TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 525
Tháng 3 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Emai: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Joseph Liouville
(1809 - 1882)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TỪ MỘT BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI

TỪ HỮU SƠN

(Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Tĩnh)

Trong một đề thi học sinh giỏi cấp THCS có bài toán như sau: *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=2.$$

Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

Đây là bài toán được phát biểu khá đẹp mắt và cũng gây ra không ít khó khăn cho học sinh.

Trước hết chúng tôi xin trích lại lời giải của đáp án:

Từ giả thiết ta có:

$$2=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

$$=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy+Q$$

$$\Rightarrow 2-Q=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy$$

$$\Rightarrow 4-4Q+Q^2$$

$$=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+1 \ (1).$$

Mặt khác

$$Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $4-4Q=1\Rightarrow Q=\dfrac{3}{4}$.

Cách giải trên rất hay tuy nhiên hơi thiếu tự nhiên so với tư duy của học sinh trung học cơ sở. Chúng tôi xin đưa ra một cách tiếp cận khác, từ đó đề xuất một số bài toán xung quanh bài toán này.

Ý tưởng tiếp cận của chúng tôi là sử dụng đẳng thức quen thuộc $\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)=1$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+1}-a=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a} \ (*), \forall a\in\mathbb{R}.$$

Từ giả thiết ta có:

$$\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy+Q=2 \ (3).$$

Mặt khác từ (*) ta có: $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}=\frac{1}{2},$$

suy ra: $\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy-Q=\dfrac{1}{2}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $2Q=\dfrac{3}{2}\Rightarrow Q=\dfrac{3}{4}$.

Từ cách giải trên ta rút ra các tính chất sau:

Đặt $F=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)>0$, ta có:

Tính chất 1: $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(F-\dfrac{1}{F}\right)$.

Tính chất 2: $\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy=\dfrac{1}{2}\left(F+\dfrac{1}{F}\right)$.

Áp dụng kết quả đó ta có thể giải quyết các bài toán sau:

Bài 1. *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=2$. *Tính giá trị của các biểu thức:*

a) $F=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)$.

b) $G=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$.

c) $M=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy.$

Lời giải. Ta có $F>0$.

a) Áp dụng tính chất 1, ta có:

$$F-\frac{1}{F}=2\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=4$$

$\Leftrightarrow F^2-4F-1=0\Leftrightarrow F=2+\sqrt{5}$ (vì $F>0$).

b) Ta có: $G=\frac{1}{F}=\sqrt{5}-2$.

c) Áp dụng tính chất 2 ta có:

$$M=\frac{1}{2}\left(F+\frac{1}{F}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2\right)=\sqrt{5}.$$

Bài 2. *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2xy.$$

a) *Tính giá trị của biểu thức:*

$$F=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)}{xy}.$$

b) *Tính giá trị của biểu thức:*

$$G=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)}{xy}.$$

c) *Chứng minh rằng:* $\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\sqrt{5}xy-1$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $xy>0$, do đó $F>0$.

a) Ta có $F=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+1}{xy}$

và $\frac{1}{F}=\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)}{xy}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}+1}{xy}.$$

Do đó $F-\frac{1}{F}=\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right)}{xy}=4$

$\Leftrightarrow F^2-4F-1=0\Rightarrow F=2+\sqrt{5}$ (do $F>0$).

b) Ta có:

$$G=\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)}=\frac{1}{F}=\sqrt{5}-2.$$

c) Ta có: $\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=\sqrt{5}xy-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+1$$

$$=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{5}xy$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)=\left(2+\sqrt{5}\right)xy$$

(đẳng thức cuối đúng theo kết quả câu a).

Bài 3. *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{2}$. *Tính giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

a) $P=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+x+y.$

b) $Q=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-x-y.$

Lời giải. a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right),\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)$ ta có:

$$P\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}\quad (*).$$

Đặt $F=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)>0.$

Áp dụng tính chất 1, ta có:

$$F-\frac{1}{F}=2\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=4\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow F^2-4\sqrt{2}F-1=0\Leftrightarrow F=2\sqrt{2}+3$ (vì $F>0$).

Thay vào (*) ta có: $P\geq 2\sqrt{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+2.$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{y^2+1}+y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=y=1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{2}+2.$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$ ta có:

$$Q \ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)} \quad (**).$$

Từ kết quả câu a) ta có: $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}.$$

Thay vào (**) ta có: $Q \ge 2\sqrt{3-2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Bài 4. *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+x+y=2\sqrt{2}+2$. *Tính giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải. Đặt $F=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)}=2\sqrt{F}$$

$$\Rightarrow F \le \left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{F} \ge \frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}.$$

Áp dụng tính chất 1, ta có:

$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(F-\frac{1}{F}\right) \le 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{2}$.

Bài 5. *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-x-y=2\sqrt{2}-2$. *Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy.$$

Lời giải. Đặt $F=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)>0$.

Ta có: $2\sqrt{2}-2=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

$$\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)}=2\sqrt{F}$$

$$\Rightarrow F \le \left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}.$$

Áp dụng tính chất 2, ta có:

$$2P=F+\frac{1}{F}=\left(F+\frac{17-12\sqrt{2}}{F}\right)+\frac{12\sqrt{2}-16}{F}$$

$$\ge 2\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\frac{12\sqrt{2}-16}{3-2\sqrt{2}}$$

$$=2\left(3-2\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}=6$$

(do $12\sqrt{2}-16>0, 0<F\le 3-2\sqrt{2}$).

suy ra $P \ge 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.

Bài 6. *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $2(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $F=x+y$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$2(\sqrt{x^2+1}-x)=\sqrt{y^2+1}+y$$

và $$2(\sqrt{y^2+1}-y)=\sqrt{x^2+1}+x.$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=3(x+y) \ (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{8}+1\right)} \ge \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{2}}{4}+1\right)^2}=\frac{x\sqrt{2}}{4}+1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Tương tự:

$$\sqrt{\left(y^2+1\right)\left(\frac{1}{8}+1\right)} \ge \sqrt{\left(\frac{y\sqrt{2}}{4}+1\right)^2}=\frac{y\sqrt{2}}{4}+1.$$

Kết hợp với (1) ta có:

$$3(x+y) \ge \frac{x+y}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x+y \ge \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất F là $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(*Xem tiếp trang 24*)

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC NĂM HỌC 2020-2021

VÒNG 1 (*Không chuyên*)

Câu 1. 1) $A=1$; $B=\sqrt{(4+\sqrt{7})^2}-\sqrt{7}=4$.

2) a) $Q=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-3=\sqrt{x}-3$.

b) $Q=2\Leftrightarrow\sqrt{x}-3=2\Leftrightarrow\sqrt{x}=5\Leftrightarrow x=25$.

Câu 2. 1) b) PT hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2=2x+3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=1\\x=3\Rightarrow y=9\end{array}\right.$.

Vậy tọa độ giao điểm là $(-1;1),(3;9)$.

2) Ta có: $\begin{cases}2x-3y=3\\x+3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=9\\x+3y=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\3+3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$. Vậy $S=\{(3;1)\}$.

Câu 3. 1) a) Thay $m=6$ vào PT (1) ta có:

$x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.$. Vậy $S=\{1;4\}$.

b) PT(1) có hai nghiệm dương phân biệt khi

$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1.x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-5)^2-4(m-2)>0\\5>0\\m-2>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}33-4m>0\\m>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<m<\dfrac{33}{4}$ (*);

$\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x_1.x_2}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{x_1.x_2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{9}{4}x_1x_2\Leftrightarrow 5+2\sqrt{m-2}=\dfrac{9}{4}(m-2)$

Đặt $t=\sqrt{m-2},(t>0)$ ta có PT ẩn t:

$9t^2-8t-20=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-10}{9}$ (loại), $t=2$ (nhận).

Vậy $\sqrt{m-2}=2\Rightarrow m=6$ (thỏa mãn ĐK).

2) Gọi x (m) là chiều rộng hình chữ nhật $(x>0)$. Chiều dài là $x+4$ (m). Ta có PT:

$x(x+4)=320\Leftrightarrow x^2+4x-320=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=16\\x=-20\end{array}\right.$.

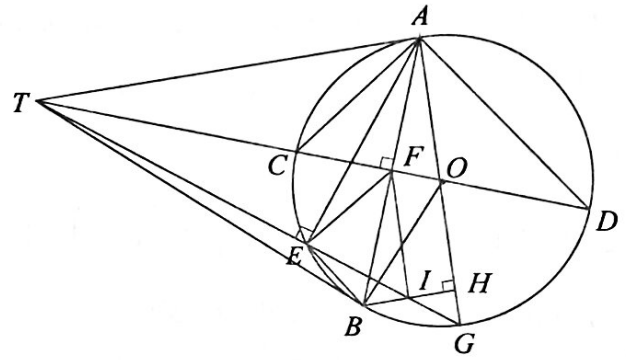
Vậy chiều rộng là 16m, chiều dài là 20m. Chu vi thửa đất là: 2(16 + 20) = 72 (m).

Câu 4. ΔABC vuông tại A có:

$\widehat{C}=90^o-60^o=30^o$; $AB=\dfrac{1}{2}BC$; $AC=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BC=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$(cm); $AB=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$(cm); $AM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (cm).

Câu 5. a) Vì TA,TB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{TAO}=\widehat{TBO}=90^o$. Tứ giác $TOAB$ có $\widehat{TAO}+\widehat{TBO}=180^o\Rightarrow$ tứ giác $TOAB$ nội tiếp.



b) ΔTAC và ΔTDA có: $\widehat{ATC}$ chung, $\widehat{TAC}=\widehat{TDA}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ $\Rightarrow\Delta TAC\backsim\Delta TDA$ (g.g)

$\Rightarrow\dfrac{TA}{TD}=\dfrac{TC}{TA}\Rightarrow TA^2=TC.TD$ (1). Vì $TA=TB$, $OA=OB$ nên TD là đường trung trực của AB. ΔTAO có: $\widehat{TAO}=90^0, AF\perp TO\Rightarrow TA^2=TF.TO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $TC.TD=TF.TO$ $(=TA^2)$.

c) Gọi $E=TG\cap(O)$ (E khác G). Tứ giác $ATEF$ nội tiếp (do $\widehat{AFT}=\widehat{AET}=90^o$) $\Rightarrow\widehat{TAB}=\widehat{FEI}$ (cùng bù với $\widehat{TEF}$) (3); AT // BH (cùng vuông góc với AG) $\Rightarrow\widehat{TAB}=\widehat{FBI}$ (so le trong) (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{FEI}=\widehat{FBI}$ $\Rightarrow$ tứ giác $BEFI$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{BEG}=\widehat{BFI}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BI}$) (5). Có $\widehat{BEG}=\widehat{BAG}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BG}$ của (O)) (6). Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BFI}=\widehat{BAG}$ $\Rightarrow IF$ // AH. Mà $FA=FB$ (do TD là đường trung trực của AB) nên $BI=IH$ hay I là trung điểm của BH.

VÒNG 2 (*Chuyên*)

Câu 1. a) $A=\sqrt{a}+1$.

b) $a=2021-2\sqrt{2020}=\left(\sqrt{2020}-1\right)^2$. Khi đó

$A=\sqrt{\left(\sqrt{2020}-1\right)^2}+1=\sqrt{2020}-1+1=\sqrt{2020}$.

Câu 2. a) ĐK: $x\ge\frac{4}{5}$. PT đã cho tương đương với

$\left(x-\sqrt{5x-4}\right)\left(2x-\sqrt{5x-4}\right)=0$.

TH1: $x-\sqrt{5x-4}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{5x-4}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=1;\ x=4\end{cases}$.

TH2: $2x-\sqrt{5x-4}=0\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5x-4}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-5x+4=0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Kết hợp ĐK: PT có tập nghiệm $S=\{1;4\}$.

b) Ta thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của HPT.

Xét $x.y\ne 0$, ta có: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-y=\dfrac{5}{xy}\\(4x-y)\left[(4x-y)^2+12xy\right]=61\ (*)\end{cases}$.

Đặt $t=4x-y$ thay vào $(*)\Leftrightarrow t\left(t^2+\frac{60}{t}\right)=61$

$\Leftrightarrow t^3-1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow xy=5$. Giải HPT:

$\begin{cases}xy=5\\4x-y=1\end{cases}$ được: $\begin{cases}x=-1\\y=-5\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{5}{4}\\y=4\end{cases}$.

HPT có tập nghiệm $S=\left\{(-1;-5);\left(\frac{5}{4};4\right)\right\}$.

Câu 3. a) PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2-2x+m=0$ (1). Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\S=2>0\\P=m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0<m<1$. Vậy $0<m<1$.

b) Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai PT. Khi đó ta có: $x_0^2+mx_0+8=0$ (1) và $x_0^2+x_0+m=0$ (2).

Suy ra $(m-1)x_0=m-8$ (3)

TH1: Với $m=1$ thì hai PT $x^2+x+8=0$ và $x^2+x+1=0$ vô nghiệm. Vậy loại $m=1$.

TH2: Với $m\ne 1$ từ (3) suy ra $x_0=\frac{m-8}{m-1}$ thay vào (2) ta được $m^3-24m+72=0$

$\Leftrightarrow(m+6)(m^2-6m+12)=0\Leftrightarrow m=-6$.

Khi $m=-6$ thì PT $x^2-6x+8=0$ có hai nghiệm 2 và 4; PT $x^2+x-6=0$ có hai nghiệm 2 và -3. Vậy $m=-6$ thì hai PT có nghiệm chung là 2.

c) Vì a,b,c là các số thực khác 0 nên các PT đã cho là PT bậc hai một ẩn. Ta có:

$\Delta_1'=(b+c)^2-4ac;\Delta_2'=(a+c)^2-4ab;$

$\Delta_3'=(a+b)^2-4bc$. Suy ra:

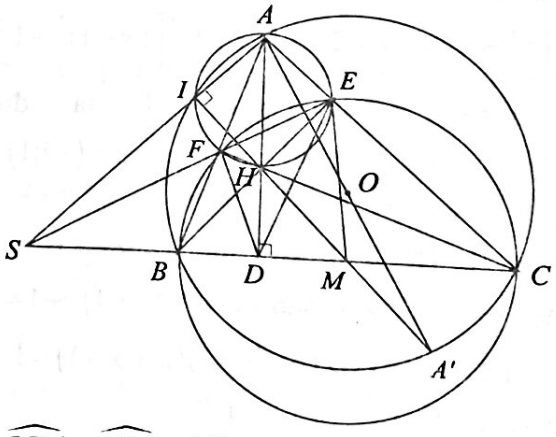
$\Delta_1'+\Delta_2'+\Delta_3'=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.

Ta có: $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

Suy ra $\Delta_1'+\Delta_2'+\Delta'\ge 0$. Vậy trong ba PT trên có ít nhất một PT có nghiệm.

Câu 4. a) Ta có $\widehat{BDH}+\widehat{BFH}=180^\circ$ nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp.



Do $\widehat{BDA}=\widehat{BEA}=90^\circ$ nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Ta có $\widehat{FDH}=\widehat{FBH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FH}$).

Mặt khác lại có $\widehat{FBH}=\widehat{ABE}=\widehat{ADE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$). Suy ra $\widehat{FDH}=\widehat{EDH}$ hay DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$. Tương tự FH là tia phân giác của góc $\widehat{DFE}$ hay H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DFE.

b) Vì EM là trung tuyến của tam giác vuông BEC nên ΔMBE cân tại M. Hay $\widehat{EMC}=2\widehat{EBM}$ (góc ngoài của ΔMBE).

Theo câu a) $\widehat{EFD}=2\widehat{HFD}$ (do FH cũng là phân giác của $\widehat{DFE}$).

Mà $\widehat{HFD}=\widehat{HBD}=\widehat{EBM}$ (cùng cùng chắn cung $\overset{\frown}{DH}$). Từ đó suy ra $\widehat{DFE}=\widehat{EMC}$ $\Rightarrow$ tứ giác $DFEM$ nội tiếp.

c) Ta có $BH \parallel A'C'$ (vì cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel A'B$ (vì cùng vuông góc với AB), suy ra tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên A', M, H, I thẳng hàng. Từ đó ta có I nằm trên đường tròn $(AFHE)$ với đường kính AH (vì $\widehat{HIA}=\widehat{A'IA}=90^\circ$). Gọi $EF\cap BC=S$, SA cắt (O) tại I'. Khi đó $SF.SE=SB.SC=SI'.SA$ $\Rightarrow A, I, F, E$ cùng nằm trên đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{AI'H}=90^\circ$, hay I' thuộc tia MH. Từ đó suy ra $I\equiv I'$, hay AI, EF, BC đồng quy.

Câu 5. a) PT đã cho tương đương với

$$y^2-2\left(2x^2-1\right)y-8x-7=0.$$

Xem đây là PT bậc hai đối với biến y, để PT có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương. Ta có $\Delta=4\left(x^4-x^2+2x+2\right)=4(x+1)^2\left[(x-1)^2+1\right]$.

Nếu $x=-1$. Thay vào PT ta được $y^2-2y+1=0\Leftrightarrow y=1$. Do đó $(x;y)=(-1;1)$ là một nghiệm của PT.

Nếu $x\neq -1$. Để Δ là số chính phương thì phải tồn tại số $a\in\mathbb{Z}^*$ sao cho $(x-1)^2+1=a^2$

$\Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1\Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x+1=1\\a+x-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}a-x+1=-1\\a+x-1=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\x=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $x=1$ thay vào PT ta được:

$$y^2-2y-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=5\\y=-3\end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy các nghiệm $(1;5),(1;-3)$ thỏa mãn.

Vậy PT đã cho có ba nghiệm nguyên là:

$$(x;y)\in\{(-1;1);(1;5);(1;-3)\}.$$

b) Do $b^2+3a\,\vdots\,a^2b$ nên tồn tại số nguyên dương k sao cho $b^2+3a=ka^2b$ hay

$$b^2=ka^2b-3a=a(kab-3) \text{ nên } b^2\,\vdots\,a.$$

Hơn nữa do $3a=ka^2b-b^2=b^2\left(ka^2-b\right)$ nên $3a\,\vdots\,b$.

Do đó các số $\frac{b^2}{a};\frac{3a}{b}$ và $\frac{b^2+3a}{a^2b}=\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}$ là các số nguyên dương. Ta có $\frac{3a}{b}.\left(\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}\right)=\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}$ là số nguyên dương nên $a\left(\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}\right)=3+\frac{9a}{b^2}$ là số nguyên dương hay $\frac{9a}{b^2}$ là số nguyên dương, suy ra $9a\,\vdots\,b^2$. Khi đó tồn tại m,n nguyên dương sao cho $\begin{cases}b^2m=9a\\an=b^2\end{cases}$. Từ đó suy ra $mn=9$. Do đó $n\in\{1;3;9\}$ nên $b^2\in\{a;3a;9a\}$. Khi đó ĐK của bài toán trở thành $na+3a\,\vdots\,a^2b\Leftrightarrow n+3\,\vdots\,ab$.

Ta xét ba khả năng có thể có của n như sau:

- Nếu $n=1$ thì $\begin{cases}b^2=a\\4\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\4\,\vdots\,b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$.
- Nếu $n=3$ thì $\begin{cases}b^2=3a\\6\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\18\,\vdots\,b^3\end{cases}$. Do b là bội của 3 nên không tồn tại (a,b) thoả mãn yêu cầu.
- Nếu $n=9$ thì $\begin{cases}b^2=9a\\12\,\vdots\,ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=a\\108\,\vdots\,b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$.

Vậy có hai cặp số (a, b) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(1;1),(1;3)$.

Câu 6. a) i) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\geq 0\Leftrightarrow\frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}\geq 0$

$\Leftrightarrow b(a+b)+a(a+b)-4ab\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$. BĐT được chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

☞

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TP. QUY NHƠN NĂM HỌC 2020 - 2021

Ngày thi: 02/12/2020 – Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (*4 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức $B = a^3 + 12a + 1$, biết

$$a = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}.$$

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn:

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Chứng minh rằng: $x + y = 0$.

Bài 2. (*4 điểm*)

a) Cho x, y, z là các số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng: $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 3y + 4 = 0.$$

Bài 3. (*5 điểm*)

a) Giải phương trình: $5x^2 - x + 5 = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}.$$

Bài 4. (*5 điểm*)

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm), và một cát tuyến ADE nằm giữa hai tia AO, AB ($D, E \in (O)$). Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P và Q. Gọi K là điểm đối xứng với B qua E. Gọi H, I lần lượt là giao điểm của BC với OA, DE.

a) Chứng minh tứ giác $OEDH$ nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Bài 5. (*2 điểm*)

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại D, E, F và cắt CD tại P. Gọi M là trung điểm của EF.

Chứng minh: $\dfrac{PE}{PD} = \dfrac{FM}{FD}$.

BÙI VĂN CHI

(21/2 đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Giới thiệu

****

☞ ii) Ta có: $\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1} \ge \frac{1}{4}(a + 5b + 2)$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1} \ge a + 5b + 2$

$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1}\right)^2 \ge (a + 5b + 2)^2$

$\Leftrightarrow 15a^2 + 23b^2 - 26ab - 4a - 20b + 12 \ge 0$

$\Leftrightarrow 13(a-b)^2 + 10(b-1)^2 + 2(a-1)^2 \ge 0.$ BĐT được chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$.

b) Áp dụng BĐT

$$\sqrt{a^2 - ab + 3b^2 + 1} \ge \frac{1}{4}(a + 5b + 2)$$

ta có: $P \le \dfrac{4}{a+5b+2} + \dfrac{4}{b+5c+2} + \dfrac{4}{c+5a+2}$.

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}\ \forall a, b > 0$ ta được:

$$\frac{4}{a+5b+2} \le \frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{4b} \quad (1)$$

$$\frac{4}{b+5c+2} \le \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{4c} \quad (2)$$

$$\frac{4}{c+5a+2} \le \frac{1}{c+a+2} + \frac{1}{4a} \quad (3)$$

Từ $(1), (2), (3)$ ta có:

$$P \le \left(\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+a+2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad (*)$$

Tiếp tục áp dụng BĐT $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}\ \forall a, b > 0$ ta có:

$$\frac{1}{a+b+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}\right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{b+c+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{c+a+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\right] \quad (6).$$

Từ $(*), (4), (5), (6)$ ta được:

$$P \le \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{3}{8} \le \frac{3}{2}.$$

Vậy max $P = \dfrac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

MAI VĨNH PHÚ

(GV THCS&THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước)

Giới thiệu

THỂ TÍCH VÀ TỈ SỐ THỂ TÍCH CÁC KHỐI ĐA DIỆN TRONG KHÔNG GIAN

LÊ VĂN QUÝ

(GV THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi)

Trong phần hình học không gian lớp 12, vấn đề thể tích và tỉ số thể tích của các khối đa diện là rất quan trọng, thường được đề cập trong các kỳ thi HSG cấp tỉnh và thi THPT Quốc gia. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số kết quả quan trọng và ứng dụng của nó.

I. CÁC KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

Mệnh đề 1. *Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt AM tại I. Khi đó ta có:*

a) $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{AC}{AQ}=2\dfrac{AM}{AI}$. b) $\dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{AP.AQ}{AB.AC}$.

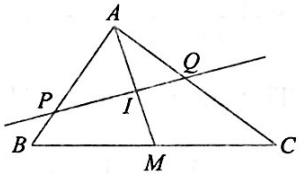
Chứng minh.

a) Vì M là trung điểm của BC nên ta có:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\frac{AB}{AP}.\overrightarrow{AP}+\frac{AC}{AQ}.\overrightarrow{AQ}=2\frac{AM}{AI}.\overrightarrow{AI}$$

Vì 3 điểm I,P,Q thẳng hàng nên

$$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=2\frac{AM}{AI}$$



b) Ta có

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AP.AQ.\sin\widehat{PAQ}}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}}=\frac{AP.AQ}{AB.AC}.$$

Mệnh đề 2. *Cho hình chóp S.ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) bất kỳ cắt các cạnh SA, SB, SC của hình chóp lần lượt tại $A_1B_1C_1$ và cắt SG tại điểm G_1. Khi đó:*

a) $\dfrac{SA}{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}=3\dfrac{SG}{SG_1}$.

b) $\dfrac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA_1}{SA}.\dfrac{SB_1}{SB}.\dfrac{SC_1}{SC}$.

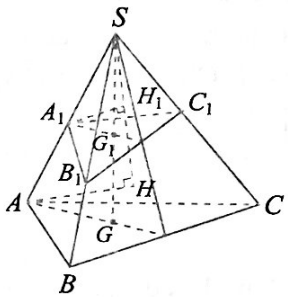
Chứng minh. a) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG}$

$$\Rightarrow\frac{SA}{SA_1}.\overrightarrow{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}.\overrightarrow{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}.\overrightarrow{SC_1}=3\frac{SG}{SG_1}.\overrightarrow{SG_1}.$$

Vì 4 điểm A_1,B_1,C_1,G_1 đồng phẳng nên

$$\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=3\frac{SG}{SG_1}.$$

b) Gọi H,H_1 lần lượt là hình chiếu của A và A_1 trên (SBC). Khi đó 3 điểm S,H,H_1 thẳng hàng. Vì $A_1H_1 // AH$ nên $\dfrac{A_1H_1}{AH}=\dfrac{SA_1}{SA}$.



Áp dụng công thức tính thể tích khối chóp và Mệnh đề 1b, ta có:

$$\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V_{S.ABC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta SB_1C_1}.A_1H_1}{\frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.AH}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.$$

Nhận xét. Nếu 3 đường thẳng a,b,c không đồng phẳng và cắt nhau tại S. Trên các đường thẳng này lần lượt lấy các cặp điểm A,A_1; B,B_1; C,C_1 (không trùng với S) thì kết quả của Mệnh đề 2b vẫn đúng.

Mệnh đề 3. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, Một mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1.*

Đặt $a=\dfrac{SA}{SA_1},b=\dfrac{SB}{SB_1},c=\dfrac{SC}{SC_1},d=\dfrac{SD}{SD_1}$. *Khi đó:*

a) $a+c=b+d$.

b) $\dfrac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$.

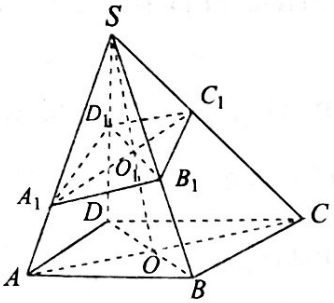
Chứng minh.

a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ thì ba điểm S, O_1, O thẳng hàng. Theo Mệnh đề 1a, ta có:

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = 2\frac{SO}{SO_1}$$

và $\frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1} = 2\frac{SO}{SO_1}$.

Suy ra: $a + c = b + d$.



b) Áp dụng Mệnh đề 2b, ta có:

$$\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A_1B_1C_1} + V_{S.A_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A_1C_1D_1}}{2V_{S.ACD}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{SA_1.SB_1.SC}{SA.SB.SC} + \frac{1}{2}\frac{SA_1.SC_1.SD_1}{SA.SC.SD}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{SA_1.SC_1}{SA.SC}\left(\frac{SB_1}{SB} + \frac{SD_1}{SD}\right) = \frac{b+d}{2abcd}$$

$$= \frac{a+c}{2abcd} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}.$$

Mệnh đề 4. *Gọi K là một điểm thuộc đáy của hình chóp có đỉnh O và S là diện tích hình chiếu của đáy hình chóp trên mặt phẳng vuông góc với OK. Khi đó thể tích của khối chóp này là* $V = \frac{1}{3}OK.S$.

Chứng minh. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng đáy của hình chóp và α là góc giữa đường thẳng OK và OH. Khi đó α là góc giữa mặt phẳng đáy và mặt phẳng vuông góc với đường thẳng OK. Ta có:

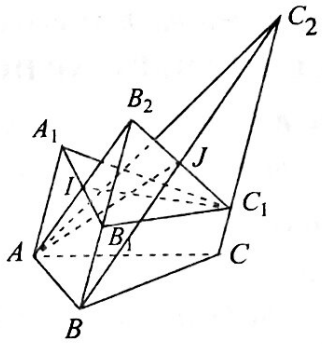
$$OH = OK.\cos\alpha \text{ và } S = S'.\cos\alpha$$

với S' là diện tích đáy của hình chóp. Do đó:

$$V = \frac{1}{3}S'.OH = \frac{1}{3}\frac{S}{\cos\alpha}.\cos\alpha.OK = \frac{1}{3}OK.S.$$

Mệnh đề 5. *Trên ba đường thẳng song song lấy các vectơ cùng hướng* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$. *Gọi S là diện tích tam giác thu được khi cắt các đường thẳng này bằng một mặt phẳng vuông góc với chúng. Khi đó thể tích V của khối đa diện lồi* $ABCA_1B_1C_1$ là $V = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1).S$.

Chứng minh. Gọi I là trung điểm A_1B_1 và B_2 là giao điểm của AI và BB_1. Ta có: $V_{C_1.AA_1I} = V_{C_1.B_2IB_1}$ (vì hai khối chóp này có cùng chiều cao và diện tích đáy bằng nhau). Do đó: $V = V_{ABCC_1B_2}$. Gọi J là trung điểm B_2C_1 và C_2 là giao điểm của BJ và CC_1. Ta có:



$$CC_2 = AA_1 + BB_1 + CC_1$$

và $V_{ABB_2J} = V_{AC_1C_2J}$ và do đó $V_{ABCC_1B_2} = V_{C_2ABC}$.

Vậy $V = V_{C_2ABC}$.

Theo mệnh đề 4, ta có

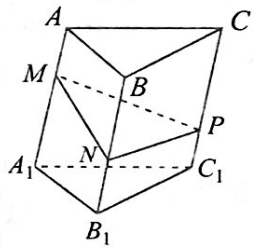
$$V = V_{C_2ABC} = \frac{1}{3}CC_2.S = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1).S.$$

Mệnh đề 6. *Cho lăng trụ* $ABC.A_1B_1C_1$. *Một mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh* AA_1, BB_1, CC_1 *của hình lăng trụ lần lượt tại* M, N, P. *Khi đó*

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA_1} + \frac{BN}{BB_1} + \frac{CP}{CC_1}\right).$$

Chứng minh.

Gọi S là diện tích tam giác thu được khi cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng vuông góc AA_1. Áp dụng mệnh đề 5, ta có:



$$V_{ABC.MNP} = \frac{1}{3}(AM + BN + CP).S$$

và $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1).S$

Suy ra: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{AM + BN + CP}{AA_1 + BB_1 + CC_1}$.

Do $AA_1 = BB_1 = CC_1$ nên

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA_1} + \frac{BN}{BB_1} + \frac{CP}{CC_1}\right).$$

Mệnh đề 7. *Cho hình hộp* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. *Một mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *của hình hộp lần lượt tại* M, N, P, Q. *Đặt* $a = \frac{AM}{AA_1}$, $b = \frac{BN}{BB_1}$, $c = \frac{CP}{CC_1}$, $d = \frac{DQ}{DD_1}$. *Khi đó:*

a) $a + c = b + d$.

b) $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Chứng minh. Dành cho bạn đọc.

II. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

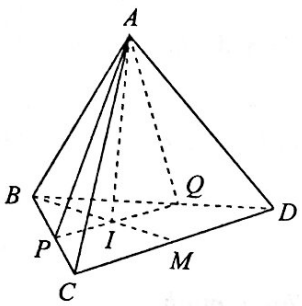
Thí dụ 1. *Cho khối tứ diện ABCD có thể tích V. Trên đường trung tuyến BM của tam giác BCD lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BM}$ với $0 < k < 1$. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa AI và cắt các cạnh BC, BD của tam giác BCD lần lượt tại P, Q. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện ABPQ.*

Lời giải. Đặt $\dfrac{BC}{BP} = x; \dfrac{BD}{BQ} = y$, với $x, y \geq 1$.

Theo Mệnh đề 1a, ta có

$\dfrac{BC}{BP} + \dfrac{BD}{BQ} = 2\dfrac{BM}{BI} = \dfrac{2}{k}$,

hay $x + y = \dfrac{2}{k}$.



Ta có:

$\dfrac{V_{ABPQ}}{V} = \dfrac{BP}{BC}.\dfrac{BQ}{BD}$

$\Rightarrow V_{ABPQ} = \dfrac{BP}{BC}.\dfrac{BQ}{BD}.V = \dfrac{1}{xy}V = \dfrac{1}{x\left(\dfrac{2}{k} - x\right)}V$.

Với $y \geq 1$ thì $y = \dfrac{2}{k} - x \geq 1 \Rightarrow x \leq \dfrac{2-k}{k}$.

Xét hàm số $f(x) = x\left(\dfrac{2}{k} - x\right)$ với $1 \leq x \leq \dfrac{2-k}{k}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{k} - 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{k}$.

Bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{1}{k}$		$\dfrac{2-k}{k}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{2-k}{k}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{k^2}$	$\searrow$	$\dfrac{2-k}{k}$

Từ BBT ta thấy:

+ $\min\limits_{\left[1;\frac{2-k}{k}\right]} f(x) = \dfrac{2-k}{k}$ đạt tại $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{2-k}{k}$

.

+ $\max\limits_{\left[1;\frac{2-k}{k}\right]} f(x) = \dfrac{1}{k^2}$ đạt tại $x = \dfrac{1}{k}$.

Hơn nữa $f(x)$ liên tục và dương trên $\left[1; \dfrac{2-k}{k}\right]$ nên:

+ $\min V_{ABPQ} = k^2 V$ khi $x = y = \dfrac{1}{k}$ hay (P) chứa AI và song song với CD.

+ $\max V_{ABPQ} = \dfrac{k}{2-k}V$ khi $x = 1; y = \dfrac{2-k}{k}$ hoặc $x = \dfrac{2-k}{k}$; $y = 1$ hay $(P) \equiv (AIC)$ hoặc $(P) \equiv (AID)$.

Thí dụ 2. *Cho khối chop S.ABC có thể tích V. Gọi G, G_1 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, SBC. Trên đường trọng tuyến SG của hình chóp lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SG}$ với $0 < k \leq \dfrac{3}{4}$. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa G_1I và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1.*

a) *Chứng minh rằng:* $\dfrac{SB}{SB_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = 3$ *và* $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{3-3k}{k}$.

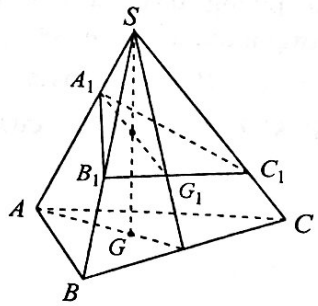
b) *Xác định vị trí của (P) để tam giác SB_1C_1 có diện tích nhỏ nhất.*

c) *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.A_1B_1C_1$.*

Lời giải

a) Gọi M là trung điểm của BC thì $G \in AM$, $G_1 \in SM$ và

$SM = \dfrac{3}{2}SG_1$.



Theo Mệnh đề 1a, ta có

$\dfrac{SB}{SB_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = 2\dfrac{SM}{SG_1} = 3$.

Mặt khác, theo mệnh đề 2a, ta có:

$\dfrac{SA}{SA_1} + \dfrac{SB}{SB_1} + \dfrac{SC}{SC_1} = 3\dfrac{SG}{SI} = \dfrac{3}{k} \Rightarrow \dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{3-3k}{k}$.

b) Ta có $S_{\Delta SB_1C_1} = \dfrac{1}{2}SB_1.SC_1.\sin\widehat{BSC}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$9=\left(\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)^2\ge 4\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}\Rightarrow SB_1.SC_1\ge\frac{4}{9}SB.SC.$$

Do đó $S_{\Delta SB_1C_1}\ge\frac{2}{9}SB.SC.\sin\widehat{BSC}$ (không đổi)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{SB}{SB_1}=\frac{SC}{SC_1}=\frac{3}{2}$.

Vậy diện tích tam giác SB_1C_1 nhỏ nhất $\Leftrightarrow (P)$ qua IG_1 và song song với BC.

c) Đặt $\frac{SA}{SA_1}=x;\frac{SB}{SB_1}=y;\frac{SC}{SC_1}=z$ với $x,y,z\ge 1$

Theo câu a, ta có: $y+z=3$ và $x=\frac{3-3k}{k}$

Ta có: $\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}=\frac{1}{xyz}$

$$\Rightarrow V_{S.A_1B_1C_1}=\frac{1}{xyz}V=\frac{kV}{(3-3k)y(3-y)}.$$

Với $z\ge 1$ thì $z=3-y\ge 1\Rightarrow y\le 2$.

Xét hàm số $f(y)=y(3-y)$ với $1\le y\le 2$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(y)$ trên $[1;2]$ ta tìm được

+ $\min\limits_{[1;2]} f(y)=2$ đạt tại $y=1$ hoặc $y=2$.

+ $\max\limits_{[1;2]} f(y)=\frac{9}{4}$ đạt tại $y=\frac{3}{2}$.

Vì $f(x)$ liên tục và dương trên $[1;2]$ nên:

Vậy $\min V_{S.A_1B_1C_1}=\frac{4kV}{9(3-3k)}$ khi $x=\frac{3-3k}{k}$,

$y=z=\frac{3}{2}$; hay (P) chứa G_1I và $(P)//BC$.

$\max V_{S.A_1B_1C_1}=\frac{kV}{2(3-3k)}$ khi $x=\frac{3-3k}{k};y=1;z=2$ hoặc

$x=\frac{3-3k}{k};y=2;z=1$ hay $(P)\equiv(G_1IC)$ hoặc $(P)\equiv(G_1IB)$

.

Thí dụ 3. *Cho khối chóp S.ABC có thể tích là V, G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1,B_1,C_1 thỏa mãn đẳng thức $\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=3k$, với k không đổi và k > 1. Gọi G_1 là giao điểm của SG với (P); V_1,V_2,V_3 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $SA_1B_1G_1$, $SB_1C_1G_1$, $SC_1A_1G_1$. Chứng minh rằng:*

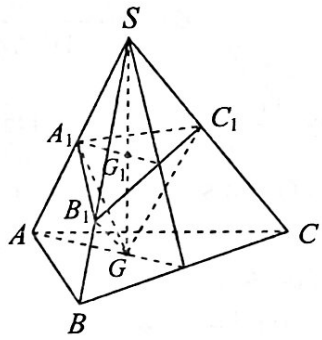
a) *Mặt phẳng (P) luôn đi qua một điểm cố định.*

b) $\sqrt{\frac{1}{V_1}}+\sqrt{\frac{1}{V_2}}+\sqrt{\frac{1}{V_3}}\le 3k\sqrt{\frac{3k}{V}}$.

c) $\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V}\ge\frac{1}{k^3}$ và $\frac{V_{G.A_1B_1C_1}}{V}\ge\frac{k-1}{k^3}$.

Lời giải. a) Theo mệnh đề 3a, ta có:

$$\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=3\frac{SG}{SG_1}.$$



Từ giả thiết suy ra:

$$3\frac{SG}{SG_1}=3k$$

$$\Rightarrow SG_1=\frac{1}{k}SG$$

(không đổi). Suy ra G_1 cố định. Vậy mặt phẳng (P) luôn đi qua điểm cố định G_1.

b) Ta có: $\sqrt{\frac{V}{3V_1}}=\sqrt{\frac{V_{SABG}}{V_1}}=\sqrt{\frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SG}{SG_1}}$

$$\le\frac{1}{2}\sqrt{k}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}\right)\ (1)$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{V}{3V_2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{k}\left(\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)$ (2)

$$\sqrt{\frac{V}{3V_3}}\le\frac{1}{2}\sqrt{k}\left(\frac{SC}{SC_1}+\frac{SA}{SA_1}\right)\ (3).$$

Cộng ba BĐT (1), (2) và (3) theo vế ta được:

$$\sqrt{\frac{V}{3V_1}}+\sqrt{\frac{V}{3V_2}}+\sqrt{\frac{V}{3V_3}}\le\sqrt{k}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right).$$

Suy ra: $\sqrt{\frac{1}{V_1}}+\sqrt{\frac{1}{V_2}}+\sqrt{\frac{1}{V_3}}\le 3k\sqrt{\frac{3k}{V}}$.

c) • Ta có $\frac{V}{V_{S.A_1B_1C_1}}=\frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}$

$$\le\frac{1}{27}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)^3=k^3.$$

Suy ra: $\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V} \geq \frac{1}{k^3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1} = k$.

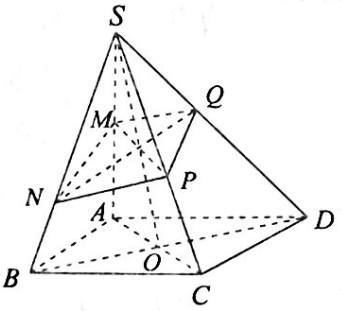
• Ta có: $\frac{V_{G.A_1B_1C_1}}{V_{S.A_1B_1C_1}} = \frac{GG_1}{SG_1} = k-1$, $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A_1B_1C_1}} = \frac{SA}{SA_1}\frac{SB}{SB_1}\frac{SC}{SC_1}$.

$$\Rightarrow \frac{V_{S.ABC}}{V_{G.A_1B_1C_1}} = \frac{1}{k-1}.\frac{SA}{SA_1}\frac{SB}{SB_1}\frac{SC}{SC_1}$$

$$\leq \frac{1}{27(k-1)}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)^3 = \frac{k^3}{k-1}.$$

Vậy $\frac{V_{G.A_1B_1C_1}}{V} \geq \frac{k-1}{k^3}$. Dấu "=" xảy ra khi (P) đi qua G_1 và song song với (ABC).

Thí dụ 4. (***Đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi năm học 2020-2021***) *Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, thể tích là V. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho SN = 2NB; mặt phẳng (α) di động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại P, Q. Tính thể tích lớn nhất của khối chóp S.MNPQ.*



Lời giải. Đặt $\frac{SC}{SP} = x$; $\frac{SD}{SQ} = y$, với $x, y \geq 1$.

Theo mệnh đề 3a, ta có:

$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$$

hay $2 + x = \frac{3}{2} + y \Rightarrow y = x + \frac{1}{2}$.

Theo mệnh đề 3b, ta có:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V} = \frac{2 + x + \frac{3}{2} + y}{4.2.x.\frac{3}{2}.y} = \frac{x+2}{6x^2+3x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{6x^2+3x}$ với $x \geq 1$.

Ta có $f'(x) = \frac{-6x^2-24x-6}{(6x^2+3x)^2} < 0, \forall x \geq 1$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$. Suy ra $\max\limits_{[1;+\infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta có: $\frac{V_{S.MNPQ}}{V} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.MNPQ} \leq \frac{1}{3}V$.

Vậy $\max V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}V$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = \frac{3}{2}$ hay $(\alpha) \equiv (MNC)$.

Thí dụ 5. *Cho khối hình chóp S.ABCD có thể tích là V, đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1 thoa mãn đẳng thức $\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} + \frac{SD}{SD_1} = 2k$, với k không đổi và $k > 2$. Gọi V_0, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối chóp $S.A_1B_1C_1D_1$, $S.A_1B_1C_1$ và $S.A_1C_1D_1$. Chứng minh rằng:*

a) *Mặt phẳng (P) luôn đi qua một điểm cố định.*

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{V_1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{V_2}} \leq k.\sqrt[3]{\frac{2}{V}}$. c) $\frac{8}{k^3} \leq \frac{V_0}{V} \leq \frac{k}{2(k-1)^2}$.

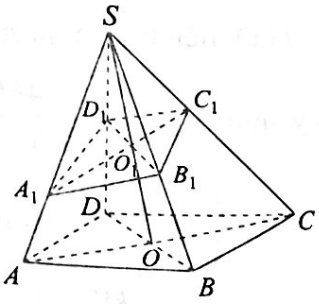
Lời giải. a) Gọi $O = AC \cap BD$ và $O_1 = SO \cap (A_1B_1C_1D_1)$. Theo Mệnh đề 1a, ta có:

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1} = 2\frac{SO}{SO_1} \quad (4)$$

Cùng với đẳng thức đã cho của giả thiết ta có:

$$4\frac{SO}{SO_1} = 2k$$

$\Rightarrow SO_1 = \frac{2SO}{k}$ (không đổi). Suy ra O_1 cố định..



Vậy (P) luôn đi qua điểm cố định O_1.

b) Từ (4) và giả thiết suy ra:

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_2} = k.$$

Ta có $\sqrt[3]{\frac{V}{2V_1}} = \sqrt[3]{\frac{V_{S.ABC}}{V_1}} = \sqrt[3]{\frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}}$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1}\right) \quad (5)$$

Tương tự: $\sqrt[3]{\frac{V}{2V_2}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SC}{SC_1}+\frac{SD}{SD_1}\right)$ (6)

Cộng hai BĐT (5) và (6) theo vế ta được

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2V_1}}+\sqrt[3]{\frac{V}{2V_2}} \le \frac{1}{3}\left(2k+\frac{SA}{SA_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)=k.$$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{1}{V_1}}+\sqrt[3]{\frac{1}{V_2}} \le k.\sqrt[3]{\frac{2}{V}}$.

c) Đặt $\frac{SA}{SA_1}=a;\frac{SB}{SB_1}=b;\frac{SC}{SC_1}=c;\frac{SD}{SD_2}=d$, với $a,b,c,d \ge 1$.

Ta có $a+b+c+d=2k$ và $a+c=b+d=k$.

Theo mệnh đề 3b, ta có: $\frac{V_0}{V}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}=\frac{k}{2abcd}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2k=a+b+c+d \ge 4\sqrt[4]{abcd} \Rightarrow abcd \le \frac{k^4}{16}$$

Do đó $\frac{V_0}{V} \ge \frac{8}{k^3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{k}{2}$.

Mặt khác vì $a,b,c,d \ge 1$ và $a+c=b+d=k$ nên $1 \le a,b,c,d \le k-1$. Do đó:

$ac=a(k-a)=(a-1)(k-1-a)+k-1 \ge k-1>0$.

Tương tự: $bd \ge k-1>0 \Rightarrow abcd \ge (k-1)^2>0$.

Do đó $\frac{V_0}{V} \le \frac{k}{2(k-1)^2}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$(a,b,c,d) \in \{(1,1,k-1,k-1);$$
$$(1,k-1,k-1,1);(k-1,1;1;k-1);(k-1,k-1,1,1)\}.$$

Thí dụ 6. *Cho hình chóp S.ABCD, có SA = a, (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SA. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của B, C, D lên (P). Biết diện tích tứ giác $AB_1C_1D_1$ bằng $4a^2$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.*

Lời giải. Áp dụng mệnh đề 4, ta có:

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{AB_1C_1D_1}.SA=\frac{1}{3}.4a^2.a=\frac{4a^3}{3}.$$

Thí dụ 7. *Cho hình chóp S.ABC và điểm M tùy ý nằm trong tam giác ABC. Ba đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC lần lượt cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) tại A_1, B_1, C_1.*

a) *Chứng minh rằng:* $\frac{SA}{MA_1}+\frac{SB}{MB_1}+\frac{SC}{MC_1} \ge 9$.

b) *Xác định vị trí của điểm M để thể tích khối chóp $M.A_1B_1C_1$ nhận giá trị lớn nhất.*

Lời giải.

a) Kéo dài *AM, BM, CM* cắt các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *X, Y, Z*. Khi đó các điểm A_1,B_1,C_1 lần lượt thuộc *SX, SY, SZ*.

Theo định lý Thales ta có:

$$\frac{MA_1}{SA}+\frac{MB_1}{SB}+\frac{MC_1}{SC}=\frac{XM}{XA}+\frac{YM}{YB}+\frac{ZM}{ZC}$$

Mà $\frac{XM}{XA}+\frac{YM}{YB}+\frac{ZM}{ZC}=\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta MCA}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}=1$

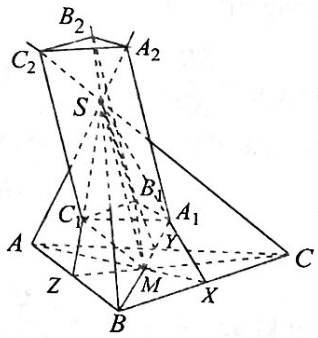
Do đó $\frac{MA_1}{SA}+\frac{MB_1}{SB}+\frac{MC_1}{SC}=1$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left(\frac{SA}{MA_1}+\frac{SB}{MB_1}+\frac{SC}{MC_1}\right)\left(\frac{MA_1}{SA}+\frac{MB_1}{SB}+\frac{MC_1}{SC}\right) \ge 9$$

Nên $\frac{SA}{MA_1}+\frac{SB}{MB_1}+\frac{SC}{MC_1} \ge 9$.

b) Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MS}$. Ta thấy $T_{\overrightarrow{MS}}: M.A_1B_1C_1 \mapsto S.A_2B_2C_2$ với A_2,B_2,C_2 lần lượt là ảnh của A_1,B_1,C_1 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MS}$. Do đó A_2,B_2,C_2 lần lượt thuộc tia đối của các tia SA,SB,SC tương ứng và $SA_2=MA_1$; $SB_2=MB_1; SC_2=MC_1$.



Vậy hai hình chóp $M.A_1B_1C_1$ và $S.A_2B_2C_2$ bằng nhau. Suy ra $V_{MA_1B_1C_1}=V_{SA_2B_2C_2}$

Ta có: $\frac{V_{M.A_1B_1C_1}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{S.A_2B_2C_2}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA_2}{SA}\frac{SB_2}{SB}\frac{SC_2}{SC}=\frac{MA_1}{SA}\frac{MB_1}{SB}\frac{MC_1}{SC}$

$$\le \frac{1}{27}\left(\frac{MA_1}{SA}+\frac{MB_1}{SB}+\frac{MC_1}{SC}\right)^3=\frac{1}{27}$$

$\Rightarrow V_{M.A_1B_1C_1} \le \frac{1}{27} V_{S.ABC}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MA_1}{SA} = \frac{MB_1}{SB} = \frac{MC_1}{SC} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{XM}{XA} = \frac{YM}{YB} = \frac{ZM}{ZC} = \frac{1}{3}$.

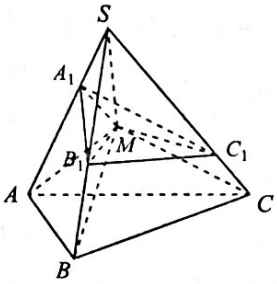
Hay M là trọng tâm tam giác ABC.

Thí dụ 8. *Cho khối chóp S.ABC có thể tích V. M là một điểm bất kỳ nằm trong khối chóp. Một mặt phẳng (P) tùy ý qua M và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Đặt V_A, V_B, V_C lần lượt là thể tích các khối chóp S.MBC; S.MCA; S.MAB. Chứng minh rằng:*

a) $V = \frac{SA}{SA_1}.V_A + \frac{SB}{SB_1}.V_B + \frac{SC}{SC_1}.V_C$.

b) $V_{MABC} = \frac{AA_1}{SA_1}.V_A + \frac{BB_1}{SB_1}.V_B + \frac{CC_1}{SC_1}.V_C$.

Lời giải. a) Ta có:



$\frac{V_{S.A_1B_1M}}{V_{S.ABM}} = \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}$

$\Rightarrow V_{S.A_1B_1M} = \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.V_C$ (7)

Tương tự:

$V_{S.B_1C_1M} = \frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V_A$ (8); $V_{S.C_1A_1M} = \frac{SC_1}{SC}.\frac{SA_1}{SA}.V_B$ (9).

Cộng các đẳng thức (7), (8) và (9) theo vế ta được:

$V_{S.A_1B_1C_1} = \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.V_C + \frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V_A + \frac{SC_1}{SC}.\frac{SA_1}{SA}.V_B$

Mặt khác, $\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V} = \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}$ nên

$V_{S.A_1B_1C_1} = \frac{SC}{SC_1}.\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V}.V_C +$

$+ \frac{SA}{SA_1}.\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V}.V_A + \frac{SB}{SB_1}.\frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V}.V_B$

Suy ra: $V = \frac{SA}{SA_1}V_A + \frac{SB}{SB_1}V_B + \frac{SC}{SC_1}V_C$.

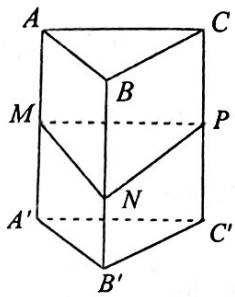
b)Ta có: $V_{MABC} = V - (V_A + V_B + V_C)$

$= \frac{SA}{SA_1}.V_A + \frac{SB}{SB_1}.V_B + \frac{SC}{SC_1}.V_C - (V_A + V_B + V_C)$

$= \frac{AA_1}{SA_1}.V_A + \frac{BB_1}{SB_1}.V_B + \frac{CC_1}{SC_1}.V_C$.

Thí dụ 9 (OLP 30/4/2001). *Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $BC \le CA \le AB$. Các điểm M, N, P lần lượt di động trên các đoạn AA', BB', CC' sao cho $AM \ge BN \ge CP$ và tỉ số diện tích xung quanh của lăng trụ cụt A'B'C'.MNP và ABC.MNP bằng 2021. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số*

$$\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}}.$$



Lời giải. Để cho gọn ta đặt $AM = x$, $BN = y$, $CP = z$; $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và $AA' = l$ với $0 < a \le b \le c$, $l \ge x \ge y \ge z \ge 0$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích xung quanh của hai lăng trụ $ABC.MNP$, $A'B'C'.MNP$. Ta có:

$S = \frac{x+y}{2}c + \frac{y+z}{2}a + \frac{z+x}{2}b$ và $S' + S = (a+b+c)l$.

Theo giả thiết thì $\frac{S'}{S} = 2021$ nên $S' + S = 2022S$

$\Leftrightarrow (a+b+c)l = 2022\left(\frac{x+y}{2}c + \frac{y+z}{2}a + \frac{z+x}{2}b\right)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)l = 1011\left[(x+y)c + (y+z)a + (z+x)b\right]$

Theo Mệnh đề 5, ta có: $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}}$

$= \frac{\frac{1}{3}(l-x+l-y+l-z)S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{3}(x+y+z)S_{\Delta ABC}} = \frac{3l}{x+y+z} - 1.$

Ta có: $\frac{3l}{x+y+z} = \frac{3033\left[(x+y)c+(y+z)a+(z+x)b\right]}{(x+y+z)(a+b+c)}$

$= \frac{3033\left[(x+y+z)(b+c)-(b-a)y-(c-a)z\right]}{(x+y+z)(a+b+c)}$

$\le \frac{3033(x+y+z)(b+c)}{(x+y+z)(a+b+c)} = \frac{3033(b+c)}{a+b+c}$

$\Rightarrow \frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}} \le \frac{3033(b+c)}{a+b+c} - 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{(a+b+c)l}{1011(b+c)}$, $y=z=0$.

$$\max\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{ABC.MNP}}=\frac{3033(b+c)}{a+b+c}-1.$$

Thí dụ 10 ***(Trường hợp đặc biệt của bài toán IMO 1964).*** *Cho tứ diện ABCD, D_0 là trọng tâm tam giác ABC, các đường thẳng song song với DD_0 và lần lượt qua A, B, C tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (CDA), (ABD) tại A_0, B_0, C_0.*

Chứng minh rằng $V_{D.ABC}=\dfrac{1}{3}V_{D_0.A_0B_0C_0}$.

Lời giải. Gọi $M=AD_0\cap BC$, $N=BD_0\cap AC$, $P=CD_0\cap AB$ và d_1,d_2,d_3 là các đường thẳng song song với DD_0 và lần lượt qua A, B, C. Khi đó $A_0=d_1\cap MD$, $B_0=d_2\cap ND$, $C_0=d_3\cap PD$.

Ta có:

$$\frac{V_{D.MNP}}{V_{D.A_0B_0C_0}}=\frac{DM}{DA_0}.\frac{DN}{DB_0}.\frac{DP}{DC_0}=\frac{D_0M}{D_0A}.\frac{D_0N}{D_0B}.\frac{D_0P}{D_0C}=\frac{1}{8}$$

(vì D_0 là trọng tâm tam giác ABC).

Mà $V_{DMNP}=\dfrac{1}{4}V_{D.ABC}$, do đó $V_{D.A_0B_0C_0}=2.V_{D.ABC}$.

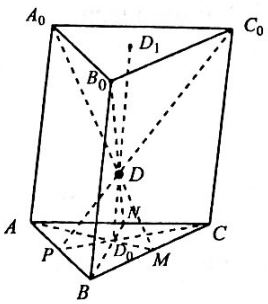
Mặt khác,

$$\frac{DD_0}{AA_0}=\frac{MD_0}{MA}=\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow AA_0=3DD_0$.

Tương tự:

$BB_0=CC_0=3DD_0$.



Do đó $ABC.A_0B_0C_0$ là một lăng trụ tam giác $\Rightarrow (ABC)//(A_0B_0C_0)$.

Gọi $D_1=DD_0\cap(A_0B_0C_0)$, khi đó $D_0D_1=AA_0$ và $D_0D_1//AA_0$ $\Rightarrow\dfrac{d(D_0,(A_0B_0C_0))}{d(D,(A_0B_0C_0))}=\dfrac{D_0D_1}{DD_1}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow V_{D_0.A_0B_0C_0}=\dfrac{3}{2}.V_{D.A_0B_0C_0}=\dfrac{3}{2}.2V_{D.ABC}=3.V_{D.ABC}$.

Vậy $V_{D.ABC}=\dfrac{1}{3}V_{D_0.A_0B_0C_0}$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC=kSP$, với $k>1$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{k(k+1)}\le\dfrac{V_1}{V}\le\dfrac{k+1}{2k^2}$.

Bài 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích là V, G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1 thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{SA}{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}=3k$, với k không đổi và $k>1$. Gọi G_1 là giao điểm của SG với (P); V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $SA_1B_1G_1$, $SB_1C_1G_1$, $SC_1A_1G_1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{V_1}}+\sqrt[3]{\frac{1}{V_2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{V_3}}\le 3k\sqrt[3]{\frac{3}{V}}.$$

Bài 3. Cho tứ diện *ABCD*. Hai điểm *M*, *N* lần lượt di động trên hai đoạn thẳng *BC* và *BD* sao cho $2\dfrac{BC}{BM}+3\dfrac{BD}{BN}=10$. Chứng minh rằng

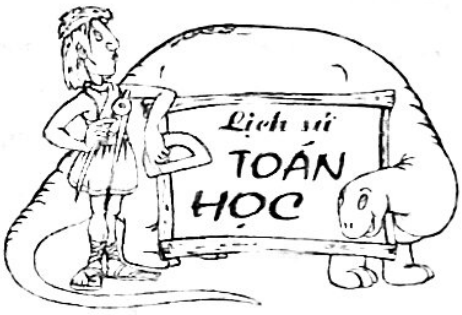
$$\frac{6}{25}\le\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}\le\frac{3}{8}.$$

Bài 4. Cho tứ diện đều *ABCD* có cạnh bằng 1. Hai điểm *M*, *N* lần lượt di động trên hai cạnh *AB*, *AC* sao cho (*DMN*) ⊥ (*ABC*). Hãy tính giá trị *T* là tích giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của thể tích khối đa diện *ADMN*.

Bài 5. Cho khối tứ diện $SABC$ có thể tích V. Một mặt phẳng (P) bất kỳ đi qua trọng tâm G của tứ diện $SABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{SA}{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}=4$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.A_1B_1C_1$.



TỪ SỐ TỰ NHIÊN ĐẾN SỐ SIÊU VIỆT, LOÀI NGƯỜI ĐÃ TRẢI QUA MỘT CHẶNG ĐƯỜNG LỊCH SỬ DÀI HÀNG NGHÌN NĂM

LÊ QUỐC HÁN

(Viện SP Tự Nhiên, Đại học Vinh)

Từ lúc xuất hiện trên trái đất, loài người đã biết khái niệm số tự nhiên do nhu cầu đếm hoa quả hái được, các thú vật săn bắt được. Của cải ngày càng nhiều, việc phân chia chiến lợi phẩm ngày càng phức tạp, từ đó loài người phải biết đến khái niệm số hữu tỷ, nghĩa là loại số có thể biểu diễn dưới dạng thương của hai số tự nhiên. Khi việc buôn bán thông thương phát triển, vấn đề lời lãi đặt ra, và khái niệm số âm xuất hiện. Nhưng phải đến cách nay vài nghìn năm, do những cố gắng không mệt mỏi của Pythagore và các môn đệ ông, loài người mới thừa nhận sự tồn tại của số vô tỷ, mà thí dụ đơn giản nhất là $\sqrt{2}$ - số đo của đường chéo của hình vuông cạnh bằng đơn vị. Bài viết này cung cấp cho bạn đọc bức tranh về khái niệm và sự phát sinh và phát triển của lịch sử loài người từ số vô tỷ đến số siêu việt.

1. Số vô tỷ. Trong sách giáo khoa *Toán 7* hiện hành ghi rõ: Mọi số hữu tỉ đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn, nghĩa là biểu diễn được dưới dạng thương của hai số nguyên với số chia khác không. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn đều biểu diễn một số hữu tỉ. Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Sách giáo khoa cũng trình bày cách chứng minh kết quả: *Không có số hữu tỉ nào bình phương bằng* 2. Nói cách khác, $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ, khi đó tồn tại hai số nguyên dương p, q sao cho $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ với p, q nguyên tố cùng nhau. Thế thì $p^2 = 2q^2$ nên p^2 chia hết cho 2. Vì 2 là số nguyên tố nên p chia hết cho 2. Do đó tồn tại số nguyên dương r sao cho $p = 2r$. Thay vào đẳng thức $p^2 = 2q^2$ ta có $4r^2 = 2q^2$ nên $q^2 = 2r^2$, do đó q chia hết cho 2. Nghĩa là p, q đều chia hết cho 2: mâu thuẫn với p, q nguyên tố cùng nhau.

Chúng ta có một số kết quả về số hữu tỉ và số vô tỉ như sau:

"Cho a là một số vô tỉ, b là một số hữu tỉ. Thế thì:

i) $a + b$, $a - b$ là các số vô tỉ.

ii) Nếu $b \neq 0$ thì ab, $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là các số vô tỉ".

Bây giờ, nếu có ai hỏi bạn $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ hay số vô tỉ thì bạn có thể trả lời được ngay đó là số vô tỉ. Nhưng để chứng minh khẳng định trên thì không phải đơn giản. Xin nêu hai kết quả sau để giải bài toán trên.

Kết quả 1. *Nếu r là một nghiệm hữu tỉ của phương trình với hệ số nguyên*

$x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (1) (*với* $n \in \mathbb{N}^*$) thì r phải là một số nguyên.

Chứng minh. Vì r là một số hữu tỉ nên $r = \frac{p}{q}$, với $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ và $(p; q) = 1$. Thay vào (1) ta được:

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$$\Leftrightarrow p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}).$$

Do đó $p^n \vdots q$. Mà $(p; q) = 1$ nên $q = 1$.

Vậy $r = p$ hay r là một số nguyên.

Kết quả 2. *Nếu r là một nghiệm nguyên của phương trình (1) thì r là ước số của a_0.*

Chứng minh. Vì r là nghiệm của (1) nên

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1r + a_0 = 0$$

$\Leftrightarrow a_0 = -r(r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \ldots + a_2 r + a_1)$.

Suy ra $a_0 \vdots r$.

Nhận xét. Áp dụng các kết quả trên, ta có thể chứng minh $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{2}, \ldots$ là các số vô tỉ. Chẳng hạn vì $\sqrt{2}$ là nghiệm phương trình $x^2 - 2 = 0$, nhưng vì phương trình này không có các nghiệm nguyên là ước số của 2 nên $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Cách giải này ngắn hơn cách giải trên nhiều. Tương tự, ta chứng minh được $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ như sau: Ta có:

$$r - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \left(r - \sqrt{2}\right)^3 = 3$$

$$\Leftrightarrow r^3 - 3\sqrt{2}r^2 + 6r - 2\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(3r^2 + 2\right) = r^3 + 6r - 3$$

$$\Rightarrow 2(3r^2 + 2)^2 = (r^3 + 6r - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow r^6 - 6r^4 - 6r^3 + 12r^2 - 36r + 1 = 0,$$

nghĩa là r là nghiệm của phương trình

$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$.

Giả sử r là một số hữu tỉ. Theo kết quả 1 thì r là một số nguyên. Theo kết quả 2 thì r là một ước số của 1. Nhưng phương trình trên không có các nghiệm là ± 1: vô lí. Vậy r là một số vô tỉ.

Nhận xét. Ta thấy rằng các số vô tỉ $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{2}, \ldots$ có chung một tính chất đặc trưng: là nghiệm của một phương trình có dạng $f(x) = 0$, với $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Người ta gọi những phương trình có dạng như trên là *phương trình đại số*. Các nhà toán học *Niels Henrik Abel*, người Na Uy và *Evariste Galois*, người Pháp đã chứng minh được rằng không có phương pháp đại số tổng quát nào để giải phương trình đại số có bậc lớn hơn bốn.

N. H. Abel (1802-1829)

Người ta gọi những số hữu tỉ và số vô tỉ là nghiệm của phương trình đại số nào đó là *số đại số*, các số còn lại gọi là *số siêu việt*. Số hữu tỉ luôn là số đại số. Nếu một số đại số là nghiệm của một phương trình đại số bậc n $(n \in \mathbb{N}^*)$ mà không thoả mãn bất cứ một phương trình đại số có bậc nhỏ hơn n thì ta gọi số đó là *số đại số bậc n*. Chẳng hạn, $\sqrt{2}$ là số đại số bậc 2, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là số đại số bậc 6. Số đại số bậc 1 là số hữu tỉ. Người ta đã chứng minh được rằng tổng, hiệu, tích, thương (nếu tồn tại) của hai số đại số là một số đại số. Hơn nữa, mọi nghiệm của một đa thức với hệ số là các số đại số cũng là số đại số. Tất cả các số có được bằng hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, khai căn bậc n $(n \in \mathbb{N}^*)$ của các số nguyên dương đều là số đại số. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng: Có những số đại số không thể tính được theo cách này.

Nhân đây, chúng tôi xin được nói thêm về *Lý thuyết Galois*. Từ lâu, loài người đã tìm cách giải và tìm công thức nghiệm của tất cả các đa thức với bậc bất kỳ. Bắt đầu từ *Viète* với công thức nghiệm của phương trình bậc hai (SGK *Đại số 9*). Tiếp đó là *Cardano* với công thức nghiệm của phương trình bậc ba. Sau đó, người ta đã giải được các phương trình bậc bốn tổng quát bằng cách đặt ẩn phụ rồi giải một phương trình bậc ba trung gian (theo công thức Cardano). Tiếp sau đó là *Abel* và *Galois* đã chứng minh được rằng không có phương pháp đại số tổng quát nào để giải phương trình đại số có bậc lớn hơn bốn. Trước đó, các nhà toán học đã chứng minh được rằng nếu bằng phương pháp đại số có thể giải được một phương trình đại số nào đó có bậc lớn hơn bốn thì nghiệm của phương trình này (là số đại số) có thể dựng được bằng thước kẻ và compa. Trải qua nhiều thế kỷ, họ đã bế tắc ở bài toán tổng quát nhất: *Có tiêu chuẩn nào để khẳng định một phương trình đại số*

E. Galois (1811-1832)

có thể giải được hay không? Chỉ bằng một công trình dày chưa đến 200 trang của Galois (mà sau này được gọi là *Lí thuyết Galois*) bài toán trên đã được giải quyết trọn vẹn. Các nghiên cứu của *Abel* và *Galois* về nghiệm của nhiều đa thức có bậc khác nhau đã đặt nền móng cho các phát triển sâu hơn về lí thuyết nhóm và các lĩnh vực liên quan của đại số trừu tượng sau này. Lần đầu tiên, *các giới hạn của toán học đã được khám phá*. Kết quả này giúp các nhà toán học thế kỷ XIX áp dụng để chứng minh hai bài toán Hy Lạp cổ đại nổi tiếng mà các nhà toán học trước đó đã tốn công vô ích mà không giải được. Đó là bài toán chia ba một góc và bài toán cầu phương hình tròn (*không thể chỉ dùng thước kẻ và compa: chia ba một góc hoặc dựng chiều dài một hình lập phương có thể tích gấp đôi một hình lập phương cho trước, hay dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn cho trước*).

Ta tiếp tục nói về số siêu việt. Năm 1851, nhà toán học người Pháp *Joseph Liouville* (1809-1882) đã chứng minh sự tồn tại của số siêu việt. Tuy nhiên, chúng ta mới chỉ biết một số rất ít các số siêu việt và việc chứng minh một số là số siêu việt là bài toán khó.

F. Lindenmann (1852-1939)

Năm 1874, nhà toán học Đức *Geogr Cantor* (1845-1918) đã chứng minh được rằng hầu hết các số đều là số siêu việt. Nghĩa là, về mặt hình thức, số lượng các số siêu việt nhiều hơn các số đại số. Năm 1882, nhà toán học người Đức *Ferdinand von Lindenmann* đã chứng minh được rằng π là số siêu việt. Từ kết quả này, ta có thể chứng minh $\frac{\pi}{2}, \pi+1, \sqrt{\pi}, \ldots$ là các số siêu việt. Ngày nay người ta đã tìm được nhiều số siêu việt khác không liên quan đến số π. Chẳng hạn, năm 1934, hai nhà toán học đã độc lập chứng minh được kết quả (mà sau này được mang tên hai ông *Định lý Gelfond-Schneider*): Các số có dạng a^b, *trong đó a là một số* đại số khác 0 và 1, *b là một số vô tỉ, đều là số siêu việt*. Định lí này cho ta một lớp các số siêu việt.

2. Mối lương duyên giữa số π và các tổng vô hạn

a. Cách tính một số tổng hữu hạn

Tương truyền, nhà toán học vĩ đại Đức *C.F. Gauss* (1777-1855) - người được mệnh danh là "*Ông Vua số học*" - đã biết cách tính nhanh tổng các số tự nhiên từ 1 đến 100 từ lúc ông vừa 5 tuổi. Ý tưởng của ông trong việc tính tổng đó có thể diễn tả về mặt toán học như sau: từ

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$ và

$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$ ta có

$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (100 + 1)$

$= 101 \times 100$, nên $S = 101 \times 50 = 5050$.

Bằng phương pháp đó, ta tính được tổng của n số nguyên dương đầu tiên.

$$S_n(k) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Ngày nay, một học sinh THCS khá toán có thể dùng phương pháp quy nạp toán học để tính được các tổng dạng:

$$S_n(k^2) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$S_n(k^3) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = [S_n(k)]^2 \quad (3)$$

Các tổng này còn có thể tính được bằng cách sử dụng khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n$ kết hợp với công thức tính các tổng với số mũ nhỏ hơn. Chẳng hạn, để tính tổng $S_n(k^3) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ ta dựa vào khai triển nhị thức:

$$(1 + k)^4 = 1 + 4k + 6k^2 + 4k^3 + k^4.$$

Cho $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ta nhận được:

$$1^4 = 1,\ 2^4 = 1 + 4.1 + 6.1^2 + 4.1^3 + 1^4,$$
$$3^4 = 1 + 4.2 + 6.2^2 + 4.2^3 + 2^4, \ldots,$$
$$(1 + n)^4 = 1 + 4.n + 6.n^2 + 4.n^3 + n^4.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta nhận được

$$(1 + n)^4 = 1 + n + 4.S_n(k) + 6.S_n(k^2) + 4S_n(k^3).$$

Thay các kết quả (1) và (2) vào đẳng thức trên, ta có:

$$(1+n)^4 = n+1+2n(n+1)+n(n+1)(2n+1)+4S_n(k^3).$$

Từ đó $S_n\left(k^3\right)=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, nghĩa là có (3).

Ta hãy xét các tổng tương tự, chẳng hạn:

$$S_n\left(\frac{1}{k}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

$$S_n\left(\frac{1}{k^2}\right)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Việc tìm công thức tổng quát cho các tổng này, như sau đây ta sẽ thấy là không thể. Mặc dù một số tổng nhìn có vẻ phức tạp hơn lại có thể tìm được công thức tổng quát cho chúng. Ví dụ tổng $P_1=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ có thể tính dễ dàng dựa vào nhận xét $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

Từ đó $P_1=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Đối với tổng

$$P_2=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

cách tính có phức tạp hơn chút ít. Dựa vào nhận xét $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}\right]$, ta nhận được: $P_2=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right]$ hay

$$P_2=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

b. Mối liên quan giữa số π và các tổng vô hạn

Vào những năm giữa thế kỷ XVII, cùng với sự ra đời của phép tính vi tích phân, các nhà toán học đã nghĩ đến việc tính một số tổng với vô hạn các số hạng. Họ dự đoán rằng mặc dù không tìm ra được công thức (đại số) cho các tổng dạng

$$S_n\left(\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

$$S_n\left(\frac{1}{k^2}\right)=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Tuy nhiên khi cho n "lớn vô cùng tận", các tổng ấy sẽ xấp xỉ một số thực nào đó. Số này có thể không phải là số hữu tỉ, thậm chí cũng không phải là "số vô tỷ thông thường", và họ nghĩ ngay đến "số vô tỉ đặc biệt", đó là số π. Người đầu tiên nhận được một kết quả như vậy là nhà toán học người Scotland, *J. Gregory* (1638-1675). Bằng một phương pháp đặc biệt, ông đã tìm thấy một kết quả khá bất ngờ:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}\quad(!).$$

Muộn hơn một chút, nhà toán học thiên tài Thuỵ Sĩ *Leonhad Euler* đã tìm ra một kết quả bất ngờ khác:

$$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

L. Euler (1707-1783)

Để nhận được kết quả này, *Euler* đã có một sự tương tự táo bạo. Dựa vào định lý Viète phát biểu về mối liên hệ giữa các nghiệm của một phương trình đại số bậc n: "*Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của phương trình*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_0=0 \text{ (với } a_0\neq 0)$$

thì: $$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}$$

.....

$$x_1x_2\ldots x_n=\frac{a_n}{a_0}\text{"}.$$

Euler đã áp dụng kết quả này cho một phương trình "kiểu đại số bậc vô hạn" và nhận được kết quả trên. Về sau, chính *Euler* cũng không tin lắm vào các lập luận mà ông đã sử dụng. Và cùng với sự phát triển của môn *Giải tích toán học* trong thời gian sau đó, *Euler* đã chứng minh được kết quả trên một cách chặt chẽ vào những năm cuối đời mình. Ngoài ra, ông còn nhận được một số kết quả khác, chẳng hạn: $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1.2}{3.5}+\dfrac{1.2.3}{3.5.7}+\ldots=\dfrac{\pi}{2}$.

Ngoài *Geory* và *Euler*, nhiều nhà toán học khác như *J. Bernoulli I* (1655-1705), *G.W. Leibniz* (1646-1716)... cũng nhận được các kết quả liên quan giữa số π và các tổng vô hạn khác rất thú vị. Đặc biệt, nhà toán học Anh *J. Wallis* (1616-1703) đã nhận được kết quả sau đây từ rất sớm:

$$\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10...}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11...}=\frac{\pi}{4}.$$

3. Số siêu việt *e* và các bất đẳng thức cổ điển

a. Các bất đẳng thức cổ điển

• ***Bất đẳng thức Cauchy*** (mang tên nhà toán học Pháp *Agustin Louis Cauchy*):

$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ với $a_i \geq 0$, $i = 1, 2,..., n$ thật ra đã được biết từ thời thượng cổ. Trong các kim tự tháp ở Ai Cập (năm 2900-1167 trước công nguyên) người ta đã tìm thấy các hình vẽ được khắc trên đá liên quan đến bất đẳng thức với $n = 2$. Tuy nhiên, *A.L. Cauchy* được xem là người chứng minh bất đẳng thức đó trong trường hợp tổng quát một cách chặt chẽ và đã sử dụng nó một cách có hiệu quả trong các công trình nghiên cứu toán học của mình. Ngày nay đã có hàng chục cách chứng minh bất đẳng thức Cauchy, dựa trên các phương pháp chính: như biến đổi đồng nhất, quy nạp toán học, sử dụng tính chất hàm lồi, phản chứng,...

A.L. Cauchy (1789-1857)

• Sau bất đẳng thức Cauchy, ***bất đẳng thức Cauchy - Schwarz***:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$$

cũng có nhiều ứng dụng trong toán học. Để chứng minh bất đẳng thức này, có thể dùng *đồng nhất thức Cauchy - Lag* nổi tiếng:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2.\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2+\sum_{i>j}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$$

hoặc sử dụng nhận xét:

Nếu tam thức $f(t) = At^2 + 2Bt + C$ $(A \neq 0)$ không âm với mọi t thì $\Delta' \leq 0$ hay $B^2 \leq AC$, trong đó

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \text{ vμ } C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* còn được gọi là ***bất đẳng thức Bunyakovsky***.

• ***Bất đẳng thức Bernoulli***, mang tên nhà toán học Thụy sĩ *Jacob Bernoulli I*: "*Nếu $a > -1$ và n là một số nguyên dương thì* $(1 + a)^n \geq 1 + na$" tuy đơn giản nhưng có nhiều ứng dụng trong toán học. Để chứng minh bất đẳng thức này, có thể dùng phương pháp quy nạp theo n hoặc sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton $(a + b)^n$.

• ***Bất đẳng thức Holder***, mang tên nhà toán học Đức Holder (1859-1937):

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó p và q là hai số dương thoả mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Bất đẳng thức Bunyacovsky là trường hợp riêng của bất đẳng thức Holder khi $p = q = 2$.

• ***Bất đẳng thức Minkowski***, mang tên nhà toán học Đức *H. Minkowski* (1864-1909):

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

trong đó a_i, b_i là những số dương và $p \geq 1$.

• ***Bất đẳng thức Chebychev***, mang tên nhà toán học Nga *P.L.Chebychev* (1821-1894):

Nếu $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ *hoặc* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ *thì*

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\times\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}\geq\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n}.$$

b. Số *e* và phép tính lôgarit

Vào giữa thế kỷ XVII, các nhà toán học quan tâm đến dãy số $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ với n là số nguyên dương. Dùng bất đẳng thức Bernoulli, thấy ngay $u_n > 2$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, có thể chứng minh được $u_n < 3$. Như vậy $2 < u_n < 3$. Hơn nữa, $u_{n+1} > u_n$. Như vậy, khi n "lớn vô cùng tận", u_n sẽ tiến gần tới một số nào đó. Số này không phải là số hữu tỉ hay "số vô tỉ quen thuộc" (các số chứa căn thức), mà là một số "vô tỉ không quen thuộc": số vô tỉ siêu việt (!). Các nhà toán học gọi số đó là số e và nói rằng dãy u_n hội tụ về e. Điều bất ngờ nhất là họ đã chứng minh được rằng

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \text{ trong đó } n! = 1.2\ldots n.$$

Các bạn đã biết phép trừ là phép toán ngược của phép cộng, phép chia là phép toán ngược của phép nhân. Một câu hỏi đặt ra hết sức tự nhiên: Vậy phép toán ngược của phép nâng lên luỹ thừa là phép toán nào? Ngoài phép khai căn còn có phép toán lấy lôgarit.

Cho a là một số dương khác 1, b là một số dương và n là số thoả mãn $a^n = b$. Khi đó phép toán tìm n khi biết a và b được gọi là *phép toán lấy lôgarit* (cơ số a của b), ký hiệu $n = \log_a b$. Hai trường hợp được các nhà toán học quan tâm là khi $a = 10$ thì ta nói rằng n là *lôgarit thập phân* của b và viết $n = \lg b$, còn khi $a = e$ thì ta nói n là *lôgarit tự nhiên* hay *lôgarit Neper* của b và viết $n = \ln b$. Cách gọi thứ hai này để tưởng nhớ nhà toán học Anh *J. Neper* (1550-1617), người đã phát minh ra phép toán lôgarit. Thật đáng ngạc nhiên khi các nhà toán học đầu tiên tìm thấy kết quả

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots = \ln 2. \quad (!)$$

Các số siêu việt π và e được liên hệ với nhau bởi hệ thức $e^{i\pi} = -1$ (*Công thức Euler*), trong đó $i^2 = -1$. Hệ thức này nhận được từ *công thức Moiver*, mang tên nhà toán học Pháp *Abraham de Moiver* (1667-1754):

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ hay $(e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$.

Để kết thúc, mời các bạn giải các bài toán sau.

BÀI TẬP

1. a) Chứng minh rằng $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ là một số vô tỉ.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{\pi}$ là một số siêu việt.

2. Giả sử $f(x)$ là một đa thức đại số thoả mãn $f(0)$ và $f(1)$ là những số lẻ. Chứng minh rằng nghiệm phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

3. Tính các tổng

a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$;

b) $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

c) $1.2.3.4.5+2.3.4.5.6+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

4. Chứng minh $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5$ chia hết cho $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Tổng quát hoá.

5. Giả sử $S_n = 1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}$ trong đó k là số tự nhiên, $k \geq 2$. Chứng minh

a) $1 < S_n < 2$ với mọi n là số nguyên dương;

b) $S_m > S_n$ nếu $m > n$.

6. Chứng minh các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky, Bernoulli.

7. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương. Chứng minh

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

$$\leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

8. Giả sử $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ trong đó n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $2 < u_n < 3$;

b) $u_{n+1} > u_n$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/525 (Lớp 6). Tìm bốn số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn $a > 3b > 6c > 12d$ và

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/525 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} = 20^0$). Gọi D, E là hai điểm thuộc AC sao cho D nằm giữa A và E, $AD = CE = BC$. Tính số đo góc $\widehat{DBE}$.

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Xã Thanh Yên, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên)

Bài T3/525. Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ trong đó a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên m để $f(m) = f(2021).f(2022)$.

BÙI DUY CHUẨN
(GV THCS Lai Vu, Kim Thành, Hải Dương)

Bài T4/525. Cho M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Dựng hình bình hành $BMCD$. Chứng minh rằng đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ và đường phân giác của góc $\widehat{MCD}$ vuông góc với nhau.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/525. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 2 \\ \dfrac{1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{y^2 - y + 1} + \dfrac{1}{z^2 - z + 1} = 1 \end{cases}.$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/525. Cho các số thực x, y, z lớn hơn 1 thỏa mãn: $x + y + z + 2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T7/525. Tìm tất cả các tam giác ABC có độ dài các cạnh là các số nguyên dương thỏa mãn độ dài cạnh AC bằng độ dài phân giác trong góc A.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T8/525. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Qua điểm C nằm trên tia đối của tia BA dựng các tiếp tuyến CD, CE của (O). Đoạn thẳng DE cắt (O') tại F. Tiếp tuyến của (O') tại F cắt CD, CE lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tứ giác $ABMN$ nội tiếp.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/525. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$\frac{1}{1}C_{8n-1}^{1} - \frac{1}{2}C_{8n-1}^{3} + \frac{1}{3}C_{8n-1}^{5} - \ldots - \frac{1}{2n-1}C_{8n-1}^{4n-5} + \frac{1}{2n-1}C_{8n-1}^{4n-3} \leq \frac{(8n-1)!}{((4n)!)^2} - \frac{7}{4}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/525. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ \log_2 a_{n+2} = \log_3(a_n + 1), \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn ấy.

ĐẶNG XUÂN SƠN
(Lớp 1 ĐHT, khoa TT, ĐHSP Hải Phòng)

Bài T11/525. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y^4) = f(x) + yf(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

TRẦN VŨ HOÀNG ĐẢO
(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

Bài T12/525. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm E thuộc AB. Điểm F thay đổi trên CD. Các điểm M, N theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên EF. P là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với AD và đường thẳng qua N vuông góc với BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chạy trên một đường tròn cố định.

NGUYỄN MINH HÀ, LƯU CÔNG ĐÔNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà nội)

Bài L1/525. Sóng dọc truyền trong một môi trường với bước sóng $\lambda = 15$ cm và biên độ không đổi $A = 5\sqrt{3}$ cm. Gọi M và N là hai điểm cùng nằm trên một phương truyền sóng mà khi chưa có sóng truyền đến lần lượt cách nguồn những khoảng 20 cm và 30 cm. Xác định khoảng cách gần nhất và xa nhất giữa hai phần tử môi trường tại M và N khi có sóng truyền qua.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/525. Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn cảm thuần và tụ điện mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp $u = U\sqrt{2}\cos(wt)$ (V). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại bằng P_m. Khi $R = R_1$ hoặc $R = R_2$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB bằng nhau bằng 120 W và có hệ số công suất tương ứng là $k_1 = 0,6$ và $k_2 = 0,8$. Xác định giá trị của P_m.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/525 (For 6th grade). Find prime numbers a, b, c, d so that $a > 3b > 6c > 12d$ and

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749.$$

Problem T2/525 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A ($\widehat{A} = 20^0$). Let D, E be the points on AC so that D is in between A and E, and $AD = CE = BC$. Find the measurement of the angle $\widehat{DBE}$.

Problem T3/525. Given a polynomial $f(x) = x^2 + ax + b$ where a, b are integers. Prove that there always exist integers m so that $f(m) = f(2021).f(2022)$.

Problem T4/525. Let M be a point lying inside the triangle ABC so that $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Draw the parallelogram $BMCD$. Show that the angle bisector of $\widehat{BAC}$ and the angle bisector of $\widehat{MCD}$ are perpendicular to each other.

Problem T5/525. Solve the system of equations

$$\begin{cases} xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 2 \\ \dfrac{1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{1}{y^2 - y + 1} + \dfrac{1}{z^2 - z + 1} = 1 \end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/525. Given numbers x, y, z which are greater than 1 and satisfy $x + y + z + 2 = xyz$. Prove that $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{z^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}$. When does the equality happen?

Problem T7/525. Find all triangles ABC whose lengths of the sides are positive integers and the length of AC is equal to the length of the internal angle bisector of the angle A.

Problem T8/525. Two circles (O) and (O') intersect at two points A and B. Through a point C lying on the opposite ray of the ray BA draw the tangents CD and CE with (O). The line segment DE intersects (O') at F. The tangent of (O') at F intersects CD and CE respectively at M and N. Show that $ABMN$ is a cyclic quadrilateral.

PROBLEMS IN ...

Problem T9/525. Show that, for every positive integer n, we have

$$\frac{1}{1}C_{8n-1}^{1}-\frac{1}{2}C_{8n-1}^{3}+\frac{1}{3}C_{8n-1}^{5}-\ldots-\frac{1}{2n-1}C_{8n-1}^{4n-5}+\frac{1}{2n-1}C_{8n-1}^{4n-3}\le\frac{(8n-1)!}{((4n)!)^2}-\frac{7}{4}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/525. The sequence (a_n) is determined as follows

$$\begin{cases}a_1=1,\ a_2=3\\ \log_2 a_{n+2}=\log_3(a_n+1),\ \forall n=1,2,\ldots\end{cases}.$$

Show that the sequence (a_n) converges and find its limit.

Problem T11/525. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ so that $f(x+y^4)=f(x)+yf(y^3),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Problem T12/525. Given a quadrilateral $ABCD$ and a point E is on AB. A point F varies on CD. The points M and N respectively are the perpendicular projections of C and D on EF. Assume that P is the intersection between the line passing through M and perpendicular to AD and the line passing through N and perpendicular to BC. Show that the incenter of the triangle MNP belongs to a fixed circle.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

TỪ MỘT BÀI TOÁN ... (*Tiếp theo trang 3*)

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Cho các số thực x,y thỏa mãn $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=2$. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $F=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$;

b) $G=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy$.

Bài 2. Cho các số thực x,y thỏa mãn $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+4}+y\right)=4$. Tính giá trị của biểu thức $F=x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}$.

Bài 3. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+4}-y\sqrt{x^2+1}=4$. Tính giá trị của biểu thức $F=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$.

Bài 4. Cho các số thực x,y thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+x+y=2\sqrt{2}-2.$$

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

$$P=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+xy.$$

Bài 5. Cho các số thực x,y thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+4}-\sqrt{y^2+1}=x+y.$$

a) Tính giá trị của biểu thức

$$F=y\sqrt{x^2+4}+x\sqrt{y^2+1}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $G=x+2y$

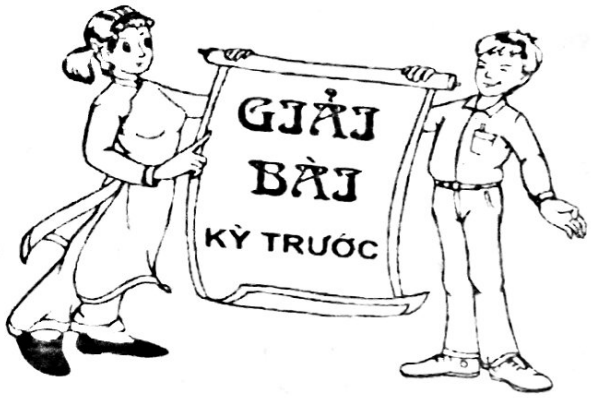
Bài 6. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+2}+y\sqrt{x^2+2}=4\sqrt{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $E=x^2+y^2$.

b) $F=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+2}+x+y$.

c) $P=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+2}-x-y$.

d) $Q=x+y$.



Bài T1/521. *Xét 100 số nguyên dương 1; 2; 3; ...; 100. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho với mỗi cách lấy n số phân biệt từ 100 số trên đều tồn tại hai số a, b sao cho a + b là một số nguyên tố.*

Lời giải. • *Nhận xét* 1: Nếu lấy $n = 50$ thì tồn tại tập hợp T gồm 50 số phân biệt mà tổng hai số bất kì trong chúng đều là số chẵn lớn hơn 2, nên tổng này là hợp số.

Thực vậy, khi chọn tập T là tập hợp gồm 50 số chẵn từ 2 đến 100, hoặc chọn T là tập hợp gồm 50 số lẻ từ 1 đến 99 thì tập T đó đều thỏa mãn nhận xét trên. Vì vậy cần xét $n > 50$.

• *Nhận xét* 2: Số $n = 51$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Để chứng minh *Nhận xét* 2 ta phân chia 100 số nguyên dương 1; 2; 3;...; 100 thành 50 cặp số như sau (1; 100), (2; 99), (3; 98), ..., (49; 52), (50; 51). Tổng của hai số trong mỗi cặp số đều bằng 101, mà 101 là số nguyên tố. Giả sử chọn 51 số tùy ý trong các số từ 1 đến 100 là $a_1, a_2, a_3, ..., a_{49}, a_{50}, a_{51}$. Gọi tập đã chọn là tập A và gọi tập 49 số còn lại là tập B. Xét số a_1, nếu trong 50 số còn lại của tập A có số a_k mà $a_1 + a_k = 101$ thì cách chọn này thỏa mãn yêu cầu của bài toán; nếu không xảy ra điều đó thì số $b_1 = 101 - a_1$ thuộc tập B. Ta xét như thế với số a_2 và chỉ cần xét trường hợp trong các số còn lại của tập A không có số a_m mà $a_2 + a_m = 101$, lúc đó thì số $b_2 = 101 - a_2$ thuộc tập B. Cứ xét tiếp tục như thế cho đến số a_{49}. Nếu trong các số còn lại của tập A không có số a_n mà $a_{49} + a_n = 101$ thì số $b_{49} = 101 - a_{49}$ thuộc tập B. Đến lúc này đã xét được 49 số thuộc tập A và 49 số thuộc tập B (chúng là 49 cặp số đã được phân chia như trên), do đó chỉ còn 2 số thuộc tập A, đó chính là a_{50}, a_{51} đồng thời là cặp số cuối cùng được phân chia như trên nên $a_{50} + a_{51} = 101$. Như vậy số $n = 51$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chú ý rằng có nhiều cách phân chia 100 số nguyên dương 1; 2; 3;...; 100 thành 50 cặp số thỏa mãn *Nhận xét* 2. Chẳng hạn, trong cách chọn 50 cặp số (1; 100), (2; 99), (3; 98), ..., (49; 52), (50; 51) ta thay ba cặp số (3; 98), (7; 94), (11; 90) bởi ba cặp số (3; 94), (7; 90), (11; 98) thì mỗi tổng 3 + 94 = 97 = 7 + 90, 11 + 98 = 109 đều là số nguyên tố.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Trần Anh Đức*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Nghệ An**: *Thái Minh Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/521. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x; y) sao cho x + y và xy + 1 đều là lũy thừa của p.*

Lời giải. (Của các bạn giải đúng) Đặt $x + y = p^n$ và $xy + 1 = p^m$. Ta có: $xy + 1 - (x + y) = p^m - p^n$. Do $xy + 1 - (x + y) = (x - 1)(y - 1) \geq 0$ vì $x, y \geq 1$, suy ra $m \geq n$ và do đó $(x - 1)(y - 1)$ chia hết cho p^n. Do $x - 1$ và $y - 1$ không đồng thời chia hết cho p, vì nếu ngược lại thì $(x + y) - [(x - 1) + (y - 1)] = 2$ chia hết cho số nguyên tố lẻ p là vô lý, cho nên từ $(x - 1)(y - 1) = p^n(p^{m-n} - 1)$ phải có $x - 1$ hoặc $y - 1$ chia hết cho p^n. Vì cả hai số này đều nhỏ hơn $x + y = p^n$, cho nên $x - 1 = 0$ hoặc $y - 1 = 0$, và các bộ số cần tìm là $x = 1, y = p^n - 1$ hoặc $x = p^n - 1, y = 1$. Thử lại, ta thấy hai bộ này thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Một số bạn đưa ra đáp số sai. Các bạn cần phải rút ra kinh nghiệm là luôn phải thử lại xem

nghiệm tìm thấy có thỏa mãn bài toán hay không. Các bạn sau đây có đáp số đúng.

Nghệ An: *Nguyễn Thái Hoàng Anh, Thái Minh Quân,* 7B, *Nguyễn Thái* 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội**: *Trần Anh Đức,* 6C2, THCS THPT Archimedes Đông Anh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/521. *Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^3(3y+1)+y^2(3x+1)$$
$$+(x+y)(x^2-xy+y^2+1)+2xy=343.$$

Lời giải. Ta có

$x^2(3y+1)+y^2(3x+1)+(x+y)(x^2-xy+y^2+1)+2xy$
$=3x^2y+x^2+3xy^2+y^2+x^3+y^3+x+y+2xy$
$=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(x^2+2xy+y^2)+(x+y)$
$=a^3+a^2+a$ (trong đó $a=x+y$).

Do đó phương trình của bài toán tương đương với

$$a^3+a^2+a=343.$$

Chú ý:

$$a^3+a^2+a=a(a^2+a+1)=a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right],$$

$$343=7^3.$$

Suy ra: a là số nguyên dương, $a<7\Rightarrow a\le 6$
$\Rightarrow a^3+a^2+a\le 6^3+6^2+6=216+36+6=258<343.$

Như vậy không tồn tại các số nguyên x, y thoả mãn phương trình của bài toán.

Nhận xét. Đây là bài toán số học giải bằng phương pháp dùng bất đẳng thức của các số nguyên. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

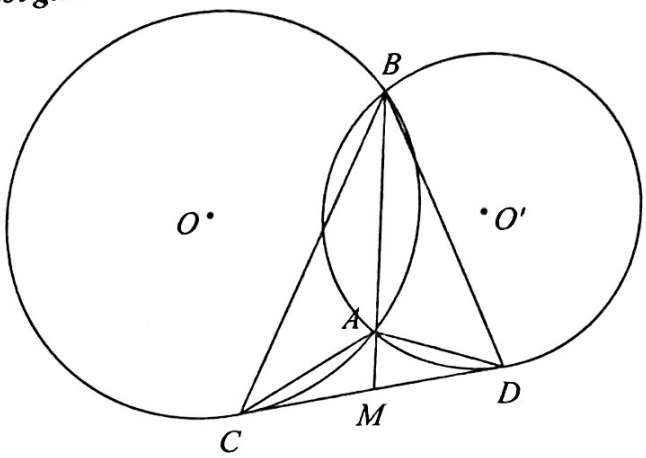
Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa,* 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Nguyễn Hằng Nga,* 8D, *Hoàng Đình Đức, Nguyễn Công Phú, Nguyễn Danh Tiến Nam,* 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/521. *Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại C và D. Chứng minh rằng*

$$\frac{AC}{AD}+\frac{BD}{BC}\ge 2.$$

Lời giải



Gọi M là giao điểm của AB và CD. Theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có:

$$\widehat{MCA}=\widehat{CBA},\ \widehat{MDA}=\widehat{DBA}.\text{ Suy ra:}$$

$$\Delta MCB\sim\Delta MAC\text{ (g.g)},\ \Delta MDB\sim\Delta MAD\text{ (g.g)}.$$

Suy ra: $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{MB}{MC}$, $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{MD}{MA}$,

từ đó: $MC^2=MA.MB$, $MD^2=MA.MB$. Suy ra M là trung điểm của CD (1).

Mặt khác, từ $\Delta MCB\sim\Delta MAC$ ta có:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{MC}{MA}\quad(2).$$

Từ $\Delta MDB\sim\Delta MAD$ ta có:

$$\frac{BD}{AD}=\frac{MD}{MA}\quad(3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}\Leftrightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{AC}{AD}+\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BD}+\frac{BD}{BC}\ge 2\sqrt{\frac{BC}{BD}.\frac{BD}{BC}}=2.$$

Vậy $\dfrac{AC}{AD}+\dfrac{BD}{BC}\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BC=BD\Leftrightarrow AB\perp CD\Leftrightarrow$ hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Công An, Nguyễn Công Phúc, Nguyễn Danh Tiến Nam, Hoàng Đình Đức, Hoàng Thế Hiếu*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/521. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 3x^2y - xy - y = 1 \\ -xy^2 - y + y^2 = 3 \end{cases}.$$

Lời giải. Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ.

Với $y \neq 0$, hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 1 = \dfrac{1}{y} \\ -x - \dfrac{1}{y} + 1 = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{y}$, ta được: $\begin{cases} 3x^2 - x - t - 1 = 0 & (1) \\ 3t^2 + x + t - 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của (1) cho (2), ta có:

$$3(x-t)(x+t) - 2(x+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+t)(3x - 3t - 2) = 0.$$

TH1: $x + t = 0 \Leftrightarrow x = -t$, thay vào (1):

$$3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; y = \mp\sqrt{3}.$$

TH2: $3x - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3t+2}{3}$, thay vào (2):

$$3t^2 + \frac{3t+2}{3} + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}.$$

Với $t = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}; y = \frac{3}{-1+\sqrt{2}} = 3\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Với $t = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{2}}{3}; y = \frac{3}{-1-\sqrt{2}} = 3\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x; y)$ là:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right), \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}; 3+3\sqrt{2}\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}; 3-3\sqrt{2}\right).$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn giải theo cách trên. Một số bạn giải bằng cách, từ hệ

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 1 = \dfrac{1}{y} \\ -x - \dfrac{1}{y} + 1 = \dfrac{3}{y^2} \end{cases}$$

thay $\dfrac{1}{y} = 3x^2 - x - 1$ vào phương trình thứ hai; được một phương trình bậc cao của x; phân tích thành tích; suy ra kết quả. Cách giải này không gọn. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, *Nguyễn Đức Hiền, Nguyễn Quang Minh*, 9A6, THCS và THPT Nguyễn Tất Thành, TP. Hà Nội; **Nghệ An:** *Kiều Đình Nam, Hoàng Đình Đức, Hoàng Thế Hiếu*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai TP. Vinh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Vinh Quang*, 9A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/521. *Cho các số thực dương* $x, y \in (0; 1)$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt[4]{12}\sqrt{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$P \le 2\sqrt{\frac{x+y}{2}} + 2\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức

$(a+b)^4 \le \left[2(a^2+b^2)\right]^2 \le 8(a^4+b^4)$ ta có:

$$P^4 \le 2^4 8\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2\right].$$

Lại có: $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ và

$$\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le (x^2+y^2)(2-x^2-y^2).$$

Suy ra:

$$P^4 \le 2^4 8\left[\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{3}{4}(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)\right]$$

$$= 2^4\left[4(x^2+y^2) + 6(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)\right].$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, $t \in (0;2)$. Ta có:

$$P^4 \le 2^4\left[4t + 6t(2-t)\right] = 2^4\left[-6t^2 + 16t\right]$$

$$= 2^4\left[-6\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{3}\right] \le 2^8.\frac{2}{3}.$$

Do đó: $P \le 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vậy $\max\limits_{x,y\in(0;1)} P = 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

Nhận xét. Đa số lời giải của các bạn là sử dụng các BĐT cổ điển để đánh giá (tương tự cách giải trên). Tuy nhiên cách đánh giá qua các hàm lượng giác (bằng cách đặt $x = \sin a$, $y = \sin b$) của một số bạn cũng là cách giải hay đối với bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; *Đào Quang Anh*, 8C2, THCS Archimedes Đông Anh; **Cao Bằng:** *Nguyễn Đức Tuấn Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Cao Bằng, **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, *Đỗ Nguyên Như Tâm*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Tây Ninh:** *Ngô Quốc Tài*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Tây Ninh; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/521. *Giải phương trình sau trên tập số thực* $(x+1)(x^2+1)(x^3+1) = 30x^3$.

Lời giải. *Cách 1.* Biến đổi PT đã cho thành

$$(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1) = 30x^3 \quad (1).$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của PT(1), nên chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được:

$$\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right).\left(x + \frac{1}{x}\right).\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = 30 \quad (2).$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ với $|t| \ge 2$, PT (2) trở thành:

$$(t+2)t(t-1) = 30 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 4t + 10) = 0 \quad (3).$$

Do $t^2 + 4t + 10 = (t+2)^2 + 6 > 0$ với mọi số thực t, nên (3) $\Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (thỏa mãn ĐK).

Khi đó $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm là $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cách 2. Biến đổi phương trình đã cho thành

$$(x+1)\left[(x+1)^2 - 2x\right]\left[(x+1)^3 - 3x(x+1)\right] = 30x^3$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^3 - 2x(x+1)\right]\left[(x+1)^3 - 3x(x+1)\right] = 30x^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4\left[(x+1)^2 - 5x\right] + 6x^2\left[(x+1)^2 - 5x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2 - 5x\right]\left[(x+1)^4 + 6x^2\right] = 0 \quad (4).$$

Vì $(x+1)^4 + 6x^2 > 0$ với mọi số thực x, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình bậc cao, cần phải biến đổi và đặt ẩn phụ để chuyển về phương trình bậc thấp đã biết cách giải. Nhiều bạn tham gia gửi bài và đều cho kết quả đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Huy Hoàng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 10A1, THPT Yên Phong số 2; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Ái Ngân*, 10 D1, THCS-THPT Nguyễn Khuyến Cơ sở 4; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt,* 10 Toán, *Nguyễn Thiện Trí, Nguyễn Thiên Lý,* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Văn Huy,* 10 Toán 1, *Nguyễn Vinh Trí,* 11 Toán 1, *Hoàng Bảo Ngọc,* 11 Toán 2, *Lê Thị Minh Thúy,* 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học- Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo,* 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành,* 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

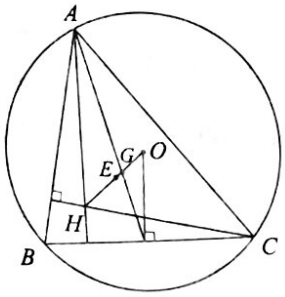
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T8/521. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G, E là tâm đường tròn Euler và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng*

a) $EA + EB + EC \le 3R$;

b) $EA^2 + EB^2 + EC^2 \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Lời giải. Gọi O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm tam giác ABC thì E là trung điểm của OH. Sử dụng quy tắc tam giác dễ thiết lập được hệ thức vectơ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$.



Bình phương vô hướng hai vế thu được:

$$EA^2+EB^2+EC^2+2\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}=\frac{1}{4}HO^2$$

$$\Leftrightarrow EA^2+EB^2+EC^2+(EA^2+EB^2-AB^2)$$

$$+(EA^2+EC^2-AC^2)+(EB^2+EC^2-BC^2)=\frac{1}{4}HO^2$$

$$\Leftrightarrow 3(EA^2+EB^2+EC^2)-(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{4}HO^2$$

(với $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$).

Mặt khác ta có hệ thức quen thuộc:

$$HO^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)\ (1).$$

Từ đó có:

$$EA^2+EB^2+EC^2=\frac{a^2+b^2+c^2+3R^2}{4}\ (2)$$

a) Từ (1) ta thấy: $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ (3).

Kết hợp với (2) suy ra: $EA^2+EB^2+EC^2\le 3R^2$.

Theo BĐT Bunyakovsky ta thu được

$$EA+EB+EC\le\sqrt{3\left(EA^2+EB^2+EC^2\right)}\le 3R.$$

b) Từ (2) và (3) suy ra:

$$EA^2+EB^2+EC^2\ge\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=GA^2+GB^2+GC^2.$$

Nhận xét. Hệ thức (1) được suy ra từ công thức Leibniz:

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right),\ \forall M$$

và $OG=\frac{1}{3}OH$.

Mấu chốt của bài toán là việc thiết lập hệ thức (2). Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Đặng Hoàng Duy*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Từ Nguyễn Đức Anh*, 10 Toán 1, *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, Trường Phổ thông Duy Tân; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Đồng Tháp**: *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/521. *Giải phương trình lượng giác*

$$\sqrt{4^n\cos^{4n}x+3}+\sqrt{4^n\sin^{4n}x+3}=4\quad(1)$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ.

Lời giải. Cách 1 (của nhiều bạn). Dễ chứng minh:

BĐT1: *Với mọi* $a,b\ge 0, n\in\mathbb{N}$ *ta có*:

$$a^n+b^n\ge\frac{(a+b)^n}{2^{n-1}}\quad(2).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$ hoặc $n=1$.

BĐT2: *Với mọi* $a,b,c,d>0$ *ta có*:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\quad(3).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Áp dụng. Ta giải phương trình (1) như sau.

Với $n=0$: PT(1) đúng với mọi x, hay mọi x là nghiệm của (1) khi $n=0$.

Xét n là số tự nhiên không nhỏ hơn 1. Ta có:

$$\cos^{2n}x+\sin^{2n}x=\left(\cos^2x\right)^n+\left(\sin^2x\right)^n$$

$$\ge\frac{\left(\cos^2x+\sin^2x\right)^n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vậy: $\sqrt{4^n\cos^{4n}x+3}+\sqrt{4^n\sin^{4n}x+3}$

$$=\sqrt{(2^n\cos^{2n}x)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{(2^n\sin^{2n}x)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{(2^n\cos^{2n}x+2^n\sin^{2n}x)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4^n(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x)^2+12}$$

$$\ge\sqrt{4^n\cdot\frac{1}{2^{2(n-1)}}+12}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4.$$

Suy ra (1) xảy ra $\Leftrightarrow\cos^2x=\sin^2x\Leftrightarrow\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Cách 2 (của bạn *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*)

Với n là số tự nhiên không nhỏ hơn 1 ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{(2\cos^2 x)^{2n}+3}+\sqrt{(2\sin^2 x)^{2n}+3}=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+\cos 2x)^{2n}+3}+\sqrt{(1-\cos 2x)^{2n}+3}=4 \quad (4).$$

Đặt $t=1+\cos 2x$ với $t\in[0;2]$. Khi đó (4) có dạng:

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^{2n}+3}+\sqrt{(2-t)^{2n}+3}=4 \quad (5).$$

Xét hàm số $f(t):=\sqrt{t^{2n}+3}+\sqrt{(2-t)^{2n}+3}-4$ có:

$$f'(t)=\frac{nt^{2n-1}}{\sqrt{t^{2n}+3}}+\frac{(-1)n(2-t)^{2n-1}}{\sqrt{(2-t)^{2n}+3}}:=u(t)+v(t).$$

Với mọi $t\in[0;2]$ và $n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$$u'(t)=\left(\frac{nt^{2n-1}}{\sqrt{t^{2n}+3}}\right)'=\frac{nt^{2n-2}\left[(n-1)t^{2n}+6n-3\right]}{\left(t^{2n}+3\right)^{\frac{3}{2}}}\geq 0,$$

$$v'(t)=\frac{n(2-t)^{2n-2}\left[(n-1)(2-t)^{2n}+6n-3\right]}{\left((2-t)^{2n}+3\right)^{\frac{3}{2}}}\geq 0.$$

Do đó $f''(t)=u'(t)+v'(t)>0$ với mọi $t\in[0;2]$ và $n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $f'(t)$ là hàm đồng biến trên $t\in[0;2]$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Vì $f'(1)=0$ và

$$f''(1)=u'(1)+v'(1)=n\left(\frac{7}{4}n-1\right)\geq\frac{3}{4}>0$$

với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ nên $t=1$ là điểm cực tiểu duy nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $t\in[0;2]$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó $f(t)$ đổi dấu từ (–) sang (+) khi qua giá trị $t=1$.

t	0		1		2
$f'(t)$		–	0	+	
$f(t)$	$f(0)$	↘	0	↗	$f(2)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $t\in[0;2]$ ta có: $f(1)=f'(1)=0$. Chứng tỏ đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại duy nhất một điểm $M(1;0)$. Hay phương trình $f(t)=0$ có duy nhất nghiệm $t=1\in[0;2]$. Vậy $1+\cos 2x=t=1$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Nhận xét. 1) Trường hợp $n=0$: Một số bạn không xét hoặc đáp số "vô số nghiệm". Nên dùng "mọi $x\in\mathbb{R}$ là nghiệm", chính xác hơn. Bạn *Tô Gia Bảo* đã "cẩn thận" khi viết: "*phương trình có vô số nghiệm (trừ các họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\pi+k\pi$ với k là số nguyên, do không tồn tại 0^0)*. Tuy nhiên, ở đây $n=0$ là cố định, vì vậy, phải hiểu $\cos^0\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^0 x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1=1$.

2) Một số bạn đã không kết hợp nghiệm cho gọn.

3) Không nên gọi PT(1) là "phương trình lượng giác", mà nên liệt (1) vào dạng "phương trình hỗn hợp".

Danh sách các bạn giải đúng là:

Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 11T 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Đồng Tháp**: *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Hòa Phan, Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1; *Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Phạm Ngọc Long, Nguyễn Vĩnh Trí*, 11 Toán 1; *Hoàng Bảo Ngọc* 11 Toán 2, *Nguyễn Quốc Toàn*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/521. *Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho ba số nguyên a^k+bc, b^k+ca, c^k+ab có ít nhất một ước nguyên tố chung.*

Lời giải (của bạn *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).

Gọi p là một ước nguyên tố của $abc+1$. Dễ thấy

$$(p, a)=(p, b)=(p, c)=1.$$

Chọn $k=p-2$. Ta có:

$a(a^k + bc) = a^{k+1} + abc = a^{p-1} + abc$

$\equiv 1 + abc \pmod p$ do $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Vì $(a, p) = 1$ nên $a^k + bc \vdots p$.

Tương tự: $b(b^k + ac) \equiv 1 + abc \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow b^k + ac \equiv 0 \pmod p$

và $c(c^k + ab) \equiv 1 + abc \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow c^k + ab \equiv 0 \pmod p$.

Vậy p là ước nguyên tố chung của $a^k + bc$, $b^k + ca$, $c^k + ab$ với $k = p - 2$.

Nhận xét. Bài toán này được nhiều bạn tham gia giải. Hoan nghênh bạn *Đặng Hoàng Duy*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** nhận xét rằng mọi số nguyên k có dạng $k = (p-1)t - 1$ ở đó $t \in \mathbb{N}^*$ đều có tính chất trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Đặng Khánh Toàn, Nguyễn Hoà Phan*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/521. *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(f(x) + yf(x^2)) = x + x^2 f(y)$ (1) với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải (Theo đa số các bạn). Theo (1) với $x = 0$, $y = -1$ thì $f(f(0) - f(0)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Thay $x = 1, y = -1$ vào (1), ta được:

$$f(0) = 1 + f(-1) \Leftrightarrow f(-1) = -1.$$

Thay $x = -1$ vào (1), ta được:

$$f(-1 + yf(1)) = -1 + f(y),\ \forall y \in \mathbb{Z}\ (2).$$

Thay $y = 0$ vào (1), ta được:

$$f(f(x)) = x,\ \forall x \in \mathbb{Z}\ (3).$$

Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(x_1) = f(x_2)$, từ (3) suy ra:

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Tiếp theo, thay $y = f(1)$ vào (2) và sử dụng tính đơn ánh của f, ta được:

$$f(-1 + f^2(1)) = -1 + f(f(1)) = -1 + 1 = 0 = f(0)$$

hay $f(-1 + f^2(1)) = f(0)$

$$\Leftrightarrow -1 + f^2(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = \pm 1.$$

Trường hợp $f(1) = -1$ không xảy ra vì $-1 = f(-1)$ dẫn đến $f(1) = f(-1) \Leftrightarrow 1 = -1$, mâu thuẫn. Vậy nên $f(1) = 1$.

Từ (2), suy ra: $f(y-1) = f(y) - 1, \forall y \in \mathbb{Z}$ (4).

Đặt $f(y) = y + g(y)$ thì $g(0) = 0$. Thế vào (4) và sử dụng $g(0) = 0$, ta được:

$$y - 1 + g(y-1) = y + g(y) - 1,\ \forall y \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow g(y-1) = g(y),\ \forall y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow g(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nên $f(y) = y,\ \forall y \in \mathbb{Z}$.

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

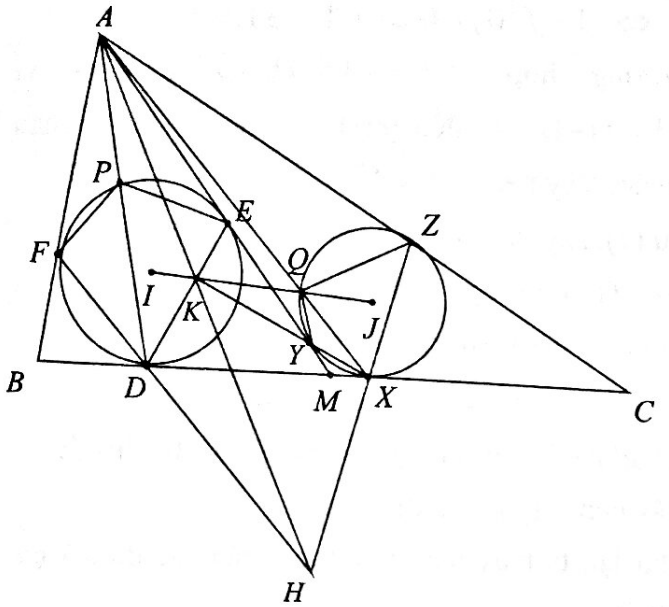
Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{Z}$. Đa số các bạn trình bày theo lời giải đã trình bày ở trên. Một số bạn khác sử dụng tính đơn điệu của hàm f cũng cho lời giải ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Ngọc*, 11T2, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Nguyễn Quang Huy, Nguyễn Vĩnh Trí*, 11T1, *Nguyễn Hòa Phan, Trần Hà Diệu Thúy, Nguyễn Đặng Khánh Toàn, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Phạm Bá Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên**: *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11T, THPT chuyên Thăng Long; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đại Dương*, 11T2, THPT chuyên Lam Sơn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/521. *Cho tam giác ABC, M là điểm bất kỳ nằm trên cạnh BC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABM tiếp xúc với các cạnh BM, MA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (J) nội tiếp tam giác ACM tiếp xúc với các cạnh CM, MA, AC lần lượt tại X, Y, Z. H là giao điểm của DF và XZ. Chứng minh các đường AH, DE, XY đồng quy.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của DE, XY; P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AD, AX và các đường tròn (I), (J).



Dễ thấy $DEPF$ và $XYQZ$ là tứ giác điều hòa.

Do đó: $D(AXKH) = D(PDEF)$

$$= -1 = X(QXYZ) = X(ADKH).$$

Do đó A, K, H thẳng hàng.

Vậy AH, DE, XY đồng quy.

Nhận xét. 1) Bài toán này dễ, khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên một số bạn cho lời giải quá dài.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương tốt: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Hiếu*, 10T, THPT Sơn Tây; **Thừa Thiên Huế:** *Võ Quốc Gia*, *Nguyễn Quang Huy*, 10T1, *Nguyễn Hương Thủy*, *Lê Thị Thanh Tâm*, *Phan Thị Minh Châu*, 10T2, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Lâm Đồng:** *Bùi Thị Hương Quỳnh*, *Nguyễn Hoàng Mai Anh*, 10T, *Tô Gia Bảo*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/521. *Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là L_A = 50 dB, tại B là L_B = 30 dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà CB = 2CA. Xác định mức cường độ âm tại điểm C.*

Lời giải. Ta có:

$$L_A - L_B = 10\lg\frac{I_A}{I_B} = 10\lg\left(\frac{SB}{SA}\right)^2 = 20.$$

Suy ra $SB = 10SA$. Theo đề bài C nằm trên đoạn AB nên $SC = 4SA$.

Lại có: $L_A - L_C = 10\lg\frac{I_A}{I_C} = 10\lg\left(\frac{SA}{SC}\right)^2 \approx 12\,\text{dB}.$

Do vậy $L_C = L_A - 12 = 38\,\text{dB}.$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Nguyễn Vĩnh Trí*, *Nguyễn Hòa Phan*, *Lê Thị Minh Thùy*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, *Phạm Bá Hoàng*, 12Toán 1, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, *Nguyễn Thiện Trí*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYÊN XUÂN QUANG

Bài L2/521. *Cho đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Dùng ampe kế mắc nối tiếp vào đoạn mạch để đo cường độ dòng điện, khi đó số chỉ ampe kế là 2 A. Dùng một dây dẫn có điện trở r rất nhỏ nối tắt tụ điện C thì số chỉ ampe kế cũng là 2 A, vẫn dùng dây đó nối tắt đoạn mạch chứa L, C thì số chỉ ampe kế là 2,5 A. Khi dùng dây này nối tắt hai đầu cuộn cảm thuần L thì ampe kế chỉ bao nhiêu?*

Lời giải. Ta có:

Trường hợp 1: $\frac{U}{Z} = 2 \Rightarrow Z = \frac{U}{2}.$

Trường hợp 2: Nối tắt C, mạch còn L, R:

$$\frac{U}{Z_{LR}} = 2 \Rightarrow Z_{LR} = \frac{U}{2} = Z \Rightarrow Z_C = 2Z_L.$$

Trường hợp 3: $\frac{U}{R} = 2{,}5 \Rightarrow Z_L = \frac{3R}{4} \Rightarrow Z_C = \frac{3R}{2}.$

Trường hợp 4: Nối tắt cuộn cảm thuần mạch còn R, C: $I_4 = \frac{U}{\sqrt{Z_C^2 + R^2}} = \frac{U}{\frac{\sqrt{13}R}{2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ A.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 12T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, *Nguyễn Hòa Phan*, *Lê Thị Minh Thùy*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, *Nguyễn Vĩnh Trí*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

BÀN THÊM VỀ PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

PHAN QUANG SƠN
(GV THPT Khoái Châu, Hưng Yên)

Trong những số báo trước độc giả đã được giới thiệu về phương pháp tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức. Chính vì vậy, trong bài viết này chúng tôi không nêu lại cơ sở của phương pháp tiếp tuyến, chúng tôi xin đưa ra một số dạng toán có thể dùng được phương pháp tiếp tuyến

I. Các biến "rời" nhau

Đây là mức độ đơn giản nhất của phương pháp tiếp tuyến, ta chỉ cần nhóm các biểu thức cùng biến lại với nhau (cô lập các biến) là tìm ra hàm đặc trưng

Thí dụ 1. *Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a^4+b^4+c^4-3\left(a^3+b^3+c^3\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Lời giải. Ta có

$$P=\left(a^4-3a^3+5a^2\right)+\left(b^4-3b^3+5b^2\right)+\left(c^4-3c^3+5c^2\right)$$
$$=f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x)=x^4-3x^3+5x^2$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=5x-2$. Ta chứng minh $f(x)=x^4-3x^3+5x^2 \ge 5x-2$ (*) luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow x^4-3x^3+5x^2-5x+2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2-x+2\right) \ge 0$$

luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên (*) được chứng minh.

Áp dụng (*):

- với $x=a$ ta có: $f(a)=a^4-3a^3+5a^2 \ge 5a-2$;
- với $x=b$ ta có $f(b)=b^4-3b^3+5b^2 \ge 5b-2$;
- với x=c ta có $f(c)=c^4-3c^3+5c^2 \ge 5c-2$.

Suy ra

$$P=f(a)+f(b)+f(c) \ge 5(a+b+c)-6=9.$$

Vậy $\max P=9$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 2. *Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a+b+c=3$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt[3]{2a^2+6}+\sqrt[3]{2b^2+6}+\sqrt[3]{2c^2+6}.$$

Lời giải. Ta có: $P=\sqrt[3]{2a^2+6}+\sqrt[3]{2b^2+6}+\sqrt[3]{2c^2+6}$

$$=f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+6}$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=\dfrac{x+5}{3}$.

Ta xét bất đẳng thức: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+6} \ge \dfrac{x+5}{3}$ (*)

$$\Leftrightarrow 27\left(2x^2+6\right) \ge x^3+15x^2+75x+125$$
$$\Leftrightarrow (x-37)(x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 37.$$

Suy ra (*) luôn đúng với mọi $x \le 37$.

Nếu trong ba số a,b,c có ít nhất một số lớn hơn 37, giả sử $a>37$ ta có:

$$P>\sqrt[3]{2.37^2+6}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6}=14+2\sqrt[3]{6}.$$

Nếu cả $a,b,c \le 37$ áp dụng (*):

- với $x=a$ ta có: $f(a)=\sqrt[3]{2a^2+6} \ge \dfrac{a+5}{3}$;
- với x=b ta có: $f(b)=\sqrt[3]{2b^2+6} \ge \dfrac{b+5}{3}$;
- với x=c ta có: $f(c)=\sqrt[3]{2c^2+6} \ge \dfrac{c+5}{3}$.

Suy ra: $P=f(a)+f(b)+f(c) \ge \dfrac{a+b+c+15}{3}=6.$

So sánh hai trường hợp ta có $\min P=6$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 3. *Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2a^2+1}{\sqrt{a^2-a+4}}+\frac{2b^2+1}{\sqrt{b^2-b+4}}+\frac{2c^2+1}{\sqrt{c^2-c+4}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$P=\frac{2a^2+1}{\sqrt{a^2-a+4}}+\frac{2b^2+1}{\sqrt{b^2-b+4}}+\frac{2c^2+1}{\sqrt{c^2-c+4}}$$
$$=f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=\dfrac{29x-5}{16}$.

Ta xét bất đẳng thức:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2-x+4}}\ge\frac{29x-5}{16}\ (*).$$

Nếu $x\le\dfrac{5}{29}$ thì (*) luôn đúng.

Nếu $x>\dfrac{5}{29}$ thì $(*)\Leftrightarrow\dfrac{4x^4+4x^2+1}{x^2-x+4}\ge\dfrac{(29x-5)^2}{256}$

$$\Leftrightarrow 183x^4+1131x^3-2655x^2+1185x+156\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(183x^2+1497x+156)\ge 0$$

luôn đúng với mọi $x>\dfrac{5}{29}$.

Suy ra (*) luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Áp dụng (*):

- với $x=a$ ta có: $f(a)=\dfrac{2a^2+1}{\sqrt{a^2-a+4}}\ge\dfrac{29a-5}{16}$;
- với $x=b$ ta có: $f(b)=\dfrac{2b^2+1}{\sqrt{b^2-b+4}}\ge\dfrac{29b-5}{16}$;
- với $x=c$ ta có: $f(c)=\dfrac{2c^2+1}{\sqrt{c^2-c+4}}\ge\dfrac{29c-5}{16}$.

Suy ra: $P=f(a)+f(b)+f(c)\ge\dfrac{29(a+b+c)-15}{16}=\dfrac{9}{2}$.

Vậy $\min P=\dfrac{9}{2}$. đạt được khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 4 (Thi học sinh giỏi TP. Hồ Chí Minh năm 2010). *Cho $a,b,c>0$, $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{(4a+b+c)^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{(4b+a+c)^2}{5b^2+(a+c)^2}+\frac{(4c+b+a)^2}{5c^2+(b+a)^2}.$$

Lời giải. Do $a+b+c=1$ nên ta có:

$$P=\frac{(4a+1-a)^2}{5a^2+(1-a)^2}+\frac{(4b+1-b)^2}{5b^2+(1-b)^2}+\frac{(4c+1-c)^2}{5c^2+(1-c)^2}$$
$$=\frac{9a^2+6a+1}{6a^2-2a+1}+\frac{9b^2+6b+1}{6b^2-2b+1}+\frac{9c^2+6c+1}{6c^2-2c+1}$$
$$=f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x)=\dfrac{9x^2+6x+1}{6x^2-2x+1}$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=4x+\dfrac{8}{3}$. Xét bất đẳng thức:

$$f(x)=\frac{9x^2+6x+1}{6x^2-2x+1}\le 4x+\frac{8}{3}\ (*)$$
$$\Leftrightarrow 27x^2+18x+3\le(12x+8)(6x^2-2x+1)$$
$$\Leftrightarrow 72x^3-3x^2-22x+5\ge 0\Leftrightarrow(3x-1)^2(8x+5)\ge 0$$

luôn đúng với mọi $x>0$. Suy ra (*) luôn đúng với mọi $x>0$.

Từ giả thiết $a, b, c>0$ nên áp dụng (*):

- với $x=a$ ta có: $f(a)=\dfrac{9a^2+6a+1}{6a^2-2a+1}\ge 4a+\dfrac{8}{3}$;
- với $x=b$ ta có: $f(b)=\dfrac{9b^2+6b+1}{6b^2-2b+1}\ge 4b+\dfrac{8}{3}$.
- với $x=c$ ta có: $f(c)=\dfrac{9c^2+6c+1}{6c^2-2c+1}\ge 4c+\dfrac{8}{3}$.

Suy ra $P=f(a)+f(b)+f(c)\ge 4(a+b+c)+8=12$.

Vậy $\min P=12$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi ΔABC thì*

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét. - Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$, $A,B,C\in(0;\pi)$.

- Xét hàm số $y=f(x)=\sin x$, $x\in(0;\pi)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{\pi}{3}$ là $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ vì vậy ta có thể trình bày cách chứng minh bất đẳng thức trên như sau:

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sin x\le\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ (1)\ \text{với mọi } x\in(0;\pi).$$

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow\sin x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với mọi $x\in(0;\pi)$. Xét hàm số $y=\sin x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}$ trên

$(0;\pi)$, ta có: $y' = \cos x - \frac{1}{2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \cos - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ (vì $x \in (0;\pi)$).

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y'					
y	$\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$y = \sin x - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ với mọi $x \in (0;\pi)$, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{\pi}{3}$. Áp dụng BĐT(1):

- với $x = A$ ta có: $\sin A \le \frac{1}{2}A - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

- với $x = B$ ta có: $\sin B \le \frac{1}{2}B - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

- với $x = C$ ta có: $\sin C \le \frac{1}{2}C - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Thí dụ 6. *Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có:*

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \ge \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét: - Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

- Xét hàm số $y = f(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x}$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ: $x = \frac{\pi}{6}$ là $y = \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} \ge \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ (2),\ x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Việc chứng minh BĐT này không khó, các bạn có thể tự chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{\pi}{6}$.

Áp dụng BĐT(2):

- với $x = \frac{A}{2}$ ta có: $\cos\frac{A}{2} + \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} \ge \frac{1}{6}\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$;

- với $x = \frac{B}{2}$ ta có: $\cos\frac{B}{2} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} \ge \frac{1}{6}\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$;

- với $x = \frac{C}{2}$ ta có: $\cos\frac{C}{2} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \ge \frac{1}{6}\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Cộng các vế của BĐT ta có BĐT cần chứng minh.

Thí dụ 7 (ĐH khối A 2003). *Cho $x, y, z > 0$, $x + y + z \le 1$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}.$$

Nhận xét: - Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$, $x, y, z \in (0;1)$.

- Xét hàm số $y = f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}, t \in (0;1)$. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm ứng với $t = \frac{1}{3}$ là

$$y = -\frac{80}{\sqrt{82}}\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{82}}{3}.$$

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \ge -\frac{80}{\sqrt{82}}\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{82}}{3}, \forall t \in (0;1) \ (1).$$

Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \frac{80}{\sqrt{82}}\left(t - \frac{1}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{82}}{3}, \forall t \in (0;1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \frac{80}{\sqrt{82}}\left(t - \frac{1}{3}\right)$ với $t \in (0;1)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{t - \frac{1}{t^3}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{80}{\sqrt{82}} = \frac{t^4 - 1}{\sqrt{t^8 + t^4}} + \frac{80}{\sqrt{82}}$;

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left(1-t^4\right)\sqrt{82}=80\sqrt{t^8+t^4}$$

$\Leftrightarrow t^4=\frac{1}{81} \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ (vì $t\in(0;1)$). Ta có BBT:

x	0	$-$	$\frac{1}{3}$	$+$	1
y'					
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{82}}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}+\frac{160}{3\sqrt{82}}$

Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra (3) được chứng minh. Lần lượt áp dụng (3) với $t = x$, $t = y$, $t = z$ rồi cộng các vế của các BĐT thu được, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Thí dụ 8. *Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=a^4+b^4+c^4+2a^3+2b^3+2c^3.$$

Nhận xét. - Dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = b = c = 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + 2x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 10x - 7$.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$x^4+2x^3 \geq 10x-7, \forall x\in\mathbb{R} \ (1).$$

Thật vậy, BĐT trên tương đương với $(x-1)^2\left(x^2+4x+7\right)\geq 0$. BĐT này luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên BĐT(1) đúng. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$. Áp dụng BĐT(1) lần lượt với $x = a$, $x = b$, $x = c$ rồi cộng các vế của các BĐT thu được, ta có: $P\geq 10(a+b+c)-21=9$. Suy ra $\min P = 9$ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 9. *Cho a, $b > 0$ và $a,b\in\mathbb{R}$ sao cho $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=P=\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}.$$

Nhận xét. - Dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=b=\frac{1}{2}$, $a, b\in(0;1)$.

- Xét hàm số $y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{2}$ là $y=\frac{6x-1}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT $\frac{x}{\sqrt{1-x}}\geq\frac{6x-1}{2\sqrt{2}}$ (1), với mọi $x\in(0;1)$.

Áp dụng BĐT(1) với $x = a$, $x = b$ rồi cộng các vế của các BĐT thu được, ta có: $P\geq\frac{6(a+b)-2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Vậy $\min P=\sqrt{2}$ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Thí dụ 10. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\geq 1.$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+8x}}$ với $x\in\left(0;\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $f'(x)=\frac{-4}{\sqrt{(1+8x)^3}} \Rightarrow f''(x)=\frac{48}{\sqrt{(1+8x)^5}}>0.$

Ta có: $f(a)\geq f'(1)(a-1)+f(1)$;

$f(b)\geq f'(1)(b-1)+f(1)$; $f(c)\geq f'(1)(c-1)+f(1)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\geq f'(1)(a+b+c-3)+3f(1)$ (*)

Lại có: $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9$

$\Rightarrow -3\leq(a+b+c)\leq 3\Rightarrow a+b+c-3\leq 0$; $f'(1)=\frac{-4}{27}<0$,

do đó từ (*) suy ra: $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(1)=1$.

II. Chuẩn hóa để cô lập các biến

Thí dụ 11. *Cho a, b, $c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}.$$

Lời giải. Do P là thuần nhất bậc không nên chuẩn hóa $a + b + c = 3$ ta có:

$$P=\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-2b)^2}{b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-2c)^2}{c^2+(3-c)^2}$$

$$=\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}+\frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9}+\frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9}$$

$$=f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x)=\frac{4x^2-12x+9}{2x^2-6x+9}$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = \frac{-18x+23}{25}$. Xét bất đẳng thức: $f(x) = \frac{4x^2-12x+9}{2x^2-6x+9} \geq \frac{-18x+23}{25}$ (*)

$\Leftrightarrow 100x^2 - 300x + 225 \geq (2x^2-6x+9)(-18x+23)$

$\Leftrightarrow 36x^3 - 54x^2 + 18 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(36x+18) \geq 0$, đúng với mọi $x > 0$.

Suy ra (*) luôn đúng với mọi $x > 0$

Từ giả thiết $a, b, c > 0$ nên áp dụng (*):

- với $x = a$ ta có: $f(a) = \frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9} \geq \frac{-18a+23}{25}$;

- với $x = b$ ta có: $f(b) = \frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9} \geq \frac{-18b+23}{25}$;

- với $x = c$ ta có: $f(c) = \frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9} \geq \frac{-18c+23}{25}$.

Suy ra: $P = f(a)+f(b)+f(c) \geq \frac{-18(a+b+c)+69}{25} = \frac{3}{5}$.

Vậy $\min P = \frac{3}{5}$ đạt được khi $a = b = c > 0$.

Thí dụ 12. *Cho $a,b,c > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = \frac{(a+b-4c)^2}{(a+b)^2+3c^2} + \frac{(a+c-4b)^2}{(a+c)^2+3b^2} + \frac{(b+c-4a)^2}{(b+c)^2+3a^2}.$$

Lời giải. Do P là thuần nhất bậc không nên chuẩn hóa $a + b + c = 1$ ta có:

$$P = \frac{(5a-1)^2}{3a^2+(a-1)^2} + \frac{(5b-1)^2}{3b^2+(b-1)^2} + \frac{(5c-1)^2}{3c^2+(c-1)^2}$$

$$= \frac{25a^2-10a+1}{4a^2-2a+1} + \frac{25b^2-10b+1}{4b^2-2b+1} + \frac{25c^2-10c+1}{4c^2-2c+1}$$

$$= f(a)+f(b)+f(c)$$

trong đó $f(x) = \frac{25x^2-10x+1}{4x^2-2x+1}$ (1).

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{396x}{49} - \frac{104}{49}$.

Ta xét bất đẳng thức

$$f(x) = \frac{25x^2-10x+1}{4x^2-2x+1} \geq \frac{396x}{49} - \frac{104}{49} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow 49(25x^2-10x+1) \geq (396x-104)(4x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow (153-176x)(3x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{153}{176}$.

Suy ra (*) luôn đúng với mọi $x \leq \frac{153}{176}$.

Nếu trong ba số a, b, c có ít nhất một số lớn hơn $\frac{153}{176}$, giả sử $a \geq \frac{153}{176}$ ta có:

$$P = f(a)+f(b)+f(c) > f\left(\frac{153}{176}\right) = \frac{346921}{70756} \ (\approx 4.9).$$

Nếu cả $a,b,c \leq \frac{153}{176}$ áp dụng (*):

- với $x = a$ ta có: $f(a) = \frac{25a^2-10a+1}{4a^2-2a+1} \geq \frac{396a}{49} - \frac{104}{49}$;

- với $x = b$ ta có: $f(b) = \frac{25b^2-10b+1}{4b^2-2b+1} \geq \frac{396b}{49} - \frac{104}{49}$;

- với $x = c$ ta có: $f(a) = \frac{25c^2-10c+1}{4c^2-2a+1} \geq \frac{396c}{49} - \frac{104}{49}$.

Suy ra : $P = f(a)+f(b)+f(c) \geq \frac{(a+b+c)396-312}{49} = \frac{12}{7}$.

So sánh hai trường hợp ta có $\min P = \frac{12}{7}$ đạt được khi $a = b = c > 0$.

III. Dùng tiếp tuyến của hàm hai biến

Thí dụ 13. *Cho a, b, $c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:*

$$P = \frac{a^2-2b^2}{b+2a} + \frac{b^2-2c^2}{c+2b} + \frac{c^2-2a^2}{a+2c} \leq -1.$$

Lời giải. Đặt $f(a) = \frac{a^2-2b^2}{b+2a}$. PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a = b$ là $y = \frac{8}{9}a - \frac{11}{9}b$. Ta xét bất đẳng thức: $f(a) = \frac{a^2-2b^2}{b+2a} \leq \frac{8}{9}a - \frac{11}{9}b$ (*)

$\Leftrightarrow 9(a^2-2b^2) \leq (8a-11b)(b+2a)$

$\Leftrightarrow 7a^2 - 14ab + 7b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 7(a-b)^2 \geq 0$

luôn đúng $\forall a,b > 0$. Tương tự ta có:

$$\frac{b^2-2c^2}{c+2b} \leq \frac{8}{9}b - \frac{11}{9}c, \ \forall c,b > 0;$$

$$\frac{c^2-2a^2}{a+2c} \leq \frac{8}{9}c - \frac{11}{9}a, \ \forall c,a > 0.$$

Suy ra: $P \leq \frac{8}{9}a - \frac{11}{9}b + \frac{8}{9}b - \frac{11}{9}c + \frac{8}{9}c - \frac{11}{9}a = -\frac{3}{9}(a+b+c) = -1$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 14. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^4}{a^3+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+ca^2+a^3}\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

Lời giải. Đặt $f(a)=\dfrac{a^4}{a^3+ab^2+b^3}$. PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=b$ là $y=\dfrac{8}{9}a-\dfrac{5}{9}b$. Xét bất đẳng thức: $f(a)=\dfrac{a^4}{a^3+ab^2+b^3}\ge\dfrac{8}{9}a-\dfrac{5}{9}b$ (*)

$\Leftrightarrow 9a^4\ge(8a-5b)(a^3+ab^2+b^3)$

$\Leftrightarrow a^4+5a^3b-8a^2b^2-3ab^3+5b^4\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+7ab+5b^2)\ge 0$ đúng $\forall a,b>0$.

Tương tự: $\dfrac{b^4}{b^3+bc^2+c^3}\ge\dfrac{8}{9}b-\dfrac{5}{9}c,\ \forall c,b>0;$

$\dfrac{c^4}{c^3+ca^2+a^3}\ge\dfrac{8}{9}c-\dfrac{5}{9}a,\ \forall a,c>0.$

Suy ra:

$$P\ge\frac{8}{9}a-\frac{5}{9}b+\frac{8}{9}b-\frac{5}{9}c+\frac{8}{9}c-\frac{5}{9}a=\frac{a+b+c}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c>0$.

Thí dụ 15. *Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a^2-ab+2b^2}{a+2b}+\frac{3a^2+4ac+2c^2}{3(2a+c)}.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(a)=\dfrac{a^2-ab+2b^2}{a+2b}$, PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=b$ là $y=\dfrac{5b+a}{9}$.

Xét hàm số $g(c)=\dfrac{3a^2+4ac+2c^2}{3(2a+c)}$, PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $c=a$ là $y=\dfrac{5c+4a}{9}$.

Ta chứng minh: $\dfrac{a^2-ab+2b^2}{a+2b}\ge\dfrac{5b+a}{9}$ (1) $\forall a,b>0$.

$\dfrac{3a^2+4ac+2c^2}{3(2a+c)}\ge\dfrac{5c+4a}{9}$ (2) $\forall a,c>0$.

Thật vậy: $\dfrac{a^2-ab+2b^2}{a+2b}\ge\dfrac{5b+a}{9}$

$\Leftrightarrow 9(a^2-ab+2b^2)\ge(5b+a)(a+2b)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ đúng với mọi $a, b>0$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b>0$.

$\dfrac{3a^2+4ac+2c^2}{3(2a+c)}\ge\dfrac{5c+4a}{9}$

$\Leftrightarrow 9(3a^2+4ac+2c^2)\ge 3(2a+c)(5c+4a)$

$\Leftrightarrow (a-c)^2\ge 0$ đúng với mọi $a, c>0$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=c>0$. Từ (1) và (2) ta có:

$$P=\frac{a^2-ab+2b^2}{a+2b}+\frac{3a^2+4ac+2c^2}{3(2a+c)}\ge\frac{5(a+b+c)}{9}=\frac{5}{3}.$$

Vậy $\min P=\dfrac{5}{3}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 16. *Cho x, y, z > 0 và $3x(x+y+z)=2y^2+5yz+2z^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{-(x+y)^2+5(x+y)(y+z)}{(y+z)(7x+12y+5z)}-\frac{(x+y)^2-4(x+y)(x+z)+(x+z)^2}{4(y+z)(3x+2y+z)}.$$

Lời giải. Ta có:

$3x(x+y+z)=2y^2+5yz+2z^2$

$\Leftrightarrow 3(x^2+xy+xz+yz)=2y^2+8yz+2z^2$

$\Leftrightarrow 3(x+y)(x+z)=3(y+z)^2-(y-z)^2$

$=3(y+z)^2-[(x+y)-(x+z)]^2$

$=3(y+z)^2-(x+y)^2+2(x+y)(x+z)-(x+z)^2$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{(x+y)(x+z)}{(y+z)(y+z)}=3-\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2+2\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)\left(\dfrac{x+z}{y+z}\right)-\left(\dfrac{x+z}{y+z}\right)^2.$

Đặt $a=\dfrac{x+y}{y+z}$, $b=\dfrac{x+z}{y+z}$, $a, b>0$, ta có:

$3ab=3-a^2+2ab-b^2\Leftrightarrow ab=3-a^2-b^2$

$\Leftrightarrow 3=(a+b)^2-ab\ge(a+b)^2-\dfrac{(a+b)^2}{4}$

$\Rightarrow (a+b)^2\le 4\Rightarrow a+b\le 2.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$. Khi đó ta có:

$$P=\frac{-(x+y)^2+5(x+y)(y+z)}{(y+z)[7(x+y)+5(y+z)]}-\frac{(x+y)^2-4(x+y)(x+z)+(x+z)^2}{4(y+z)[2(x+y)+(x+z)]}$$

$$=\frac{-\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2+5\frac{x+y}{y+z}}{7\left(\frac{x+y}{y+z}\right)+5}$$

$$-\frac{\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2-4\left(\frac{x+y}{y+z}\right)\left(\frac{x+z}{y+z}\right)+\left(\frac{x+z}{y+z}\right)^2}{8\left(\frac{x+y}{y+z}\right)+4\left(\frac{x+z}{y+z}\right)}$$

$$=\frac{-a^2+5a}{7a+5}-\frac{a^2-4ab+b^2}{8a+4b}.$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{-a^2+5a}{7a+5}$, PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=1$ là $y=\frac{5+a}{18}$.

Xét hàm số $g(b)=-\frac{a^2-4ab+b^2}{8a+4b}$, PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $b=a$ là $y=\frac{2b+a}{18}$.

Ta chứng minh: $\frac{-a^2+5a}{7a+5}\le\frac{5+a}{18}$ (1) $\forall a>0$;

$$-\frac{a^2-4ab+b^2}{8a+4b}\le\frac{2b+a}{18}\ (2)\ \forall a,b>0.$$

Thật vậy: $\frac{-a^2+5a}{7a+5}\le\frac{5+a}{18}$

$\Leftrightarrow 18\left(-a^2+5a\right)\le(7a+5)(5+a)$

$\Leftrightarrow 25(a-1)^2\ge 0$ đúng với mọi $a>0$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=1$.

$$-\frac{a^2-4ab+b^2}{8a+4b}\le\frac{2b+a}{18}$$

$\Leftrightarrow -9\left(a^2-4ab+b^2\right)\le(4a+2b)(2b+a)$

$\Leftrightarrow 13(b-a)^2\ge 0$ đúng với mọi $a, b>0$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b>0$. Từ (1) và (2) ta có:

$$P=\frac{-a^2+5a}{7a+5}-\frac{a^2-4ab+b^2}{8a+4b}$$

$$\le\frac{5+a}{18}+\frac{2b+a}{18}=\frac{2a+2b+5}{18}\le\frac{1}{2}.$$

Vậy $\min P=\frac{1}{2}$ đạt được khi $a=b=1$ suy ra $x=y=z>0$.

Thí dụ 17. *Cho $x,y,z>0$ và $xz+y^2=2yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2-xy^3+4y^4}}+\frac{2y^2+z^2}{\sqrt{y^2z^2-yz^3+4z^4}}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=2$.

Ta lại có: $P=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+4}}+\frac{2\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}{\sqrt{\left(\frac{y}{z}\right)^2-\frac{y}{z}+4}}$

Hàm số $f(t)=\frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2-t+4}}$ có PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $t=1$ là $y=\frac{29t-5}{16}$. Dễ chứng minh $f(t)=\frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2-t+4}}\ge\frac{29t-5}{16}$ (*) đúng $\forall t\in\mathbb{R}$.

Thật vậy, với $t<\frac{5}{29}\Rightarrow$ (*) đúng.

Với $t\ge\frac{5}{29}$ ta có:

$(*)\Leftrightarrow\frac{256\left(t^4+4t^2+1\right)}{t^2-t+4}\ge 841t^2-290t+25$

$\Leftrightarrow 183t^4+1131t^3-2655t^2+1185t+156\ge 0$

$\Leftrightarrow(t-1)^2\left(183t^2+1497t+156\right)\ge 0$ đúng với $t\ge\frac{5}{29}$. Suy ra (*) đúng $\forall t\in\mathbb{R}$. Áp dụng (*):

- với $t=\frac{x}{y}$ ta có: $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+4}}\ge\frac{29\frac{x}{y}-5}{16}$;

- với $t=\frac{y}{z}$ ta có: $f\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{2\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}{\sqrt{\left(\frac{y}{z}\right)^2-\frac{y}{z}+4}}\ge\frac{29\frac{y}{z}-5}{16}$.

Suy ra $P=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{z}\right)\ge\frac{29\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)-10}{16}=3.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 đạt được khi $x = y = z > 0$.

Thí dụ 18. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3+4b^3}{a^2+ab+2b^2}+\frac{b^3+4c^3}{b^2+bc+2c^2}+\frac{c^3+4a^3}{c^2+ca+2a^2}\ge\frac{5}{3}(a+b+c).$$

Lời giải. Đặt $f(a)=\dfrac{a^3+4b^3}{a^2+ab+2b^2}$. PT tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a = b$ là $y=\dfrac{-3}{16}a+\dfrac{23}{16}b$. Xét bất đẳng thức: $\dfrac{a^3+4b^3}{a^2+ab+2b^2}\ge\dfrac{-3}{16}a+\dfrac{23}{16}b$ (*)

$\Leftrightarrow 16\left(a^3+4b^3\right)\ge(-3a+23b)\left(a^2+ab+2b^2\right)$

$\Leftrightarrow (19a+18b)(a-b)^2\ge 0$ đúng $\forall a,b>0$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b^3+4c^3}{b^2+bc+2c^2}\ge\dfrac{-3}{16}b+\dfrac{23}{16}c, \forall c,b>0;$

$$\frac{c^3+4a^3}{c^2+ca+2a^2}\ge\frac{-3}{16}c+\frac{23}{16}a, \forall a,c>0.$$

Suy ra: $P\ge\dfrac{-3}{16}a+\dfrac{23}{9}b+\dfrac{-3}{16}b+\dfrac{23}{9}c+\dfrac{-3}{16}c+\dfrac{23}{9}a=\dfrac{5}{4}(a+b+c).$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c > 0$.

IV. Cố định một biến rồi dùng tiếp tuyến

Nhận xét. Để cho dễ làm ta dùng biện pháp "cố định" một biến bằng một hằng số, chẳng hạn là 1, khi đó ta quy về hàm một biến để có thể giải dễ dàng hơn.

Xét **thí dụ 12** ta "cố định" $b = 1$ khi đó ta có:

$$f(a)=\frac{a^3+4}{a^2+a+2}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2+x+2}$, PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = 1$ là $y=\dfrac{-3}{16}x+\dfrac{23}{16}$. Ta xét bất đẳng thức:

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2+x+2}\ge\frac{-3}{16}x+\frac{23}{16}\ (*)$$

$\Leftrightarrow 16\left(x^3+4\right)\ge(-3x+23)\left(x^2+x+2\right)$

$\Leftrightarrow (19x+18)(x-1)^2\ge 0$ luôn đúng $\forall x>0$.

Từ giả thiết $a, b, c > 0$ nên áp dụng (*):

- với $x=\dfrac{a}{b}>0$ có: $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+4}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}+2}\ge\dfrac{-3}{16}.\dfrac{a}{b}+\dfrac{23}{16}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+4b^3}{a^2+ab+2b^2}\ge\frac{-3}{16}a+\frac{23}{16}b\ (*)\ \forall a,b>0;$$

- với $x=\dfrac{b}{c}>0$ ta có: $f\left(\dfrac{b}{c}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{b}{c}\right)^3+4}{\left(\dfrac{b}{c}\right)^2+\dfrac{b}{c}+2}\ge\dfrac{-3}{16}.\dfrac{b}{c}+\dfrac{23}{16}$

$$\Leftrightarrow \frac{b^3+4c^3}{b^2+bc+2c^2}\ge\frac{-3}{16}b+\frac{23}{16}c\ (*)\ \forall c,b>0;$$

- với $x=\dfrac{c}{a}>0$ có: $f\left(\dfrac{c}{a}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{c}{a}\right)^3+4}{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+\dfrac{c}{a}+2}\ge\dfrac{-3}{16}.\dfrac{c}{a}+\dfrac{23}{16}$

$$\Leftrightarrow \frac{c^3+4a^3}{c^2+ac+2a^2}\ge\frac{-3}{16}c+\frac{23}{16}a\ (*)\ \forall a,c>0.$$

Suy ra: $P\ge\dfrac{-3}{16}a+\dfrac{23}{16}b+\dfrac{-3}{16}b+\dfrac{23}{16}c+\dfrac{-3}{16}c+\dfrac{23}{16}a=\dfrac{5}{4}(a+b+c).$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c > 0$.

Thí dụ 19. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^5+2ab^4+b^5}{ab^3+b^4}+\frac{b^5+2bc^4+c^5}{bc^3+c^4}+\frac{c^5+2ca^4+a^5}{ca^3+a^4}\ge 2(a+b+c).$$

Lời giải. Ta "cố định" $b = 1$ khi đó ta có $f(a)=\dfrac{a^5+2a+1}{a+1}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^5+2x+1}{x+1}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = 1$ là $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$. Xét bất đẳng thức:

$$f(x)=\frac{x^5+2x+1}{x+1}\ge\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\ (*)$$

$\Leftrightarrow 2x^5+4x+2\ge 5x^2+4x-1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(2x^3+4x^2+6x+3\right)\ge 0$ đúng $\forall x>0$.

Từ giả thiết $a, b, c > 0$ nên áp dụng (*):

- với $x=\dfrac{a}{b}>0$ có: $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^5+2\dfrac{a}{b}+1}{\dfrac{a}{b}+1}\ge\dfrac{5}{2}.\dfrac{a}{b}-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^5+2ab^4+b^5}{ab^3+b^4}\ge\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}b,\ \forall a,b>0;$$

- với $x=\frac{b}{c}>0$ có: $f\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^5+2\frac{b}{c}+1}{\frac{b}{c}+1}\ge\frac{5}{2}.\frac{b}{c}-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{b^5+2bc^4+c^5}{bc^3+c^4}\ge\frac{5}{2}b-\frac{1}{2}c,\ \forall b,c>0;$$

- với $x=\frac{c}{a}>0$ có: $f\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^5+2\frac{c}{a}+1}{\frac{c}{a}+1}\ge\frac{5}{2}.\frac{c}{a}-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{c^5+2ca^4+a^5}{ca^3+a^4}\ge\frac{5}{2}c-\frac{1}{2}a,\ \forall c,a>0.$$

Suy ra: $P\ge\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{5}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{5}{2}c-\frac{1}{2}a=2(a+b+c)$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c>0$.

V. Logarit để cô lập các biến

Thí dụ 20. *Cho $a,c,b>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^b\left(\sqrt{b^2+1}+b\right)^c\left(\sqrt{c^2+1}+c\right)^a.$$

Hướng dẫn giải. - Từ giả thiết ta có $P>0$ nên $\ln P=b\ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)+c\ln\left(\sqrt{b^2+1}+b\right)+a\ln\left(\sqrt{c^2+1}+c\right)$.

- Chứng minh được

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\ (*)\ \forall x\in(0;3).$$

+ Từ giả thiết ta có $a,\ b,\ c\in(0;3)$ nên áp dụng (*) ta có:

$\ln P\le$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[b(a-1)+c(b-1)+a(c-1)\right]+(a+b+c)\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(ab+bc+ca)+3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

- Chứng minh $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$.

Vậy $\ln P\le\frac{3}{\sqrt{2}}+3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^3\Leftrightarrow P\le\left(\sqrt{2}+1\right)^3.$$

Vậy $\max P=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 21. *Cho các số thực $a,b,c\ge1$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:*

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\le216.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $a,b,c\in[1;4]$.

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^2+2\right)-\frac{2}{3}x,\ x\in[1;4]$.

Ta có: $f'(x)=\frac{-2x^2+6x-4}{3\left(x^2+2\right)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. BBT:

x	1		2		4
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(2)$	↘	

Từ BBT ta có:

$$f(x)=\ln\left(x^2+2\right)-\frac{2}{3}x\le f(2)=\ln6-\frac{4}{3}\ (*),\ \forall x\in[1;4].$$

Mà $a,b,c\in[1;4]$ nên áp dụng (*) với $x=a$, $x=b$, $x=c$, ta có: $f(a)=\ln\left(a^2+2\right)-\frac{2}{3}a\le\ln6-\frac{4}{3}$;

$$f(b)=\ln\left(b^2+2\right)-\frac{2}{3}b\le\ln6-\frac{4}{3};$$

$$f(c)=\ln\left(c^2+2\right)-\frac{2}{3}c\le\ln6-\frac{4}{3}.$$

Vậy ta được: $f(a)+f(b)+f(c)\le3\ln6-4$

$$\Leftrightarrow\ln\left(a^2+2\right)+\ln\left(b^2+2\right)+\ln\left(c^2+2\right)\le3\ln6$$

$$\Leftrightarrow\ln\left[\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\right]\le\ln216$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\le216.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$.

VI. Ứng dụng giải hệ phương trình

Thí dụ 22. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y^2+xy+x^2}}=\frac{x+y}{2} & (1)\\ xy^2+3xy+3\sqrt{xy}-1=3\sqrt[3]{x+2y+5} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}2x^2+xy+y^2>0\\2y^2+xy+x^2>0.\\xy\ge0\end{cases}$

Từ (1) ta có $x+y\ge 0$, dễ thấy $x=0, y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên suy ra $x, y>0$.

PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ tại $x=1$ là $y=\dfrac{11x-3}{16}$.

Ta dễ chứng minh được:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}\ge\frac{11x-3}{16}\ (*)\text{ đúng } \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thật vậy: Nếu $x<\dfrac{3}{11}$ thì (*) luôn đúng.

Nếu $x\ge\dfrac{3}{11}$ ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 256x^4\ge(121x^2-66x+9)(2x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(14x^2+39x-9)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(14x^2+39x-9)\ge 0$ luôn đúng vì

$$14x^2+39x-9>0,\ \forall x\ge\frac{3}{11}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Vậy (*) được chứng minh.

Áp dụng (*) với $x, y>0$ ta có:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}}\ge\frac{11\frac{x}{y}-3}{16}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}\ge\frac{11x-3y}{16};$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\sqrt{2\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1}}\ge\frac{11\frac{y}{x}-3}{16}$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2}{\sqrt{2y^2+xy+x^2}}\ge\frac{11y-3x}{16}.$$

Suy ra: $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+xy+y^2}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{2y^2+xy+x^2}}\ge\dfrac{x+y}{2}$

nên ta có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}=1\\ \dfrac{y}{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y>0.$

Thay vào (2) ta được:

$$x^3+3x^2+3x-1=3\sqrt[3]{3x+5}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=(3x+5)+3\sqrt[3]{3x+5}\quad(3).$$

Xét hàm $g(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$g'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

nên $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(3)\Leftrightarrow g(x+1)=g\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{3x+5}\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

$\Rightarrow x=1$ (do $x>0$) $\Rightarrow y=1$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x, y)=(1;1)$.

BÀI TẬP

1. Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2a^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2b^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2c^2+1}}\ge\sqrt{3}$.

2. Cho $a, b, c>0$ và $17a+14b+23c=54$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4a^2+2ab+3b^2}+2\sqrt{4b^2+2bc+3c^2}+3\sqrt{4c^2+2ca+3a^2}\ge 18.$$

3. Cho $a,b,c>0$ tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}.$$

4. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^3+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+ca^2+a^3}\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

5. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

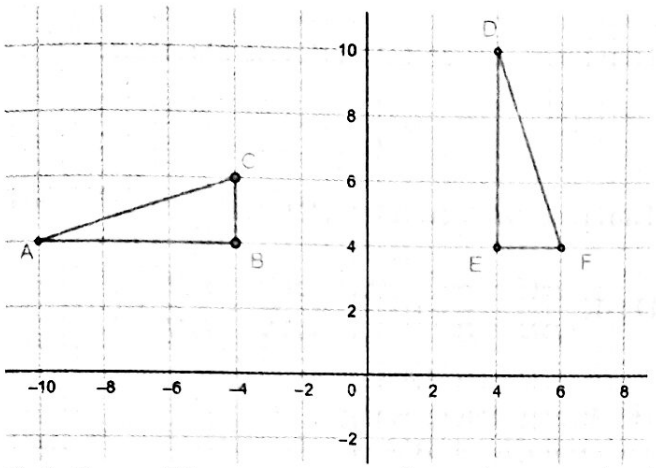
6. Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

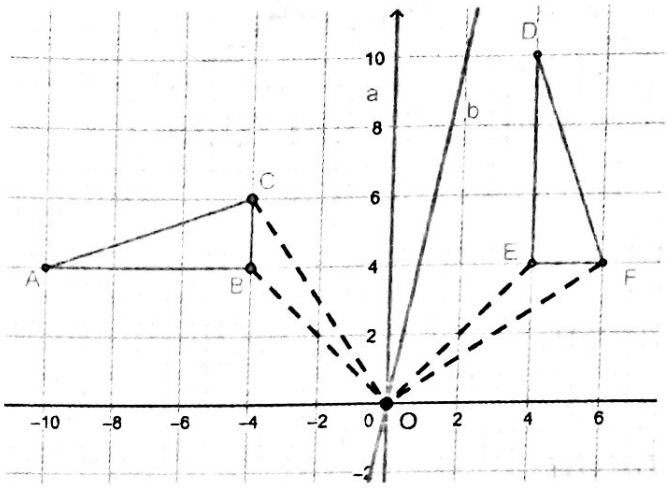
BÀI SỐ 66

Problem. *Determine a single transformation that maps the triangle ABC onto the triangle DEF.*



Solution. We can see that the required transformation should be a rotation. Hence we need to determine the angle and the center of that rotation.

The rotation maps B onto E and C onto F. Therefore the center is the intersection between the perpendicular bisector of the line segment BE and the perpendicular bisector of the line segment CF.



Thus the center is at the origin O and we can easily see that the angle is 90 degree clockwise.

TỪ VỰNG

transformation	: *phép biến đổi*
rotation	: *phép quay*
angle	: *góc (của phép quay)*
center	: *tâm (của phép quay)*
perpendicular bisector	: *đường trung trực*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 63

Bài toán. *Gọi n là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tổng của các chữ số của nó bằng 2020. Tìm các chữ số của n.*

Lời giải. Để tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thoả mãn đề bài, cần có chữ số 9 trong số n càng nhiều càng tốt (để có số các chữ số của n càng ít càng tốt). Ta có: $2020 = 224 \times 9 + 4$.

Do đó số n là 499…9 (224 chữ số 9) và số n có 225 chữ số.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phan Lê Thúc Bảo*, 10 Toán 1, *Nguyễn Hoà Phan*, *Lê Minh Thuỳ*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Ngọc Khánh Lâm*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 46. *Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác CN của tam giác ABC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng*

$$\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=1.$$

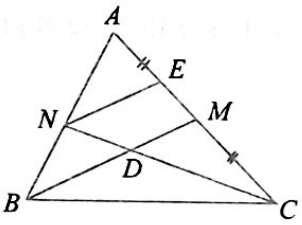
Lời giải.

Cách 1 (h. 1). Qua N vẽ đường thẳng song song với BM cắt AC tại E.

Tam giác ABM có $NE \parallel BM$

$$\Rightarrow \frac{AN}{BN}=\frac{AE}{ME};$$

Tam giác CNE có



Hình 1

$$DM \parallel NE \Rightarrow \frac{DC}{DN}=\frac{MC}{ME}=\frac{AM}{ME};$$

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

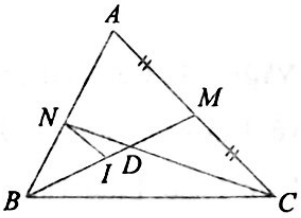
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AN}{BN};$$

Do đó $\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{ME}-\frac{AE}{ME}=1.$

Cách 2 (h.2). Qua N vẽ đường thẳng song song với AC cắt BM tại I.

Tam giác NDI có

$CM \parallel NI \Rightarrow \frac{DC}{DN}=\frac{CM}{NI};$



Hình 2

Tam giác ABM có

$NI \parallel AM \Rightarrow \frac{AM}{NI}=\frac{AB}{BN};$

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

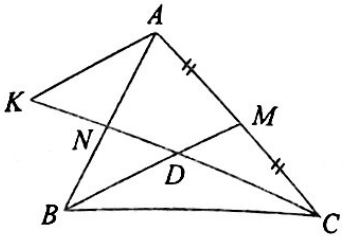
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AN}{BN};$$

Do đó $\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BN}-\frac{AN}{BN}=1.$

Cách 3 (h. 3). Qua A vẽ đường thẳng song song với BM cắt CN tại K. Tam giác CAK có

$MD \parallel AK, AM=CM$

$\Rightarrow DC=DK;$



Hình 3

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AN}{BN};$$

Tam giác NBD có $AK \parallel BD \Rightarrow \frac{AN}{BN}=\frac{KN}{DN};$

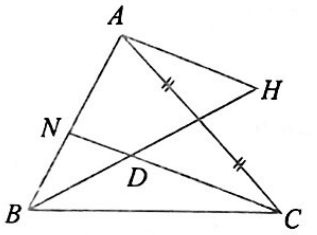
Do đó $\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=\frac{DK}{DN}-\frac{KN}{DN}=\frac{DN}{DN}=1.$

Cách 4 (h. 4). Qua A vẽ đường thẳng song song với CN cắt BM tại H.

$\Delta MAH=\Delta MCD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AH=DC;$

Tam giác ABH có



Hình 4

$AH \parallel DN \Rightarrow \frac{AH}{DN}=\frac{AB}{BN};$

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

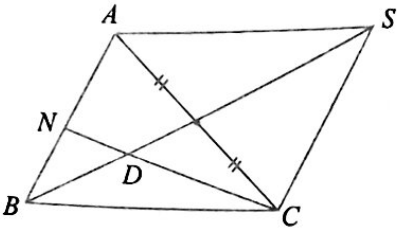
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AN}{BN};$$

Do đó $\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{DN}-\frac{AN}{BN}=\frac{AB}{BN}-\frac{AN}{BN}=\frac{BN}{BN}=1.$

Cách 5 (h. 5). Gọi S là điểm đối xứng của B qua M. Ta có: tứ giác $ABCS$ là hình bình hành

$\Rightarrow AB \parallel SC,$

$AB=SC.$



Hình 5

Tam giác BDN có $SC \parallel BN \Rightarrow \frac{DC}{DN}=\frac{SC}{BN};$

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AN}{BN};$$

Do đó $\frac{DC}{DN}-\frac{AC}{BC}=\frac{SC}{BN}-\frac{AN}{BN}=\frac{SC}{BN}-\frac{AN}{BN}=1.$

Cách 6 (h. 6). Qua C vẽ đường thẳng song song với BM cắt AB tại T. Tam giác ATC có:

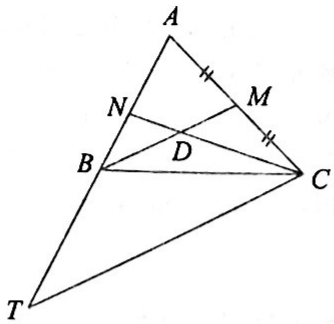
$BM // TC$,

$AM = CM$

$\Rightarrow AB = TB$.

Tam giác NCT có

$BD // TC$



Hình 6

$$\Rightarrow \frac{DC}{DN} = \frac{TB}{BN} \Rightarrow \frac{DC}{DN} = \frac{AB}{BN};$$

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

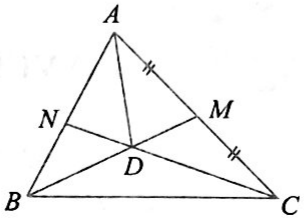
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN};$$

Do đó $\frac{DC}{DN} - \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BN} - \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{BN} = 1.$

Cách 7 (h. 7). Ta có

$\frac{DC}{DN} = \frac{S_{BCD}}{S_{BND}}$,

$\frac{AB}{BN} = \frac{S_{ABD}}{S_{BND}}$,



Hình 7

$S_{ADM} = S_{CDM}$,

$S_{ABM} = S_{BCM}$ $(AM = CM)$ và

$S_{ABD} = S_{ABM} - S_{ADM} = S_{BCM} - S_{CDM} = S_{BCD}$

do đó $\frac{DC}{DN} = \frac{AB}{BN}$.

Tam giác ABC có CN là đường phân giác

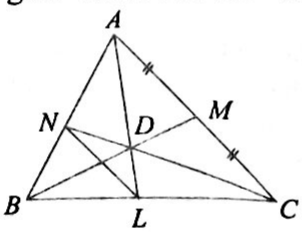
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN};$$

Ta có $\frac{DC}{DN} - \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BN} - \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{BN} = 1.$

Cách 8 (h. 8). Gọi L là giao điểm của AD và BC. Tam giác ABC có CN là đường phân giác

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN}$;

Tam giác ABC có AL, BM, CN đồng quy



Hình 8

$$\Rightarrow \frac{AN}{BN}.\frac{BL}{CL}.\frac{CM}{AM} = 1 \text{ (định lí Ceva).}$$

Mà $AM = CM$ nên $\frac{AN}{BN} = \frac{CL}{BL}$.

Tam giác ABC có $\frac{AN}{BN} = \frac{CL}{BL} \Rightarrow NL // AC$;

Tam giác DNL có $AC // NL \Rightarrow \frac{DC}{DN} = \frac{AC}{NL}$;

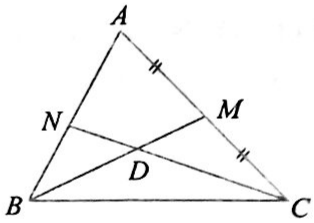
Tam giác ABC có $AC // NL \Rightarrow \frac{AC}{NL} = \frac{AB}{BN}$.

Do đó $\frac{DC}{DN} - \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{NL} - \frac{AN}{BN} = \frac{AB}{BN} - \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{BN} = 1.$

Cách 9 (h. 9). Tam giác ABC có CN là đường phân giác

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BN}$;

Tam giác ACN có D thuộc CN, M thuộc AC, B thuộc AN, ba điểm D, M, B thẳng hàng



Hình 9

$$\Rightarrow \frac{DC}{DN}.\frac{BN}{AB}.\frac{AM}{CM} = 1 \text{ (định lí Menelaus).}$$

Mà $AM = CM$ nên $\frac{DC}{DN} = \frac{AB}{BN}$.

Do đó $\frac{DC}{DN} - \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BN} - \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{BN} = 1.$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(*TP. Hồ Chí Minh*)

Nhận xét. Ngoài 9 cách giải trên của bạn *Nguyễn Đức Tấn*, người giới thiệu bài toán xin hoan nghênh những bạn sau cũng đưa ra nhiều cách giải tốt: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Văn Ngọc Bình*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 48 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2021.

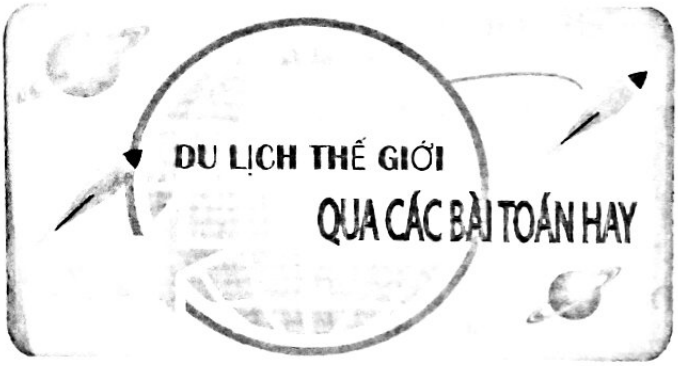
BÀI TOÁN 48. *Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \le \frac{5}{2}.$$

DƯƠNG VĂN SƠN

(*GV THPT Kim Liên, Nam Đàn, Nghệ An*)

giới thiệu



BÀI TOÁN 54 (Japan TST 2004). *Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$ thì ta có bất đẳng thức:*

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\le\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x} \quad (1).$$

Lời giải. Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$\frac{2x+y+z}{y+z}+\frac{2y+z+x}{z+x}+\frac{2z+x+y}{x+y}\le\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}+3\le\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{3}{2}\le\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}-\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z}-\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x}-\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xz}{y(y+z)}+\frac{yx}{z(z+x)}+\frac{zy}{x(x+y)}\ge\frac{3}{2} \quad (2).$$

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$\frac{xz}{y(y+z)}+\frac{yx}{z(z+x)}+\frac{zy}{x(x+y)}=\frac{1}{xyz}\left(\frac{x^2z^2}{y+z}+\frac{y^2x^2}{z+x}+\frac{z^2y^2}{x+y}\right)$$

$$\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{2xyz(x+y+z)} \quad (3).$$

Với mọi a, b, c ta luôn có:

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$$

nên $(xy+yz+zx)^2\ge 3(x^2yz+y^2zx+z^2xy)$

$$=3xyz(x+y+z)$$

hay $\dfrac{(xy+yz+zx)^2}{2xyz(x+y+z)}\ge\dfrac{3}{2}.$

Từ (2) và (3) suy ra (1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia có cách giải tương tự như cách giải trên. Các bạn có lời giải tốt là: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Văn Huy, Huỳnh Nguyên Vĩ*, 10 Toán 1, *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre; **Nam Định:** *Nguyễn Thị Phương Ngân*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 30.4.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 56. *BCED là tứ giác lồi sao cho $\widehat{BDC}=\widehat{CEB}=90^0$ và BE cắt CD tại A. Gọi F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh DE, BC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng AO và FG song song với nhau.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

ĐỐ VUI: SỐ XUÔI NGƯỢC

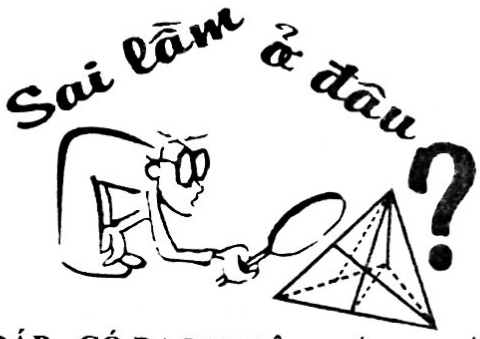
Cho số nguyên dương viết trong hệ thập phân $a=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ với $a_n>0$, ta gọi *số viết ngược của số a* là số $b=\overline{a_0a_1...a_{n-1}a_n}$, tức là khi viết các chữ số của số a theo thứ tự ngược lại thì được số b. Số nguyên dương a được gọi là số *xuôi ngược* (*palindromic number*) nếu $a = b$ với b là số viết ngược của số a, tức là số *xuôi ngược* có dạng $a=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}$ với $a_0 = a_n > 0$, $a_s = a_{n-s}$ với s bằng 0, 1,..., n. Chẳng hạn, các số sau là số xuôi ngược: 3; 22; 121; 34543; 345543; ...

Chữ *palindrome* lần đầu tiên được nhà biên kịch *Ben Jonson* dùng vào thế kỉ XVII khi ghép hai từ gốc Hy Lạp là *palin* (ngược lại) và *dromos* (di chuyển, chạy, chảy).

Số viết ngược của số 2021 là số 1202, ta thấy điều thú vị sau: $1202^2 = 1444804$, số này là số viết ngược của số $4084441 = 2021^2$. Tính chất khác: tích của số 211 với số viết ngược của nó bằng $211.112 = 23632$, tích này là số xuôi ngược.

BÀI TOÁN. *Hãy tìm các số nguyên dương gồm bốn chữ số viết trong hệ thập phân sao cho tích của số đó với số viết ngược của nó là một số xuôi ngược gồm bảy chữ số.*

VIỆT HẢI (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: CÓ BAO NHIÊU TIẾP TUYẾN ?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 521, *tháng* 11 *năm* 2020)

Phân tích sai lầm. Chỉ dựa vào số tiếp điểm x_0 mà kết luận về số tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) là chưa đủ. Với mỗi x_0 tìm được cần viết các phương trình tiếp tuyến tương ứng, làm như vậy sẽ biết chính xác số tiếp tuyến cần tìm, tránh ngộ nhận số tiếp tuyến bằng số tiếp điểm.

Lời giải đúng.

Gọi $M_0\left(x_0;x_0^4-2x_0^2-1\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C). Ta có: $y'=4x^3-4x,\ y'(x_0)=4x_0^3-4x_0$. Tiếp tuyến với (C) tại M_0 có PT: $y=\left(4x_0^3-4x_0\right)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2-1\ (d)$.

Tiếp tuyến d đi qua điểm $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ khi và chỉ khi

$$-2=\left(4x_0^3-4x_0\right)\left(\frac{7}{3}-x_0\right)+x_0^4-2x_0^2-1$$

$$\Leftrightarrow 9x_0^4-28x_0^3-6x_0^2+28x_0-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2-1)(x_0-3)(9x_0-1)=0 \Leftrightarrow x_0=\pm1, x_0=3, x_0=\frac{1}{9}.$$

- Với $x_0=1\Rightarrow y_0=-2$, PT tiếp tuyến tại $M_1(1;-2)$ là (d_1): $y=-2$.
- Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$, PT tiếp tuyến tại $M_2(-1;-2)$ là (d_2): $y=-2$.
- Với $x_0=3\Rightarrow y_0=62$, PT tiếp tuyến tại $M_3(3;62)$ là (d_3): $y=96x-266$.
- Với $x_0=\frac{1}{9}\Rightarrow y_0=-\frac{6722}{6561}$, PT tiếp tuyến tại $M_2\left(\frac{1}{9};-\frac{6722}{6561}\right)$ là (d_4): $y=-\frac{320}{729}x-\frac{2134}{2187}$.

Rõ ràng $(d_1)\equiv(d_2)$. Vậy từ $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị $(C): y=x^4-2x^2-1$. Chọn đáp án C.

Nhận xét. Các bạn sau đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Vinh Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

KIHIVI

BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

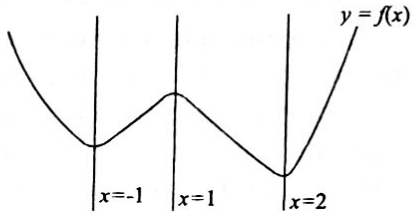
Trong đề học kì I có bài toán: Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ *là* $f'(x)=(x^2-1)(x-2)$. *Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số* $g(x)=f\left(x^2+m\right)$ *có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:*

A. 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** Vô số

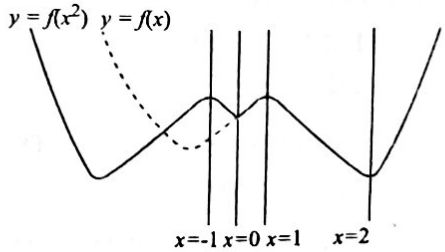
Bạn *Linh Nhi* cảm thấy đề khá dễ và đã trình bày lời giải ra giấy nháp như dưới đây:

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=2\end{array}\right.$

Từ đây ta có thể phục hồi đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên với các điểm cực trị là $x=-1,\ x=1,\ x=2$ và các giá trị cực trị chỉ mang tính tương đối.



Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì ta suy ra được đồ thị hàm số $(C): y=f\left(x^2\right)$ như hình dưới với đúng 5 điểm cực trị (Chú ý: hàm số $y=f(x^2)$ là hàm số chẵn).



Vì nếu ta tịnh tiến $(C): y=f(x^2)$ theo $\vec{u}(-m;0)$ sẽ thu được đồ thị $(C'): y=f(x^2+m)$ nên số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+m\right)$ luôn bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$ với mọi giá trị của m. Do đó đáp án cần chọn là D.

Theo bạn lời giải trên đã đúng chưa?

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 525 (3.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

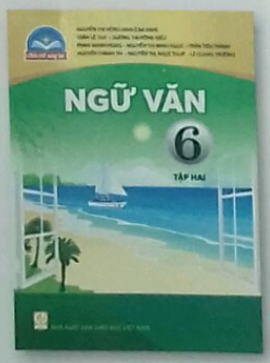
TRONG SỐ NÀY

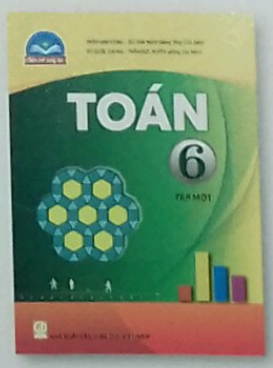
Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

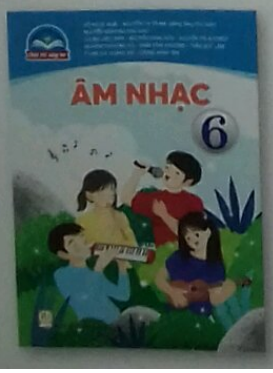
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
CHÂN TRỜI SÁNG TẠO
LỚP 6







Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT3M21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2021

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng