TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 527
Tháng 5 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

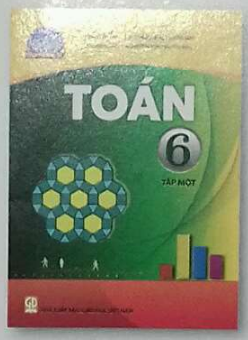
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Emai: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Tổng thống Barack Obama trao tặng nhà toán học **Solomon Golomb** Huân chương Khoa học Quốc gia tại Nhà Trắng

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
CHÂN TRỜI SÁNG TẠO LỚP 6



MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hoà Hiếu 2, TX. Thái Hoà, Nghệ An)

Có nhiều dấu hiệu nhận biết hai đoạn thẳng bằng nhau, trong khuôn khổ bài viết này chúng ta sẽ dùng dấu hiệu sau đây: "*Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba*", dấu hiệu này được nêu trong Sách giáo khoa Toán 8, tập 1, trang 76 do NXBGD Việt Nam xuất bản năm 2013. Chúng ta cùng xét một số thí dụ sau:

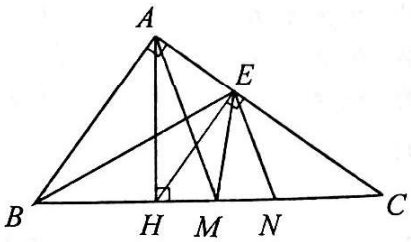
Thí dụ 1 (Toán 8). *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AC$ $(E \in AC)$, lấy điểm M nằm trên đoạn HC sao cho $\widehat{BEH} = \widehat{HEM}$. Chứng minh rằng AM đi qua trung điểm của HE.*

Lời giải. *Cách 1.* Trên BC lấy điểm N sao cho M là trung điểm của HN, vì $\widehat{BEH} = \widehat{HEM}$ $\Rightarrow EH$ là đường phân giác trong của góc $\widehat{BEM}$. Mặt khác $HE \perp AC$ nên EC là đường phân giác ngoài của $\Delta BEM \Rightarrow \dfrac{HM}{BH} = \dfrac{CM}{CB}\left(= \dfrac{EM}{BE}\right)$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BH} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{MN}{CM} = \frac{BH}{BC} \quad (1).$$

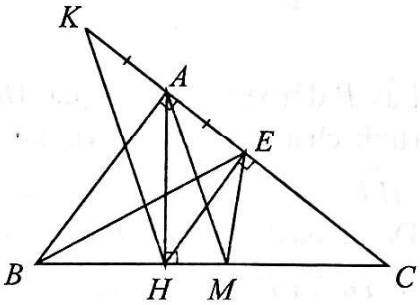
Vì $EH // AB$ nên theo định lí Thales ta có:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BH}{BC} \quad (2).$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{MN}{CM} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AM // EN$ (theo định lí Thales đảo).

Xét ΔEHN có $MN = MH$ và $AM // EN$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra AM đi qua trung điểm của HE.



Cách 2. Trên tia đối của tia AC lấy điểm K sao cho $AK = AE$. Vì $HE // AB$ nên

$$\frac{BH}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AC} \quad (3) \text{ (theo định lí Thales).}$$

Từ $\widehat{BEH} = \widehat{HEM} \Rightarrow EH$ là đường phân giác trong của $\widehat{BEM}$. Mặt khác $HE \perp AC$ nên EC là đường phân giác ngoài của ΔBEM

$$\Rightarrow \frac{HM}{BH} = \frac{CM}{CB}\left(= \frac{EM}{BE}\right) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{HM}{CM} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{HM}{CM} \Rightarrow AM // KH$ (theo định lí Thales đảo).

Xét ΔEHK có $AK = AE$ và $AM // KH$, nên theo dấu hiệu trên ta suy ra AM đi qua trung điểm của HE.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các cạnh AB, AC. EF cắt AD tại O. Chứng minh rằng: IK đi qua trung điểm của OD.*

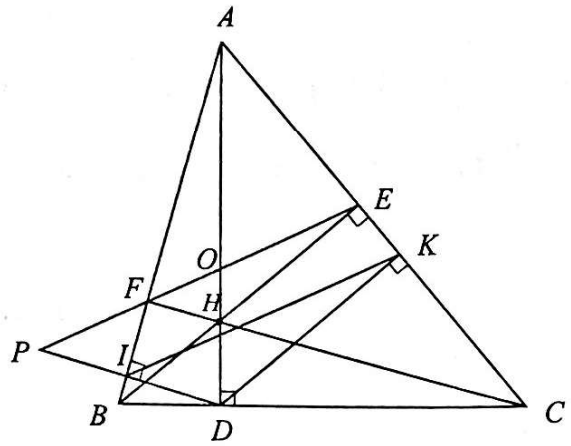
Lời giải. *Cách 1.* Ta có: $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (1)

Tương tự: $\widehat{BFD} = \widehat{BCA}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{BFD}$ (3)

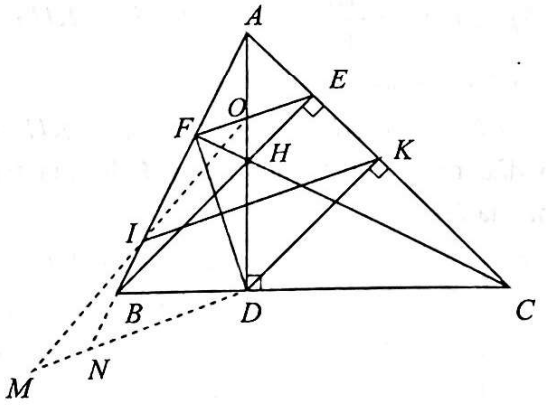


Lấy P đối xứng với D qua AB thì: $\widehat{BFP} = \widehat{BFD}$ (tính chất đối xứng) (4). Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{AFE} = \widehat{BFP} \Rightarrow \widehat{AFP} + \widehat{AFE} = \widehat{AFP} + \widehat{BFP} = 180^o$. Do đó ba điểm P, F, E thẳng hàng.

Vì DI // FH và DK // EH nên theo định lí Thales ta có: $\frac{AF}{AI} = \frac{AE}{AK}\left(= \frac{AH}{AD}\right) \Rightarrow EF$ // IK (theo định lí Thales đảo) hay PO // IK.

Xét ΔPOD có PO // IK và $IP = ID$, nên IK đi qua trung điểm của OD.

Cách 2. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF, đường thẳng này cắt các đường thẳng OI, AB lần lượt tại M, N. Vì ID // $C \Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{DFC}$ (hai góc so le trong) (1).

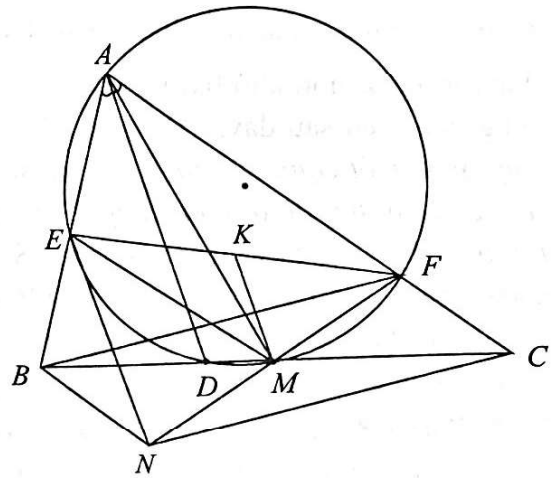


Vì MD // $EF \Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{DFE}$ (hai góc so le trong) (2). Theo chứng minh ở cách 1, ta có:

$$\widehat{AFE} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EFC} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FDI} = \widehat{NDI}$ nên ΔDNF cân tại D $\Rightarrow IN = IF \Rightarrow \Delta OFI = \Delta MNI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IO$. Xét ΔOMD có $IM = IO$; IK // MD (cùng song song với EF) nên theo dấu hiệu trên suy ra IK đi qua trung điểm của OD.

Thí dụ 3. *Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), kẻ đường phân giác AD của góc BAC và đường trung tuyến AM (M, D ∈ BC), vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM. Đường tròn này cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC theo thứ tự tại E và F. Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt EF tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.*



Lời giải. Lấy N đối xứng với F qua M, thì tứ giác $BFCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{BNM} = \widehat{MFC}$. Mà $\widehat{MFC} = \widehat{AEM}$. Do đó $\widehat{BNM} = \widehat{AEM}$ nên tứ giác $BEMN$ nội tiếp

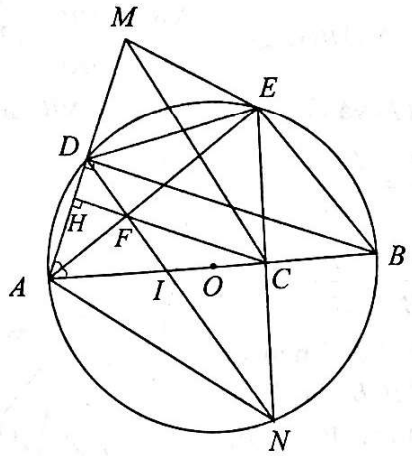
$\Rightarrow \widehat{BEN} = \widehat{BMN} = \widehat{FMC} = \widehat{FAD} = \widehat{DAB} \Rightarrow EN$ // $AD \Rightarrow KM$ // EN (do KM // AD). Xét ΔENF có KM // EN và $MN = MF$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra $KE = KF$.

Thí dụ 4. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A và* $\widehat{DAB} > 60^o$. *Trên đường kính AB lấy điểm C (C khác A, B) và kẻ CH vuông góc với AD tại H. Phân giác trong của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.*

a) *Chứng minh tứ giác AFCN nội tiếp đường tròn và ba điểm N, C, E thẳng hàng.*

b) *Cho AD = BC, chứng minh DN đi qua trung điểm của AC.* (*Đề thi vào lớp* 10 *THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học* 2014 – 2015).

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{ADB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp BD$, mà $CH \perp AB$ nên $CH \,//\, DB \Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{DBA}$ (1). Mặt khác: $\widehat{AND} = \widehat{DBA}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{ACF}$ nên $AFCN$ là tứ giác nội tiếp. Gọi $E' = NC \cap (O)$, vì $AFCN$ là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{DNE'} = \widehat{EAB} \Rightarrow \overset{\frown}{DE'} = \overset{\frown}{EB}$ (3).

Ta lại có: $\widehat{DAE} = \widehat{EAB} \Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EB}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow E' \equiv E$, do đó ba điểm N, C, E thẳng hàng.

b) Lấy điểm M đối xứng với A qua D, ta có: $\widehat{MDE} = \widehat{ANE} = \widehat{CBE}$, $CB = DM = AD$; $DE = EB$ nên $\Delta DEM = \Delta BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{ECB}$ nên tứ giác $ACEM$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MAE} = \widehat{DME} \Rightarrow MC \,//\, DN$. Gọi $I = ND \cap AB$, xét ΔMAC có $DM = DA$, $DI \,//\, CM$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra $IA = IC$.

Thí dụ 5. *Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B, C); M, N lần lượt là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng HP (Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2014 – 2015).*

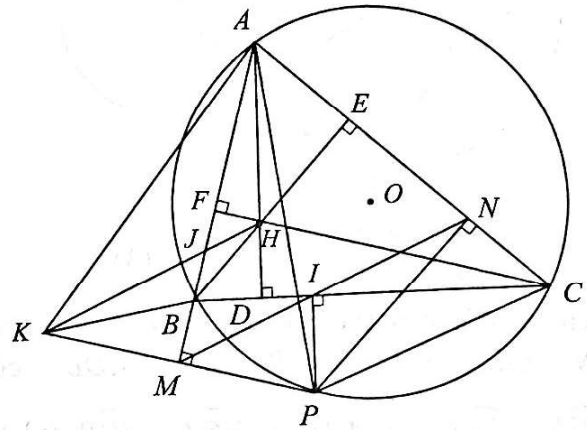
Lời giải. Gọi I là hình chiếu của P trên đường thẳng BC; K là điểm đối xứng của P qua M; J là giao điểm của HK và AB. Khi đó ta có ba điểm M, I, N thẳng hàng (MIN là đường thẳng Simson ứng với điểm P của ΔABC). Vì K đối xứng với P qua M và các tứ giác $ABPC$, $HDCE$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{AKB} = \widehat{APB} = \widehat{ACB} = \widehat{BHD}$

$\Rightarrow AKBH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BAK} = \widehat{BAP} = \widehat{BCP} = \widehat{PNM}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{ABE} = 90^o - \widehat{BAC} = 90^o - \left(180^o - \widehat{MPN}\right)$

$= \widehat{MPN} - 90^o$ (2)



Áp dụng tính chất góc ngoài vào ΔJBH và kết hợp với (1); (2) ta có:

$\widehat{KJB} = \widehat{BHK} + \widehat{ABE} = \widehat{PNM} + \widehat{MPN} - 90^o$

$= \left(180^o - \widehat{PMN}\right) - 90^o = 90^o - \widehat{PMN} = \widehat{JMN}$

$\Rightarrow KH \,//\, MN$.

Xét tam giác KHP có $KH \,//\, MN$, $MK = MP$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra MI đi qua trung điểm của HP.

Thí dụ 6. *Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Từ điểm C thuộc tia đối của tia AB kẻ hai tiếp tuyến đến (O) tại D và E, E nằm trong (O'). Các đường thẳng AD, AE cắt (O') tại điểm thứ hai tương ứng là M, N. Gọi I là giao điểm của DE và MN. Chứng minh rằng I là trung điểm của MN.*

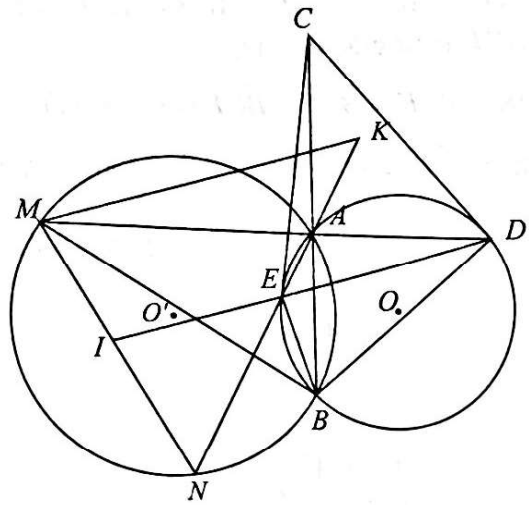
(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐH Vinh năm 2015, Vòng 2)

Lời giải.

Ta có: $\Delta CEA \backsim \Delta CBE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{AE}{BE}$ (1).

Tương tự, ta có: $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{AD}{BD}$ (2).

Từ (1), (2) và kết hợp với $CE = CD$ ta được:



$$\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{BE}{BD}=\frac{AE}{AD}\quad(3).$$

Trên tia đối của tia EN lấy điểm K sao cho $EN=EK$. Xét ΔNEB và ΔMDB có: $\widehat{DMB}=\widehat{ENB}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right)$; $\widehat{NEB}=\widehat{MDB}$ (vì tứ giác $ADBE$ nội tiếp) $\Rightarrow\Delta NEB\sim\Delta MDB$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{NE}{MD}=\frac{EB}{DB}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{NE}{MD}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{EK}{MD}=\frac{AE}{AD}\quad(\text{vì } EN=EK)$$

$$\Rightarrow\frac{EK}{AE}=\frac{MD}{AD}\Rightarrow\frac{EK-AE}{AE}=\frac{MD-AD}{AD}$$

$$\Rightarrow\frac{AK}{AE}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow\frac{AK}{AM}=\frac{AE}{AD}$$

$\Rightarrow\Delta AKM\sim\Delta AED$ (g.g) $\Rightarrow\widehat{AKM}=\widehat{AED}$

$\Rightarrow MK\,//\,ED$ hay $MK\,//\,EI$.

Xét ΔMKN có $EN=EK$ và $MK\,//\,EI$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra $IM=IN$.

Thí dụ 7. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. Gọi P là giao điểm của MN với (O). Chứng minh rằng AP đi qua trung điểm của BC.*

Lời giải. Ta có: $\Delta NCP\sim\Delta NMC$ (g.g)

$$\Rightarrow\frac{NC}{NM}=\frac{CP}{MC}\quad(1).$$

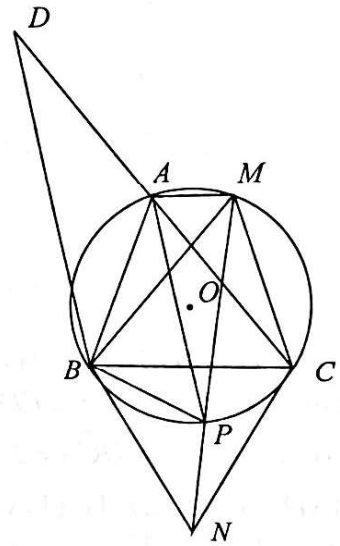
$\Delta NBP\sim\Delta NMB$ (g.g) $\Rightarrow\frac{NB}{NM}=\frac{BP}{MB}$ (2).

Từ (1), (2) và kết hợp với $NC=NB$ ta có:

$$\frac{CP}{MC}=\frac{PB}{MB}$$

$$\Rightarrow\frac{CP}{AB}=\frac{PB}{AC}$$

(do $AM\,//\,BC$ nên tứ giác $AMCB$ là hình thang cân $\Rightarrow AC=MB$; $AB=MC$).



Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD=AC$, kết hợp với $\frac{CP}{AB}=\frac{PB}{AC}$ ta được $\frac{CP}{AB}=\frac{PB}{AD}$. Mặt khác:

$$\widehat{BAK}=\widehat{CPB}\left(=180^\circ-\widehat{BAC}\right).$$

Do đó $\Delta ABD\sim\Delta PCB$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{PCB}$ (3).

Ta lại có: $\widehat{BAP}=\widehat{PCB}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{PB}\right)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BAP}=\widehat{ABD}\Rightarrow AP\,//\,BD$. Xét ΔBDC có $AD=AC$ và $AP\,//\,BD$ nên theo dấu hiệu trên ta thấy AP đi qua trung điểm của BC.

Thí dụ 8. *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Ax là tia tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax và nửa đường tròn (O) cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Từ điểm M bất kì thuộc tia Ax (M khác A), kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn đó (C là tiếp điểm). Kẻ CH ⊥ AB (H ∈ AB). Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH.*

Lời giải.

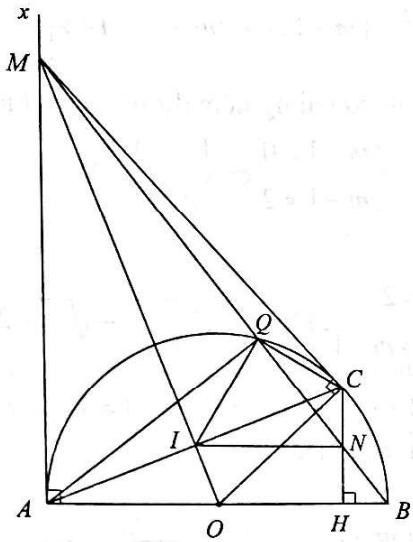
Gọi $I=AC\cap MO; Q=MB\cap(O); N=CH\cap MB$.

Ta có $\widehat{AQM}=\widehat{AIM}\left(=90^\circ\right)\Rightarrow AMQI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MAI}=\widehat{IQB}$ (1).

Mặt khác: Vì $Ax\,//\,CH\Rightarrow\widehat{MAI}=\widehat{ICH}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{IQB}$ nên tứ giác $IQCN$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CIN}$. Kết hợp với $\widehat{CQN} = \widehat{CAB}$ ta suy ra $\widehat{CIN} = \widehat{CAB} \Rightarrow IN // AB$.

Xét ΔCAH có $IN // AB$ và $IA = IC$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra $NC = NH$.



Thí dụ 9. *Cho tam giác ABC ($\widehat{A} > 90^o$) nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác ABC. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ BC. Gọi D là giao điểm của BM và CH, E là giao điểm của CM và BH. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DE nằm trên một đường thẳng cố định.*

Lời giải. Gọi Q là giao điểm của AB và HC; P là giao điểm của AC và BH. Qua D kẻ một đường thẳng song song với PQ cắt BH tại K, theo định lý Thales ta có: $\frac{QD}{PK} = \frac{QH}{PH}$ (1)

Ta có: $\Delta PCH \sim \Delta QBH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PC}{QB} = \frac{PH}{QH}$ (2).

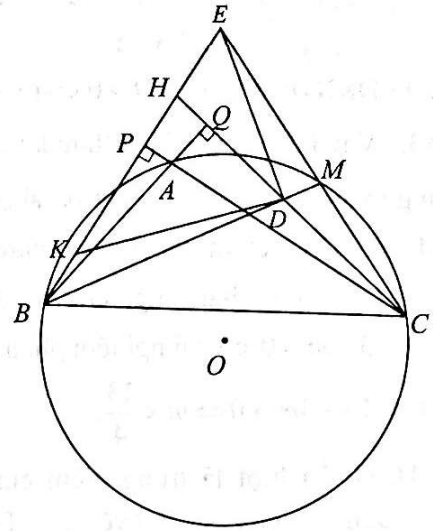
Vì $\widehat{PCE} = \widehat{QBD} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{AM} \right)$

$\Rightarrow \Delta PCE \sim \Delta QBD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PE}{QD} = \frac{PC}{QB}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

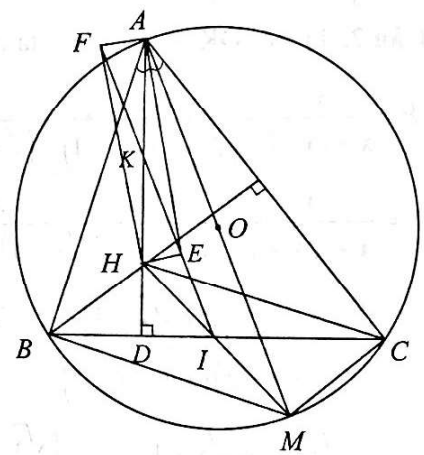
$$\frac{QD}{PK}.\frac{PE}{QD} = \frac{QH}{PH}.\frac{PC}{QB} = \frac{QH}{PH}.\frac{PH}{QH} = 1 \Rightarrow PE = PK.$$

Xét ΔKDE có $PK = PE$ và $KD // PQ$ nên theo dấu hiệu trên ta suy ra PQ đi qua trung điểm của DE. Vậy trung điểm của đoạn thẳng DE nằm trên một đường thẳng PQ cố định.



Thí dụ 10. *Cho tam giác ABC nhọn và AB < AC. Gọi H là trực tâm ΔABC. Hình chiếu của H trên các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$ lần lượt là E và F. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm I của cạnh BC.*

Lời giải. Gọi đường tròn tâm O là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M, khi đó ta dễ dàng chứng minh được $BHCM$ là hình bình hành nên I cũng là trung điểm của MH. Tứ giác $HFAE$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật, gọi K là giao điểm của AH và $EF \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA}$ (1).



Gọi D là giao điểm của AH với BC, khi đó ta có $\Delta DBA \sim \Delta MCA$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{MAC}$. Mà AE là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên suy ra $\widehat{HAE} = \widehat{MAE}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{MAE} \Rightarrow EK // AM$. (3)

(Xem tiếp trang 15)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2020-2021

VÒNG 1

Câu 1. 1) ĐKXĐ: $x^2-6x+9>0 \Leftrightarrow (x-3)^2>0$ $\Leftrightarrow x\neq 3$. Vậy ĐKXĐ của biểu thức là: $x\neq 3$.

2) Đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2=x+3-m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-x-3+m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 13-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{13}{4}$.

3) Gọi M, G lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của ΔABC. Ta có $AM=AB.\sin 60^o=\dfrac{3}{2}$ cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $R=GA=\dfrac{2}{3}AM \Rightarrow R=1$ cm.

4) Gọi h là chiều cao của hình nón ta có thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h \Rightarrow \dfrac{1}{3}\pi R^2h=4\pi \Rightarrow h=3$ cm.

Câu 2. 1) Với ĐK $x\geq 0; x\neq 1$ ta có:

$$P=\frac{x}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x(\sqrt{x}-1)+(x+\sqrt{x}+1)-x-2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}.$$

2) Xét hiệu

$$P-\frac{2}{3}=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2}{3}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{3(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}.$$

Với ĐK $x\geq 0; x\neq 1$ ta có:

$$\begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2>0\\ 3(x+\sqrt{x}+1)>0\end{cases} \Rightarrow P-\frac{2}{3}>0 \Leftrightarrow P>\frac{2}{3}.$$

Câu 3. 1) a) Ta có: $\Delta=m^2-6m+9=(m-3)^2\geq 0$ với mọi m. Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

b) Ta có: $x^2-(m+1)x+2m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=m-1\end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases}m-1>0\\ m-1\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ m\neq 3\end{cases} \quad (1).$$

TH1: $\begin{cases}x_1=2\\ x_2=m-1\end{cases}$, khi đó: $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{m+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=1 \Leftrightarrow m=0$.

không thỏa mãn (1).

TH2: $\begin{cases}x_1=m-1\\ x_2=2\end{cases}$, khi đó: $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+1}-2=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=3 \Leftrightarrow m=8$

thỏa mãn (1). Vậy $m=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) ĐK: $(x+1)^3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^3-3x(x+1)+2\sqrt{(x+1)^3}=0.$$

Đặt $y=\sqrt{x+1}$ (ĐK: $y\geq 0$) ta được phương trình

$$x^3-3xy^2+2y^3=0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+2y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-2y\end{array}\right..$$

- Với $x=y$ ta được: $x=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-x-1=0\end{cases}$

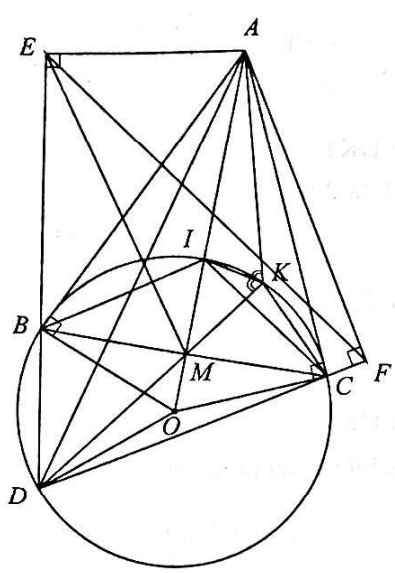
$\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

- Với $x=-2y$ ta được: $x=-2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ x^2-4x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x=2-2\sqrt{2}$.

Câu 4.



1) Ta có AB và AC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABO}=90^\circ$ và $\widehat{ACO}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^\circ$ $\Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{ACI}=\widehat{CBI}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có AO là trung trực của BC, nên tam giác IBC cân tại I, suy ra $\widehat{ICB}=\widehat{IBC}$. Suy ra $\widehat{ACI}=\widehat{BCI}$, suy ra CI là phân giác của góc ACB.

Chứng minh tương tự ta có BI là phân giác của góc ABC, suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Ta có $\widehat{AEB}+\widehat{AMB}=180^\circ$, suy ra tứ giác $AEBM$ nội tiếp, do đó $\widehat{BEM}=\widehat{BAM}$.

Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{BDC}=\widehat{ABC}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

ΔAMB vuông tại M nên $\widehat{ABM}+\widehat{BAM}=90^\circ$, suy ra $\widehat{DEM}+\widehat{EDC}=90^\circ$.

Vậy EM vuông góc với DC.

Chứng minh tương tự ta có FM vuông góc với DB.

Suy ra M là trực tâm của ΔDEF, suy ra DM vuông góc với EF.

3) Xét ΔMKC và ΔMBD có $\widehat{MKC}=\widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1 cung), $\widehat{KMC}=\widehat{BMD}$, suy ra $\Delta MKC \sim \Delta MBD$. Do đó:

$$\frac{MK}{MB}=\frac{MC}{MD} \text{ hay } MK.MD=MB.MC.$$

Chứng minh tương tự ta có: $MB.MC=MA.MO$.

Suy ra: $MK.MD=MA.MO$ hay $\frac{MA}{MD}=\frac{MK}{MO}$.

Xét ΔAMK và ΔDMO có:

$$\widehat{AMK}=\widehat{DMO} \text{ và } \frac{MA}{MD}=\frac{MK}{MO}.$$

Do đó: $\Delta AMK \sim \Delta DMO \Rightarrow \widehat{AKM}=\widehat{DOM}$ hay $\widehat{AKM}=\widehat{DOI}$.

Ta có: $\widehat{DCI}=\frac{1}{2}\widehat{DOI}$ (mối liên hệ giữa góc có đỉnh ở tâm và góc nội tiếp). Suy ra $\widehat{DCI}=\frac{1}{2}\widehat{AKM}$. Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{DCI}=\widehat{IKD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn 1 cung).

Suy ra $\widehat{IKM}=\frac{1}{2}\widehat{AKM}$, hay KI là phân giác của góc AKM.

Câu 5. 1) ĐK: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\le 1 \end{cases}$. Đặt $t=x\sqrt{1-y}$, ĐK: $t\ge 0$.

PT thứ nhất trở thành:

$$t^2+xt-2x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow (t-x-1)(t+2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow t=x+1 \quad (\text{vì } t+2x+1>0\ \forall t\ge 0; x\ge 1)$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1-y}=x+1.$$

Thay vào PT thứ hai ta được:

$$x^2+9=6(x+1)-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-6x+3+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5+\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)+\frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=0 \Leftrightarrow x=5$$

(thỏa mãn) (vì $x-1+\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}>0, \forall x\ge 1$)

$\Rightarrow y=-\frac{11}{25}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(5;-\frac{11}{25}\right)$.

2) Ta có $a^2+b^2\ge 2ab$

$\Rightarrow 4a^2+4ab+4b^2=(a^2+b^2)+3a^2+4ab+3b^2 \geq 3a^2+6ab+3b^2$

$\Rightarrow 4(a^2+ab+b^2) \geq 3(a+b)^2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2+ab+b^2} \geq \sqrt{3}(a+b)$.

Tương tự: $2\sqrt{b^2+bc+c^2} \geq \sqrt{3}(b+c)$;

$2\sqrt{c^2+ca+a^2} \geq \sqrt{3}(c+a) \Rightarrow P \geq \sqrt{3}(a+b+c)$.

Chứng minh:

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)\ \forall x;y;z$$

$\Leftrightarrow 2xy+2xz+2yz \leq 2x^2+2y^2+2z^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ (luôn đúng).

Áp dụng ta có:

$$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\right)^2 \leq 3(a+b+c+3)$$

$\Rightarrow a+b+c \geq 9 \Rightarrow P \geq 9\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3$. Vậy $\min P = 9\sqrt{3}$.

VÒNG 2

Câu 1. a) Ta có: $a^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$, $b^2 = y^2+\frac{1}{y^2}+2$

và $c^2 = x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}+2$.

Ta có: $ab = xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Suy ra $abc = x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}+x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+2$.

Suy ra $a^2+b^2+c^2-abc=4$.

b) Từ điều kiện bài toán rút được:

$$a = \frac{9}{2(2b+1)}-\frac{1}{2} \text{ (do } 2b+1 \neq 0).$$

Suy ra: $\frac{1}{2+a} = \frac{2b+1}{3(b+2)}$. Suy ra:

$$A = \frac{2b+1}{3(b+2)}+\frac{1}{b+2} = \frac{2b+1+3}{3(b+2)} = \frac{2}{3}.$$

Câu 2. a). ĐK: $x \geq -3$. Đặt $\sqrt{x+3}=t, (t \geq 0)$, phương trình trở thành: $2x^2+t^2-3xt=0$. Phương trình tương đương với

$$(x-t)(2x-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ 2x=t \end{array}\right..$$

Với $x=t$ ta được:

$$x=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

(thỏa mãn ĐK).

Với $2x=t$ ta được:

$$2x=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

(thỏa mãn ĐK).

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$S=\left\{1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

b) $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2) \end{cases}$.

ĐK: $x, y \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình (2) tương đương với

$$(x+y-1)(x+2y+4)=0.$$

Với điều kiện xác định ta có:

$$x+2y+4 \geq -\frac{1}{2}-1+4>0 \Rightarrow x+y=1.$$

Đặt $a=\sqrt{2x+1} \geq 0$ và $b=\sqrt{2y+1} \geq 0$, kết hợp (1) và $x+y=1$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=\frac{1}{8}(a^2-b^2)^2 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}.$$

TH1: $\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

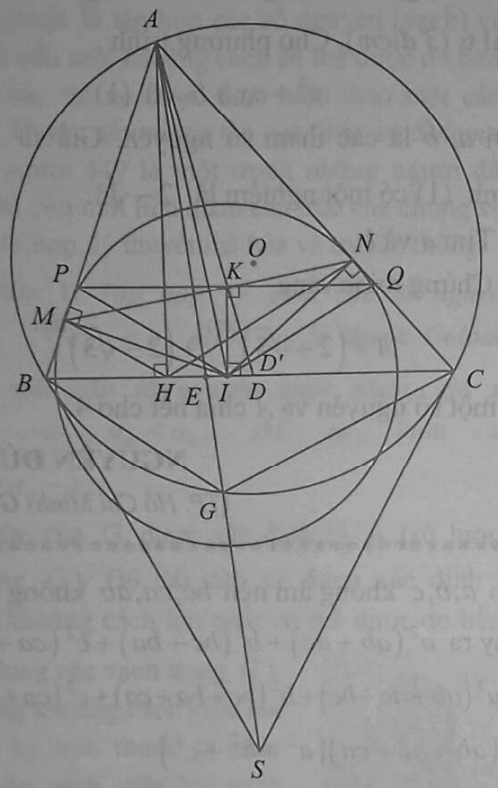
TH2: $\begin{cases} (a-b)^2(a+b)=8 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(4-2ab)=8 \\ (a+b)^2-2ab=4 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$, hệ trở thành: $\begin{cases} S(4-2P)=8 \\ S^2-2P=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\frac{S^2-4}{2} \\ S(4-S^2+4)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\frac{S^2-4}{2} \\ S \in \{2, -1\pm\sqrt{5}\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ S=2 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.$, từ đó suy ra tập nghiệm (x,y) của hệ là $\left\{\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Câu 3.



a) Do AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $\widehat{AMI}=\widehat{ANI}=90^\circ$, suy ra các điểm M, N thuộc đường tròn đường kính AI.

Ta có AH là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AHI}=90^\circ$, suy ra điểm H thuộc đường tròn đường kính AI.

Suy ra các điểm A,M,H,I,N cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Do tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên $\widehat{AHM}=\widehat{ANM}$ và $\widehat{AHN}=\widehat{AMN}$. Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau, suy ra ΔAMN cân tại A, suy ra $\widehat{AMN}=\widehat{ANM}$, suy ra $\widehat{AHM}=\widehat{AHN}$, hay HA là tia phân giác của góc MHN.

b) Kẻ đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB và AC tại P và Q.

Ta có $\widehat{IKP}+\widehat{IMP}=180^\circ$, suy ra tứ giác $IKPM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KIP}=\widehat{KMP}$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{KIQ}=\widehat{KNA}$. Suy ra $\widehat{KIP}=\widehat{KIQ}$.

Xét ΔIPQ có IK vừa là đường cao, vừa là phân giác nên nó là tam giác cân, suy ra IK là đường trung tuyến, hay K là trung điểm của PQ.

Dựng D là giao điểm của AK và BC.

Do $PQ // BC$, áp dụng định lý Thales ta có $\frac{KP}{BD}=\frac{AK}{AD}=\frac{KQ}{DC}$, suy ra $DB=DC$. Vậy D là trung điểm của BC.

c) Gọi E là giao điểm của AS và BC, G là giao điểm thứ 2 của AS và (O). Trên cạnh BC lấy điểm D' khác E sao cho $\widehat{BAE}=\widehat{CAD'}$, cần chứng minh D' là trung điểm của BC.

Ta có $\widehat{AGB}=\widehat{ACD'}$ và $\widehat{BAG}=\widehat{CAD'}$ nên

$$\Delta AGB \sim \Delta ACD' \Rightarrow \frac{GB}{CD'}=\frac{AG}{AC} \quad (1).$$

Ta có $\widehat{AGC}=\widehat{ABD'}$ và $\widehat{CAG}=\widehat{BAD'}$ nên

$$\Delta AGC \sim \Delta ABD' \Rightarrow \frac{GC}{BD'}=\frac{AG}{AB} \quad (2).$$

Ta có $\widehat{SBG}=\widehat{SAB}$ nên $\Delta SBG \sim \Delta SAB$, suy ra $\frac{SB}{SA}=\frac{BG}{AB}$. Chứng minh tương tự ta được: $\frac{SC}{SA}=\frac{CG}{AC}$. Do đó $\frac{CG}{CA}=\frac{BG}{BA}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CD'=BD'$ hay D' là trung điểm của BC. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. a). Ta có:

$x^3+y^2=xy^2+1 \Leftrightarrow (x^3-1)-y^2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1-y^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^2=x^2+x+1 \end{array}\right.$.

Với $x=1$, khi đó phương trình có nghiệm $(1;y)$ với y là số nguyên.

Với $y^2=x^2+x+1 \Leftrightarrow (2y)^2-(2x+1)^2=3$

$\Leftrightarrow (2y-2x-1)(2y+2x+1)=3.$

Lập bảng xét các trường hợp:

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Năm học 2020 - 2021

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1 (*3 điểm*). Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a-b=1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=a^4-4ab^3+3a^2b^2-a^3b-3a^2b+b^4.$$

Bài 2 (*3 điểm*). Giải phương trình:

$$x^2(2-x)^2=3(1-x)^2-5.$$

Bài 3 (*4 điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BD (D thuộc AC). Đường tròn (BCD) cắt cạnh AB tại E. Chứng minh

$$AE+AB=BC.$$

Bài 4 (*3 điểm*). Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

Chứng minh bất đẳng thức: $(a+2)(b+2)\ge cd$.

Bài 5 (*4 điểm*). Cho tứ giác $ABCD$ (AB không song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Các dây MC, MD cắt AB lần lượt tại các điểm F, E.

a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của MC và BD. Gọi J là giao điểm của MD và AC. Chứng minh: $IJ \parallel AB$.

c) Đường thẳng IJ cắt AD, BC, CD lần lượt tại các điểm P, Q, K. Chứng minh: $KP.KQ=KI.KJ$.

Bài 6 (*3 điểm*). Cho phương trình

$$x^2+ax+b=0 \quad (1)$$

với a, b là các tham số nguyên. Giả sử phương trình (1) có một nghiệm là $2-\sqrt{3}$.

a) Tìm a và b.

b) Chứng minh rằng

$$A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2021}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2021}$$

là một số nguyên và A chia hết cho 4.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh) Giới thiệu

****

☞

$2y-2x-1$	1	-1	3	-3
$2y+2x+1$	3	-3	1	-1
x	0	-1	-1	0
y	1	-1	1	-1

Vậy tập các giá trị $(x;y)$ thỏa mãn là:

$$\{(0;1),(0;-1),(-1;-1),(-1;1),(1;y),y\in\mathbb{Z}\}.$$

b) Ta có: $c+\dfrac{1}{b}=a+\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow abc+a=a^2b+b^2$ (*).

Suy ra a chia hết cho b, đặt $a=bk, k\in\mathbb{N}^*$, thay vào (*) ta được:

$$b^2kc+bk=b^3k^2+b^2\Leftrightarrow bkc+k=b^2k^2+b.$$

Suy ra b chia hết cho k và k chia hết cho b, suy ra $b=k$, suy ra $ab=b^3$, ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. a) Xét hiệu: $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)$

$$=a^3(1-a)+b^3(1-b)+c^3(1-c)$$
$$=a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$$
$$=a^2(ab+ac)+b^2(bc+ba)+c^2(ca+cb).$$

Do a,b,c không âm nên bc,ca,ab không âm

Suy ra $a^2(ab+ac)+b^2(bc+ba)+c^2(ca+cb)$

$$\le a^2(ab+ac+bc)+b^2(bc+ba+ca)+c^2(ca+cb+ab)$$
$$=(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)(2ab+2bc+2ca)$$
$$\le\frac{1}{2}\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)^2}{4}=\frac{1}{8}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Sau mỗi bước, số sỏi giảm đi 1 và số túi tăng lên 1, suy ra tổng số sỏi và túi không thay đổi sau mỗi bước, tổng này là 2021.

Giả sử sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi, khi đó tổng số sỏi và túi phải chia hết cho 3. Do 2021 không chia hết cho 3 nên mâu thuẫn, suy ra giả sử sai.

Vậy không thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi sau một số bước.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(Nguyên GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định) Giới thiệu

THƯỚC GOLOMB VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

HOÀNG ĐỨC TÂN (*Hà Nội*)

1. Giới thiệu

Thước Golomb là tập hợp các số nguyên (vạch) với đặc tính là nếu một khoảng cách có thể được đo bằng các vạch này thì nó được thực hiện theo một cách duy nhất. Thước này mang tên của Giáo sư *Solomon Golomb*, người Mỹ là một trong những người đầu tiên nghiên cứu mối liên quan cấu trúc của chúng với lý thuyết tổ hợp, lý thuyết mã hóa và truyền thông.

Định nghĩa 1. *Tập hợp G gồm các số nguyên $a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p$ được gọi là* ***thước Golomb*** *nếu với mỗi cặp số nguyên khác nhau, giả sử $a_i < a_j$ và $a_m < a_n$, thì ta luôn có $a_j - a_i \neq a_n - a_m$.*

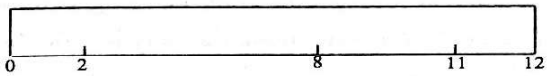
Kích thước của G được xác định là p (số lượng vạch trong G). Độ dài của G được xác định là $a_p - a_1$ (khoảng cách lớn nhất có thể được đo bằng cách sử dụng các vạch trong G). Lưu ý rằng khoảng cách giữa hai vạch bất kỳ trên thước là khác với khoảng cách giữa hai vạch khác của thước. Bất kỳ thước nào có đặc điểm này đều được gọi là *"Golomb"*.

Solomon Golomb
(1932-2016)

Rõ ràng là chúng ta có thể tịnh tiến các tập hợp này: nếu $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ là một thước Golomb thì $\{a_1 + b, a_2 + b, \ldots, a_p + b\}$ cũng là một thước Golomb. Điều đó cho thấy sự lựa chọn của a_1 không quan trọng, vì thế nó thường được coi là 0. Ta dễ thấy rằng nếu $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ là một thước Golomb, thì phép phản xạ của G xung quanh trung điểm $(a_1 + a_p)/2$ cũng là một thước Golomb.

Thước Golomb dùng để làm gì?

Thước Golomb được cho là đã được *W. Babcock* "khám phá" vào năm 1953 [1]. Thước Golomb có nhiều ứng dụng khác nhau, bao gồm thiên văn học vô tuyến và lý thuyết thông tin. Ứng dụng được biết đến nhiều nhất là một ứng dụng vô tuyến điện tử.



Hình 1. Một thước Golomb có năm vạch.

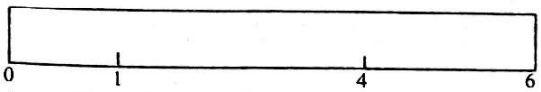
Kính thiên văn vô tuyến (ăng-ten) được đặt trong một mảng tuyến tính. Đối với mỗi cặp ăng-ten này, các tín hiệu nhận được sẽ được trừ cho nhau và sau đó có thể đưa ra suy luận về vị trí của nguồn. Những suy luận này có thể được thực hiện chính xác hơn nhiều nếu tất cả các khoảng cách giữa các ăng-ten là bội số của cùng một độ dài chung và nhiều cặp với khoảng cách khác nhau có sẵn giữa chúng và có thể được sử dụng. Bài toán tối đa hóa số khoảng cách khác nhau giữa các cặp, đồng thời giảm thiểu số lượng ăng-ten và độ dài của mảng, đã được *Solomon W. Golomb* nghiên cứu đầu tiên [10].

Trong lý thuyết thông tin, thước Golomb thường được sử dụng để phát hiện và sửa lỗi. Các thước Golomb có cùng độ dài được sử dụng để tạo ra các mã tự trực giao, những mã không có sự khác biệt chung. Các mã như vậy cho phép kiểm tra lỗi dễ dàng hơn vì phần dư thừa giữa các mã sẽ hiển thị dưới dạng lỗi và sau đó có thể được gửi lại hoặc sửa chữa [11].

2. Thước Golomb hoàn hảo

Lưu ý rằng thước Golomb $\{0,1,4,6\}$ có thêm một đặc tính là nó có thể đo được mọi khoảng cách nguyên từ 1 đến 6. Chúng ta gọi một thước như vậy là *hoàn hảo*.

Định nghĩa 2. *Một thước Golomb G có độ dài N được gọi là* ***thước Golomb hoàn hảo*** *nếu mọi số nguyên $d\,(1 \le d \le N)$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng $d = a - a_0$, với a, a_0 nào đó $\in G$.*



Hình 2. Một thước Golomb hoàn hảo đo được tất cả các khoảng cách từ 1 đến 6

Vì G là thước Golomb, nên biểu diễn ở trên của mỗi d là duy nhất. Thật không may, có rất ít thước Golomb hoàn hảo. Chính *Golomb* đã chứng minh được định lý sau.

Định lý (Golomb). *Cùng với các phép tịnh tiến và phép phản xạ của chúng xung quanh điểm giữa, các thước Golomb hoàn hảo duy nhất là* $\{0\},\{0,1\},\{0,1,3\}$ *và* $\{0,1,4,6\}$.

Nói cách khác, *không tồn tại thước Golomb hoàn hảo có nhiều hơn 4 vạch*. Có lẽ do cách chứng minh của *Golomb* là không đơn giản, nên ông chưa bao giờ công bố định lý của mình. Sau đây là một chứng minh đơn giản của định lý được thực hiện bởi *Alperin R. C.*

Chứng minh. Nếu G là một thước Golomb hoàn hảo có kích thước p và chiều dài N, thì do có N khoảng cách cần đo và số cặp điểm khác nhau của các điểm này là $\binom{p}{2}$, nên ta phải có $N = p(p-1)/2$ vì vậy N là một số tam giác. Các số tam giác nhỏ hơn 10 là 0, 1, 3, 6 tương ứng với các thước được ghi trong định lý.

Giả sử rằng G là một thước Golomb hoàn hảo có độ dài $N > 9$ và ta sẽ tìm kiếm mâu thuẫn. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả định rằng a_1, số nhỏ nhất trong G, bằng 0 và do đó số lớn nhất là $a_p = N$. Theo giả thuyết, mọi số $1 \le d \le N$ đều có thể *nhận ra được* duy nhất là hiệu của hai vạch trong G. Vì N có thể nhận ra được, nên 0 và N phải thuộc G. Vì $N-1$ có thể nhận ra được nên 1 hoặc $N-1$ thuộc G. Bằng cách phản xạ G xung quanh $N/2$, chúng ta có thể giả sử rằng $1 \in G$. Tiếp theo, vì $N > 3$, $N-2$ phải nhận ra được. Vì $N-2 > 1$ nên G phải chứa một điểm khác.

Các cặp có thể nhận ra được $N-2$ là $\{2,N\},\{1,N-1\},\{0,N-2\}$. Hai phần đầu tiên tạo ra sự nhân đôi: $1-0 = 2-1$ và $1-0 = N-(N-1)$. Khả năng thứ ba là khả năng duy nhất, vì vậy G chứa $N-2$ cũng như $0,1,N$. Các khoảng cách nhận ra được là 1, 2, $N-3$, $N-2$, $N-1$ và N.

Vì $N-4 \notin \{1,2\}$ nên chúng ta cần một trong các cặp $\{0,N-4\}$, $\{1,N-3\}$, $\{2,N-2\}$, $\{3,N-1\}$, $\{4,N\}$ để nhận ra được $N-4$. Tất cả trừ trường hợp cuối cùng tạo ra khoảng cách đã nhận ra được:

$$(N-2)-(N-4) = N-(N-2),$$

$$1-0 = (N-2)-(N-3),\ 2-0 = N-(N-2),$$

$$1-0 = N-(N-1).$$

Trường hợp cuối cùng vượt qua kiểm tra, vì vậy G chứa $0,1,4,N-2$ và N. Các khoảng cách có thể nhận ra được của G là:

1, 2, 3, 4, $N-6$, $N-4$, $N-3$, $N-2$, $N-1$ và N.

Cuối cùng, hãy xét khoảng cách $N-5$. Vì $N-5 \notin \{1,2,3,4\}$ và $N > 9$ nên khoảng cách này không thể nhận ra được. Các cặp có thể nhận ra được khoảng cách $N-5$ là

$$\{0,N-5\},\{1,N-4\},\{2,N-3\},\{3,N-2\},\{4,N-1\},\{5,N\}.$$

Người đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng mỗi trường hợp này đều dẫn đến sự trùng lặp. Sự mâu thuẫn này cho thấy rằng $N < 9$ và các cấu trúc trên của các thước Golomb hoàn hảo được khẳng định bởi định lý. Đpcm.

3. Những thước Golomb tối ưu và hàm $G(n)$

Do những thước Golomb hoàn hảo về cơ bản là không tồn tại, nên người ta tìm kiếm những thước ***"gần như hoàn hảo"***. Nói một cách đơn giản, với độ dài N, người ta cố gắng đặt càng nhiều điểm trong khoảng $[0,N]$ càng tốt để tập kết quả tạo thành một thước Golomb. Ngoài ra, với kích thước p của thước (số vạch), người ta cố gắng xây dựng một thước Golomb có độ dài ngắn nhất có thể (là N) với p vạch. Những thước như vậy được gọi là Thước ***Golomb tối ưu***.

Định nghĩa 3. *Với mọi số nguyên dương p, gọi* $G(p)$ *là độ dài ngắn nhất có thể của thước Golomb có p vạch.*

Một thước Golomb có p vạch được gọi là ***thước Golomb tối ưu*** nếu độ dài của nó là $G(p)$.

Trong [4] *Dimitromanolakis* đã thảo luận rất chi tiết về những thước Golomb tối ưu. Bảng sau đây chứa các ví dụ về tất cả các thước Golomb đã biết lên đến 25 vạch (và năm chúng được phát hiện đầu tiên).

0,1 (*Babcock* 1952)

0,1,3 (*Babcock* 1952)

0,1,4,6 (*Babcock* 1952)

0,1,4,9,11 (*Babcock* 1952)

0,1,4,10,12,17 (*Babcock* 1952)

0,1,4,10,18,23,25 (*Babcock* 1952)

0,1,4,9,15,22,32,34 (*Babcock* 1952)

0,3,9,17,19,32,39,43,44 (*Mixon* 1972)

0,1,6,10,23,26,34,41,53,55 (*Robinson*, *Bernstein* 1967)

0,1,4,13,28,33,47,54,64,70,72 (*Robinson*, *Bernstein* 1967)

0,2,6,24,29,40,43,55,68,75,76,85 (*Robinson* 1983)

0,7,8,17,21,36,47,63,69,81,101,104,106 (*Robinson* & *Bernstein* 1967)

0,5,28,38,41,49,50,68,75,92,107,121,123,127 (*Shearer* 1990)

0,6,7,15,28,40,51,75,89,92,94,121,131,147,151 (*Shearer* 1990)

0,1,4,11,26,32,56,68,76,115,117,134,150,163,168,177 (*Shearer* 1990)

0,5,7,17,52,56,67,80,81,100,122,138,159,165,168,191,199 (*Silbert* 1993)

0,2,10,22,53,56,82,83,89,98,130,148,153,167,188, 192,205,216 (*Silbert* 1993)

0,4, 13,15,42,56, 59, 77, 93, 116, 126, 138, 146, 174, 214, 221, 240, 245, 246 (*Rankin* 1995)

0, 24, 30, 43, 55, 71, 75, 89, 104, 125, 127, 162, 167, 189, 206, 215, 272, 275,282,283 (*G&V* 1997)

0, 4,23,37,40,48, 68, 78, 138, 147, 154, 189, 204, 238, 250, 251, 256, 277, 309,331,333 (*G&V* 1998)

0,1,9,14,43,70,106,122,124,128,159,179,204,223,253, 263, 270, 291,330,341,353,356 (distributed.net 1999)

0,6,22,24,43,56,95,126,137,146,172,173,201,213, 258,273, 281, 306, 311, 355, 365, 369, 372

0,9,33,37,38,97,122,129,140,142,152,191,205,208,252, 278, 286, 326, 332,353,368,384,403,425

0,12,29,39,72,91,146,157,160,161,166,191,207,214,258,290, 316,354,372,394,396,431,459,467,480

Các *thước Golomb tối ưu* có từ 2 đến 24 vạch.

Lưu ý: Các thước có từ 20 đến 22 vạch được tìm thấy bằng máy tính do nỗ lực của *Mark Garry* và *David Vanderschel*. Đối với những thước có 23, 24 và 25 vạch, được tìm thấy trên mạng máy tính distributed.net. Kỷ lục hiện tại là $G(26)=492$ và thước Golomb tối ưu tương ứng có các vạch là:

0, 1, 33, 83, 104, 110, 124, 163, 185, 200, 203, 249, 251, 258, 314, 318, 343, 356, 386, 430, 440, 456, 464, 475, 487, 492.

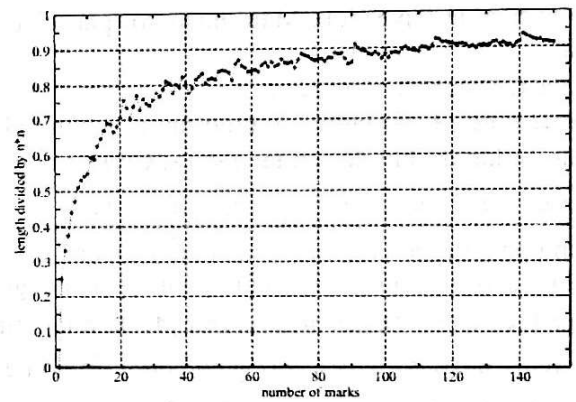
Việc tìm kiếm thước Golomb G(26) này đã kéo dài vài năm và thậm chí cho tới nay người ta vẫn chưa biết thước Golomb này có phải là duy nhất hay không [13, 14].

Một số giới hạn của $G(n)$

Điều thú vị là chúng ta chưa biết nhiều về về hàm $G(n)$. Thực tế, hầu hết các nghiên cứu gần đây về tập thước Golomb đều nhằm xác định giới hạn của hàm $G(n)$, mở rộng các giá trị đã biết của nó, cũng như tìm ra các tập thước mới, gần tối ưu đối với các n lớn.

1. $G(n) \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$ Điều này là dễ thấy trong phân tích ở trên về thước Golomb hoàn hảo.

2. $G(n) > G(n-1)$ Nói cách khác, $G(n)$ là một hàm đơn điệu ngặt. Điều này được thấy bằng cách xóa vạch cao nhất khỏi thước tương ứng với $G(n)$. Thước kết quả sẽ ngắn hơn và nó vẫn là Golomb vì chúng ta không thêm khoảng cách mới.



Hình 3. Các giá trị nhỏ nhất đã biết của G(n) chia cho n^2

Bằng thực nghiệm, người ta thấy rằng: $G(n) < n^2$ và họ phỏng đoán rằng bất đẳng thức này luôn đúng. Tất cả các giá trị nhỏ nhất đã biết của $G(n)$ đều nhỏ hơn n^2 và Hình 3 chỉ ra hàm có xu hướng tiến tới n^2 khi n càng lớn [4]. Phỏng đoán này cho tới nay vẫn chưa được chứng minh.

4. Một cải tiến cho giới hạn dưới

Thật ra thước Golomb đã được các nhà toán học nghiên cứu rộng rãi trong nhiều thập kỷ trước *Babcock* dưới cái tên ***tập Sidon***. Bài toán tập Sidon lần đầu tiên được đề xuất bởi *Simon Sidon* vào năm 1932. Sau đó *Paul Erdos* đã tiếp thu vấn đề và công bố các bài báo về chủ đề này vào năm 1934. Kể từ đó có nhiều kết quả đã được chứng minh.

Định nghĩa 4. *Tập hợp Sidon là tập hợp con $A=\{a_1,a_2,...,a_N\}$ của các số tự nhiên trong đó*

$i < j \to a_i < a_j$ với thuộc tính là tổng của hai phần tử nào đó trong tập hợp A là khác với tổng của hai phần tử khác trong tập A.

$F_2(n)$ là một hàm cho ta số lượng lớn nhất các số nguyên có thể được chọn từ n số đầu tiên để tạo thành một tập hợp Sidon.

Từ định nghĩa của tập Sidon và $F_2(n)$, ta thấy rằng phải có một mối quan hệ nào đó giữa chúng với nhau. Thật vậy, Apostolos Dimitromanolakis đã chứng minh sự tương đương của cả hai bài toán này vào năm 2002.

Định lý. *A là một tập Sidon khi và chỉ khi A là một thước Golomb.*

Chứng minh. *Tập Sidon ⇒ thước Golomb.*

Giả sử rằng A là tập Sidon nhưng không phải là thước Golomb thì khi đó tồn tại $i < j < k < m$ trong đó $a_j - a_i = a_m - a_k \Rightarrow a_j + a_k = a_m + a_i$ suy ra A không phải là tập Sidon. Mâu thuẫn với giả thiết A là tập Sidon. Đpcm

Thước Golomb ⇒ tập Sidon.

Giả sử rằng A là thước Golomb nhưng không phải là tập Sidon thì khi đó tồn tại $i < j < k < m$ trong đó $a_j + a_k = a_m + a_i \Rightarrow a_j - a_i = a_m - a_k$ suy ra A không phải thước Golomb. Mâu thuẫn. Đpcm.

Bằng cách sử dụng các mối quan hệ khác giữa $F_2(n)$ và G(n), *Dimitromanolakis* [4] đã dùng định lý này để nhận được ước lượng cận dưới tốt hơn của $G(n)$ là: $G(n) > n^2 - 2n\sqrt{n} + \sqrt{n} - 2$.

5. Tìm kiếm Thước Golomb tối ưu và gần tối ưu

Sự phức tạp của việc tìm kiếm một thước Golomb tối ưu vẫn ưa được biết. Tuy nhiên, nó được cho là NP-khó (là một tập hợp các bài toán trong lý thuyết độ đo phức tạp tính toán "ít nhất là khó ngang bất kỳ bài toán nào trong NP") và trên thực tế, bằng cách sử dụng các phương pháp tốt nhất, việc tìm ra một chiếc thước tối ưu có kích thước $n+1$ sẽ mất khoảng mười lần thời gian cần thiết để tìm một chiếc thước có kích thước n. Do khoảng thời gian khổng lồ này mà việc tạo ra $G(n)$ mới chỉ được biết đến với $n \le 26$.

Điều này khiến các nhà toán học phải tìm kiếm các cách xây dựng mới để tìm ra những thước Golomb gần như tối ưu.

Sử dụng kết quả từ lý thuyết số, các nhà toán học có thể tạo ra các thước gần tối ưu trong thời gian đa thức cho các thước có số vạch là một số nguyên tố. *Paul Erdos* [5] xây dựng thước gần tối ưu sau đây vào năm 1944 khi ông phát hiện chúng có liên quan đến tập Sidon.

Một cách xây dựng đơn giản cho thước Golomb có độ dài n^2: Với mọi số nguyên tố p lẻ, dãy số sau tạo thành thước Golomb

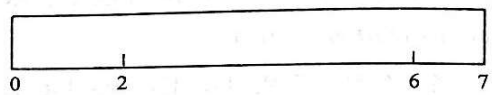
$$2pk + (k^2 \bmod p),\ k \in [0, p-1].$$

Sử dụng cách xây dựng hiệu quả này đối với các số nguyên tố *Dimitromanolakis* và cộng sự đã tạo ra các thước gần tối ưu đối với n không phải là số nguyên tố.

Thước Golomb Mô-đun

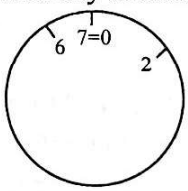
Thước Golomb mô-đun, đôi khi còn được gọi là Thước Golomb tròn, là một trường hợp cụ thể của Thước Golomb có cấu tạo gần như tối ưu.

Định nghĩa 5. *Tập hợp k phần dư $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sao cho các hiệu $a_i - a_j\ (i \ne j)$ đều là $\bmod k$ khác nhau được gọi là Thước Golomb Mô-đun.*



Hình 4. Thước Golomb mô-đun đo được các khoảng cách 1, 2, 3, 4, 6, 7.

Lưu ý rằng thước này chỉ có 3 vạch. Một cách tương đương để xem xét điều này là như một vòng tròn.



Hình 5. Cùng một thước đo mô-đun được xem như một hình tròn.

Thước Golomb mô-đun tương đương với một cấu trúc toán học khác được gọi là ***"tập các khoảng cách hoàn hảo"***. Có rất nhiều cấu trúc tốt cho các tập hợp khoảng cách hoàn hảo đối với một số nguyên tố.

Một số cấu trúc

Của *Singer*: $p+1$ vạch có độ dài $p^2 + (p+1)$ [9]

Của *Bose*: p vạch có độ dài $p^2 - 1$ [2]

Của *Ruzka*: p vạch có độ dài $p^2 - p$. [8]

Bằng một lập luận đơn giản chúng ta dễ thấy rằng thước có n vạch phải có $n^2 - (n+1)$ khoảng cách khác nhau, điều dẫn đến là cấu trúc của *Ruzka gần như tối ưu*. Thực tế, cấu trúc xây dựng của ông được sử dụng cho những thước Golomb thông thường trong nỗ lực tìm kiếm những thước gần như tối ưu.

☞

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W.C. Babcock, *Intermodulation interference in radio systems*, Bell Systems Technical Journal (1953), 63-73

[2] R. C. Bose, *An affine analogue of Singer's Theorem*, J. Ind. Math. Society, 6(1942), p. 1-15

[3] E.J. Blum, F. Biraud, and J.C. Ribes, *On optimal synthetic linear arrays with applications to radioastronomy*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 22 (1974), 108-109.

[4] A Dimitromanolakis, *Analysis of the Golomb Ruler and the Sidon Set Problems*, and Determination of Large, Near-Optimal Golomb Rulers, Tecnical University of Crete, Department of Electronic and Computer Engineering, 2002.

[5] P. Erdos and A. Renyi, *Additive properties of random sequences of positive integers*, Acta Arithmetica 6 (1960), 83-100.

[6] William T. Rankin, *Optimal Golomb rulers: An exhaustive parrell search implementation*, Master's thesis, Duke University, department of Electrical Engineering, 1993.

[7] J. Robinson and A. Bernstein, *A class of binary recurrent codes with limited error propagation*, IEEE Transactions on Information Theory (1967), 106-113.

[8] I. Z. Ruzsa, *Solving a linear equation in a set of intgers I*, Acta Arithmetica, 65(1993), p. 259-282.

[9] J. Singer, *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory*, Transactions American Mathematical Society, 43(1938), p. 377-385.

[10] A . K . Dewdney, The Armchair Universe, W. H. Freeman, New York, 1988.

[11] Martin Gardner, *Wheels of Life*, W. H. Freeman, New York, 1988.

[12] Joseph A. Gallian, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, The electronic journal of Combinatorics (2019).

[13] James B . Shearer, *Golomb rulers webpage*, http://www.research.ibm.com/people/s/shearer/grule.html.

[14] Eric W. Weisstein, *Golomb Ruler*, MathWorld: A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/GolombRuler.html.

****

MỘT PHƯƠNG PHÁP ... *(Tiếp theo trang 5)*

Xét ΔHAM có $KH = KA; IH = IM \Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\Delta HAM \Rightarrow IK // AM$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm *K*, *E*, *I* thẳng hàng hay *EF* đi qua trung điểm *I* của cạnh *BC*.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác *ABC*, đường trung tuyến *AM*. Qua điểm *D* thuộc cạnh *BC*, vẽ đường thẳng song song với *AM*, nó cắt *AB* và *AC* theo thứ tự tại *E* và *F*. Qua *A* vẽ đường thẳng song song với *BC*, cắt *EF* ở *K*. Chứng minh rằng *K* là trung điểm của *EF*.

Bài 2. Cho tam giác *ABC* nhọn, ba đường cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H*. Qua *D* kẻ đường thẳng song song với *EF*, đường thẳng này cắt các đường thẳng *AB*, *HC* lần lượt tại *P* và *Q*. Chứng minh rằng $DP = DQ$.

Bài 3. Cho đường tròn (*O*), đường kính *MN* vuông góc với dây cung *AB*. Gọi *I* là điểm thuộc dây *AB* ($IA < IB$). Các tia *MI*, *NI* cắt (*O*) theo thứ tự ở *C*, *D*. Gọi hình chiếu của *C* trên các đường thẳng *AD*, *AB*, *BD* theo thứ tự là *E*, *F*, *H*. Chứng minh rằng *F* là trung điểm của *EH*.

Bài 4. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với *BC*, *AB*, *AC* theo thứ tự ở *D*, *E*, *F*.Qua *E* kẻ đường thẳng song song với *BC* cắt *AD* và *DF* theo thứ tự ở *M* và *N*. Chứng minh rằng *M* là trung điểm của *EN*

Bài 5. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Qua *B* kẻ đường thẳng cắt đường tròn tâm *C* bán kính *CA* tại *D* và *E* (*D* là điểm nằm trong tam giác *ABC*). Trên cạnh *AB* lấy điểm *M* sao cho $\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\widehat{ACD}$. Gọi *N* là giao điểm của *MD* và *AH*. Chứng minh rằng *D* là trung điểm của *MN*.

Bài 6. Cho tam giác *ABC* có các đường cao *BE*, *CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *AH*, *BC*. Gọi *P*, *Q* lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ *N* xuống *BH*, *CH*. Chứng minh rằng *MN* đi qua trung điểm của *PQ*.

Bài 7. Cho tam giác *ABC* và điểm *J* là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc *A* của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với các cạnh *AB*, *AC*, *BC* lần lượt tại *K*, *L*, *M*. Giả sử *LM* cắt *BJ* tại *F*, *KM* cắt *CJ* tại *G*. Gọi *S*, *T* lần lượt là giao điểm của *AF*, *AG* với *BC*. Chứng minh rằng *M* là trung điểm của *ST*.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TRONG THỰC TIỄN

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Lê Lợi, Kon Tum)

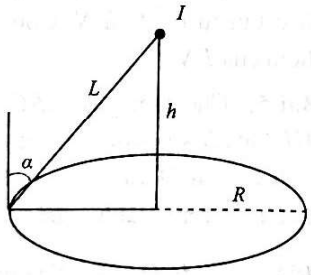
I. Ứng dụng của đạo hàm trong Vật lý

Trong Vật lý và Kỹ thuật nhiều vấn đề khác nhau có thể gặp phải đòi hỏi chúng ta phải ứng dụng toán tối ưu. Trong những bài toán như vậy, người ta thường phải tối ưu một số đại lượng vật lý như quãng đường, vận tốc, thời gian, khối lượng, gia tốc, lực, cường độ dòng điện, độ rọi, ...

Các phương trình ràng buộc có thể tuân theo các định luật và công thức vật lý.

Phương pháp chung để giải quyết các vấn đề tối ưu hóa vẫn giữ nguyên. Phương pháp này được mô tả trên các trang mạng hoặc tài liệu về các vấn đề tối ưu hóa trong Hình học phẳng.

Thí dụ 1. *Một bóng đèn được treo phía trên theo phương thẳng đứng so với tâm của một cái bàn tròn. Với độ cao nào thì mép bàn được chiếu rọi tốt nhất?*



Lời giải. Ta ký hiệu R là bán kính của mặt bàn, h là độ cao treo bóng đèn so với mặt bàn, L là khoảng cách từ bóng đèn đến mép bàn, I là cường độ sáng, α là góc giữa đường thẳng L và pháp tuyến của mặt bàn. Độ rọi ở mép bàn được xác định bởi công thức $E=\dfrac{I}{L^2}\cos\alpha$.

Từ $L^2=h^2+R^2$ và $\cos\alpha=\dfrac{h}{L}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$, độ rọi E có thể được viết dưới dạng hàm $E(h)$:

$$E=E(h)=\frac{I}{h^2+R^2}.\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}=\frac{Ih}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tính đạo hàm: $E'(h)=\left(\dfrac{Ih}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'$

$$=I.\frac{h^2+R^2-3h^2}{(h^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{I(R^2-2h^2)}{(h^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Tìm nghiệm của đạo hàm:

$$E'(h)=0\Rightarrow\frac{I(R^2-2h^2)}{(h^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}=0\Rightarrow\begin{cases}R^2-2h^2=0\\h^2+R^2\neq 0\end{cases}$$

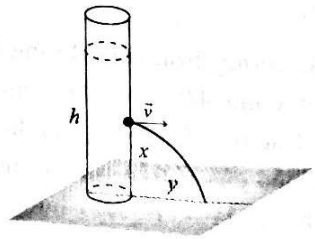
$$\Rightarrow h^2=\frac{R^2}{2}\Rightarrow h=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Khi đi qua điểm $h=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm. Do đó, điểm này là điểm cực đại. Độ chiếu rọi cực đại là $E_{\max}=\dfrac{I\dfrac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\dfrac{R^2}{2}+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{IR}{\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}R^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^{\frac{3}{2}}IR}{2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{2}}R^3}=\frac{2I}{3^{\frac{3}{2}}R^2}=\frac{2I}{\sqrt{27}R^2}.$$

Thí dụ 2. *Một bình chứa đầy chất lỏng có chiều cao h nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Bình có một lỗ mở bên, qua đó chất lỏng có thể chảy ra ngoài. Tại vị trí nào của lỗ mở thì tia chất lỏng bắn ra xa nhất?*

Lời giải.



Giả sử rằng tốc độ dòng chảy của chất lỏng qua lỗ được mô tả bởi Định luật Torricelli: $v=\sqrt{2g(h-x)}$, trong đó x là chiều cao của lỗ so với bề mặt nằm ngang, $h-x$ là độ sâu của cột chất lỏng tính đến lỗ mở, g là gia tốc trọng trường.

Tính tầm bay xa y giả sử rằng chuyển động của chất lỏng được mô tả bằng các phương trình giống như chuyển động của một chất điểm.

Trong trường hợp này, thời gian mà chất lỏng chảy ra từ lỗ mở đến bề mặt đất được cho bằng

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g}},\text{ và tầm bay xa là } y=vt=v\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Thay biểu thức cho vận tốc v từ Định luật Torricelli: $y=y(x)=\sqrt{2g(h-x)}\sqrt{\frac{2x}{g}}$

$$=2\sqrt{\frac{gx(h-x)}{g}}=2\sqrt{hx-x^2}.$$

Ta thu được một biểu thức cho tầm bay xa y phụ thuộc vào độ cao của lỗ mở x. Ta khảo sát hàm cho các điểm cực trị: $y'(x)=(2\sqrt{hx-x^2})'$

$$=2.\frac{1}{2\sqrt{hx-x^2}}.(hx-x^2)'=\frac{h-2x}{\sqrt{hx-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h-2x=0\\h-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{h}{2}.$$

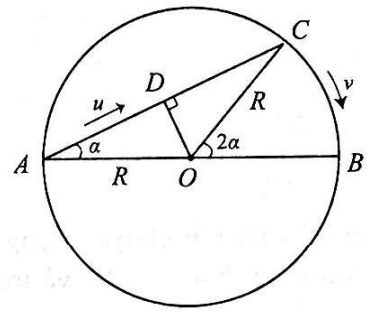
Rõ ràng đây là một điểm cực đại, vì khi đi qua giá trị này, đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Vì vậy, lỗ mở cho chất lỏng chảy phải được đặt chính xác ở giữa cột chất lỏng. Trong trường hợp này, tia chất lỏng bắn ra xa nhất và bằng chiều cao của cột chất lỏng: $y_{\max}=2\sqrt{h.\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}\right)^2}$

$$=2\sqrt{\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{4}}=2\sqrt{\frac{h^2}{4}}=\frac{2h}{2}=h.$$

Thí dụ 3. *Một du khách muốn băng qua một cái hồ hình tròn từ điểm A đến điểm B. Điều này có thể được thực hiện bằng cách chèo thuyền hoặc đi bộ dọc theo đường bờ hồ. Xác định đường đi nhanh nhất, nếu vận tốc thuyền là u và vận tốc đi bộ là v.*

Lời giải. Giả sử bán kính của hồ là R. Hãy xem xét một tuyến đường kết hợp tùy ý khi một phần của con đường chạy ngang qua hồ và phần còn lại dọc theo bờ hồ. Quãng đường chuyển động được xác định bởi góc nội tiếp $\alpha=\widehat{CAB}$.



Góc ở tâm $\widehat{COB}=2\alpha$. Chiều dài của phần con đường băng qua hồ là

$$AC=2AD=2R\cos\alpha,$$

và chiều dài của phần con đường dọc theo bờ hồ là $|CB|=2\alpha R$,

ở đây góc α được đo bằng radian và thay đổi trong miền $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Khi đó tổng thời gian của chuyển động là:

$$t=t(\alpha)=\frac{AC}{u}+\frac{CB}{v}=\frac{2R\cos\alpha}{u}+\frac{2\alpha R}{v}$$

$$=2R\left(\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\alpha}{v}\right).$$

Lấy đạo hàm, ta có: $t'(\alpha)=\left[2R\left(\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\alpha}{v}\right)\right]'$

$$=2R\left(-\frac{\sin\alpha}{u}+\frac{1}{v}\right)=2R\left(\frac{1}{v}-\frac{\sin\alpha}{u}\right).$$

Đạo hàm bằng 0 khi $\frac{1}{v}-\frac{\sin\alpha}{u}=0\Rightarrow\sin\alpha=\frac{u}{v}$

$$\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{u}{v}.$$

Ta tìm cực trị bằng cách sử dụng đạo hàm cấp 2:

$$t''(\alpha)=\left[2R\left(\frac{1}{v}-\frac{\sin\alpha}{u}\right)\right]'=-\frac{2R\cos\alpha}{u}<0.$$

Vì đạo hàm cấp 2 luôn âm với $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, nên điểm trên là điểm cực đại của hàm $t(\alpha)$, không thỏa mãn. Rõ ràng hàm $t(\alpha)$ là hàm lồi trong

khoảng thời gian $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và do đó, đạt giá trị cực tiểu tại một trong các điểm mút của khoảng thời gian. Tính các giá trị của $t(\alpha)$ tại $\alpha=0$ và $\alpha=\frac{\pi}{2}$: $t(0)=2R\left(\frac{\cos 0}{u}+\frac{0}{v}\right)=\frac{2R}{u}$,

$$t\left(\frac{\pi}{2}\right)=2R\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{u}+\frac{\pi}{2v}\right)=\frac{\pi R}{v}.$$

Trường hợp $\alpha=0$ ứng với chuyển động trên mặt nước dọc theo đường thẳng AOB, và trường hợp $\alpha=\frac{\pi}{2}$ mô tả chuyển động đi bộ dọc theo hình bán nguyệt ACB. Tùy chọn nào trong số các tùy chọn này có thời gian ít nhất? Điều này phụ thuộc vào mối quan hệ giữa các vận tốc u và v.

Nếu $\frac{u}{v}>\frac{2}{\pi}$, sau đó chèo thuyền (với vận tốc u) sẽ mất ít thời gian hơn so với đi bộ trên mặt đất (với tốc độ v). Và ngược lại, nếu $\frac{u}{v}<\frac{2}{\pi}$, sự di chuyển dọc theo đường bờ hồ sẽ nhanh hơn.

Trong trường hợp các tỷ lệ này bằng nhau, cả hai tuyến về thời gian trôi qua sẽ tương đương nhau.

II. Ứng dụng của đạo hàm trong Kinh tế

Trong kinh doanh và kinh tế rất nhiều vấn đề đòi hỏi chúng ta phải ứng dụng toán tối ưu. Ví dụ, trong bất kỳ hoạt động kinh doanh sản xuất nào, lợi nhuận có thể được biểu thị dưới dạng hàm số của số lượng sản phẩm bán ra. Chúng ta có thể tối đa hóa lợi nhuận đơn giản bằng cách tìm giá trị cực đại của hàm đó. Những vấn đề như vậy có thể được giải quyết bằng cách sử dụng phép tính vi phân.

Thí dụ 4. *Một công ty sản xuất và bán 1000 sản phẩm mỗi tháng với giá 2000 đô la. Công ty nhận thấy rằng cứ mỗi 50 đô la khấu trừ trên sản phẩm, công ty có thể bán thêm 50 sản phẩm mỗi tháng. Xác định mức giá mà tại đó công ty đạt doanh thu tối đa và tính giá trị tối đa này.*

Lời giải. Gọi x là số lần khấu trừ của 50 đô la từ giá cơ sở 2000 đô la. Theo đó, đơn giá (nếu bán nhiều hơn 1000 sản phẩm mỗi tháng) là $2000-50x$. Tổng lượng sản phẩm đã bán trong tháng là $1000+50x$ sản phẩm. Như vậy, tổng doanh thu được mô tả bằng biểu thức

$$\begin{aligned}R(x)&=(2000-50x)(1000+50x)\\&=2000000-50000x+100000x-2500x^2\\&=-2500x^2+50000x+2000000 \text{ (đô la).}\end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của hàm $R(x)$, chúng ta tìm được điểm cực trị:

$$\begin{aligned}R'(x)&=(-2500x^2+50000x+2000000)'\\&=-5000x+50000;\end{aligned}$$

$$R'(x)=0\Rightarrow -5000x+50000=0\Rightarrow x=\frac{50000}{5000}=10.$$

Lưu ý rằng đạo hàm cấp hai của hàm $R(x)$ là đại lượng âm:

$$R''(x)=(-5000x+50000)'=-5000<0.$$

Vì thế, $x=10$ là điểm cực đại. Do đó, doanh thu tối đa khi số lần khấu trừ là $x=10$. Đơn giá trong trường hợp này là:

$$2000-50.10=1500 \text{ (đô la),}$$

và doanh số bán hàng mỗi tháng là:

$$1000+50.10=1500 \text{ (sản phẩm).}$$

Theo đó, doanh thu tối đa của công ty là:

$$R_{\max}=1500.1500=2.250.000 \text{ (đô la).}$$

Thí dụ 5. *Khi một con tàu ra khơi, chi phí nhiên liệu tỷ lệ với bình phương tốc độ (dặm/giờ) của nó. Bên cạnh đó, còn có chi phí cố định (phần chi phí không phụ thuộc vào tốc độ) bằng p (đô la/giờ). Ở tốc độ nào thì tổng chi phí trên một dặm sẽ là thấp nhất?*

Lời giải. Theo mô tả vấn đề, chi phí biến đổi (phần chi phí phụ thuộc vào tốc độ) được biểu thị như sau: $q=kv^2$, ở đây, k là một hệ số tương xứng. Như vậy, tổng chi phí mỗi giờ được biểu thị bằng công thức: $C=p+q=p+kv^2$.

Trong một giờ, tàu đi được quãng đường bằng v (dặm). Do đó, chi phí mỗi dặm được xác định bởi

$$C_1=C_1(v)=\frac{C}{v}=\frac{p+kv^2}{v}=\frac{p}{v}+kv.$$

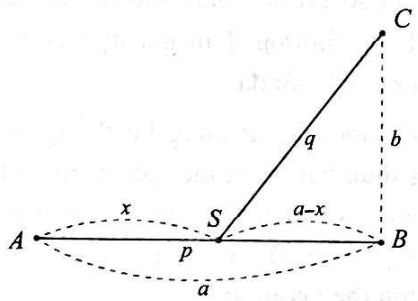
Như vậy, chi phí mỗi dặm là một hàm của tốc độ v. Chúng ta cần tìm các giá trị cực trị của nó:

$$C_1'(v)=\left(\frac{p}{v}+kv\right)'=-\frac{p}{v^2}+k=\frac{kv^2-p}{v^2};$$

$$C_1'(v)=0\Rightarrow\frac{kv^2-p}{v^2}=0\Rightarrow\begin{cases}kv^2-p=0\\v^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{p}{k}}.$$

Với giá trị này của v, hàm số $C_1(v)$ đạt cực tiểu khi đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm này. Do đó, ở tốc độ này, chi phí cho mỗi dặm sẽ là thấp nhất. Giá trị cực tiểu của chi phí mỗi dặm bằng $C_1=\frac{p}{v}+kv=p:\sqrt{\frac{p}{k}}+k.\sqrt{\frac{p}{k}}=2\sqrt{kp}$.

Thí dụ 6. *Hai thành phố A và B cách nhau a dặm và được nối với nhau bằng một tuyến đường sắt. Để có thể vận chuyển hàng hóa từ thành phố A đến thành phố C cách tuyến đường sắt b dặm thì cần phải xây dựng một đường cao tốc tiếp giáp với tuyến đường sắt và đi đến C (hình vẽ). Tìm điểm S trên đường sắt mà tại đó đường cao tốc nên được xây dựng để việc vận chuyển hàng hóa tiết kiệm chi phí nhất. Biết chi phí vận chuyển là p đô la mỗi tấn/dặm bằng đường sắt và q đô la mỗi tấn/dặm bằng xe tải.*



Lời giải. Gọi x là khoảng cách từ thành phố A đến điểm phân nhánh S vào đường cao tốc SC. Khi đó, chi phí vận chuyển cho 1 tấn hàng hóa trên đường sắt AS là px. Áp dụng định lý Pythagore, ta có chiều dài của đoạn đường cao tốc SC là:

$$SC=\sqrt{(a-x)^2+b^2}.$$

Theo đó, chi phí vận chuyển trên đoạn đường cao tốc SC bằng $q\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.

Do đó, tổng chi phí vận chuyển cho 1 tấn hàng hóa từ điểm A đến điểm C được mô tả bởi hàm

$$Q=Q(x)=px+q\sqrt{(a-x)^2+b^2}.$$

Để khảo sát các giá trị cực trị của hàm $Q(x)$, chúng ta tìm đạo hàm của nó:

$$Q'(x)=\left(px+q\sqrt{(a-x)^2+b^2}\right)'$$

$$=p+\frac{q.(-2)(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2+b^2}}=p-\frac{q(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}.$$

Cho đạo hàm bằng 0, chúng ta xác định giá trị của điểm tới hạn x:

$$Q'x)=0\Rightarrow p-\frac{q(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}=0$$

$$\Rightarrow p\sqrt{(a-x)^2+b^2}=q(a-x)$$

$$\Rightarrow p^2(a-x)^2+p^2b^2=q^2(a-x)^2$$

$$\Rightarrow(q^2-p^2)(a-x)^2=p^2b^2\Rightarrow a-x=\frac{pb}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\Rightarrow x=a-\frac{pb}{\sqrt{q^2-p^2}}=a-\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}}.$$

Hãy xét xem dấu của đạo hàm tại điểm tới hạn thay đổi như thế nào. Trong biểu thức của đạo hàm $Q'(x)=p-\frac{q(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$, tử số của phân số tăng nhanh hơn mẫu số khi tăng hoặc giảm x. Do đó, đạo hàm sẽ âm ở vùng lân cận bên trái và dương ở vùng lân cận bên phải của điểm tới hạn. Do đó, điểm này tương ứng với điểm cực tiểu của hàm $Q(x)$.

Lưu ý rằng lời giải chỉ hợp lý nếu $q>p$, tức là khi chi phí vận chuyển hàng hóa bằng xe tải vượt quá chi phí vận chuyển bằng đường sắt. Tuy nhiên, điều kiện này không phải là ràng buộc duy nhất đối với các giá trị có thể có của p và q. Để xác định miền giá trị của $\frac{q}{p}$, chúng ta cần xét hai trường hợp:

TH1: Nếu $x=0$, ta có: $a-\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}}=0$

$$\Rightarrow\frac{a\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}-b}{\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}}=0\Rightarrow a\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2-1}=b$$

$$\Rightarrow \left(\frac{q}{p}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{q}{p} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}.$$

Tỷ số chi phí vận chuyển $\frac{q}{p}$ này là nhỏ nhất có thể. Với giá trị này của $\frac{q}{p}$, cần phải xây dựng đường cao tốc dọc theo đường chéo AC.

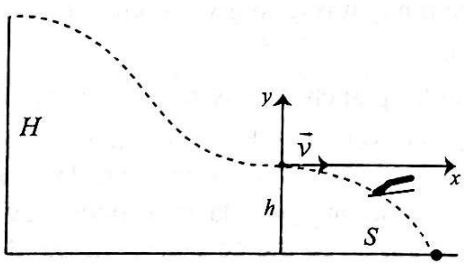
TH2: Nếu $x = a$, ta có:

$$a - \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 - 1}} = a \Rightarrow \frac{q}{p} \to \infty.$$

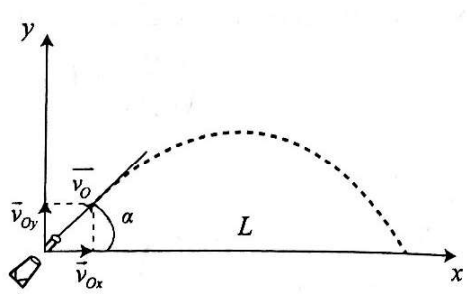
Ở đây, tỷ số $\frac{q}{p}$ dần đến vô cùng. Rõ ràng là trong thực tế, tỷ số này là hữu hạn, tức là điểm phân nhánh tối ưu sẽ luôn nằm trong nửa khoảng $0 \le x < a$.

BÀI TẬP

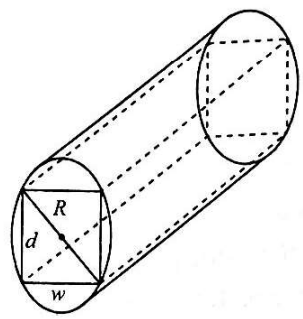
Bài 1. Một vận động viên trượt tuyết sau khi trượt trên đoạn đường dốc có độ cao H so với mặt đất và trượt ra khỏi đường trượt tuyết theo phương ngang (như hình vẽ). Cho ma sát không đáng kể. Tìm độ cao h của đường trượt mà vận động viên trượt tuyết bay được xa nhất.



Bài 2. Tìm vận tốc ban đầu nhỏ nhất của nút chai rượu sâm banh để khi ta mở chai rượu, cái nút bay theo phương ngang một khoảng L(m) (như hình vẽ).



Bài 3. Độ chịu lực của một cái dầm hình chữ nhật tỷ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều sâu d của nó. Tính chiều rộng và chiều sâu của dầm có độ chịu lực nhất mà ta có thể có được khi cắt từ một hình trụ có bán kính R.



Bài 4. Một nhà sản xuất bảng điều khiển trò chơi xác định rằng để bán được x bộ, giá mỗi bộ (tính bằng đô la) được xác định theo hàm cầu ngược sau: $p(x) = 500 - 0,1x$ (đô la/bộ)

Nhà sản xuất cũng xác định rằng chi phí phụ thuộc vào khối lượng sản xuất và bao gồm chi phí cố định 100.000 (đô la) và chi phí biến đổi $100x$, đó là $C(x) = 100000 + 100x$.

Tính giá mỗi bộ để thu được lợi nhuận tối đa?

Bài 5. Một cửa hàng bán bánh nướng với giá 5 đô la mỗi chiếc. Hàm chi phí hàng ngày có dạng

$$C(x) = x + 10 + 0,01x^2,$$

trong đó x là số lượng bánh nướng bán ra trong một ngày thông thường. Tìm giá trị của x để lợi nhuận hàng ngày là tối đa.

Bài 6. Một Quốc gia sử dụng hệ thống thuế lũy tiến. Lượng thuế bao gồm một phần tuyến tính tỷ lệ với thu nhập và một phần phi tuyến phụ thuộc vào thu nhập theo lũy thừa. Tổng số tiền thuế được xác định theo công thức

$$T(W) = aW + (bW + c)^p,$$

trong đó W là thu nhập; p là số mũ, a, b, c là các số dương. Ở mức thu nhập nào thì thuế suất sẽ thấp nhất?

ĐÁP SỐ.

Bài 1. $h = \frac{H}{2}$. **Bài 2.** $v_0 = \sqrt{Lg}$.

Bài 3. $w = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}$, $d = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bài 4. $p(2000) = 300$ (đô la/bộ).

Bài 5. $x = 200$. **Bài 6.** $w = \frac{c}{p - b}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/527 (Lớp 6). Tìm hai số tự nhiên a và b biết tổng kết quả của bốn số: $a + b$, $a - b$, $a.b$, $a : b$ bằng 1575.

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T2/527 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^0$; $\widehat{B}=40^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AB = AM$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{AMN}=40^0$. Tính số đo góc $\widehat{BNC}$.

NGUYỄN VĂN BẢN

(GV THCS xã Thanh Yên, huyện Điện Biên, Điện Biên)

Bài T3/527. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$0 \le x+y \le 6 \text{ và } x-\frac{1}{x^3}=y-\frac{1}{y^3}.$$

PHẠM KIM CHUNG

(GV THPT Đặng Thúc Hứa, Nghệ An)

Bài T4/527. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AH, kẻ tia MN vuông góc với BM, N thuộc AC. Chứng minh rằng $ON // BC$ và $EM = R\cos A$.

TRẦN NGỌC DUY

(GV THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, Quảng Ngãi)

Bài T5/527. Giải phương trình:

$$x^2\sqrt[4]{2-x^4}-x^4+x^3-1=0.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/527. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:

$$8(2-x)(2-y)(2-z) \ge (x+yz)(y+xz)(z+xy).$$

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/527. Tìm tất cả các tam giác ABC có độ dài các cạnh là các số nguyên dương thỏa mãn độ dài cạnh AC bằng độ dài đường phân giác trong góc A.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T8/527. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), I_a, I_b, I_c tương ứng là là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. AI_a cắt (O) tại D khác A. Trên I_bD, I_cD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{ABC}=2\widehat{I_aBE}$, $\widehat{ACB}=2\widehat{I_aCF}$, E, F nằm trong tam giác I_aBC. Chứng minh rằng EF cắt I_bI_c tại một điểm nằm trên (O).

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T9/527. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ với a, b là các số nguyên. Biết rằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ đều là những số nguyên và tập giá trị của hàm số đã cho có chứa đúng 11 số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a^2+b^2$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/527. Với mỗi số nguyên dương n, ta kí hiệu $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n).f(n+1)...f(n+k-1)$ là số chính phương.

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/527. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y)=f(f(x))-yf(x)+f(-y)-2, \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

HỒ THANH LAI

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/527. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) với AD là đường kính của (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc DC, DB. G thuộc EF sao cho $\frac{GF}{GE}=\frac{FB}{CE}$. Chứng minh rằng CG và AF cắt nhau trên (O).

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/527. Một con lắc lò xo nằm ngang gồm vật nặng có khối lượng m = 0,1 kg, lò xo có độ cứng k = 10 N/m, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng ngang là $\mu = 0,1$. Kéo con lắc tới vị trí sao cho lò xo dãn 5 cm rồi thả nhẹ. Xác định khoảng thời gian từ lúc dao động đến khi lò xo không biến dạng lần đầu tiên. Lấy g = 10 m/s^2.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/527. Một đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn AM có điện trở $R = 200\,\Omega$ và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu của đoạn mạch một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U và có tần số thay đổi được. Điều chỉnh tần số để cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại thì thấy điện áp trên đoạn mạch AM lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với cường độ dòng điện. Xác định tổng trở của đoạn mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/527 (For 6th grade). Find natural numbers a and b given that the sum of four numbers $a + b$, $a - b$, $a.b$, $a : b$ is equal to 1575.

Problem T2/527 (For 7th grade). Given triangle ABC with $\widehat{A}=120^0$; $\widehat{B}=40^0$. On the side AC choose the point M such that $AB = AM$. On the opposite ray of AB choose the point N such that $\widehat{AMN}=40^0$. Find the measurement of the angle $\widehat{BNC}$.

Problem T3/527. Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying $0 \le x+y \le 6$ and

$$x-\frac{1}{x^3}=y-\frac{1}{y^3}.$$

Problem T4/527. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle $(O; R)$. The altitudes AD, BE, CF meet at H. Let M be the midpoint of AH. Draw MN perpendicular to BM, N is on AC. Show that $ON // BC$ and $EM = R\cos A$.

Problem T5/527. Solve the equation

$$x^2\sqrt[4]{2-x^4}-x^4+x^3-1=0.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/527. Given real numbers x, y, z such that $x^2+y^2+z^2=3$. Prove that

$$8(2-x)(2-y)(2-z) \ge (x+yz)(y+xz)(z+xy).$$

Problem T7/527. Find all triangles ABC such that the lengths of all sides are positive integers and the length of AC is equal to the length of the interior angle bisector of the angle A.

Problem T8/527. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (O). Let I_a, I_b, I_c ...

(Xem tiếp trang 33)

****

ĐÍNH CHÍNH

Trên TH&TT số 527, tháng 5.2021 trong mục *Đề ra kỳ này* Bài T7/527 đã đăng trùng với Bài T7/525. Xin được giới thiệu Bài T7/527 mới có nội dung:

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn:

$$\begin{cases} A \le B \le C \le 90^0 \\ \dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin B} + \dfrac{2}{\sin C} \ge 6 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C - \cos A \ge \cos(B - C) - \sin B \end{cases}.$$

Chứng minh $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \le \dfrac{13}{8}$.

NGUYỄN VĂN THÔNG

(*GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng*)

Thành thật xin lỗi bạn đọc!

TH&TT

Bài T1/523. *Tìm các số nguyên tố p, q và số nguyên dương n sao* cho

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1).$$

Lời giải. Do p, q là các số nguyên tố nên đều lớn hơn 1. Do đó từ đẳng thức ở đề bài suy ra $n > p$ và $n > q$, vì n, p, q đều là các số nguyên nên $n \geq p+1$ và $n \geq q+1$ (1).

Cách giải 1. Khi đổi chỗ p và q cho nhau thì đẳng thức trên vẫn giữ nguyên nên ta có thể giả sử rằng $p \geq q$, lúc đó $n > p \geq q$. Biến đổi như sau:

$$p(p+1)=n(n+1)-q(q+1)=n^2+n-q^2-q$$
$$=n^2-q^2+n-q=(n-q)(n+q)+n-q$$
$$=(n-q)(n+q+1),$$

tức là có: $p(p+1)=(n-q)(n+q+1)$ (2).

Vì p là số nguyên tố nên từ (2) suy ra rằng: hoặc p là ước số của $n-q$, hoặc p là ước số của $n+q+1$.

Nếu $n-q=pt$ với số nguyên $t \geq 1$, thay hệ thức này vào (2) được: $p(p+1)=pt(n+q+1)$, giản ước cho p được $p+1=t(n+q+1) \geq n+q+1$, nhưng điều này không xảy ra vì $n > p$ theo (1). Vậy p là ước của $n+q+1$ hay $n+q+1=pk$ (3) với k là số nguyên dương và $k \geq 2$ do (1). Thay hệ thức (3) vào (2) được $p(p+1)=pk(n-q)$, giản ước cho p được $p+1=k(n-q)$ (4).

Từ (3) và (4) có $n+q+1+p+1=pk+k(n-q)$, hay là $n+q+p+2=k(n-q+p)$ (5). Mặt khác

$$3(n-q+p)=n+q+p+2+2(n-q-1)+2(p-q)$$
$$\geq n+q+p+2 \text{ do (1).}$$

Từ đó và (5) suy ra $k \leq 3$.

• Với $k=2$ từ (3) có $n+q+1=2p$, thay vào (2) và (4) được $p+1=2n-2q=4p-4q-2$, hay là $4q=3(p-1)$, từ đó 3 là ước số của số nguyên tố q nên $q=3$ và $p=5$, $n=6$.

• Với $k=3$ từ (3) có $n+q+1=3p$, thay vào (2) và (4) được $p+1=3n-3q=9p-6q-3$, hay là $3q=2(2p-1)$, từ đó 2 là ước số của số nguyên tố q nên $q=2$ và $p=2$, $n=3$.

Thử lại, kể cả $q \geq p$, ta thấy bài toán có 3 nghiệm (p, q, n) là (3, 5, 6); (5, 3, 6); (2, 2, 3).

Cách giải 2. Biến đổi như sau:

$$n(n+1)=p(p+1)+q(q+1)$$
$$=p^2+p+q^2+q+2pq-2pq$$
$$=(p+q)^2+p+q-2pq,$$

hay là $2pq=(p+q)^2-n^2+p+q-n$

$$=(p+q-n)(p+q+n)+p+q-n,$$

hay là $2pq=(p+q-n)(p+q+n+1)$ (6).

Do (1) có $p+q-n < p$ nên số nguyên tố p không là ước số của $p+q-n$, tương tự số nguyên tố q không là ước số của $p+q-n$, do đó từ (6) suy ra $p+q+n+1$ là bội số của p và q, mà $(p, q)=1$ nên $p+q+n+1=pqt$ (7) với số nguyên dương t. Thay (7) vào (6) được $2pq=(p+q-n)pqt$, hay là $2=(p+q-n)t$, suy ra:

$$p+q-n=1 \text{ hoặc } p+q-n=2.$$

• Với $p+q-n=1$, thay vào (6) được:

$2pq=p+q+n+1=p+q+p+q=2(p+q)$, hay là $pq=p+q$, hay là $(p-1)(q-1)=1$, suy ra $p=q=2$, lúc đó $n=p+q-1=3$.

• Với $p+q-n=2$, thay vào (6) được $pq=p+q+n+1=p+q+p+q-1=2(p+q)-1$, hay là $pq-2p-2q=-1$, hay là $(p-2)(q-2)=3$, suy ra: nếu $p=3$, $q=5$, lúc đó $n=p+q-2=6$;

nếu $p=5$, $q=3$, lúc đó $n=p+q-2=6$.

Bài toán có 3 nghiệm như trên.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Hoàng Phương Ngọc*, *Trần Anh Đức*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Nghệ An:** *Đinh A Na*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng:** *Huỳnh Gia Bảo*, 6A2, THCS Kế An; *Đặng Ngọc Duy*, 5A, TH Kế An 3, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/523 (Lớp 7). *Tìm các số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn:* $\begin{cases} a+b^2=cd \\ c+d^2=17b \end{cases}$.

Lời giải. Từ hệ đã cho ta có $c=17b-d^2$ (1). Thay (1) vào vế đầu của hệ đã cho, ta có:

$$a = -b^2 + d\left(17b - d^2\right) \quad (2).$$

Đẳng thức (1) cho thấy một trong 3 số c, d, b là chẵn, và do nó là số nguyên tố, nên phải bằng 2.

• *Trường hợp* $c = 2$: hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a + b^2 = 2d \\ 2 + d^2 = 17b \end{cases}.$$

Xét 2 trường hợp có thể xảy ra :

- Nếu $d \neq 3$ thì d^2 chia 3 dư 1, và suy ra $2 + d^2 = 17b$ chia hết cho 3, và ta có $b = 3$. Thay $b = 3$ vào (1) ta có $d = 7$. Từ (2) ta có $a = 5$. Bộ (a, b, c, d) nguyên tố thỏa mãn điều kiện đầu bài là (5, 3, 2, 7).

- Nếu $d = 3$ thì do $c = 2$ nên không thỏa mãn (1).

• *Trường hợp* $d = 2$: Từ (2) ta có:

$$a = -b^2 + 34b - 8 > 0,$$

suy ra $b \leq 17 + \sqrt{17^2 - 8} < 34$.

Thử với b là các số nguyên tố từ 2 đến 31 ta thấy $a = -b^2 + 34b - 8$ hoặc $c = 17b - 4$ không phải là số nguyên tố.

• *Trường hợp* $b = 2$: Trong trường hợp này (1) trở thành $c = 34 - d^2 \Rightarrow d \leq 5$. Thử trực tiếp với các số nguyên tố d = 2, 3, 5 ta thấy trường hợp này c không là số nguyên tố.

Nhận xét : Hầu hết các bạn có lời giải rất dài dòng và không chính xác. Các bạn sau đây có đáp số đúng.

Điện Biên : *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, huyện Điện Biên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trung Kiên, Đỗ Ngọc Tiến, Nguyễn Đức Quý*, 8A3, THCS Lâm Thao, huyện Lâm Thao; **Hà Nội:** *Trần Anh Đức*, 6C2, *Trần Khánh Chi*, 6C1, Archimedes, Đông Anh, *Hoàng Tuấn Anh*, 7T THCS Lương Thế Vinh TP Hà Nội; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ;

Bạn *Nguyễn Xuân Quang Vinh*, 6CT7, THCS và THPT Nguyễn Siêu không cho biết địa danh của trường.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/523. *Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình* $x^y + y^x + (x + y + 1)^3 = x^3 + y^3 + z + 1$.

Lời giải. Áp dụng hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

vào biến đổi phương trình đã cho, ta thu được:

$$x^y + y^x + 3(x + y)(y + 1)(1 + x) = z \quad (1).$$

Cách 1. Vai trò của x, y bình đẳng nên giả sử $x \leq y$. Do x, y là các số nguyên tố nên có thể xảy ra các khả năng sau:

• Nếu $x = 2$, $y = 2$ thì thay vào PT(1) tìm được $z = 116$ (loại vì không là số nguyên tố).

• Nếu $x = 2$; $y = 3$ thì thay vào PT(1) tìm được $z = 197$ (thỏa mãn là số nguyên tố).

• Nếu $x \geq 3$; $y \geq 3$ thì x và y đều lẻ (do x, y là số nguyên tố). Suy ra vế trái của (1) là số chẵn lớn hơn 3. Mâu thuẫn với z là số nguyên tố.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên tố (x, y, z) là (2, 3, 197) và (3, 2, 197).

Cách 2. Do x, y là các số nguyên tố, nên vế trái của (1) lớn hơn 3. Suy ra $z > 3$, mà z là số nguyên tố nên z phải là số lẻ.

Trong ba số x, y, 1 luôn có ít nhất hai số hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà tổng của hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ luôn là số chẵn, suy ra:

$$3(x + y)(y + 1)(1 + x) \text{ là số chẵn.}$$

Kết hợp với z là số nguyên tố lẻ suy ra $x^y + y^x$ là số lẻ, do đó x và y khác tính chẵn lẻ.

Vai trò của x, y bình đẳng nên giả sử x chẵn, y lẻ. Suy ra $x = 2$ và y là số nguyên tố lẻ lớn hơn 2.

+ Với $x = 2$, $y = 3$ thì (1) trở thành:

$$2^3 + 3^2 + 3(2 + 3)(3 + 1)(1 + 2) = z$$

$\Leftrightarrow$ $z = 197$ (thỏa mãn là số nguyên tố).

+ Với $x = 2$, $y > 3$ thì (1) trở thành:

$$2^y + y^2 + 9(2 + y)(y + 1) = z \quad (2).$$

Do y là số nguyên tố lẻ lớn hơn 3 nên y không chia hết cho 3, suy ra y^2 chia cho 3 dư 1; 2^y chia cho 3 dư 2 nên vế trái của (2) chia hết cho 3 và lớn hơn 3, tức là vế trái của (2) là hợp số. Mâu thuẫn với z là số nguyên tố.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên tố (x, y, z) là (2, 3, 197) và (3, 2, 197).

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình tìm nghiệm nguyên với ba ẩn, ta cần phải xét từ các trường hợp đặc biệt để tìm ra giá trị của một ẩn trước, từ đó tìm nốt các nghiệm còn lại. Các bạn gửi

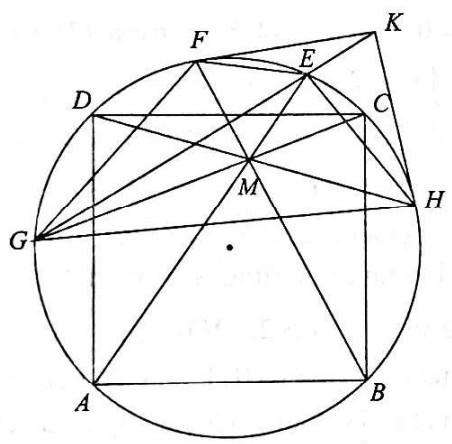
bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trung Kiên, Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Trần Đình Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thùy*, 9C, THCS Thị Trấn Triệu Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Hải Triều*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom lót.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/523. *Cho M là một điểm nằm trong hình vuông ABCD, các tia AM, BM, CM, DM lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp hình vuông tại E, F, G, H. Giả sử các tiếp tuyến tại F và H cắt nhau tại K. Chứng minh rằng ba điểm K, G, E thẳng hàng.*

Lời giải.



Dễ chứng minh các cặp tam giác đồng dạng dưới đây: $\Delta HGM \backsim \Delta CDM$, $\Delta EHM \backsim \Delta DAM$, $\Delta ABM \backsim \Delta FEM$, $\Delta BCM \backsim \Delta GFM$.

Từ $\Delta EHM \backsim \Delta DAM$, ta có: $\dfrac{EH}{AD} = \dfrac{MH}{MA}$.

Từ $\Delta HGM \backsim \Delta CDM$, ta có: $\dfrac{GH}{CD} = \dfrac{MH}{MC}$.

Suy ra: $\dfrac{EH}{GH} = \dfrac{MC}{MA}$ (vì $AD = CD$) (1).

Tương tự, từ $\Delta FEM \backsim \Delta ABM$, ta có: $\dfrac{FE}{AB} = \dfrac{MF}{MA}$.

Từ $\Delta GFM \backsim \Delta BCM$, ta có: $\dfrac{FG}{BC} = \dfrac{MF}{MC}$.

Suy ra: $\dfrac{FE}{FG} = \dfrac{MC}{MA}$ (vì $AB = BC$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{EH}{GH} = \dfrac{EF}{GF}$ (3).

Gọi $K_1 = HK \cap GE$. Dễ chứng minh:

$\Delta K_1EH \backsim \Delta K_1HG$, suy ra $\dfrac{K_1E}{K_1H} = \dfrac{EH}{GH} = \dfrac{K_1H}{K_1G}$.

Từ đó ta có $\dfrac{K_1E}{K_1G} = \dfrac{K_1E}{K_1H}.\dfrac{K_1H}{K_1G} = \dfrac{EH^2}{GH^2}$ (4).

Tương tự, gọi $K_2 = KF \cap GE$, ta có:

$$\frac{K_2E}{K_2G} = \frac{FE^2}{FG^2} \quad (5).$$

Từ (3), (4), (5) suy ra $\dfrac{K_1E}{K_1G} = \dfrac{K_2E}{K_2G}$, do đó:

$K_1 \equiv K_2 \equiv K$. Vậy K, E, G thẳng hàng.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/523. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1} + \frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1} + \frac{c^3+a^2+b^2}{c^2+1} \ge \frac{9}{2}.$$

Lời giải. Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc $2\left(b^2+c^2\right) \ge (b+c)^2$ và $a^2+1 \ge 2a$, ta có:

$$\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1} = \frac{2a^3+2\left(b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+1\right)} \ge \frac{2a^3+(b+c)^2}{2\left(a^2+1\right)}$$

$$= \frac{2a^3+(3-a)^2}{2\left(a^2+1\right)} = \frac{2a^3+a^2-6a+9}{2\left(a^2+1\right)}$$

$$= \frac{2a\left(a^2+1\right)+9\left(a^2+1\right)-8a^2-8a}{2\left(a^2+1\right)}$$

$$= a + \frac{9}{2} - \frac{4a(a+1)}{a^2+1} \ge a + \frac{9}{2} - \frac{4a(a+1)}{2a} = \frac{5}{2} - a,$$

nghĩa là $\dfrac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1} \ge \dfrac{5}{2} - a$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$; $a = 1$.

Tương tự: $\frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1} \ge \frac{5}{2}-b$; $\frac{c^3+a^2+b^2}{c^2+1} \ge \frac{5}{2}-c$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{c^3+a^2+b^2}{c^2+1}$$
$$\ge \frac{15}{2}-(a+b+c)=\frac{15}{2}-3.$$

hay $\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{c^3+a^2+b^2}{a^2+1} \ge \frac{9}{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Trong cách giải trên, điều then chốt là chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1} \ge \frac{5}{2}-a$.

Ngoài ra một số bạn có các hướng giải khác như sau:

1) Viết vế trái của BĐT phải chứng minh thành

$$VT=\left(\frac{a^3-a^2}{a^2+1}+\frac{b^3-b^2}{b^2+1}+\frac{c^3-c^2}{c^2+1}\right)$$
$$+\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right).$$

Sau đó chứng minh $\frac{a^3-a^2}{a^2+1}+\frac{b^3-b^2}{b^2+1}+\frac{c^3-c^2}{c^2+1} \ge 0$;

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right) \ge \frac{9}{2}.$$

2) Ta có: $\frac{a^3}{a^2+1}=a-\frac{a}{a^2+1} \ge a-\frac{a}{2a}=a-\frac{1}{2}$.

Viết các BĐT tương tự, ta có:

$$VT \ge (a+b+c)-\frac{3}{2}+\left(\frac{b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{a^2+b^2}{c^2+1}\right)$$
$$=\frac{3}{2}+P.$$

Sau đó chứng minh: $P=\frac{b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{a^2+b^2}{c^2+1} \ge 3$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thùy Dung*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, *Nguyễn Văn Khiêm*, 9C, THCS An Tảo, *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trung Kiên*, *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hải Dương:** *Phạm Minh Trí*, 8H, THCS Võ Thị Sáu, TP. Hải Dương; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, *Hoàng Phương Ngọc*, *Hoàng Gia Bách*, 8C2, THCS Archimedes Đông Anh, *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/523. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^z+y^z-2=z^3-z & (1) \\ y^x+z^x-2=x^3-x & (2) \\ z^y+x^y-2=y^3-y & (3) \end{cases} \quad (I)$$

trong đó x, y, z là các số nguyên.

Lời giải (của bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**).

Nếu (x,y,z) là một nghiệm nguyên của hệ phương trình (I) thì x,y,z khác 0. Thật vậy, giả sử trong ba số x,y,z có một số bằng 0. Thí dụ, $z=0$. Vì 0^n có nghĩa khi $n>0$ nên $x,y>0$. Thay $z=0$ vào các phương trình (2) và (3) ta được hệ: $\begin{cases} y^x-2=x^3-x & (2') \\ x^y-2=y^3-y & (3') \end{cases}$ (II).

Thử trực tiếp ta thấy $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ không là nghiệm của hệ (II). Xét trường hợp $x,y \ge 3$. Do tính đối xứng, coi $x \ge y \ge 3$. Khi ấy $x^y \ge y^y \ge y^3$ và $y>2$. Vậy $x,y \ge 3$ không là nghiệm của (3'). Do đó (II) không có nghiệm. Vậy nếu (x,y,z) là một nghiệm nguyên của hệ phương trình (I) thì x,y,z khác 0. Do tính đối xứng nên có thể coi $x \ge y \ge z$.

TH1: $z>0$. Do $x \ge y \ge z > 0$ nên từ (1) ta có $z^3-z=x^z+y^z-2 \ge 2z^z-2$.

Nếu $z \ge 3$ thì $2z^z > z^3$ và $-2>-z$. Mâu thuẫn với bất đẳng thức trên. Vậy nếu (x,y,z) là nghiệm thì $z=1$ hoặc $z=2$.

Với $z=1$ thì từ (1) ta có $x+y=2$. Do $x \ge y \ge z$ nên $x=y=1$. Thử lại ta thấy $(1,1,1)$ là nghiệm của hệ (I).

Với $z=2$ thì từ (1) ta có $x^2+y^2=8$. Do $x \ge y \ge z=2$ nên $x=y=2$. Thử lại ta thấy $(2,2,2)$ là nghiệm của hệ (I).

TH2: $z<0$. Khi ấy (1) trở thành

$$\frac{1}{x^{|z|}}+\frac{1}{y^{|z|}}-2=z^3-z \quad (1a).$$

- Khi $z\le -2$ thì $x^z>-1$ và $y^z>-1$. Suy ra $x^z+y^z-2\ge -4$. Nhưng khi $z\le -2$ thì $z^2\ge 4$ nên $z^3-z=z\left(z^2-1\right)\le -6$. Vậy (I) không có nghiệm khi $z\le -2$.

- Nếu $z=-1$ thì (1a) trở thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-2=0$ (1b). Nếu $0>x\ge y$ thì (1b) vô nghiệm. Nếu $x>0>y$ thì $\frac{1}{x}=2-\frac{1}{y}>2$. Vô lí. Suy ra $x\ge y>0$. Khi ấy $2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{2}{y}$. Suy ra $x=y=1$. Thay $(1,1,-1)$ vào (I) ta thấy $(1,1,-1)$ không là nghiệm của (I).

Vậy hệ (I) có hai cặp nghiệm là $(1,1,1)$ và $(2,2,2)$.

Nhận xét. Danh sách các bạn giải đúng:

Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên* 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Quảng Nam:** *Trần Văn Minh Huy*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

Bạn *Trần Văn Quân* 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên và bạn *Vũ Nhật Minh* 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** lập luận không chặt dẫn tới thừa nghiệm. Bạn *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh** chép nhầm đầu bài.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/523. *Giải phương trình trên tập hợp các số thực* $x.2^{x^2}=2^{2x+1}$.

Lời giải. Nhận xét: Nếu x là nghiệm của phương trình thì $x>0$. Với $x>0$ phương trình

$$x.2^{x^2}=2^{2x+1}\Leftrightarrow x^2.2^{x^2}=2x.2^{2x}.$$

Chú ý rằng nếu $0<a<b$ thì $2^a<2^b$, suy ra $a.2^a<b.2^b$. Bởi vậy phương trình của bài toán tương đương với $x^2=2x,\ x>0\Leftrightarrow x=2$. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình dạng đơn giản. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt (không tính các bạn học sinh phải dùng đến đạo hàm của hàm số):

Nam Định: *Phạm Thị Hoài Thu*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Lê Xuân Hiệp*, *Nguyễn Trí Hùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10T2, *Phạm Gia Hưng*, 10T1, *Trương Thị Thu Hà*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trí Hoàng Phú*, 11A1, THPT Hướng Hóa, huyện Hướng Hóa; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Nguyễn Ái Duyên*, *Lê Ngọc Cẩm Tú*, *Huỳnh Nguyên Vỹ*, 10T1, *Nguyễn Vinh Trí*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế;

Lâm Đồng: *Đặng Thanh Lâm*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Minh Khôi*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/523. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. M là một điểm di chuyển trên cung BC không chứa A (M khác B, C). Kẻ BE vuông góc với AM (E nằm trên AM). Gọi N là giao điểm của AM và BC, H là trực tâm tam giác CMN. Chứng minh rằng đường thẳng HE luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên cung BC không chứa A.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**).

Kẻ AI vuông góc với BC tại I, BE cắt AC tại K, CH cắt MN tại G. Gọi J là trực tâm của tam giác

ABN. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại D thì D là điểm cố định.

Ta có: $\Delta ANB \backsim \Delta CNM$ (g.g)

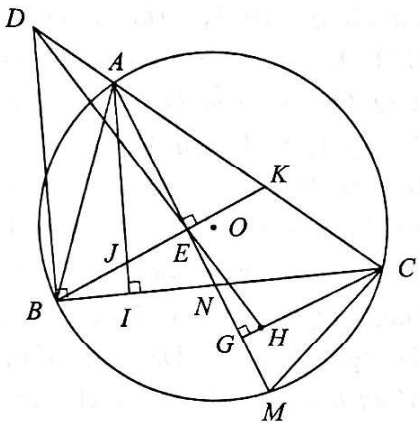
$$\Rightarrow \frac{HC}{HG} = \frac{AJ}{IJ} = \frac{AB.\sin\widehat{ABE}}{BI.\sin\widehat{JBI}} \quad (1).$$

Theo định lý Thales:

$$\frac{EG}{EA} = \frac{KC}{KA} = \frac{BC.\sin\widehat{JBI}}{BA.\sin\widehat{ABE}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HC}{HG}.\frac{EG}{EA} = \frac{BC}{BI} = \frac{DC}{DA}$.

Từ đó: $\frac{HC}{HG}.\frac{EG}{EA}.\frac{DA}{DC}=1$. Theo định lý Menelaus đảo ta thấy ba điểm D, E, H thẳng hàng. Vậy đường thẳng HE luôn đi qua điểm D cố định.



Nhận xét. 1) Bài toán vẫn đúng trong trường hợp điểm M nằm trên đường tròn (O). Bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định** đã nhận xét rằng đề ra nên thêm giả thiết tam giác ABC không có góc vuông và AM không vuông góc với BC, đồng thời đề xuất thêm bài toán sau: *Cho tam giác MNC có ba góc nhọn. Một đường tròn (k) thay đổi qua M, C cắt NM, NC tại A, B tương ứng khác M, C. Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên MN. Đường thẳng qua B vuông góc với NC cắt AC tại X. Chứng minh rằng đường thẳng XE luôn đi qua một điểm cố định khi (k) thay đổi.*

2) Ngoài hai bạn *Quân* và *Hoàng* các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lê Thiên Ngọc*, 8C2, Trường Archimedes, Đông Anh; **Quảng Bình:** *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Gia Lai:** *Nguyễn Tài Kiên*, 9^8, THCS Nguyễn Du, TP. Pleiku; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/523. *Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$S = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{1+2+\ldots+n}}{x_1 x_2^2 \ldots x_n^n}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương, ta có:

$$\frac{x_1 + \left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2}\right) + \left(\frac{x_3}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_3}{3}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{x_n}{n} + \frac{x_n}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right)}_{n \text{ số}}}{1+2+3+\ldots+n}$$

$$\geq \sqrt[1+2+3+\ldots+n]{x_1.\frac{x_2^2}{2^2}.\frac{x_3^3}{3^3}\ldots\frac{x_n^n}{n^n}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq \frac{(1+n)n}{2}\left(x_1.\frac{x_2^2}{2^2}.\frac{x_3^3}{3^3}\ldots\frac{x_n^n}{n^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{\frac{n(n+1)}{2}} \geq \left[\frac{(1+n)n}{2}\left(x_1.\frac{x_2^2}{2^2}.\frac{x_3^3}{3^3}\ldots\frac{x_n^n}{n^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right]^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{1+2+3+\ldots+n}}{x_1.x_2^2.x_3^3\ldots x_n^n} \geq \frac{\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1.2^2.3^3\ldots n^n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \ldots = \frac{x_n}{n}$.

Vậy $\min S = \frac{(1+2+\ldots+n)^{1+2+\ldots+n}}{1.2^2.3^3\ldots n^n}$.

Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách giải trên. Các bạn có lời giải tốt là: **Phú Thọ:** *Lương Minh Hiếu, Trần Tuấn Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 8C2, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Nam Định:** *Vũ Nhật Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Hưng Yên:** *Hà Vinh Quang, Trần Văn Quân, Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Lý Hoàng Nhựt*, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị

Minh Khai; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vinh Trí, Nguyễn Minh Ngọc*, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường Phổ thông Duy Tân; **Quảng Bình:** *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/523. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn điều kiện sau:*

$$f(xf(y))+f(y^{2021}f(x))=xy+xy^{2021},\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Lời giải. Theo (1) với $x=1$, $y=1$, ta được $f(f(1))=1$. Với $y=1$, ta được:

$$f(xf(1))+f(f(x))=2x,\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad (2).$$

Tiếp theo, cho $y=f(1)$, ta được:

$$f(xf(f(1)))+f(f^{2021}(1)f(x))$$
$$=xf(1)+xf^{2021}(1),\forall x\in\mathbb{R}^+$$
$$\Leftrightarrow f(x)+f(f^{2021}(1)f(x))$$
$$=xf(1)+xf^{2021}(1),\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad (3).$$

Do $f(1)>0$ nên từ đẳng thức $f(x)=f(y)$, từ (3) suy ra $x=y$. Vậy f là đơn ánh.

Trong (2) cho $x=f(1)$, ta được:

$$f(f^2(1))+f(f(f(1)))=2f(1)$$
$$\Leftrightarrow f(f^2(1))+f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(f^2(1))=f(1).$$

Tiếp theo, sử dụng tính đơn ánh của f và $f(1)>0$, ta thu được:

$$f(f^2(1))=f(1)\Leftrightarrow f^2(1)=1\Leftrightarrow f(1)=1.$$

Kết hợp với (2) ta thu được:

$$f(x)+f(f(x))=2x,\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad (4).$$

Với mỗi $x\in\mathbb{R}^+$ cố định, xét dãy $u_0=x>0, u_1=f(x)>0,\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}$. Từ (4), ta thu được: $u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n=0, n\in\mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng $t^2+t-2=0$ có nghiệm $t=1$ và $t=-2$.

Suy ra $u_n=a+b(-2)^n$, trong đó

$$a=\frac{2x+f(x)}{3}, b=\frac{x-f(x)}{3}.$$

Nếu $b>0$, chọn k sao cho $a+b(-2)^{2k+1}<0$ thì $u_{2k+1}<0$, trái với giả thiết $f(x)>0$.

Nếu $b<0$, chọn k sao cho $a+b(-2)^{2k}<0$ thì $u_{2k}<0$, trái với giả thiết $f(x)>0$.

Vậy nên $b=0$, tức là $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}^+$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra,

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}^+$. Có rất nhiều bài giải gửi đến Tòa soạn đều mắc một trong các lỗi sau: Hoặc tự tìm nghiệm trong lớp hàm đa thức (để sử dụng so sánh bậc của đa thức), hoặc sử dụng tính liên tục của hàm số (để chuyển qua giới hạn của dãy đối số trong hàm số). Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vĩnh Trí, Nguyễn Minh Ngọc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Phú Thọ:** *Lương Minh Hiếu*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Nam:** *Huỳnh Thanh Trường, Nguyễn Quang Huy, Trần Gia Huy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/523. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *với* $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2}$ *và* $na_n=(n-1)a_{n-1}+(n-2)a_{n-2}$. *Tìm* $\lim\frac{a_n}{a_{n-1}}$ *khi* $n\to\infty$.

Lời giải . (Của bạn *Nguyễn Vĩnh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).

Đặt $v_n=n.a_n$. Ta có $v_1=v_2=1$; $v_n=v_{n-1}+v_{n-2}$. Vậy (v_n) là dãy Fibonacci. Do đó

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Do đó $a_n=\frac{1}{n\sqrt{5}}\left(A^n-B^n\right)$ ở đó $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $B=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ta có: $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}.\frac{\left(A^n-B^n\right)}{\left(A^{n-1}-B^{n-1}\right)}=\left(\frac{n-1}{n}\right).\frac{\left(1-\left(\frac{B}{A}\right)^n\right)}{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\left(\frac{B}{A}\right)^n}.$

Ta có: $\left|\frac{B}{A}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}<1\Rightarrow\lim\left(\frac{B}{A}\right)^n=0.$

Lại có $\lim \frac{n-1}{n} = 1$. Thành thử

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{A}} = A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản. Nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều làm đúng. Các bạn có lời giải tốt gồm: **Quảng Bình:** *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn.

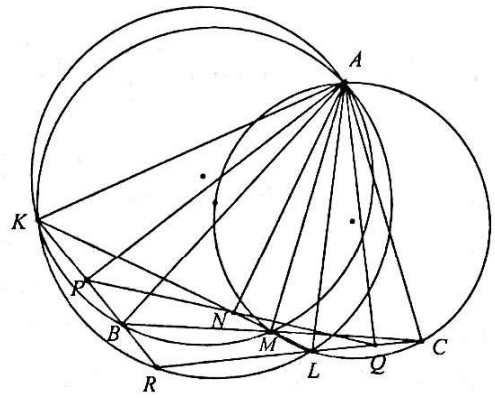
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/523. *M là một điểm trên đường thẳng BC của tam giác ABC (M khác B, C). K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn (AMB), (AMC) và một đường thẳng qua M nhưng khác MA và BC. P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BK, CL. R là giao điểm của BK và CL. N là giao điểm của đường thẳng PQ và MK. Chứng minh:*

a) $\frac{NP}{NQ} = \frac{MB}{MC}$;

b) *Khi M là trung điểm BC thì AKRL là tứ giác điều hòa (tứ giác điều hòa là tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau).*

Lời giải.



a) Dễ thấy:

$(BC, BA) \equiv (BM, BA) \equiv (KM, KA) \equiv (KL, KA) (\text{mod}\, \pi)$;

$(CB, CA) \equiv (CM, CA) \equiv (LM, LA) \equiv (LK, LA) (\text{mod}\, \pi)$.

Do đó các tam giác *ABC*, *AKL* đồng dạng cùng hướng (1). Điều đó có nghĩa là các tam giác *ABK*, *ACL* đồng dạng cùng hướng.

Kết hợp với $AP \perp BK; AQ \perp CL$, suy ra các tam giác *APK*, *AQL* đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác *APQ*, *AKL* đồng dạng cùng hướng (2).

Từ (1) và (2) suy ra các tam giác *APQ*, *ABC* đồng dạng cùng hướng (3).

Từ (2) suy ra: $(PA, PN) \equiv (PA, PQ) \equiv (KA, KL)$

$$\equiv (KA, KN) (\text{mod}\, \pi).$$

Do đó *A*, *P*, *K*, *N* cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, chú ý rằng *A*, *B*, *K*, *M* cùng thuộc một đường tròn, suy ra

$$(AP, AN) \equiv (KP, KN) \equiv (KB, KM)$$
$$\equiv (AB, AM) (\text{mod}\, \pi) \qquad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{NP}{NQ} = \frac{MB}{MC}$.

b) Theo phần a, các tam giác *ABK*, *ACL* đồng dạng cùng hướng. Do đó: $\frac{AK}{AL} = \frac{BK}{CL}$ (1).

Chú ý rằng *M*, *L*, *K* thẳng hàng, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác *RBC*, ta có:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{LC}{LR} \cdot \frac{KR}{KB} = 1.$$

Kết hợp với $MB = MC$, suy ra $\frac{RK}{RL} = \frac{BK}{CL}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{AL} = \frac{RK}{RL}$ (3).

Theo phần a, các tam giác *ABK*, *ACL* đồng dạng cùng hướng. Do đó:

$$(RK, RL) \equiv (BK, CL) \equiv (AK, AL) (\text{mod}\, \pi).$$

Điều đó có nghĩa là *A*, *K*, *L*, *R* cùng thuộc một đường tròn (4).

Từ (3) và (4), chú ý rằng *A*, *R* thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ *KL*, suy ra tứ giác *AKRL* điều hòa.

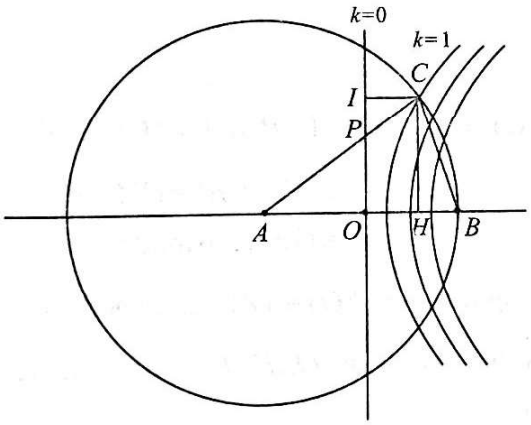
Nhận xét. 1) Bài toán này dễ, nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên lời giải của một số bạn phụ thuộc hình vẽ.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Hà Nội:** Đào Quang Anh, 8C2, THCS & THPT Archimedes – Đông Ang; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Ngọc Thúy An*, *Trần Minh Hiếu Học*, *Lý Hoàng Nhật*, 10A1T, *Nguyễn Đức Thọ*, 11A1T, *Lâm Khả Hãn*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/523. *Trong hiện tượng giao thoa sóng nước, hai nguồn sóng kết hợp A và B cách nhau* 20 cm *dao động điều hòa theo phương thẳng đứng, cùng pha, cùng tần số* 50 Hz. *Tốc độ truyền sóng trên mặt nước là* 1,5 m/s. *Xét các điểm trên mặt nước thuộc đường tròn tâm A bán kính AB, điểm dao động với biên độ cực đại cách đường trung trực của AB một khoảng ngắn nhất là bao nhiêu?*

Lời giải.



Bước sóng $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,5}{50} = 0,03$ m. Trên hình C là điểm dao động với biên độ cực đại trên đường tròn tâm A bán kính AB, gần đường trung tực của AB nhất nên thuộc cực đại $k = 1$.

Suy ra: $AC - BC = \lambda \Rightarrow BC = AC - \lambda = 17$ cm.

Xét ΔACB cân ở A, ta xác định được góc $\widehat{CAB} = 50,3^0 \Rightarrow AH = AC\cos 50,3^0 = 12,775$ cm

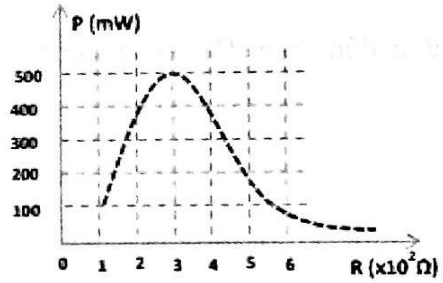
$\Rightarrow CI = AH - AO = 12,775 - 10 = 2,775$ cm.

Vậy điểm dao động với biên độ cực đại cách đường trung trực của AB một khoảng ngắn nhất là 2,775 cm.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hồ Phạm Phú An*, 11T1; *Nguyễn Thiện Chí*, 11T1; *Phạm Hữu Đăng*, 11T1; *Nguyễn Minh Khôi*, 11T1; *Nguyễn Thiên Lí*, 11T1; *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 11T1; *Nguyễn Bá Thành*, 11T1; *Nguyễn Bá Thành*, 10AV2, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Vĩnh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/523. *Một học sinh muốn đo hệ số tự cảm của một cuộn dây thuần cảm. Học sinh đó mắc nối tiếp cuộn dây với một biến trở có giá trị thay đổi được. Mạch điện mắc nối tiếp với một am pe kế và mắc vào nguồn điện xoay chiều có điện áp* $u = U_0\cos(100\pi t)$, *trong đó* U_0 *có giá trị không đổi. Do đo được cường độ dòng điện trong mạch khi R thay đổi nên học sinh đó đã vẽ được đồ thị sự phụ thuộc công suất tiêu thụ của mạch vào điện trở như hình vẽ. Xác định hệ số tự cảm của cuộn dây.*



Lời giải. Ta có: $P = I^2R = \frac{U^2}{R^2 + Z_L^2}R = \frac{U^2}{R + \frac{Z_L^2}{R}}$.

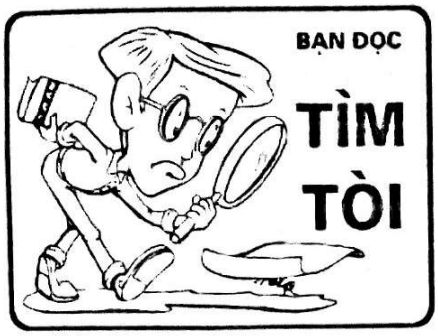
Ta thấy P_{max} khi $\left(R + \frac{Z_L^2}{R}\right)$ min. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $\left(R + \frac{Z_L^2}{R}\right) \geq 2\sqrt{R\frac{Z_L^2}{R}} = 2Z_L$.

Do đó $P_{max} = \frac{U^2}{2Z_L}$ xảy ra khi $R = Z_L$

Từ đồ thị ta có P_{max} khi $R = 3.10^2\Omega$ nên $\omega L = 3.10^2$ hay $L = \frac{3}{\pi}H$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vĩnh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Hồ Phạm Phú An*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG



MỘT PHÉP CHỨNG MINH THUẦN TÚY HÌNH HỌC KHÁC VÀ NGẮN GỌN CỦA ĐỊNH LÍ LEMOINE

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Định lí Lemoine là định lí khá nổi tiếng trong hình học phẳng, được đề cập đến trong nhiều tài liệu với nhiều cách chứng minh khác nhau, thuần túy hình học và không thuần túy hình học [1, 2, 3, …, 6]. Trong bài báo này, sử dụng khái niệm góc định hướng giữa hai đường thẳng, tôi đưa ra một phép chứng minh thuần túy hình học khác và ngắn gọn cho định lí Lemoine.

Để bạn đọc tiện theo dõi, xin nhắc lại định lí Lemoine.

Định lí Lemoine. *Cho tam giác ABC và điểm P; D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB. Khi đó P là điểm Lemoine của tam giác ABC khi và chỉ khi P là trọng tâm của tam giác DEF.*

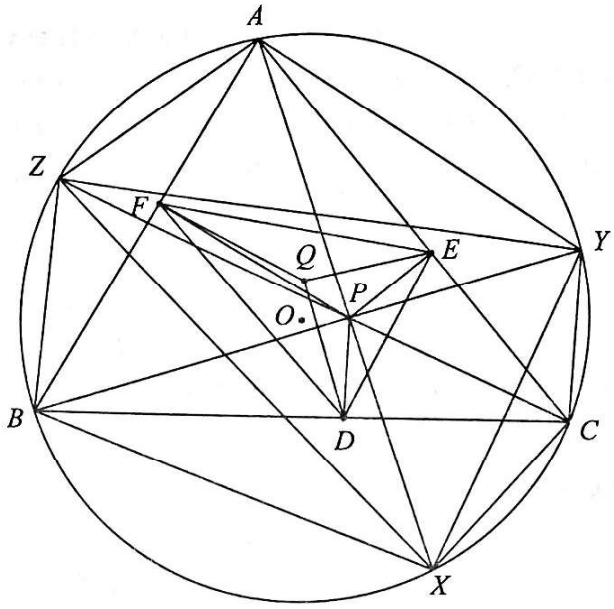
Chứng minh.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Dễ thấy P không thể thuộc BC, CA, AB và (O).

Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P đối với tam giác BDE và gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP và (O) (hình vẽ).

Vì D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB nên các bộ bốn điểm A, P, E, F; B, P, F,D và C, P, D, E cùng thuộc một đường tròn.



Do đó: $(EF, EQ) \equiv (EP, ED) \equiv (CP, CD)$

$$\equiv (CZ, CB) \equiv (YZ, YB)$$
$$\equiv (YZ, YP) \pmod{\pi}.$$

Tương tự: $(FE, FQ) \equiv (ZY, ZP) \pmod{\pi}$.

Vậy hai tam giác QEF, PYZ đồng dạng cùng hướng.

Tương tự hai tam giác QFD, PZX đồng dạng cùng hướng.

Vậy các điều kiện sau tương đương:

1) P là trọng tâm tam giác DEF.

2) Q là điểm Lemoine của tam giác DEF.

3) P là điểm Lemoine của tam giác XYZ.

4) XA và YB là đường đối trung của tam giác XYZ.

5) $XYAZ$ và $YZBX$ là tứ giác điều hòa.

☞

☞

6) $ABXC$ và $BCYA$ là tứ giác điều hòa.

7) AX và BY là đường đối trung của tam giác ABC.

8) P là điểm Lemoine của tam giác ABC.

Chú ý, hiển nhiên $1 \Leftrightarrow 2$; vì các cặp hai tam giác QEF, PYZ và QFD, PZX đồng dạng cùng hướng nên $2 \Leftrightarrow 3$; hiển nhiên $3 \Leftrightarrow 4$ và $4 \Leftrightarrow 5$; Vì phép nghịch đảo $N_P^{P/(O)}$ theo thứ tự biến A, B, X, Y, Z thành X, Y, A, B, C nên $5 \Leftrightarrow 6$; hiển nhiên $6 \Leftrightarrow 7$ và $7 \Leftrightarrow 8$.

THƯ MỤC

[1] J. P. Ehrmann, *Hyacinthos message 95*, January 8, 2000.

[2] D. Griberg, *New Proof of the Symmedian Point to be the centroid of its pedan triangle, and the Converse*, available at *http://de. Geocities.Com/darij_grinberg*.

[3] R. Honsberger, *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America, 1995.

[4] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of Triangle*, Florida Atlantic University Lecture Notes, 2001.

[5] C. Pohoata, *A short proof of Lemoine' s theorem*, Forum Geometry, 8 (2008) 97-98.

[6] Tran Quang Hung, *A Simple Synthetic Proof of Lemoine's Theorem*, Forum Geometry, 17 (2018) 93-95.

PROBLEMS IN ... (*Xem tiếp trang 22*)

respectively be the centers of the excircles of the angles A, B, C. The line AI_a intersects (O) at D which is different from A. On I_bD, I_cD respectively choose the points E, F such that $\widehat{ABC} = 2\widehat{I_aBE}$, $\widehat{ACB} = 2\widehat{I_aCF}$, E, F are inside the trangle I_aBC. Show that EF intersects I_bI_c at some point on một điểm nằm trên (O).

Problem T9/527. Given a function

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

with a, b are integers. Suppose the range of $f(x)$ is the set of 11 integers. Find the maximum and minimum values of the expression $M = a^2 + b^2$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T11/527. For each positive integer n, let $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Find the smallest positive integer k such that

$$f(n).f(n+1)...f(n+k-1)$$

is a perfect square for some positive integer n.

Problem T11/527. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(f(x)+y) = f(f(x)) - yf(x) + f(-y) - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/527. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A inscribed in a circle (O). Suppose that AD is a diameter of (O). The points E, F respectively on DC, DB. Let G be on EF such that $\frac{GF}{GE} = \frac{FB}{CE}$. Show that CG and AF meets each other at some point on (O).

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

VỀ MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH HÀM

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

1. Giới thiệu

Trong cuốn sách "*Tài liệu chọn lọc Trường đông Toán học miền Nam năm 2020*" do nhóm tác giả *Trần Nam Dũng, Lê Phúc Lữ* và Đội Huấn luyện viên Trường Đông miền Nam biên soạn, có hai bài toán phương trình hàm sau đây:

Bài toán 1 (Bài toán 5, trang 103, Tài liệu chọn lọc Trường đông Toán học miền Nam 2020). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x)=f\left(x+y^2+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 2 (Bài toán 6, trang 103, Tài liệu chọn lọc Trường đông Toán học Miền nam 2020). *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)\neq 0$ và với $n\geq 2$ là số nguyên dương chẵn thì $f(x)=f\left(x+y^n+f(y)\right)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.*

(Hai bài toán này nằm trong bài viết chuyên đề: "*Một số kỹ thuật chứng minh hàm hằng*" của tác giả *Nguyễn Trọng Tuấn*). Đây là hai bài toán hay, chứa đựng những phương pháp, kỹ năng điển hình cho việc giải bài toán Phương trình hàm, rất phù hợp cho việc bồi dưỡng thi học sinh giỏi Quốc gia môn Toán. Bài toán 1 được tổng quát lên thành bài toán 2 (y^2 được tổng quát lên thành y^n với $n\geq 2$ là số nguyên chẵn). Tuy nhiên, nhìn vào hai bài toán trên thì sẽ xuất hiện ngay những câu hỏi sau:

1) Liệu có thể tìm được tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x)=f\left(x+y^n+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ với $n\geq 2$ là số nguyên hay không (n có thể chẵn, có thể lẻ)?

2) Liệu có thể tìm được tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$f(x)=f\left(x+y^n+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ với $n\geq 2$ là số nguyên hay không?

3) Bài toán tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f\left(x+y+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ tại sao lại không được đề cập đến, có phải do nó có số mũ $n=1$ thấp hơn số mũ $n=2$, thấp số mũ $n\geq 2$ nên sẽ dễ hơn, thậm chí là tầm thường, hay không? Vì nhìn vào phương trình hàm $f(x)=f\left(x+y+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ thì thấy ngay hai nghiệm hàm là $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Còn việc tìm hết tất cả các nghiệm chắc là cũng dễ dàng! Nếu giữ nguyên phương trình hàm $f(x)=f\left(x+y+f(y)\right)$; thay điều kiện $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bởi những điều kiện khác, chẳng hạn như $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$,... thì liệu ta có thể giải được những bài toán vừa mới đặt ra đó hay không?

Bài viết này sẽ lần lượt trả lời những câu hỏi đặt ra ở trên.

2. Hai lời giải cho bài toán 1

Trong mục này, ta sẽ trình bày hai lời giải cho bài toán 1.

Lời giải 1. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x)=f\left(x+y^2+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Đặt $A=\left\{y^2+f(y)\,\middle|\,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Trường hợp 1: $A=\{0\}$. Khi đó $f(x)=-x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $A \neq \{0\}$. Khi đó tồn tại $a \in A$ sao cho $a \neq 0$. Do (1) nên $f(x) = f(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Đặt $g(y) = y^2 + f(y) \Rightarrow g(y+a) = (y+a)^2 + f(y+a)$ (3).

Do (1) nên $f(x) = f\left(x + g(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$. (4).

Từ (4) thay x bởi $x - g(y)$, ta được:

$$f(x) = f\left(x - g(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \ (5).$$

Như vậy: $f(x) \overset{\text{do (4)}}{=} f\left(x + g(y+a)\right)$

$$\overset{\text{do (5)}}{=} f\left(x + g(y+a) - g(y)\right)$$

$$\overset{\text{do (3)}}{=} f\left(x + (2ay + a^2) + f(y+a) - f(y)\right)$$

$$\overset{\text{do (2)}}{=} f\left(x + (2ay + a^2)\right) \quad (6).$$

Vì $a \neq 0$ nên $h(y) = 2ay + a^2$ là đa thức bậc nhất theo y, suy ra: $\left\{2ay + a^2 \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$. Do đó (6) trở thành: $f(x) = f\left(x + \alpha\right), \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$ (7).

Từ (7) lấy $x = 0$, ta được $f(\alpha) = f(0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, suy ra f là hàm hằng. Thử lại thấy hàm hằng thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận: các hàm số cần tìm là

$$f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$$

(C là hằng số tùy ý).

Lời giải 2. Đặt $g(x) = x^2 + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó (1) trở thành: $g(x) - x^2 = f\left(x + g(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow g(x) - x^2 = g\left(x + g(y)\right) - \left(x + g(y)\right)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g(x) - x^2 = g\left(x + g(y)\right) - x^2 - 2xg(y) - g^2(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g\left(x + g(y)\right) = g(x) + 2xg(y) + g^2(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \ (8).$$

Trường hợp 1: $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số này thỏa mãn (8). Do đó $f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $g(x) \not\equiv 0$, tức là $\exists a \in \mathbb{R} : g(a) \neq 0$.

Từ (8) lấy $y = a$, ta được:

$$g\left(x + g(a)\right) - g(x) = 2g(a)x + g^2(a), \forall x \in \mathbb{R} \ (9).$$

Do $2g(a)x + g^2(a)$ là đa thức bậc nhất theo biến x nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó từ (9) suy ra:

$$\left\{g\left(x + g(a)\right) - g(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \ (10).$$

Giả sử $u \in \mathbb{R}$. Do (9) nên tồn tại các số thực α, β sao cho: $u = g(\alpha) - g(\beta)$. Ta cần xác định $g(u) = g\left(g(\alpha) - g(\beta)\right)$? Từ (8) thay x bởi $-g(x)$, ta được:

$$g\left(g(y) - g(x)\right) = g\left(-g(x)\right) - 2g(x)g(y) + g^2(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \ (11).$$

Từ (11) thay y bởi x ta được:

$$g(0) = g\left(-g(x)\right) - g^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \ (12).$$

Từ (11) và (12) suy ra:

$$g\left(g(y) - g(x)\right) = g^2(x) - 2g(x)g(y) + g^2(y) + g(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g\left(g(y) - g(x)\right) = \left(g(y) - g(x)\right)^2 + g(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(u) = g\left(g(\alpha) - g(\beta)\right) = \left(g(\alpha) - g(\beta)\right)^2 + g(0) = u^2 + g(0).$$

Như vậy $g(x) = x^2 + d, \forall x \in \mathbb{R}$ (d là hằng số). Suy ra $f(x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại, ta kết luận: các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$ (d là hằng số tùy ý).

Chú ý. Nếu như từ các giả thiết của bài toán, ta chứng minh được: $f(x) = f(x + g(y))$, trong đó $g(y)$ có tập giá trị $\mathbb{R}$ thì: $f(x) = f(x + \alpha), \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$. Từ đây chọn $x = 0$ suy ra: $f(\alpha) = f(0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

3. Tổng quát hóa cho bài toán 1

Bài toán 2 cũng đã là tổng quát hóa cho bài toán 1 rồi (y^2 được tổng quát lên thành y^n với $n \geq 2$ là số nguyên chẵn). Tuy nhiên ở mục này, ta sẽ tổng quát hóa bài toán 1 với mức độ cao hơn nữa, tức là y^2 sẽ được tổng quát lên thành đa thức theo biến y với bậc $n \geq 2$ (không phân biệt n chẵn hay lẻ).

Bài toán 3. *Cho đa thức hệ số thực $Q(x)$ có bậc lớn hơn 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x + Q(y) + f(y)\right) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x+Q(y)+f(y)\right)=f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1).

Dễ thấy rằng hàm số $f(x)=-Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Tiếp theo ta giả sử f là một nghiệm hàm khác, tức là tồn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(y_0\right)+Q(y_0)=T\neq 0$. Khi đó từ (1) ta có:

$$f(x+T)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\quad(2).$$

Từ (1) thay x bởi $x-Q(y)-f(y)$ ta được:

$$f(x)=f\left(x-Q(y)-f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(3).$$

Từ (1) thay y bởi $y+T$ và chú ý đến (2) ta được: $f\left(x+Q(y+T)+f(y)\right)=f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Từ đây thay x bởi $x-Q(y)-f(y)$ ta được:

$$f\left(x+Q(y+T)-Q(y)\right)=f\left(x-Q(y)-f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f\left(x+Q(y+T)-Q(y)\right)=f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(5).$$

Ta có $g(y)=Q(y+T)-Q(y)$ là đa thức có bậc dương nên chỉ có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

Trường hợp $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=+\infty$. Khi đó tồn tại $M_1\in\mathbb{R}$ sao cho $\left[M_1;+\infty\right)\subset K=g(\mathbb{R})$ ($K=g(\mathbb{R})$ là tập giá trị của hàm g trên $\mathbb{R}$).

Từ (5), ta có: $f(x)=f(x+t),\forall x\in\mathbb{R},\forall t\geq M_1$.

Với x,y là hai số thực, xét $z\geq\max\left\{x+M_1,y+M_1\right\}$, ta có:

$$z\geq x+M_1\Rightarrow z-x\geq M_1$$

$$\Rightarrow f(x)=f\left(x+(z-x)\right)=f(z).$$

Tương tự, ta cũng có $f(y)=f(z)$, suy ra $f(x)=f(y)$. Như vậy

$$f(x)=f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=-\infty$. Khi đó tồn tại $M_2\in\mathbb{R}$ sao cho $\left(-\infty;M_2\right]\subset K=g(\mathbb{R})$ ($K=g(\mathbb{R})$ là tập giá trị của hàm g trên $\mathbb{R}$). Từ (5), ta có:

$$f(x)=f(x+t),\forall x\in\mathbb{R},\forall t\leq M_2.$$

Với x, y là hai số thực, xét $z\leq\min\left\{x+M_2,y+M_2\right\}$, ta có:

$$z\leq x+M_2\Rightarrow z-x\leq M_2$$

$$\Rightarrow f(x)=f\left(x+(z-x)\right)=f(z).$$

Tương tự, ta cũng có $f(y)=f(z)$, suy ra $f(x)=f(y)$. Như vậy $f(x)=f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Tóm lại ta đã chứng minh được $f(x)=f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$. Hay f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=-Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=C,\forall x\in\mathbb{R}$ (C là hằng số tùy ý).

4. Tổng quát hóa và thay $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bởi $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

Bài toán 4. *Cho $n\geq 2$ là số tự nhiên. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(x+y^n+f(y)\right)=f(x),\forall x,y>0.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f\left(x+y^n+f(y)\right)=f(x),\forall x,y>0$ (1).

Đặt $c=1+f(1)>1$. Từ (1) cho $y=1$, ta được:

$$f(x+c)=f(x),\forall x>0\quad(2j).$$

Từ (1) thay y bởi $y+c$, ta được:

$$f\left(x+(y+c)^n+f(y+c)\right)=f(x),\forall x,y>0\quad(3j).$$

Từ (3j), (2j) và (1) suy ra

$$f\left(x+y^n+f(y)\right)=f\left(x+(y+c)^n+f(y)\right),\forall x,y>0\ (4j).$$

Xét đa thức $P(x)=(x+c)^n-x^n=ncx^{n-1}+\cdots$ Ta có $\deg P=n-1\geq 1$ và $nc>0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$. Mà $P(x)$ là hàm liên tục nên tồn tại $M>0$ sao cho $\left[M;+\infty\right)\subset K=P(\mathbb{R}^+)$ ($K=P(\mathbb{R}^+)$ là tập giá trị của hàm số P trên $\mathbb{R}^+$).

Giả sử $d>M$. Khi đó, tồn tại $k>0$ sao cho $d=P(k)$. Ta có: $d=P(k)=(k+c)^n-k^n$

$$\Rightarrow (k+c)^n=P(k)+k^n\quad(5j).$$

Ta có: $f\left(x+k^n+f(k)\right) \overset{(4j)}{=} f\left(x+(k+c)^n+f(k)\right)$

$$\overset{(5j)}{=} f\left(x+k^n+f(k)+P(k)\right)$$

$$= f\left(x+k^n+f(k)+d\right).$$

Như vậy:

$$f\left(x+k^n+f(k)\right)=f\left(x+k^n+f(k)+d\right), \forall x>0.$$

Suy ra: $f(z)=f(z+d), \forall z>k^n+f(k) \quad (6j)$.

Giả sử $r>0$. Khi đó tồn tại số nguyên dương ℓ đủ lớn sao cho $\ell c+r>k^n+f(k)$, theo (6j) ta có:

$$f(\ell c+r)=f(\ell c+r+d), \forall r>0 \quad (7j).$$

Mà theo (2j), ta có:

$$f(r)=f(r+c)=f(r+2c)=\cdots=f(r+\ell c),$$

$$f(r+d)=f(r+d+c)=f(r+d+2c)$$

$$=\cdots=f(r+d+\ell c),$$

cho nên kết hợp với (7j) ta thu được:

$$f(r+d)=f(r), \forall r>0 \quad (8j).$$

Kết quả (8j) cũng có nghĩa là hàm f tuần hoàn với chu kỳ d bất kì thỏa mãn $d>M$. Do đó, bây giờ ta lấy x và y là hai số dương bất kì và chọn một số dương p đủ lớn sao cho $p-x>M$ và $p-y>M$. Khi đó:

$$f(x) \underset{p-x>M}{\overset{\text{do }(8j)}{=}} f\left(x+(p-x)\right)=f(p)$$

$$=f(y+(p-y)) \underset{p-y>M}{\overset{\text{do }(8j)}{=}} f(y).$$

Như vậy f là hàm hằng. Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=\alpha, \forall x\in(0;+\infty)$ với α là hằng số dương.

5. Trường hợp "tầm thường" $n=1$

Bây giờ ta thử xem xét trường hợp $n=1$, tức là xét bài toán sau:

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y+f(y))=f(x), \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (*).$$

Bài toán này có vẻ như là dễ nhất, nếu so với các bài toán ở trên. Nhưng nếu nhìn nhận kỹ lại thì thấy không phải như vậy. Có thể thấy ngay rằng, bài toán này có hai nghiệm hàm là:

$$f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}; \quad f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tuy nhiên, ngoài hai nghiệm hàm này ra, liệu có còn nghiệm hàm nào khác nữa không? Và làm thế nào để tìm hết tất cả các nghiệm hàm. Chúng ta hãy cùng xem lại lời giải bài toán 3, thì thấy rằng, nếu tiến hành tương tự chúng ta cũng chỉ làm được đến (5) và gặp bế tắc. Như thế, hướng giải đó đối với bài toán này là không khả quan. Bạn đọc có thể thấy ngay rằng hàm số:

$$f(x)=-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$$

(ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x) cũng thỏa mãn (*).

Qua nghiệm hàm $f(x)=-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ chúng ta đã phần nào mường tượng, để giải được phương trình hàm (*) chắc là phải cần đến một phương pháp nào đó rất khác biệt, mang tính đột phá. Và đây nữa, bạn đọc hãy kiểm tra lại để thấy rằng, hàm số

$$f(x)=[5\sin(\pi\{x\})]-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$$

(ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của a) cũng thỏa mãn (*). Đến đây chúng ta có thể khẳng định: bài toán tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn (*) sẽ là bài toán rất khó. Chúng ta sẽ tiếp cận từng bước, muốn vậy ta hãy xem xét bài toán 5 sau đây:

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x+y+f(y))=f(x), \forall x,y\in\mathbb{Z}$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x+y+f(y))=f(x), \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Xét tập hợp

$$T=\{y\in\mathbb{Z} \mid f(x+y)=f(x), \forall x\in\mathbb{Z}\}.$$

Dễ thấy $0\in T$ và $T\subset\mathbb{Z}$. Giả sử $a\in T$ và $b\in T$. Khi đó với mọi số nguyên x, ta có:

$$f(x+a)=f(x), \; f(x+b)=f(x)$$

nên $f(x+a+b)=f(x+a)=f(x)$, suy ra $a+b$ thuộc T. Giả sử $a\in T$, khi đó $f(x+a)=f(x)$ với mọi số nguyên x, ta có:

$$f(x)=f\big((x-a)+a\big)=f(x-a)$$
$$\Rightarrow f\big(x+(-a)\big)=f(x),\forall x\in\mathbb{Z}.$$

Suy ra $-a\in T$.

Dễ thấy rằng: $x+f(x)\in T,\forall x\in\mathbb{Z}$ (1).

Nếu $T=\{0\}$ thì từ (1) suy ra $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{Z}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Bây giờ ta giả sử $T\neq\{0\}$. Khi đó tồn tại $n\in T$ sao cho $n\neq 0$. Theo tính chất của tập T suy ra $-n\in T$. Do đó trong T luôn chứa các số nguyên dương. Gọi ℓ là số nguyên dương nhỏ nhất của T. Ta sẽ chứng minh $T=\ell\mathbb{Z}=\{\ell a\mid a\in\mathbb{Z}\}$.

Do với mọi a,b thuộc T ta có $a+b\in T$ và $-a\in T$ nên $\ell\mathbb{Z}\subset T$. Giả sử $a\in T$. Ta viết $a=\ell q+r$ với $q\in\mathbb{Z}$, $0\le r<\ell$. Ta có:

$$\begin{cases}\ell\in T\\ a\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q\ell\in T\\ a\in T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\ell q\in T\\ a\in T\end{cases}\Rightarrow r=a-\ell q\in T.$$

Mà ℓ là số nguyên dương nhỏ nhất thuộc T nên $r=0$. Do đó $a=\ell q\in\ell\mathbb{Z}$. Vậy $T\subset\ell\mathbb{Z}$. Như thế $T=\ell\mathbb{Z}$. Do (1) nên $x+f(x)=\ell g(x),\forall x\in\mathbb{Z}$, với $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. Ta có $\ell\in T$ nên $f(x+\ell)=f(x)$.

Do đó: $\begin{cases}x+f(x)=\ell g(x)\\ (x+\ell)+f(x+\ell)=\ell g(x+\ell)\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+f(x)=\ell g(x)\\ (x+\ell)+f(x)=\ell g(x+\ell)\end{cases}$$
$$\Rightarrow \ell=\ell\big(g(x+\ell)-g(x)\big)$$
$$\Rightarrow g(x+\ell)=g(x)+1,\forall x\in\mathbb{Z}\quad(2).$$

Với $x\in\mathbb{Z}$, ta kí hiệu $h(x)=g(x)-\left[\dfrac{x}{\ell}\right]$, khi đó $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$h(x+\ell)=g(x+\ell)-\left[\frac{x+\ell}{\ell}\right]$$
$$=g(x)+1-\left(\left[\frac{x}{\ell}\right]+1\right)$$
$$=g(x)-\left[\frac{x}{\ell}\right]=h(x).$$

Vậy (2) cũng nghĩa là $h(x+\ell)=h(x),\forall x\in\mathbb{Z}$ (3).

Với mọi số nguyên x, ta có:

$$\left[\frac{x}{\ell}\right]\le\frac{x}{\ell}<\left[\frac{x}{\ell}\right]+1\Leftrightarrow \ell\left[\frac{x}{\ell}\right]\le x<\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]+\ell$$
$$\Leftrightarrow 0\le x-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]<\ell\quad(4).$$

Với mọi số nguyên x, do (3) nên ta có

$$h(x)=h(x-\ell)=h(x-2\ell)=\cdots=h\left(x-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]\right)\ (5).$$

Từ (4) và (5) ta thấy rằng để xác định được hàm h, ta chỉ cần biết giá trị của nó tại ℓ điểm 0, 1, 2, … $\ell-1$ là đủ. Như vậy

$$f(x)=-x+\ell g(x)$$
$$=-x+\ell\left(\left[\frac{x}{\ell}\right]+h\left(x-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]\right)\right),\forall x\in\mathbb{Z}$$

với $h:\{0,1,2,\ldots,\ell-1\}\to\mathbb{Z}$ là hàm số tùy ý (6).

Ngược lại, nếu f là hàm số xác định bởi (6) thì

$$\frac{y+f(y)}{\ell}=\left[\frac{y}{\ell}\right]+h\left(y-\ell\left[\frac{y}{\ell}\right]\right)\in\mathbb{Z},\forall y\in\mathbb{Z}.$$

Do đó với mọi số nguyên x và y ta có:

$$f\big(x+y+f(y)\big)=-\big(x+y+f(y)\big)$$
$$+\ell\left(\left[\frac{x+y+f(y)}{\ell}\right]+h\left(x+y+f(y)-\ell\left[\frac{x+y+f(y)}{\ell}\right]\right)\right)$$
$$=-\big(x+y+f(y)\big)$$
$$+\ell\left(\left[\frac{x}{\ell}\right]+\frac{y+f(y)}{\ell}+h\left(x+y+f(y)-\ell\left(\left[\frac{x}{\ell}\right]+\frac{y+f(y)}{\ell}\right)\right)\right)$$
$$=-\big(x+y+f(y)\big)$$
$$+\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]+y+f(y)+\ell h\left(x+y+f(y)-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]-y-f(y)\right)$$
$$=-x+\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]+\ell\cdot h\left(x-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]\right)$$
$$=f(x).$$

Vậy hàm số xác định bởi (6) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Như thế, các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{Z}$;

$$f(x)=-x+\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]+\ell\cdot h\left(x-\ell\left[\frac{x}{\ell}\right]\right),\forall x\in\mathbb{Z}$$

(với ℓ là một số nguyên dương và $h:\{0,1,2,\ldots,\ell-1\}\to\mathbb{Z}$ là hàm số tùy ý).

Nhận xét. Mặc dù bài toán 5 này, đề bài nhìn rất ngắn gọn và dễ hiểu, nhưng theo dõi lời giải chắc hẳn bạn đọc cũng thấy rằng bài toán này rất khó. *Có thể chỉ ra các kết quả cụ thể như sau*:

1) Ứng với $\ell = 1$ thì các hàm số sau thỏa mãn yêu cầu đề bài $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$; $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{Z}$ (với c là hằng số nguyên).

2) Ứng với $\ell = 2$ thì các hàm số sau thỏa mãn yêu cầu đề bài: $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$;

$$f(x) = \begin{cases} 2p & \text{khi } x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 2q+1 & \text{khi } x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \end{cases}$$

(với p và q là những hằng số nguyên).

3) Ứng với $\ell = 3$ thì các hàm số sau thỏa mãn yêu cầu đề bài: $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$;

$$f(x) = \begin{cases} 3p & \text{khi } x = 3n, n \in \mathbb{Z} \\ 3q+2 & \text{khi } x = 3n+1, n \in \mathbb{Z} \\ 3r+1 & \text{khi } x = 3n+2, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(với p, q và r là những hằng số nguyên).

Bài toán 5 đã được giải trọn vẹn và hoàn toàn sơ cấp, nhờ vào việc ta chứng minh được đẳng thức tập hợp $A = \ell\mathbb{Z}$. Thực ra là nhờ vào việc ta đã mô tả được một nhóm con bất kì của $\mathbb{Z}$ (mọi nhóm con của $\mathbb{Z}$ đều có dạng $\ell\mathbb{Z}$ với ℓ là số tự nhiên).

Tiếp theo ta sẽ giải quyết bài toán 6 đã được đặt ra lúc trước.

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x + y + f(y)) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử A là một nhóm con của $\mathbb{R}$ (đối với phép toán cộng). Ta xét một quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{R}$ như sau: với hai số thực x và y thì $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$. Dễ thấy rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$. Do đó tập số thực $\mathbb{R}$ được phân hoạch thành các lớp tương đương. Từ mỗi lớp tương đương e ta chọn ra một phần tử y_e (nếu có vô hạn - không đếm được - các lớp tương đương, phép chọn như thế được hợp thức hóa nhờ một tiên đề trong lý thuyết tập hợp, có tên là Tiên đề chọn (xem ở https://vi.wikipedia.org/wiki/Tiên_đề_chọn)).

Xét $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định theo cách như sau: với mọi số thực x, tồn tại (duy nhất) lớp tương đương e sao cho $x \in e$ và ta đặt $r(x) = y_e \, (\in e)$. Cách chọn y_e cho thấy $x - r(x) \in A$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Giả sử $g : \mathbb{R} \to A$ là một hàm số bất kì. Khi đó hàm số

$$f(x) = g(r(x)) - r(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Thật vậy, giả sử hàm số f xác định bởi (1), khi đó với mọi số thực x, y ta có:

$$\begin{aligned} y + f(y) &= y + g(r(y)) - r(y) \\ &= (y - r(y)) + g(r(y)) \in A, \end{aligned}$$

$$(x + y + f(y)) - x = y + f(y) \in A;$$

như vậy $x + y + f(y)$ và x cùng thuộc một lớp tương đương nên $r(x + y + f(y)) = r(x)$, do đó

$$\begin{aligned} f(x+y+f(y)) &= g(r(x+y+f(y))) - r(x+y+f(y)) \\ &= g(r(x)) - r(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số xác định bởi (1) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh mọi hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng (1). Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y + f(y)) = f(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Xét tập hợp

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x + y) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Ta chứng minh A là một nhóm con của $(\mathbb{R}, +)$.

Dễ thấy $0 \in A$ và $A \subset \mathbb{R}$. Giả sử $a \in A$ và $b \in A$. Khi đó với mọi số thực x, ta có:

$$f(x + a) = f(x), \; f(x + b) = f(x)$$

nên $f(x + a + b) = f(x + a) = f(x)$, suy ra $a + b$ thuộc A.

Giả sử $a \in A$, khi đó $f(x + a) = f(x)$ với mọi số thực x. Ta có:

$$f(x) = f((x - a) + a) = f(x - a)$$

$$\Rightarrow f(x + (-a)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $-a \in A$. Vậy A là một nhóm con của $(\mathbb{R},+)$. Do (2) nên $x+f(x)\in A, \forall x\in\mathbb{R}$ (3).

Ta xét một quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{R}$ như sau: Với hai số thực x và y thì $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in A$. Do A là nhóm con của $\mathbb{R}$ (đối với phép toán cộng) nên dễ thấy rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương. Do đó tập số thực $\mathbb{R}$ được phân hoạch thành các lớp tương đương. Từ mỗi lớp tương đương e ta chọn ra một phần tử y_e. Xét $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số được xác định theo cách như sau: với mọi số thực x, tồn tại (duy nhất) lớp tương đương e sao cho $x\in e$ và ta đặt $r(x)=y_e\ (\in e)$. Cách chọn y_e cho thấy $x-r(x)\in A$ ($\forall x\in\mathbb{R}$). Đặt $g(x)=x+f(x)$, khi đó do (3) nên g là hàm số $g:\mathbb{R}\to A$. Với mọi số thực x, ta có:

$$x\sim r(x)\Rightarrow x-r(x)\in A$$

$$\Rightarrow f(x)=f\big(r(x)+(x-r(x))\big)=f(r(x)),$$

do đó

$$\begin{aligned} f(x)&=f(r(x))=f(r(x))+r(x)-r(x)\\ &=g(r(x))-r(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)=g(r(x))-r(x), \forall x\in\mathbb{R}$, dẫn tới hàm f có dạng (1).

Kết luận: tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng (1).

Như vậy, bài toán 6 đã có lời giải hoàn chỉnh. Tuy nhiên lời giải không còn sơ cấp nữa; mà phải vận dụng đến một số kiến thức toán học hiện đại (cao cấp); chẳng hạn như xây dựng quan hệ tương đương để phân hoạch tập hợp; vận dụng kiến thức về Nhóm, Nhóm con; vận dụng Tiên đề chọn. Liệu có thể có lời giải sơ cấp cho bài toán 6 này hay không? Tòa soạn TH&TT rất mong nhận được lời giải sơ cấp cho bài toán này của các em học sinh, các thầy cô giáo và bạn đọc quan tâm đến Phương trình hàm.

Sau đây ta sẽ chỉ ra một số ví dụ về hàm f.

1) Chọn $A=\mathbb{R}$. Khi đó, với mỗi số thực x thì lớp tương đương với phần tử đại diện x chính là $\mathbb{R}$, do đó $r(x)=c$, với c là hằng số. Ta có:

$$f(x)=g\big(r(x)\big)-r(x)=g(c)-c=a.$$

Vậy trong trường hợp này, $f(x)=a, \forall x\in\mathbb{R}$ (a là hằng số) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2) Chọn $A=\{0\}$. Khi đó do $x-r(x)\in A=\{0\}$ nên $r(x)=x$, $g(x)=0$. Như vậy

$$f(x)=g\big(r(x)\big)-r(x)=-x.$$

Bởi thế nên hàm $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3) Chọn $A=\mathbb{Z}$. Khi đó, với mọi số thực x thì lớp tương đương có phần tử đại diện x là

$$\overline{x}=\{y\in\mathbb{R}\mid y-x\in\mathbb{Z}\}=\{x+n\mid n\in\mathbb{Z}\}=x+\mathbb{Z}.$$

3.1) Chọn $r(x)=x-[x]=\{x\}$ (khi đó, nếu $z\in\overline{x}$ thì $z=x+m$ với m là một số nguyên nào đó, cho nên $r(z)=r(x+m)=\{x+m\}=\{x\}=r(x)$).

Chọn $g(x)=n$. Khi đó

$$f(x)=g\big(r(x)\big)-r(x)=n-x+[x].$$

Hàm số $f(x)=n-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ (n là hằng số nguyên) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Thật vậy, nếu $f(x)=n-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned} f\big(x+y+f(y)\big)&=n-\{x+y+f(y)\}\\ &=n-\{x+n+[y]\}\\ &=n-\{x\}=f(x). \end{aligned}$$

3.2) Chọn $r(x)=\{x\}$, $g(x)=[x]$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x)&=g\big(r(x)\big)-r(x)=[r(x)]-r(x)\\ &=[\{x\}]-\{x\}=-\{x\}. \end{aligned}$$

3.3) Chọn $r(x)=\{x\}$, $g(x)=[5\sin(\pi x)]$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x)&=g\big(r(x)\big)-r(x)\\ &=\big[5\sin\big(\pi(x-[x])\big)\big]+[x]-x. \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)=\big[5\sin\big(\pi\{x\}\big)\big]-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Thật vậy, nếu $f(x)=\big[5\sin\big(\pi\{x\}\big)\big]-\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}$ thì với mọi số thực x và y ta có:

$$y+f(y)=\big[5\sin\big(\pi\{y\}\big)\big]+y-\{y\}$$

$$=\big[5\sin\big(\pi\{y\}\big)\big]+[y], [y]\in\mathbb{Z}$$

cho nên

$$f(x+y+f(y))=\left[5\sin\left(\pi\left\{x+\left[5\sin\left(\pi\{y\}\right)\right]+[y]\right\}\right)\right]$$
$$-\left\{x+\left[5\sin\left(\pi\{y\}\right)\right]+[y]\right\}$$
$$=\left[5\sin\left(\pi\{x\}\right)\right]-\{x\}=f(x).$$

6. Trường hợp "tầm thường" $n=1$ **và** $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

Trong mục này chúng ta tiếp tục xem xét phương trình hàm $f(x+y+f(y))=f(x)$ nhưng với điều kiện là $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. Tức là sẽ giải bài toán:

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(x+y+f(y))=f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Trước khi tìm hiểu, giải bài toán này bạn đọc hãy xem lại bài toán 4 xem thử có thể áp dụng phương pháp giải của bài toán 4 vào bài toán này được không? Nếu tiến hành tương tự như bài toán 4 thì ta cũng chỉ thu được (4j) (ứng với $n=1$) và gặp bế tắc, bởi vì đa thức $P(x)=(x+c)^n-x^n$ (ứng với $n=1$) chỉ là đa thức hằng nên ta hầu như không khai thác thêm được tính chất nào cả. Dễ thấy rằng $f(x)=\alpha,\forall x>0$ (α là hằng số dương bất kỳ) là nghiệm hàm, nhưng ngoài nghiệm hàm này ra, có còn nghiệm hàm nào khác hay không? và làm thế nào để tìm được tất cả các nghiệm hàm. Đến đây, chúng ta thấy rằng cần phải học hỏi lại kinh nghiệm trong quá trình tìm hiểu và giải bài toán 6

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn* $f(x+y+f(y))=f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

Lời giải. Giả sử $A\neq\{0\}$ là một nhóm con (đối với phép toán cộng) bất kỳ của $\mathbb{R}$. Ta xây dựng một quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{R}^+$ như sau: với các số thực dương x, y; khi đó $x\sim y\Leftrightarrow x-y\in A$. Ta sẽ chứng minh $\sim$ là một quan hệ tương đương.

Với mọi số thực $x>0$ ta có $x-x=0\in A$ nên $x\sim x$. Vậy $\sim$ có tính phản xạ.

Với hai số thực dương x, y; nếu $x\sim y$ hay $x-y\in A$ thì $y-x=-(x-y)\in A$ hay $y\sim x$. Vậy $\sim$ có tính đối xứng.

Với các số thực dương x, y, z; nếu $x\sim y$ và $y\sim z$ thì $\begin{cases}x-y\in A\\ y-z\in A\end{cases}$

$$\Rightarrow x-z=(x-y)+(y-z)\in A\Rightarrow x\sim z.$$

Vậy $\sim$ có tính bắc cầu.

Như vậy $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}^+$. Do đó tập số thực dương $\mathbb{R}^+$ được phân hoạch thành các lớp tương đương. Từ mỗi lớp tương đương e ta chọn ra một phần tử y_e. Xét $r:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ là hàm số được xác định theo cách như sau: với mọi số thực $x>0$, tồn tại (duy nhất) lớp tương đương e sao cho $x\in e$ và ta đặt $r(x)=y_e\ (\in e)$. Cách chọn y_e cho thấy $x-r(x)\in A$ ($\forall x\in\mathbb{R}^+$). Giả sử g là hàm số $g:\mathbb{R}^+\to A$ sao cho $g(x)>x$ với mọi số $x>0$. Khi đó hàm số

$$f(x)=g(r(x))-r(x),\forall x\in\mathbb{R}^+\quad(1)$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Thật vậy, giả sử hàm số f xác định bởi (1), khi đó $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ với mọi số thực dương x, y, ta có: $y+f(y)=y+g\left(r(y)\right)-r(y)$

$$=\left(y-r(y)\right)+g\left(r(y)\right)\in A,$$
$$\left(x+y+f(y)\right)-x=y+f(y)\in A;$$

như vậy $x+y+f(y)$ và x cùng thuộc một lớp tương đương nên $r\left(x+y+f(y)\right)=r(x)$, do đó:

$$f\left(x+y+f(y)\right)=g\left(r(x+y+f(y))\right)-r\left(x+y+f(y)\right)$$
$$=g\left(r(x)\right)-r(x)$$
$$=f(x).$$

Vậy hàm số xác định bởi (1) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Ta sẽ chứng minh nếu hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(x+y+f(y))=f(x),\forall x>0,y>0$ (2) thì phải có dạng (1).

Đặt $A=\left\{a\in\mathbb{R}\,\middle|\,f(x+a)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}^+\text{ sao cho }x+a>0\right\}$.

Từ (2) ta có $x+f(x)\in A$ với mọi số thực x dương. Hiển nhiên A có từ hai phần tử trở lên.

Ta sẽ chứng minh rằng A là một nhóm con của $\mathbb{R}$ đối với phép toán cộng.

Hiển nhiên $0 \in A$. Giả sử $a \in A$. Giả sử $x > 0$ sao cho $x + (-a) > 0$. Khi đó

$$f(x) = f((x-a)+a) = f(x-a) \Rightarrow f(x-a) = f(x)$$

Như vậy $-a \in A$. Giả sử $a \in A, b \in A$. Giả sử $x > 0$ sao cho $x + a + b > 0$. Khi đó

$$2x + a + b > 0 \text{ nên } (x+a) + (x+b) > 0.$$

Như vậy, trong hai số $(x+a),(x+b)$ phải có ít nhất một số dương.

Giả sử $x + a > 0$ (trường hợp $x + b > 0$ được tiến hành tương tự). Do $x + a > 0, x + a + b > 0, b \in A$ nên $f(x+a+b) = f(x+a)$.

Do $x > 0, x + a > 0$ và $a \in A$ nên $f(x+a) = f(x)$.

Vậy $f(x+a+b) = f(x)$. Do đó $a + b \in A$. Như vậy A là một nhóm con của $\mathbb{R}$.

Ta định nghĩa một quan hệ $\sim$ trên $\mathbb{R}^+$ như sau: Với hai số thực dương x và y, khi đó

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A.$$

Khi đó $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}^+$. Do đó tập số thực dương $\mathbb{R}^+$ được phân hoạch thành các lớp tương đương. Từ mỗi lớp tương đương e ta chọn ra một phần tử y_e. Xét $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm số được xác định theo cách như sau: với mọi số thực $x > 0$, tồn tại (duy nhất) lớp tương đương e sao cho $x \in e$ và ta đặt $r(x) = y_e (\in e)$. Cách chọn y_e cho thấy $x - r(x) \in A$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$).

Đặt $g(x) = x + f(x), \forall x > 0$. Do (2) nên $g(x) = x + f(x) \in A$, dẫn tới $g : \mathbb{R}^+ \to A$. Do $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ nên $g(x) > x$. Với mọi số thực dương x, ta có $x - r(x) \in A$ nên

$$f(x) = f\big((x - r(x)) + r(x)\big) = f\big(r(x)\big) = g\big(r(x)\big) - r(x).$$

Vậy hàm f có dạng (1).

Như vậy, tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng (1).

Chú ý. *Ta sẽ chỉ ra một số ví dụ về hàm f.*

1) Chọn nhóm con $A = \mathbb{R}$. Khi đó, với mỗi số thực $x > 0$ thì lớp tương đương với phần tử đại diện x là

$$\overline{x} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y \sim x\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+.$$

Do đó $r(x) = c$, với c là hằng số thực dương bất kỳ. Chọn $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ là hàm số $g(x) = d$, với d là hằng số, $d > c$. Khi đó

$$f(x) = g\big(r(x)\big) - r(x) = d - c = e, \forall x > 0.$$

Vậy hàm số $f(x) = e, \forall x > 0$ (với e là hằng số dương) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

2) Chọn nhóm con $A = \mathbb{Z}$. Khi đó, với mỗi số thực $x > 0$ thì lớp tương đương với phần tử đại diện x là $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y \sim x\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y - x \in \mathbb{Z}\}$.

2.1) Chọn $r(x) = 1 + \{x\}, \forall x > 0$ và chọn $g(x) = \left[x + 1 + 100\sin^2(2\pi x)\right], \forall x > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= g\big(r(x)\big) - r(x) \\ &= \left[1 + \{x\} + 1 + 100\sin^2\big(2\pi(1 + \{x\})\big)\right] - 1 - \{x\} \\ &= \left[2 + \{x\} + 100\sin^2\big(2\pi\{x\}\big)\right] - 1 - \{x\} \\ &= \left[2 + \{x\} + 100\sin^2(2\pi x)\right] - 1 - \{x\}. \end{aligned}$$

Thử lại, với $f(x) = \left[2 + \{x\} + 100\sin^2(2\pi x)\right] - 1 - \{x\}$, $\forall x > 0$ thì

$$x + y + f(y) = x + [y] + \left[2 + \{y\} + 100\sin^2(2\pi y)\right] - 1,$$

$$\{x + y + f(y)\} = \{x\},$$

$$\sin\big(2\pi(x + y + f(y))\big) = \sin(2\pi x),$$

$$\begin{aligned} f\big(x + y + f(y)\big) &= \left[2 + \{x\} + 100\sin^2(2\pi x)\right] - 1 - \{x\} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2.2) Chọn $r(x) = 2 + \{x\}, \forall x > 0$ và chọn $g(x) = \left[x + \ln(x + 2021)\right] > x, \forall x > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= g\big(r(x)\big) - r(x) \\ &= \left[2 + \{x\} + \ln\big(\{x\} + 2023\big)\right] - 2 - \{x\}, \forall x > 0. \end{aligned}$$

Thử lại: với $f(x) = \left[2 + \{x\} + \ln\big(\{x\} + 2023\big)\right] - 2 - \{x\}$, $\forall x > 0$ thì với mọi $x > 0$, $y > 0$ ta có:

$$x + y + f(y) = x + [y] + \left[2 + \{y\} + \ln\big(\{y\} + 2023\big)\right] - 2,$$

$$\{x + y + f(y)\} = \{x\},$$

$$\begin{aligned} f\big(x + y + f(y)\big) &= \left[2 + \{x\} + \ln\big(\{x\} + 2023\big)\right] - 2 - \{x\} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 68

Problem. *The time T, correct to the nearest minute, of making a box is 5 minutes. What are the limits of the time making 20 boxes ?*

Solution. To make one box, the actual time T needed is in the half-closed interval [4.5 ; 5.5). Therefore the lower limit to make 20 boxes is 20×4.5 = 90 minutes ; and the upper limit to make 20 boxes is 20×5.5 = 110 minutes. Hence the answer is 90 minutes and 110 minutes.

TỪ VỰNG

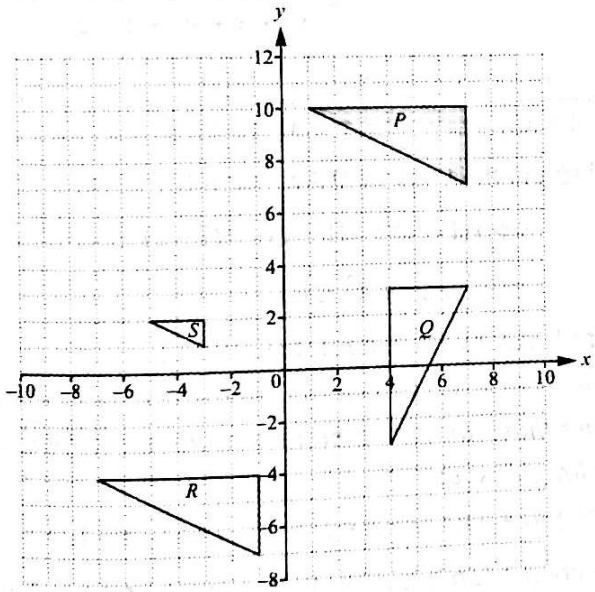
correct to	: *làm tròn đến*
half-closed interval	: *nửa đoạn đóng*
lower limit	: *cận dưới*
upper limit	: *cận trên*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 65

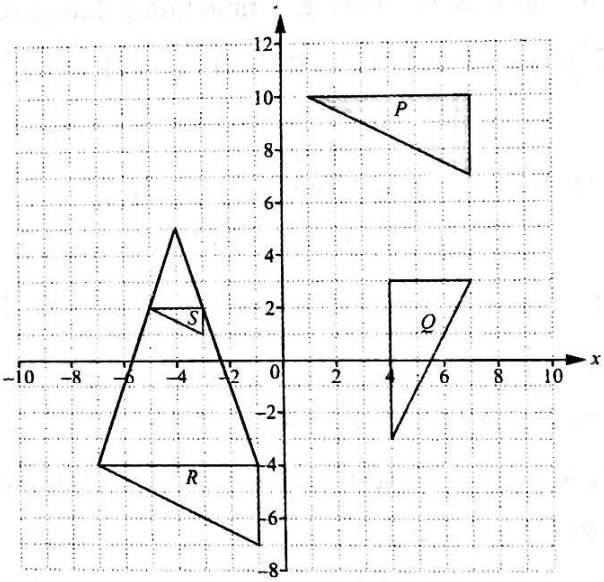
Bài toán. *Xác định phép biến hình duy nhất biến hình **S** thành hình* ℝ.***R***.



Lời giải. Ta thấy phép biến hình thỏa mãn yêu cầu đề bài phải là phép vị tự. Từ đó ta cần xác định tâm và tỉ số của phép vị tự này.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng mỗi cạnh của hình ***R*** bằng ba lần mỗi cạnh của hình ***S***, vì vậy tỉ số của phép vị tự cần tìm là 3.

Tâm của phép vị tự là điểm có tọa độ (–4 ; 5) có thể xác định như hình vẽ sau:



Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Phan Lê Thúc Bảo*, 10 Toán 1, *Phan Thị Minh Châu*, *Lê Thủy Tiên*, 10 Toán 2, *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 48. *Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\le\frac{5}{2}.$$

Khi gặp bài toán này thì định hướng đầu tiên ta có thể nghĩ đến là biến đổi tương đương để khử mẫu số, từ đó ta có lời giải sau.

Lời giải 1. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$2\left[(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)+(1+x)(1+y)\right]\le 5(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx+2x+2y+2z+3)\le 5(xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx+5)\le 5(xyz+xy+yz+zx+2)$$

(vì $x+y+z=1$)

$$\Leftrightarrow 5xyz+3xy+3yz+3zx\ge 0 \quad (1).$$

Vì x, y, z là ba số thực không âm nên bất đẳng thức (1) luôn đúng.

Ta cũng có thể nghĩ đến việc giữ nguyên một biểu thức và thực hiện phép cộng hai biểu thức còn lại ở vế trái bất đẳng thức cần chứng minh, từ đó ta có lời giải sau:

Lời giải 2. Ta có:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1+x}+\frac{y+z+2}{yz+y+z+1}$$

$$\le\frac{1}{1+x}+\frac{y+z+2}{y+z+1} \quad (\text{vì } yz\ge 0)$$

$$=\frac{1}{1+x}+1+\frac{1}{y+z+1}=1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}$$

$$=1+\frac{3}{2+x(1-x)}\le\frac{5}{2}$$

(vì từ giả thiết suy ra $0\le x\le 1\Rightarrow x(1-x)\ge 0$).

Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Schwarz để giải bài toán này. Muốn vậy phải biến đổi phù hợp vế trái của bất đẳng thức ở đề bài rồi mới áp dụng, ta có lời giải sau:

Lời giải 3. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge\frac{1}{2} \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=\frac{x^2}{x^2+x}+\frac{y^2}{y^2+y}+\frac{z^2}{z^2+z}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+x+y^2+y+z^2+z}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\ge\frac{1}{2} \quad (3)$$

(vì từ giả thiết suy ra $0\le x,y,z\le 1$

$\Rightarrow x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)\ge 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1$).

Từ (3) suy ra bất đẳng thức (2) đúng.

Đơn giản mẫu số của các thừa số ở vế trái bất đẳng thức cần chứng minh, sau đó đặt ẩn phụ, ta có lời giải sau:

Lời giải 4. Đặt $a=x+1, b=y+1, c=z+1$.

Ta có $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 1$ thỏa mãn $a+b+c=4$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)\le 5abc \quad (4).$$

Mặt khác, ta có $a\ge 1, b\ge 1, c\ge 1$ thỏa mãn $a+b+c=4$ suy ra: $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$\Rightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\ge 0$

$\Rightarrow abc-ab-bc-ca+3\ge 0$

$\Rightarrow 5abc \geq 2(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca-5)$ (5)

và $(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1) \geq 0$

$\Rightarrow ab+bc+ca-2(a+b+c)+3 \geq 0$

$\Rightarrow ab+bc+ca \geq 5$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra bất đẳng thức (4) đúng.

DƯƠNG VĂN SƠN

(GV THPT Kim Liên, huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An).

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và bạn *Đào Quang Anh*, 9E, TH, THCS Everest Hà Nội, **Hà Nội** cũng đưa ra một số cách giải tương tự như những lời giải trên của bạn *Dương Văn Sơn*, người giới thiệu đề toán. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 50 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2021.

BÀI TOÁN 50. *Trong hình vuông ABCD vẽ nửa đường tròn đường kính AD và cung AC với tâm là D. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC, DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K. Chứng minh PK bằng khoảng cách từ P đến AB.*

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi)

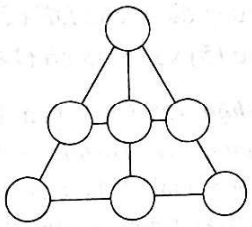
****

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI

(Đề đăng trên THTT số 517 tháng 7 năm 2020)

7 SỐ CÓ TỔNG BẰNG 2828

Đề bài. *Bạn hãy điền 7 số nguyên liên tiếp với tổng bằng 2828 vào hình 1 sao cho mỗi số nằm trong một hình tròn và các tổng ba số thẳng hàng đều bằng nhau. Biết rằng số nhỏ nhất nằm bên trong tam giác.*

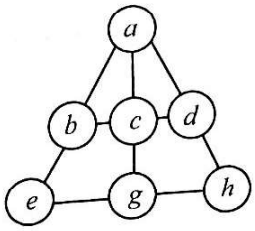


Hình 1

Lời giải. Gọi $x+1$ là số nguyên nhỏ nhất trong 7 số nguyên liên tiếp. Xét tổng 7 số đó:

$$(x+1)+(x+2)+...+(x+7) = 7x+1+2+...+7$$
$$= 7x+28 = 2828,$$

suy ra $x = 400$. Ta chuyển về xét bài toán đơn giản hơn khi trừ đi $x = 400$ trong mỗi hình tròn: điền 7 số nguyên liên tiếp từ 1 đến 7 vào hình 1 sao cho các tổng ba số thẳng hàng đều bằng nhau. Tổng 7 số nguyên liên tiếp từ 1 đến 7 là 28. Gọi tổng ba số thẳng hàng là s. Đặt 7 số trong các hình tròn là a, b, c, d, e, g, h như ở hình 2. Theo giả thiết có các đẳng thức sau:



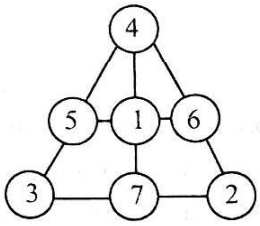
Hình 2

$$a+b+e = a+c+g = a+d+h$$
$$= b+c+d = e+g+h = s.$$

Cộng ba tổng đầu tiên trong các đẳng thức nêu trên và sử dụng các đẳng thức nêu trên ta được:

$$a+b+e+a+c+g+a+d+h = 3s$$
$$= 2a+28 = 3a+2s.$$

Từ đó $s = 3a$ và $a+2s = 28$, suy ra $a+6a = 28$, dẫn đến $a = 4$ và $s = 12$. Thay $a = 4$ vào các đẳng thức trên với số nhỏ nhất bằng 1 nằm bên trong tam giác ta tìm được nghiệm như ở hình 3. Cộng thêm $x = 400$ vào mỗi số vừa tìm ra thì được một nghiệm của bài toán. Đổi chỗ cặp số (405; 403) và cặp số (406; 402) ta được nghiệm thứ hai. Bài toán có 2 nghiệm.



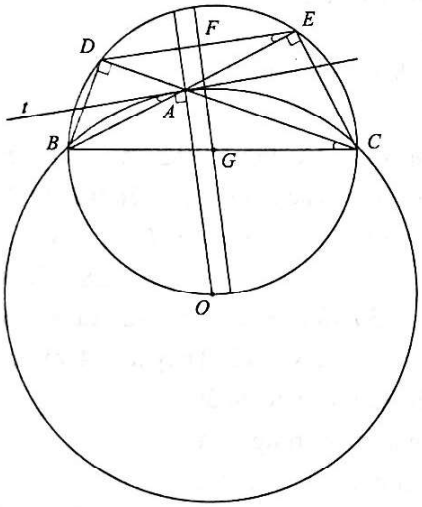
Hình 3

Hoan nghênh bạn *Phan Thế Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý, **Hà Nam** có lời giải đầy đủ; các bạn sau tìm ra một nghiệm của bài toán: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, h. Điện Biên, **Điện Biên**; *Trần Đại Bảo Khanh*, 12A7, THPT Hai Bà Trưng, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế.**

VÂN KHANH *(Hà Nội)*

BÀI TOÁN 56 (Mathematical Excalibur, Vol. 22, No 3, Feb. 19-Apr. 19). *BCED là tứ giác lồi sao cho $\widehat{BDC} = \widehat{CEB} = 90^0$ và BE cắt CD tại A. Gọi F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh DE, BC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng AO và FG song song với nhau.*

Lời giải. Cách 1.



Do $\widehat{BDC} = \widehat{CEB} = 90^0$ nên tứ giác $BCED$ nội tiếp trong đường tròn tâm G là trung điểm của BC.

Do F là trung điểm của DE nên $GF \perp DE$ (1).

Ta có:

$$\widehat{CAO} = \frac{180^0 - \widehat{COA}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{COA}}{2}$$

$$= 90^0 - \widehat{CBE} = 90^0 - \widehat{CDE} = 90^0 - \widehat{ADE}.$$

Suy ra $OA \perp DE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OA \,//\, FG$.

Cách 2. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $\widehat{BAC} > 90^0$ nên BC không là đường kính của đường tròn này và D, E nằm ngoài đường tròn này.

Ta có: $EA.EB = EO^2 - R^2$; $DA.DC = DO^2 - R^2$.

Do đó: $EO^2 - DO^2 = EA.EB - DA.DC$

$$= EA(EA + AB) - DA(DA + AC)$$

$$= EA^2 - DA^2 + EA.AB - DA.AC$$

$$= EA^2 - DA^2.$$

Do đó $OA \perp DE$.

Do $\widehat{BDC} = \widehat{CEB} = 90^0$ nên tứ giác $BCED$ nội tiếp trong đường tròn tâm G là trung điểm của BC.

Do F là trung điểm của DE nên $GF \perp DE$.

Từ đó ta suy ra $OA \,//\, FG$.

Cách 3. Qua A dựng tiếp tuyến At với đường tròn (O). Khi đó $tA \perp OA$ (1). Ta có:

$\widehat{tAB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) (2).

Mặt khác vì $\widehat{BDC} = \widehat{CEB} = 90^0$ nên tứ giác $BCED$ nội tiếp trong đường tròn tâm G là trung điểm của BC. Khi đó: $\widehat{DEB} = \widehat{DCB}$ hay $\widehat{DEB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$) (3). Từ (2) và (3) suy ra:

$\widehat{tAB} = \widehat{DEB}$, do đó $tA \,//\, DE$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $AO \perp DE$ (5). Cũng vì F là trung điểm của DE nên $GF \perp DE$ (6).

Từ (5) và (6) ta có $OA \,//\, FG$.

Nhận xét. Cách giải 1 của *Jon Glimms*, *Hei Chun Leung* và *Toshihiro Shimizu* (Kawasaki, **Japan**), Cách giải 2 là của *Prithwijit* (HBCSE, Mumbai, **India**). Cách giải thứ 3 là của bạn *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre** và cách giải tương tự thuộc về bạn *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.** Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng đưa ra một cách giải đúng bằng phương pháp tọa độ. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

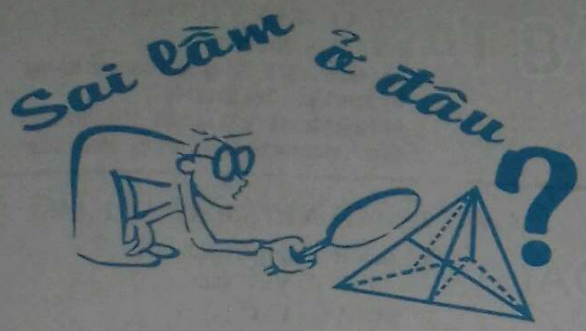
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 58. *Hình bát giác đều ABCDEFGH có diện tích là n. Gọi m là diện tích của hình tứ giác ACEG. Giá trị của $\frac{m}{n}$ là:*

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **E.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ CHÍNH XÁC CHƯA?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 520, *tháng* 10 *năm* 2020)

Phân tích sai lầm. 1) Bạn học sinh đã hiểu nhầm giả thiết đã cho của bài toán: bài toán đã cho $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ nhưng trong lời giải của bạn $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

2) Ngay trong trường hợp nếu bài toán cho $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì cách giải của bạn học sinh đó cũng không đúng vì đã nhầm lẫn về điều kiện cần và điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

• Để bài toán hay hơn và để dễ nhìn thấy sai lầm trong lời giải của bạn học sinh đó, ta giả thiết yêu cầu của bài toán là: *Tìm giá trị của m để hàm số*

$$f(x) = -x^4 + (m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - 3m + 5$$

đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải đúng. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x + m + 2;$$

Điều kiện cần. Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. Khi đó: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Điều kiện đủ. Với $m = -2$ ta có:

$$f(x) = -x^4 + 11$$

$$f'(x) = -4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$

Do khi qua $x = 0$, $f'(x)$ đổi dấu từ + sang − nên $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $m = -2$.

Nhận xét. 1) Lời giải trên đã sử dụng quy tắc 1. Một số bạn đã phát hiện được sai lầm của bạn học sinh đó là nhầm giả thiết bài toán là cực tiểu thành cực đại, nhưng lời giải của các bạn này đưa ra vẫn không đúng. Lí do là vì $f''(0)$ có chứa tham số nên nếu với giá trị của tham số làm $f''(0) = 0$ thì cần quay về quy tác 1 để xét cực trị (như lời giải trên), nếu không lời giải có thể phạm sai lầm như sau:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \Phi.$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn đầu bài. Tuy nhiên ta thấy với $m = -2$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

2) Tuyên dương hai bạn đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng bài này: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

KIHIVI

SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM $f(|x|)$!

Trong giờ Toán thầy giáo ra đề bài như sau:

Bài toán. *Cho hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm*

$$f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ *là*

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2.

Sau đây là lời giải của bạn ***Ánh***:

Đạo hàm của hàm số $f(|x|)$ là:

$$f'(|x|) = (|x|+1)^4(|x|-2)^5(|x|+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $f'(|x|) = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$, và $f'(|x|)$ đổi dấu mỗi khi x đi qua các giá trị $x = 2$ và $x = -2$.

Vậy $f(|x|)$ có 2 điểm cực trị. Chọn đáp án D.

Theo em, lời giải của bạn Ánh có đúng không. Nếu không, lời giải của em thế nào!

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM $f(|x|)$!

Trong giờ Toán thầy giáo ra đề bài như sau:

Bài toán. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm*

$$f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2.

Sau đây là lời giải của bạn ***Ánh***:

Đạo hàm của hàm số $f(|x|)$ là:

$$f'(|x|) = (|x|+1)^4(|x|-2)^5(|x|+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $f'(|x|) = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$, và $f'(|x|)$ đổi dấu mỗi khi x đi qua các giá trị $x = 2$ và $x = -2$.

Vậy $f(|x|)$ có 2 điểm cực trị. Chọn đáp án D.

Theo em, lời giải của bạn Ánh có đúng không. Nếu không, lời giải của em thế nào!

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 527 (5.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

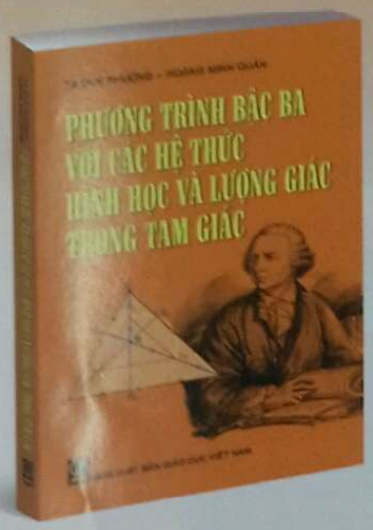
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com