TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 526
Tháng 4 - 2021
ISSN: 2734-9284

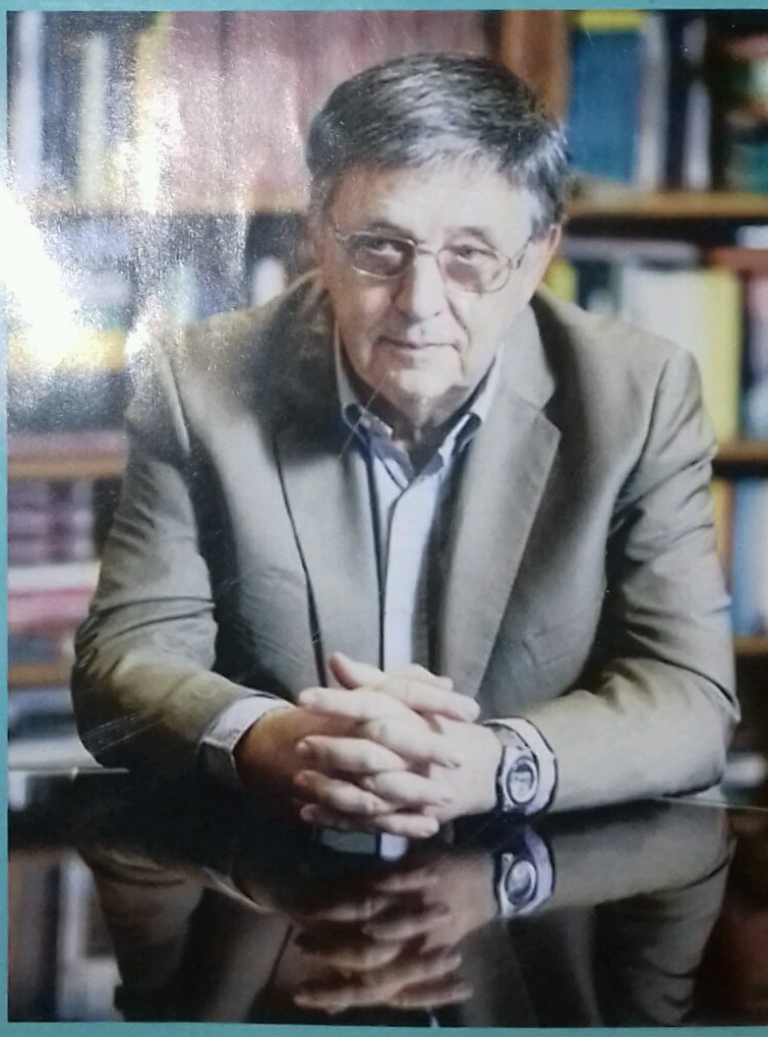
VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Emai: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

GIẢI ABEL NĂM 2021

Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy ngày 17-3-2021 đã quyết định trao giải Abel năm 2021, giải thưởng được ví như "Nobel Toán học", cho hai nhà toán học *Avi Wigderson* (Viện Nghiên cứu Cao cấp tại Princeton, Mỹ) và *László Lovász* (Viện Toán học Alfréd Rényi và Đại học Eötvös Loránd tại Budapest, Hungary)

Avi Wigderson



László Lovász

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG
LỚP 6

BÀI TOÁN BỘI CHUNG, BỘI CHUNG NHỎ NHẤT VÀ ỨNG DỤNG

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài toán bội chung (BC), bội chung nhỏ nhất (BCNN) của các số tự nhiên được học sinh học ở lớp 6, nhưng được ứng dụng rất nhiều trong thực tế về quy luật các số tự nhiên. Bài viết này đưa ra một số ứng dụng của của BC, BCNN trong giải toán và trong thực tế. Để bắt đầu chúng ta nhắc lại một vài kiến thức bản

1. *Với* $x,a,b,c\in\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $x\vdots a, x\vdots b, x\vdots c$ *thì* $x\vdots \text{BCNN}(a,b,c)$, kí hiệu $\text{BCNN}(a,b)$ là $[a,b]$.

2. *Với* $a,b\in\mathbb{N}^*$ *thì* $a.b=(a,b).[a,b]$, kí hiệu $\text{ƯCLN}(a,b)$ *là* (a,b).

3. *Với* $a,b,m\in\mathbb{N}^*$ *thì* $[am,bm]=m.[a,b]$.

I. VẬN DỤNG BỘI CHUNG, BỘI CHUNG NHỎ NHẤT ĐỂ TÌM CÁC SỐ

Bài 1.1. *Một số tự nhiên chia cho 4 dư 3, chia cho 17 dư 9, chia cho 19 dư 13. Hỏi số đó chia cho 1292 dư bao nhiêu?*

Lời giải. Cách 1. Gọi x là số tự nhiên cần tìm, $x\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$$x=4a+3=17b+9=19c+13,\left(a,b,c\in\mathbb{N}^*\right).$$

Từ $4a+3=17b+9\Rightarrow a=4b+1+\dfrac{b+2}{4}\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow b+2\vdots 4\Rightarrow b=4k-2$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra $a=4.(4k-2)+1+k=17k-7$ (1).

Từ $4a+3=19c+13\Rightarrow a=5c+3-\dfrac{c+2}{4}\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow c+2\vdots 4\Rightarrow c=4t-2$, $t\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra: $a=5.(4t-2)+3-t=19t-7$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra:

$$17k-7=19t-7\Rightarrow k=19n, t=17n, n\in\mathbb{N}^*.$$

Do đó: $x=4a+3=4(17k-7)+3=68k-25$

$=68.19n-25=1292n-25$

$=1292n-25=1292(n-1)+1292-25$

$=1292(n-1)+1267$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Vậy số tự nhiên đã cho chia cho 1292 dư 1267.

Cách 2. Gọi x là số tự nhiên cần tìm, $x\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra: $x-3\vdots 4\Rightarrow x-3+28\vdots 4\Rightarrow x+25\vdots 4$;

$x-9\vdots 17\Rightarrow x-19+34\vdots 17\Rightarrow x+25\vdots 17$;

$x-13\vdots 19\Rightarrow x-13+38\vdots 19\Rightarrow x+25\vdots 19$.

Do đó: $x+25\vdots \text{BCNN}(4,17,19)$,

$\text{BCNN}(4,17,19)=4.17.19=1292$.

Suy ra: $x+25\vdots 1292\Rightarrow x+25=1292k$

$\Rightarrow x=1292k-25, k\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra: $x=1292(k-1)+1292-25$

$=1292(k-1)+1267, k\in\mathbb{N}^*$.

Vậy số tự nhiên đã cho chia cho 1292 dư 1267.

Cách 3. Gọi x là số tự nhiên cần tìm, $x\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $x=4a+3\Rightarrow 323x=1292a+969$, $a\in\mathbb{N}$ (1);

$x=17b+9\Rightarrow 76x=1292b+684$, $b\in\mathbb{N}$ (2);

$x=19c+13\Rightarrow 68x=1292c+884$, $c\in\mathbb{N}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$76x.15-68x.12-323x=1292.k-1317$

$\Rightarrow x=1292.(k-2)+1267$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Vậy số tự nhiên đã cho chia cho 1292 dư 1267.

Nhận xét. Cách 1 sử dụng phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên. Chỗ khó nhất trong cách 3 là kết hợp cả (1), (2) và (3) để tìm được số dư của x cho 1292. Cách 2 dựa vào tìm BCNN

để giải bài toán. Trong ba cách giải thì cách 2 dựa vào BCNN nhanh và gọn hơn.

Bài 1.2. a) *Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số. Biết rằng khi chia số đó cho 3 thì dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 6 thì dư 4, chia cho 7 thì dư 5, chia cho 8 thì dư 6.*

b) *Tìm số tự nhiên khác 0 nhỏ nhất, lớn nhất có 4 chữ số. Biết rằng khi chia số đó cho 30 dư 17, chia cho 40 dư 27 và chia cho 50 dư 37.*

Lời giải. a) Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $(x \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$(x+2)\vdots 3, (x+2)\vdots 4, (x+2)\vdots 6, (x+2)\vdots 7, (x+2)\vdots 8.$

Suy ra: $x+2\vdots \text{BCNN}(3,4,6,7,8)$, $x+2>2$.

Suy ra: $x+2\vdots 168 \Leftrightarrow x=168k-2, k\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $100\le x<1000 \Rightarrow 100\le 168k-2<1000$

$$\Leftrightarrow \frac{102}{168}\le k<\frac{1002}{168}\Leftrightarrow \frac{17}{28}\le k<5\frac{27}{28}.$$

Do $k\in\mathbb{N}$ nên $k\in\{1;2;3;4;5\}$. Để x lớn nhất thì $k=5$. Khi đó: $x=168.5-2=838$.

Vậy số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn bài toán là 838.

b) Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $(x\in\mathbb{N}^*)$.

Ta có: $(x+13)\vdots 30, (x+13)\vdots 40, (x+13)\vdots 50.$

Suy ra: $(x+13)\vdots \text{BCNN}(30,40,50)$;

$\text{BCNN}(30,40,50)=600$. Do đó: $(x+13)\vdots 600$

$\Rightarrow x+13=600k \Leftrightarrow x=600k-13$, $k\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$$1000\le x<10000 \Rightarrow 1000\le 600k-13<10000$$

$$\Leftrightarrow 1\frac{413}{600}\le k<16\frac{413}{600}.$$

Do $k\in\mathbb{N}^*$ nên $k\in\{2;3;...;16\}$.

+ Để x là số nhỏ nhất có 4 chữ số thì $k=2$. Khi đó: $x=600.2-13=1187$, thỏa mãn đề bài. Vậy số tự nhiên có 4 chữ số nhỏ nhất cần tìm là 1187.

+ Để x là số lớn nhất có 4 chữ số thì $k=16$. Khi đó: $x=600.16-13=9587$, thỏa mãn đề bài. Vậy số tự nhiên có 4 chữ số lớn nhất cần tìm là 9587.

Nhận xét. Trong cách giải phần b), do $x=600k-13$ nên x nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow$ k nhỏ nhất (lớn nhất). Do đó ta đã chọn $k=2$ và $k=16$. Nếu lần lượt cho $k=2, 3, ..., 16$ rồi tính x tương ứng, sau đó chọn k ứng với x nhỏ nhất, lớn nhất thì cũng được kết quả nhưng lời giải sẽ dài hơn.

Bài 1.3. a) *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, lớn nhất trong khoảng từ 1000 đến 2000. Biết rằng số đó chia hết cho 3, chia cho 5 dư 1, chia cho 7 dư 5.*

b) *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, lớn nhất có 4 chữ số. Biết rằng số đó chia cho 30, cho 36, cho 40 có số dư theo thứ tự là 7, 13, 17.*

Lời giải. a) Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, (x\in\mathbb{N}, 1000\le x<2000)$. Ta có:

$$x\vdots 3\Rightarrow x+9\vdots 3;$$
$$x-1\vdots 5\Rightarrow x-1+10\vdots 5\Rightarrow x+9\vdots 5;$$
$$x-5\vdots 7\Rightarrow x-5+14\vdots 7\Rightarrow x+9\vdots 7.$$

Do đó: $x+9\vdots \text{BCNN}(3,5,7), \text{BCNN}(3,5,7)=105$.

Suy ra: $x+9\vdots 105\Rightarrow x+9=105k\Rightarrow x=105k-9$, $k\in\mathbb{N}$. Ta có: $1000<x<2000$

$$\Rightarrow 1000<105k-9<2000\Leftrightarrow 9\frac{64}{105}<k<19\frac{14}{15}.$$

Do $k\in\mathbb{N}$ nên $k\in\{10;11;...;19\}$. Để x là số tự nhiên nhỏ nhất thì $k=10$. Khi đó:

$x=105.10-9=1041$, thỏa mãn đề bài.

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là: 1041.

Để x là số tự nhiên lớn nhất $k=19$. Khi đó:

$x=105.19-9=1986$, thỏa mãn đề bài.

Vậy số tự nhiên lớn nhất cần tìm là: 1986.

b) Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, (x\in\mathbb{N}, 1000\le x<10000)$. Ta có:

$$x-7\vdots 30\Rightarrow x-7+30\vdots 30\Rightarrow x+23\vdots 30;$$
$$x-13\vdots 36\Rightarrow x-13+36\vdots 36\Rightarrow x+23\vdots 36;$$
$$x-17\vdots 40\Rightarrow x-17+40\vdots 40\Rightarrow x+23\vdots 40.$$

Do đó: $x+23\vdots \text{BCNN}(30,36,40)$, $x+23\vdots 360$.

Suy ra: $x+23=360k\Rightarrow x=360k-23, k\in\mathbb{N}^*$.

Ta có: $1000\le x<10000$

$$\Rightarrow 1000\le 360k-23<10000\Leftrightarrow 2\frac{101}{120}\le k<27\frac{101}{120}.$$

Do $k\in\mathbb{N}^*$ nên $k\in\{3;4;...;27\}$.

Để x là số nhỏ nhất có 4 chữ số thì $k=3$. Khi đó: $x=360.3-23\Rightarrow x=1057$, thỏa mãn đề bài. Vậy số tự nhiên có 4 chữ số nhỏ nhất cần tìm là 1057.

Để x là số lớn nhất có 4 chữ số thì $k = 27$. Khi đó: $x = 360.27 - 23 \Rightarrow x = 9697$, thỏa mãn đề bài.

Vậy số tự nhiên có 4 chữ số lớn nhất cần tìm là 9697.

Bài 1.4. *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, lớn nhất có 3 chữ số. Biết rằng số đó chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư thứ tự là 2, 3, 4.*

Lời giải. Cách 1. Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, (x \in \mathbb{N}, 100 \le x < 1000)$. Ta có:

$x = 3a + 2, a \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x = 6a + 4$, nên $2x$ chia cho 3 dư 1;

$x = 5b + 3, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x = 10b + 6$, nên $2x$ chia cho 5 dư 1;

$x = 7c + 4, c \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x = 14c + 8$, nên $2x$ chia cho 7 dư 1.

Do đó $2x - 1 \vdots \text{BCNN}(3,5,7) \Rightarrow 2x - 1 \vdots 105$. Suy ra:

$$2x - 1 = 105k \Leftrightarrow 2x = 105k + 1, k \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $100 \le x < 1000 \Rightarrow 200 \le 105k + 1 < 2000$

$$\Leftrightarrow 1\frac{94}{105} \le k < 19\frac{4}{105}.$$

Do $k \in \mathbb{N}^*$, k lẻ nên $k \in \{3; 5; 7; ...; 19\}$.

Để x là số nhỏ nhất có 3 chữ số thì $k = 3$. Khi đó: $2x = 105.3 + 1 \Leftrightarrow x = 158$, thỏa mãn đề bài.

Vậy số có 3 chữ số nhỏ nhất cần tìm là 158.

Để x là số lớn nhất có 3 chữ số khi đó k = 19. Khi đó: $2x = 105.19 + 1 \Leftrightarrow x = 998$, thỏa mãn đề bài. Vậy số có 3 chữ số lớn nhất cần tìm là 998.

Cách 2. Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, (x \in \mathbb{N}, 100 \le x < 1000)$. Ta có :

$x = 3a + 2, a \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 52 = 3a + 54 \vdots 3;$

$x = 5b + 3, b \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 52 = 5b + 55 \vdots 5;$

$x = 7c + 4, c \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 52 = 105c + 56 \vdots 7.$

Suy ra: $x + 52 \vdots \text{BCNN}(3,5,7) \Rightarrow x + 52 \vdots 105$.

Do đó : $x = 105k - 52, k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $100 \le x < 1000 \Rightarrow 100 \le 105k - 52 < 1000$

$$\Leftrightarrow 1\frac{47}{105} \le k < 10\frac{2}{105}.$$

Do $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{2; 3; ...; 10\}$.

Để x là số nhỏ nhất có 3 chữ số thì $k = 2$. Khi đó: $x = 105.2 - 52 = 158$, thỏa mãn đề bài. Vậy số có 3 chữ số nhỏ nhất cần tìm là 158.

Để x là số lớn nhất có 3 chữ số thì $k = 10$. Khi đó: $x = 105.10 - 52 = 998$, thỏa mãn đề bài. Vậy số có 3 chữ số lớn nhất cần tìm là 998.

Nhận xét. Trong cách 1), do $2x = 105k + 1$ nên k phải là số lẻ. Nếu không chú ý đến điều này mà lấy cả k chẵn thì x có thể không nguyên (chẳng hạn với $k = 2$).

Bài 1.5. *Cho 4 số tự nhiên liên tiếp khác 0 là $x, x+1, x+2, x+3$. Biết rằng $x \vdots 5, x+1 \vdots 7, x+2 \vdots 9, x+3 \vdots 11$. Tìm 4 số tự nhiên liên tiếp trên đều trong khoảng từ 8000 đến 10000.*

Lời giải. Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $x, x+1, x+2, x+3, (x \in \mathbb{N}^*)$. Ta có :

$x \vdots 5 \Rightarrow 2x \vdots 5 \Rightarrow 2x - 5 \vdots 5;$,

$x + 1 \vdots 7 \Rightarrow 2x + 2 \vdots 7 \Rightarrow 2x + 2 - 7 \vdots 7 \Rightarrow 2x - 5 \vdots 7;$

$x + 2 \vdots 9 \Rightarrow 2x + 4 \vdots 9 \Rightarrow 2x + 4 - 9 \vdots 9 \Rightarrow 2x - 5 \vdots 9;$

$x + 3 \vdots 11 \Rightarrow 2x + 6 \vdots 11 \Rightarrow 2x + 6 - 11 \vdots 11 \Rightarrow 2x - 5 \vdots 11.$

Do đó: $2x - 5 \vdots \text{BCNN}(5,7,9,11) \Rightarrow 2x - 5 \vdots 3465$

$\Leftrightarrow 2x = 3465k + 5, k \in \mathbb{N}^*$, k lẻ.

Ta có: $8000 < x < 10000 \Leftrightarrow 16000 < 2x < 20000$

$\Rightarrow 16000 < 3465k + 5 < 20000$

$\Leftrightarrow 4\frac{61}{99} < k < 5\frac{178}{231} \Rightarrow k = 5$. Suy ra: $2x = 3465.5 + 5$

$\Rightarrow x = 8665$. Khi đó 4 số tự nhiên liên tiếp là: 8665; 8666; 8667; 8668, thỏa mãn đề bài. Vậy bốn số cần tìm là: 8665; 8666; 8667; 8668.

Bài 1.6. *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 4 chữ số đầu tiên là 2003 mà nó đồng thời chia hết cho 18; 24; 42.*

Lời giải. Gọi số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là x, $x \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $x \vdots 18, x \vdots 24, x \vdots 42$.

Suy ra : $x \vdots \text{BCNN}(18,24,42) \Rightarrow x \vdots 504$.

+ Nếu x có dạng $\overline{2003a}$, a là một chữ số thì từ $x = 20030 + a = (39.504 + 374 + a) \vdots 504$ ta có: $(374 + a) \vdots 504$, nhưng $374 \le 374 + a < 384$, vô lí.

+ Nếu x có dạng $\overline{2003ab}$, với a, b là các chữ số thì từ $x = 200300 + \overline{ab} = \left(397.504 + 212 + \overline{ab}\right) \vdots 504$ ta có: $212 + \overline{ab} \vdots 504$, nhưng $212 \le 212 + \overline{ab} < 312$, vô lí.

+ Nếu x có dạng $\overline{2003abc}$, với a,b,c là các chữ số thì từ $x = 2003000 + \overline{abc}$

$= \left(3974.504 + 104 + \overline{abc}\right) \vdots 504$ ta có: $104 + \overline{abc} \vdots 504$. Nhưng $104 \le 104 + \overline{abc} < 1104$ nên $104 + \overline{abc} \in \{504; 1008\}$. Suy ra $\overline{abc} \in \{400; 904\}$.

Để x nhỏ nhất thì $\overline{abc}$ nhỏ nhất và $\overline{abc} = 400$. Vậy số nhỏ nhất cần tìm là 2003400.

Bài 1.7. *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia hết cho* 41 *và khi chia số đó cho* 8, 10, 15, 20 *thì được các số dư thứ tự là* 5, 7, 12, 17.

Lời giải. Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $x + 3$ chia hết cho 8, 10, 15, 20; $x \vdots 41$.

Suy ra: $x + 3 \vdots \text{BCNN}(8,10,15,20) \Rightarrow x + 3 \vdots 120$

$\Rightarrow x + 3 = 120k \Leftrightarrow x = 120k - 3$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Vì $x \vdots 41 \Rightarrow x = 41t$, $t \in \mathbb{N}^*$. Suy ra:

$$120k - 3 = 41t \Leftrightarrow t = \frac{120k - 3}{41} = 3k - \frac{3(k+1)}{41} \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra: $k + 1 \vdots 41 \Rightarrow k = 41m - 1$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Do đó: $x = 120.(41m - 1) - 3 = 4920m - 123$.

Để x nhỏ nhất thì $m = 1$. Khi đó:

$x = 4920.1 - 123 = 4797$. Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là 4797.

Bài 1.8. *Cho ba tập hợp:*

$A = \{1; 4; 7; 10; ...; 2023\}$, $B = \{1; 5; 9; 13; ...; 2021\}$, ,

$C = \{1; 6; 11; 16; ...; 2021\}$. *Tìm tập hợp X gồm các phần tử thuộc cả ba tập hợp trên. Tính tổng các phần tử của tập hợp X.*

Lời giải. Gọi $x \in X$ là phần tử thuộc cả ba tập hợp A, B, C, với $x \in \mathbb{N}$, $1 \le x \le 2021$.

Ta có: $x \in A \Rightarrow x = 3m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Suy ra x chia cho 3 dư 1.

$x \in B \Rightarrow x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}$. Suy ra x chia cho 4 dư 1.

$x \in C \Rightarrow x = 5t + 1$, $t \in \mathbb{N}$. Suy ra x chia cho 5 dư 1.

Do đó $x - 1$ chia hết cho 3, cho 4, cho 5. Suy ra $x - 1 \vdots \text{BCNN}(3,4,5) \Rightarrow x - 1 \vdots 60 \Rightarrow x = 60k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Vì $1 \le x \le 2021$ nên $1 \le 60k + 1 \le 2021$ $\Rightarrow 0 \le k \le 33\frac{2}{3} \Rightarrow 0 \le k \le 33$. Vậy tập hợp $X = \{1; 61; 121; 181; ...; 1981\}$. Tập hợp X có: $(1981 - 1) : 60 + 1 = 34$ (phần tử). Tổng các phần tử của tập hợp X bằng: $(1981 + 1).34 : 2 = 33694$.

II. QUAN HỆ GIỮA BỘI CHUNG NHỎ NHẤT VÀ ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

Bài 2.1. a) *Tìm* $\text{BCNN}(n, n+1, n+2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

b) *Tìm* $\text{BCNN}(2020, 2021, 2022)$;

$\text{BCNN}(2021, 2022, 2023)$.

Lời giải. a) Kí hiệu: $(a,b) = \text{ƯCLN}(a,b)$, $[a,b] = BCNN(a,b)$. Ta có: $\text{ƯCLN}(n, n+1) = 1$.

Suy ra $\text{BCNN}(n, n+1) = n(n+1)$. Ta có :

$[n, n+1, n+2] = [[n, n+1], n+2] = [n(n+1), n+2]$.

Suy ra: $A = [n(n+1), n+2] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}$.

Gọi $d \in \text{ƯC}(n(n+1), n+2) \Rightarrow \begin{cases} n(n+1) \vdots d \\ n + 2 \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + n \vdots d \\ n^2 + 2n \vdots d \end{cases}$. Suy ra: $(n^2 + 2n) - (n^2 + n) \vdots d \Rightarrow n \vdots d$,

mà $n + 2 \vdots d \Rightarrow n + 2 - n \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$.

+ Nếu n là số lẻ thì $d = 1 \Rightarrow A = n(n+1)(n+2)$.

+ Nếu n là số chẵn thì $d = 2 \Rightarrow A = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$.

b) Áp dụng phần a) có:

$\text{BCNN}(2020, 2021, 2022) = 2020.2021.2022 : 2$
$= 4127326620$.

$\text{BCNN}(2021, 2022, 2023) = 2021.2022.2023$
$= 8266912626$.

Nhận xét. Lời giải câu a) đã dựa vào tính chất $[a,b].(a,b) = a.b$, là mối quan hệ giữa BCNN và

ƯCLN. Từ kết quả của câu a) ta đã giải được phần b) nhanh gọn.

Bài 2.2. a) *Cho* $A=11994; B=153923; C=129935$. *Tìm* BCNN($A$, B, C).

b) *Cho* $A=118932; B=157993; C=38743$. *Tìm* BCNN($A$, B, C).

Lời giải. a) ***Cách 1.*** Ta có: $A = 1999.2.3$;

$B = 1999.7.11$; $C = 1999.5.13$.

Do đó: BCNN(A, B, C) = 1999.2.3.5.7.11.13

= 60029970.

Cách 2. Ta có: $D=\text{ƯCLN}(A,B)=1999$;

$$E=\text{BCNN}(A,B)=\frac{A.B}{\text{ƯCLN}(A,B)}=923538;$$

$\text{ƯCLN}(E,C)=1999$. Do đó:

$$\text{BCNN}(A,B,C)=\text{BCNN}(E,C)=\frac{E.C}{\text{ƯCLN}(E,C)}$$

$$=\frac{923538.129935}{1999}=60029970.$$

b) ***Cách 1.*** Ta có: $A = 2^2.3.11.17.53$;

$B = 11.53.271$; $C = 53.17.43$.

Do đó: BCNN(A, B, C) = $271.53.43.17.11.3.2^2$

= 1385914596.

Cách 2. Ta có: $D=\text{ƯCLN}(A,B)=583$.

$$E=\text{BCNN}(A,B)=\frac{A.B}{\text{ƯCLN}(A,B)}=32230572;$$

$\text{ƯCLN}(E,C)=901$. Do đó:

$$\text{BCNN}(A,B,C)=\text{BCNN}(E,C)=$$

$$=\frac{E.C}{\text{ƯCLN}(E,C)}=\frac{32230572.38743}{901}=1385914596.$$

Nhận xét. Cách giải 1 ngắn và đơn giản hơn nhưng cách giải 2 cho ta cách khác để giải bài toán, đó là dựa vào tính chất $[a,b].(a,b)=a.b$ và đưa ra một cách tìm BCNN của nhiều số, trước tiên ta tìm BCNN của hai số, sau đó ta tìm BCNN của ba số, ...

Bài 2.3. *Cho* $a=123456789, b=987654321$. *Tìm số dư của phép chia* $[a,b]$ *cho* 11.

Lời giải. Ta có: $b-8a=9\Rightarrow b=8a+9$. Do đó $(a,b)=(a,8a+9)=(a,9)$. Mà a chia hết cho 9, suy ra $(a,9)=9$. Ta có:

$$ab=[a,b].(a,b)\Rightarrow ab=[a,b].9\Rightarrow [a,b]=\frac{a}{9}.b.$$

Ta có $\frac{a}{9}=13717421$, suy ra: $[a,b]=13717421.b$.

Lại có: $13717421=11k+3, b=987654321=11q+5$, $k,q\in\mathbb{N}$. Suy ra: $[a,b]=13717421.b$

$$=(11k+3)(11q+5)=11n+4,(n\in\mathbb{N}).$$

Vậy $[a,b]$ chia cho 11 dư 4.

Nhận xét. Trong lời giải trên ta đã sử dụng các chất: $(b,bq+r)=(b,r)$ và $[a,b].(a,b)=a.b$.

Bài 2.4. a) *Tìm 2 số tự nhiên* a,b *biết* $ab=51840$ *và* $[a,b]=1440$.

b) *Tìm 2 số tự nhiên* a,b *biết* $[a,b]+(a,b)=22$.

c) *Tìm 2 số tự nhiên* a,b *biết* $(a,b)=10$ và $[a,b]=600$.

Lời giải. a) Ta có: $[a,b].(a,b)=a.b$

$\Rightarrow 1440.(a,b)=51840\Rightarrow (a,b)=36$. Suy ra:

$a=36a', b=36b'$ với $(a',b')=1$, $a',b'\in\mathbb{N}^*$.

Do vai trò của a, b trong bài toán là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\le b$, suy ra $a'\le b'$. Từ $ab=51840\Rightarrow 36a'.36b'=51840$ $\Rightarrow a'b'=40=1.40=5.8$. Ta có các trường hợp:

$$*\begin{cases}a'=1\\b'=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=36.1\\b=36.40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=36\\b=1440\end{cases}.$$

$$*\begin{cases}a'=5\\b'=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=36.5\\b=36.8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=180\\b=288\end{cases}.$$

Vậy các cặp (a,b) là: $(36;1440)$, $(180;288)$ và các hoán vị.

b) Gọi $d=(a,b)\Rightarrow a=da', b=db', (a',b')=1$, $a',b'\in\mathbb{N}^*$. Như câu a), giả sử $a'\le b'$. Suy ra:

$$[a,b]=[da',db']=d.[a',b']=da'b',\ d\in\mathbb{N}^*.$$

Từ đề bài ta có: $da'b'+d=22\Rightarrow d(a'b'+1)=22$.

Suy ra d là ước của 22 và $a'b'=\frac{22}{d}-1$.

Suy ra $d\in\{1;2;11;22\}$, $a'b'=\frac{22}{d}-1$, $(a'\le b')$.

+ Với $d=1$ thì $a'b'=21\Rightarrow(a',b')\in\{(1;21),(3;7)\}$

$\Rightarrow(a,b)\in\{(1;21),(3;7)\}$.

+ Với $d=2$ thì $a'b'=10\Rightarrow(a',b')\in\{(1;10),(2;5)\}$

$\Rightarrow(a,b)=\{(2;20),(4;10)\}$.

+ Với $d=11$, thì $a'b'=1\Rightarrow(a',b')=(1;1)$

$\Rightarrow(a,b)=(11;11)$.

+ Với $d=22$, thì $a'b'=0$, loại.

Vậy các cặp (a,b) là:

$(1;21),(3;7),(2;20),(4;10),(11;11)$ và các hoán vị.

c) Từ $(a,b)=10$, suy ra $a=10a',b=10b'$, với $(a',b')=1$, $a',b'\in\mathbb{N}^*$. Như câu a), giả sử $a'\le b'$.

Do $ab=[a,b].(a,b)$ nên $10a'.10b'=600.10\Rightarrow a'b'=60$.

Suy ra các cặp (a',b') là: $(1;60),(3;20),(4;15),(5;12)$. Vậy các cặp (a,b) là: $(10;600),(30;200),(40;150),(50;120)$ và các hoán vị.

Bài 2.5. *Cho a,b,c là các số nguyên tố lẻ khác nhau từng đôi một.*

Chứng minh: $\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,a]}\le\frac{1}{7}$ *(kí hiệu $[a,b]=BCNN(a,b)$).*

Lời giải. Từ a,b,c là các số nguyên tố lẻ khác nhau từng đôi một, giả sử $a<b<c$. Ta có $3<5<7<11<...$, suy ra

$$[3,5]<[3,7]<[5,7]<....$$

Suy ra: $\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,a]}\le\frac{1}{[3,5]}+\frac{1}{[5,7]}+\frac{1}{[7,3]}$

$$=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.3}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,a]}\le\frac{7}{3.5.7}+\frac{3}{3.5.7}+\frac{5}{3.5.7}=\frac{1}{7}.$$

Nhận xét. Tương tự bài toán trên, ta có bài toán: *Cho a,b,c là các số nguyên tố khác nhau từng đôi một. Chứng minh:* $\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,a]}\le\frac{1}{3}$ (kí hiệu $[a,b]=\text{BCNN}(a,b)$).

Bài 2.6. *Viết số 72 thành tổng hai số mà* BCNN *của chúng có giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Ta có: $72=36+36=35+37=34+38$

$$=....=2+70=1+71.$$

Ta có: $[36,36]=36;[35,37]=35.37;[34,38]<34.38;$ $...;[2,70]<2.70;[1,71]=71.$

Nhận xét: Nếu $b>a\ge1$ với $a,b\in\mathbb{N}$ thì

$(a-1)(b+1)=a(b+1)-(b+1)=ab+a-b-1$

$$=ab+(a-b)-1<ab.$$

Vậy $ab>(a-1)(b+1)$. Do đó:

$$35.37>34.38>33.39>....>2.70>1.71.$$

Vậy $[35,37]=35.37=1295$ là lớn nhất.

III. ỨNG DỤNG BỘI CHUNG NHỎ NHẤT GIẢI BÀI TOÁN PHÂN SỐ

Bài 3.1. *Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng $a+b,c+d,e+f$ và* $\frac{a}{b}=\frac{35}{49},\frac{c}{d}=\frac{130}{143},\frac{e}{g}=\frac{7}{13}$ $(a,b,c,d,e,g\in\mathbb{N}^*)$.

Lời giải. Ta có: $\frac{a}{b}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$ nên $a=5k,b=7k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Suy ra: $a+b=12k$.

$\frac{c}{d}=\frac{130}{143}=\frac{10}{11}$ nên $c=10t,d=11t,t\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $c+d=21t$.

$\frac{e}{g}=\frac{7}{13}$ nên $e=7n,g=13n,n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $e+g=20n$.

Gọi số có ba chữ số cần tìm là $\overline{xyz}$ thì $\overline{xyz}=12k=21t=20n$. Suy ra $\overline{xyz}$ chia hết cho 12, 21, 20. Do đó: $\overline{xyz}\vdots\text{BCNN}(12,21,20)\Rightarrow\overline{xyz}\vdots420$.

Suy ra $\overline{xyz}\in\{420;840\}$. Do đó số có ba chữ số lớn nhất cần tìm là 840.

Bài 3.2. *Cho các phân số* $\frac{5}{8},\frac{11}{20},\frac{4}{15}$. *Tìm ba phân số (có tử và mẫu là số nguyên dương) theo thứ tự*

bằng ba phân số trên sao cho hiệu của mẫu và tử của mỗi phân số này đều bằng nhau và hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi ba phân số cần tìm là

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{8},\frac{c}{d}=\frac{11}{20},\frac{e}{g}=\frac{4}{15},\ (a,b,c,d,e,g\in\mathbb{Z}^+).$$

Suy ra: $a=5k,\ b=8k;\ c=11t,\ d=20t,\ e=4n,$

$g=15n\ (k,t,n\in\mathbb{N}^*)$. Ta có:

$$x=8k-5k=20t-11t=15n-4n$$

$$\Rightarrow x=3k=9t=11n.$$

Suy ra x chia hết cho 3, 9, 11. Do đó:

$$x=\text{BCNN}(3,9,11)=99\Rightarrow k=33,\ t=11,\ n=9.$$

Vậy các phân số cần tìm là:

$$\frac{a}{b}=\frac{5.33}{8.33}=\frac{165}{264},\frac{c}{d}=\frac{11.11}{20.11}=\frac{121}{220},\frac{e}{g}=\frac{4.9}{15.9}=\frac{36}{135}.$$

Bài 3.3. *Tìm số tự nhiên a khác 0 nhỏ nhất sao cho khi nhân a lần lượt với* $\frac{5}{12},\frac{10}{21},\frac{24}{90}$, *ta được các tích là các số tự nhiên.*

Lời giải. Ta có: $a.\frac{5}{12}\in\mathbb{N}^*,a.\frac{10}{21}\in\mathbb{N}^*,a.\frac{24}{90}\in\mathbb{N}^*.$

Suy ra: $5a\vdots 12$, mà $(5,12)=1$ nên $a\vdots 12$;

$10a\vdots 21$, mà $(10,21)=1$ nên $a\vdots 21$;

$24a\vdots 90\Rightarrow 4a\vdots 15$, mà $(4,15)=1$ nên $a\vdots 15$.

Do đó $a\vdots 12,a\vdots 21,a\vdots 15$. Để a nhỏ nhất thì $a=\text{BCNN}(12,21,15)=420$. Vậy số tự nhiên a khác 0 nhỏ nhất là 420.

Bài 3.4. *Tìm phân số lớn nhất sao cho khi chia các phân số* $\frac{28}{15};\frac{21}{10};\frac{49}{84}$ *cho nó ta đều được thương là các số tự nhiên.*

Lời giải. Gọi phân số cần tìm là $\frac{x}{y},(x,y)=1,x,y\in\mathbb{N}^*$. Ta có: $\frac{28}{15}:\frac{x}{y}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\frac{28y}{15x}\in\mathbb{N}.$

Suy ra $28y\vdots 15x$, mà $(28,15)=1$ nên $28\vdots x,y\vdots 15$.

$\frac{21}{10}:\frac{x}{y}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\frac{21y}{10x}\in\mathbb{N}.$ Suy ra $21y\vdots 10x$, mà $(21,10)=1$ nên $21\vdots x,y\vdots 10$.

$\frac{49}{84}:\frac{x}{y}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\frac{7y}{12x}\in\mathbb{N}.$ Suy ra $7y\vdots 12x$, mà $(7,12)=1$ nên $7\vdots x,y\vdots 12$.

Suy ra các số 28; 21; 7 chia hết cho x, đồng thời y chia hết cho các số 15; 10; 12.

Phân số $\frac{x}{y}$ lớn nhất khi x lớn nhất và y nhỏ nhất. Do đó $x=\text{ƯCLN}(28,21,7)$ và $y=\text{BCNN}(15,10,12)\Rightarrow x=7,y=60.$

Vậy phân số lớn nhất cần tìm là: $\frac{7}{60}$.

Bài 3.5. *Tìm các số tự nhiên nhỏ nhất* a,b,c,d *khác 0 sao cho* $\frac{a}{b}=\frac{3}{5},\frac{b}{c}=\frac{12}{21},\frac{c}{d}=\frac{6}{11}.$

Lời giải. Từ $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$ suy ra $a=3k,b=5k,\ k\in\mathbb{N}^*.$

Từ $\frac{b}{c}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$ suy ra $b=4n,\ c=7n,\ n\in\mathbb{N}^*.$

Từ $\frac{c}{d}=\frac{6}{11}$ suy ra $c=6m,\ d=11m,\ m\in\mathbb{N}^*.$

Do đó: $b=5k=4n\Rightarrow n\vdots 5$; $c=7n=6m\Rightarrow n\vdots 6$

Suy ra $n\vdots\text{BCNN}(5,6)\Rightarrow n\vdots 30$. Để a,b,c,d là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 thì n phải nhỏ nhất. Do đó $n=30$. Suy ra: $b=5k=4.30=120,k=24.$

$$c=6m=7n=7.30=210,m=35.$$

Do đó: $a=3.24=72,d=11.35=385.$

Vậy các số a,b,c,d nhỏ nhất là:

$$a=72,b=120,c=210,d=385.$$

IV. ỨNG DỤNG BỘI CHUNG NHỎ NHẤT GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 4.1. *Số học sinh của một trường trong khoảng từ 2400 đến 2500, nếu xếp hàng 3 thì dư 2, xếp hàng 5 thì dư 1, xếp hàng 7 thì dư 3. Tính số học sinh của trường.*

Lời giải. Cách 1. Gọi số học sinh của trường là n (học sinh), $2400<n<2500,n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$n=3x+2,\ x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n+4=3x+6\Rightarrow n+4\vdots 3.$

$n=5y+1,\ y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n+4=5y+5 \Rightarrow n+4\,\vdots\,5.$

$n=7z+3,\ z\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n+4=7z+7 \Rightarrow n+4\,\vdots\,7.$

Do đó: $n+4\,\vdots\,\text{BCNN}(3,5,7)$

$\Rightarrow n+4\,\vdots\,105 \Rightarrow n+4=105k, k\in\mathbb{N}^*.$

Suy ra: $n=105k-4$, mà $2400<n<2500$

$\Rightarrow 2400<105k-4<2500 \Leftrightarrow 22\frac{94}{105}<k<23\frac{89}{105}..$

Suy ra $k=23$. Do đó $n=105.23-4=2411$, thỏa mãn đề bài. Vậy số học sinh của trường là 2411 (học sinh).

Cách 2. Gọi số học sinh của trường là n (học sinh), $2400<n<2500, n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$n=3x+2,\ x\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 70n=210x+140$ (1).

$n=5y+1,\ y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 21n=105y+21$ (2).

$n=7z+3,\ z\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 15n=105z+45$ (3).

Cộng (1), (2), (3), ta được:

$106n=206+105t,\ t\in\mathbb{N} \Rightarrow 105n+n=206+105t$

$\Rightarrow n=206+105k,\ k\in\mathbb{N}$. Ta có:

$2400<n<2500 \Rightarrow 2400<206+105k<2500$

$\Leftrightarrow 20\frac{94}{105}<k<21\frac{89}{105}.$

Suy ra $k=21$. Do đó $n=206+105.21=2411$, thỏa mãn đề bài. Vậy số học sinh của trường là 2411 (học sinh).

Nhận xét. Trong cách giải 1) ta lấy số cần tìm thêm, bớt với số phù hợp để đưa về bài toán tìm BCNN của các số. Trong cách giải 2) dựa vào $\text{BCNN}(3,5,7)=105$ ta lấy số cần tìm nhân với số phù hợp. Từ (1), (2) và (3) ta tìm được số cần tìm.

Bài 4.2. *Khi được con trai hỏi tuổi của mình, ông bố (là thầy giáo toán) nói: Tuổi bố là số tự nhiên có các đặc điểm sau:*

+ Đem số đó trừ đi 2 thì được số chia hết 3, đem số đó trừ 3 thì được số chia hết cho 2, đem số đó trừ 6 thì được số chia hết cho 5.

+ Đem số đó cộng 7 thì được số chia hết cho 8, đem số đó cộng 8 thì được số chia hết cho 7.

+ Đem số đó trừ đi 5 thì được số chia hết cho 4, đem số đó trừ 5 thì được số chia hết cho 6.

Hỏi người bố bao nhiêu tuổi ?

Lời giải. Gọi tuổi của người bố là A, $(A\in\mathbb{N}^*, 10<A<100)$. Ta có:

$A-2\,\vdots\,3 \Rightarrow A-2+3\,\vdots\,3 \Rightarrow A+1\,\vdots\,3;$

$A-5\,\vdots\,6 \Rightarrow A-5+6\,\vdots\,6 \Rightarrow A+1\,\vdots\,6;$

$A+8\,\vdots\,7 \Rightarrow A+1+7\,\vdots\,7 \Rightarrow A+1\,\vdots\,7.$

Do đó: $A+1\,\vdots\,BCNN(3,6,7) \Rightarrow A+1\,\vdots\,42$ (1).

Ta có: $A-3\,\vdots\,2 \Rightarrow A-1-2\,\vdots\,2 \Rightarrow A-1\,\vdots\,2;$

$A-5\,\vdots\,4 \Rightarrow A-1-4\,\vdots\,4 \Rightarrow A-1\,\vdots\,4;$

$A-6\,\vdots\,5 \Rightarrow A-1-5\,\vdots\,5 \Rightarrow A-1\,\vdots\,5;$

$A+7\,\vdots\,8 \Rightarrow A+7-8\,\vdots\,8 \Rightarrow A-1\,\vdots\,8.$

Do đó $A-1\,\vdots\,BCNN(2,4,5,8) \Rightarrow A-1\,\vdots\,40$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$A+1\in\{42;84;126;...\} \Rightarrow A\in\{41;83;125;...\}$ (3);

$A-1\in\{40;80;120;...\} \Rightarrow A\in\{41;81;121;...\}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $A=41$.

Vậy tuổi của người bố là 41 tuổi.

Nhận xét. Trong cách giải trên, từ giả thiết ta đã thêm bớt các số hợp lí để tìm được hai BCNN của các số. Căn cứ vào hai dãy số, ta tính được tuổi của người bố.

Bài 4.3. *Đến năm 1984 tuổi của thầy giáo và năm sinh của ông ta có tỉ số giữa BCNN và ƯCLN là 63. Tính xem thầy giáo sinh năm nào.*

Lời giải. Gọi năm thầy giáo sinh là $\overline{19xy}$, $(0\le x,y\le 9, x,y\in\mathbb{N})$. Đặt $a=\overline{19xy}$ và giả sử tuổi của thầy giáo là b (năm), $a>b$.

Ta có $a+b=1984$ và $\frac{[a,b]}{(a,b)}=63$. Đặt $d=(a,b)$

$\Rightarrow a=a'd; b=b'd, (a',b')=1$. Từ $a+b=1984$

$\Rightarrow da'+db'=1984 \Rightarrow d(a'+b')=1984.$

Từ $\frac{[a,b]}{(a,b)}=63 \Rightarrow \frac{[da',db']}{d}=63 \Rightarrow \frac{d.[a',b']}{d}=63$

$\Rightarrow [a',b']=63$. Do $(a',b')=1$, nên $a'b'=63$.

Ta có $a'>b'$. Ta xét các trường hợp:

* $a'=9, b'=7$, mà $d(a'+b')=1984 \Rightarrow d(9+7)=1984$.

Suy ra $d=124, a=9.124=1116$ (loại).

* $a'=21, b'=3$, mà $d(a'+b')=1984$

$\Rightarrow d(21+3)=1984 \Rightarrow d=\frac{248}{3}$ (loại).

* $a'=63, b'=1$, mà $d(a'+b')=1984 \Rightarrow d.(63+1)=1984$.

Suy ra $d=31, a=63.31=1953, b=31.1=31$. Vậy thầy giáo sinh năm 1953 và đến năm 1984 thầy giáo 31 tuổi.

Nhận xét. Bài toán được đưa về việc tìm hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a+b=1984$ và $\frac{[a,b]}{(a,b)}=63$.

Bài 4.4. *Bốn con tàu cập bến theo lịch sau: Tàu* I *cứ* 15 *ngày thì cập bến, tàu* II *cứ* 20 *ngày thì cập bến, tàu* III *cứ* 12 *ngày thì cập bến, tàu* IV *cứ* 28 *ngày thì cập bên. Lần đầu cả bốn tàu cùng cập bến vào ngày chủ nhật. Hỏi ít nhất bao lâu, cả bốn tàu lại cập bến vào ngày chủ nhật.*

Lời giải. Số ngày để cả bốn tàu lại cập bến vào ngày chủ nhật là $x=\text{BCNN}(15,20,12,28)$. Do $\text{BCNN}(15,20,12,28)=420$ nên $x=420$. Vậy sau 420 ngày thì cả bốn tàu lại cập bến vào chủ nhật.

Bài 4.5. *Ba ô tô cùng khởi hành một lúc từ một bến. Thời gian cả đi lần về của xe thứ nhất là 30 phút, của xe thứ hai là 40 phút, xe thứ ba là 50 phút. Khi trở về bến, mỗi xe đều nghỉ 10 phút rồi tiếp tục chạy. Hỏi sau ít nhất bao lâu cả ba xe ô tô cùng rời bến.*

Lời giải. Gọi thời gian ít nhất để cả ba xe ô tô lại cùng nhau rời bến là x (phút, $x>0$).

Thời gian ô tô rời bến từ lần đầu đến lần thứ hai của xe thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 40 phút, 50 phút, 60 phút. Suy ra:

$$x=\text{BCNN}(40,50,60) \Rightarrow x=600.$$

Vậy sau ít nhất 600 phút = 10 giờ thì cả ba xe ô tô lại cùng nhau rời bến.

Nhận xét. Các bài toán thực tế 4.4 và 4.5 đều đưa về bài toán tìm BCNN của các số.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. a) Tìm số tự nhiên chia cho 4, cho 5, cho 6, cho 7 đều dư 3. Biết rằng số đó trong khoảng từ 1200 đến 1500.

b) Tìm tất cả số tự nhiên lớn hơn 10000 và nhỏ hơn 15000 mà khi chia cho 2015 cũng như chia cho 775 đều được số dư là 10.

2. a) Tìm các chữ số x,y,z sao cho $\overline{523xyz}$ chia hết cho 6, 7, 8, 9.

b) Tìm các chữ số x,y,z sao cho $\overline{579xyz}$ chia hết cho 5, 7, 9.

3. Cho số $A=\overline{155*710*4*16}$ có 12 chữ số. Chứng minh rằng: Khi thay (*) bởi các chữ số khác nhau lấy từ $\{1;2;3\}$ thì A luôn chia hết cho 396.

4. a) Tìm 2 số tự nhiên a,b biết $[a,b]-(a,b)=18$.

b) Tìm 2 số tự nhiên a,b biết $(a,b)=10$ và $[a,b]=900$.

c) Tìm 2 số tự nhiên a,b biết $[a,b]+(a,b)=19$.

5. Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất chia hết cho 7, cho 8. Biết rằng các chữ số của N chỉ có thể là số 7 hoặc số 8, và có ít nhất 1 chữ số 7 và 1 chữ số 8.

6. Một số tự nhiên N chia cho 3 dư 1, chia cho 4 dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 6 dư 4, và chia hết cho 19. Tìm số N nhỏ nhất, lớn nhất có 4 chữ số.

7. Viết số 83 thành tổng hai số mà *BCNN* của chúng có giá trị lớn nhất.

8. Cho ba phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử số của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

9. ***Bài toán Hàn Tín điểm binh.***

Hàn Tín là một tướng tài giỏi đã giúp *Lưu Bang* lập nên nhà Hán bên Trung Quốc. Khi điểm binh, muốn biết số quân, ông cho xếp hàng 3, hàng 5, hàng 7 rồi tính số người lẻ hàng. Nếu số người lẻ hàng thứ tự là a,b,c thì số quân bằng: $70a+21b+15c \pm$ bội 105.

a) Tính số quân trong khoảng 2200 – 2400 nếu xếp hàng 3 thì dư 1, xếp hàng 5 thì dư 2, xếp hàng 7 thì dư 6.

b) Giải thích cách làm trên.

10. Trên đoạn đường dài 4,8 km có các cột điện trồng cách nhau 40 m, nay trồng lại cách nhau 60m. Hỏi có bao nhiêu cột điện không phải trồng lại, biết rằng ở cả hai đầu đoạn đường đều có cột điện?

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. QUY NHƠN NĂM HỌC 2020 - 2021

Bài 1. a) Ta có: $a^3 = \left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)^3$

$= \left(26-15\sqrt{3}\right) + \left(26+15\sqrt{3}\right) + 3\sqrt[3]{\left(26-15\sqrt{3}\right)\left(26+15\sqrt{3}\right)} \times$

$\times \left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow a^3 = 52 + 3a \Leftrightarrow a^3 - 3a - 52 = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 64) - 3(a-4) = 0$

$\Leftrightarrow (a-4)(a^2 + 4a + 13) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0$

$\Leftrightarrow a = 4$. Thay $a = 4$ vào biểu thức B ta có:

$B = 4^3 + 12.4 + 1 = 113.$

b) Từ điều kiện $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = 1$

suy ra $\sqrt{1+x^2} + x = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}+y} = \sqrt{1+y^2} - y$ (1)

Đặt $a = \sqrt{1+x^2}$, $b = \sqrt{1+y^2}$ ($a, b \geq 1$). Khi đó:

$x^2 = a^2 - 1; y^2 = b^2 - 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (2).

(1) $\Leftrightarrow x + y = b - a$. Thay vào (2):

$(x-y)(x+y) = (a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (x-y)(b-a) = (a-b)(a+b)$ (3).

Xét các trường hợp:

- Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì $x + y = 0$: suy ra đpcm.
- Nếu $a - b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$ thì

(3) $\Leftrightarrow x - y = -(a + b)$, kết hợp với $x + y = b - a$ ta có: $x = -a$ và $y = b$: điều này không xảy ra bởi vì khi đó ta có: $\sqrt{1+y^2} = y \Rightarrow 1 + y^2 = y^2$ (vô lý)

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. Vậy $x + y = 0$.

Bài 2. a) Đặt $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$ thì

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b = -c.$

Vì $x \neq y \neq z$ nên $a, b, c \neq 0$, $a \neq b \neq c$. Khi đó

$A = a^5 + b^5 + c^5$

$= (a+b)[a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4] + c^5$

$= (a+b)[(a^2+b^2)^2 - ab(a^2+b^2) - a^2b^2] + c^5$

$= (-c)[(c^2-2ab)^2 - ab(c^2-2ab) - a^2b^2] + c^5$

$= (-c)[c^4 - 4abc^2 + 4a^2b^2 - abc^2 + 2a^2b^2 - a^2b^2] + c^5$

$= (-c)[c^4 + 5a^2b^2 - 5abc^2] + c^5$

$= -c^5 - 5a^2b^2c + 5abc^3 + c^5 = 5abc(c^2 - ab).$

Do $a, b, c \neq 0$ và $c^2 \neq ab$ nên

$5abc(c^2 - ab) \vdots 5abc.$

Vậy A chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

b) Ta có: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 3y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x(3y+2) + (2y^2 + 3y + 4) = 0$ (1).

Xem (1) là PT bậc hai theo x (y là tham số), ta có:

$\Delta = (3y+2)^2 - 4(2y^2 + 3y + 4)$

$= 9y^2 + 12y + 4 - 8y^2 - 12y - 16 = y^2 - 12.$

Điều kiện để PT(1) có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương. Đặt $\Delta = k^2 \Leftrightarrow y^2 - 12 = k^2$

$\Leftrightarrow (y-k)(y+k) = 12$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vì tổng $(y-k) + (y+k) = 2y$ là số chẵn và tích là 12 là số chẵn nên $(y-k)$ và $(y+k)$ đều là số chẵn và là ước của 12.

Xét các trường hợp:

- $\begin{cases} y-k=2 \\ y+k=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ k=2 \end{cases}$; • $\begin{cases} y-k=-2 \\ y+k=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ k=-2 \end{cases}$;
- $\begin{cases} y-k=6 \\ y+k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ k=-2 \end{cases}$; • $\begin{cases} y-k=-6 \\ y+k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4 \\ k=2 \end{cases}$.

Trong các trường hợp ta đều có $y = 4$ hoặc $y = -4$.

Với $y = 4$, PT(1) có hai nghiệm:

$x_1 = \dfrac{-(3y+2)+2}{2} = -6, x_2 = \dfrac{-(3y+2)-2}{2} = -8.$

Với $y = -4$, phương trình (2) có hai nghiệm:

$x_3 = \dfrac{-(3y+2)+2}{2} = 6,\ x_4 = \dfrac{-(3y+2)-2}{2} = 4.$

Vậy PT(1) có 4 nghiệm nguyên $(x; y)$ là:

$(-6; 4), (-8; 4), (6; -4), (4; -4).$

Bài 3. a) Kí hiệu: $5x^2 - x + 5 = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ (1)

Biến đổi: $5x^2 - x + 5 = 5(x^2 - x + 1) + 4x$;

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2$

$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x).$

Đặt $a = x^2 - x + 1$ ($a > 0$) thì

$x^2 + x + 1 = a + 2x$; $5x^2 - x + 5 = 5a + 4x.$

Khi đó PT(1) trở thành: $(5a + 4x)^2 = a(a + 2x)$

$\Leftrightarrow 25a^2 + 40ax + 16x^2 = a^2 + 2ax$

$\Leftrightarrow 24a^2 + 38ax + 16x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 12a^2 + 19ax + 8x^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + \dfrac{19}{12}ax + \dfrac{2}{3}x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(a + \dfrac{19}{24}x\right)^2 + \dfrac{2}{3}x^2 - \left(\dfrac{19}{24}x\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{19}{24}x\right)^2 - x^2\left(\frac{361}{576}-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{19}{24}x\right)^2 + \frac{23}{576}x^2 = 0.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ và $a = 0$: điều này không thể vì $a > 0$. Vậy PT(1) vô nghiệm.

b) Thay $1 = (xyz)^2$, ta có:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} = \sqrt{\frac{1+x^3+y^3}{x^2y^2}} = \sqrt{\frac{x^2y^2z^2+x^3+y^3}{x^2y^2}}$$

$$= \sqrt{z^2+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$z^2+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2} \ge 3.\sqrt[3]{z^2.\frac{x}{y^2}.\frac{y}{x^2}} = 3.\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$$

$$= 3.\sqrt[3]{\frac{z^3}{xyz}} = 3.\sqrt[3]{z^3} = 3z.$$

Do đó: $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \sqrt{3z}$. Tương tự:

$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \sqrt{3x}$; $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \sqrt{3y}$. Suy ra:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \sqrt{3z}+\sqrt{3x}+\sqrt{3y}.$$

Lại áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương:

$$\sqrt{3z}+\sqrt{3x}+\sqrt{3y} \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{3z}.\sqrt{3x}.\sqrt{3y}}$$

$$= 3.\sqrt[3]{\sqrt{3z.3x.3y}} = 3.\sqrt[3]{\sqrt{27xyz}} = 3.\sqrt[3]{\sqrt{27.1}}$$

$$= 3.\sqrt{\sqrt[3]{27}} = 3\sqrt{3}.$$

Do đó:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 5. Xét ΔABD và ΔAEB có:

$\widehat{ABD} = \widehat{AEB}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}\right)$, góc $\widehat{BAD}$ chung, do đó:

$$\Delta ABD \sim \Delta AEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = AD.AE \text{ (1)}.$$

Tam giác OAB vuông tại B có BH là đường cao nên theo hệ thức lượng ta có:

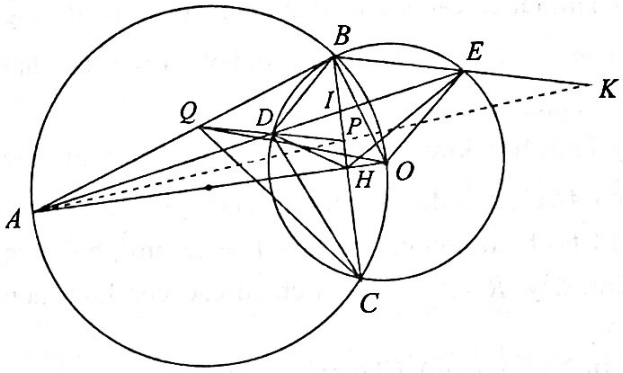
$$AB^2 = AH.AO \text{ (2)}.$$

Từ (1), (2) suy ra: $AD.AE = AH.AO$

$\Leftrightarrow \frac{AD}{AO} = \frac{AH}{AE}$, lại có góc $\widehat{DAH}$ chung nên

$\Delta ADH \sim \Delta AOE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.

Mặt khác, $\widehat{AHD} + \widehat{DHO} = 180^0$ (kề bù), nên $\widehat{AEO} + \widehat{DHO} = 180^0$. Vậy tứ giác $OEDH$ nội tiếp.



b) Ta có: $\widehat{AHD} = \widehat{DEO}$ (1).

Tam giác ODE cân tại O nên $\widehat{DEO} = \widehat{ODE}$ (2).

Vì tứ giác $OHDE$ nội tiếp nên $\widehat{ODE} = \widehat{OHE}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{AHD} = \widehat{OHE}$.

Mặt khác, $HB \perp HA$ nên $\widehat{DHI} = \widehat{IHE}$, do đó HI là phân giác góc DHE và HA là phân giác ngoài tại H của tam giác DHE. Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{ID}{IE}\left(=\frac{HD}{HE}\right) \text{ (4)}.$$

Vì $DQ \,//\, BE$ nên theo định lý Thales ta có:

$$\frac{DQ}{BE} = \frac{AD}{AE} \text{ (5)}.$$

$DP \,//\, BE \Rightarrow \frac{DP}{BE} = \frac{ID}{IE}$ (định lý Thales) (6).

Từ (4), (5), (6) suy ra: $\frac{DQ}{BE} = \frac{DP}{BE}$

$\Leftrightarrow DQ = DP \Leftrightarrow D$ là trung điểm của PQ.

Xét ΔADP và ΔAEK có: $\frac{AD}{AE} = \frac{DP}{EK}$ và $\widehat{ADP} = \widehat{AEK}$ (đồng vị, $DP \,//\, EK$).

Do đó $\Delta ADP \sim \Delta AEK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAP} = \widehat{EAK}$ $\Rightarrow$ hai tia AP và AK trùng nhau. Vậy ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Bài 5. ΔOCE vuông tại E có EM là đường cao nên theo hệ thức lượng ta có: *(Xem tiếp trang 13)*

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH

Năm học 2020 - 2021

VÒNG 1 (không chuyên) (*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Câu 1 (*2 điểm*).

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=x+3-m$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt.

3) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, biết độ dài cạnh của tam giác là $\sqrt{3}$ cm.

4) Cho hình nón có thể tích $V=4\pi$ cm^3, biết bán kính đáy $R=2$ cm. Tính chiều cao của hình nón đó.

Câu 2 (*1,5 điểm*). Cho biểu thức

$$P=\frac{x}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}$$

(với $x\ge 0; x\ne 1$).

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Chứng minh $P>\frac{2}{3}$ với mọi $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

Câu 3 (*2,5 điểm*).

1) Cho phương trình $x^2-(m+1)x+2m-2=0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}=1$.

2) Giải phương trình

$$x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}=0.$$

Câu 4 (*3 điểm*) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đoạn thẳng AO cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại M và I. Gọi D là điểm thuộc cung lớn BC của đường tròn (O) (với $DB<DC$).

1) Chứng minh rằng $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng DB, DC. Chứng minh DM vuông góc với EF.

3) Gọi K là giao điểm thứ hai của tia DM với đường tròn (O). Chứng minh KI là tia phân giác của $\widehat{AKM}$.

Câu 5 (*1 điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(y+1)+3x+1=x^2\sqrt{1-y} \\ x^2+9=6x\sqrt{1-y}-\sqrt{x-1} \end{cases}.$$

2) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ac+a^2}.$$

VÒNG 2 (chuyên) (*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu 1 (*2 điểm*).

a) Cho các số thực x,y,z khác 0. Đặt $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$ và $c=xy+\frac{1}{xy}$.

Chứng minh $a^2+b^2+c^2-abc=4$.

b) Cho các số thực a,b khác -2 thỏa mãn $(2a+1)(2b+1)=9$.

Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}$.

Câu 2 (*2 điểm*).

a) Giải phương trình $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 \end{cases}.$$

Câu 3 (*3 điểm*). Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại M, N và

có tâm I thuộc cạnh BC. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh các điểm A, M, H, I, N cùng thuộc một đường tròn và HA là tia phân giác của góc MHN.

b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với BC cắt MN tại K. Chứng minh AK đi qua trung điểm D của BC.

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{CAD}$.

Câu 4 (*1,5 điểm*).

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a}$. Chứng minh ab là lập phương của một số nguyên dương.

Câu 5 (*1,5 điểm*).

a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 \le \frac{1}{8} + a^4 + b^4 + c^4.$$

b) Ban đầu có 2020 viên sỏi để trong 1 chiếc túi. Có thể thực hiện công việc như sau:

Bước 1: Bỏ đi 1 viên sỏi và chia túi này thành 2 túi mới.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 4 túi.

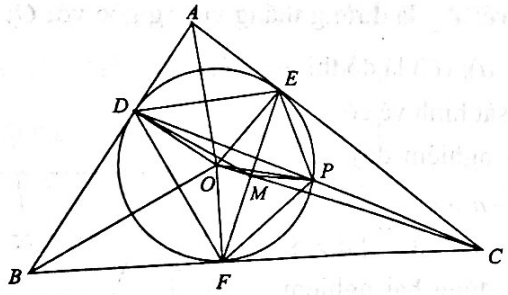
Tiếp tục quá trình trên. Hỏi sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi hay không?

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(*5/7/36 Phan Đình Phùng, TP.Nam Định*) ***Giới thiệu***

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (*Tiếp theo trang 11*)



Mặt khác, $\Delta CEP \sim \Delta CDE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CP}{CE}$

$\Leftrightarrow CD.CP = CE^2$ (2).

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OCE ta có: $CE^2 = CO.CM$ (3). Từ (2), (3) suy ra:

$$CD.CP = CO.CM \Leftrightarrow \frac{CD}{CO} = \frac{CM}{CP}.$$

Lại có góc OCD chung nên

$\Delta CDM \sim \Delta COP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CDM} = \widehat{COP} \Rightarrow$ tứ giác $OMPD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CMP} = \widehat{ODC}$ (cùng bù với $\widehat{OMP}$) (4). Từ (1), (4) suy ra: $\widehat{OMD} = \widehat{CMP}$.

Mặt khác, $OM \perp ME$ nên suy ra $\widehat{DME} = \widehat{EMP}$ (5) $\Rightarrow ME$ là phân giác góc DMP.

Ta có: $\widehat{DME} + \widehat{DMF} = 180^0$ (kề bù) (6);

$\widehat{EMP} + \widehat{PMF} = 180^0$ (kề bù) (7).

Từ (5), (6), (7) suy ra: $\widehat{DMF} = \widehat{PMF}$.

Vì tứ giác $OMPD$ nội tiếp nên

$$\widehat{DOP} = \widehat{DMP} \ (= \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{DP}) \ (8).$$

Theo tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm trong đường tròn (O) ta có:

$\widehat{DOP} = 2\widehat{DFP}$, $\widehat{DMP} = 2\widehat{DME}$ (vì ME là tia phân giác góc $\widehat{DMP}$) (9).

Từ (8), (9) suy ra: $\widehat{DFP} = \widehat{DME}$ (10).

Ta lại có: $\widehat{DPF} = \widehat{DEM}$ (11).

Từ (10), (11) suy ra: $\Delta PFD \sim \Delta EMD$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{FDP} = \widehat{MDE}$, do đó $\widehat{MDF} = \widehat{EDP}$ (12).

Vì $\widehat{DFM} = \widehat{DPE}$ (13) nên từ (12), (13) suy ra:

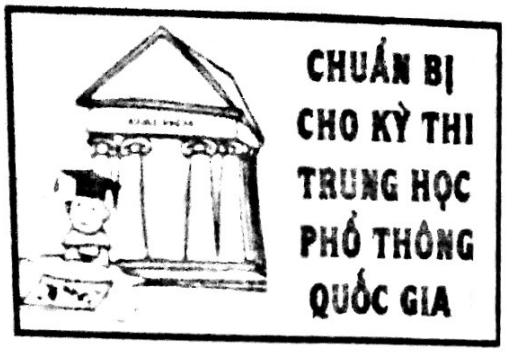
$$\Delta DFM \sim \Delta DPE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{FM} = \frac{PD}{FD} \Leftrightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{FM}{FD}.$$

BÙI VĂN CHI

(*21/2 đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Giới thiệu



BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO GIỮA ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ ĐƯỜNG THẲNG

PHẠM BẮC PHÚ
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Dạng 1. Dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình

Trong phần này, xét bài toán đặt ra sau khi ta đã khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) (hoặc đã có được bảng biến thiên) của hàm số $y = f(x)$ cho trước.

1. Kiến thức chuẩn bị

Cách biến đổi từ đồ thị (*C*): $y = f(x)$ thành một trong các đồ thị (C_3): $y = f(|x|)$, (C_4): $y = |f(x)|$.

+ Từ (*C*) thành (C_3): Giữ phần đồ thị (*C*) nằm bên phải trục *Oy* mà ta gọi đó là phần I, lấy đối xứng phần I này qua *Oy* ta được phần II. Hợp của hai phần I và II là (C_3).

+ Từ (*C*) thành (C_4): Giữ phần đồ thị nằm phía trên *Ox* của (*C*) mà ta gọi đó là phần I, lấy đối xứng phần nằm dưới *Ox* của (*C*) qua *Ox* ta được phần II. Hợp của hai phần I và II là (C_4).

2. Bốn bước biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

- Biến đổi PT cho về dạng có vế trái là (hoặc có dạng giống với) hàm số đã khảo sát.
- Phát biểu mệnh đề chuyển từ số nghiệm của PT sang số giao điểm của hai đồ thị.
- Nêu cách vẽ các đồ thị.
- Dựa vào đồ thị biện luận số giao điểm.

3. Thí dụ minh họa

Thí dụ 1. *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (1).

1) *Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của (1).*

2) *Dựa vào (C), hãy biện luận theo tham số a số nghiệm của phương trình:* $x^2(3 - x) = a$.

3) *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình* $|x|^3 - 3x^2 = m^3 + 3m^2 - 4$ *có đúng bốn nghiệm phân biệt.*

4) *Tìm tất cả các giá trị của tham số b để phương trình* $|x^3 - 3x^2 + 1| = \log_2 b$ *có đúng sáu nghiệm phân biệt.*

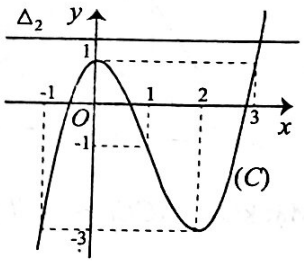
Lời giải. 1) $y' = 3x^2 - 6x$ có nghiệm là 0, 2. Bạn đọc tự khảo sát, sau đây là đồ thị (*C*):

2) Ta có: $x^2(3 - x) = a \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 1 - a$ (2).

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đồ thị (*C*): $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và đường $\Delta_2 : y = 1 - a$.

Cách vẽ: Δ_2 là đường thẳng vuông góc với *Oy* tại (0; 1 – *a*); (*C*) là đồ thị vừa vẽ.

Quan sát hình vẽ có:



(2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - a > 1 \\ 1 - a < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 4 \end{array}\right.$.

(2) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - a = 1 \\ 1 - a = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right.$.

(2) có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow -3 < 1 - a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 4$.

Ngoài ra không còn khả năng nào khác.

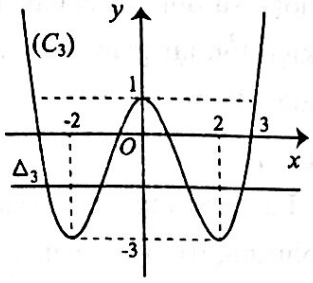
3) Ta có: $|x|^3 - 3x^2 = m^3 + 3m^2 - 4$

$$\Leftrightarrow |x|^3 - 3|x|^2 + 1 = m^3 + 3m^2 - 3 \quad (3).$$

(3) có đúng bốn nghiệm $\Leftrightarrow$ đồ thị (C_3): $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 1$ và đường thẳng $\Delta_3 : y = m^3 + 3m^2 - 3$ có đúng bốn điểm chung phân biệt.

Cách vẽ: - Δ_3 là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm $(0; m^3+3m^2-3)$.

- Nhận xét: Hàm số $y=|x|^3-3|x|^2+1$ là hàm chẵn nên (C_3) nhận Oy làm trục đối xứng, khi $x\ge 0$ thì $|x|^3-3|x|^2+1=x^3-3x^2+1$, do đó: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy sau đó lấy đối xứng phần này qua Oy ta được (C_3) như hình vẽ.



Từ hình vẽ ta có điều kiện:

$$-3<m^3+3m^2-3<1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^3+3m^2>0\\ m^3+3m^2-4<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2(m+3)>0\\ (m+2)^2(m-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<1\\ m\ne -2, m\ne 0\end{cases}.$$

Vậy $m\in(-3;1)\setminus\{-2;0\}$.

4) Ta có: $|x^3-3x^2+1|=\log_2 b$ (4).

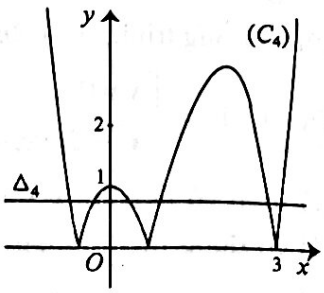
(4) có đúng sáu nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị (C_4): $y=|x^3-3x^2+1|$ và đường thẳng $\Delta_4: y=\log_2 b$ có đúng sáu điểm chung phân biệt.

Cách vẽ: - Δ_4 là đường thẳng vuông góc với Oy tại điểm $(0;\log_2 b)$.

- Nhận xét:

$$|x^3-3x^2+1|=\begin{cases}x^3-3x^2+1 & \text{nếu } x^3-3x^2+1\ge 0\\ -(x^3-3x^2+1) & \text{nếu } x^3-3x^2+1<0\end{cases}.$$

Do đó: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần còn lại qua Ox thu được đồ thị (C_4) như hình vẽ.



Từ hình vẽ có: $0<\log_2 b<1\Leftrightarrow 1<b<2$.

Thí dụ 2. *Cho hàm số:* $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (1).

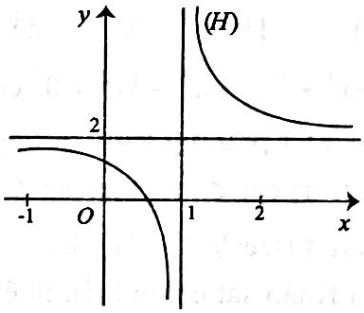
1) *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số* (1).

2) *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình* $\dfrac{2x-1}{|1-x|}=2m+1$ *có nghiệm duy nhất.*

Lời giải. 1) Ta vẽ được đồ thị (H):

2) Ta có: $\dfrac{2x-1}{|1-x|}=2m+1\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{|x-1|}=2m+1$ (*).

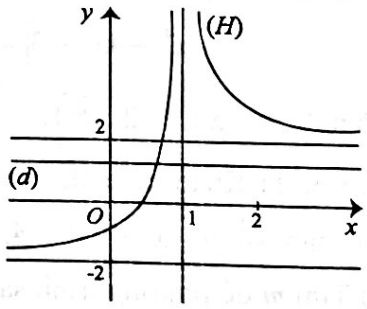
(*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hai đồ thị (H'): $y=\dfrac{2x-1}{|x-1|}$ và (d): $y=2m+1$ có đúng một điểm chung.



Cách vẽ: - (d) là đường vuông góc với Oy tại $(0; 2m+1)$.

- Nhận xét: $\dfrac{2x-1}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ -\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{nếu } x<1\end{cases}$.

Do đó: Giữ nguyên phần đồ thị (H) nằm bên phải tiệm cận đứng, lấy đối xứng phần còn lại của (H) qua Ox ta được đồ thị (H') như hình vẽ.



Quan sát từ hình vẽ ta có điều kiện:

$$-2<2m+1\le 2\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<m\le\frac{1}{2}.$$

Bài tập vận dụng

Bài 1 (A-2006).

1) Khảo sát sự biến thiên vẽ đồ thị hàm số

$$y=2x^3-9x^2+12x-4.$$

2) Tìm m để phương trình sau có sáu nghiệm phân biệt: $2|x|^3-9x^2+12|x|=m$.

Bài 2 (B-2009).

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$.

2) Tìm m để phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có 6 nghiệm.

Bài 3 (A2002). Cho hàm số:

$$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$$

(m là tham số).

1) Khảo sát chiều biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số cho khi $m = 1$.

2) Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

3) Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4 (Dự bị 1-D2005).

1) Khảo sát chiều biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

2) Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt: $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$.

Bài 5. 1) Khảo sát chiều biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

2) Tìm m để phương trình

$$\left|-x^4 + 4x^2 - 3\right| = 7m^2 - m$$

có nghiệm $x \in \left[-2; \sqrt{5}\right]$.

Bài 6. 1) Khảo sát chiều biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

2) Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $(x+2)^2|x-1| = m$.

Dạng 2. Biện luận số lượng và tính chất giao điểm của hai đồ thị qua việc biện luận phương trình

1) Kiến thức chuẩn bị

- Tọa độ giao điểm của đồ thị (C): $y = F_1(x)$ và (d): $y = F_2(x)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} F_1(x) = F_2(x) \ (1) \\ y = F_2(x) \end{cases}$. Số lượng điểm chung của hai đồ thị đó chính là số nghiệm của (1).

- Các kiến thức khảo sát hàm số; tam thức bậc hai và định lí Viète; một số kiến thức về hình học giải tích.

2) Hai cách thường dùng để xử lí bài toán tương giao chứa tham số

Cách 1: - Lập phương trình hoành độ.

- Cô lập biến, tham số về $m = f(x)$.

- Khảo sát $f(x)$, quan sát bảng biến thiên hoặc sử dụng tính chất hàm số liên tục suy ra điều kiện tồn tại giao điểm và biện luận được số lượng giao điểm; kết luận.

Cách 2:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm và quy về phương trình bậc hai.

- Tìm điều kiện để có đủ số giao điểm theo yêu cầu.

- Viết tường minh hoặc hình thức các tọa độ giao điểm (và nêu hệ thức Viète), tính toán các yếu tố liên quan tới yêu cầu.

- Giải quyết yêu cầu và đối chiếu điều kiện, kết luận.

3) Thí dụ minh họa

A. Phương pháp sử dụng tính liên tục, chiều biến thiên của hàm số

Thí dụ 1. *Cho hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ (m là tham số). Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 1$ luôn cắt đồ thị của hàm số đã cho tại đúng hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.*

Lời giải. Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm của phương trình: $x^4 + 2m^2x^2 + 1 = x + 1$ (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 + 2m^2x - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$.

(1) luôn có nghiệm $x = 0$. Ta cần đi chứng minh (2) có đúng một nghiệm khác 0 với mọi m. Thật vậy:

+ Nếu $m = 0$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

+ Nếu $m \neq 0$, xét $f(x) = x^3 + 2m^2x - 1$ trên $\mathbb{R}$;

$f'(x) = 3x^2 + 2m^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ có tối đa một nghiệm thực.

Lại có $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(0).f(1)=-2m^2<0$, do đó suy ra (2) có đúng một nghiệm thực và nghiệm đó khác 0.

Thí dụ 2. *Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx+2$ cắt trục hoành tại đúng một và chỉ một điểm.*

Lời giải. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số cho và trục hoành là nghiệm của phương trình $x^3+mx+2=0$ (1).

Thấy $x=0$ không là nghiệm của (1).

Khi $x\neq 0$, (1) $\Leftrightarrow m=-x^2-\dfrac{2}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x}, x\neq 0$.

- $f'(x)=\dfrac{2(1-x^3)}{x^2}$ có nghiệm $x=1$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Như vậy: Đồ thị hàm số cho cắt Ox tại đúng một điểm $\Leftrightarrow$ PT $m=f(x)$ có nghiệm thực duy nhất $\Leftrightarrow m>-3$.

B. Phương pháp quy về giải và biện luận phương trình bậc hai, sử dụng định lí Viète

Thí dụ 3. *Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(0;4)$ và có hệ số góc bằng 1/3. Chứng minh rằng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt. Tính khoảng cách giữa hai điểm chung đó.*

Lời giải. Δ có phương trình:

$$y=\frac{1}{3}(x-0)+4 \text{ hay } y=\frac{x}{3}+4.$$

Tọa độ giao điểm của Δ và (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{x}{3}+4\\ y=\dfrac{x}{3}+4\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x^2+5x-9=0\ (1)\\ y=\dfrac{x}{3}+4\end{cases}.$$

Cách 1. Giải hệ trên cho ta các giao điểm là

$$M\left(\frac{-5-\sqrt{61}}{2};\frac{19-\sqrt{61}}{6}\right), N\left(\frac{-5+\sqrt{61}}{2};\frac{19+\sqrt{61}}{6}\right).$$

Suy ra khoảng cách $MN=\dfrac{\sqrt{610}}{3}$.

Cách 2. Ta thấy (1) có biệt số $\Delta_{(1)}=61>0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2; do đó 2 đồ thị có 2 giao điểm phân biệt là

$$M\left(x_1;\frac{x_1}{3}+4\right), N\left(x_2;\frac{x_2}{3}+4\right).$$

Theo định lí Viète ta có: $x_1+x_2=-5, x_1x_2=-9$.

Ta có: $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(\dfrac{x_2}{3}-\dfrac{x_1}{3}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{10}{9}[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]}=\frac{\sqrt{610}}{3}.$$

Tổng quát: Giả sử đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y=kx+n$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N. Nếu hoành độ của M, N là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ thì

$$MN=\frac{\sqrt{(k^2+1)\Delta}}{|a|} \text{ (với } \Delta=b^2-4ac).$$

Thí dụ 4. *Tìm tham số thực m để đồ thị (C): $y=x^3-3x^2+4$ cắt đường thẳng (d): $y=mx+m$ tại ba điểm phân biệt là $A(-1;0)$, M, N sao cho diện tích tam giác OMN bằng 1 (O là gốc tọa độ).*

Lời giải. Phương trình hoành độ:

$$x^3-3x^2+4=mx+m \text{ hay } \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2-4x+4-m=0\ (1)\end{array}\right..$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\neq 0\\ \Delta'=4-(4-m)>0\\ (-1)^2-4(-1)+4-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ m\neq 9\end{cases} (2).$$

Giả sử hai giao điểm M, N có tọa độ là $M = (x_1; mx_1 + m)$, $N = (x_2; mx_2 + m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1), theo định lí Viète có:

$$x_1 + x_2 = 4;\ x_1x_2 = 4 - m;$$

MN có phương trình: $mx - y + m = 0$.

- $MN = \sqrt{(m^2+1)(x_2-x_1)^2} = 2\sqrt{m(m^2+1)}$,
- $d(O;MN) = \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}$.
- $S_{OMN} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(O;MN).MN = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Kết hợp với (2) ta có đáp số $m = 1$.

Tổng quát: Giả sử đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = kx + n$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N. Xét điểm $A(x_A; y_A)$ cùng hai giao điểm trên tạo thành tam giác AMN. Nếu hoành độ của M, N là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ thì

$$S_{AMN} = \frac{|kx_A - y_A + n|\sqrt{\Delta}}{2|a|} \text{ (với } \Delta = b^2 - 4ac).$$

Thí dụ 5 (D- 2009). *Tìm tham số thực m để đồ thị (C): $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ cắt đường thẳng (d): $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.*

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$ (1).

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, (1) trở thành:

$$t^2 - (3m+2)t + 3m + 1 = 0 \text{ (2)}.$$

(d) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (3m+2)^2 - 4(3m+1) > 0 \\ S = 3m + 2 > 0 \\ P = 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ (3)}.$$

Với điều kiện (3) thì (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3m+1 \\ t = 1 \end{array}\right.$ nên (1) có bốn nghiệm là $\pm 1, \pm\sqrt{3m+1}$.

Bốn giao điểm của (d) và (C) có hoành độ nhỏ hơn 2 $\Leftrightarrow \sqrt{3m+1} < 2 \Leftrightarrow m < 1$.

Kết hợp với (3) có đáp số $m \in \left(-\dfrac{1}{3}; 1\right) \setminus \{0\}$.

Chú ý. Có thể nêu điều kiện $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2} < 2$ hay $t_1, t_2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 - 4)(t_2 - 4) > 0 \\ (t_1 - 4) + (t_2 - 4) < 0 \end{cases}$; sau đó dùng định lí Viète để giải.

Thí dụ 6. *Tìm tham số thực m để đồ thị (C): $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ cắt đường thẳng (d): $y = x + m$ tại hai điểm M và N mà tam giác AMN là tam giác tù với $A = (2; 0)$.*

Lời giải. Hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của PT:

$$\frac{x+3}{x-1} = x + m \text{ hay } \begin{cases} x^2 + (m-2)x - m - 3 = 0 \text{ (1)} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 16 > 0 \\ 1 + (m-2) - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}..$$

Gọi $M(x_1; x_1 + m)$ và $N(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên có:

$$x_1 + x_2 = 2 - m \text{ và } x_1x_2 = -m - 3.$$

Từ (1) còn có: $x_1^2 + (m-2)x_1 = m + 3$

và $x_2^2 + (m-2)x_2 = m + 3$.

+ Tồn tại tam giác $AMN \Leftrightarrow A \notin d \Leftrightarrow 0 \neq m + 2$ $\Leftrightarrow m \neq -2$. Ta có: $MN^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(m^2 + 16)$;

$$AM^2 = (x_1 - 2)^2 + (x_1 + m)^2$$
$$= 2\left[x_1^2 + (m-2)x_1\right] + m^2 + 4 = m^2 + 2m + 10.$$

Tương tự có: $AN^2 = m^2 + 2m + 10$.

+ Nhận xét $AM = AN$ nên tam giác AMN cân tại A, theo đó: tam giác AMN có góc tù khi và chỉ khi $\widehat{MAN}$ tù hay $AM^2 + AN^2 < MN^2$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + 2m + 10) < 2(m^2 + 16) \Leftrightarrow m < 3.$$

Kết luận: $m \in (-\infty; 3) \setminus \{-2\}$.

(*Xem tiếp trang 22*)

ÁP DỤNG CÁCH ĐẶT HÀM LƯỢNG GIÁC ĐỂ GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

TS. Hoàng Ngự Huấn - TS. Phạm Tuấn Cường - ThS. Lê Thị Hương Giang *(ĐH Mỏ - Địa chất, Hà Nội)*

Trong phần lớn các trường hợp, học sinh không nghĩ đến việc thay biến bằng một hàm lượng giác khi giải phương trình đại số vì nó có vẻ như làm phức tạp hóa phương trình. Thế nhưng không ít lần các tính chất của hàm lượng giác lại giúp ích trong việc giải phương trình dạng này.

Xét phương trình (PT) thường rất hay gặp trong các cuốn sách ôn tập thi tốt nghiệp trung học phổ thông Quốc gia.

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Lời giải. Đưa PT ban đầu về dạng

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{35}{12}.$$

Nghiệm của PT phải thỏa mãn điều kiện $x>1$.

Cách 1. Lấy bình phương cả hai vế, ta thu được:

$$x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$$

hay $\quad \dfrac{x^4}{x^2-1}+2\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2.$

Tiếp theo, đặt $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $\quad y>0$, ta có:

$$y^2+2y-\frac{1225}{144}=0.$$

Từ đây có $y=\dfrac{25}{12}$ (nghiệm thứ hai âm).

Quay trở lại biến cũ, giải PT $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{25}{12}$. Sau khi biến đổi, ta thu được PT trùng phương

$$144x^4-625x^2+625=0.$$

PT cuối cho hai nghiệm: $x_1=\dfrac{5}{3}, x_2=\dfrac{5}{4}$ đều thuộc khoảng $(1,+\infty)$.

Cách 2. Đặt biến mới: $t=\sqrt{x^2-1}$, $x=\sqrt{t^2+1}$.

PT khi đó có dạng $\sqrt{t^2+1}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{35}{12}$.

PT cuối tương đương với $(t^2+1)\left(1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)=\dfrac{1225}{144}$.

Ta viết lại dưới dạng

$$\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2-\frac{1225}{144}=0.$$

Đặt $a=t+\dfrac{1}{t}$, khi đó $a^2-2=t^2+\dfrac{1}{t^2}$. Ta chuyển qua PT: $a^2+2a-\dfrac{1225}{144}=0$. Nghiệm của nó là: $a_1=-\dfrac{49}{12}, a_2=\dfrac{25}{12}$. Vì $t>0$ và $a>0$, nên ta cần giải PT: $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{25}{12}$. PT cuối dẫn tới PT bậc hai với hai nghiệm là $t_1=\dfrac{4}{3}, t_2=\dfrac{3}{4}$. Từ đây ta tìm được nghiệm: $x_1=\dfrac{5}{3}, x_2=\dfrac{5}{4}$.

Khi giải PT bằng các phương pháp thông thường ta phải tiến hành đổi biến và phải giải không chỉ một PT bậc hai. Điều này dẫn tới mất rất nhiều thời gian cho các bước trung gian. Bây giờ ta sẽ tìm cách giải PT đã cho bằng cách khác.

Cách 3. ĐK $x>1$ gợi ý cho ta đặt hàm lượng giác $x=\dfrac{1}{\sin z}$, $z\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Với cách đặt như vậy, PT

đã cho dẫn tới hệ: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin z}+\dfrac{1}{\cos z}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{4} \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1 \end{cases}$ (1).

Từ đây ta suy ra: $\begin{cases} \sin z=\dfrac{3}{5} \\ \cos z=\dfrac{4}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin z=\dfrac{4}{5} \\ \cos z=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Từ đây, ta có các nghiệm: $x_1=\dfrac{5}{3}, x_2=\dfrac{5}{4}$.

Lưu ý. Ta sẽ chỉ ra rằng, trong quá trình giải bằng phương pháp trên, không có nghiệm nào bị bỏ sót. Quả vậy, PT đầu tiên của hệ (1) được viết lại dưới dạng $\dfrac{\sin z+\cos z}{2\sin z\cdot\cos z}=\dfrac{25}{24}$ (2).

Trong PT trên, đặt $\sin z+\cos z=\alpha$, $2\sin z\cos z=\alpha^2-1$, ta thu được PT $\alpha^2-\dfrac{24}{35}\alpha-1=0$. Vì góc z nằm trong góc phần tư thứ nhất nên $\alpha>0$, và vì thế PT có nghiệm $\alpha=\dfrac{7}{5}$. Từ đây suy ra: $\sin 2z=\dfrac{24}{25}, \cos 2z=\pm\dfrac{7}{25}$.

Từ đây có: $\sin z=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2z}{2}}=\sqrt{\dfrac{1\mp\frac{7}{25}}{2}}$.

Từ đây ta tìm được nghiệm của PT đã cho:

$$x_1=\frac{5}{3}, x_2=\frac{5}{4}.$$

Cách giải thứ 3 như trên là rất ít gặp khi giải các PT đại số. Xét cách đặt hàm lượng giác khác.

Nếu ẩn x của PT kèm theo điều kiện $|x|\le 1$, thì ta nên đặt ẩn: $x=\sin\varphi, \left(-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc là $x=\cos\varphi, (0\le\varphi\le\pi)$. Đôi khi sẽ là rất thuận lợi nếu ta đặt $x=\tan\varphi, \left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Các hàm nói trên là đơn điệu trên các khoảng tương ứng vì thế hàm số chỉ nhận mỗi giá trị là một lần.

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $\sqrt{1-x^2}=3x-4x^3$.

Lời giải. Vì $|x|\le 1$, nên ta đặt

$$x=\sin\varphi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

PT ban đầu trở thành: $\cos\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$

hay $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)-\sin 3\varphi=0.$

PT cuối tách thành hai PT:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)=0 \quad (3) \quad \text{và} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0 \quad (4).$$

Từ PT(3), ta tìm được:

$$\varphi=\frac{\pi}{8}, x=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$\varphi=-\frac{3\pi}{8}, x=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Tương tự, từ (4) có: $\varphi=\dfrac{\pi}{4}, x=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Như vậy nghiệm của PT là

$$\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$x^2\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Vế trái và vế phải của PT là các hàm chẵn, nên ta có thể đặt

$$|x|=\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Viết lại PT dạng: $\sin^2\varphi\cos\varphi=\sin^3\varphi-\sin\varphi+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

hay $\sin^2\varphi\cos\varphi=-\sin\varphi\cos^2\varphi+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Biến đổi PT cuối thu được: $\sin 2\varphi\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Vì $|\sin t|\le 1, \forall t$ nên ta thu được hai hệ

$$\begin{cases} \sin 2\varphi=1 \\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2\varphi=-1 \\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=-1. \end{cases}$$

Hệ đầu tiên cho nghiệm $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, hệ thứ hai không có nghiệm. Như vậy từ $|x|=\sin\dfrac{\pi}{4}$, ta suy ra

nghiệm của PT đầu là $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình* $2\left(2x^2-1\right)^2-1=x$.

Lời giải. Thoạt nhìn, ta chưa thấy rõ cách đặt hàm lượng giác trong PT. Vì vậy, đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng nghiệm của PT không thể lớn hơn 1.

Giả sử $|x|>1$, khi đó:

$$2x^2-1=x^2+x^2-1, 2x^2-1>x^2>|x|$$

và $$2\left(2x^2-1\right)^2-1>\left|2x^2-1\right|>|x|.$$

Sau đó, tiến hành đổi biến $x=\cos\alpha, \alpha\in[0,\pi]$, ta thu được: $2\left(2\cos^2\alpha-1\right)^2-1=\cos\alpha$.

Vì $2\cos^2\alpha-1=\cos 2t$, nên vế trái biến đổi thành $\cos 4\alpha$. Vậy PT có dạng $\cos 4\alpha=\cos\alpha$.

Trên đoạn $[0,\pi]$, PT cuối có các nghiệm: $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$. Quay trở lại biến cũ, ta thu được nghiệm: $1, -\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$\sqrt{1+x^2}+x=\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}.$$

Lời giải. Tiến hành đổi biến

$$x=\tan\alpha, \quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Khi đó PT ban đầu có dạng

$$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos^3\alpha \text{ hay } \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}-\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos\alpha=0.$$

Chia cả hai vế của PT cho $1+\sin\alpha$ và nhân với $\cos\alpha$ với $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Dẫn tới PT tương đương

$$1-(1-\sin\alpha)\left(1-\sin^2\alpha\right)=0$$

hay

$$\sin^3\alpha-\sin^2\alpha-\sin\alpha=0.$$

Từ đây, ta rút ra được hai PT $\sin\alpha=0$ và $\sin^2\alpha-\sin\alpha-1=0$. PT đầu tiên cho nghiệm $\alpha=0$, còn nghiệm của PT hai là $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Giá trị âm của hàm $\sin\alpha$ tương ứng với $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$. Tiếp theo ta tìm được:

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

$$\tan\alpha=-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Quay trở lại biến cũ, ta thu được hai nghiệm của PT ban đầu: $x=0, x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\left(4x^3-3x\right)^6+\left(4y^3-3y\right)^6=1\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Lời giải. Vì $x^2+y^2=1$, nên ta có thể đặt

$$x=\sin\alpha, \ y=\cos\alpha.$$

Khi đó PT đầu tiên của hệ trở thành

$$\sin^6 3\alpha+\cos^6 3\alpha=1 \ (5).$$

Tiến hành biến đổi vế trái: $\sin^6 3\alpha+\cos^6 3\alpha=$

$$=\left(\sin^2 3\alpha+\cos^2 3\alpha\right)\left(\sin^4 3\alpha-\sin^2 3\alpha\cdot\cos^2 3\alpha+\cos^4 3\alpha\right)$$

$$=1-3\sin^2 3\alpha\cdot\cos^2 3\alpha.$$

Từ đó suy ra, PT (5) tương đương với PT: $\sin 6\alpha=0$. Tập nghiệm của PT được cho bởi công thức $\alpha=\frac{\pi k}{6}, k\in\mathbb{Z}$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ: $(0;1)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $(1;0)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;0)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Thí dụ 7. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}\frac{2x}{1-x^2}=y\\ \frac{2y}{1-y^2}=z.\\ \frac{2z}{1-z^2}=x\end{cases}$

Lời giải. Đặt $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. ☞

☞ Khi đó PT thứ nhất và thứ hai của hệ trở hành: $\begin{cases} y = \tan 2\alpha \\ z = \tan 4\alpha \end{cases}$.

Phương trình thứ ba của hệ có dạng:

$\tan 8\alpha = \tan\alpha$ hay $\dfrac{\sin 7\alpha}{\cos 8\alpha \cdot \cos\alpha} = 0$.

PT cuối cùng trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ tương đương với hệ: $\begin{cases} \sin 7\alpha = 0 \\ \cos 8\alpha \neq 0 \end{cases}$. Từ đây ta tìm được nghiệm: $\alpha = \dfrac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$. Để nghiệm này cũng thỏa mãn nghiệm của PT đầu tiên thì nó phải thỏa mãn điều kiện: $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{16}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{16}; \dfrac{\pi}{16}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{16}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Các giá trị sau của α thỏa mãn điều kiện trên

$$\alpha = 0,\ \alpha = \pm\frac{\pi}{7},\ \alpha = \pm\frac{2\pi}{7},\ \alpha = \pm\frac{3\pi}{7}.$$

Từ đó suy ra nghiệm cần tìm của hệ phương trình đầu là: $(0;0;0)$; $\left(\tan\dfrac{\pi}{7}; \tan\dfrac{2\pi}{7}; \tan\dfrac{4\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\dfrac{2\pi}{7}; \tan\dfrac{4\pi}{7}; \tan\dfrac{8\pi}{7}\right)$; $\left(\tan\dfrac{3\pi}{7}; \tan\dfrac{6\pi}{7}; \tan\dfrac{12\pi}{7}\right)$; $\left(-\tan\dfrac{\pi}{7}; -\tan\dfrac{2\pi}{7}; -\tan\dfrac{4\pi}{7}\right)$; $\left(-\tan\dfrac{2\pi}{7}; -\tan\dfrac{4\pi}{7}; -\tan\dfrac{8\pi}{7}\right)$; $\left(-\tan\dfrac{3\pi}{7}; -\tan\dfrac{6\pi}{7}; -\tan\dfrac{12\pi}{7}\right)$.

****

BÀI TOÁN ... (*Tiếp theo trang 18*)

Bài tập vận dụng

Bài 1 (Dự bị 2, khối D-2002). Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Bài 2 (Dự bị 1, khối B-2003). Tìm m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Bài 3 (Khối A-2004). Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 1$.

Bài 4 (Khối D-2006). Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt.

Bài 5 (Khối A-2010). Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Bài 6 (Khối B-2010). Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt (C): $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$ (với O là gốc tọa độ)

Bài 7 (Dự bị, khối D-2010). Tìm m để đường thẳng $y = m(x + 1)$ cắt (C): $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ tại ba điểm phân biệt $M(-1; 0)$, A, B sao cho $MA = 2MB$.

Bài 8 (Khối A-2011). Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt (C): $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$ tại hai điểm pbiệt A và B. Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9 (Khối D-2011). Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt (C): $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A, B đến trục hoành bằng nhau.

Bài 10 (Dự bị khối A, A1-2012). Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(-2; 3)$ và có hệ số góc là k. Tìm k để (d) cắt (C): $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho các tiếp tuyến của (C) tại ba điểm đó tạo thành một tam giác vuông.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/526 (Lớp 6). Cho hai số m, n nguyên dương và nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $m + n = 90$. Tìm giá trị lớn nhất của tích $m.n$.

PHẠM MINH HOÀNG
(Công ty Nissan Automotion Techlonogy Việt nam)

Bài T2/525 (Lớp 7). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^{2021}+n+1$ là số nguyên tố.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T3/526. Giải phương trình

$$x^4-6x-1=2(x+4)\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}.$$

TRẦN MẠNH CƯỜNG
(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T4/526. Cho tam giác nhọn ABC có $AB + AC = 2BC$ nột tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M là điểm chính giữa của cung lớn BC. Đường thẳng MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại N. Đường thẳng OI cắt BC tại P. Chứng minh rằng đường thẳng PN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/526. Xác định tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2ax-3a-1=0 \\ y^2-2by+x=0 \end{cases}$$

có đúng 3 nghiệm thực $(x; y)$ phân biệt.

NGUYỄN PHÚ SƠN
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/526. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \ge \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}-1.$$

ĐÀO VĂN NAM
(GV TH, THCS Everrest, Hà Nội)

Bài T7/526. Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao là h_a, h_b, h_c và nửa chu vi p thỏa mãn hệ thức $h_a^2+h_b^2+h_c^2=p^2$. Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

ĐẶNG THANH HẢI – TRẦN TUYẾT THANH
(GV khoa Cơ bản, Học viện PKKQ Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T8/526. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AC > AB$, AM là trung tuyến. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp đáy. Giả sử IM vuông góc với BI. Tính giá trị biểu thức

$$T=\frac{V_{S.AIB}}{V_{S.AIC}}+\frac{V_{S.AIC}}{V_{S.BIC}}+\frac{V_{S.BIC}}{V_{S.AIB}}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T9/526. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n} \ge \frac{3}{2^n-1}.$$

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 9, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/526. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}\right]$, trong đó ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tìm tất cả các số nguyên dương n để S_n là lũy thừa của một số nguyên tố.

ĐÀO XUÂN LUYỆN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP.Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T11/526. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(x+f(y))=f(x), \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T12/526. Cho tam giác nhọn ABC, $(O; R)$ là đường tròn ngoại tiếp. Đường cao $AD = \sqrt{2}R$. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của AB, AC và đường tròn đường kính AD. P là giao điểm thứ hai của $(O; R)$ và đường tròn đường kính AD. Q là điểm đối xứng của P qua MN. Chứng minh rằng

a) $2S_{AMN} = S_{ABC}$.

b) $\widehat{BQN} = \widehat{CQM} = \frac{\pi}{2}$.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/526. Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là $L_A = 50$ dB, tại B là $L_B = 30$ dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà $CB = 2CA$. Xác định mức cường độ âm tại C.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/526. Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở $R = 100\ \Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$(H). Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 400\cos^2(50\pi t + \pi)$(V). Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch.

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/526 (For 6th grade). Given positive integers m, n which are coprime and satisfy $m + n = 90$. Find the maximal value of the product $m.n$.

Problem T2/526 (For 7th grade). Find all positive integers n so that $n^{2021} + n + 1$ is a prime.

Problem T3/526. Solve the equation

$$x^4 - 6x - 1 = 2(x+4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}.$$

Problem T4/526. Given acute triangle ABC with $AB + AC = 2BC$ which is inscribed in the circle (O) and is circumscribed the circle (I). Let M be the midpoint of the major arc BC. The line MI intersects the circumcircle of BIC at N. The line OI intersects BC at P. Show that the line PN is tangent to the circumcircle of BIC.

Problem T5/526. Find all pairs of integers $(a; b)$ so that the following system of equations

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - 3a - 1 = 0 \\ y^2 - 2by + x = 0 \end{cases}$$

has exactly 3 different real roots $(x; y)$.

FOR HIGH SCHOOL

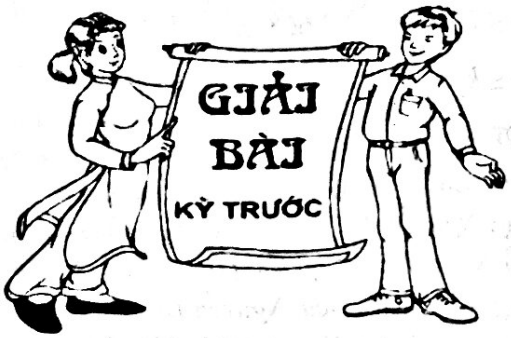
Problem T6/526. Given positive numbers a, b, c. Show that

$$\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1.$$

Problem T7/526. Given a triangle ABC with the lengths of the altitudes h_a, h_b, h_c and its half perimeter p satisfying $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = p^2$. Show that the triangle iABC is equilateral.

Problem T8/526. Given a tetrahedron $S.ABC$ whose base is a right triangle with the right angle A and $AC > AB$. Let AM be the median and I the incenter of the base. Suppose that IM is perpendicular to BI. Compute the value of the expression $T = \frac{V_{S.AIB}}{V_{S.AIC}} + \frac{V_{S.AIC}}{V_{S.BIC}} + \frac{V_{S.BIC}}{V_{S.AIB}}$.

(Xem tiếp trang 33)



Bài T1/522. *Chứng tỏ rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *ta có:* $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ *chia hết cho 7.*

Lời giải. *Chú ý* : Với các số nguyên *h, k* tùy ý ta thấy:

1) $(3h + 1)(3k + 1) = 3s + 1$ và

$(7h + 1)(7k + 1) = 7s + 1$ với *s* là số nguyên;

2) $(3h - 1)(3k - 1) = 3s + 1$ với *s* là số nguyên;

3) $(3h + 1)(3k - 1) = 3x - 1 = 3(x - 1) + 2 = 3s + 2$ với *s, x* là các số nguyên.

Với *k, m* là các số nguyên từ *Chú ý* trên suy ra rằng: $(3k - 1)^{2m} = 3u + 1$ và $(3k - 1)^{2m+1} = 3v + 2$ với *u, v* là các số nguyên, do đó nếu *n* là số chẵn thì $2^n = (3 - 1)^n = 3u + 1$ (nếu $n = 0$ thì $2^n = 1$) và nếu *n* là số lẻ thì $2^n = (3 - 1)^n = 3v + 2$ với *u, v* là các số nguyên.

Đặt $T = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$. Nếu *n* là số chẵn ta có:

$$\begin{aligned} T &= 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 = 4^{3u+1} + 2^{3u+1} + 1 \\ &= 4.4^{3u} + 2.2^{3u} + 1 = 4.\,64^u + 2.8^u + 1 \\ &= 4(7.9 + 1)^u + 2(7 + 1)^u + 1 \\ &= 4(7s + 1) + 2(7t + 1) + 1 \\ &= 7(4s + 2t + 1), \end{aligned}$$

số này chia hết cho 7 do *s, t* là các số nguyên.

Nếu *n* là số lẻ ta có:

$$\begin{aligned} T &= 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 = 4^{3v+2} + 2^{3v+2} + 1 \\ &= 16.4^{3v} + 4.2^{3v} + 1 = 16.\,64^v + 4.8^v + 1 \\ &= 16(7.9 + 1)^v + 4(7 + 1)^v + 1 \\ &= 16(7s + 1) + 4(7t + 1) + 1 \\ &= 7(16s + 4t + 3), \end{aligned}$$

số này chia hết cho 7 do *s, t* là các số nguyên.

Vậy $T = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ chia hết cho 7 với *n* là số nguyên dương tùy ý.

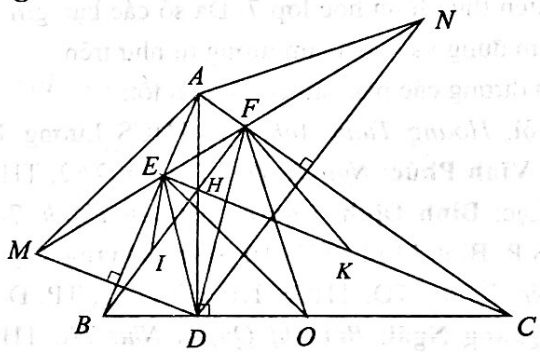
Nhận xét. Lưu ý rằng 4^{2^n} không bằng 16^n. Các bạn sau có lời giải đúng. **Phú Thọ**: *Nguyễn Đoàn Anh Tú*, 6A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội**: *Trần Anh Đức*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Nghệ An**: *Lê Ngọc Hương Giang*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Bùi Thị Thùy Linh, Nguyễn Văn Lâm, Nguyễn Trọng Bảo, Đinh A Na, Lâm Phương Thảo*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/522. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC), đường cao AD. Vẽ các điểm M và N sao cho AB là đường trung trực của MD, AC là đường trung trung trực của ND. MN cắt AB tại E và cắt AC tại F. BF và CE cắt nhau tại H. Gọi I, K, O theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH và BC. Chứng minh*

$$\widehat{EIF} = \widehat{EKF} = \widehat{EDF} = \widehat{EOF}.$$

Lời giải.



Do *AB* là đường trung trực của *MD* và $E \in AB$ nên tam giác *EMD* cân tại *E* và *EB* là phân giác của $\widehat{MED}$. Chứng minh tương tự, ta có *FC* là phân giác của $\widehat{NFD}$.

Tam giác *DEF* có *EB* và *FC* là hai phân giác ngoài cắt nhau tại *A*, nên *DA* là phân giác của $\widehat{EDF}$.

Lại có $AD \perp BC$ nên *DC* là phân giác ngoài của tam giác *DEF*.

Tam giác *DEF* có *DC* và *FC* là hai phân giác ngoài cắt nhau tại *C* nên *EC* là phân giác của $\widehat{FED}$. Suy ra $\widehat{CEB} = 90^o$ và *H* là trực tâm của tam giác *ABC*. Do đó $BF \perp AC$.

Do *AB* là đường trung trực của *MD*, *AC* là đường trung trực của *ND* nên *AM* = *AN* (= *AD*) và $\widehat{ADE} = \widehat{AME}$, $\widehat{ADF} = \widehat{ANF}, \widehat{MAN} = 2\widehat{BAC}$.

Suy ra: $\widehat{EDF}=\widehat{ADE}+\widehat{ADF}=\widehat{AME}+\widehat{ANF}$

$=180^o-\widehat{MAN}=180^o-2\widehat{BAC}$ (1).

Tam giác BEH vuông tại E có EI là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EI = IB$. Do đó tam giác IBE cân tại I. Suy ra $\widehat{EIF}=2\widehat{EBF}$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{EKF}=2\widehat{ECF}$. Mà $\widehat{EBF}=\widehat{ECF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra $\widehat{EIF}=\widehat{EKF}$ (2). Ta có:

$$\widehat{EOF}=180^o-(\widehat{EOB}+\widehat{FOC})$$
$$=180^o-(180^o-2.\widehat{ABC}+180^o-2.\widehat{ACB})$$
$$=2(\widehat{ABC}+\widehat{ACB})-180^o$$
$$=2(180^o-\widehat{BAC})-180^o=180^o-2.\widehat{BAC}\ (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EIF}=\widehat{EKF}=\widehat{EDF}=\widehat{EOF}$ (điều phải chứng minh).

Nhận xét. Đây là bài toán chứng minh sử dụng linh hoạt kiến thức hình học lớp 7. Đa số các bạn gửi bài đều làm đúng và cách làm tương tự như trên.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Hoàng Tuấn Anh*, 7T, THCS Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 7A2, THCS Yên Lạc; **Bình Định**: *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 7A4, THCS P. Bình Minh, TX. An Nhơn; **Quảng Trị**: *Võ Nguyên Thăng*, 7D, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi**: *Bùi Thị Quỳnh Như* 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T3/522. *Cho các tập hợp*

$A=\{x\in\mathbb{N}:\ x=3k+2$ với $k\in\mathbb{N}$ và $k\le 668\}$;

$B=\{x\in\mathbb{N}:\ x=5k+1$ với $k\in\mathbb{N}$ và $k\le 668\}$;

$C=\{x\in\mathbb{N}:\ x\in A$ và $x\in B\}$.

Hỏi tập hợp C có bao nhiêu phần tử ?

Lời giải. (Của nhiều bạn) Trước hết ta tìm các phần tử của tập hợp C. Ta phải giải phương trình Diophantus:

$$x=3k_1+2=5k_2+1, 0\le k_1,k_2\le 668\quad (*).$$

Cộng thêm 4, ta có số $x+4$ vừa là bội của 3 và bội của 5, nên là bội của 15, vì $x+4=3k_1+6=5k_2+5$. Từ đó có $x+4=15k$. Thay $x=15k-4$ vào (*) ta có:

$$0\le k_1=5k-2\le 668\Rightarrow 1\le k\le 134$$

và $$0\le k_2=3k-1\le 668\Rightarrow 1\le k\le 223.$$

Tổng hợp lại, tập hợp C có 134 phần tử.

Nhận xét : Các bạn sau đây có đáp số đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thị Thu Hằng, Nguyễn Đức Huy*, 7A3, *Đỗ Ngọc Tiến, Nguyễn Trung Kiên, Ngô Đức Dũng, Nguyễn Thái Triệu, Nguyễn Duy Anh, Nguyễn Đức Quý và Bùi Duy Khánh*, 8A3, THCS Lâm thao, huyện Lâm Thao; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Nguyễn Công Phúc* 9C, *Thái Mạnh Quân*, 7B, *Phan Quốc Bảo* 7A, *Nguyễn Phương Phương*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội** : *Trần Anh Đức*, 6C2, *Phạm Hồng Gia Bảo, Đỗ Việt Nhân*, 8C2, THCS, THPT Archimedes Đông Anh, *Trần Minh Tú* 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7B3, THCS Pom Lót, huyện Điện Biên; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ;

Ban *Ngô Hữu Nam*, 8A3 không cho biết học trường nào, ở đâu.

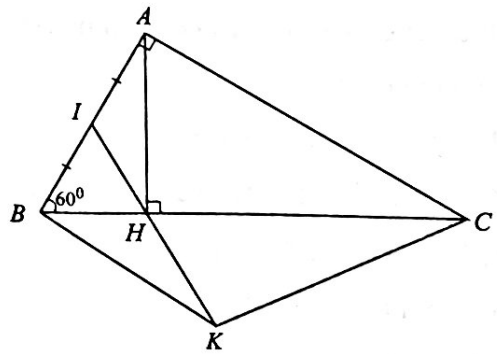
VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/522. *Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=60^0$, đường cao AH. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Trên tia IH lấy điểm K sao cho BK = BA. Tính số đo góc $\widehat{BKC}$.*

Lời giải. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $BA^2 = BH.BC$. Suy ra:

$BK^2=BH.BC \Leftrightarrow \dfrac{BK}{BC}=\dfrac{BH}{BK}$. Từ đó suy ra:

$\Delta BKH \sim \Delta BCK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BHK}=\widehat{BKC}$ (1).



Vì tam giác AHB vuông tại H, có I là trung điểm của AB nên $IB = IH$. Tam giác BIH cân, có $\widehat{IBH}=60°$ (giả thiết) nên ΔBIH đều.

Do đó $\widehat{IHB} = 60° \Rightarrow \widehat{BHK} = 120^0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BKC} = 120^0$.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Nguyễn Danh Tiến Nam, Phạm Viết Thịnh, Hoàng Đình Đức, Nguyễn Công Phúc, Trương Đình Khải*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; *Nguyễn Gia Khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 7D, THCS Trưng Vương, Đông Hà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/522. *Cho ba số thực a, b, c sao cho $ab \neq 0$ và thỏa mãn $2a(a^2+b^2)=bc$ và $b(a^2+15b^2)=6ac$. Tính giá trị của biểu thức*

$$P=\frac{a^4+6a^2b^2+15b^4}{15a^4+b^4}.$$

Lời giải. Vì $ab \neq 0$ nên giả thiết

$$\begin{cases} 2a\left(a^2+b^2\right)=bc \\ b\left(a^2+15b^2\right)=6ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2\left(a^2+b^2\right)=6abc \\ b^2\left(a^2+15b^2\right)=6abc \end{cases}.$$

Suy ra: $12a^2\left(a^2+b^2\right)=b^2\left(a^2+15b^2\right)$

$$\Leftrightarrow 12a^4+11a^2b^2-15b^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3a^2+5b^2\right)\left(4a^2-3b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-3b^2=0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{4}$$

(lưu ý $3a^2+5b^2>0$).

Chia cả tử số và mẫu số của biểu thức P cho $b^4 \neq 0$, ta được: $P=\dfrac{a^4+6a^2b^2+15b^4}{15a^4+b^4}$

$$=\frac{\frac{a^4}{b^4}+6.\frac{a^2}{b^2}+15}{15.\frac{a^4}{b^4}+1}=\frac{\frac{9}{16}+6.\frac{3}{4}+15}{15.\frac{9}{16}+1}=\frac{321}{151}.$$

Vậy $P=\dfrac{321}{151}$.

Nhận xét. Đây là đề toán không khó, hầu hết các bạn làm như trên. Điều then chốt của bài toán là từ giả thiết, tính được $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{4}$. Có thể thay $b^2=\dfrac{4a^2}{3}$ và rút gọn, ta được $P=\dfrac{a^4+6a^2b^2+15b^4}{15a^4+b^4}=\dfrac{321}{151}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Phú Thọ: *Đỗ Ngọc Tiến, Nguyễn Trung Kiên, Lê Văn Kiệt, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Duy Anh, Bùi Duy Khánh, Dương Nguyên Khánh*, 8A3, *Nguyễn Đức Vinh quang*, 9A3, THCS Lâm Thao, *Lê Anh Khiêm, Triệu Huyền Trâm, Nguyễn Gia Huy B*, 8C, THCS Cao Mai, TTr. Lâm Thao , H. Lâm Thao; **Nghệ An:** *Trần Quang Vinh*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Công Phúc, Trương Đình Khải, Nguyễn Danh Tiến Nam, Hoàng Đình Đức, Nguyễn Huy Dũng, Dương Trọng Nguyên*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Thị An Bình*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ , *Nguyễn Gia khánh*, 9B, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hưng Yên; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/522. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & (1) \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{23+x-6y}=2\sqrt{5} & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Huy Hoàng* và nhiều bạn khác) ĐK: $\begin{cases} x \leq 5; \\ 23+x-6y \geq 0 \end{cases}$ (*).

Với ĐK (*) thì

$$(2) \Leftrightarrow 5-x+2\sqrt{5-x}\sqrt{23+x-6y}+23+x-6y=20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x}\sqrt{23+x-6y}=3y-4 \quad (3).$$

Với điều kiện $3y-4 \geq 0$ hay $y \geq \dfrac{4}{3}$ (**) thì

$$(3) \Leftrightarrow (5-x)(23+x-6y)=9y^2-24y+16$$

$$\Leftrightarrow 9y^2+x^2-6xy+18x+6y-99=0$$

$$\Leftrightarrow \left(10x^2+10y^2-90\right)-\left(3x+y-3\right)^2=0 \quad (4).$$

Do (1) nên $(4) \Rightarrow (3x+y-3)^2=0 \Leftrightarrow 3x+y-3=0$.

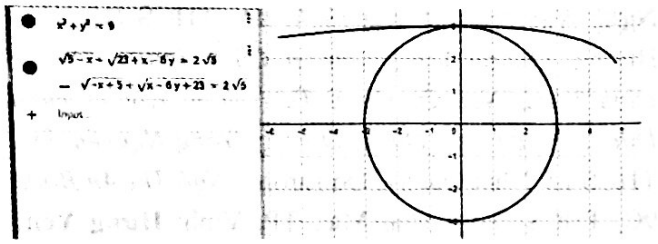
Thay $y=3-3x$ vào (1) ta được:

$$x^2+(3-3x)^2=9 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ hoặc } x_2=\frac{9}{5}.$$

Suy ra $y_1=3$ hoặc $y_2=-\dfrac{12}{5}$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện (**)).

Vậy hệ (I) có một cặp duy nhất (0;3) thỏa mãn điều kiện (*). *Đáp số*: $x=0; y=3$.

Phương pháp đồ thị: Khai báo $x\wedge 2+y\wedge 2=9$ và $\text{sqrt}(5-x)+\text{sqrt}(23+x-6y)=2\text{sqrt}(5)$ trên *GeoGebra* (dấu ^ là dấu lũy thừa, sqrt là căn bậc hai), *GeoGebra* sẽ vẽ hai đường cong và chúng cắt nhau tại điểm duy nhất $(0;3)$.



Nhận xét. Đây là bài dạng giải *hệ phương trình hỗn hợp* (đại số và căn thức), có độ khó như bài thi học sinh giỏi cấp Trường, thấp hơn thi học sinh giỏi cấp Tỉnh, Thành phố hiện nay. Bài có nhiều cách giải. Đã có 61 bạn tham gia giải, trong đó có 17 bạn là học sinh THCS. Tuy nhiên, nhiều bạn không nắm vững qui tắc biến đổi tương đương khi giải phương trình, thí dụ, không sử dụng định lí:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$$

nên thừa nghiệm (Các bạn: *Ngô Gia Hiếu*, 9C, *Nguyễn Gia Huy*, 8C, THCS Cao Mại, Thị trấn Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Vinh Minh*, 10 Toán 1, THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Bùi Minh Trung*, 11C2, THPT Chu Văn An, Thành phố Gia Nghĩa, **Đăk Nông**). Thậm chí, nhiều bạn đáp số đúng, nhưng không thể cho điểm tối đa: Một số bạn dẫn đến phương trình bậc bốn và sử dụng công cụ đạo hàm, trong khi bài này chỉ cần đến biến đổi tương đương và giải hệ đơn giản.

Có một bạn mắc sai lầm đơn giản khi chuyển vế $3x+y-3=0$ thành $y=3-3y$ và giải hệ $\begin{cases}y=3-3x\\ x^2+y^2=9\end{cases}$ cho nghiệm $(x;y)=(0;5)$.

Danh sách các bạn giải đúng là:

Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2; **Bình Dương:** *Trần Hoài Bảo*, 9A1, THCS Phú Mỹ, TP. Thủ Dầu Một; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Hà Trọng Tài*, 12T6, THPT chuyên Bình Long; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, *Phạm Vinh Minh*, 10 Toán 1, *Lê Nhật Khôi*, 10T1, *Phạm Hữu Đăng, Lê Văn Anh Khoa, Nguyễn Minh Khôi, Nguyễn Thiên Lý, Lạc Xuân Thịnh, Nguyễn Thiện Trí*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Phạm Hoàng Gia Bảo, Trần Anh Đạt, Đỗ Viết Việt Nhân*, 8C2, THCS Amsterdam, Đông Anh, *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Ngọc Anh, Nguyễn Thị Thùy Linh*, 11A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Hưng Yên:** *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, *Lê Xuân Hiệp*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Hoàng Đình Đức, Nguyễn Danh Tiến Nam, Nguyễn Công Phúc, Phạm Viết Thịnh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Quang Vinh*, 8A THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Dũng, Vũ Đức Huy, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Đức Quý, Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, *Nguyễn Đức Vinh Quang*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Trần Tuấn Minh*, 10 Toán THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, *Trần Nhật Minh*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên-Huế:** *Lê Nguyễn Quỳnh Anh, Hoàng Bảo Ngọc*,11 Toán 2, *Phan Thị Minh Châu, Lê Thị Thanh Tâm, Nguyễn Hương Thùy, Lê Thủy Tiên*, 10 Toán 2, *Trần Trân Châu, Trần Thị Thanh Thư, Phan Thị Bảo Trâm*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Hoàng Đăng Tân, Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1; *Nguyễn Quốc Toàn, Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. Và có hai bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/522. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn* $25a+45b+52c\le 95$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $\dfrac{a+b}{a+b+1}+\dfrac{b+c}{b+c+1}+\dfrac{c+a}{c+a+1}$.

Lời giải. ***Cách 1.*** Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $25a+45b+52c\le 95$ ta dễ dàng chứng minh được:

$\dfrac{a+b}{a+b+1}\le\dfrac{a+b+9}{16}$; dấu "=" xảy ra khi $a+b=3$.

$\frac{b+c}{b+c+1} \le \frac{b+c+1}{4}$; dấu "=" xảy ra khi $b + c = 1$.

$\frac{c+a}{c+a+1} \le \frac{c+a+4}{9}$; dấu "=" xảy ra khi $c + a = 2$.

Cộng ba vế đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1} \le \frac{25a+45b+52c+181}{144}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1} \le \frac{23}{12}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 2, b = 1, c = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1} \text{ bằng } \frac{23}{12}.$$

Cách 2. Đặt $P=\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1}$.

Ta có: $P=3-\left(\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\right)$

$$=3-\left(\frac{3^2}{9(a+b+1)}+\frac{6^2}{36(b+c+1)}+\frac{4^2}{16(c+a+1)}\right).$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{3^2}{9(a+b+1)}+\frac{6^2}{36(b+c+1)}+\frac{4^2}{16(c+a+1)}$$

$$\ge \frac{(3+6+4)^2}{9(a+b+1)+36(b+c+1)+16(c+a+1)}$$

$$\ge \frac{169}{95+61}=\frac{169}{156}.$$

Do đó: $P \le 3-\frac{169}{156}=\frac{23}{12}$.

$$P=\frac{23}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{9(a+b+1)}=\frac{6}{36(b+c+1)}=\frac{4}{16(c+a+1)} \\ 25a+45b+52c=95 \end{cases}$$

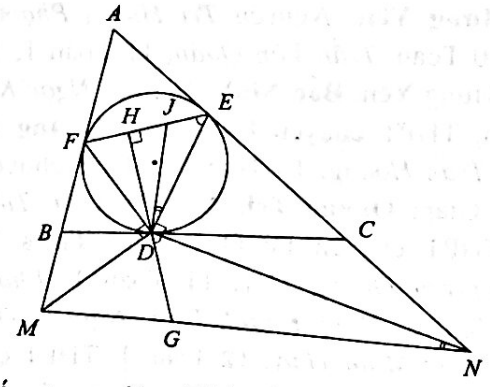
$\Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 0$. Vậy $\max P=\frac{23}{12}$.

Nhận xét. Bài toán không khó nhưng lời giải của một số bạn còn dài dòng. Cách giải 1 là của tác giả đề toán. Cách 2 là của đa số các bạn. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1-K16-YP2, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong; **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Phú Thọ:** *Ngô Đức Dũng, Nguyễn Duy Anh, Nguyễn Đức Quý, Bùi Duy Khánh, Lê Văn Kiệt, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Tiến Dũng, Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao, *Trần Tuấn Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Lê Xuân Hiệp*, 10 Toán 1, *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Phúc, Nguyễn Danh Tiến Nam, Hoàng Đình Đức, Nguyễn Huy Dũng, Phạm Viết Thịnh, Dương Trọng Nguyên*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hoài Mến*, 11A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Bình:** *Phạm Gia Hưng*, 10 Toán 1, *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, *Trương Thị Thu Hà, Hoàng Đăng Tân*, 11 Toán 1, *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, *Phan Thị Bảo Trâm, Trần Thị Thanh Thư*, 10 Toán 1, *Phan Thị Minh Châu, Nguyễn Hương Thủy, Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Lê Văn Anh Khoa, Phạm Hữu Đăng*, 11T1, *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, trường phổ thông Duy Tân, TX. Đông Hòa; **Đăk-Nông:** *Bùi Minh Trung*, 11C2, THPT Chu Văn An, TP. Gia Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/522. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M là điểm đối xứng của F qua B và N là điểm đối xứng của E qua C. Đường cao DH của tam giác DEF cắt MN tại G. Chứng minh DH = DG.*

Lời giải.



Dễ thấy tam giác FDM vuông tại D, tam giác EDN vuông tại D. Trên cạnh EF lấy điểm J sao

cho $\widehat{EDJ}=\widehat{DNG}$. Khi đó do $\widehat{JED}=\widehat{GDN}$ (cùng phụ với $\widehat{EDH}$) nên $\Delta JED \sim \Delta GDN$ (g.g). Suy ra $\frac{JE}{DG}=\frac{DE}{DN}=\cot\widehat{DEC}=\cot\widehat{EFD}$ (1).

Xét hai tam giác JFD và GDM có:

$\widehat{DGM}=\widehat{DJF}$ (vì $\widehat{DGN}=\widehat{EJD}$);

$\widehat{JFD}=\widehat{GDM}$ (cùng phụ với $\widehat{FDH}$)

$\Rightarrow \Delta JFD \sim \Delta GDM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{JF}{DG}=\frac{DF}{DM}=\cot\widehat{DFB}=\cot\widehat{DEF}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{JE}{DG}+\frac{JF}{DG}=\cot\widehat{EFD}+\cot\widehat{DEF}$$

hay $\frac{EF}{DG}=\cot\widehat{EFD}+\cot\widehat{DEF}=\frac{FH}{DH}+\frac{EH}{DH}=\frac{EF}{DH}$.

Từ đó có $DH = DG$.

Nhận xét. Hầu hết các bài gửi về Tòa soạn đều sử dụng tính chất của hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa và kết quả: *Cho hai đường thẳng d_1, d_2. Trên d_1 lấy các điểm A_1, B_1, C_1; trên d_2 lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}}=k$. Trên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt lấy các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho $\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}}=\frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}}=\frac{\overline{C_3C_1}}{\overline{C_3C_2}}$. Khi đó ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}}=k$. (Bổ đề ERIQ)* để giải quyết bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Trần Tuấn Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Thu Hương*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trí Hùng*, *Phạm Đức Mạnh*, 10 Toán, *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Nguyễn Xuân Tiến*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, *Phạm Bá Hoàng*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, *Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Võ Hoàng Đức*, *Trần Gia Huy*, 11/1, *Nguyễn Phạm Minh Trí*, lớp Toán K14, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Đồng Tháp:** *Lê Nhật Khôi*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thiện Trí*, *Phạm Hữu Đăng*, *Lê Văn Anh Khoa*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Kon Tum:** *Nguyễn Minh Khoa*, 11Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Phước:** *Hà Trọng Tài*, 12T6, THPT chuyên Bình Long; **Sóc Trăng:** *Lâm Khả Hân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/522. *Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng*

$$(x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)\le 36(xy+yz+zx).$$

Lời giải. Do vai trò của x, y, z trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x\ge y, x\ge z$. Đặt $a=y+z$. Ta có:

$$36(xy+yz+zx)\ge 36x(y+z)=36xa;$$

$$x^3+y^3+z^3\le x^3+(y+z)^3=x^3+a^3;$$

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\le x^3(y^3+3y^2z+3yz^2+z^3)$$
$$=x^3(y+z)^3=x^3.a^3.$$

Do đó

$$36(xy+yz+zx)-(x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$$
$$\ge 36xa-(x^3+a^3)x^3a^3$$
$$=xa\left\{36-\left[(x+a)^3-3xa(x+a)\right]x^2a^2\right\}$$
$$=t\left[36-(27-9t)\right]t^2 \text{ (trong đó kí hiệu } t=xa,\ t\ge 0)$$
$$=9t(t^3-3t^2+4)=9t(t-2)(t^2-t-2)$$
$$=9t(t-2)^2(t+1)\ge 0.$$

BĐT đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow yz=0$, $x(3-x)=2$ hoặc $yz=0$, $x(3-x)=0$. Điều này tương đương với hoặc $x=2$ và trong hai số y, z có một số bằng 0 và một số bằng 1, hoặc $x=3$, $y=z=0$. Như vậy bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi (x, y, z) là một hoán vị của các số (0, 1, 2) hoặc là một hoán vị của các số (0, 0, 3).

Nhận xét. Chúng ta đã xét Vế phải – Vế trái và hiệu này được đánh giá từ phụ thuộc vào ba tham số x, y,

z xuống còn phụ thuộc vào hai tham số x, a, tiếp theo giảm xuống chỉ còn phụ thuộc tham số t. Chỉ có một bạn học sinh nhận xét được đẳng thức xảy ra tại 9 bộ số (x, y, z), các bạn còn lại thiếu trường hợp (x, y, z) là một hoán vị của các số (0, 0, 3). Đó là bạn *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/522. *Cho dãy số thực* (u_n) *xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 16, u_2 = 288 \\ u_{n+2} = 18u_{n+1} - 17u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Tìm số n nhỏ nhất sao cho u_n *chia hết cho* 2^{2020}.

Lời giải . Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp công thức tổng quát của u_n là $u_n = 17^n - 1$. Yêu cầu của bài toán là tìm số n nhỏ nhất sao cho $2^{2020} \mid 17^n - 1$. Đến đây có thể giải theo hai cách sau:

Cách 1. (Của bạn *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường Phổ thông Duy Tân, TX. Đông Hòa, **Phú Yên**). Số n cần tìm là cấp của 17 (mod 2^{2020}). Theo định lý Euler ta có: $17^{\varphi(2^{2020})} \equiv 1 \pmod{2^{2020}}$.

Do đó $n \mid \varphi(2^{2020}) = 2019$.

Vậy $n = 2^k$, $k \in \{1, 2, 3, ..., 2019\}$. Ta có:

$$17^{2^k} - 1 = (17-1)(17+1)(17^2+1)...(17^{2^{k-1}}+1).$$

Mỗi thừa số $17^{2^i} + 1, i \in \{0, ..., k-1\}$ chỉ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4 nên $v_2(17^{2^k} - 1) = k + 4$. Vậy $k + 4 \geq 2020$ $\Rightarrow k \geq 2016$. Do đó n nhỏ nhất là $n = 2^{2016}$.

Cách 2. (Của bạn *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**, *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**). Trước hết ta có bổ đề sau (gọi là bổ đề **LTE**): *Nếu x, y là hai số lẻ sao cho* $4 \mid x - y$ *thì* $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$.

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$v_2(17^n - 1) = v_2(17 - 1) + v_2(n) = 4 + v_2(n).$$

Vì $2^{2020} \mid 17^n - 1$ nên $4 + v_2(n) \geq 2020$, suy ra $v_2(n) \geq 2016$. Điều này tương đương với n chia hết cho 2^{2016}. Vậy $\min n = 2^{2016}$.

Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách thứ hai mà thừa nhận không chứng minh bổ đề **LTE**. Ngoài ba bạn *Tiến*, *Quân* và *Huy*, các bạn sau có lời giải tốt: **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Ngọc Long*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Phạm Minh Trí*, Toán K14, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/522. *Tìm tất cả các hàm số* $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *thỏa mãn* $f\left(\frac{f(n)}{n^{2020}}\right) = n^{2021}$ (1), *với mọi nguyên dương n.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Giả sử $f(n)$ thỏa mãn (1). Suy ra: $\frac{f(n)}{n^{2020}} \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (2).

Thay $n = 1$ vào (1) và kết hợp với (2), ta được:

$$f(f(1)) = 1 \text{ và } f(f(1)) \vdots f(1)^{2020}.$$

Suy ra $f(1) = 1$. Ta chứng minh $f(n) = n^{2021}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (3) bằng phương pháp quy nạp. Ta thấy (3) đúng với $n = 1$. Giả sử (3) đúng đến $n = k$, tức $f(k) = k^{2021}$. Ta chứng minh $f(k+1) = (k+1)^{2021}$. Thay $n = k + 1$ vào (1), ta thu được: $f\left(\frac{f(k+1)}{(k+1)^{2020}}\right) = (k+1)^{2021}$ (4).

Đặt $\frac{f(k+1)}{(k+1)^{2020}} = a$ thì $f(a) = (k+1)^{2021}$. Thay $n = a$ vào (1), ta thu được: $f\left(\frac{f(a)}{a^{2020}}\right) = a^{2021}$.

- Nếu $a < k + 1$ thì theo giả thiết quy nạp, $f(a) = a^{2021}$. Mặt khác, theo (4) thì

$$f(a) = f\left(\frac{f(k+1)}{(k+1)^{2020}}\right) = (k+1)^{2021}$$

nên $a^{2021} = (k+1)^{2021} \Leftrightarrow a = k + 1$, mâu thuẫn.

- Nếu $a > k + 1$ thì $\frac{(k+1)^{2021}}{a^{2020}} < k + 1$, nên theo giả thiết quy nạp thì

$$a^{2021} = f\left(\frac{f(a)}{a^{2020}}\right) = f\left(\frac{(k+1)^{2021}}{a^{2020}}\right) = \left(\frac{(k+1)^{2021}}{a^{2020}}\right)^{2021}$$

nên $a = k+1$, mâu thuẫn. Do đó, $a = k+1$, đpcm.

Kết luận: $f(n) = n^{2021}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

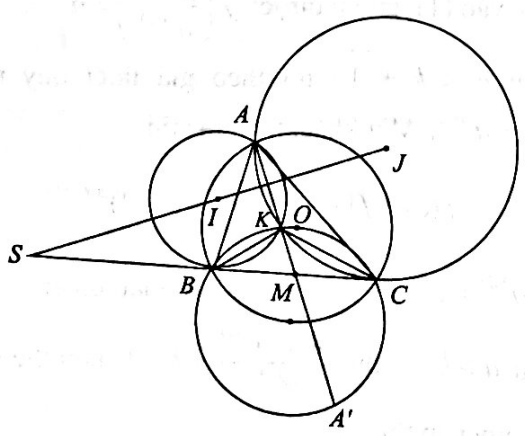
Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm trong số học. Đa số các bạn đều giải theo phương cách trên. Một số bạn sử dụng nguyên lý kẹp cũng cho lời giải ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bà Rịa – Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Lạc Xuân Thịnh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Đặng Khánh Toàn, Phạm Bá Hoàng*, 12T1, *Nguyễn Minh Ngọc, Nguyễn Vĩnh Trí* 11T1, *Đỗ Nguyễn Như Tâm*, 10T2, THPT Chuyên QH Huế; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân, TX Đông Hoà. **Quảng Bình:** *Phạm Gia Hưng*, 10T1, *Đặng Hoàng Duy, Lê Quang Phúc*; 11T1, *Lê Mỹ Duyên*, 12T1 THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Đức Thọ*, 11A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/522. *Cho tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua trung điểm M của BC. AA' cắt đường tròn (A'BC) tại điểm thứ hai K. Gọi I, J lần lượt là tâm các đường tròn (KAB) và (KAC). IJ cắt BC tại S. Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Lời giải. Dễ thấy



$$MB^2 = MC^2 = -\overline{MB}.\overline{MC} = -\overline{MA'}.\overline{MK} = \overline{MA}.\overline{MK}.$$

Do đó suy ra BC là tiếp tuyến chung của (I) và (J). Vậy S là tâm của phép vị tự ngoài biến (I) thành (J). Do đó S cũng là tâm của phép nghịch đảo ngoài biến (I) thành (J). Vậy $SA^2 = \overline{SB}.\overline{SC}$.

Điều đó có nghĩa là SA tiếp xúc với (O).

Nhận xét. 1) Bài toán này dễ, nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên một số bạn cho lời giải quá dài.

2) Một số bạn cho lời giải khá gọn bằng cách sử dụng nhận xét $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$ và chứng minh rằng S chính là tâm đường tròn Applonius ứng với đỉnh A của tam giác ABC.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt: **Bắc Kạn:** *Nông Quốc Duy*, 11T, THPT chuyên Bắc Kạn; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy, Nguyễn Đặng Khánh Toàn, Phạm Bá Hoàng*, Nguyễn Thị Ngọc Bảo, *Bùi Thị Ngọc Quỳnh*, 12T1. THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/520. *Sóng cơ truyền từ một nguồn điểm trên mặt nước với bước sóng* 12 cm *và tốc độ* 6 *m/s. Hai điểm A, B cùng nằm trên một phương truyền sóng cách nhau* 2 cm. *Tại thời điểm t, khi li độ dao động tại A là* $u_A = +2$ mm *thì li độ dao động tại B là* $u_B = -2$ mm. *Biết sóng truyền từ B đến A. Điểm A có li độ* $2\sqrt{3}$ cm *sau thời gian ngắn nhất kể từ thời điểm t là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi C là trung điểm của AB. Do $AC = 1cm = \frac{\lambda}{12}$ nên A có li độ $u_A = \frac{a}{2}$ và đang ngược chiều dương (để sau đó A có trạng thái dao động giống như C và ở vị trí cân bằng). Thời gian đi từ vị trí cân bằng tới điểm có li độ $2\sqrt{3}$ cm $\left(= a\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}\right)$ là $\frac{T}{6}$. Thời gian cần tìm là:

$$\frac{T}{12} + \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{3T}{4} = \frac{3\lambda}{4v} = 0,015\text{s}.$$

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 24)

$$\frac{a^n}{(b+c)^n-a^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n-b^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n-c^n}\geq\frac{3}{2^n-1}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/526. Suppose that a, b, c are the lengths of three sides of a triangle and $n\in\mathbb{N}^*$. Prove that

Problem T10/526. For each positive integer n, let $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2+4\sqrt{k^2+2k+2}}\right]$, where $[x]$ is the greatest integer which does not exceed x. Find all the positive integers n so that S_n is a power of a prime.

Problem T11/526. Find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfying $f(x+f(y))=f(x), \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Problem T12/526. Given an acute triangle ABC and $(O;\ R)$ is its circumcircle. The altitude $AD=\sqrt{2}R$. Let M, N respectively be the intersections between AB, AC and the circle with the diameter AD. Let P be the second intersection between $(O;\ R)$ the circle with the diameter AD and Q the reflection point of P in MN. Show that

a) $2S_{AMN}=S_{ABC}$.

b) $\widehat{BQN}=\widehat{CQM}=\frac{\pi}{2}$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

☞ ***Nhận xét.*** Chỉ có bạn *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** có lời giải đúng.

NGUYÊN XUÂN QUANG

Bài L2/522. *Một khu tập thể tiêu thụ công suất điện* 14289 W, *trong đó các dụng cụ điện ở khu này đều hoạt động bình thường ở điện áp hiệu dụng* 220 V. *Điện trở của dây tải điện từ nơi cấp điện đến khu tập thể là r. Khi khu tập thể không dùng máy hạ áp, để các dụng cụ điện của khu này hoạt động bình thường thì điện áp hiệu dụng ở nơi cung cấp điện là* 359 V, *khi đó điện áp tức thời ở 2 đầu dây của khu tập thể sớm pha* $\frac{\pi}{6}$ *so với dòng điện tức thời chạy trong mạch. Khi khu tập thể dùng máy hạ áp lí tưởng có tỉ số* $\frac{N_1}{N_2}=15$, *để các dụng cụ điện của khu này vẫn hoạt động bình thường giống như khi không dùng máy hạ áp thì điện áp hiệu dụng ở nơi cấp điện là bao nhiêu? (biết hệ số công suất ở mạch sơ cấp của máy hạ áp bằng* 1).

Lời giải. Khi không dùng máy biến áp: Cường độ dòng điện chạy qua mạch cung cấp cho khu tập thể cũng chính là dòng điện chạy qua đường dây tải: $I=\frac{\mathcal{P}}{U\cos\varphi}=\frac{14289}{220\cos\frac{\pi}{6}}=75\text{ A}.$

Độ giảm điện áp trên đường dây:

$$\Delta U_1=U_1-U=Ir\Rightarrow r=\frac{U_1-U}{I}=\frac{139}{75}\ \Omega.$$

Khi dùng máy biến áp, điện áp hiệu dụng nơi cung cấp là: $U_2=\Delta U_2+U'$;

U' là điện áp ở hai đầu cuộn sơ cấp:

$$U'=U\frac{N_1}{N_2}=15U=3300\text{ V}.$$

Độ giảm điện áp trên đường dây $\Delta U_2=I'r$ với I' là cường độ dòng điện chạy qua cuộn sơ cấp:

$$I'=I\frac{N_2}{N_1}=\frac{I}{15}=5\ A$$

$$\Rightarrow\Delta U_2=I'r=5.\frac{139}{75}\approx 9{,}27\text{ V}.$$

Do đó: $U_2=\Delta U_2+U'\approx 3309$ V.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Đồng Tháp:** *Phạm Hữu Đăng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11T1, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, *Lê Thị Minh Thùy*, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế;

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

HỆ SỐ VÀ KHAI TRIỂN CỦA ĐA THỨC

TRẦN MINH VŨ *(GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai)*
TRƯƠNG QUANG PHONG *(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Gia Lai)*
TRẦN THỊ THANH MINH *(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Gia Lai)*

Việc xây dựng một đa thức có đủ nghiệm thực với các hệ số nằm trong một tập nào là một bài toán thường gặp, nó thường xuyên xuất hiện như một lĩnh vực nhỏ của môn Đại số, nó hay xuất hiện trong các bài toán đố, các trò chơi vui vẻ nhưng đầy tư duy, chẳng hạn [xem trong [3], trang 40]:

Cho đa thức $P(x)=x^3+*x^2+*x+*$. *Hai người cùng chơi trò chơi như sau:*

Ở mỗi lượt chơi, mỗi người viết một số nguyên khác 0 *bất kỳ vào vị trí* $*$. *Nếu thay xong tất cả các giá trị của* $*$ *mà có* 3 *nghiệm nguyên thì người đi trước thắng, ngược lại thì người đi sau thắng. Hãy tìm quy luật chơi để người đi trước luôn thắng cuộc.*

Trong khuôn khổ bài viết ngắn này, chúng tôi muốn xâu chuỗi các bài toán về xác định hệ số của một đa thức sao cho nó có đủ nghiệm thực và ngoài ra còn một số kết quả không mới về khai triển đa thức, song áp dụng của nó khá hay cho một số bài toán thi chọn đội tuyển thi học sinh giỏi Quốc tế của các nước hay một số bài toán trong các Kỳ thi Olympic Sinh viên Việt Nam hằng năm.

1. Hệ số của đa thức có đầy đủ nghiệm thực

1.1. Một số kiến thức cơ sở

Định nghĩa 1.1. *Cho* n *là số nguyên dương. Một đa thức bậc* n *là một biểu thức có dạng*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0\ (1.1).$$

Các số $a_0,a_1,\ldots,a_n$ gọi là các hệ số của đa thức.

Nếu $a_0=1$ thì ta nói đa thức là mononic.

Định nghĩa 1.2. (Nghiệm của đa thức)

Cho đa thức $P(x), x_0$ *được gọi là một nghiệm của nó nếu như* $P(x_0)=0$.

Ta công nhận hai kết quả quan trọng về nghiệm và hệ số của đa thức sau.

Định lí 1.3. *Cho* n *là số nguyên dương. Nếu đa thức bậc* n: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0$ (1.2) *có đủ nghiệm thực* $x_i, i=\overline{1,n}$ *thì nó được viết dưới dạng:* $P(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ (1.3).

Định lí 1.4. (Viète thuận) *Cho* n *là số nguyên dương. Nếu đa thức bậc* n

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0.$$

có đủ nghiệm thực $x_i,\ i=\overline{1,n}$ *thì các hệ số của nó có mối liên hệ như sau*

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}. \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Từ định lí 1.4, ta có kết quả quan trọng sau.

Định lí 1.5. *Giả sử đa thức bậc* $n>1$:

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

có đủ n nghiệm thực. Khi đó:

1) *Nếu các nghiệm đều âm, ta có* $\sum_{k=2}^{n}a_k\geq 0$.

2) *Nếu các nghiệm đều bé hơn hoặc bằng* -1, *ta có:* $1+\sum_{k=1}^{n}a_k\geq\dfrac{2^n}{n+1}(1+a_1)$.

3) *Nếu các nghiệm đều lớn hơn hoặc bằng* 1, *ta có:* $n+(-1)^n a_n\geq 1+a_1$.

Chứng minh. Gọi x_i là các nghiệm của đa thức $P(x)$, ta có: $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$. Khi đó:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=P(1)=1+\sum_{k=1}^{n}a_k;\ (-1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i=P(0)=a_n.$$

1) Ta chứng minh bằng quy nạp, rằng với mọi số dương $y_i, i=\overline{1,n}$ ta có: $\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)\ge 1+\sum_{i=1}^{n}y_i$ (*).

Với $n=1$ ta có $1+y_1\ge 1+y_1$. Giả sử với $n=k$, ta có: $\prod_{i=1}^{k}(1+y_i)\ge 1+\sum_{i=1}^{k}y_i$. Với $n=k+1$, ta có:

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+y_i)=(1+y_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1+y_i)\ge(1+y_{k+1})\left(1+\sum_{i=1}^{k}y_i\right)$$
$$=1+\sum_{i=1}^{k+1}y_i+y_{k+1}\sum_{i=1}^{k}y_i\ge 1+\sum_{i=1}^{k+1}y_i.$$

Do đó với các nghiệm x_i đều âm thì từ bất đẳng thức (*) ta có: $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\ge 1-\sum_{i=1}^{n}x_i$.

2) Ta chứng minh BĐT sau đúng với mọi $y_i\ge 1,\ i=\overline{1,n}$: $\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)\ge\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$ (**).

Với $n=1$ thì (**) là hiển nhiên.

Nếu $n\ge 2$ thì đặt $b_i=\frac{y_i-1}{2}\Leftrightarrow y_i=2b_i+1$, ta có: $1+y_i=2(1+b_i)$. BĐT(**) tương đương với:

$$2^n\prod_{i=1}^{n}(1+b_i)\ge\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}(2b_i+1)\right)$$
$$\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}(1+b_i)\ge\frac{1}{n+1}\left(n+1+2\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$
$$\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}(1+b_i)\ge\left(1+\frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

BĐT cuối đúng theo (*). Do đó trường hợp các nghiệm x_i đều bé hơn hoặc bằng -1, theo (**) ta có: $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\ge\frac{2^n}{n+1}\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

3) Nếu các nghiệm đều lớn hơn hoặc bằng 1 thì áp dụng ý 1) với $y_i=x_i-1$ ta có

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i-1)\ge 1+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=-n+1+\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Suy ra:

$$(-1)^n a_n=\prod_{i=1}^{n}x_i\ge 1+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=-n+1+\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.2 Các thí dụ

Thí dụ 1 ([4]) *Cho đa thức bậc 3 có ba nghiệm thực x_1,x_2,x_3 có dạng $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ trong đó a,b,c là các số hữu tỷ, $c\ne 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{x_1}{x_2}$ là số hữu tỉ khác -1 thì các số x_1,x_2,x_3 là các số hữu tỷ.*

Lời giải. Rõ ràng 0 không là nghiệm của đa thức đã cho, giả sử $\frac{x_1}{x_2}=q\in\mathbb{Q}, q\ne 0$. Khi đó, theo định lý Viète thuận, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-a\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b\end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases}qx_2+x_2+x_3=-a\\qx_2^2+(1+q)x_2x_3=b\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_3=-a-(1+q)x_2\\qx_2^2+(1+q)x_2\left[-a-(1+q)x_2\right]=b\end{cases}.$$

Do đó x_2 là một nghiệm của đa thức với hệ số hữu tỉ $Q(x)=(q^2+q+1)x^2+a(q+1)x+b$.

Khi đó tồn tại các số hữu tỉ: $\alpha\ne 0,\beta,m,n$ sao cho: $P(x)=(\alpha x+\beta)Q(x)+mx+n$. Vì x_2 là nghiệm của $P(x)$ và $Q(x)$ nên $mx_2+n=0$.

Có hai trường hợp xảy ra:

• Nếu $m=0$ thì $n=0$. Ta được: $P(x)=(\alpha x+\beta)Q(x)$ có nghiệm hữu tỉ $x_0=-\frac{\beta}{\alpha}$. Nếu x_0 là một trong hai số x_1,x_2 thì ta được tất cả các nghiệm đều là số hữu tỉ từ kết quả $x_3=-a-(1+q)x_2$.

Nếu $x_0=x_3$ thì cũng từ kết quả trên suy ra x_2 là số hữu tỉ, và do đó các nghiệm của $P(x)$ đều là hữu tỉ.

• Nếu $m \neq 0$ thì $x_2 = -\frac{n}{m}$ là số hữu tỉ nên bằng cách lặp luận tương tự, ta có tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều là hữu tỉ.

Thí dụ 2 (TST Kiên Giang 2020). *Cho đa thức bậc n:* $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ *có n nghiệm* x_i, $x_i \in (0;1)$ *với mọi* $i = \overline{1,n}$ *và thỏa mãn* $|P(0)| = P(1)$. *Chứng minh rằng* $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Lời giải. Theo (1.3), ta có: $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$.

Do đó: $|P(0)| = \prod_{i=1}^{n} x_i$ và $P(1) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$.

Với $i \in \{1,2,...,n\}$, áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x_i(1 - x_i) \leq \left(\frac{x_i + 1 - x_i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_i = \frac{1}{2}$. Do đó theo giả thiết thì $a_n^2 = |P(0)|^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Vậy $a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_i = \frac{1}{2}$ với mọi $i \in \{1,2,...,n\}$. Khi đó $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$.

Thí dụ 3. *Cho đa thức bậc n:*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$$

có n nghiệm thực x_i, $i = \overline{1,n}$. *Biết rằng các hệ số của đa thức đều không âm, chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, ta có:* $P(m) \geq (m+1)^n$.

Lời giải. Theo (1.3) ta có:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i);\ P(0) = \prod_{i=1}^{n}(-x_i) = 1.$$

Do đó $P(m) = \prod_{i=1}^{n}(m - x_i)$. Và vì các hệ số của đa thức là không âm nên $x_i < 0$ với mọi i, theo BĐT Cauchy ta có:

$$(m - x_i) = 1 + 1 + ... + 1 + (-x_i) \geq (m+1)\sqrt[m+1]{(-x_i)}$$

$$\Rightarrow P(m) \geq (m+1)^n \sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{n}(-x_i)} = (m+1)^n.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_i = -1$. Khi đó $P(x) = (1+x)^n$.

Thí dụ 4. *Đa thức bậc* $n > 1$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0$$

có đủ n nghiệm dương phân biệt. Cho (b_k) *là một cấp số cộng và đặt* $c_k = a_kb_k$ *với mỗi* $k = 0,1,...,n$. *Chứng minh rằng đa thức*

$$Q(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n,\ c_0 \neq 0$$

cũng có đủ n nghiệm thực.

Lời giải. Gọi d là công sai của cấp số cộng (b_k), nghĩa là $b_k = b_0 + kd$. Khi đó, với mỗi $k = 1,2,...,n$ ta có $c_k = a_kb_0 + kda_k$. Ta có:

$$Q(x) = a_0b_0x^n + (a_1b_0 + da_1)x^{n-1} + (a_2b_0 + 2da_2)x^{n-2}$$

$$+ ... + (a_{n-1}b_0 + (n-1)da_{n-1})x + a_nb_0 + nda_n$$

$$= a_0b_0x^n + a_1b_0x^{n-1} + a_2b_0x^{n-2} + ... + a_{n-1}b_0x + a_nb_0$$

$$+ da_1x^{n-1} + 2da_2x^{n-2} + ... + (n-1)da_{n-1}x + nda_n$$

$= b_0P(x) + dR(x)$, trong đó

$$R(x) = a_1x^{n-1} + 2a_2x^{n-2} + ... + (n-1)a_{n-1}x + na_n.$$

Vì $P(x)$ chỉ có nghiệm dương nên ta chỉ cần xét trên miền $x > 0$, ta có:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{x^n}.$$

$$R\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_1 + 2a_2x + ... + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}}{x^{n-1}}.$$

Ký hiệu $H(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$.

Ta được: $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{H(x)}{x^n}$; $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{H'(x)}{x^{n-1}}$.

Do đó: $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{b_0H(x) + dxH'(x)}{x^n}$. Ta chỉ cần chứng minh: $K(x) = b_0H(x) + dxH'(x)$ có n nghiệm thì sẽ suy ra được điều phải chứng minh.

Vì $P\left(\frac{1}{x}\right)$ có n nghiệm dương nên $H(x)$ có n nghiệm dương.

Trường hợp $d=0$ là tầm thường, ta xét trường hợp $d\neq 0$, khi đó hàm số $f(x)=x^{\frac{b_0}{d}}H(x), x\geq 0$ có n nghiệm dương và 0 là nghiệm khác. Do đó đạo hàm của nó có n nghiệm dương, nghĩa là hàm số $f'(x)=\frac{b_0}{d}x^{\frac{b_0}{d}-1}H(x)+x^{\frac{b_0}{d}}H'(x)$

$$=\frac{x^{\frac{b_0}{d}-1}}{d}\left(b_0H(x)+dxH'(x)\right)$$

có n nghiệm dương, hay $b_0H(x)+dxH'(x)$ có n nghiệm dương. Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 5. (Olympic Sinh viên 2018 - HV KTQS đề nghị). *Tìm tất cả các đa thức bậc n:*

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ a_k\in\{-1;1\},\ \forall k=\overline{0,n},$$

sao cho $P(x)$ có n nghiệm thực.

Lời giải. Theo (1.3), nếu $x_i, i=\overline{1,n}$ là các nghiệm của đa thức đã cho, ta có:

$$P(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

Do đó: $\left|\frac{a_0}{a_n}\right|=\left|\prod_{i=1}^{n}x_i\right|=1;\ \frac{a_{n-1}}{a_n}=\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$.

Ta có: $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq n\sqrt[n]{\left|\prod_{i=1}^{n}x_i\right|^2}=n$. Vì vậy:

$$1=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\geq n-2\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Suy ra: $n\leq 1+2\frac{a_{n-1}}{a_n}=3$.

Ta có các đa thức cần tìm như sau:

- $n=1$ ta có các đa thức $x\pm 1; -x\pm 1$.
- $n=2$ ta có các đa thức $x^2\pm x-1; -x^2\pm x+1$.
- $n=3$ ta có các đa thức:

$$\pm\left(x^3-x^2-x+1\right);\pm\left(x^3+x^2-x-1\right).$$

Thí dụ 6 (TST Thái Lan 2016). *Tìm tất cả các đa thức bậc n:* $P(x)=(-1)^nx^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k,\ a_k\in\{0;1\}$, $\forall k=\overline{0,n-1}$ *sao cho P(x) có n nghiệm thực phân biệt.*

Lời giải. Giả sử $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt $x_i, i=\overline{1,n}$, khi đó: $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(-1)^n(x-x_i)$.

- Trường hợp $a_0=1$, ta có:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}x_i\right|=1;\ a_{n-2}=(-1)^n\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$$

Ta có: $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq n\sqrt[n]{\left|\prod_{i=1}^{n}x_i\right|^2}=n$. Vì vậy:

$$1=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\geq n-2(-1)^na_{n-2}$$

Suy ra: $n\leq 1+(-1)^n2a_{n-2}\leq 3$

- Trường hợp $a_0=0$ ta giả sử $x_1=0$ khi đó $a_1\neq 0$ và $P(x)=x\prod_{i=2}^{n}(-1)^n(x-x_i)$. Ta có:

$$\sum_{i=2}^{n}x_i^2\geq(n-1)\sqrt[n-1]{\left|\prod_{i=2}^{n}x_i\right|^2}=n-1.$$

Vì vậy: $1=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{2\leq i<j\leq n}x_ix_j\geq n-1-2(-1)^na_{n-2}$.

Suy ra: $n\leq 2+2.(-1)^na_{n-2}\leq 4$.

Như vậy có các đa thức bậc không vượt quá 4 cần tìm như sau:

- $n=1$ có $-x$ và $-x+1$.
- $n=2$ có x^2+x.
- $n=3$ có $-x^3+x^2+x; -x^2+x$.
- $n=4$ không có đa thức nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 7 (Olympic Sinh viên 2019 - ĐH KTQD đề nghị). *Tìm tất cả các đa thức bậc n:*

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ (a_n\neq 0)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- *Bộ* $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ *là các hoán vị của các số* $\{0, 1, 2, ..., n\}$.
- *Tất cả các nghiệm của P(x) đều là số hữu tỉ.*

Lời giải. Vì tất cả các nghiệm của đa thức đều là số hữu tỉ nên tồn tại $b_k; c_k$ là các số nguyên để

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k x + c_k).$$

Ta để ý rằng vì số 0 xuất hiện tối đa một lần trong các hệ số của đa thức đã cho nên có ít nhất $n-1$ số $c_k \neq 0$. Hơn nữa vì hệ số của đa thức là các số dương nên các nghiệm được nói ở trên đều âm và ta có thể giả sử $b_k > 0, c_k > 0$. Ta có:

$$P(1) = 0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$P(1) = \sum_{k=1}^{n} (b_k + c_k) \geq 2^{n-1}.$$

Từ đó ta có: $\frac{n(n+1)}{2} \geq 2^{n-1} \Leftrightarrow n^2 + n \geq 2^n$.

Điều trên chỉ xảy ra khi $n \leq 4$. Hơn nữa từ (*) ta chỉ xét các trường hợp $P(1)$ phân tích thành không ít hơn $n-1$ thừa số nguyên tố lớn hơn 1. Từ đó có các đa thức cần tìm như sau:

- $n = 1$ ta có các đa thức x.
- $n = 2$ ta có các đa thức:

$$x(x+1);\ x(x+2);\ x(2x+1).$$

- $n = 3$ ta có các đa thức $x(x+1)(2x+1)$.
- $n = 4$ không có đa thức nào thỏa mãn.

Thí dụ 8 (VMO 2021, ngày 2). *Cho đa thức* $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + ... + a_1 x + a_o$ *có các hệ số thuộc* $[1011; 2021]$.. *Biết rằng P(x) có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho* $|a_{k+2} - a_k| \leq c$ *với mọi* $k \in \{0, 1, ..., 19\}$.

a) *Chứng minh rằng P(x) có đúng một nghiệm nguyên.*

b) *Chứng minh* $\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \leq 440c^2$.

Lời giải. a) Do đa thức $P(x)$ có các hệ số dương nên nghiệm của $P(x)$ phải là nghiệm âm. Ta có:

$$P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + ... + a_1 x + a_o$$
$$= x^{20}(a_{21}x + a_{20}) + x^{18}(a_{19}x + a_{18})$$
$$+ ... + x^2(a_3 + a_2) + (a_1 x + a_0).$$

Do đó nếu $x \leq -2$ thì với mọi $j \in \{1; 2; ...; 21\}$ ta có: $1011 \leq a_j \leq 2021 \Rightarrow xa_j \leq -2.1011 \Rightarrow a_j x + a_{j-1}$

$\Rightarrow a_j x + a_{j-1} \leq -2.1011 + 2021 = -1$.

Điều đó có nghĩa là $P(x) < 0$. Vì vậy phương trình $P(x) = 0$ chỉ có nghiệm nguyên âm duy nhất là $x = -1$.

b) Vì $x = -1$ là nghiệm của $P(x)$ nên

$$a_{21} + a_{19} + ... + a_1 = a_0 + a_2 + ... + a_{20} \quad (1).$$

Đặt $l_i = a_{2i} - a_{2i+1}$, do (1) nên $l_o + l_1 + ... + l_{10} = 0$.

Ta có: $|l_i - l_{i+1}| = |(a_{2i} - a_{2i+1}) - (a_{2i+2} - a_{2i+3})|$

$$= |(a_{2i} - a_{2i+2}) - (a_{2i+1} - a_{2i+3})|$$
$$\leq |a_{2i} - a_{2i+2}| + |a_{2i+1} - a_{2i+3}| \leq 2c \ (2).$$

Do $2l_5(l_0 + l_1 + ... + l_{10}) = 0$ nên

$$\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 = \sum_{k=0}^{10} l_k^2 = (l_0^2 - 2l_0 l_5 + l_5^2) +$$
$$+ (l_1^2 - 2l_1 l_5 + l_5^2) + ... + (l_{10}^2 - 2l_{10} l_5 + l_5^2) - 10l_5^2$$
$$= \sum_{k=0}^{10} (l_k - l_5)^2 - 10l_5^2 \leq \sum_{k=0}^{10} (l_k - l_5)^2 \quad (3).$$

Do (2) nên

$|l_0 - l_5| \leq |l_0 - l_1| + |l_1 - l_2| + ... + |l_4 - l_5| \leq 10c$;

$|l_1 - l_5| \leq |l_1 - l_2| + |l_2 - l_3| + |l_3 - l_4| + |l_4 - l_5| \leq 8c$;

$|l_2 - l_5| \leq |l_2 - l_3| + |l_3 - l_4| + |l_4 - l_5| \leq 6c$;

$|l_3 - l_5| \leq |l_3 - l_4| + |l_4 - l_5| \leq 4c$;

$|l_4 - l_5| \leq 2c$; $|l_6 - l_5| \leq 2c$; $|l_7 - l_5| \leq 4c$;

$|l_8 - l_5| \leq 6c$; $|l_9 - l_5| \leq 8c$; $|l_{10} - l_5| \leq 10c$.

Vậy từ (3) ta có:

$$\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \leq 2(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2)c^2 = 440c^2.$$

Ta có điều phải chứng minh.

1.3. Bài tập đề nghị

Bài 1. ([3]). Cho đa thức bậc 2014 với hệ số thực

$$P(x)=x^{2014}+a_{2013}x^{2013}+...+a_1x+a_0$$

có n nghiệm thực x_i, $i=\overline{1,2014}$. Chứng minh rằng với mọi số thực a lớn hơn tất cả các nghiệm ấy, ta có: $P'(a)-2014\left(P(a)\right)^{\frac{2013}{2014}}\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 2. Cho đa thức bậc n

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+1$$

có n nghiệm thực x_i, $i=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng với mọi số dương t ta có:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(t^2-x_it+x_i^2\right)\geq 2^n t^{\frac{n}{2}}\left|P(t)\right|.$$

Bài 3. Cho đa thức bậc n:

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \quad (1.7)$$

có đủ n nghiệm thực không âm. Chứng minh rằng

$$1+\sqrt[n]{a_n}\leq\sqrt[n]{P(-1)}\leq 1-\frac{a_1}{n}.$$

Bài 4 (*VMO 1988*). Cho đa thức bậc n:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

có n nghiệm thực và $a_0=1; a_1=-n; a_2=\frac{n^2-n}{2}$.

Hãy xác định hệ số còn lại của đa thức.

Bài 5 ([6]). Tìm tất cả các đa thức bậc n:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ (a_n\neq 0)$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

- Bộ số $(a_0,a_1,a_2,...,a_n)$ là các hoán vị của các số $\{0,1,2,...,n\}$.
- Tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều là số hữu tỉ.
- Không nhận giá trị âm trên toàn bộ số thực.

2. Các dạng khai triển đa thức và áp dụng

Như chúng ta đã biết, việc khai triển đa thức thành các đơn thức là việc thường gặp, khai triển thường thấy là khai triển nhị thức Newton. Lần này chúng tôi xin giới thiệu một vài khai triển khác của đa thức (không mới) và áp dụng nó cho việc giải các bài toán hay.

2.1 Các khai triển thường gặp và thí dụ

Định lí 2.1 (Khai triển Abel [1]). *Cho $P(x)$ là đa thức bậc n. Khi đó với các số thực x_i, $i=\overline{1,n}$ luôn tồn tại $n+1$ số thực $b_0,b_1,b_2,...,b_n$ sao cho*

$$P(x)=b_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$
$$+b_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})+...+b_1(x-x_1)+b_0.$$

Trong trường hợp $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên và x_i là các số nguyên thì b_i cũng là số nguyên.

Nếu tất cả các x_i đều bằng a ta có công thức khai triển tại $x-a$ như sau:

$$P(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+...+b_1(x-a)+b_0.$$

Thí dụ 1 ([5]). *Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực và giả sử x_0 là một số thực không là nghiệm của nó. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ với hệ số thực sao cho đa thức $R(x)=P(x)Q(x)$ có tính chất: $R(x_0)=1$, $R'(x_0)=R''(x_0)=0$.*

Chứng minh. Khai triển đa thức $P(x)$ tại $x=x_0$.

Giả sử $P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$.

Ta cũng khai triển đa thức $Q(x)$ tại x_0 với các hệ số $b_0,b_1,b_2,...,b_m$ sẽ chọn sau:

$$Q(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+...+b_m(x-x_0)^m.$$

Khi đó $R(x_0)=1$ nên ta chọn $b_0=\frac{1}{a_0}$. Ta có:

$$R'(x)=P'(x)Q(x)+Q'(x)P(x)$$
$$\Rightarrow R'(x_0)=0\Leftrightarrow a_1b_0+b_1a_0=0.$$

Ta chọn $b_1=-\frac{a_1}{a_0^2}$. Ta có:

$$R''(x)=P''(x)Q(x)+2P'(x)Q'(x)+Q''(x)P(x)$$
$$\Rightarrow R''(x_0)=0\Leftrightarrow 2a_2b_0+2a_1b_1+2b_2a_0=0.$$ Ta chọn $b_2=\frac{a_1^2-a_0a_2}{a_0^3}$. Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2 (TST Thái Lan 2015). *Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên. Với $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ là các số nguyên phân biệt ta có*

$$1 \le P(x_1), P(x_2), ..., P(x_{2015}) \le 2014.$$

Chứng minh rằng $P(x_1) = P(x_2) = ... = P(x_{2015})$.

Lời giải. Theo giả thiết thì

$$|P(x_i) - P(x_j)| \le 2013, \forall i, j \in \{1, 2, ..., 2015\}.$$

Không mất tính tổng quát (có thể thay đổi vị trí), ta giả sử $x_1 = \min\limits_{1 \le i \le 2015}\{x_i\}; x_2 = \max\limits_{1 \le i \le 2015}\{x_i\}$.

Khai triển đa thức theo khai triển Abel, tồn tại các số nguyên $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ và các số nguyên phân biệt x_j trong đó $b_j = 0, \forall j > \text{def } P(x)$ để

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2) + ...$$
$$+ b_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) + ...$$

Cho $x = x_2$. Ta được $P(x) = b_0 + b_1(x_2 - x_1)$.

Nếu $b_1 \ne 0$ thì $|P(x_2) - P(x_1)| \ge 2014$ do đó $b_1 = 0$.

Ta giả sử tồn tại x_3 (có thể thay đổi vị trí) để $P(x_3) \ne P(x_1)$. Khi đó nếu $x_3 - x_1 \ge 2014$ thì $|P(x_3) - P(x_1)| = |b_3|(x_3 - x_1)(x_2 - x_3) \ge 2014$.

Vì vậy $x_3 - x_1 \le 2013$, ta có $|P(x_3) - P(x_1)| \ge 2013$, điều này chỉ xảy ra khi $|P(x_3) - P(x_1)| = 2013$. Đẳng thức xảy ra khi khi $x_3 - x_1 = 1; x_2 - x_3 = 2013$. Như vậy x_i là các số nguyên liên tiếp theo thứ tự sau:

$$x_1; x_3 = x_1 + 1; x_4 = x_1 + 2; ..., x_{2014} = x_1 + 2012; x_2.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $P(x_1) = 1; P(x_3) = 2014$. Bằng cách tính $P(x_4)$ ta suy ra $b_3 = -1$, rồi tính $P(x_5)$ ta suy ra $b_4 \notin \mathbb{Z}$ ta có mẫu thuẫn. Vì vậy $P(x_3) = P(x_1)$.

Ta có điều phải chứng minh.

Định lí 2.2. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, mọi đa thức $P(x)$ có bậc bé hơn $p-1$ và $P(z)$ chia hết cho p với mọi $z \in \mathbb{Z}$ thì tất cả các hệ số của P đều chia hết cho p.*

Chứng minh. Khai triển Abel với $x_i = i$, $i = \overline{1, p-1}$. Tồn tại $b_0, b_1, b_2, ..., b_{p-1}$ sao cho

$$P(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) + ...$$
$$+ b_{p-2}(x-1)(x-2)...(x-p+2)$$
$$+ b_{p-1}(x-1)(x-2)...(x-p+1).$$

Với lưu ý rằng, vì p là số nguyên tố nên ta có:

$P(1) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow b_0 \equiv 0 \pmod p$;

$P(2) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b_0 + b_1 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow b_1 \equiv 0 \pmod p$.

...

$P(p-2) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b_0 + b_1(p-3) + ... + b_{p-3}.1.2...(p-3) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b_{p-3} \equiv 0 \pmod p$;

$P(p-1) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b_0 + b_1(p-2) + ... + b_{p-2}.1.2...(p-2) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b_{p-2} \equiv 0 \pmod p$.

Do đó xét đa thức rút gọn trong modulo p

$$\overline{P}(x) = \overline{b_{p-1}}(x-1)(x-2)...(x-p+1).$$

Theo giả thiết $P(0) \equiv 0 \pmod p$, suy ra:

$$\overline{b_{p-1}}(-1)^{p-1}(p-1)! \equiv 0 \pmod p \Rightarrow b_{p-1} \equiv 0 \pmod p.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 3 (TST Gia Lai 2017-2018). *Nếu $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên x thì tất cả các hệ số của $P(x)$ đều chia hết cho 7.*

Lời giải. Áp dụng định lý 2.2 cho $p = 7$.

Từ định lý 2.1, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.3. *Mọi đa thức $P_n(x)$ có bậc n luôn được viết dưới dạng $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)$, trong đó*

$$f_k(x)=\frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!},\ k=\overline{1,n} \text{ và } f_0=1.$$

Chứng minh. Với các giá trị $x_i=1$, với mọi $i\in\{0,1,...,n-1\}$, khi đó theo khai triển Abel, tồn tại $b_0,b_1,b_2,...,b_n$ sao cho:

$$P(x)=b_n x(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})+$$
$$+b_{n-1}x(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-2})+...+b_1x+b_0.$$

Ký hiệu $a_k=b_k.k!$ với $k\in\{0,1,...,n-1\}$, ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 4 ([2]) *Cho đa thức hệ số thực*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0.$$

Chứng minh rằng nếu $P(z)\in\mathbb{Z}$ với mọi $z\in\mathbb{Z}$ thì $a_n.n!\in\mathbb{Z}$.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.3 với lưu ý rằng $(x-1)(x-2)...(x-k+1)(x-k)$ chia hết cho $k!$ với mọi số nguyên x và k.

Định lí 2.4. *Mọi đa thức $P_n(x)$ có bậc n luôn được viết dưới dạng*

$$P_n(x)=a_n(x+n)^n+a_{n-1}(x+n-1)^{n-1}+...+a_1(x+1)+a_0.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n.

Với $n=1$ ta có: $P_1(x)=ax+b=a(x+1)+b-a.$

Giả sử rằng với giá trị $n=k,\ k\geq 1$, mọi đa thức bậc k đều viết được dưới dạng:

$$P_k(x)=a_k(x+k)^k+a_{k-1}(x+k-1)^{k-1}+...+a_1(x+1)+a_0.$$

Khi đó với đa thức bậc $n=k+1$ bất kỳ ta có:

$$P_{k+1}(x)=b_{k+1}x^{k+1}+b_kx^k+...+b_1x+b_0.$$

Ta xét đa thức bậc k:

$$Q_k(x)=a_k(x+k)^k+a_{k-1}(x+k-1)^{k-1}.$$

Theo giả thiết quy nạp thì tồn tại $a_0,a_1,...,a_k$ để

$$Q_k(x)=a_k(x+k)^k+a_{k-1}(x+k-1)^{k-1}+...+a_1(x+1)+a_0.$$

Suy ra: $P_{k+1}(x)=b_{k+1}(x+k+1)^{k+1}+a_k(x+k)^k$

$$+a_{k-1}(x+k-1)^{k-1}+...+a_1(x+1)+a_0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Tương tự như vậy ta có kết quả sau:

Định lý 2.5. *Mọi đa thức $P_n(x)$ có bậc n luôn được viết dưới dạng:*

$$P_n(x)=a_n(x-n)^n+a_{n-1}(x-n+1)^{n-1}+...+a_1(x-1)+a_0.$$

2.2 Bài tập đề nghị

Bài 1. Chứng minh rằng mọi đa thức bậc n với hệ số thực $P(x)$ nhận giá trị nguyên tại $n+1$ điểm nguyên thì nó sẽ nhận giá trị nguyên tại mọi giá trị nguyên khác.

Bài 2 (*IMO 1998*). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho nếu $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện $0\leq P(c)\leq k$, với mọi $c\in\{0,1,...,k+1\}$ thì $P(0)=P(1)=...=P(k+1)$.

Bài 3 ([5]). Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực có bậc $n>1$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực $a_0,a_1,...,a_n$ sao cho

$$a_0P(x+n)+a_1P(x+n-1)+...+a_{n-1}P(x+1)+a_nP(x)=0.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại các số nguyên dương $a_i\in[1;2014)$ để

$$n=a_0(-2015)^0+a_1(-2015)^1+a_2(-2015)^2+...$$

Tài liệu tham khảo

[1] N.T.Chung, H.T.Luân, T.M.Vũ, ..., *Đa thức*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2019.

[2] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2013*, năm 2013.

[3] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2014*, năm 2014.

[4] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2015*, năm 2015.

[5] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2016*, năm 2016.

TIN TỨC: GIẢI ABEL NĂM 2021

Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy ngày 17- 3 đã quyết định trao giải Abel năm 2021, giải thưởng được ví như "Nobel Toán học", cho nhà khoa học László Lovász (Viện Toán học Alfréd Rényi và Đại học Eötvös Loránd tại Budapest, Hungary) và Avi Wigderson (Viện Nghiên cứu Cao cấp tại Princeton, Mỹ).

Theo website chính thức của giải thưởng Abel, hai nhà toán học được vinh danh vì những đóng góp mang tính nền tảng đối với lý thuyết khoa học máy tính và toán học rời rạc, cùng với việc đóng vai trò dẫn đầu trong định hình nội dung này trong các lĩnh vực chính của toán học hiện đại".

Avi Wigderson (1956)

László Lovász (1948)

Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy lý giải, hai nhà toán học *László Lovász* (73 tuổi, người Hungary) và *Avi Wigderson* (65 tuổi, người Israel) trở thành chủ nhân của giải Abel năm nay bởi các công trình nghiên cứu liên quan đến việc chứng minh các định lý và phát triển các phương pháp trong toán học thuần túy (*pure mathematics*) song lại mang tính ứng dụng thực tế cao đối với lĩnh vực khoa học máy tính, đặc biệt là trong mật mã học.

Ông *Hans Z. Munthe-Kaas*, nhà toán học tại Đại học Bergen (Na Uy) và cũng là Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng Abel, đánh giá các công trình của hai nhà khoa học này đã cho thấy sự tương tác hiệu quả giữa khoa học máy tính và toán học. Hai nhà toán học sẽ chia sẻ giải thưởng trị giá 7,5 triệu kroner Na Uy, tương đương khoảng 880.000 USD.

Giải thưởng Abel đầu tiên được Chính phủ Na Uy công bố năm 2002 nhân dịp kỷ niệm 200 năm ngày sinh nhà toán học người Na Uy *Niel Henrik Abel*. Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy là đơn vị trao giải thưởng danh giá này. Việc lựa chọn chủ nhân của giải thưởng Abel dựa trên cơ sở khuyến nghị của Ủy ban Abel gồm năm nhà toán học được Quốc tế công nhận.

LÊ MAI

(*Theo Abelprize.no, New York Times*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 67

Problem. *The size of each interior angle of a regular polygon is* 156°. *Work out the number of sides of the polygon.*

Solution. We can show that the sum of all angles in a convex n - polygon is equal to $180^\circ(n-2)$ degrees (why ?).

Therefore, each interior angle of a regular n-polygon measures $\frac{180(n-2)}{n}$ degrees.

From the equation $\frac{180(n-2)}{n} = 156$, we get $n = 15$.

Thus the number of sides of the polygon is 15.

TỪ VỰNG

interior angle	: *góc trong*
regular polygon	: *đa giác đều*
n-polygon	: *đa giác n cạnh*
convex	: *lồi*
work out	: *tìm, tính*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 64

Bài toán. *Trong các số có 4 chữ số được tạo ra bằng cách dùng cả bốn chữ số* 1, 2, 3 *và* 4, *có bao nhiêu số chia hết cho* 11?

Lời giải. Ta sử dụng quy tắc sau: Một số chia hết cho 11 nếu tổng các số ở vị trí chẵn và tổng các số ở vị trí lẻ có hiệu là bội số của 11.

Xét các số có dạng **1 - - -**. Theo quy tắc trên, chữ số thứ ba (tính từ trái sang) phải là số 4, và các chữ số 2 và 3 có thể được đặt vào các vị trí trống còn lại theo bất kỳ thứ tự nào. Từ đó ta có hai số trong số chúng là **1243** và **1342.**

Tương tự, với mỗi trường hợp trong ba trường hợp còn lại ta có hai số chia hết cho 11.

Do đó có 8 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Văn Ngọc Bình*, 10 Toán 1, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12 Toán 2,THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Nguyễn Bá Thành*, 10AV2, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

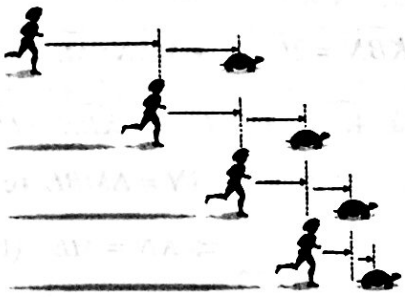
HỒ HẢI (*Hà Nội*)

Math Jokes

NGHỊCH LÝ ZENON

Người hùng nổi tiếng của Cuộc chiến thành Troia, *Achilles* (chúng ta vẫn biết tới anh và "gót chân A-sin" oan nghiệt) chạy đua với một con rùa thấp kém. Ngạo nghễ, *Achilles* cho phép rùa chạy trước. Chặng đua không có gì khó khăn với một chiến binh dũng mạnh và nhanh nhẹn, nhưng mọi chuyện không dễ dàng thế: để chạy vượt được con rùa, anh phải bắt kịp nó trước đã.

Khi *Achilles* rút ngắn khoảng cách giữa mình và rùa, con vật chậm chạp lại tạo ra một khoảng cách mới. Dù khoảng cách mới nhỏ hơn khoảng cách giữa rùa và *Achilles*, *Achilles* phải chạy thêm cả khoảng cách mới để đuổi kịp được rùa.



Anh tiếp tục chạy, nhưng trong khoảng thời gian đó, con rùa lại tạo ra một khoảng cách nữa rồi, ép *Achilles* phải chạy nốt cả khoảng cách mới nhất để đuổi kịp.

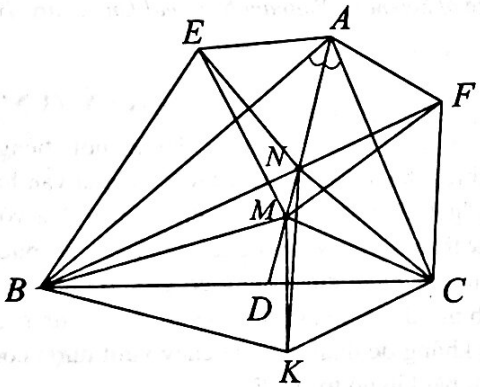
Đây là một vòng lặp vô tận, cho thấy *Achilles* chẳng bao giờ đuổi kịp được con rùa. Dù tốc độ chạy của *Achilles* có cao tới đâu, khoảng cách mới vẫn luôn xuất hiện; dù nhỏ hơn nhiều những lần trước, nhưng đây vẫn là khoảng cách cho phép con rùa luôn chạy trước *Achilles*!

TH&TT

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 47. *Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm nằm trên phân giác AD thỏa mãn* $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. *Chứng minh* $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

Lời giải. Cách 1. Gọi E, F là các điểm lần lượt đối xứng với N qua AB và AC. K là điểm đối xứng với M qua BC.



Theo tính chất đối xứng ta có: $BK = BM$; $BN = BE$;

$\widehat{KBN} = 2\widehat{CBM} + \widehat{MBN}$; $\widehat{MBE} = 2\widehat{ABN} + \widehat{MBN}$.

Mà $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$ nên $\widehat{KBN} = \widehat{MBE}$. Suy ra:

$\Delta KBN = \Delta MBE$ (c.g.c)

$\Rightarrow KN = ME$ (1).

Ta lại có: $\widehat{EAM} = \widehat{FAM} = \widehat{BAC}$ nên

$\Delta EAM = \Delta FAM$ (c.g.c)

$\Rightarrow ME = MF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $KN = MF$

$\Rightarrow \Delta KCN = \Delta MCF$ (c.g.c)

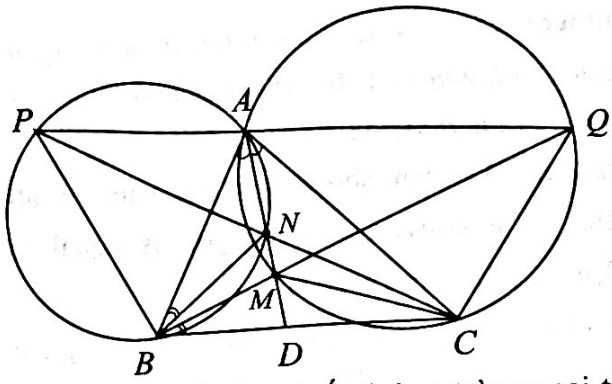
$\Rightarrow \widehat{KCN} = \widehat{MCF}$

$\Rightarrow 2\widehat{BCM} + \widehat{MCN} = 2\widehat{ACN} + \widehat{MCN}$

$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ (đpcm).

Cách 2.

Kẻ tia CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN



tại P, đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại Q. Khi đó ta có:

- Tứ giác $AMCQ$ nội tiếp nên: $\widehat{MAC} = \widehat{MQC}$;

- Tứ giác $ANBP$ nội tiếp nên: $\widehat{NAB} = \widehat{NPB}$.

Mà AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$. Suy ra:

$\widehat{MQC} = \widehat{NPB} \Rightarrow \widehat{BQC} = \widehat{CPB}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BPQC$ nội tiếp. Từ đó:

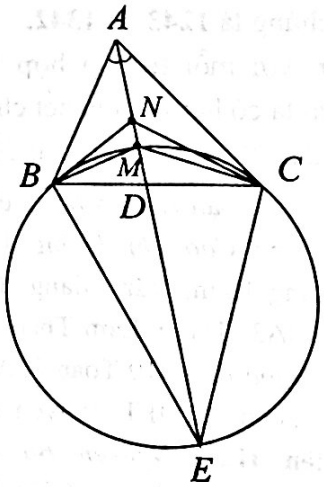
$\widehat{CPQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{NBA} = \widehat{NPA}$.

Suy ra ba điểm P, A, Q thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AQM} = \widehat{PQB} = \widehat{PCB}$

$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ (đpcm).

Cách 3.



Tia AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tại E ($E \neq M$). Khi đó ta có: $\widehat{ABN} = \widehat{MBC} = \widehat{MCE}$

$\Rightarrow \Delta ABN \sim \Delta AEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AN}{AC}$

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ANC$ (c.g.c)

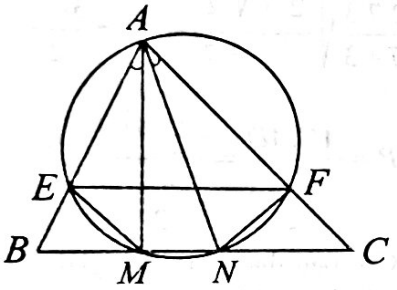
$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACN}$.

Mặt khác $\widehat{MCB} = \widehat{AEB}$ nên $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

Cách 4.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC và M, N là hai điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng* $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Chứng minh.



Phần thuận:

Nếu $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ thì $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở E và F.

Vì $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ nên $ME = NF$. Từ đó dễ thấy tứ giác $MEFN$ là hình thang cân.

Ta có: $BM.BN = BE.BA$,

$CN.CM = CF.CA$

$\Rightarrow \dfrac{BM.BN}{CN.CM} = \dfrac{BE.BA}{CF.CA}$.

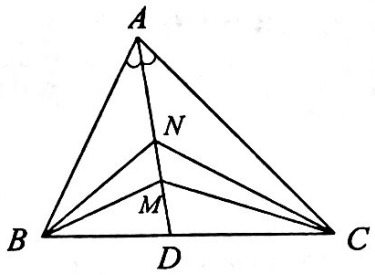
Mà $EF \,//\, BC$ nên:

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BA}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{BM.BN}{CN.CM} = \left(\frac{BA}{CA}\right)^2.$$

Phần đảo. Bạn đọc tự chứng minh.

Trở lại bài toán:



Xét tam giác ABD có $\widehat{ABN} = \widehat{DBM}$ nên áp dụng Bổ đề trên ta được:

$$\frac{DM.DN}{AN.AM} = \left(\frac{BA}{BD}\right)^2.$$

Do AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$

$$\frac{DM.DN}{AN.AM} = \left(\frac{AC}{DC}\right)^2$$

hay $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ (đpcm).

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Giới thiệu

Nhận xét. Ngoài 4 cách giải trên của bạn *Đoàn Cát Nhơn*, người giới thiệu đề toán, bạn *Trương Quang An*, tổ 2, hẻm 70/5 Võ Thị Sáu, P. Chánh Lộ, TP. Quảng Ngãi, tỉnh **Quảng Ngãi** và bạn *Trương Thị Thu Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** cũng đưa ra 1 cách giải tương tự như cách một trong cách giải trên.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 49** dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2021.

BÀI TOÁN 49. *Giải phương trình*

$$2x^2 - 14x - 5(x-4)\sqrt{x-1} + 30 = 0.$$

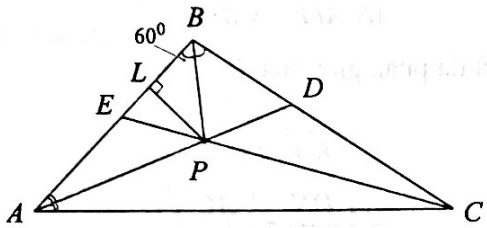
NGUYỄN ĐỨC TRUNG

(GV THPT Núi Thành, H. Núi Thành, Quảng Nam)

BÀI TOÁN 55. *Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 5, AC = 7 và AD, CE là các phân giác trong cắt nhau tại P. Tính AP.*

Lời giải.

Cách 1. Theo địn lý hàm số côsin ta có:



$$\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA.BC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2.3.5}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Do đó $\widehat{ABC} = 120^0$. Vì P là giao điểm của các đường phân giác AD và CE nên P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vẽ $PL \perp AB$ thì $PL = r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác ABC thì

$$p = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}.$$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.3.5.\sin 120^0$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4} = pr = \frac{15}{2}r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác vuông BLP có:

$$BL = LP.\cot 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Do đó: $AL = AB - BL = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $AP^2 = AL^2 + LP^2 = \frac{25}{4} + \frac{3}{4} = \frac{28}{4} = 7$

$\Rightarrow AP = \sqrt{7}$.

Cách 2. Ta có: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = 2DC \\ AB = 2BD \end{cases} \Rightarrow DC = \frac{7}{2}, BD = \frac{3}{2}.$$

Vì CP là phân giác nên $\frac{AP}{AC} = \frac{PD}{DC} = \frac{AP+PD}{AC+DC} = \frac{AD}{\frac{21}{2}} \Rightarrow AP = \frac{AC.AD}{\frac{21}{2}}$.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, khi đó:

$$p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}.$$

Ta dễ chứng minh được:

$$AD = l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \ (a = BC, b = CA, c = AB)$$

$$= \frac{2.7.3}{7+3}\sqrt{\frac{\frac{15}{2}.\left(\sqrt{\frac{15}{2}} - 5\right)}{3.7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Do đó: $AP = \frac{AC.AD}{\frac{21}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}.7}{\frac{21}{2}} = \sqrt{7}$.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Danh sách các bạn giải đúng là: **Hải Phòng:** *Tăng Hoàng Quí*, 11B6, THPT Ngô Quyền; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Văn Ngọc Bình, Trương Hồ Bảo Nhi, Nguyễn Kỳ Nam*, 10 Toán 1, *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 8C2, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre; **Quảng Bình:** *Trương Thị Thu Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NHƯ HOÀNG

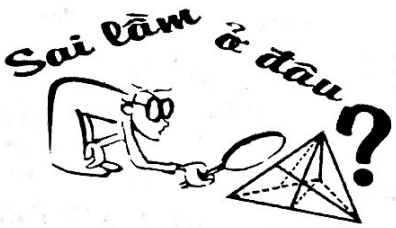
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 57. *Với t thuộc tập hợp các số thực thì giá trị lớn nhất của biểu thức* $\frac{(2^t - 3t)t}{4^t}$ *là bao nhiêu?*

A. $\frac{1}{16}$ **B.** $\frac{1}{15}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{10}$ **E.** $\frac{1}{9}$.

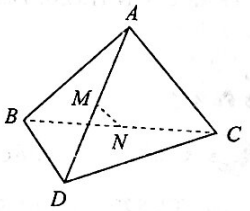
KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG ?

(*Đề đăng trên TH&TT số 522, tháng 12 năm 2020*)

Phân tích. Hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng AC, DB. Nếu góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$ là α với $0^0 \le \alpha \le 90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng AC, DB bằng α. Nếu góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$ là α với $90^0 < \alpha \le 180^0$ thì góc giữa hai đường thẳng AC, DB bằng $180^0 - \alpha$. Vì thế, khi góc giữa AC, DB bằng 60^0 thì hoặc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 60^0$, hoặc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 120^0$. Lời giải của bạn *Minh Quân* chỉ đề cập đến trường hợp thứ nhất, còn thiếu trường hợp thứ hai. Như vậy, bạn *Minh Quân* không đạt được điểm tối đa cho câu hỏi này.



Lời giải đúng. Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$

nên $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Do đó: $4.MN^2 = AC^2 + DB^2 + 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

$= a^2 + 9a^2 + 2.a.3a.\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right)$.

Vì thế góc giữa AC, DB bằng 60^0 nên hoặc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 60^0$, hoặc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 120^0$.

Nếu $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 60^0$ thì

$$4.MN^2 = a^2 + 9a^2 + 2.a.3a.\cos 60^0 = 13a^2.$$

Suy ra $MN = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. Nếu $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right) = 120^0$ thì

$$4.MN^2 = a^2 + 9a^2 + 2.a.3a.\cos 120^0 = 7a^2$$

$\Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. Vậy $MN = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ hoặc $MN = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Nhận xét. Các bạn tham gia bài này đã không phát hiện được sai lầm trong lời giải. Chú ý rằng góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DB}$ có thể là góc tù.

KIHIVI

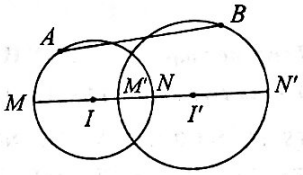
ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong giờ bài tập về số phức ở lớp 12 Văn, thầy giáo có cho bài tập trắc nghiệm sau:

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 1$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

A. $P = \sqrt{2} + 2$ **B.** $P = 2\sqrt{2} + 2$ **C.** $P = 2\sqrt{2}$ **D.** $P = 4$.

Sau khi ghi đề trên bảng vài phút, bạn *Thành Trung* xung phong lên bảng. Sau đây là lời giải của bạn *Thành Trung*



Lời giải. Ta có kết quả sau: Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'. Điểm A thay đổi thuộc (C), điểm B thay đổi thuộc (C'). Đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất bằng $II' + R + R'$.

Ta áp dụng kết quả này để giải bài toán.

Gọi $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), có điểm biểu diễn là $A(x; y)$, khi đó theo giả thiết của đề bài ta có $z_2 = -y + xi$, có điểm biểu diễn là $B(-y; x)$.

Khi đó $|z_1 + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$, suy ra A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1; 1)$ và bán kính $R = 1$. Ta lại có: $|z_1 + 1 - i| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_2}{i} + 1 - i\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z_2 + 1 + i| = 1 \Leftrightarrow (-y+1)^2 + (x+1)^2 = 1$, suy ra B thuộc đường tròn (C') có tâm $I'(-1; -1)$ và bán kính $R' = 1$. Ta có $|z_1 - z_2| = AB$, theo các tính chất trên, $|z_1 - z_2| = AB$ có giá trị lớn nhất $P = II' + R + R' = 2 + 1 + 1 = 4$. Chọn D.

Sau khi bạn *Thành Trung* giải xong, thầy giáo hỏi lớp có nhận xét gì không?. Sau một hồi xem xét lại, cả lớp đều đồng ý đúng, ngay cả chỗ đáng nghi nhất là từ phương trình $(-y+1)^2 + (x+1)^2 = 1$, suy ra B thuộc đường tròn (C') có tâm $I'(-1; -1)$ và bán kính $R' = 1$ cũng đã được phân tích kĩ lưỡng và thống nhất không sai.

Thầy giáo khẳng định, lời giải chưa đúng. Cả lớp òa lên, "ủa sao chưa đúng ta?". Các bạn hãy chỉ chỗ sai của bạn *Thành Trung* giúp lớp 12 Văn nhé.

NGUYỄN ANH VŨ

(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 526 (4.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TÍCH CỰC TRIỂN KHAI SÁCH GIÁO KHOA LỚP 2, LỚP 6 THEO CT GDPT 2018

Theo Quyết định số 709/QĐ-BGDĐT ngày 9/2/2021 và Quyết định số 718/QĐ-BGDĐT ngày 9/2/2021, 3 bộ sách giáo khoa (SGK) lớp 2, lớp 6 đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành, trong đó có 2 bộ là: *"Kết nối tri thức với cuộc sống"* và *"Chân trời sáng tạo"* của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN).

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo tại công văn số 368/BGDĐT-GDTH ngày 26/1/2021 về việc bồi dưỡng giáo viên và cung ứng SGK lớp 2, lớp 6 năm học 2021 - 2022, NXBGDVN đang khẩn trương triển khai giới thiệu SGK lớp 2, lớp 6 mới tới tất cả các tỉnh thành trên cả nước.

Đến thời điểm này, bản mẫu SGK lớp 2, lớp 6 của NXBGDVN theo phê duyệt của Bộ trưởng đã hoàn tất. NXBGDVN sẽ tiếp tục rà soát, hoàn thiện hơn nữa bản thảo SGK, đồng thời chuẩn bị sẵn sàng mọi điều kiện để kịp thời in SGK cung ứng về các địa phương.

Trong điều kiện tình hình dịch Covid-19 diễn biến phức tạp, NXBGDVN đã tiên tổ chức giới thiệu SGK theo hình thức trực tuyến để đảm bảo an toàn phòng chống dịch và hoàn thành việc giới thiệu SGK mới trước ngày 15/3/2021 theo chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Hiện có 62/63 tỉnh thành đã hoàn thành đăng kí lịch tổ chức giới thiệu SGK lớp 2, lớp 6. Đến hết ngày 9/3/2021, NXBGDVN đã tổ chức giới thiệu SGK mới tới 58 tỉnh thành.

Trong các cuộc hội thảo giới thiệu SGK, các Tổng chủ biên, Chủ biên, tác giả SGK đã trình bày tường minh về những điểm mới, nội dung, cấu trúc sách cũng như những gợi mở về phương pháp tổ chức hoạt động dạy - học.

Bên cạnh đó, NXBGDVN cung cấp hệ thống tài liệu giới thiệu sách gồm phiên bản điện tử sách học sinh (HS), sách giáo viên (GV); các video clip, slide giới thiệu SGK trên nền tảng Tập huấn *(taphuan.nxbgd.vn)*, nền tảng Hành trang số *(hanhtrangso.nxbgd.vn)* và trên youtube để GV thuận tiện trong việc tìm hiểu và lựa chọn SGK. Đồng thời, NXBGDVN cũng đã chuyển hàng ngàn bản in bản mẫu SGK về các địa phương để GV tiếp cận bản SGK giấy cùng với phiên bản điện tử trên mạng internet.

Với tiêu chí chất lượng là ưu tiên hàng đầu, NXBGDVN đã tập trung mọi nguồn lực, phát huy kinh nghiệm 64 năm biên soạn SGK, để làm tốt nhất hai bộ sách. Khác với lớp 1, từ lớp 2 trở lên, NXBGDVN có hai bộ sách: bộ SGK *"Kết nối tri thức với cuộc sống"* được hợp nhất từ bộ *"Kết nối tri thức với cuộc sống"* và bộ *"Cùng học để phát triển năng lực"*; bộ SGK *"Chân trời sáng tạo"* được hợp nhất từ bộ *"Chân trời sáng tạo"* và bộ *"Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục"*. Mục tiêu hợp nhất là nhằm tập trung tối đa nguồn lực trí tuệ của đội ngũ tác giả; tập trung nguồn lực tài chính đầu tư cho công tác biên soạn SGK, phát triển SGK giấy đồng bộ với sách và học liệu điện tử cũng như nâng cao chất lượng công tác tập huấn sử dụng SGK mới; tiết giảm tối đa chi phí nhằm có được các bộ SGK có chất lượng cao hơn nữa về nội dung, hình thức, thiết kế và giá thành. Việc hợp nhất này hoàn toàn không làm ảnh hưởng đến việc dạy và học của GV và HS, tạo thuận lợi cho việc lựa chọn SGK, bởi lẽ mỗi bộ SGK đều bám sát và cụ thể hoá các yêu cầu cần đạt về nội dung dạy học được quy định trong Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Dù học theo bộ SGK nào, thì khi kết thúc lớp 1, HS đều phải đạt chuẩn tối thiểu cần với HS lớp 1. Mặt khác, 4 bộ SGK lớp 1 của NXBGDVN tuy có sự khác biệt, nhưng đều thể hiện quan điểm xuyên suốt của NXBGDVN trong việc biên soạn SGK. Việc hợp nhất đã làm cho bộ SGK *"Kết nối tri thức với cuộc sống"* nâng cao hơn nữa về chất lượng bởi lẽ hội tụ được những điểm ưu việt của bộ SGK *"Cùng học để phát triển năng lực"*; làm cho bộ SGK *"Chân trời sáng tạo"* nâng cao hơn nữa về chất lượng bởi lẽ hội tụ được những điểm ưu việt của bộ SGK *"Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục"*. Vì thế, giữa 4 bộ SGK lớp 1 và 2 bộ SGK lớp 2 của NXBGDVN có một sự liên thông hết sức chặt chẽ. Theo đó, ở lớp 1, dù GV và HS sử dụng bộ SGK nào, đến lớp 2, GV và HS đều có thể lựa chọn SGK *"Kết nối tri thức với cuộc sống"* hoặc *"Chân trời sáng tạo"*.

Ở lớp 1, với các địa phương tiếp tục sử dụng SGK *"Cùng học để phát triển năng lực"* hoặc SGK *"Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục"*, NXBGDVN vẫn tái bản, đảm bảo phục vụ đầy đủ, kịp thời theo nhu cầu.

Trong năm học 2021 - 2022, phát huy truyền thống, NXBGDVN tiếp tục thực hiện chương trình tặng hơn 52 000 bộ SGK cho HS có hoàn cảnh khó khăn, trị giá gần 12 tỉ đồng; đồng thời hỗ trợ chi phí vận chuyển cho các khu vực miền núi, vùng sâu vùng xa để phục vụ tốt nhất HS và GV cả nước.

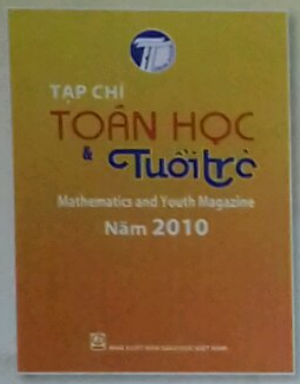
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

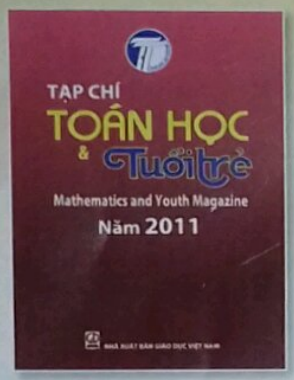
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

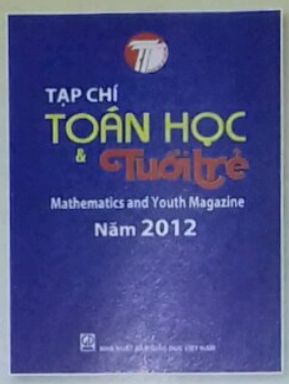
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

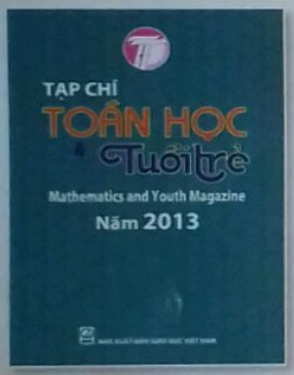
Bộ đóng tập

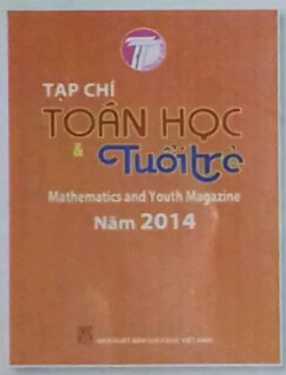
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

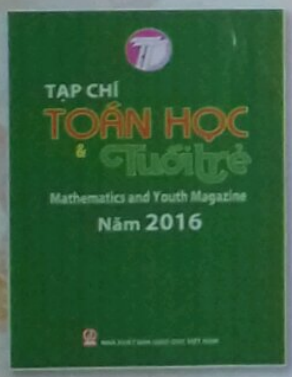


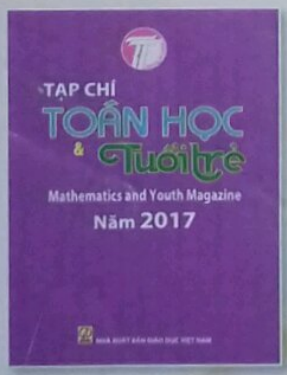


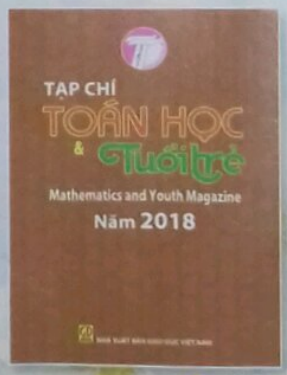


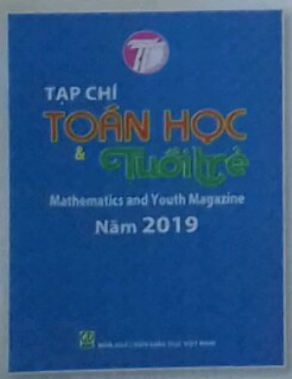


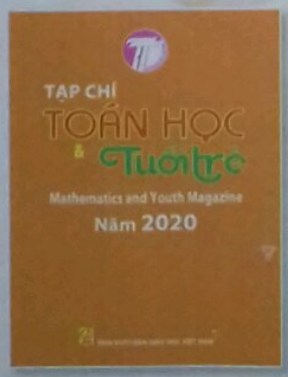












Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: [illegible]000 đồng

[illegible]
Giá bìa: [illegible]00 đồng

[illegible]
Giá bìa: [illegible]00 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT4M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2021

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng