất 2: } l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c};$$

$$\text{Tính chất 3: } l_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

Chứng minh. Từ công thức diện tích ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}. \text{ Mặt khác,}$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} bl_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} cl_a \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} (b+c) l_a \sin \frac{A}{2},$$

$$\text{suy ra: } l_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}. \text{ Vậy:}$$

$$l_a^2 = \frac{4b^2 c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2} = \frac{2b^2 c^2 (1 + \cos A)}{(b+c)^2} = \frac{2b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2} \left[(b+c)^2 - a^2 \right] = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

Lời giải (của người ra đề). Từ giả thiết và tính

$$\text{chất 3 ta có: } b^2 = l_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

$$\text{Suy ra: } a^2 c = (c-b)(b+c)^2$$

$$\text{hay } \frac{a^2}{c^2} = \left(1 - \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right)^2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{c} = \frac{m}{n} \text{ và } \frac{b}{c} = \frac{r}{s} \text{ (*) với } (m, n) = 1 \text{ và } (r, s) = 1. \text{ Khi ấy (1) trở thành:}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{(s-r)(s+r)^2}{s^3} \quad (2).$$

Từ (*) và (2) ta có:

$$m^2 = (s-r)(s+r)^2 \text{ và } n^2 = s^3.$$

Chứng tỏ $s-r$ và s là số chính phương. Đặt $s = r^2$ và $s-r = k^2$. Khi ấy $r = r^2 - k^2$, $m = k(2r^2 - k^2)$ và $n = r^3$. Đặt $a = mx$, $c = nx$, $b = ry$ và $c = sy$. Khi ấy: $mx = sy$ hay $y = \frac{mx}{s} = \frac{r^3 x}{r^2} = rx$. Do đó:

$$a = xk(2r^2 - k^2), b = xr(r^2 - k^2), c = xr^3 \quad (3)$$

với $r > k$ và $(r, k) = 1$.

Cuối cùng, để dàng kiểm tra (3) thỏa mãn bất đẳng thức tam giác và điều kiện $l_a = b$.

Nhận xét. Đây là bài toán mà đầu bài thi hay và có vẻ dễ. Nhưng thực tế thì lại là bài toán khó. (Chú ý ở đây là tam giác ABC có độ dài ba cạnh là số tự nhiên. Vì vậy chỉ có hai bạn giải bài.

Bạn Nguyễn Trần Hoàng, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình đã có nhận xét tốt là $c > b$. Tuy nhiên, do không chú ý đến điều kiện độ dài các cạnh là các số nguyên dương nên chưa đi đến đáp số. Chỉ có bạn Phạm Gia Hưng, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình có lời giải đúng.

Cách giải 2 (của Phạm Gia Hưng). Gọi H là điểm giữa CD. Do $AD = AC$ nên tam giác ACD cân với AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác (hình vẽ trên).

$$\text{Đặt } AD = AC = b, CD = n \ (b \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có: } \sin \frac{A}{4} = \sin \widehat{HAC} = \frac{HC}{AC} = \frac{n}{2b}. \text{ Suy ra:}$$

$$\cos \frac{A}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{4} = 1 - 2 \left(\frac{n}{2b} \right)^2 = \frac{2b^2 - n^2}{2b^2}.$$

Từ tính chất 2 và theo giả thiết ta có:

$$l_a = AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = AC = b.$$

$$\text{Suy ra: } c = \frac{b}{2 \cos \frac{A}{2} - 1} = \frac{b}{\frac{2b^2 - n^2}{2b^2} - 1} = \frac{b^3}{b^2 - n^2}.$$

$$\text{Theo tính chất 1 ta có: } BD = \frac{DC \cdot AB}{AC} = \frac{b^2 n}{b^2 - n^2}.$$

$$\text{Do đó: } a = BC = BD + DC = \frac{b^2 n}{b^2 - n^2} + n = \frac{2b^2 n - n^3}{b^2 - n^2}.$$

Bằng phép đồng dạng, mỗi tam giác này tương đương với một tam giác ABC có độ dài các cạnh là các số nguyên dương với $c = r^3, b = r^2 - k^2, a = 2r^2 k - k^3$, trong đó r và k là các số nguyên dương, $r > k$.

Vậy các tam giác có độ dài các cạnh là $c = i^2, b = i^2 - ik^2, a = 2i^2k - k^4, (i, k \in \mathbb{N}^*, i > k)$ là tất cả các tam giác cần tìm.

Gợi ý cách giải 3. Đặt $BD = x, DC = y$.

Ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{BD}{DC} = \frac{CA}{AB} = \frac{c}{b} \Rightarrow x = \frac{c}{b}y \text{ và } y = \frac{b}{c}x.$$

$$\Rightarrow a = x + y = \frac{b+c}{c}x = \frac{b+c}{b}y;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{DH}{2} = BH = c \sin \frac{3A}{4}$$

$$= c \left(3 \sin \frac{A}{4} - 4 \sin^3 \frac{A}{4} \right) = c \frac{HC}{b} \left(3 - 4 \left(\frac{HC}{b} \right)^2 \right)$$

$$= c \frac{y}{2b} \left(3 - 4 \left(\frac{y}{2b} \right)^2 \right) = \frac{cy}{2b^3} (3b^2 - y^2)$$

$$\text{hay } \frac{c}{b}y + \frac{y}{2} = \frac{cy}{2b^3} (3b^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow (2c + b)b^2 = c(3b^2 - y^2) \Rightarrow cy^2 = b^2(c - b).$$

$$\text{Vậy } a^2 = \left(\frac{b+c}{b} \right)^2 y^2 \Rightarrow cb^2a^2 = (b+c)^2 cy^2$$

$$= (b+c)^2 b^2 (c-b) \text{ hay } ca^2 = (b+c)^2 (c-b).$$

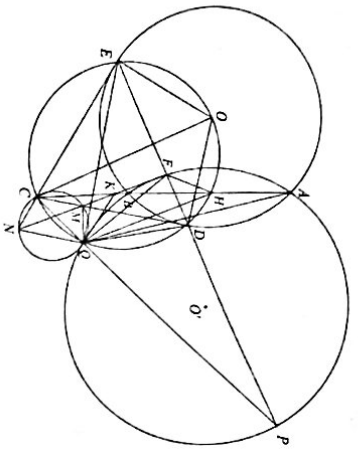
Phải chứng từ hệ thức này kết hợp với điều kiện a, b, c nguyên suy ra công thức cho a, b, c !

TẠ DUY PHƯƠNG

Bài 18/525. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B . Qua điểm C nằm trên tia đối của tia BA dựng các tiếp tuyến CD, CE của (O) . Đoạn thẳng DE cắt (O') tại F . Tiếp tuyến của (O') tại F cắt CD, CE lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng tứ giác $ABMN$ nội tiếp.

Lời giải. Ta giải bài toán trong trường hợp điểm D nằm trong đường tròn (O') , trường hợp điểm E nằm trong đường tròn (O') chứng minh tương tự. Giả sử DE cắt đường tròn (O') tại P khác F , CP cắt đường tròn (O') tại Q khác P .

$$\text{Từ } \overline{CQ} \cdot \overline{CP} = \overline{CB} \cdot \overline{CA} = \overline{CE}^2 \Rightarrow \overline{ACQE} \sim \overline{ACEP} (\text{c.g.c}) \\ \Rightarrow \widehat{CEQ} = \widehat{CPE} \quad (1).$$



$$\text{Cũng từ } \overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{CP} \\ \Rightarrow \overline{ACQD} \sim \overline{ACDP} (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CPE} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEQ} = \widehat{CDQ} \Rightarrow$ từ giác $DECO$ nội tiếp đường tròn đường kính OC . Gọi K là giao điểm của AB và tiếp tuyến tại F của đường tròn (O') ; H là trung điểm của AB . Khi đó, chú ý rằng KF là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên

$$\widehat{QHK} = \widehat{QEC} = \widehat{QPE} = \widehat{QFK}.$$

Do đó từ giác $FHQK$ nội tiếp đường tròn đường kính KQ , suy ra $\widehat{KQO} = 90^\circ$ hay KQ là tiếp tuyến của đường tròn (O') (3).

Mặt khác vì $\widehat{QFM} = \widehat{QHC} = \widehat{QDM}$ nên tứ giác $DFMQ$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{NCQ} = \widehat{FDQ} = \widehat{NMQ} \Rightarrow$

tứ giác $CMQN$ nội tiếp và do KQ là tiếp tuyến của đường tròn (O') , nên $\widehat{DMQ} = \widehat{QFP} = \widehat{KQC}$, dẫn đến KQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMQ . Hay KQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN . Từ (3) suy ra $KB, KA = KQ^2 = KM, KN$. Điều này chứng tỏ tứ giác $ABMN$ nội tiếp (dpcm).

Nhận xét.1) Các bài giải gửi về Tòa soạn Tập chỉ TH&TT đều sử dụng kết quả sau:

Cho hai đường tròn (O) và (O') không đồng tâm. Khi đó tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\frac{P_{M(O)}}{P_{M(O')}} = k \quad (k \neq 1) \text{ là đường tròn đồng trục với } (O) \text{ và } (O'). \text{ Bạn đọc tự chứng minh kết quả này.}$$

2) Có ít bạn tham gia giải bài 18/525. Những bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Quang Bình: Phạm Gia Hưng, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, Bình Định; Nguyễn Huy Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, Tây Ninh; Phạm Hồng Đăng Khoa, 10T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, TP. Tây Ninh; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Quang Phát, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài 19/525. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$\frac{1}{1} C_{2n-1}^{2n-1} - \frac{1}{2} C_{2n-1}^{2n-3} + \frac{1}{3} C_{2n-1}^{2n-5} - \dots - \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{2n-2n+1} + \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{2n-2n+1} \\ \leq \frac{(8n-1)^{2n-1}}{(4n)^{2n-1}} - \frac{1}{4} \quad (1).$$

Lời giải. Với i là đơn vị ảo ta có:

$$(1+i)^{2n} = (2i)^n = 2^n i^n = 2^n (i^2)^n = 16^n.$$

Đồng thời:

$$(1+i)^{2n} = C_{2n}^0 + iC_{2n}^1 + i^2 C_{2n}^2 + \dots + i^{2n} C_{2n}^{2n} \\ = C_{2n}^0 + iC_{2n}^1 - C_{2n}^2 - iC_{2n}^3 + C_{2n}^4 + \dots - iC_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \\ = (C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots - C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}) \\ + (iC_{2n}^1 - C_{2n}^3 + iC_{2n}^5 - \dots + iC_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n-1}).$$

$$\text{Do đó: } C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots - C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = 16^n \\ + \dots - C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = 16^n$$

$$\text{hay } 2C_{2n}^0 - 2C_{2n}^2 + 2C_{2n}^4 - \dots - 2C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = 16^n.$$

Dẫn tới:

$$C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + C_{2n}^{2n-4} - C_{2n}^{2n-2} = \frac{1}{2} (16^n - C_{2n}^{2n}).$$

Áp dụng công thức $C_{n+1}^{k+1} = \frac{m+1}{k+1} C_n^k$, từ (2) ta có:

$$1 - \frac{8n}{2} C_{2n-1}^1 + \frac{8n}{4} C_{2n-1}^3 - \dots + \frac{8n}{4n-4} C_{2n-1}^{2n-3} - \frac{8n}{4n-2} C_{2n-1}^{2n-1} \\ = \frac{1}{2} (16^n - C_{2n}^{2n})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} C_{2n-1}^1 - \frac{1}{4} C_{2n-1}^3 + \dots - \frac{1}{4n-4} C_{2n-1}^{2n-3} + \frac{1}{4n-2} C_{2n-1}^{2n-1} \\ = \frac{C_{2n}^{2n} + 2 \cdot 16^n}{16n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} C_{2n-1}^{2n-1} - \frac{1}{2} C_{2n-1}^{2n-3} + \dots - \frac{1}{2n-2} C_{2n-1}^{2n-5} + \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{2n-2n+1} \\ = \frac{C_{2n}^{2n} + 2 \cdot 16^n}{8n} \quad (3).$$

$$\text{Nhân thấy } 16^n = (1+15)^n = C_n^0 + 15C_n^1 + \dots + 15^n C_n^n \\ \geq C_n^0 + 15C_n^1 = 1 + 15n \geq 2 + 14n \\ \Rightarrow -14n \geq 2 - 16^n \Rightarrow \frac{2 - 16^n}{8n} \leq -\frac{7}{4} \quad (4).$$

$$\text{Hơn nữa: } \frac{1}{8n} C_{2n}^{2n} = \frac{1}{8n} \frac{(8n)!}{((4n)!)^2} = \frac{(8n-1)!}{((4n)!)^2} \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$$\frac{1}{1} C_{2n-1}^{2n-1} - \frac{1}{2} C_{2n-1}^{2n-3} + \dots - \frac{1}{2n-2} C_{2n-1}^{2n-5} + \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{2n-2n+1} \\ \leq \frac{(8n-1)!}{((4n)!)^2} - \frac{7}{4}$$

BĐT(1) được chứng minh. Đáng thức xảy ra với $n=1$.

Nhận xét. Đây là bài toán khó về bất đẳng thức hợp. Chỉ có bạn Trần Văn Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên giải đúng bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài 110/525. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ \log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + 1), \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn ấy.

Lời giải. (Của bạn Phạm Gia Hưng, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, Quang Bình).

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x - \log_2(x+1)$ ($x > 0$).

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{(x+1) \ln 3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$f(2) = 0; f(8) = 1; f(1) = -\log_2 2 < 0 \text{ nên } x = 2 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình:}$$

$$\log_2(x) = \log_2(x+1) \quad (1) \text{ và } \log_2 x < \log_2(x+1) \quad \forall x \in (0; 2);$$

Trở lại bài toán, xét hai dãy con $(a_{2i}), (a_{2i+1})$. Ta chứng minh (a_{2i}) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 2.

• Ta chứng minh $a_{2i} > 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.

Với $k = 1, a_2 = 3 > 2$ (đúng). Giả sử điều này đúng với k . Khi đó:

$$\log_3(a_{2k+2}) = \log_3(a_{2k} + 1) > \log_3(2+1) = 1$$

$\Rightarrow a_{2k+2} > 2$. Vậy $a_{2k} > 2$ với mọi k .

• Ta chứng minh (a_{2k}) là dãy giảm. Thật vậy, do $\log_2 x > \log_2(x+1), \forall x > 2$ nên

$$\log_2(a_{2k+2}) = \log_2(a_{2k} + 1) < \log_2(a_{2k})$$

$\Rightarrow a_{2k+2} < a_{2k}$. Do đó tồn tại $\lim a_{2k} = L_1$.

Từ phương trình $\log_2(a_{2k+2}) = \log_2(a_{2k} + 1)$, cho $k \rightarrow +\infty$ ta được $\log_2(L_1) = \log_2(L_1 + 1)$, theo (1), suy ra $L_1 = 2$. Tương tự ta chứng minh được (a_{2k+1}) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 2. Đặt $L_2 = \lim a_{2k+1}$, ta cũng có $L_2 = 2$. Vậy dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim a_n = 2$.

Nhận xét. Ngoài ban Hồng, các bạn cũng có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Lương Minh Hiếu, 10 Toàn, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Quảng Bình:** Nguyễn Trần Hoàng, 10 Toàn 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Lâm Đồng:** Lê Hoàng Vũ, 11 Toàn, THPT chuyên Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** Thái Quang Phúc, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Tiền Giang:** Mai Võ Phúc Thành, 11 Toàn, THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/525. Tìm giá trị của các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y) = f(x) + yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Theo (1) với $x = 0, y = 1$, ta được $f(0) = 0$.

Với $x = 0$ và sử dụng $f(0) = 0$, ta được:

$$f(y^4) = yf(y^3), \forall y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Từ (2) thay y bởi $-y$ thì

$$f(y^4) = -yf(-y^3), \forall y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra: $f(y^3) = -f(-y^3)$, tức f là hàm lẻ. Tiếp theo, thế (2) vào (1), ta được:

$$f(x+y^4) = f(x) + f(y^4), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \quad (4).$$

Xét $x < 0, y < 0$, thì $-x > 0, -y > 0$ và theo (4), ta có: $f(x+y) = -f(-x-y) = -f((-x) + (-y))$

$$= -[f(-x) + f(-y)] = -[-f(x) - f(y)] = f(x) + f(y).$$

Kết hợp với (4) suy ra f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$.

Trong (2), lần lượt thay y bởi $x+1$ và $x-1$ và sử dụng tính cộng tính của f , ta có:

$$f((x+1)^4) = (x+1)f((x+1)^3), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$$

$$= (x+1)f(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x^4) + 4f(x^3) + 6f(x^2) + 4f(x) + f(1)$$

$$= (x+1)[f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + f(1)], \forall x \in \mathbb{R} \quad (5);$$

$$f((x-1)^4) = (x-1)f((x-1)^3), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = (x-1)f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x^4) - 4f(x^3) + 6f(x^2) - 4f(x) + f(1)$$

$$= (x-1)[f(x^3) - 3f(x^2) + 3f(x) - f(1)], \forall x \in \mathbb{R} \quad (6).$$

Cộng (5) và (6) và để ý $f(x^4) = xf(x^3)$ ta thu được: $f(x^3) = xf(x^2), \forall x \in \mathbb{R} \quad (7)$.

Tiếp theo trong (7) thay x bởi $x+1$ ta thu được:

$$f(x^2 + 2x + 1) = (x+1)f(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) + 2f(x) + f(1) = (x+1)[f(x) + f(1)], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow xf(x) + 2f(x) + f(1) = (x+1)[f(x) + f(1)], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ trong đó } c = f(1).$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra.

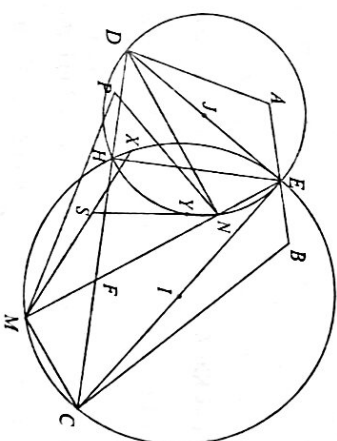
Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm Cauchy với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}$ không đòi hỏi tính chất giải tích áp lên hàm ẩn như tính liên tục, giới nội, khả vi, ... Có nhiều bài giải gửi đến Tòa soạn mắc một trong các lỗi sau: Khi kết luận được tính cộng tính của hàm f suy ngay tính tuyến tính của nó, điều này là không thể vì có rất nhiều lớp hàm cộng tính mà không là tuyến tính trên $\mathbb{R}$ hoặc chuyển qua giới hạn khi $x \rightarrow 0$ của hàm $f(x)$ trong khi f không có tính liên tục tại 0. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phạm Trung Kiên, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hưng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** Trần Văn Quán, Bài Huy

Tại, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Sóc Trăng:** Trần Minh Hiếu Học, 10A1T, THPT Nguyễn Thị Minh Khai; **Vĩnh Phúc:** Phạm Hoàng Hiệp, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/525. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm E thuộc AB . Điểm F thay đổi trên CD . Các điểm M, N theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên EF . P là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với AD và đường thẳng qua N vuông góc với BC . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải 1 (của bạn Phùng Thu Thảo, 12T, THPT chuyên DHSP Hà Nội, Hà Nội).



Gọi S là tâm của đường tròn (MNP) . H là hình chiếu của E trên CD ; $(I), (J)$ là các đường tròn đường kính EC, ED .

Dễ thấy M, H thuộc (J) và N, H thuộc (I) .

Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm thứ hai của SM, SN và $(J), (I)$. Dễ thấy:

$$(MX, ME) \equiv (MS, MN) \equiv \frac{1}{2}(\overline{MS}, \overline{SN})$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\pi + (\overline{SM}, \overline{SN})) \pmod{\pi} \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overline{SM}, \overline{SN})$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + (\overline{PM}, \overline{PN}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overline{AD}, \overline{BC}) \pmod{\pi}.$$

Từ đó, chú ý rằng $AD, BC, (J)$ và E cố định, suy ra X cố định (1). Tương tự Y cố định (2).

Dễ thấy

$$(SX, SY) \equiv (SM, SN) \equiv (SM, NM) + (MN, SN) \equiv (XM, EM) + (EN, YN) \pmod{\pi}$$

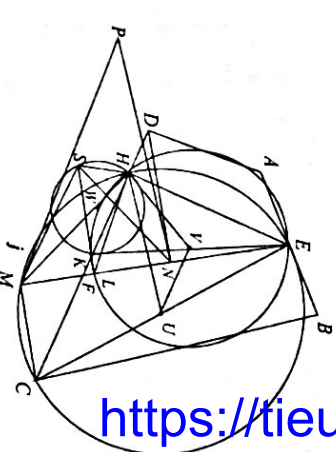
$$\equiv (XH, EH) + (EH, YH)$$

$$\equiv (XH, YH) \equiv (HX, HY) \pmod{\pi} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng H cố định, suy ra S chạy trên một đường tròn cố định (XYH) .

Lời giải 2. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B . Một đường thẳng bất kì đi qua B và cắt (O) tại P và (O') tại M, M' . Khi đó tam giác AMM' đồng dạng cùng hướng với tam giác AOO' .



Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây. Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (MNP) ; H là hình chiếu của E trên CD ; K, L theo thứ tự là trung điểm của CD, MN .

(U). (V) theo thứ tự là các đường tròn đường kính EC, EK . Vì $CM \parallel DN$ nên M thuộc đường tròn (U) . Vì $CM \parallel DN$ (cùng vuông góc với MN) và K, L theo thứ tự là trung điểm của CD, MN nên, theo định lý Thales đảo, $KL \perp MN \equiv EL$. Do đó L thuộc đường tròn (V) (1).

Dễ thấy E, H là các giao điểm của (U) và (V) .

Vậy, theo bổ đề trên, tam giác HML đồng dạng cùng hướng với tam giác HUV .

Điều đó có nghĩa là tam giác HML luôn đồng dạng và cùng hướng với chính nó (2).

Vì S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và L là trung điểm của MN nên $SL \perp ML$ và

$$\begin{aligned} VT(1) &= (y-z)^3(1-x^3) + (z-x)^3(1-y^3) + (x-y)^3(1-z^3) \\ &= (y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 - (yx-zx)^3 - (xz-yx)^3 - (zx-xy)^3 \\ &= 3(y-z)(z-x)(x-y) - 3xyz(y-z)(z-x)(x-y) \\ &= 3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz). \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned} 3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz) \\ &= 3(y-z)(z-x)(x-y)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \\ &\Leftrightarrow (1-xyz)^3 = \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)} \\ &\Leftrightarrow (1-xyz)^3 = (1-x^3)(1-y^3)(1-z^3). \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 5. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương x, y, z : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.

Lời giải. Ta luôn có: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$.

Áp dụng (*) ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})[(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ (đpcm).

ỨNG DỤNG 2. Giải phương trình, hệ phương trình

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$(3x-2)^3 - (x-3)^3 = (2x+1)^3.$$

Lời giải. Ta có: $(3x-2)^3 - (x-3)^3 = (2x+1)^3$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^3 - (x-3)^3 - (2x+1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^3 + (-x+3)^3 + (-2x-1)^3 = 0.$$

Vì $(3x-2) + (-x+3) + (-2x-1) = 0$ nên

$$(3x-2)^3 + (-x+3)^3 + (-2x-1)^3$$

$$= 3(3x-2)(-x+3)(-2x-1) = 0.$$

Từ đó giải ra nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{2}{3}; x = 3; x = -\frac{1}{2}.$$

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$(x^2-3)^3 - (4x+6)^3 + 216 = 18(4x+6)(3-x^2).$$

Lời giải. Đặt $a = x^2 - 3$, $b = 4x + 6$; $c = 6$. Khi

đó: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3-4x-6+6=0 \\ x^2-3=-4x-6=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \pm \sqrt{7} \\ x=-3 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = 2 \pm \sqrt{7}, x = -3.$$

Thí dụ 8. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

Lời giải. Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 1.$$

$$\text{Do } x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 1$$

$$= \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$$

nên chỉ có thể xảy ra

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1 \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1), bình phương hai vế, ta có:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 1 \quad (3).$$

Lấy (2) trừ (3), suy ra: $xy+yz+zx = 0$ nên

$$x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Giả sử $x^2 \geq y^2 \geq z^2$. Suy ra: $z = 0$, $y = 0$, $x = \pm 1$.

$$\text{Ta có } x = -1 \text{ không thỏa mãn nên } \begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự suy ra: } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm (x, y, z) là:

$$(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).$$

Thí dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} x^3 + y^3 + 3xyz = z^3 \\ (2x+2y)^3 = z^3 \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $t = -z$, ta có:

$$x^3 + y^3 + t^3 - 3xyt = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+t)(x^2+y^2+t^2-xy-yt-tx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=0 \\ x=y=t=-z < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $x + y + t = 0$ ta có: $x + y = z$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $z = 4$.

Khi đó: $x + y = 4$. Vậy nghiệm nguyên dương của hệ là: $(1; 3; 4), (3; 1; 4), (2; 2; 4)$.

ỨNG DỤNG 3. Tìm giá trị biểu thức

Thí dụ 10. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c \neq 0$.

$$\text{Tìm giá trị biểu thức } M = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải. Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0.$$

Mà $a + b + c \neq 0$ suy ra:

$$(a+b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{a^2 + a^2 + a^2}{(a+a+a)^2} = \frac{3a^2}{9a^2} = \frac{1}{3}.$$

Thí dụ 11. Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính

$$N = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2}.$$

Lời giải. Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} = \frac{3}{-yz}$.

$$\text{Do đó: } N = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} = \frac{xy}{z^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{3xy}{z^2}.$$

$$= xy \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xy \cdot \frac{3}{-xyz} = 3.$$

Thí dụ 12. Cho $xyz \neq 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3x^2y^2z^2.$$

$$\text{Tính } P = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right).$$

Lời giải. Đặt $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$. Ta có:

$$x^3y^3 + y^3z^3 + x^3z^3 = 3x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

- Nếu $a + b + c = 0$ hay $xy + yz + zx = 0$ thì

$$(x+z)y = -xz; (y+z)x = -yz; (x+y)z = -xy$$

$$\text{Do đó: } P = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

$$= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{z+x}{x} = \frac{(x+y)z}{yz} \cdot \frac{(y+z)x}{zx} \cdot \frac{(z+x)y}{xy}$$

$$= \frac{-xy}{yz} \cdot \frac{-yz}{zx} \cdot \frac{-xz}{xy} = -1.$$

$$\text{- Nếu } a = b = c \Rightarrow xy = yz = zx \Rightarrow x = y = z \Rightarrow P = 8.$$

BÀI TẬP DÈ NGHỊ

1. Cho $x + y + z = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$A = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-xyz}.$$

2. Cho $xy + yz + zx = 0$ và $xyz \neq 0$. Tính

$$B = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}.$$

3. Rút gọn biểu thức:

$$C = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{xyz} \cdot \frac{x(y^2 + z^2) + y(x^2 - xy)}{xy^2 + xz(2y + z) - (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}.$$

4. Giải phương trình:

$$(x-3)^3 + (x+1)^3 = 8(x-1)^3.$$

5. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

6. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ (x-1)^3 + (2y-3)^3 - (3z-2)^3 = 18 \end{cases}$$

7. Chứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3 \neq 3abc$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP "LIÊN HỢP" TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

PHẠM DUY KHÁNH
(Giáo viên THPT Đào Chuân, Nghệ An)

Nói đến phương pháp liên hợp thì chúng ta quá quen thuộc trong bài toán giải phương trình, bất phương trình,... Trong bài viết này tác giả giới thiệu một kỹ thuật mà ta tạm gọi là "liên hợp" đối với bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác thông qua công thức biến đổi tổng thành tích quen thuộc sau:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Sau đây là một số thí dụ minh họa cho phương pháp.

Thí dụ 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác

$$ABC \text{ ta có: } \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}} \leq \frac{1}{8}$$

Chứng minh. Ta có:

$$BDT \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8 \sin A \sin B \sin C.$$

Áp dụng BDT Cauchy cho từng nhân tử ở vế trái sau đó nhân vế theo vế các BDT cùng chiều ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Chứng minh.

$$BDT \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{2} + \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$+ \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (1).$$

$$\text{Xét } \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{2} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin B + \sin C}{\sin A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin B \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} + \frac{\sin A + \sin B}{\sin C \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \geq 24$$

Áp dụng BDT Cauchy cho vế trái ta có:

$$VT \geq 3 \sqrt{\frac{(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)}{\sin A \sin B \sin C \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}} \geq 24 \text{ (dpcm).}$$

Thí dụ 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos^2 \frac{A-B}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Chứng minh.

$$BDT \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{2} + \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$+ \frac{\cos^2 \frac{C-A}{2}}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (2).$$

$$\text{Xét } \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2} = \frac{4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2}}{4 \cos^2 \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{A}{2} (\sin B + \sin C)^2}{\sin^2 A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại, ta có.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{A}{2} (\sin B + \sin C)^2}{\sin^2 A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2} (\sin C + \sin A)^2}{\sin^2 B \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{C}{2} (\sin A + \sin B)^2}{\sin^2 C \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \geq 24.$$

Áp dụng BDT Cauchy cho vế trái ta có:

$$VT \geq 3 \sqrt{\frac{(\sin A + \sin B)^2 (\sin B + \sin C)^2 (\sin C + \sin A)^2}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}} \geq 24 \text{ (dpcm).}$$

Thí dụ 4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin A}{2 \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}.$$

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại ta

$$\text{có: } \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C-A}{2}} = \frac{\sin B}{2 \cos \frac{C-A}{2}} = \frac{\sin B}{\sin C + \sin A}, \quad \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}.$$

BDT $\Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} \geq \frac{3}{2}$
Đây chính là BDT Nesbitt quen thuộc, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin B \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin C \sin A}{\sin^2 \frac{B}{2}} \geq 9.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\frac{\sin B \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos(B-C) + \cos A}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{1 + \cos(B-C)}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} - 1 = \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} - 1$$

$$= \frac{4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2}}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} - 1 = \left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \right)^2 - 1.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{\sin C \sin A}{\sin^2 \frac{B}{2}} = \left(\frac{\sin C + \sin A}{\sin B} \right)^2 - 1;$$

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \right)^2 - 1.$$

Theo BDT Cauchy ta có:

$$VT = \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \right)^2 + \left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \right)^2 + \left(\frac{\sin C + \sin A}{\sin B} \right)^2 - 3 \geq 9 \text{ (dpcm).}$$

Thí dụ 6. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

Chứng minh.

$$\text{BDT} \Leftrightarrow \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \frac{C-A}{2} \cos \frac{C-A}{2} + \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \geq \frac{3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} \geq 3.$$

$$\text{Xét } \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{\sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

theo bài toán 5 ta có:

$$\frac{\sin B \sin C}{4 \sin \frac{A}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin \frac{A}{2}} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

tương tự cho các trường hợp còn lại. Ta có:

$$\text{VT} = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{3}{4}$$

Ta có các kết quả:

$$\frac{1}{4} \sum \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \right)^2 \geq 3; \quad \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{3}{4}$$

Do đó

$$\text{VT} = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} \right)^2 + \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{3}{4} \geq 3$$

(dpcm).

Thí dụ 7. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$P = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{C-A}{2}} \leq \frac{3}{4}$$

Chứng minh. Ta có:

$$1 - \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}$$

Tương tự ta có:

$$3 - 2P = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{3}{4} \text{ (dpcm).}$$

Qua các thí dụ trên ta thấy rằng nếu chúng ta biết khai thác và vận dụng khéo léo công thức biến đổi tổng thành tích $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

một cách linh hoạt, sáng tạo vào bài toán chứng minh BDT lượng giác thì nhiều lúc ta có được lời hay và đẹp, sau đây là một số thí dụ áp dụng dành cho độc giả.

Bài tập áp dụng cho phương pháp

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$1. \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$2. \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6.$$

$$3. \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 12.$$

$$4. \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 3 \cdot 2^n \text{ (} n \in \mathbb{Z}^+ \text{)}$$

$$5. \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq 64 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$6. \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \text{ (} n \in \mathbb{Z}^+ \text{)}$$



**KHAI THÁC MÔ HÌNH
VỀ CẤP TAM GIÁC THẤU XẠ
Ở DẠNG ĐẶC BIỆT**

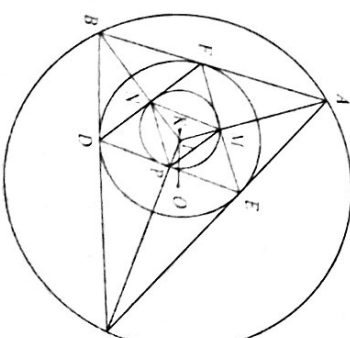
NGUYỄN VĂN THẠCH
(Gi THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP.Hồ Chí Minh)
TRƯƠNG THỊ THUY VY
(Gi THPT Kỹ thuật Vĩnh Mỹ)

Như chúng ta đã biết, hai tam giác ABC và A₁B₁C₁ được gọi là thấu xạ nếu các đường thẳng A₁A, B₁B, và C₁C, đồng quy tại một điểm. Điểm đồng quy đó được gọi là tâm thấu xạ của hai tam giác. Mô hình vẽ cấp tam giác thấu xạ đã được khai thác và sử dụng rất phong phú trong các bài toán hình học phẳng. Trong bài viết này, các tác giả xin gửi đến bạn đọc một hướng tiếp cận đặc biệt của mô hình trên. Đó là xét cấp tam giác thấu xạ có các cạnh tương ứng song song.

Trước tiên chúng ta đến với bài toán quen thuộc sau.

Bài 1. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp là (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E và F. Các đường thẳng IA, IB, IC cắt các cạnh FE, FD, DE lần lượt tại M, N, P. Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Chứng minh rằng 3 điểm K, I, O thẳng hàng.

Lời giải. Gọi r là bán kính của đường tròn (O).



Ta có:

$$IE^2 = IF^2 = ID^2 = IM \cdot IA = IN \cdot IB = IP \cdot IC = r^2$$

Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích r² biến M ↔ A, N ↔ B, P ↔ C. Từ đó nó biến đường tròn (K) thành đường tròn (O). Suy ra 3 điểm K, I, O thẳng hàng.

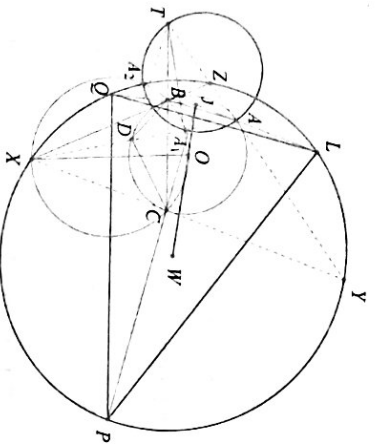
Nhận xét 1. Ta thấy M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh FE, FD, DE nên tam giác MNP là tam giác DEF có các cạnh tương ứng song song và các đường thẳng DM, EN, FP đồng quy tại tâm thấu xạ G (cũng là trọng tâm tam giác DEF). Từ đó suy ra các điểm K, G, I, O thẳng hàng, hay OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.

Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 2 (USA TST 2017). Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại T. Đường tròn đường kính AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại A₁ và A₂, sao cho OA₁ < OA₂. Các điểm B₁, B₂, C₁, C₂ được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng AA₁, BB₁, CC₁ đồng quy tại một điểm và điểm này nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải. Kẻ các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C, chúng cắt nhau tại X, Y, Z như hình vẽ. Đường thẳng AX cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC và đường tròn (O) lần lượt tại M, D. Khi đó do tứ giác ABDC điều hòa nên TD = TA. Chú ý rằng M thuộc đường tròn đường kính OX nên

$OM \perp AD \Rightarrow MA = MD$. Từ đó 3 điểm T, M, O thẳng hàng, điểm M nằm trên đường tròn đường kính AT hay $M \equiv A_1$.

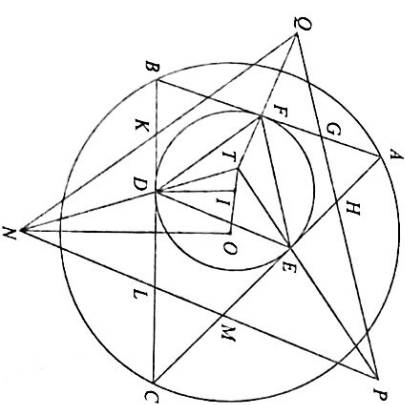


Nhận xét 2. Rõ ràng bài toán 2 khá thú vị. Không dễ để chúng ta phát hiện ra mô hình hai tam giác có các cạnh tương ứng song song. Mấu chốt là ở chỗ, khi chúng ta thay đổi vai trò của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn nội tiếp tam giác XYZ thì mô hình quen thuộc mới lộ diện.

Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 3 (Poland MO 2011). Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E và F . Các đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh AF và AE, BF và BD, CE và CD cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác này trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.



Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ , gọi L, P, Q lần lượt là điểm chính giữa của cung $\widehat{ZY}$ không chứa X , cung $\widehat{YX}$ không chứa Z , cung $\widehat{ZX}$ không chứa Y . Ta có $\widehat{TA_1B} = \widehat{TA_1A} - \widehat{BA_1A} = 180^\circ - \widehat{TA_1X} - \widehat{XZA} = \widehat{XZA}$. Suy ra tứ giác TA_1BZ nội tiếp. Dẫn đến A_1 là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ZBCYXT$. Mặt khác, $\angle ZBA_1 \sim \angle YCA_1$ nên $\frac{ZA_1}{YA_1} = \frac{ZB}{YC} = \frac{ZA}{YA}$. Suy ra A_1A là phân giác của góc $\widehat{ZA_1Y}$, hay A, A_1, L thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta cũng được B, B_1, Q và C, C_1, P thẳng hàng.

Gọi W là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ . Ta có $LZ = LY = LO$ và $PY = PX = PO$ nên $LP \perp OY$. Suy ra $AC \parallel LP$. Chứng minh tương tự dẫn đến tam giác ABC và tam giác LPQ có các cạnh đôi một song song. Suy ra các đường thẳng AL, BQ, CP đồng quy, hay AH_1, BH_2, CH_3 đồng quy tại tâm J . Từ đó theo mô hình bài 1, ta có 3 điểm W, O, J cùng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .

luôn tồn tại phép vị tự tâm T tỉ số $\frac{TN}{TD}$ biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) , từ đó $ID \parallel ON$ (1).

Lại có $KB^2 = KD^2 = JB^2 = JF^2$ và

$LC^2 = LD^2 = MC^2 = ME^2$. Suy ra KJ là trục đẳng phương của đường tròn điểm $(B, 0)$ và đường tròn (I) ; LM là trục đẳng phương của đường tròn điểm $(C, 0)$ và đường tròn (I) . Từ

đó dẫn đến N là tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(B, 0)$, $(C, 0)$ và (I) , hay điểm N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OB = OC$. Chứng minh tương tự ta được $OA = OB = OC$, hay điểm O cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Nhận xét 3. Trong bài 3, nếu gọi $A_1 = AI \cap EF$,

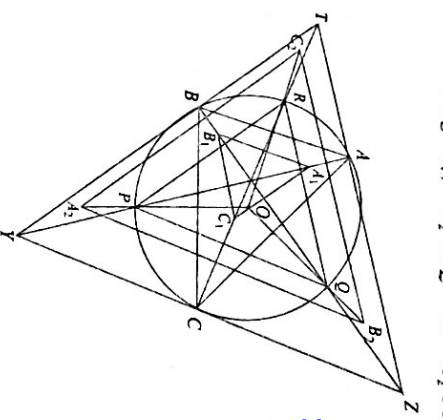
$B_1 = BI \cap DF$, $C_1 = CI \cap ED$ thì rõ ràng điểm I là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Bấy giờ ta xét trường hợp tổng quát hơn, cho các điểm A_1, B_1, C_1 thay đổi tùy ý trên các cạnh AI, BI, CI ta có bài toán sau.

Bài toán 4 (Bulgaria MO 2004). Cho (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Trên các cạnh IA, IB, IC ta lấy các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng. Các đường trung trực của các cạnh A_1A, B_1B, C_1C cắt nhau tại A_2, B_2, C_2 tương ứng. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nếu và chỉ nếu I là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Lời giải. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; P, Q, R lần lượt là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ không chứa A , cung $\widehat{AC}$

không chứa B , cung $\widehat{AB}$ không chứa C ; Y, Z, T lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ của tam giác ABC .

Giả sử I là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$, ta có $\widehat{IB_1C_1} = \widehat{IZA} = \widehat{ICB}$. Suy ra tứ giác BB_1C_1C nội tiếp đường tròn tâm A_2 . Từ đó $A_2 \in OP$. Chứng minh tương tự, $B_2 \in OQ$ và $C_2 \in OR$.



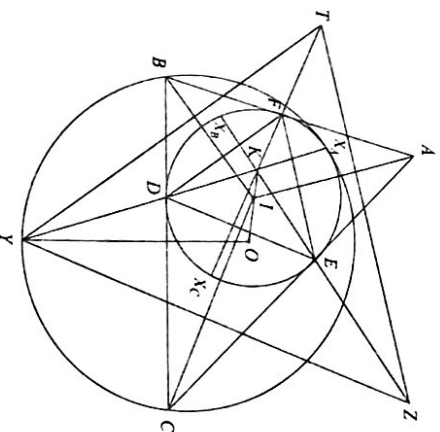
Lại có $RI = RB$, $PI = PB$ nên PR là đường trung trực của đoạn IB , hay $PR \perp IB$. Dẫn đến $PR \parallel A_2C_2$. Chứng minh tương tự $RQ \parallel B_2C_2$ và $PQ \parallel A_2B_2$. Suy ra tam giác PQR và tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song và các đường thẳng A_2P, C_2R và B_2Q đồng quy tại tâm O . Mặt khác, $OP = OQ = OR$ nên $OA_2 = OB_2 = OC_2$. Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$.

Chiều ngược lại chứng minh tương tự.

Nhận xét 4. Có một chi tiết khá thú vị là trong bài 4 chúng ta bắt gặp có 4 tam giác có các cạnh tương ứng song song nhau. Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 5 (Romania Master In Mathematics 2012). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp đường tròn (O) . w_a là đường tròn qua B, C và tiếp xúc với (I) ; các đường tròn w_b, w_c được định nghĩa tương tự. Đường tròn w_b và w_c cắt nhau tại A' khác A ; các điểm B', C' định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên OI .

Lời giải.



Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, AC, AB ; X_a, X_b, X_c lần lượt là các tiếp điểm của các đường tròn w_a, w_b và w_c với đường tròn (I) ; các đường thẳng X_aD, X_bE, X_cF cắt lại các đường tròn w_a, w_b và w_c tại Y, Z, T tương ứng. Theo tính chất cơ bản của hai đường tròn tiếp xúc, xét trong đường tròn w_a , ta có Y là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa X_a và để thấy $\Delta X_aBY \sim \Delta BDY$ nên $YB^2 = YC^2 = YD \cdot YX_a$. Suy ra điểm Y là tâm đẳng phương của đường tròn điểm (B, O) , đường tròn điểm (C, O) và

đường tròn (I) . Chứng minh tương tự cho các điểm Z và T . Theo bài 3, ta có tam giác DEF và tam giác YZT có các cạnh tương ứng song song nên các đường thẳng YD, ZE, TF đồng quy tại tâm K . Hiển nhiên điểm O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác YZT và 3 điểm K, I, O thẳng hàng (1).

Theo định lý *Thales* ta có $\frac{KD}{KY} = \frac{KE}{KZ}$. Mà $|\partial_{K(I)}| = KX_a \cdot KD = KX_b \cdot KE$ nên dẫn đến

$KX_a \cdot KY = KX_b \cdot KZ$, hay $\partial_{K(w_a)} = \partial_{K(w_b)}$. Suy ra $K \in CC'$. Chứng minh tương tự, ta suy ra các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm K (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét 5. 1) Rõ ràng tam giác YZT ở bài toán 5 chính là tam giác NPQ ở bài toán 3 (mặc dù cách xây dựng 2 tam giác có khác nhau).

2) Cũng từ bài toán 5, ta thấy các đường thẳng X_aD, X_bE và X_cF đồng quy tại K (đây chính là đề *Korea MO 2010*). Theo định lý *Siebert* ta có các đường thẳng AX_a, BX_b và CX_c cũng đồng quy.

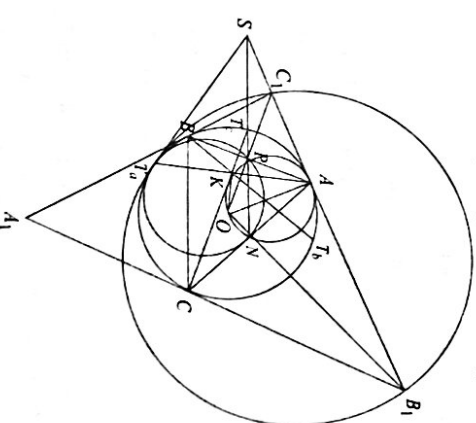
Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 6. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ là đường tròn đi qua N, P và tiếp xúc với đường tròn (O) tại T_a . Định nghĩa tương tự cho $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$. Chứng minh rằng các đường thẳng AT_a, BT_b, CT_c đồng quy tại một điểm nằm trên đường thẳng *Euler* của tam giác ABC .

Lời giải. Gọi A, B, C là giao điểm của 3 tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B, C như hình

vẽ. Kẻ tiếp tuyến chung của 2 đường tròn Ω_a và đường tròn (O) cắt B_1C_1 tại S . Khi đó SA, ST_a và NP là trục đẳng phương của 3 đường tròn Ω_a , đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác APN nên 3 điểm S, N, P thẳng hàng.

Lại có $OP, OC_1 = OA^2 = ON \cdot OB_1$. Suy ra tứ giác C_1B_1NP nội tiếp. Dẫn đến $ST_a^2 = SP \cdot SN = SB_1 \cdot SC_1$, hay đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1T_a$ tiếp xúc đường tròn (O) tại T_a . Chứng minh tương tự ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1C_1T_b$ tiếp xúc đường tròn (O) tại T_b và đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1T_c$ tiếp xúc đường tròn (O) tại T_c . Theo bài 5, ta có các đường thẳng AT_a, BT_b, CT_c đồng quy tại điểm K nằm trên đường thẳng *Euler* của tam giác ABC .



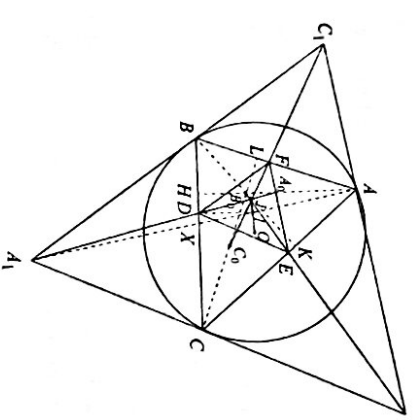
Nhận xét 6. Trong bài 6, khi chúng ta thay đổi vai trò của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ thì mô hình của bài 5 mới dần lộ diện. Cũng từ đây ta thấy điểm T_u có nhiều cách xây dựng. Thực ra mô hình điểm T_u đã từng xuất hiện trong các đề *IMO*

Shortlist 2011, *Viet Nam MO 2018*... Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm.

Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 7 (Viet Nam TST 2003). Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm các đường cao AH, BK, CH . Đường tròn nội tiếp tam I của tam giác ABC tiếp xúc với các đoạn BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh rằng A_0D, B_0E, C_0F cùng đi qua một điểm và nó nằm trên đường thẳng OI (Nét vẽ trung I thì coi OI là đường thẳng tùy ý qua O).

Lời giải.



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ của tam giác ABC . Trước tiên chúng ta chứng minh 3 điểm A_1, D, A_0 thẳng hàng. Thật vậy, gọi $A' = DA_1 \cap AH$; $X = AA_1 \cap BC$. Do BI, BA_1 lần lượt là phân giác trong và ngoại của góc $\widehat{ABC}$ nên $D(AX, A_1) = -1$

BÀI SỐ 70

PROBLEM. Find the next term of the following sequence

$$1 : 11 : 21 : 1211 : 111221 : \dots$$

Solution. The sequence starts with 1. The next term is determined from the previous one by reading it digit by digit and grouping the numbers that are repeated consecutively. For example, looking at the first term then read one (number) one, then the second term is 11 ; looking at the second term then read two (number) one, then the third term is 21 ; and so on,...

The sixth term of the above sequence, by the rule, is 312211.

Remark: The sequence is called the Look-and-Say Conway sequence. John H. Conway was a famous mathematician. And people are very interested in the above sequence and study it seriously too.

TỪ VỰNG

sequence : dãy (số)
digit : chữ số
consecutively : một cách liên tiếp

NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 67

BÀI TOÁN. Số đo mỗi góc trong của một đa giác đều là 156° . Tìm số cạnh của đa giác đều đó.

Lời giải. Ta có thể chỉ ra rằng tổng các góc trong của một đa giác lồi n cạnh bằng $180(n-2)$ độ.

Do đó số đo mỗi góc trong của một đa giác đều n cạnh là $\frac{180(n-2)}{n}$ độ.

Từ phương trình $\frac{180(n-2)}{n} = 156$ ta tìm được $n = 15$. Vì vậy số cạnh của đa giác đều đó là 15.

Nhiệm xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Cao Thị Tường

HỒ HẢI (Hà Nội)



M.C. Escher

$\Rightarrow D(AH, I A') = -1$. Mà $AH \parallel DI$ dẫn đến

A' là trung điểm của AH , hay $A' \equiv A_0$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được 3 điểm B_1, E, B_0 thẳng hàng và 3 điểm C_1, F, C_0 thẳng hàng.

Lại có, tam giác DEF và tam giác $A_1B_1C_1$ có các cạnh tương ứng song song nên các đường thẳng A_1D, B_1E, C_1F đồng quy tại tâm J , hay luôn tồn tại phép vị tự tâm J tỉ số $\frac{JA_1}{JD}$ biến đường

tròn ngoại tiếp tam giác DEF thành đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Dẫn đến 3 điểm I, J, O thẳng hàng (với O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$). Mặt khác, O là tâm

PROBLEMS ... (Tập theo trong 20)

Problem 18/529 Given an equilateral triangle ABC with the length of a side a inscribed in the circle (O) . A point M lies on the circle (O) . Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{16} MA^8 + MB^8 + MC^8.$$

Problem 19/529. Given a triangle ABC . Assume that the measurements of the angles A, B, C form a geometric sequence with the common ratio $q = 2$. Let R, m_a, m_b, m_c respectively be the circumradius, and the lengths of the medians m_a, m_b, m_c of the triangle. Suppose that x_0 is a root of the equation $x^3 + m_a x^2 + m_b x + m_c = 0$.

Show that $x_0^2 < \frac{21R^2 + 4}{4}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

đường tròn Euler của tam giác $A_1B_1C_1$ và I là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ nên 3 điểm I, O, O' thẳng hàng. Từ đó suy ra bốn điểm I, J, O', O thẳng hàng hay J nằm trên đường thẳng OI .

Trong trường hợp I trùng với O thì tam giác ABC đều và bốn điểm I, J, O', O trùng nhau, khi đó kết quả bài toán vẫn đúng.

Nhận xét 7. Nếu chúng ta tính ý kết hợp bài toán 5 và 7 lại thì rõ ràng X_n, J, D, A_1, A_0 là 5 điểm thẳng hàng. Từ đó chúng ta thấy rằng hai bài toán này rất gần gũi. Tính chất này trước đó đã từng xuất hiện trong bài *GT, IMO Shortlist 2002*. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm.

Problem T10/529 Find the positive integral solutions of the equation

$$x^2 + y^2 = 19^{2^{1999} - 1} (6 - z).$$

Problem T11/529. Given a function $f: \mathbb{R} \rightarrow S$ where S is a bounded set. Suppose furthermore that $f^2(0) + f(0) = 0$ and

$$\left| f(x + y^2 + z^2) - f(x) - f^2(y) - f^3(z) \right| \leq \frac{1}{2}$$

for all $x, y, z \in \mathbb{R}$. Show that $|f(x) - f(-x)| \leq 2$ for all $x \in \mathbb{R}$.

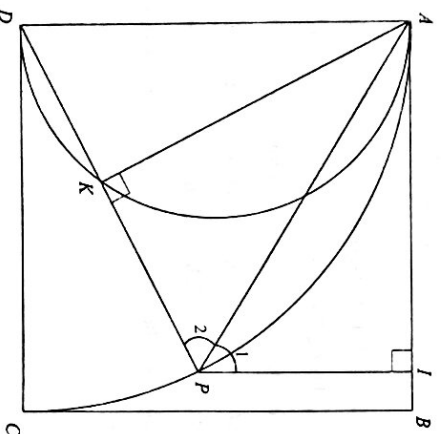
Problem 112/529 Given a triangle ABC inscribed in a circle (O) . The points X, Y belong to (O) so that $AX \parallel BC, BY \parallel AC$. Let Z, T respectively be the intersections between XY and AC, BC . Let O_1, O_2, O_3, O_4 respectively be the circumcenters of the triangles AXZ, BYT, CYT, CXZ . Show that $O_1O_2O_3O_4$ is a parallelogram.



THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MỚI

BÀI TOÁN 50. Trong hình vuông $ABCD$ vẽ nửa đường tròn đường kính AD và cung AC với tâm là D . Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC . DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K . Chứng minh PK bằng khoảng cách từ P đến AB .

Cách giải 1. (h.1)

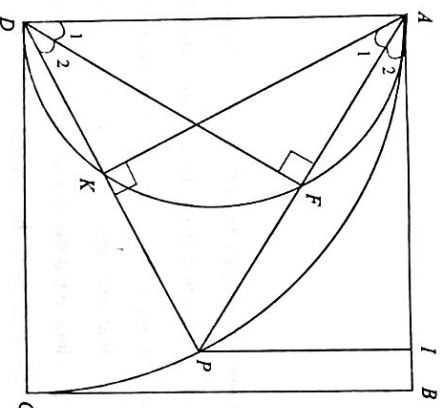


Hình 1

Kẻ $PI \perp AB$. Ta thấy $\triangle APK$ vuông tại K (vì $\widehat{AKD} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD) và $\triangle ADP$ cân tại D (do $AD = DP$)
 $\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{DAP}$. Mặt khác: $\widehat{P_1} = \widehat{DAP}$ (so le trong, vì $AD \parallel PI$). Do đó: $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$.

Suy ra $\triangle APK = \triangle API$ (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau) $\Rightarrow PK = PI$.

Cách giải 2. (h.2)



Hình 2

Ngoài cách chứng minh hai tam giác $\triangle APK$ và $\triangle API$ bằng nhau (cách 1), ta thay việc chứng minh $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$ bằng việc chứng minh $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
 Gọi F là giao điểm của AP với nửa đường tròn đường kính AD .

Ta có: $\widehat{AFD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Tam giác ADP cân tại D có DF là đường cao nên DF cũng là phân giác, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.
 Mà $\widehat{D_2} = \widehat{A_1}$; $\widehat{D_1} = \widehat{A_2}$ (góc có các cặp cạnh tương ứng vuông góc) suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle APK = \triangle API$ (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau) $\Rightarrow PK = PI$.

Cách giải 3. (h.2)

Cách giải này chúng ta cũng đi chứng minh $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nhưng việc chứng minh được áp dụng bằng kiến thức khác.

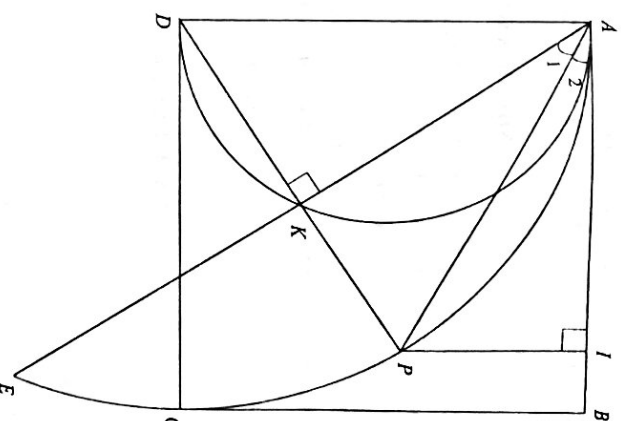
Chú ý rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn tâm D nên ta có: $\widehat{IAK} = \widehat{ADK}$ (có số đo bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\widehat{AK}$).

Mặt khác góc $\widehat{IAP}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung AP của đường tròn tâm D nên góc $\widehat{IAP}$

bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung là góc $\widehat{ADP}$: $\widehat{IAP} = \frac{1}{2} \widehat{ADP} = \frac{1}{2} \widehat{IAK}$.

Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle APK = \triangle API$ (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau)
 $\Rightarrow PK = PI$.

Cách giải 4: (h.3)



Hình 3

Kéo dài AK cắt lại đường tròn tâm D tại E .

Vì $DK \perp AE$ nên số đo $\widehat{AP} =$ số đo $\widehat{PE}$. Ta có góc $\widehat{BAE}$

là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung AE ; mà AP là lại đi qua điểm chính giữa của cung AE nên AP là tia phân giác của góc $\widehat{BAE}$. Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle APK = \triangle API$ (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau)
 $\Rightarrow PK = PI$.

TRƯỜNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thuông, huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi)

Nhận xét, Ngoài 4 cách giải trên của bạn Trương Quang An, người giới thiệu đề toán, các bạn:

Trần Văn Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Hùng Yên, Hưng Yên, Nguyễn Minh Thảo, số nhà 39, Tế Hanh, TP. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi, Nguyễn Hưng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định cũng đóng góp một số cách giải tương tự như những cách giải trên. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 52 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2021.

BÀI TOÁN 50. Cho Tam giác ABC cân tại C có $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Tính số đo góc $\widehat{AEC}$.

ĐOÀN CẤT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, tỉnh Bình Định)



A mathematician is flying non-stop from Edmonton to Frankfurt with AirTransat. The scheduled flying time is nine hours.

Some time after taking off, the pilot announces that one engine had to be turned off due to mechanical failure: "Don't worry - we're safe. The only noticeable effect this will have for us is that our total flying time will be ten hours instead of nine."

A few hours into the flight, the pilot informs the passengers that another engine had to be turned off due to mechanical failure: "But don't worry - we're still safe. Only our flying time will go up to twelve hours."

Some time later, a third engine fails and has to be turned off. But the pilot reassures the passengers: "Don't worry - even with one engine, we're still perfectly safe. It just means that it will take sixteen hours total for this plane to arrive in Frankfurt."

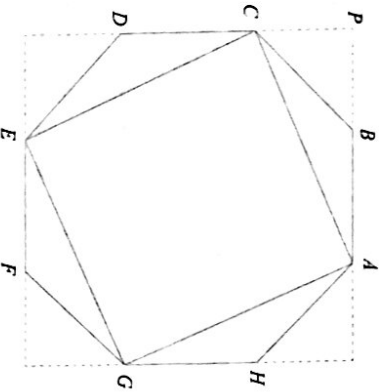
The mathematician remarks to his fellow passengers: "If the last engine breaks down, too, then we'll be in the air for twenty-four hours altogether!"



BÀI TOÁN 57 (VNC-12, hạng A, 2020). Hình hai giác độ $ABCD$ và $DEFG$ có diện tích là n . Gọi m là diện tích của hình tứ giác $ACEG$. Giá trị của $\frac{m}{n}$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ E. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:



Không mất tính tổng quát, ta giả sử cạnh của hình hai giác đều là 2. Kéo dài các đoạn AB và DC cắt nhau tại P . Khi đó ta tính được $BP = CP = \sqrt{2}$. Theo tính chất đối xứng, ta thấy tứ giác $ACEG$ là hình vuông. Gọi a là cạnh hình vuông đó. Theo định lý Pythagore cho tam giác vuông APC ta có:

$$m = a^2 = (2 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8 + 4\sqrt{2}.$$

Diện tích hình hai giác có thể được tính bằng cách cách lấy diện tích hình vuông lớn bao quanh nó trừ đi bốn lần diện tích tam giác BCP . Như vậy:

$$n = (2 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 = 8 + 8\sqrt{2}.$$

Suy ra: $\frac{m}{n} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{8 + 8\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Nhận xét. Bài toán này dễ. Bạn đọc đã gửi về Tòa soạn với nhiều cách giải khác nhau cho bài toán này. Tuyên dương các bạn có lời giải tốt:

Đào Quang Anh, 8E1, TH, THCS&THPT Everest, Bắc Từ Liêm, Hà Nội; Nguyễn Hùng Cường, xã Nhôm Mỹ, TX, An Nhơn, Bình Định; Trần Văn Quân, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên.

NHU HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị: Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.8.2021.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 57. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m; n)$ với $m, n \geq 3$ để tồn tại vô hạn các số nguyên dương x sao cho $\frac{x^m + x - 1}{x^n + x^2 - 1}$ là một số nguyên.

KHÁNH HỮU (Hà Nội)



DỒ VUI:

PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG

THÀNH 6 ĐA GIÁC

Cho một miếng bìa hình vuông một mặt màu vàng với độ dài cạnh bằng 6 cm (mặt sau màu trắng). Bạn hãy cắt hình vuông đó thành 6 đa giác bằng các đường gấp khúc song song với cạnh hình vuông mà mỗi đa giác được cắt ra có không quá 6 cạnh với số đo cạnh là số nguyên theo cm và diện tích 6 đa giác được cắt ra bằng 1 cm², 3 cm², 5 cm², 7 cm², 9 cm², 11 cm², sao cho có thể ghép được 6 đa giác đó thành hình chữ nhật màu vàng với kích thước lần lượt bằng 2 cm x 18 cm, 3 cm x 12 cm, 4 cm x 9 cm.

NGUYỄN VIỆT HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 525, tháng 3 năm 2021)

Phân tích sai lầm của bạn Linh Nhi:

Ta đã biết rằng nếu $y(x) = f(x^2)$ thì khi đó

$$y(x+m) = f((x+m)^2) = f(x^2 + 2mx + m^2).$$

Do đó khi ta tịnh tiến $(C): y = f(x^2)$ theo $\vec{u}(-m; 0)$ sẽ thu được đồ thị

$$(C''): y = f(x^2 + 2mx + m^2)$$

được đồ thị hàm số $(C'): y = f(x^2 + m)$ như đã nêu nhận ở cách làm của bạn Linh Nhi.

Cách giải đúng. Xin đưa ra một cách giải đúng (Biện luận theo nghiệm) cho bài toán này.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Số điểm cực trị của hàm $g(x)$ chính là số nghiệm bội lẻ của phương trình $g'(x) = 0$. Ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 1 \Leftrightarrow x^2 = -m + 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + m = 1 \Leftrightarrow x^2 = -m + 1 \\ x^2 + m = 2 \Leftrightarrow x^2 = -m + 2 \end{cases} \quad (2)$$

TH1. (Các trường hợp cụ thể)

- Với $m = -1$ thì $g'(x) = 0$ có các nghiệm là: $x = 0$ (bội 3), $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{3}$. Chấp nhận $m = -1$.

- Với $m = 1$ thì $g'(x) = 0$ có các nghiệm là: $x = 0$ (bội 3), $x = \pm\sqrt{1}$. Loại giá trị $m = 1$.

- Với $m = 2$ thì $g'(x) = 0$ có các nghiệm là: $x = 0$ (bội 3). Loại giá trị $m = 2$.

TH2. Với $m \in (-\infty; -1)$ thì $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm

là: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{-m-1}$, $x = \pm\sqrt{-m+1}$, $x = \pm\sqrt{-m+2}$

Loại ngay những giá trị m như thế!

TH3. Với $m \in (-1; 1)$ thì $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm

là: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{-m+1}$, $x = \pm\sqrt{-m+2}$. Loại

những giá trị m này. Từ đây ta tìm thêm được

giá trị nguyên $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.

TH4. Với $m \in (1; 2)$ thì $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm

là: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{-m+2}$. Loại những giá trị m này

là: $x = 0$. Loại những giá trị m này.

Tóm lại là có đúng 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu là $m = -1$, $m = 0$. Chọn đáp án A.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải của bạn Linh Nhi.

KINHVI

GIẢI BÀI PHƯƠNG TRÌNH (CƠ THAM SỐ)



Trong giờ luyện tập thầy giáo ra bài toán:

Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $|x - m| > -x^2 + 2x + m$ đúng mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bạn Dũng đã đưa ra lời giải như sau:

$$|x - m| > -x^2 + 2x + m \Leftrightarrow |x - m| > (x - 1)^2 > m + 1 \quad (1).$$

Ta có: $|x - m| + (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình (1) đúng mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow m < -1.$$

Theo bạn lời giải trên đã đúng chưa? Nếu sai bạn hãy chỉ rõ sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quê Hương 2, Nghệ An)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỰ 1964
Số 529 (7.2021)
Tòa soạn: 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35122648, 024.35882701
Email: toanhocvuoiitrevevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS TSKH TRẦN VĂN NHƯNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS TS. TRẦN VĂN HẠO

CHIU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HGD
PHẠM XUÂN THANH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM
Thư ký Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập: CN. TRẦN THỊ KIM CƯỜNG
TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS TS. VŨ THANH KHUÊ, GS TSKH NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS TSKH ĐANG HÙNG THẮNG, PGS TS. PHẠM ĐOÀN THOAI, ThS. VŨ KIM THUY, PGS TS. VŨ ĐOÀNG THUY, GS TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Khai – Ứng dụng của một hằng đẳng thức bậc hai.
- 5 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2020 - 2021.
- 8 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2020 - 2021.
- 10 **Diễn đàn dạy học Toán**
Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phương, Phạm Thanh Tâm, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ – Sử dụng phần mềm GeoGebra để kiểm tra giả thuyết hình học.
- 15 **Bạn có biết**
Hoàng Đức Tân – Hơn một thế kỷ tìm kiếm lời giải bài toán phủ quả của H. Lebesgue.
- 19 **Đề ra kỳ này**
T1/529, ..., T12/529, L1/529, L2/529.
Problem in This Issue
- 21 **Giải bài kì trước**
T1/525, ..., T12/525, L1/525, L2/525
Solutions to Previous Problems
- 31 **Phương pháp giải toán**
Lê Anh Tuấn – Một số ứng dụng từ một hằng đẳng thức đẹp.
- 34 **Phạm Duy Khánh** – Phương pháp "lên hợp" tương bài toán chứng minh bất đẳng thức lượng giác.
- 37 **Bạn đọc tìm tòi**
Nguyễn Văn Thanh – *Trương Thị Thủy Vân* – Khai thác mô hình về cặp tam giác nhọn xạ ở dạng đặc biệt.
- 43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 70
Bài dịch số 67.
- 44 **Nhiều cách giải cho một bài toán**
- 46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**
- 47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHUÔNG, TRẦN TIỆP MINH HIỀN

Mitruat: QUỐC HIẾP THANH LONG
Thiết kế, chi bản: MINH HÒA



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp trưng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đang tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010	Khổ 19 x 26,5
Năm 2011	Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2012	Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2013	Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2014	Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2015	Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2016	Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017	Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018	Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019	Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2020	Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2021	Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
• Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
• Email: toanhocvuoiitrevevietnam@gmail.com

<https://tielunhopto.com>



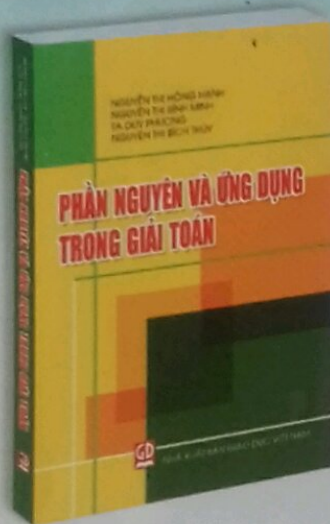
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHÂN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

Tác giả: Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh,
Tạ Duy Phương, Nguyễn Thị Bích Thủy

Sách dày 303 trang, khổ 16 × 24cm, giá bìa 105.000 đồng.



Phân nguyên $[x]$ của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Do tính đặc biệt không giống ai của hàm phân nguyên, thí dụ, hàm phân nguyên khá đơn giản: là hàm hằng từng khúc, nhưng cũng khá phức tạp: không liên tục tại các điểm nguyên với bước nhảy bằng 1, do đó khó sử dụng công cụ giải tích, vì vậy các bài tập về phân nguyên thường là khó.

Ngoài lý thuyết được trình bày chi tiết, bắt đầu từ Trung học Cơ sở, sách có nhiều bài toán thi học sinh giỏi cấp huyện, tỉnh, Quốc gia và Quốc tế liên quan đến phân nguyên.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp **những kiến thức cơ bản về phân nguyên**: Hàm phân nguyên và đồ thị hàm phân nguyên.

Chương 2 trình bày các bài toán **số học** liên quan đến **phân nguyên**: Toán chia hết, ứng dụng nhị thức Newton trong giải toán với phân nguyên,...

Chương 3 trình bày các dạng toán liên quan đến **phân nguyên trong đại số**: Tính giá trị của biểu thức chứa phân nguyên, chứng minh hệ thức chứa phân nguyên và đặc biệt, phân loại chi tiết và khá đầy đủ về các dạng phương trình chứa phân nguyên.

Chương 4 là các bài toán về **phân nguyên trong toán Giải tích**: Dãy số, chuỗi số, giới hạn của biểu thức có phân nguyên.

Chương 5 sơ lược trình bày một số vấn đề liên quan đến phân nguyên: phân nguyên và hệ đếm cơ số khác 10, phân nguyên và phương trình hàm, phân nguyên trong lý thuyết hàm thực.

Những kiến thức và bài tập trong sách là cơ sở để giải nhiều bài toán thi học sinh giỏi khác chưa được đưa vào sách. Ngoài ra, cuốn sách có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán và các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ

Địa chỉ: 73 Lò Đúc, Hai Bà Trưng, Hà Nội

● Điện thoại: 024.39724715 - 0983605756

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT7M21

In tại Xí nghiệp Bùn đỏ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2021

<https://tieulun.hopto.org>

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng