# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

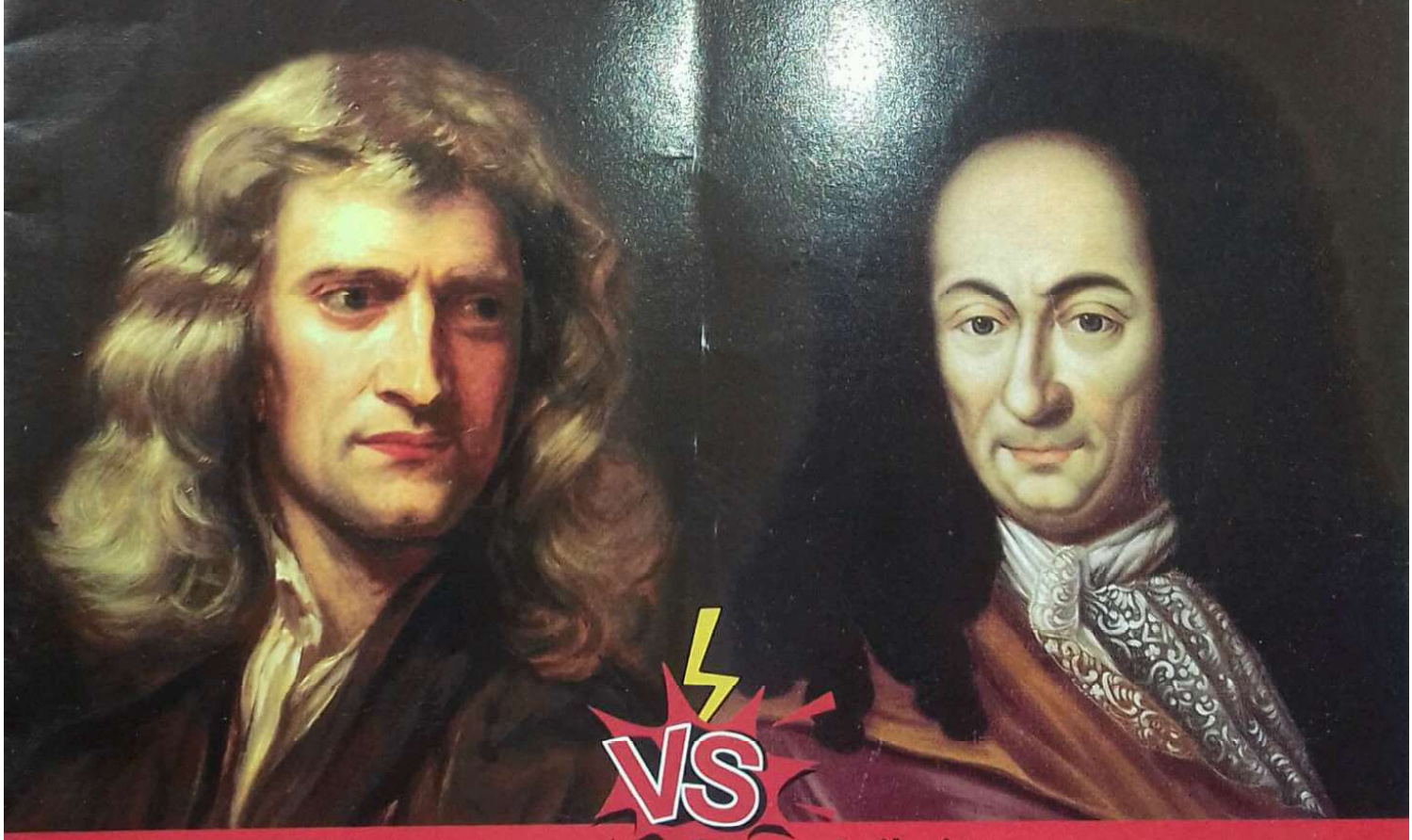
TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 524
Tháng 2 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 58 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Emai: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com


## Cuộc tranh cãi dai dẳng không đáng có giữa Newton và Leibniz



# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

*Bộ đóng tập*

## TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM


**Năm 2010**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

**Năm 2011**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

**Năm 2012**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

**Năm 2013**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

**Năm 2014**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

**Năm 2015**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2016**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2017**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2018**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2019**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

**Năm 2020**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

*Mọi chi tiết xin liên hệ:*

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**
**Địa chỉ:** 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com


# BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN CÓ CHỨA THAM SỐ MÀ BIỂU THỨC NGHIỆM CÓ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

**TRỊNH PHONG QUANG**
*(GV THCS Quảng Phú Lộc, Nho Quan, Ninh Bình)*

Với Kỳ thi HSG Toán lớp 9, Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, và Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên, ta thường gặp các bài toán liên quan đến phương trình bậc hai một ẩn có chứa tham số mà bài toán liên quan đến các biểu thức của ẩn nằm trong dấu giá trị tuyệt đối. Việc giải quyết các bài toán dạng này không khó khăn nếu chúng ta nắm chắc kiến thức về giá trị tuyệt đối và một số kiến thức liên quan cùng với những kỹ năng cơ bản. Sau đây là các thí dụ minh họa:

**Thí dụ 1.** *Giả sử phương trình* $2x^2 - 4ax - 1 = 0$ *có hai nghiệm* $x_1; x_2$. *Tính giá trị của biểu thức* $T = |x_1 - x_2|$.

***Lời giải.*** Vì $a$ và $c$ trái dấu nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a \\ x_1.x_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ và

$$T^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$
$$= 4a^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + 2 > 0 \Rightarrow T = \sqrt{4a^2 + 2}.$$

**Thí dụ 2.** *Cho phương trình*

$$x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0 \quad (1)$$

*(x là ẩn số, m là tham số).*

*Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi* $x_1$, $x_2$ *là hai nghiệm của (1). Tìm m để* $|x_1 - x_2| = 17$.

***Lời giải.*** Ta có: $\Delta = (4m+1)^2 - 8(m-4)$

$= 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 32 = 16m^2 + 33.$

Vì $\Delta = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m$ nên theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1.x_2 = 2(m-4) \end{cases}.$$

Theo yêu cầu bài toán: $|x_1 - x_2| = 17$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 289$

$\Leftrightarrow (4m+1)^2 - 8(m-4) = 289$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m = \pm 4.$

Vậy $m = \pm 4$ là các giá trị cần tìm.

**Thí dụ 3.** *Cho phương trình*

$$x^2 - (2m+1)x - 3 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

*Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt* $x_1$, $x_2$ *với mọi m. Tìm các giá trị của m sao cho* $|x_1| - |x_2| = 5$ *và* $x_1 < x_2$.

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Hải Dương năm học 2019 - 2020)

***Lời giải.*** Vì $a = 1, c = -3 \Rightarrow ac < 0$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ với mọi $m$. Áp dụng hệ thức Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 & (1) \\ x_1x_2 = -3 & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $x_1$ và $x_2$ trái dấu, mà $x_1 < x_2$

$\Rightarrow x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow |x_1| = -x_1;\ |x_2| = x_2.$

Do đó: $|x_1| - |x_2| = 5 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 5$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -5$ (3).

Từ (1) và (3) $\Rightarrow 2m + 1 = -5 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

***Chú ý.*** Nếu bình phương 2 vế của đẳng thức $|x_1| - |x_2| = 5$ để tìm $m$ thì phải thử lại.

**Thí dụ 4.** *Cho phương trình*

$x^2 + 2(m-2)x - m^2 - 5 = 0$ *(với m là tham số).*

*Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2 + 1| = 5$.*

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Nam Định năm học 2019 - 2020)

***Lời giải.*** Ta có $ac = -m^2 - 5 < 0, \forall m$, nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Mà $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0 < x_2$

$\Rightarrow |x_1| = -x_1;\ |x_2 + 1| = x_2 + 1$.

Do đó: $|x_1| - |x_2 + 1| = 5 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 - 1 = 5$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -6$

Lại có: $x_1 + x_2 = -2(m-2)$ (theo hệ thức Viète)

$\Rightarrow -2(m-2) = -6 \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

**Thí dụ 5.** *Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$, với a là tham số. Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.*

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường ĐHSP Hà Nội năm học 2017 - 2018)

***Lời giải.*** Phương trình hoành độ giao điểm của (*P*) và (*d*) là $x^2 = -2ax - 4a$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2ax + 4a = 0 \quad (1)$$

đường thẳng *d* cắt parabol (*P*) tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 4 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1x_2 = 4a \end{cases}$

Từ $|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 9$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 8|a| = 9$ (2).

Nếu $a > 4$ thì (2) trở thành $4a^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = \dfrac{3}{2} & \text{(loại)} \\ a = -\dfrac{3}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right..$$

Nếu $a < 0$ thì (2) trở thành: $4a^2 - 16a - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = -\dfrac{1}{2} & \text{(thoả mãn)} \\ a = \dfrac{9}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right..$$

Vậy $a = -\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

**Thí dụ 6.** *Cho Parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - 1$, với m là tham số.*

*Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $y_1, y_2$ là tung độ của hai điểm A và B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$.*

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường ĐHSP Hà Nội năm học 2016 - 2017)

***Lời giải.*** Phương trình hoành độ giao điểm của (*P*) và (*d*) là: $-x^2 = 2mx - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0 \quad (1).$$

Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ với mọi $m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi $m$ hay (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với mọi $m$.

Khi đó theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$

Ta có: $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$. Do đó:

$|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |x_1^4 - x_2^4| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)^2(x_1^2 + x_2^2)^2 = 45$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2\left[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 4x_1^2x_2^2\right] = 45$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 3$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$

$\Rightarrow 4m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$.

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

**Thí dụ 7.** *Cho phương trình*

$$x^2 + 2(5 - m)x + 4 + m^2 = 0.$$

*Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thoả mãn* $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = \frac{5}{2}$.

***Lời giải.*** Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = (5 - m)^2 - (4 + m^2) > 0$

$$\Leftrightarrow 21 - 10m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{10}.$$

Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2(m - 5) \text{ và } x_1x_2 = m^2 + 4.$$

Vì $x_1x_2 = m^2 + 4 > 0$ nên $x_1$ và $x_2$ khác 0 và cùng dấu. Do đó $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2|x_1 + x_2| = 5|x_1x_2|$. Suy ra

$2|2(m - 5)| = 5(m^2 + 4) \Leftrightarrow 4|m - 5| = 5(m^2 + 4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 5 \geq 0 \\ 4(m - 5) = 5(m^2 + 4) \end{cases}$ (*)

hoặc $\begin{cases} m - 5 < 0 \\ -4(m - 5) = 5(m^2 + 4) \end{cases}$ (**).

Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ 5m^2 - 4m + 40 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Ta có (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 5m^2 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$

(thoả mãn điều kiện).

Vậy $m = 0$; $m = -\frac{4}{5}$ là các giá trị cần tìm.

**Thí dụ 8.** *Cho phương trình*

$$x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0 \text{ (x là ẩn, m là tham số).}$$

*Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện* $|x_1| + 2|x_2| = 3$.

***Lời giải.***

***Cách 1.*** Ta có $\Delta = 4m^2 + 5 > 0$ với mọi $m$, nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

Áp dụng hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -m^2 + 1 \end{cases}$

Từ điều kiện bài toán $|x_1| + 2|x_2| = 3$, ta xét các trường hợp sau:

*Trường hợp* 1: Xét $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ thì

$|x_1| + 2|x_2| = 3 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 3$ kết hợp với $x_1 + x_2 = 3$ ta tìm được $x_1 = 3; x_2 = 0$ (thoả mãn $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

Khi đó ta có $-m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

*Trường hợp* 2: Xét $x_1 \leq 0; x_2 \leq 0$ thì

$|x_1| + 2|x_2| = 3 \Leftrightarrow -x_1 - 2x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = -3$

kết hợp với $x_1 + x_2 = 3$ ta tìm được:

$x_1 = 9; x_2 = -6$ (không thoả mãn $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$).

*Trường hợp* 3: Xét $x_1 > 0; x_2 < 0$ thì

$$|x_1| + 2|x_2| = 3 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 3$$

kết hợp với $x_1 + x_2 = 3$ ta tìm được

$x_1 = 3; x_2 = 0$ (không thoả mãn $x_1 > 0, x_2 < 0$)

*Trường hợp* 4: Xét $x_1 < 0; x_2 > 0$ thì

$$|x_1| + 2|x_2| = 3 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 = 3$$

kết hợp với $x_1 + x_2 = 3$ ta tìm được

$x_1 = 1; x_2 = 2$ (không thoả mãn $x_1 < 0, x_2 > 0$).

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

***Cách 2.*** Ta có $\Delta = 4m^2 + 5 > 0$ với mọi $m$, nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

Áp dụng hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -m^2 + 1 \end{cases}$.

Từ điều kiện bài toán $|x_1| + 2|x_2| = 3$

$\Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 3 - |x_2| \Leftrightarrow |x_1| + |3 - x_1| = 3 - |x_2|$.

Lại có $|x_1|+|3-x_1|\ge|x_1+3-x_1|=3$, đẳng thức xảy ra khi $x_1(3-x_1)\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x_1\le 3$ (1), mà $3-|x_2|\le 3$, đẳng thức xảy ra khi $x_2=0$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-m^2+1 \\ 0\le x_1\le 3 \\ x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=0 \\ m=\pm 1 \end{cases}$$

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

**Thí dụ 9.** *Cho các đa thức $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ với $a, b, c, d$ là các số thực.*

a) *Tìm tất cả các giá trị của $a$, $b$ để 1 và $a$ là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.*

b) *Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3, x_4$ sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$.*

*Chứng minh rằng $|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$.*

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán THPT chuyên Hưng Yên năm học 2019 - 2020)

***Lời giải.***

a) Để 1 và $a$ là nghiệm của PT $P(x)=0$ thì ta phải có: $P(1)=1+a+b=0, P(a)=a^2+a^2+b=0$.

Rút $b=-1-a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2-a-1=0$.

Từ đó $a=1$ hoặc $a=-\frac{1}{2}$,

tương ứng $b=-2$ hoặc $b=-\frac{1}{2}$.

Vậy có hai cặp $(a,b)$ thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1;-2)$ và $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b) Do $x_1, x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x)=0$ nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$.

Tương tự, ta cũng có $Q(x)=(x-x_3)(x-x_4)$.

Điều kiện đề bài có thể viết lại thành:

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2+x_1-x_4)$$
$$+(x_4-x_1+x_2-x_3)(x_4-x_2)=0.$$

Hay $(x_3-x_2+x_1-x_4)(x_3-x_1+x_2-x_4)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=(x_3-x_4)^2$ hay

$|x_1-x_2|=|x_3-x_4|$. Ta có điều phải chứng minh.

**Thí dụ 10.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=x^2$, đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $M(0;1)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ $x_1, x_2$ thỏa mãn điều kiện $|x_1-x_2|\ge 2$.*

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán THPT chuyên Quốc học Huế năm học 2017 - 2018)

***Lời giải.*** Đường thẳng (*d*) có phương trình $y=kx+1$. Phương trình hoành độ giao điểm của (*P*) và (*d*) là: $x^2-kx-1=0$ (1).

Ta có $\Delta=k^2+4>0$, với mọi $k$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$. Suy ra (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt.

Theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=k$, $x_1x_2=-1$.

Suy ra $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=k^2+4\ge 4$.

Do đó $|x_1-x_2|\ge 2$ (dấu "=" xảy ra khi $k=0$).

Vậy với mọi giá trị của *k*, (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Thí dụ 11.** *Cho phương trình $mx^2+x+m-1=0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$.*

(Trích Đề thi HSG Toán 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2016 - 2017)

***Lời giải.*** PT đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ 1-4m(m-1)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \frac{-\sqrt{2}+1}{2}<m<\frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases} (1).$$

Theo định lý Viète có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{1}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-1}{m} \end{cases}$.

Ta có $x_1x_2 \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{m} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ (2).

Khi đó $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| > 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > |x_1x_2|$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > x_1^2.x_2^2$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - (x_1x_2)^2 > 0$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{m}\right)^2 - 4\left(\dfrac{m-1}{m}\right) - \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - 4m^2 + 4m - m^2 + 2m - 1}{m^2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5m^2 + 6m}{m^2} > 0 \Leftrightarrow m(-5m + 6) > 0$

$\Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{6}{5}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có hệ:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{-\sqrt{2}+1}{2} < m < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ 0 < m < \dfrac{6}{5} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \dfrac{6}{5}. \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy các giá trị cần tìm của $m$ là: $0 < m < \dfrac{6}{5}, m \neq 1$.

**Thí dụ 12.** *Cho phương trình*

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 4m + 1 = 0 \quad (1)$$

*($m$ là tham số).*

a) *Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Chứng minh rằng* $\left|\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right| < 1$.

b) *Giả sử các nghiệm $x_1; x_2$ khác 0.*

*Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh năm học 2017 - 2018)

***Lời giải.***

a) Ta có $\Delta' = -m^2 - 2m$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Khi đó theo hệ thức Viète ta có

$$x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1x_2 = 2m^2 + 4m + 1.$$

Ta có $-2 < m < 0 \Leftrightarrow -1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow |m+1| < 1$

nên $\left|\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right| = |m+1| < 1$.

b) Vì $|m+1| < 1$ nên suy ra: $-1 \leq 2(m+1)^2 - 1 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq 2m^2 + 4m + 1 \leq 1 \Rightarrow |x_1x_2| \leq 1$. Do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x_2|}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{|x_1x_2|}} \geq 2.$$

Mặt khác $(|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2|$

$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$

$= [2(m+1)]^2 - 2(2m^2 + 4m + 1) + 2|x_1x_2|$

$= 2 + 2|x_1x_2| \leq 2 + 2.1 = 4 \Rightarrow |x_1| + |x_2| \leq 2.$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

**Thí dụ 13.** *Cho phương trình*

$x^2 - (2m+5)x + 2m + 1 = 0$ *($x$ là ẩn, $m$ là tham số).*

*Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $P = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

***Lời giải.*** Phương trình

$$x^2 - (2m+5)x + 2m + 1 = 0 \ (1).$$

Ta có: $\Delta = (2m+5)^2 - 4(2m+1)$

$= 4m^2 + 12m + 21 = (2m+3)^2 + 12 > 0, \forall m$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$.

Áp dụng hệ thức Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 5 \\ x_1x_2 = 2m + 1 \end{cases}$.

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm dương là: $\begin{cases}2m+5>0\\2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$.

Ta có: $P^2=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2=\left(x_1+x_2\right)-2\sqrt{x_1x_2}$

$=2m+5-2\sqrt{2m+1}=\left(2m+1-2\sqrt{2m+1}+1\right)+3$

$=\left(\sqrt{2m+1}-1\right)^2+3\geq 3\Rightarrow P\geq\sqrt{3}$ (do $P>0$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\sqrt{2m+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2m+1}=1$

$\Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn điều kiện $m>-\frac{1}{2}$).

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $P$ là $\sqrt{3}$ khi $m=0$.

**Thí dụ 14.** *Cho phương trình*

$$x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0,$$

*trong đó m là tham số, x là ẩn số.*

a) *Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.*

b) *Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1$, $x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\left|x_1+x_2+x_1x_2\right|.$$

***Lời giải.***

a) PT có nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta'=(m-1)^2-(2m^2-3m+1)\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2-m\leq 0\Leftrightarrow m(m-1)\leq 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\m-1<0\end{cases}\\\begin{cases}m<0\\m-1>0\end{cases}\\m=0\\m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq m\leq 1\\\begin{cases}m\leq 0\\m\geq 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\leq m\leq 1.$$

b) ***Cách 1.*** Theo hệ thức Viète ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\x_1.x_2=2m^2-3m+1\end{cases}$$

$\Rightarrow P=\left|x_1+x_2+x_1.x_2\right|=\left|2m^2-m-1\right|$

$=2\left|\left(m-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right|.$

Có $0\leq m\leq 1\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leq m-\frac{1}{4}\leq\frac{3}{4}$

$\Rightarrow\left(m-\frac{1}{4}\right)^2\leq\frac{9}{16}.$

Suy ra $P=2\left(\frac{9}{16}-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2\right)\leq\frac{9}{8}$, đẳng thức xảy ra khi $m=\frac{1}{4}$. Vậy $\max P=\frac{9}{8}$ khi $m=\frac{1}{4}$.

***Cách 2.*** Xét $P=\left|x_1+x_2+x_1.x_2\right|$

$=\left|2m^2-m-1\right|=\left|(2m+1)(m-1)\right|$ với $0\leq m\leq 1$.

- Với $m=1\Rightarrow P=0$ (1)

- Với $0\leq m<1$, $P=\left|x_1+x_2+x_1.x_2\right|$

$=\left|(2m+1)(m-1)\right|=-(2m+1)(m-1)$

$=-2m^2+m+1=\frac{9}{8}-2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2\leq\frac{9}{8}$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi

$$m=\frac{1}{4}\text{(thoả mãn } 0\leq m<1).$$

Từ (1) và (2) ta được giá trị lớn nhất của $P$ là $\frac{9}{8}$ khi $m=\frac{1}{4}$.

**Thí dụ 15.** *Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2+2mx+m^2-2=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\left|2x_1x_2+x_1+x_2-4\right|.$$

***Lời giải.*** Ta có: $\Delta'=m^2-2\left(m^2-2\right)=-m^2+4$

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta'=4-m^2\geq 0\Leftrightarrow m^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\x_1x_2=\frac{m^2-2}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $P=|2x_1x_2+x_1+x_2-4|$

$=|m^2-2+(-m)-4|=|m^2-m-6|$

$=|(m+2)(m-3)|$.

Do $-2\le m\le 2$ nên $m+2\ge 0, m-3\le 0$

$\Rightarrow P=-(m+2)(m-3)=-m^2+m+6$

$=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\le\frac{25}{4}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}\in[-2;2]$.

Vậy $\max P=\frac{25}{4}$ khi $m=\frac{1}{2}$.

**Thí dụ 16.** *Cho parabol (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0;-1)$ và có hệ số góc là k. Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là $x_1;x_2$.*

*Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|x_1^3-x_2^3|$.*

***Lời giải.***

- Đường thẳng (d) có phương trình: $y=kx-1$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $-x^2=kx-1\Leftrightarrow x^2+kx-1=0$ (*).

Vì $\Delta=k^2+4>0$ với mọi $k$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Theo hệ thức Viète ta có: $x_1+x_2=-k$, $x_1x_2=-1$.

Ta có: $|x_1^3-x_2^3|=|(x_1-x_2)[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]|$

$=|x_1-x_2|.|(x_1+x_2)^2-x_1x_2|$.

Có $|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=k^2+4$

$\Rightarrow P=|x_1^3-x_2^3|=\sqrt{k^2+4}(k^2+1)\ge 2$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $k=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 2 khi $k=0$.

**BÀI TẬP TƯƠNG TỰ**

**Bài 1.** Cho phương trình

$$x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0.$$

Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$.

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Ngoại ngữ ĐHQG Hà Nội năm học 2014-2015)

**Bài 2.** Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho parabol $(P): y=-x^2$, và đường thẳng $(d): y=mx-m-2$ ($m$ là tham số).

1) Chứng minh rằng khi $m$ thay đổi $(d)$ luôn cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$,

2) Tìm $m$ để $|x_1-x_2|=\sqrt{20}$.

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2012 - 2013)

**Bài 3.** Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+(2-m)x-1-m=0$, ($x$ là ẩn, $m$ là tham số). Tìm $m$ để $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$.

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Thái Bình năm học 2018 - 2019)

**Bài 4.** Tìm $m$ để phương trình

$x^2-2mx+m^2-2=0$, ($x$ là ẩn, $m$ là tham số)

có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn

$$|x_1^3-x_2^3|=10\sqrt{2}.$$

(Trích Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Hải Dương năm học 2018 - 2019)

**Bài 5.** Cho phương trình

$(x+1)^4-(m-1)((x+1)^2-m^2+m-1=0$ (*)

(ẩn $x$, $m$ là tham số).

1) Chứng minh phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ với mọi $m$.

2) Tìm $m$ để cho $|x_1|+|x_2|=2$.

(Tạp chí TH&TT tháng 11 năm 2019)

**Bài 6.** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $a\ne 0, 2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x_1-x_2|$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI
## ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM 2020

**Bài 1.** 1) Ta có:

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}=2\sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}=\sqrt{5-\left(2\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}+1$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{3}-1}-\sqrt{2+\sqrt{3}}+1$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}+1=1.$$

Do đó $a = 1$, suy ra $M = (4a^{2019} - 4a^{2018} + 1)^{2019}$
$= (4.1^{2019} - 4.1^{2018} + 1)^{2019} = (4 - 4 + 1)^{2019} = 1.$

2) Ta có: $\sqrt{12n^2+1}=a\ \left(a\in\mathbb{N}^*\right)$

$\Leftrightarrow 12n^2 + 1 = a^2 \Leftrightarrow 12n^2 = a^2 - 1$

$\Leftrightarrow 12n^2 = (a - 1)(a + 1) \Leftrightarrow 3n.4n = (a - 1)(a + 1).$

Vì vế phải là tích của hai số tự nhiên hơn kém 2 đơn vị nên suy ra chỉ có trường hợp $4n = 3n + 2$ $\Leftrightarrow n = 2$ (thỏa mãn), các trường hợp còn lại đều không thoả mãn. Khi đó: $2\sqrt{12n^2+1}+2$

$$=2.\sqrt{12.2^2+1}+2=2.7+2=16=4^2$$

là số chính phương.

**Bài 2.** 1) Đặt $t = x + 10 \Leftrightarrow x = t - 10.$

PT đã cho trở thành:

$8(t - 10) - (t - 1)t(t + 1) = 0 \Leftrightarrow 8t - 80 - t^3 + t = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 9t + 80 = 0 \Leftrightarrow (t + 5)(t^2 - 5t + 16) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+5=0 \\ t^2-5t+16=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=-5.$$

Khi đó $x = t - 10 = -5 - 10 = -15$. Vậy PT đã cho có một nghiệm $x = -15$.

2) Ta có: $\Delta = m^2(m - 2)^2 + 4(m - 1)^2 > 0, \forall m.$

Do đó PT đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$. Theo hệ thức Viète ta có:

$$x_1 + x_2 = m(m - 2);\ x_1.x_2 = -(m - 1)^2.$$

Thay vào điều kiện bài toán:

$2\sqrt{x_1+x_2-2(m-2)}-3\sqrt{-x_1x_2}\ge 1$, ta có:

$$2\sqrt{m(m-2)-2(m-2)}-3\sqrt{(m-1)^2}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(m-2)^2}-3\sqrt{(m-1)^2}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow 2|m-2|-3|m-1|\ge 1\ \ (1).$$

Xét 3 trường hợp:

+) $m < 1$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow -2(m - 2) + 3(m - 1) \ge 1$
$\Leftrightarrow m + 1 \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 0.$

Kết hợp điều kiện $m < 1$ ta có: $0 \le m < 1$ (*).

+) $m > 2$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2(m - 2) - 3(m - 1) \ge 1$
$\Leftrightarrow -m - 1 \ge 1 \Leftrightarrow m \le -2$: không thỏa mãn

+) $1 \le m \le 2$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow -2(m - 2) - 3(m - 1) \ge 1$

$$\Leftrightarrow -5m + 7 \ge 1 \Leftrightarrow m \le \frac{6}{5}.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $1 \le m \le \frac{6}{5}$ (**).

Kết hợp (*) và (**) ta có kết quả: $0 \le m \le \frac{6}{5}$.

**Bài 3.** Trước hết ta chứng minh BĐT phụ:

Với $a, b, c > 0$ thì:

$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$ (1).

Vì $a, b, c$ có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$.

Khi đó $c(c - a)(c - b) \ge 0$ (2). Ta cần chứng minh: $a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) \ge 0$ (3)

Biến đổi vế trái của (3):

$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a)$

$= (a - b)[a(a - c) - b(b - c)]$

$= (a - b)(a^2 - ac - b^2 + bc)$

$= (a - b)(a - b)(a + b - c) = (a - b)^2(a + b - c) \ge 0.$

Từ (2) và (3) suy ra BĐT (1) được chứng minh.

Khai triển BĐT (1) và thực hiện các phép biến đổi ta có: $a^3 - a^2b - a^2c + abc + b^3 - b^2a$

$$- b^2c + abc + c^3 - c^2a - c^2b + abc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3+b^3)+c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c$$
$$-c^2a-c^2b+3abc\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-a^2b-a^2c$$
$$-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b+3abc\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)$$
$$-3ab(a+b+c)+3abc+3abc$$
$$-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$+6abc\ge a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$+6abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$+6abc\ge ab(a+b+c-c)+bc(b+c+a-a)$$
$$+ca(a+b+c-b)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$+6abc\ge (a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$+9abc\ge 0\ (2).$$

Đặt $p=a+b+c; q=ab+bc+ca; r=abc\ (p,q,r>0)$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow p^3-4pq+9r\ge 0 \Leftrightarrow 9r\ge p\left(4q-p^2\right)$.

Bằng cách thay 3 số $a, b, c>0$ bởi 3 số $x, y, z>0$ và đặt $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$, ta cũng có BĐT: $9r\ge p\left(4q-p^2\right)$ (3). Trở lại BĐT ở đề bài, đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z>0$ và $xyz=1 \Rightarrow r=xyz=1$. Thay $r=1$ vào BĐT (3) ta có: $9\ge p(4q-p^2) \Leftrightarrow 4q-p^2\le \frac{9}{p}$ (4).

Vì vậy BĐT ở đề bài cần chứng minh tương đương với: $x^2+y^2+z^2+3\ge 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3\ge 2(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+3\ge 2(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+3\ge 4(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow p^2+3\ge 4q\ (5).$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy ta có:

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3 \Leftrightarrow p\ge 3.$$

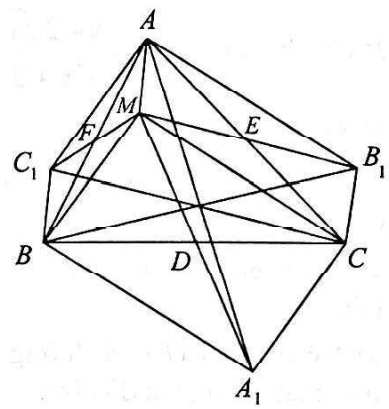
Với $p\ge 3$, BĐT (4) $\Leftrightarrow 4q-p^2\le \frac{9}{3}=3$

$\Leftrightarrow 4q\le p^2+3 \Rightarrow$ BĐT (5) đúng $\Rightarrow$ BĐT ở đề bài được chứng minh. Vậy

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2\left(a+b+c\right).$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

**Bài 4.** Gọi $D$, $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$. Ta có $MAC_1B$ là hình bình hành




$\Rightarrow MA=BC_1$, $MA // BC_1$

và $AC_1=MB$, $AC_1 // MB$.

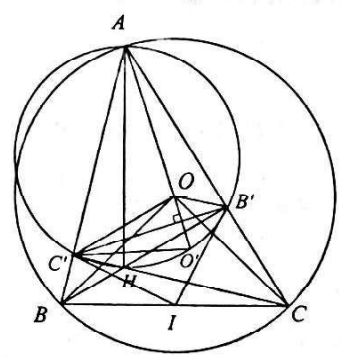
$MAB_1C$ là hình bình hành nên $MA=CB_1$, $MA // B_1C$.

Từ đó suy ra $BCB_1C_1$ là hình bình hành nên hai đường chéo $BB_1$ và $CC_1$ cắt nhau tại trung điểm $H$ của mỗi đường.

$MBA_1C$ là hình bình hành nên $MB=CA_1$, $MB // CA_1$ $\Rightarrow AC_1=CA_1$, $AC_1 // CA_1$.

Từ đó suy ra $AC_1A_1C$ là hình bình hành nên hai đường chéo $CC_1$ và $AA_1$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Vậy $A, H, A_1$ thẳng hàng.

2) a) Gọi $H$ là giao điểm hai đường cao $BB'$ và $CC'$.




Tam giác $ABB'$ vuông tại $B'$ có $\widehat{A}=45^o$ nên vuông cân, do đó $B'A=B'B$. Mặt khác, $OA=OB$ nên $OB'$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OB' \perp AB$. Mặt khác, $CC' \perp AC$ nên $OB' // CC'$ hay $OB' // HC'$ (1). Lập luận tương tự ta có $OC' // HB'$ (2). Từ (1), (2) suy ra $OB'HC'$ là hình bình hành, do đó $\widehat{B'HC'}=\widehat{B'OC'}$. Vì $O$ và $O'$ đối xứng qua $B'C'$ nên $\widehat{B'OC'}=\widehat{B'O'C'}$, do đó $\widehat{B'HC'}=\widehat{B'O'C'}$.

(Xem tiếp trang 11)

## ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC. NĂM HỌC 2020-2021.

### VÒNG 1 (không chuyên)

**(Thời gian làm bài 120 phút)**

**Câu 1** (2 *điểm*)

1) Tính giá trị của các biểu thức:

$$A=\sqrt{64}-\sqrt{49}.\quad B=\sqrt{(4+\sqrt{7})^2}-\sqrt{7}.$$

2) Cho biểu thức $Q=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-3\ ,(x\geq 0)$

a) Rút gọn biểu thức $Q$.

b) Tìm giá trị của $x$ để biểu thức $Q=2$.

**Câu 2** (2 *điểm*)

1) Cho parabol $(P)$: $y = x^2$ và đường thẳng $(d)$: $y = 2x + 3$.

a) Vẽ parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ $Oxy$.

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$ bằng phép tính.

2) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-3y=3\\x+3y=6\end{cases}.$$

**Câu 3** (2,5 *điểm*)

1) Cho phương trình ẩn $x$: $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ (1) ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) với $m = 6$.

b) Tìm $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{3}{2}.$$

2) Một thửa đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 4m và có diện tích là 320m$^2$. Tính chu vi thửa đất đó.

**Câu 4** (1 *điểm*)

Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, có cạnh $AC = 8$m, $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính số đo góc $C$ và độ dài các cạnh $AB$, $BC$, đường trung tuyến $AM$ của tam giác $ABC$.

**Câu 5** (2,5 *điểm*)

Từ một điểm $T$ ở bên ngoài đường tròn tâm $(O)$. Vẽ hai tiếp tuyến $TA$, $TB$ với đường tròn ($A$, $B$ là hai tiếp điểm). Tia $TO$ cắt đường tròn $(O)$ tại hai điểm phân biệt $C$ và $D$ ($C$ nằm giữa $T$ và $O$) và cắt đoạn $AB$ tại $F$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $TAOB$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $TC.TD = TF.TO$.

c) Vẽ đường kính $AG$ của đường tròn $(O)$. Gọi $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ điểm $B$ đến $AG$, $I$ là giao điểm của $TG$ và $BH$. Chứng minh $I$ là trung điểm của $BH$.

### VÒNG 2 (Chuyên)

**(Thời gian làm bài 150 phút)**

**Câu 1** (1 *điểm*) Cho biểu thức:

$$A=\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức $A$.

b) Tính giá trị của $A$ khi $a=2021-2\sqrt{2020}$.

**Câu 2** (2 *điểm*)

a) Giải phương trình: $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$.

**Câu 3** (1.5 *điểm*)

a) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để đường thẳng $(d)$: $y = 2x - m$ cắt parabol $(P)$: $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

b) Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $x^2 + mx + 8 = 0$ và phương trình $x^2 + x + m = 0$ có ít nhất một nhiệm chung.

c) Chứng minh rằng với $a$, $b$, $c$ là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong các phương trình sau có nghiệm

$$4ax^2+2(b+c)x+c=0\ (1);$$
$$4bx^2+2(c+a)x+c=0\ (2);$$
$$4cx^2+2(a+b)x+b=0\ (3).$$

**Câu 4** (3.5 *điểm*)

Cho tam giác nhọn $ABC$ với ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm $(O)$. Ba đường cao $AD$, $BE$, $CF$ cắt nhau tại trực tâm $H$.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$, $ABDE$ nội tiếp và $H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $DEF$.

b) Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp.

c) Tia $MH$ cắt đường tròn tâm $(O)$ tại $I$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AI$, $EF$, $BC$ đồng quy.

**Câu 5** (1 *điểm*)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau

$$4y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7.$$

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a, b)$ thỏa mãn $b^2 + 3a \vdots a^2b$.

**Câu 6** (1 *điểm*)

a) Cho $a$, $b$ là hai số dương. Chứng minh rằng:

i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$;

ii) $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$

b) Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$$

**MAI VĨNH PHÚ**

(*GV THCS&THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước*) ***Giới thiệu***

---

***HƯỚNG DẪN GIẢI ...*** (*Tiếp theo trang 9*)

Ta lại có tứ giác $AB'HC'$ nội tiếp có góc $\widehat{A}=45^0$ nên $\widehat{B'HC'}=135^0$. Do đó: $\widehat{B'O'C'}+\widehat{B'AC'}=135^0+45^0=180^0 \Leftrightarrow$ tứ giác $AB'O'C'$ nội tiếp. Vậy 4 điểm $A$, $C'$, $O'$, $B'$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi $I$ là trung điểm của $BC$.

Ta có: $\widehat{BB'C}=\widehat{CC'B}=90^o$ nên tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp đường tròn tâm $I$, bán kính bằng $\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.

Tam giác $ACC'$ vuông tại $C'$ có $\widehat{A}=45^o$ nên $\widehat{ACC'}=45^o$. Từ đó suy ra

$\widehat{B'IC'}=2.\widehat{ACC'}=90^o$ (cùng chắn cung $\widehat{B'C'}$).

Do đó tam giác $IB'C'$ vuông cân tại $I$

$\Rightarrow B'C'=IB'\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $B'C'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Bài 5.** Đặt $c=a+b-2ab$

$$\Leftrightarrow c=a(1-2b)+\frac{1}{2}(2b-1)+\frac{1}{2}$$

$$=(1-2b)\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=-2\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c-\frac{1}{2}=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right).$$

Với bộ $n$ số thực $x_1; x_2; \ldots; x_n$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$), xét biểu thức: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$=(-2)^{n-1}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$

Khi xóa hai số $x_1$, $x_2$ bất kỳ trong dãy số trên và thay bằng số $x_1+x_2-2x_1x_2$, các số còn lại giữ nguyên thì giá trị của biểu thức $f$ không thay đổi. Gọi $t$ là số cuối cùng còn lại trên bảng. Ta có:

$$f(t)=f\left(\frac{1}{2020};\frac{2}{2020};\ldots;\frac{2020}{2020}\right)$$

$$=(-2)^{2019}\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2020}-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{2020}{2020}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(t)=\left[(-2)\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2020}-\frac{1}{2}\right)\right]\ldots$$

$$(-2)\left(\frac{1010}{2020}-\frac{1}{2}\right)(-2)\left(\frac{1011}{2020}-\frac{1}{2}\right)\ldots(-2)\left(\frac{2020}{2020}-\frac{1}{2}\right)$$

Vì tích có thừa số $\left(\frac{1010}{2020}-\frac{1}{2}\right)=0$ nên $f(t)=0$

$$\Leftrightarrow t-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Vậy số cuối cùng còn lại trên bảng là $\frac{1}{2}$.

**BÙI VĂN CHI**

(*21/2 Lê Hồng Phong TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

***giới thiệu***


# CÁC DẠNG TOÁN THI THPT QUỐC GIA CÓ VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG CHƯƠNG TÍCH PHÂN

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
*(GV THPT Núi Thành, Núi Thành, Quảng Nam)*

Một số bài tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ nhưng chưa cho biết hàm số $f(x)$ mà chỉ cho biết $f(x)$ thỏa mãn một phương trình hàm cho trước.

**Phương pháp chung**

***Cách 1.*** Sử dụng các kiến thức về phương trình hàm để tìm hàm số $f(x)$.

**Cách 2.** Biểu diễn hàm $f(x)$ qua hàm $g(x)$ mà ta có thể tính được $\int_a^b g(x)dx$.

Đối với dạng toán trên, ta thường gặp các dạng cụ thể dưới đây.

**Dạng 1. Tích phân liên quan đến biểu thức**

$$u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x)$$

***Phương pháp.***

Ta có: $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow [u(x).f(x)]'=g(x)$. Suy ra

$u(x).f(x)=\int g(x)dx$. Từ đó tìm được $f(x)$

**Thí dụ 1.** *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $f(1)=-1$ và $(x+1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x$.*

*Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.*

***A.*** $I=\frac{4}{3}-4\ln 2$. ***B.*** $I=\frac{3}{4}-4\ln 2$.

***C.*** $I=\frac{4}{3}+4\ln 2$. ***D.*** $I=-\frac{4}{3}+4\ln 2$.

***Lời giải.*** Ta có $(x+1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x$

$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]'=3x^2-2x$. Suy ra

$(x+1)f(x)=\int(3x^2-2x)dx=x^3-x^2+C$.

Vì $f(1)=-1$ nên $(1+1)f(1)=1^3-1^2+C$.

Suy ra $C=-2$. Do đó $f(x)=\frac{x^3-x^2-2}{x+1}$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3-x^2-2}{x+1}dx$

$$=\int_0^1\left(x^2-2x+2-\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x-4\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}-4\ln 2.$$

**Dạng 2. Tích phân liên quan đến biểu thức**

$$f'(x)+f(x)=g(x)\ (*)$$

***Phương pháp.*** Nhân hai vế của $(*)$ với $e^x$ ta được $e^x.f'(x)+e^x.f(x)=e^x.g(x)$

$\Leftrightarrow [e^x.f(x)]'=e^x.g(x)$. Suy ra

$e^x.f(x)=\int e^x.g(x)dx$. Từ đó tìm được $f(x)$.

**Thí dụ 2.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+f(x)=(2x+1)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=e$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.*

***A.*** $I=1$. ***B.*** $I=e$. ***C.*** $I=0$. ***D.*** $I=2$.

***Lời giải.*** Ta có: $f'(x)+f(x)=(2x+1)e^x$

$\Leftrightarrow e^x f(x)+e^x.f'(x)=e^x.(2x+1)e^x$

$\Leftrightarrow [e^x.f(x)]'=(2x+1)e^{2x}$

Suy ra: $e^x.f(x)=\int(2x+1)e^{2x}dx$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C=xe^{2x}+C.$$

Vì $f(1)=e$ nên $e^1.f(1)=1.e^2+C$.

Suy ra $C=0$. Do đó $f(x)=xe^x$. Vậy

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e^x\Big|_0^1=1.$$

**Dạng 3. Tích phân liên quan đến biểu thức**

$$f'(x)+p(x).f(x)=g(x) \quad (*)$$

***Phương pháp.*** Nhân hai vế của $(*)$ với $e^{\int p(x)dx}$ ta được $f'(x).e^{\int p(x)dx}+p(x).e^{\int p(x)dx}.f(x)=e^{\int p(x)dx}.g(x)$

$$\Leftrightarrow\left[f(x).e^{\int p(x)dx}\right]'=e^{\int p(x)dx}.g(x)$$

Suy ra $f(x).e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}.g(x)dx$.

Từ đó tìm được $f(x)$.

**Thí dụ 3.** *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx$.*

**A.** $I=-\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$ **C.** $I=-\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

***Lời giải.*** Ta có $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x}{x^2+1}.f(x)=\frac{-x}{x^2+1}\ (1)$$

Nhân hai vế của $(1)$ với

$$e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{x}{x^2+1}dx}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$$

ta được: $\sqrt{x^2+1}f'(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]'=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$. Suy ra:

$$\sqrt{x^2+1}.f(x)=\int\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\sqrt{x^2+1}+C.$$

Vì $f(0)=-2$ nên $\sqrt{0^2+1}.f(0)=-\sqrt{0^2+1}+C$.

Suy ra $C=-1$. Do đó $f(x)=-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vậy $I=\int_0^{\sqrt{3}} x\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=-\int_0^{\sqrt{3}} xdx-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}=-\frac{5}{2}.$$

**Dạng 4. Phương trình hàm hàm hợp**

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(u(x))=v(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$.

***Phương pháp.*** Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$ và $f(t)=v(x)$. Đổi cận: $t=a\Rightarrow x=\alpha$; $t=b\Rightarrow x=\beta$ (vì $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$).

Do đó $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_\alpha^\beta u'(x).v(x)dx$

**Thí dụ 4.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính tích phân $I=\int_1^{10} f(x)dx$.*

**A.** $I=\frac{135}{4}$ **B.** $I=\frac{87111}{4}$ **C.** $I=\frac{133}{4}$ **D.** $I=\frac{131}{4}$.

***Lời giải.*** Đặt $t=x^3+2x-2\Rightarrow dt=(3x^2+2)dx$ và $f(t)=3x-1$. Đổi cận: $t=1\Rightarrow x=1$; $t=10\Rightarrow x=2$.

Do đó $I=\int_1^{10} f(x)dx$

$$=\int_1^{10} f(t)dt=\int_1^2(3x-1)(3x^2+2)dx=\frac{135}{4}.$$

**Thí dụ 5.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3,\forall x\neq 1$.*

*Tính tích phân $I=\int_2^3 f(x)dx$.*

**A.** $I=4+2\ln 2$ **B.** $I=4-2\ln 2$

**C.** $I=-4+2\ln 2$ **D.** $I=4+2\ln 3$.

***Lời giải.*** Đặt $t=\frac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow dt=-\frac{2}{(x-1)^2}dx$ và $f(t)=x+3$.

Đổi cận: $t=2\Rightarrow x=3$; $t=3\Rightarrow x=2$. Do đó:

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 f(t)dt=\int_3^2 (x+3)\frac{-2}{(x-1)^2}dx$$

$$=2\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=2\left(\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}\right)\Big|_2^3$$

$=4+2\ln 2.$

***Cách khác***. Ta tìm hàm số $f(x)$.

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3,\forall x\neq 1\ (1).$$

Đặt $t=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{t+1}{t-1}$. Từ (1) suy ra $f(t)=\frac{t+1}{t-1}+3=\frac{4t-2}{t-1}$. Do đó $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$.

Vậy $I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{4x-2}{x-1}\right)dx$

$$=\int_2^3\left(4+\frac{2}{x-1}\right)dx=\left(4x+2\ln|x-1|\right)\Big|_2^3=4+2\ln 2.$$

**Dạng 5. Đổi vai trò của biến *x* và *y***

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x=G(f(x))$, trong đó $G(t)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ .

**Phương pháp**

Đặt $y=f(x)\Rightarrow x=G(y)\Rightarrow dx=G'(y)dy$

Đổi cận: $x=a\Rightarrow G(y)=a\Rightarrow y=\alpha$;

$x=b\Rightarrow G(y)=b\Rightarrow y=\beta$

Do đó $I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta y.G'(y)dy$

**Thí dụ 6.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.*

***A.*** $I=\frac{5}{4}$ ***B.*** $I=14$ ***C.*** $I=0$ ***D.*** $I=\frac{3}{4}$.

***Lời giải.*** Đặt $y=f(x)$

$\Rightarrow y^3+y=x$ và $dx=(3y^2+1)dy$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow y^3+y=0\Rightarrow y=0$;

$x=2\Rightarrow y^3+y=2\Rightarrow y=1$.

Do đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y(3y^2+1)dy$

$$=\int_0^1(3y^3+y)dy=\left(\frac{3y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{5}{4}.$$

**Dạng 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$.**

**Tính tích phân $I=\int_{-a}^a f(x)dx\ (a>0)$**

***Phương pháp.*** Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=-a\Rightarrow t=a$; $x=a\Rightarrow t=-a$

Do đó $I=\int_{-a}^a f(x)dx=\int_a^{-a} f(-t)(-dt)$

$$=\int_{-a}^a f(-t)dt=\int_{-a}^a f(-x)dx.$$

Suy ra $2I=\int_{-a}^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int_{-a}^a g(x)dx.$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int_{-a}^a g(x)dx.$

**Thí dụ 7. (Trích đề minh họa của Bộ GD & ĐT năm 2017).** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.*

*Tính tích phân $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$ .*

***A.*** $I=-6$ ***B.*** $I=0$ ***C.*** $I=-2$ ***D.*** $I=6$.

***Lời giải.*** Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận:

$$x=-\frac{3\pi}{2}-\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}\ ;\ x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{3\pi}{2}.$$

Do đó: $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)(-dt)$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)dt=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx.$$

Suy ra $2I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)dx$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx = 2\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx$$

$$= 2\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)dx$$

$$= -2\sin x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + 2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12.$$

Vậy $I = 6$

**Dạng 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(a+b-x)=g(x)$ , $\forall x \in \mathbb{R}$.**

**Tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$**

***Phương pháp.*** Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$ ; $x = b \Rightarrow t = a$.

Do đó $I = \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt)$

$$= \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

Suy ra $2I = \int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx = \int_a^b g(x)dx.$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_a^b g(x)dx.$

**Thí dụ 8.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.*

*Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ .*

***A.*** $I = \frac{1}{2}$. ***B.*** $I = 1$. ***C.*** $I = 0$. ***D.*** $I = 2$.

***Lời giải.*** Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ . Suy ra

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 1.$$

Vậy $I = \frac{1}{2}$.

**Dạng 8. Kỹ thuật phương trình hàm**

**Thí dụ 9.** *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và thỏa mãn $3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2}$.*

*Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 f(x)dx$*

***A.*** $I = \frac{\pi}{6}$. ***B.*** $I = \frac{\pi}{40}$. ***C.*** $I = \frac{\pi}{42}$. ***D.*** $I = \frac{\pi}{41}$.

***Lời giải.*** Từ giả thiết, thay $x$ bằng $-x$ ta được

$$3f(-x)+4f(x)=\frac{1}{9+x^2}.$$

Do đó ta có hệ $\begin{cases} 3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2} \\ 3f(-x)+4f(x)=\frac{1}{9+x^2}. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x)+12f(-x)=\frac{3}{9+x^2} \\ 16f(x)+12f(-x)=\frac{4}{9+x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{7(9+x^2)}.$$

Khi đó $I = \int_{-3}^3 f(x)dx = \frac{1}{7}\int_{-3}^3 \frac{1}{9+x^2}dx.$

Đặt $x = 3\tan t \Rightarrow dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt.$

Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ ; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Do đó

$$I = \frac{1}{7}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9+9\tan^2 t}\frac{3}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{21}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{t}{21}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{42}.$$

***Cách khác.*** Ta có $3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]$. Khi đó

$$I=\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\left[\frac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]dx.$$

Xét $J=\int_{-3}^{3}f(-x)dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=-3$

Do đó $J=-\int_{3}^{-3}f(t)dt=\int_{-3}^{3}f(t)dt=\int_{-3}^{3}f(x)dx=I$

Vậy $I=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{3}\frac{dx}{9+x^2}-4I\right]\Leftrightarrow I=\frac{1}{7}\int_{-3}^{3}\frac{dx}{9+x^2}=\frac{\pi}{42}$.

**Thí dụ 10.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.*

**A.** $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$

***Lời giải.*** Từ giả thiết, thay $x$ bằng $1-x$ ta được $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\\2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(1-x)=2\sqrt{1-x^2}\\9f(x)+6f(1-x)=3\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$$

Suy ra $f(x)=\frac{3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}}{5}$.

Vậy $I=\frac{1}{5}\int_0^1\left(3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

(Bấm máy tính cầm tay).

***Cách khác.*** Từ $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}-3f(1-x)\right]$. Khi đó

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x\right].$$

Xét $J=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$. Khi đó

$$J=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I.$$

Vậy $I=\frac{1}{2}\left[\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-3I\right]$. Suy ra

$I=\frac{1}{5}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$. (Bấm máy tính cầm tay)

**Thí dụ 11.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.*

**A.** $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

***Lời giải.*** Từ giả thiết, thay $x$ bằng $\frac{1}{x}$ ta được

$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}\end{cases}.$$

Suy ra $f(x)=\frac{2}{x}-x$. Khi đó

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

***Cách khác.*** Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ suy ra $f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right)$. Khi đó $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Xét $J=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra

$$dt = -\frac{1}{x^2}dx = -t^2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt.$$

Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$ ; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$J = \int_2^{\frac{1}{2}} tf(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t}dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}dx = I.$$

Vậy $I = 3\int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2I$. Suy ra $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx = \frac{3}{2}$.

**Thí dụ 12.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn*

$$f(x-1) - 3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \forall x \neq \frac{1}{2}.$$

*Biết $\int_1^2 f(x)dx = a + b\ln 3 + c\ln 5$ với $a, b, c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a + b + c$ bằng*

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{11}{16}$.

***Lời giải.*** Đặt $\frac{x-1}{1-2x} = y - 1$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{2y-1} \Rightarrow x - 1 = \frac{1-y}{2y-1}$$

Suy ra $f\left(\frac{1-y}{2y-1}\right) - 3f(y-1) = \frac{-1}{2y-1}, \forall y \neq \frac{1}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) = \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2}$

Do đó $\begin{cases} f(x-1) - 3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \forall x \neq \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) = \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $-8f(x-1) = 1 - 2x + \frac{3}{1-2x}$

$$\Leftrightarrow f(x-1) = \frac{1}{8}\left(-1 + 2x + \frac{3}{2x-1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$$

Suy ra $f(x) = \frac{1}{8}\left(1 + 2x + \frac{3}{2x+1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{8}\int_1^2 \left(1 + 2x + \frac{3}{2x+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{8}\left(x + x^2 + \frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{3}{16}\ln 5.$$

Suy ra $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{16}, c = \frac{3}{16}$.

Vậy $2a + b + c = 1$.

**Dạng 9. Kỹ thuật biến đổi**

**Thí dụ 13.** *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$, $f(1) = \frac{1}{6}$ và $\int_1^2 f(x)dx = a\ln 2 + b\ln 3$ với $a, b$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ bằng*

**A.** 1 **B.** $-1$ **C.** 2 **D.** $-3$

***Lời giải.*** Ta có: $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+3) \text{ (do } f(x) > 0).$$

Suy ra: $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\int (2x+3)dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C.$$

Suy ra $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - C}$. Vì $f(1) = \frac{1}{6}$ nên $C = -2$. Suy ra: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

Do đó $I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|x+2|\right)\Big|_1^2 = -3\ln 2 + 2\ln 3 = a\ln 2 + b\ln 3.$$

Suy ra $a = -3; b = 2$. Vậy $a + b = -1$.

**Thí dụ 14.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 6]$ thỏa mãn $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và*

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}.$$

*Khi đó $\int_0^6 f(x)dx$ bằng*

**A.** 9 **B.** 72 **C.** 78 **D.** 66.

***Lời giải.*** Từ giả thiết suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Suy ra: $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}dx=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C.$$

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^2$.

Vậy $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^6=72.$

**Thí dụ 15.** *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thoả mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\frac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int_1^4 f(x)dx$.*

**A.** $I=\frac{1186}{45}$ **B.** $I=\frac{1187}{45}$ **C.** $I=\frac{1188}{45}$ **D.** $I=\frac{9}{2}$.

***Lời giải.*** Nhận xét: Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[1;4]$.

Từ giả thiết ta có $x[1+2f(x)]=[f'(x)]^2$.

Suy ra $f'(x)=\sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)},\ \forall x\in[1;4]$. Suy ra

$$\frac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}\Rightarrow\int\frac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int\sqrt{x}dx.$$

Do đó $\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

Vì $f(1)=\frac{3}{2}$ nên $C=\frac{4}{3}$. Suy ra

$$f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x\sqrt{x}+\frac{7}{18}.$$

Vậy $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x\sqrt{x}+\frac{7}{18}\right)dx=\frac{1186}{45}.$

**Thí dụ 16.** *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\ne -1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân*

$$I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx.$$

**A.** $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=1$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{5}{2}$.

***Lời giải.*** Từ giả thiết $f(3-x).f(x)=1$ và $f(0)=\frac{1}{2}$ suy ra $f(3)=2$. Ta có:

$$[1+f(3-x)]^2.f^2(x)=[1+f(x)]^2$$

(vì $f(3-x).f(x)=1$). Do đó:

$$I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}dx=-\int_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)$$

$$=-\frac{x}{1+f(x)}\Big|_0^3+\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx=-1+J.$$

Tính $J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx\overset{t=3-x}{=}-\int_3^0\frac{1}{1+f(3-t)}dt$

$$=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx.$$ Suy ra

$$2J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx=\int_0^3 1.dx=3$$

(vì $f(3-x).f(x)=1$). Suy ra $J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

**Dạng 10. Một vài dạng khác**

**Thí dụ 17.** *(Trích đề tham khảo của Bộ GD & ĐT năm 2018). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1[f'(x)]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$.*

*Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng*

**A.** $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4.

***Lời giải.*** Xét tích phân $\int_0^1 x^2f(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$. Khi đó:

$$\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{x^3f(x)}{3}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx\ (\text{do } f(1)=0).$$

Suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1$. Tìm $k$ sao cho $\int_0^1 \left[f'(x) - kx^3\right]^2 dx = 0$. Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x) - kx^3\right]^2 dx$

$$= \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2k\int_0^1 x^3 f'(x)dx + k^2\int_0^1 x^6 dx$$

$$= 7 - 2k.(-1) + k^2.\frac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow k = -7.$$

Do đó $\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 7x^3 = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) = -7x^3$. Suy ra $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Vì $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)dx$

$$= \left(-\frac{7}{20}x^5 + \frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$$

***Cách khác.*** Ta có $\int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1$.

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$7 = 7.(-1)^2 = 7\left(\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)^2$$

$$\le 7\int_0^1 \left(x^3\right)^2 dx.\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$$

$$= 7.\frac{1}{7}.\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = kx^3$ với $k \in \mathbb{R}$.

Ta có $-1 = \int_0^1 x^3 f'(x)dx = \int_0^1 x^3.kx^3 dx$

$$= k\int_0^1 x^6 dx = -\frac{kx^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{k}{7}.$$ Suy ra $k = -7$.

Do đó $f'(x) = -7x^3$. Suy ra $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Vì $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)d\ x = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)d\ x = \left(-\frac{7}{2\ 0}x^5 + \frac{7}{4}x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{5}$

**Chú ý.** ***Bất đẳng thức Holder:***

*Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó*

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx.$$

*Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), k \in \mathbb{R}$*

**Thí dụ 18.** (***Trích đề minh họa của Bộ GD & ĐT năm 2017***). *Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.*

*Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.*

***A.*** $I = -12$ ***B.*** $I = 8$ ***C.*** $I = 12$ ***D.*** $I = -8$.

***Lời giải.*** Xét tích phân $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó

$$10 = \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = -8$.

***Nhận xét.*** Nếu trong bài toán có xuất hiện tích phân dạng $\int_a^b g(x).f'(x)dx$ ta nghĩ ngay đến việc áp dụng công thức tích phân từng phần với cách đặt $u = g(x); dv = f'(x)dx$.

**Thí dụ 19.** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$, $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 1$.*

*Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}dx$.*

***A.*** $I = 1$ ***B.*** $I = 2$ ***C.*** $I = 3$ ***D.*** $I = 4$.

***Lời giải.*** Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$.

Đặt $t=\cos^2 x$. Suy ra $dt=-2\sin x\cos x dx$

$=-2\cos^2 x\tan x dx=-2t.\tan x dx \Rightarrow \tan x dx=-\dfrac{dt}{2t}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$. Khi đó

$$1=A=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx.$$

Suy ra $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx=2$. Xét $B=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx=1$.

Đặt $u=\ln^2 x$. Suy ra

$du=\dfrac{2\ln x}{x}dx=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}dx=\dfrac{2u}{x\ln x}dx\Rightarrow\dfrac{dx}{x\ln x}=\dfrac{du}{2u}$.

Đổi cận: $x=e\Rightarrow u=1; x=e^2\Rightarrow u=4$

Khi đó $1=B=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4\frac{f(u)}{u}du=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f(x)}{x}dx$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^4\frac{f(x)}{x}dx=2$.

Xét tích phân cần tính $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}dx$.

Đặt $v=2x$, suy ra $dx=\dfrac{1}{2}dv$, $x=\dfrac{v}{2}$.

Đổi cận: $x=\dfrac{1}{4}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}$; $x=2\Rightarrow v=4$

Khi đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{v}dv=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+\int_1^4\frac{f(x)}{x}dx=2+2=4.$$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. Khi đó $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 3.

**Bài 2.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_1^2 f(x-1)dx=3$ và $f(1)=4$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 x^3 f'(x^2)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** $-1$ **D.** 1.

**Bài 3.** Cho hàm số $f(x)$ chẵn và liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2020$. Khi đó $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2019^x+1}dx$ bằng

**A.** 2020 **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{2020}$ **D.** 4040.

**Bài 4.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[3;7]$, thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ và $\displaystyle\int_3^7 f(x)dx=4$. Khi đó $\displaystyle\int_3^7 xf(x)dx$ bằng

**A.** 20 **B.** 30 **C.** 40 **D.** 50.

**Bài 5.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$ và $f(0)=1$. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx=a\pi+b$ với $a,b$ là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $4a=b$ **B.** $a=4b$ **C.** $4a=-b$ **D.** $a=-4b$.

**Bài 6.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)dx=\pi$ và $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 dx=2$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

**A.** $-\dfrac{4}{\pi}$ **B.** $-\dfrac{6}{\pi}$ **C.** $\dfrac{4}{\pi}$ **D.** $\dfrac{6}{\pi}$.

*(Xem tiếp trang 41)*


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/524 (Lớp 6).** Tìm các số nguyên tố $x$, $y$ thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.

LÊ THỊ THẢO
*(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)*

**Bài T2/524 (Lớp 7).** Cho tam giác $ABC$ ($AB < BC$), các tia phân giác của các góc $BAC$, $ABC$ cắt nhau tại $I$. Vẽ $ID$ vuông góc với $AB$ tại $D$, $IE$ vuông góc với $AC$ tại $E$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $AC$. $K$ là giao điểm của $DE$ và $MN$. Chứng minh rằng ba điểm $B$, $I$, $K$ thẳng hàng.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T3/524.** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$2025^x = y^3 + 3y^2 + 2y + 6.$$

NGUYỄN HÀM THÀNH
*(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)*

**Bài T4/524.** Cho tam giác $ABC$ có đường cao $AH$, đường tròn tâm $I$ nội tiếp tam giác tiếp xúc với $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt tại $D$, $E$, $F$. Gọi $G$ là giao điểm của $EF$ và $BI$, $P$ là giao điểm của $AI$ và $FD$. Chứng minh rằng $GD$ vuông góc với $HP$.

ĐỖ MẠNH PHÚC
*(Chung cư Rice City Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai, Hà Nội)*

**Bài T5/524.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương thỏa mãn $a.b = c.d$ và $c > a$, $d > a$. Chứng minh rằng: $\sqrt{b} - \sqrt{a} \geq 1$.

BÙI VĂN TẠO
*(GV THCS Chánh Lộ, TP. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/524.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3y = x^2 + 2y^2 + x + 8 \\ y^3 + z^3 + 3z = y^2 + 2z^2 + y + 8. \\ z^3 + x^3 + 3x = z^2 + 2x^2 + z + 8 \end{cases}$$

NGUYỄN TIÊN TIẾN
*(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)*

**Bài T7/524.** Cho các số thực $a, b, c > \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4bc}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca} \geq 9.$$

HOÀNG NGỌC MINH
*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T8/524.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq 18\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

TRẦN XUÂN HÒA
*(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)*

**Bài T9/524.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương sao cho $x < y$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4}.\sqrt{y^2 - 2\sqrt{2}y + 4} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4}.\sqrt{y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} \geq 4(x + y).$$

NGUYỄN DUY LIÊN
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/524.** Chứng minh rằng

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n}$$

là số nguyên lớn hơn hoặc bằng $3^{n+1}$ và chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

NGUYỄN VĂN XÁ
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*

**Bài T11/524.** Cho trước hai số dương $\alpha$ và $\beta$. Xét hai dãy số $(x_n), (y_n)$ như sau: $x_1 = \alpha, y_1 = \beta$ và

$$x_{n+1} = \frac{5x_n y_n}{2y_n + 3x_n},\ y_{n+1} = \frac{5x_{n+1} y_n}{2y_n + 3x_{n+1}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

NGUYỄN TÀI CHUNG
*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)*

**Bài T12/524.** Cho tam giác $ABC$ nhọn, nội tiếp đường tròn $(O)$, đường cao $AD$. Tiếp tuyến tại $B$, $C$ của $(O)$ cắt nhau tại $T$. Trên đoạn thẳng $AD$ lấy điểm $K$ sao cho $\widehat{BKC} = 90^0$. $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. $KG$ cắt $OT$ tại $L$. Các điểm $P$, $Q$ thuộc đoạn $BC$ sao cho $LP \parallel OB$, $LQ \parallel OC$. Các điểm $E$, $F$ lần lượt thuộc đoạn $CA$, $AB$ sao cho $QE$, $PF$ cùng vuông góc với $BC$. Gọi $(T)$ là đường tròn tâm $T$ đi qua $B$, $C$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $AEF$ tiếp xúc với $(T)$.

TRẦN QUANG HÙNG

*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài L1/524.** Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp dao động đồng pha, phát đồng thời sóng có bước sóng bằng 1,2 cm. Hai điểm $C$ và $D$ thuộc cùng một elip trên mặt chất lỏng nhận $A$, $B$ là hai tiêu điểm. Biết hiệu số khoảng cách từ hai nguồn tới $C$ và $D$ lần lượt là $AC - BC = 4,8$ cm và $AD - BD = 0,4$ cm. Coi biên độ sóng do mỗi nguồn gửi đến mỗi điểm trên elip nói trên đều bằng nhau. Tại thời điểm $t$ nào đó, li độ của điểm $C$ là 1,5 mm thì li độ của điểm $D$ là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

**Bài L2/524.** Cho đoạn mạch có $R$, $L$, $C$ mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Dùng ampe kế mắc nối tiếp vào đoạn mạch để đo cường độ dòng điện, khi đó số chỉ ampe kế là 2 A. Dùng một dây dẫn có điện trở r rất nhỏ nối tắt tụ điện C thì số chỉ ampe kế cũng là 2 A, vẫn dùng dây đó nối tắt đoạn mạch chứa $L$, $C$ thì số chỉ ampe kế là 2,5 A. Khi dùng dây này nối tắt hai đầu cuộn cảm thuần $L$ thì ampe kế chỉ bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/524** (For 6th grade). Find all prime numbers $x, y$ satisfying $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.

**Problem T2/524** (For 7th grade). Given a triangle $ABC$ ($AB < BC$), the bisector of the angles $BAC$, $ABC$ intersect at $I$. Draw $ID$ perpendicular to $AB$ at $D$, $IE$ perpendicular to $AC$ at $E$. Let $M$, $N$ respectively be the midpoints of $BC$, $AC$. Denote $K$ the intersection between $DE$ and $MN$. Show that the points $B$, $I$, $K$ are collinear.

**Problem T3/524.** Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying

$$2025^x = y^3 + 3y^2 + 2y + 6.$$

**Problem T4/524.** Given a triangle $ABC$ with the altitude $AH$. The incircle $I$ of the triangle is tangent to $BC$, $CA$, $AB$ respectively at $D$, $E$, $F$. Let $G$ be the intersection between $EF$ and $BI$, and $P$ the intersection between $AI$ and $FD$. Show that $GD$ is perpendicular to $HP$.

**Problem T5/524.** Suppose that $a$, $b$, $c$, $d$ are positive integers which satisfy $a.b = c.d$ and $c > a$, $d > a$. Show that $\sqrt{b} - \sqrt{a} \geq 1$.

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/524.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3y = x^2 + 2y^2 + x + 8 \\ y^3 + z^3 + 3z = y^2 + 2z^2 + y + 8. \\ z^3 + x^3 + 3x = z^2 + 2x^2 + z + 8 \end{cases}$$

**Problem T7/524.** Given real numbers $a, b, c > \frac{1}{2}$. Show that

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + \frac{4ab}{1+ab} + \frac{4bc}{1+bc} + \frac{4ca}{1+ca} \geq 9.$$

**Problem T8/524.** Given a triangle $ABC$. Show that

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq 18\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

**Problem T9/524.** Given positive numbers $x$, $y$ with $x < y$. Prove the following inequalities

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 4}.\sqrt{y^2 - 2\sqrt{2}y + 4} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 4}.\sqrt{y^2 + 2\sqrt{2}y + 4} \geq 4(x + y).$$

*(Xem tiếp trang 41)*


**Bài T1/520.** *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.*

***Lời giải.*** Ta biến đổi tổng $2^8 + 2^{11}$ như sau:

$$2^8 + 2^{11} = 2^8(1 + 2^3) = 2^{4.2}.3^2 = 48^2,$$

từ đó: $2^8 + 2^{11} + 2^n = 48^2 + 2^n$.

Theo giả thiết $48^2 + 2^n = a^2$ với $a$ là số nguyên dương và $a > 48$ thì $2^n = a^2 - 48^2$, hay là

$$2^n = (a + 48)(a - 48) > 48.$$

Do vế trái của đẳng thức này là lũy thừa của 2 nên chỉ xảy ra $a + 48 = 2^m$ và $a - 48 = 2^t$ với $m$, $t$ là các số tự nhiên mà $m > t \geq 0$, $n = m + t$.

Từ hai đẳng thức trên có $2^m - 2^t = 96$.

- Nếu $t = 0$ thì $a = 49$ và $2^m = 97$, không tồn tại số nguyên $m$ như thế.

- Nếu $t > 0$ thì $2^t(2^{m-t} - 1) = 2^5.3$, mà $2^t$ là số chẵn và $2^{m-t} - 1$ là số lẻ nên chỉ xảy ra

$$2^t = 2^5 \text{ và } 2^{m-t} - 1 = 3,$$

suy ra $t = 5$ và $m - 5 = 2$, tức là $m = 7$, do đó $n = 7 + 5 = 12$ và $a = 48 + 2^5 = 48 + 32 = 80$.

Thử lại thấy $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 48^2 + 2^{12} = 80^2$, thỏa mãn.

***Nhận xét.*** Bạn *Đặng Ngọc Duy*, 5A, Trường Tiểu học Kế An 3, Kế Sách, **Sóc Trăng** gửi lời giải đúng.

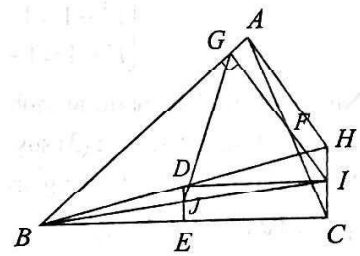
**NGUYỄN VIỆT HẢI**

**Bài T2/520.** *Cho tam giác ABC nhọn. D là điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC. Gọi G là hình chiếu của F trên AB, gọi J là trung điểm của DE. Chứng minh tam giác BGJ cân.*

***Lời giải.*** Bài toán này áp dụng bổ đề: *''Đường thẳng qua trung điểm 2 cạnh bên của tam giác song song với cạnh đáy''* và bổ đề đơn giản sau: *''Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi có một cạnh gấp đôi đường trung tuyến ứng với nó''*.

Bạn đọc có thể tự chứng minh hai bổ đề này hoặc tham khảo trong sách giáo khoa và bài tập.

Gọi $H$ là điểm đối xứng của $B$ qua $D$. Ta có $DA = DB = DH$. Theo Bổ đề về tam giác vuông, ta có góc $\widehat{BAH} = 90^0$, cho nên $GF \parallel AH$. Theo Định lý đường trung bình của tam giác áp dụng cho tam giác $ACH$ thì $GF$ đi qua trung điểm $I$ của $HC$. Mặt khác $DI$ là đường trung bình của tam giác $HBC$, cho nên $DI \parallel BC$ và $DI = BE = EC$, và do đó $DICE$ là hình bình hành. Vậy $BI$ đi qua $J$ là trung điểm của $ED$, cũng là trung điểm của $BI$. Bổ đề trong tam giác vuông $BIG$ cho ta $JG = JI = JB$ (vì $J$ là trung điểm của $BI$). Vậy tam giác $JBG$ cân tại $J$.




***Nhận xét.*** Chỉ có bạn *Kiều Minh Phương*, 7A3 THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ** giải bài toán này và tự sửa lỗi in nhầm $G$ là chân đường vuông góc hạ từ $F$ xuống $AB$.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T3.520.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 + y = 2 & (1) \\ y^3 + z = 2 & (2) \\ z^3 + t = 2 & (3) \\ t^3 + x = 2 & (4) \end{cases}$$

***Lời giải. Cách 1.*** Giả sử $(x, y, z, t)$ là một nghiệm của hệ phương trình trên. Do $x, y, z, t$ có tính chất hoán vị vòng quanh, không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z, t\}$. Khi đó $x \geq y, x \geq z, x \geq t$.

Nếu $x < 1$ thì $x^3 + y < 1^3 + 1 = 2$ (mâu thuẫn với (1)). Do đó $x \geq 1$.

Từ (1) suy ra: $y = 2 - x^3 \leq 2 - 1^3$, nên $y \leq 1$.

Từ (2) suy ra: $z = 2 - y^3 \geq 2 - 1^3$, nên $z \geq 1$.

Từ (3) suy ra : $t = 2 - z^3 \leq 2 - 1^3$, nên $t \leq 1$.

Do đó $x^3 \geq x, y \geq y^3, z^3 \geq z, t \geq t^3$, kết hợp với (1), (2), (3), (4) ta có: $4 = 2 + 2 =$

$$= (x^3 + y) + (z^3 + t) \geq (x + y^3) + (z + t^3)$$
$$= (y^3 + z) + (t^3 + x) = 2 + 2 = 4.$$

Dấu bằng phải xảy ra, nên suy ra:

$$x^3 = x, y = y^3, z = z^3, t = t^3.$$

Với $x^3 = x$, kết hợp với $x \geq 1$, suy ra $x = 1$.

Lập luận tương tự, ta có $y = z = t = 1$. Nhận thấy $x = y = z = t = 1$ thỏa mãn hệ phương trình. Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất:

$$(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1).$$

***Cách 2.*** Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - 1 = 1 - y \\ y^3 - 1 = 1 - z \\ z^3 - 1 = 1 - t \\ t^3 - 1 = 1 - x \end{cases}$$

Nếu $x = 1$ thì từ hệ phương trình suy ra $y = z = t = 1$.

Nếu $x > 1$, từ (1), (2) và (3) suy ra $y < 1, z > 1, t < 1$.

Nhân theo vế các phương trình của hệ trên, ta có

$$(x^3 - 1)(y^3 - 1)(z^3 - 1)(t^3 - 1) = \\ = (1 - y)(1 - z)(1 - t)(1 - x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)(z^2 + z + 1)(t^2 + t + 1) = 1 \quad (5)$$

(do $(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) \neq 0$).

Vì $x > 1$ và $z > 1$ nên $x^2 + x + 1 > 3$;

$$z^2 + z + 1 > 3; y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4};$$

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Từ đó vế trái của (5) sẽ lớn hơn $7\frac{1}{2}$ tức là lớn hơn vế phải của (5). Do đó mâu thuẫn với (5).

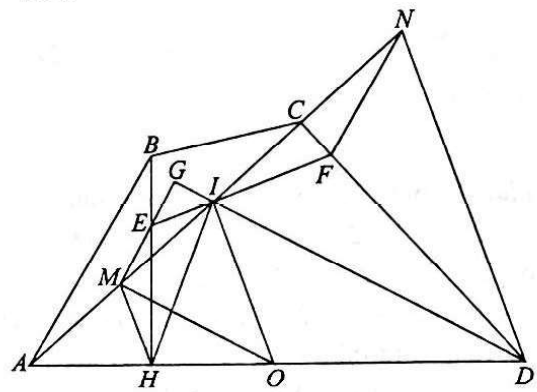
Tương tự $x < 1$ cũng xảy ra mâu thuẫn. Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất:

$$(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1).$$

***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải hệ phương trình mà các ẩn có vai trò hoán vị vòng quanh, ta thường giả sử một ẩn nhận giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Từ đó sử dụng bất đẳng thức để tìm ra nghiệm của hệ phương trình. Bài này nhiều bạn tham gia giải đã quan niệm nhầm đây là hệ phương trình đối xứng nên đã giả sử $x \geq y \geq z \geq t$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, *Nguyễn Quang Minh, Nguyễn Đức Hiếu*, 9A6, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Tây Ninh:** *Ngô Quốc Tài*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Tây Ninh.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T4/520.** *Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$. Kẻ $BH \perp AD$ tại H. Trên đường chéo AC lấy AI = AB. Gọi O là trung điểm của AD. Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt BH và CD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng IF = 2IE.*




***Lời giải. Cách 1*** (Theo bạn *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**).

Gọi $M$ là trung điểm của $IA$ và $N$ là điểm đối xứng với $A$ qua $I$.

Vì $OI$ là đường trung bình của tam giác $ADN$ nên

$$DN // OI \Rightarrow IF \perp DN.$$

Mà $DC \perp IN$, nên $F$ là trực tâm tam giác $IDN$, suy ra $NF \perp DI$ (1).

Mặt khác, áp dụng hệ thức trong tam giác vuông $ABD$ ta có: $AH.AD = AB^2 = AI^2 \Leftrightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AD}$.

Từ đó suy ra $\Delta AHI \backsim \Delta AID$ (c.g.c). Mà $IO$, $HM$ là hai trung tuyến tương ứng nên

$$\widehat{AHM} = \widehat{AIO} \Rightarrow \widehat{MHE} = \widehat{MIE}.$$

Suy ra tứ giác $HMEI$ và do đó tứ giác $MEIO$ nội tiếp. Gọi $G$ là giao điểm của $ME$ và $DI$, ta có:

$\widehat{MHI} = \widehat{GEI} = \widehat{MOI} = \widehat{OID} = 90° - \widehat{GIE}$ (vì $\widehat{OIE} = 90°$).

Suy ra: $ME \perp DI$ (2).

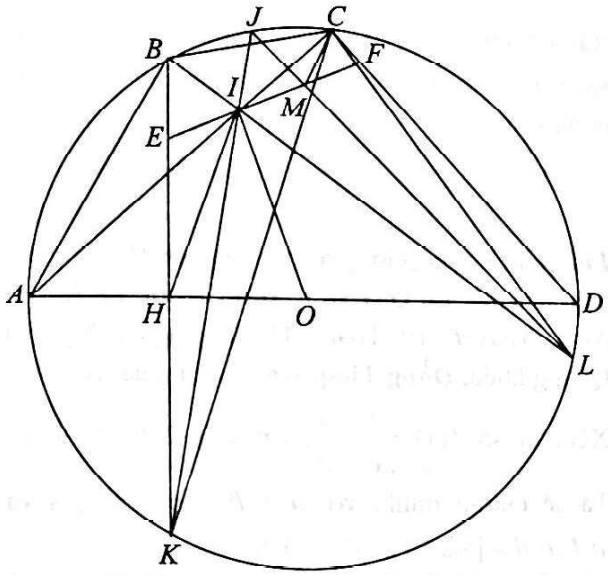
Từ (1) và (2) suy ra $ME // NF$. Áp dụng định lí Thales ta có $\frac{IE}{IF} = \frac{IM}{IN} = \frac{1}{2}$, hay $IF = 2IE$.

***Cách 2.*** Gọi $K$ là giao điểm thứ hai của $BH$ và đường tròn $(O)$. $J$, $L$ lần lượt là giao điểm thứ hai của $KI$, $BI$ với đường tròn $(O)$.

Dễ thấy $A$ là điểm chính giữa cung $BK$, kết hợp với $AB = AI = AK$, suy ra $I$ là tâm đường tròn nội

tiếp tam giác $BCK$, suy ra $J$, $L$ lần lượt là điểm chính giữa cung $BC$ và cung $CK$, từ đó ta có:

$JC = JI = JB$ và $LI = LC = LK$.




Suy ra $JL$ là trung trực của $IC$, vì $M \in JL$ nên $MI = MC$. Mặt khác, tam giác $ICF$ vuông tại $C$, suy ra $M$ là trung điểm của $IF$.

Lại có, theo định lí con bướm, ta có $IE = IM$.

Do đó $IF = 2IE$.

***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Bình*, các bạn sau cũng cho lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Phú Thọ:** *Trần Thị Thanh Thảo*, 9A3, THCS Lâm Thao.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/520.** *Giải phương trình* $x + \dfrac{2x\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.

***Lời giải.*** Nhận thấy nếu $x \le 0$ thì

$x + \dfrac{2x\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}} \le 0 < 1$, PT không thỏa mãn, do đó $x > 0$. Từ PT suy ra:

$$\frac{2x\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}} = 1 - x > 0 \quad (1), \text{ nên } 0 < x < 1.$$

Bình phương hai vế của (1), ta được :

$$\frac{24x^2}{x^2+1} = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 24x^2 = \left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+1\right) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 24 = \frac{x^2+1}{x}.\frac{x^2-2x+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 24 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - 2\right).$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} > 2$ (vì $0 < x < 1$). Ta được:

$$t(t-2) = 24 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 25$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t - 1 = 5 \Leftrightarrow t = 6$. Do đó:

$$x + \frac{1}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Vì $0 < x < 1$ nên $x = 3 - 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn PT).

Vậy PT có một nghiệm là $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

***Nhận xét.*** Từ PT(2) có thể biến đổi như sau:

$$(2) \Leftrightarrow 24x^2 = \left(x^2 - x + 1 + x\right)\left(x^2 - x + 1 - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + 1\right)^2 - x^2 = 24x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x + 1\right)\left(x^2 + 4x + 1\right) = 0.$$

Từ đó dễ tìm được kết quả bài toán. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Thái Nguyên:** *Trần Quang Khôi*, 7A5, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T6/520.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 1 = 4\sqrt{xyz} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{z}+1} = \dfrac{3\sqrt{xyz}}{x+y+z} \end{cases}.$$

***Lời giải.*** ĐK: $x, y, z \ge 0, x + y + z > 0$.

*Nhận xét*: Nếu $(x, y, z)$ là một nghiệm của hệ phương trình (HPT) thì $x, y, z > 0$.

Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$ thì $a, b, c \ge 0$ và HPT trở thành:

$$\begin{cases} a + b + c + 1 = 4abc & (1) \\ \dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} + \dfrac{1}{2c+1} = \dfrac{3abc}{a^2+b^2+c^2} & (2) \end{cases}$$

Tất cả các BĐT được dùng trong bài này là BĐT Cauchy cho hai số không âm. Từ PT (1) ta có:

$$4abc = a+b+c+1 \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{c} \ge 4\sqrt[4]{abc}.$$

Kết hợp với $abc > 0$ ta suy ra $abc \ge 1$

$$\Rightarrow t = a+b+c = 4abc - 1 \ge 3. \qquad (3)$$

*Nhận xét*:

+ Với mọi các số thực $p, q, r$, ta có:

$$(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp$$
$$\le p^2+q^2+r^2+(p^2+q^2)+(q^2+r^2)+(r^2+p^2)$$
$$=3(p^2+q^2+r^2).$$

Do đó: $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{t^2}{3}$.

+ Với mọi số thực dương $p, q, r$, ta có:

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)(p+q+r)$$
$$=3+\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right)+\left(\frac{r}{p}+\frac{p}{r}\right) \ge 3+2.3=9.$$

Do đó:

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1} \ge \frac{9}{2(a+b+c)+3} = \frac{9}{2t+3}.$$

Bởi vậy từ PT (2) ta có:

$$\frac{t+1}{t^2} = \frac{a+b+c+1}{(a+b+c)^2} \ge \frac{4abc}{3(a^2+b^2+c^2)}$$
$$= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right) \ge \frac{4}{2t+3}.$$
$$\Rightarrow 0 \ge 4t^2-(t+1)(2t+3) = 2t^2-5t-3$$
$$=(t-3)(2t+1) \Rightarrow 3 \ge t \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta suy ra tất cả các BĐT đều trở thành đẳng thức. Suy ra: $a=b=c=1 \Rightarrow x=y=z=1$. Đó là nghiệm duy nhất của HPT.

***Nhận xét.*** HPT có hai phương trình và ba ẩn số có nghĩa một bất đẳng thức nào đó đã trở thành đẳng thức. Các bạn học sinh lớp 8, 9 ,10 có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Hán Vũ Long, Trần Tuấn Minh,* 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hà Nội:** *Phạm Hoàng Gia Bảo, Đinh Mai Phương,* 8C2, THCS Archimedes Đông Anh; *Nguyễn Đức Trọng,* 10A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình,* 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Võ Quốc Gia,* 10T1; *Lê Thị Thanh Tâm,* 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt,* 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu và rất nhiều các bạn học sinh lớp 11, 12.

**NGUYỄN MINH ĐỨC**

**Bài T7/520.** *Cho các số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn a, b, c, d ≥ −2 và có tổng bằng 4. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \quad (*).$$

***Lời giải*** (Kết hợp lời giải của *Nguyễn Huy Hoàng,* 11T, chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**; *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt,* 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** với lời giải của tác giả).

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$, với $x \in [-2,0) \cup (0,+\infty)$.

Ta sẽ chứng minh: với $a+b+c+d \le 4$ và $a,b,c,d \in [-2,0) \cup (0,+\infty)$ thì

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \ge 0.$$

• TH1: Cả bốn số $a, b, c, d$ khác 0 và đều lớn hơn hoặc bằng $-1$.

Với mọi số thực $x \ge -1, x \ne 0$ ta có

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1+x = \frac{1-x-x^2+x^3}{x^2} = \frac{(1-x)^2(1+x)}{x^2} \ge 0.$$

Thay $x$ lần lượt bởi $a,b,c,d$ vào bất đẳng thức trên, ta được

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \ge 4-(a+b+c+d) \ge 0$$

khi $a+b+c+d \le 4$.

• TH2: Tồn tại ít nhất một trong bốn số nhỏ hơn $-1$, chẳng hạn: $-2 \le a < -1$.

Với mọi số thực $x \ne 0$ ta có: $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ hay

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \ge -\frac{1}{4}$, tức là $f(x) \ge -\frac{1}{4}$.

Thay $x$ bởi $b,c,d$ rồi cộng lại, ta được:

$$f(b)+f(c)+f(d) \ge -\frac{3}{4}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $f(a) \ge \frac{3}{4}$ với mọi $-2 \le a < -1$. Thật vậy, với $-2 \le a \le \frac{2}{3}$ ta có:

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{3}{4}=\frac{4-4a-3a^2}{a^2}=\frac{(2+a)(2-3a)}{a^2}\geq 0.$$

Vậy $f(a)\geq\frac{3}{4}$ với mọi $-2\leq a<-1$.

BĐT(*) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$ hoặc hoán vị của $(-2,2,2,2)$.

***Nhận xét.*** 1) Từ chứng minh ta thấy: BĐT(*) đúng chỉ cần điều kiện $a,b,c,d\in[-2,0)\cup(0,+\infty)$ và $a+b+c+d\leq 4$. Trong trường hợp 2 (có ít nhất một trong bốn số $a$, $b$, $c$, $d$ nhỏ hơn $-1$), thì BĐT(*) đúng không cần điều kiện $a+b+c+d\leq 4$.

2) Một số bạn không để ý đến điều kiện bài toán nên đã coi cả bốn số $a,b,c,d$ là những số dương. Cái khó của bài này (để không thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM) là điều kiện $a,b,c,d\geq -2$. Một vài bạn có lời giải và trình bày giống hệt nhau. Một số bạn thì xét quá tỉ mỉ các trường hợp: trong bốn số có một, hai, ba, bốn số dương, nên trình bày dài. Danh sách các bạn làm đúng là:

**Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng,* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Thiên Lý,* 11T1, *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt,* 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hương Thủy, Phan Thị Minh Châu, Lê Thị Thanh Tâm,* 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân,* 11T1, THPT chuyên Hưng Yên.

**TẠ DUY PHƯỢNG**

**Bài T8/520.** *Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng*

$$\frac{b}{a^2c^2}\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]\geq\frac{6\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

*Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?*

***Lời giải.*** Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq\frac{6a^2c^2}{b}.\frac{\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}\quad(*)$$

Thật vậy, theo định lý hàm số sin và kết quả quen thuộc: $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ ta có:

$$\frac{6a^2c^2}{b}.\frac{\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$=6abc.\frac{ac}{b^2}.\frac{\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$=48abc.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leq 6abc\ (1).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ và bất đẳng thức $(b+c)(c+a)(a+b)\geq 8abc$, ta được:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(b+c)(c+a)(a+b)}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{8a^2b^2c^2.abc}=6abc\quad(2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra bất đẳng thức (*) đúng, do đó bất đẳng thức ở đề bài được chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $ABC$ đều.

***Nhận xét.*** Hầu hết các bài gửi về Tòa soạn đều sử dụng định lý hàm số sin, bất đẳng thức $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ và bất đẳng thức Cauchy để giải quyết bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt:

**Hà Nội**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Phạm Văn Thông, Trần Sơn Tùng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế**: *Phan Thị Minh Châu, Lê Thị Thanh Tâm, Nguyễn Hương Thủy*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Đồng Tháp**: *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/520**. *Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình* $\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=\frac{1}{2}$ *với n là số nguyên dương cho trước.*

***Lời giải.*** ĐK: $x\neq -1,\ x\neq -2,...,\ x\neq -n.$

***Cách 1.*** • Với $n = 1$ thì PT đã cho trở thành:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

có nghiệm là $x = 1$.

• Với $n = 2$ thì PT đã cho trở thành:

$$\frac{x}{x+1}-\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}$$

có hai nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = 2$.

• Giả sử với $n = k$, PT đã cho có $k$ nghiệm là $x\in\{1,2,...,k\}$. Ta chứng minh PT

$$\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=\frac{1}{2}\ (*)$$

có $k + 1$ nghiệm $x\in\{1,2,...,k,k+1\}$.

Thật vậy (*) có thể viết dưới dạng:

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}+(-1)^{k}\frac{x(x-1)...(x-k)}{(x+1)...(x+k+1)}=\frac{1}{2}$$

hay dạng $A_1(x)+A_2(x)=\frac{1}{2}$.

Theo giả thiết quy nạp thì

$$A_1(i)=\frac{1}{2},\ \forall i\in\{1,2,...,k\}$$

và $\quad A_2(i)=0,\ \forall i\in\{1,2,...,k\}$.

Vậy PT (*) có nghiệm $x\in\{1,2,...,k\}$.

Cuối cùng ta chứng minh (*) có nghiệm $k + 1$ hay tổng $\quad S_{k+1}=\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r-1}\frac{(k+1)k...(k-r+2)}{(k+2)...(k+1+r)}=\frac{1}{2}$,

biết $S_k=\frac{1}{2}$ nên điều này dễ chứng minh được.

Vậy các nghiệm của PT đã cho là $x\in\{1,2,...,n\}$ với $n$ đã biết.

***Cách 2.*** Ta đi chứng minh:

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{2(x+1)...(x+n)}+\frac{1}{2}(1).$$

Thật vậy:

• Với $n = 1$, ta có: $\frac{x}{x+1}=(-1)^{0}\frac{x-1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}$ (đúng).

• Ta giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là:

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=(-1)^{k-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{2(x+1)...(x+k)}+\frac{1}{2}$$

(giả thiết quy nạp). Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ hay chứng minh

$$\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=(-1)^{k}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k-1)}{2(x+1)...(x+k+1)}\ (2).$$

Ta có: $\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}$

$$=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}+(-1)^{k}\frac{x(x-1)...(x-k)}{(x+1)...(x+k+1)}$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{2(x+1)...(x+k)}+\frac{1}{2}+(-1)^{k}\frac{x(x-1)...(x-k)}{(x+1)...(x+k+1)}$$

$$=(-1)^{k}\left[\frac{x(x-1)...(x-k)}{(x+1)...(x+k+1)}-\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)}{2(x+1)...(x+k)}\right]+\frac{1}{2}$$

$$=(-1)^{k}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k)(2x-x-k-1)}{2(x+1)...(x+k+1)}+\frac{1}{2}$$

$$=(-1)^{k}\frac{(x-1)(x-2)...(x-k-1)}{2(x+1)...(x+k+1)}+\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức trên là điều cần chứng minh ở (2).

Theo nguyên lý quy nạp thì (1) được chứng minh.

Áp dụng đẳng thức trên vào bài toán, ta có:

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{2(x+1)...(x+n)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{2(x+1)...(x+n)}=0.$$

Vì $(-1)^{n-1}\neq 0, \frac{1}{2(x+1)...(x+n)}\neq 0$ nên PT đã cho có tập nghiệm $S=\{1,2,...,n\}$.

***Nhận xét.*** Cách thứ nhất là của tác giả đề toán, cách thứ hai là của bạn *Trần Gia Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ, **Quảng Nam**. Có ít bạn tham gia giải bài này, ngoài bạn *Huy*, bạn *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** cũng có lời giải đúng bằng cách đánh giá qua các hệ số tổ hợp.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T10/520.** *Cho dãy số $(u_n)$ được xác định như sau: $u_1=3$; $u_n=4u_{n-1}+3n^3-12n^2+12n-4$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p thì $2019\sum_{i=1}^{p-1}u_i$ luôn chia hết cho p.*

***Lời giải*** (của bạn *Thái Nhật Minh*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**).

Ta có: $u_n+n^3=4\left[u_{n-1}+(n-1)^3\right]$.

Đặt $v_n=u_n+n^3$. Suy ra $v_1=4$, $v_n=4v_{n-1}$

$\Rightarrow v_n=4^n$. Từ đó $u_n=4^n-n^3$.

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=\sum_{i=1}^{n}4^i-\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{4}{3}(4^n-1)-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Vậy

$$2019\sum_{i=1}^{p-1}u_i=2692(4^{p-1}-1)-\frac{2019}{4}\left[(p-1)p\right]^2.$$

Do $p$ là số nguyên tố lẻ nên $(4, p)=1$, từ đó: $4^{p-1}-1\,\vdots\, p$ (theo định lí Fermat).

Lại có: $\frac{2019}{4}(p-1)^2p^2=2019\left(\frac{p-1}{2}\right)^2p^2\,\vdots\, p$.

Vậy $2019\sum_{i=1}^{p-1}u_i\,\vdots\, p$.

***Nhận xét.*** Đây là một bài toán tương đối dễ. Có nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều làm đúng. Một số bạn có lời giải tốt bao gồm: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Đào Quang Anh*, 8C2, THCS Archimedes Đông Anh; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T11/520.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f\left(f(x)-2y\right)=6x+f\left(f(y)+x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (1)$$

***Lời giải.*** (Theo đa số các bạn).

Theo (1), với $y=\frac{1}{2}f(x)$ thì

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}f(x)\right)+x\right)=-6x+f(0),\forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Từ (2) suy ra $f(x)$ là toàn ánh. Do đó tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để $f(a)=0$. Theo (1), với $y=a$ thì

$$f\left(f(x)-2a\right)=6x+f(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (3).$$

Giả sử $f(x_1)=f(x_2)$. Từ (3), ta có:

$$f\left(f(x_1)-2a\right)=6x_1+f(x_1)$$

và $f\left(f(x_2)-2a\right)=6x_2+f(x_2)$.

Suy ra $x_1=x_2$. Vậy $f(x)$ là đơn ánh.

Theo (1), với $x=0$ thì

$$f\left(f(0)-2y\right)=f\left(f(y)\right),\forall y\in\mathbb{R}$$

hay $$f(0)-2y=f(y),\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y)=b-2y,\forall y\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(y)=b-2y,\forall y\in\mathbb{R}$ với $b\in\mathbb{R}$ tuỳ ý, thoả mãn điều kiện bài ra.

***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}$. Đa số các bạn giải theo lời giải đã trình bày. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

**Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Nông:** *Mai Thị Thanh Loan*, 11T2, THPT

chuyên Nguyễn Chí Thanh; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhất Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thanh Tâm*, 10T2, *Võ Quốc Gia*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Trọng*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Quảng Nam:** *Võ Văn Linh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/520.** *Cho tam giác ABC, (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp. $A_0$, $B_0$, $C_0$ theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. $A_1$, $B_1$, $C_1$ theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB. $(O_a)$ là đường tròn đi qua $B_0$, $C_0$ và tiếp xúc trong với (O) tại $A_2$ khác A, $(O_b)$ là đường tròn đi qua $C_0$, $A_0$ và tiếp xúc trong với (O) tại $B_2$ khác B, $(O_c)$ là đường tròn đi qua $A_0$, $B_0$ và tiếp xúc trong với (O) tại $C_2$ khác C. $A_3$ là giao điểm của $B_1C_1$ và $B_2C_2$. $B_3$, $C_3$ được xác định tương tự. Chứng minh rằng $A_3$, $B_3$, $C_3$ cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

***Lời giải.*** **Bổ đề.** *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, G là trọng tâm. $A_1$ là hình chiếu của A trên BC. $B_0$, $C_0$ theo thứ tự là trung điểm của CA, AB. $(O_a)$ là đường tròn đi qua $B_0$, $C_0$ và tiếp xúc trong với (O) tại $A_2$ khác A. $A_3$ là giao điểm thứ hai của $A_1A_2$ và (O). Khi đó G thuộc $A_1A_3$ và $\frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_3}} = -\frac{1}{2}$.*

***Chứng minh.*** Gọi $A_0$ là trung điểm của $BC$; $A_4$ là giao điểm của các tiếp tuyến với $(O)$ tại $A$, $A_2$; $A_5$ là giao điểm của $OA_0$ và $AA_3$; $(K_a)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB_0C_0$ (h.1).

Dễ thấy $B_0C_0 \parallel BC$. Do đó $(K_a)$ tiếp xúc với $(O)$ tại $A$. Vậy $\mathcal{P}_{A_4/(O_a)} = A_4A_2^2 = A_4A^2 = \mathcal{P}_{A_4/(K_a)}$.

Điều đó có nghĩa là $A_4$ thuộc $B_0C_0$. Nói cách khác $A_4$ thuộc trung trực của $AA_1$. Kết hợp với $A_4O$ là trung trực của $AA_2$, suy ra $A_4$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA_1A_2$.

Vậy: $(A_3A, A_1A) \equiv (A_3A, A_3A_2) + (A_1A_2, A_1A)$

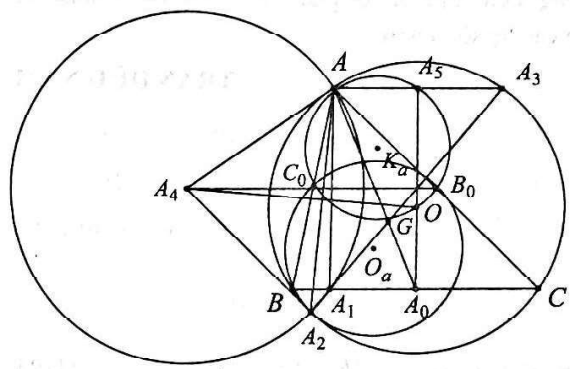
$$\equiv (AA_4, AA_2) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A}) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (AA_4, AA_2) + (A_4O, A_4A) \equiv (A_4O, AA_2) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Kết hợp với $A_1A \perp BC$, suy ra $AA_3 \parallel BC$. Từ đó, chú ý rằng $AA_1A_0A_5$ là hình chữ nhật, suy ra:

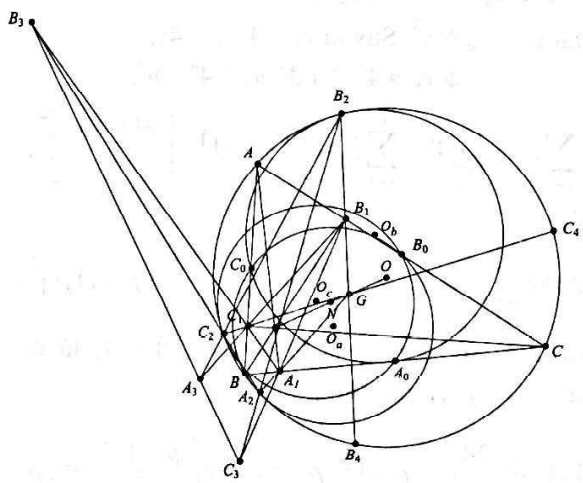
$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{AA_3}} = \frac{\overline{A_0A_1}}{2\overline{AA_5}} = \frac{\overline{A_0A_1}}{-2\overline{A_5A}} = \frac{\overline{A_0A_1}}{-2\overline{A_0A_1}} = -\frac{1}{2} = \frac{\overline{A_0G}}{\overline{AG}}.$$

Vậy theo định lí Thales, $G$ thuộc đoạn $A_1A_3$ và $\frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_3}} = \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{AA_3}} = -\frac{1}{2}$.




*Hình 1*

*Trở lại giải bài toán T12/520.*




*Hình 2*

Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$; $B_4$, $C_4$ là giao điểm thứ hai của $B_1B_2$, $C_1C_2$ và $(O)$, $(N)$ thứ tự là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$, $A_1B_1C_1$ (h.2). Theo bổ đề trên, ta có $G = B_1B_2 \cap C_1C_2$;

$$\overline{GB_1}.\overline{GB_2} = \frac{\overline{GB_1}}{\overline{GB_4}}.\overline{GB_2}.\overline{GB_4} = -\frac{1}{2}.\overline{GC_2}.\overline{GC_4}$$

$$= \frac{\overline{GC_1}}{\overline{GC_4}}.\overline{GC_2}.\overline{GC_4} = \overline{GC_1}.\overline{GC_2}.$$

Điều đó có nghĩa là $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ cùng thuộc một đường tròn. Do đó:

$$P_{A_3/(O)} = \overline{A_3B_2}.\overline{A_3C_2} = \overline{A_3B_1}.\overline{A_3C_1} = P_{A_3/(N)}.$$

Tương tự: $P_{B_3/(O)} = P_{B_3/(N)}; P_{C_3/(O)} = P_{C_3/(N)}$.

Vậy $A_3$, $B_3$, $C_3$ cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với $ON$, đường thẳng Euler của tam giác $ABC$.

***Nhận xét.*** 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải. Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11T, TPHT Chu Văn An; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Trần Tuấn Bình*, *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Phan Vinh Tiến*, 11QT3, THPT Duy Tân; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 11T, THPT chuyên Thăng Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

2) Tòa soạn không nhận những lời giải được chụp bởi điện thoại.

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/520.** *Trong thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn kết hợp, cùng pha $S_1$ và $S_2$ với $S_1S_2$ = 4,2cm. Khoảng cách giữa hai điểm gần nhất dao động cực đại trên $S_1S_2$ là 0,5cm. Điểm C di động trên mặt nước sao cho $CS_1$ luôn vuông góc với $CS_2$. Xác định khoảng cách lớn nhất từ $S_1$ đến C khi C nằm trên một vân giao thoa cực tiểu.*

***Lời giải.*** Khoảng cách giữa hai cực đại liên tiếp trên $S_1S_2$ là $i$: $i = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 1\text{cm}$. Vì điểm $C$ cần tìm có $CS_1$ luôn vuông góc với $CS_2$:

$$d_1^2 + d_2^2 = S_1S_2^2.$$

Điểm $C$ nằm trên vân giao thoa cực tiểu nên: $d_1 - d_2 = k\lambda$ với $k$ bán nguyên.

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = k\lambda \\ d_1^2 + d_2^2 = 4,2^2 \end{cases} \quad (1)$$

Vì $M$ xa $S_1$ nhất nên $k$ là số bán nguyên gần $\left[\frac{4,2}{1}\right] = 4$ nhất $\Rightarrow k = 3,5$.

Thay $k$ vào (1): $\begin{cases} d_1 - d_2 = 3,5 \\ d_1^2 + d_2^2 = 4,2^2 \end{cases}$ (2).

Giải (2) ta được $d_1 = 4,150$ cm.

***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn: *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; tỉnh **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**

**Bài L2/520.** *Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn mạch AM có điện trở R = 112 Ω nối tiếp với cuộn cảm thuần có độ tự cảm thay đổi được. Đoạn mạch MB chỉ chứa bóng đèn sợi đốt loại 120 V – 60 W. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều 220 V - 50 Hz. Để bóng đèn sáng bình thường thì độ tự cảm của cuộn dây là bao nhiêu?*

***Lời giải.*** Điện trở của đèn: $R_0 = \frac{U_{dm}^2}{P_{dm}} = 240\ \Omega$.

Cường độ dòng điện hiệu dụng trong mạch bằng cường độ dòng điện định mức của đèn $I = 0,5\text{ A}$.

Đèn sáng bình thường nên: $U_{MB} = 120\text{ V}$.

Ta có: $U_R = IR = 56\text{ V}$.

Mặt khác: $\vec{U}_{AB} = (\vec{U}_R + \vec{U}_L) + \vec{U}_{MB}$.

$\vec{U}_R$ cùng pha với $\vec{U}_{MB}$ đồng thời chúng vuông pha với $\vec{U}_L$ nên ta có:

$$U_L = \sqrt{U_{AB}^2 - (U_R + U_{MB})^2} = 132\text{V}.$$

Do đó để đèn sáng bình thường cần điều chỉnh độ tự cảm của cuộn dây bằng:

$$L = \frac{Z_L}{2\pi f} = \frac{U_L}{I.2\pi f} = 0,84\text{H}.$$

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**


# CÁCH GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC ĐẶC BIỆT

KIỀU ĐÌNH MINH
*GV. THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ*

Đa thức đóng vài trò rất quan trọng trong toán học và bài toán đa thức thường xuất hiện trong các cuộc thi Olympic. Bài báo này sẽ nói về một phương trình hàm đa thức đặc biệt, có dạng như sau:

**Bài toán:** *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *thoả mãn*

$$F(x)P(x)=G(x)P(ax+b),\deg F=\deg G\ (*).$$

Để giải bài toán trên, ta làm như sau:

Biến đổi phương trình $(*)$ về dạng

$$Q(ax+b)=kQ(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (**),$$

với $P(x)=R(x)Q(x)$

- Nếu $k=1$ thì

$$Q(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow P(x)=cR(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

- Nếu $k\neq 1;a=1$ thì

$$Q(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow P(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

- Nếu $k\neq 1;a\neq 1$ thì ta làm tiếp tục như sau:

Thay $x$ bởi $x+\dfrac{b}{1-a}\ (b\neq 0)$ và đặt $T(x)=Q\left(x+\dfrac{b}{1-a}\right)$ thì ta được phương trình:

$$T(ax)=kT(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (***).$$

Giả sử $T(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$.

So sánh hệ số tương ứng của $(***)$ suy ra $n$ và các $a_i,i=0,1,...,n-1$. Từ đó tìm được $T(x)\Rightarrow Q(x)\Rightarrow P(x)$.

*Để minh họa cho phương pháp, xin mời bạn đọc cùng theo dõi qua các thí dụ sau đây*

**Thí dụ 1 (*New York 1976*)** *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *thoả mãn*

$$(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$$

***Lời giải.***

Cho $x=1$, từ $(1)\Rightarrow 0.P(2)=3.P(1)\Rightarrow P(1)=0.$

Cho $x=0$, từ $(1)\Rightarrow -P(1)=2.P(0)\Rightarrow P(0)=0.$

Cho $x=-2$, từ $(1)\Rightarrow -3.P(-1)=0\Rightarrow P(-1)=0.$

Vậy $P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)$ với $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$.

Thay vào phương trình $(1)$ ta được:

$$(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1)$$
$$=(x+2)x(x-1)(x+1)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow Q(x+1)=Q(x),\forall x\neq 0;\pm 1;-2$$
$$\Rightarrow Q(x+1)=Q(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow Q(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $P(x)=c(x-1)(x)(x+1)=c\left(x^3-x\right)$, $c$ là hằng số. Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 2 (*VMC 2000*).** *Cho* $a,b\in\mathbb{R}$. *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *thoả mãn*

$$xP(x-a)=(x-b)P(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

***Lời giải.***

- Với $a=0,b=0$ thì $P(x)$ tuỳ ý.
- Với $a=0,b\neq 0$ thì $P(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.
- Với $a\neq 0,b=0$ thì $P(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}$.
- Với $a\neq 0,b\neq 0$ thì xảy ra hai trường hợp:

+) Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$ thì khi thay $x=b$ vào phương trình ta có $x=b-a$ là nghiệm. Tương tự khi thay $x=b-a$ thì sẽ có $x=b-2a$ là nghiệm. Suy ra $P(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Nếu $\frac{b}{a}=n \in \mathbb{N}$ thì $P(x)$ có $x=0, x=a, x=2a, \ldots, x=(n-1)a$ là nghiệm, suy ra

$$P(x)=x(x-a)(x-2a)\ldots[x-(n-1)a]Q(x).$$

Thay vào phương trình $(2)$ ta được:

$$Q(x-a)=Q(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(x)=c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $P(x)=cx(x-a)(x-2a)\ldots[x-(n-1)a], \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 3 (*IberoAmerican 2014*).** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $P(2014)=1$ và $xP(x-c)=(x-2014)P(x), \forall x \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{Z}$ (3).*

***Lời giải.*** Theo thí dụ 2 thì xảy ra các trường hợp sau:

• Nếu $c=0$ thì $P(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, trường hợp này loại do $P(2014)=1$.

• Nếu $\frac{2014}{c} \notin \mathbb{N}$ thì $P(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, trường hợp này loại do $P(2014)=1$.

• Nếu $\frac{2014}{c}=n \in \mathbb{N}$ thì

$$P(x)=kx(x-c)(x-2c)\ldots[x-(n-1)c].$$

Với $P(2014)=1$

$$\Rightarrow knc(nc-c)(nc-2c)\ldots[nc-(n-1)c]=1.$$

Suy ra $k.c^n.(n!)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{c^n.(n!)}$. Vậy

$$P(x)=\frac{1}{c^n.(n!)}x(x-c)(x-2c)\ldots[x-(n-1)c], \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 4 (*Greece 2014*).** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn*

$$(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \ (4).$$

***Lời giải.*** Viết lại phương trình:

$$(x-4)(x-2)P(x)=x(x+2)P(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \ (4').$$

Cho $x=0$, $(4') \Rightarrow P(0)=0$.

Cho $x=-2$, $(4') \Rightarrow P(-2)=0$.

Cho $x=4$, $(4') \Rightarrow P(2)=0$.

Suy ra $P(x)=(x-2)x(x+2)Q(x)$. Thay vào phương trình $(4')$ ta được:

$$\begin{aligned}&(x-4)(x-2)^2x(x+2)Q(x)\\&=x^2(x+2)(x-4)(x-2)Q(x-2), \forall x \in \mathbb{R}\\&\Rightarrow (x-2)Q(x)=xQ(x-2), \forall x \neq 0; \pm 2; 4\\&\Rightarrow (x-2)Q(x)=xQ(x-2), \forall x \subset \mathbb{R} \ (4'').\end{aligned}$$

Cho $x=0$, $(4'') \Rightarrow Q(0)=0 \Rightarrow Q(x)=xR(x)$.

Thay vào $(4'')$, ta được

$$(x-2)xR(x)=x(x-2)R(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow R(x)=R(x-2)=c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $P(x)=cx^2(x^2-4)=c(x^4-4x^2)$.

Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 5 (*Vietnam 2003*)** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$$\begin{aligned}&(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1)\\&=(x^3-3x^2+3x-2)P(x), \forall x \in \mathbb{R} \ (5).\end{aligned}$$

***Lời giải.*** Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$\begin{aligned}&(x+2)(x^2+x+1)P(x-1)\\&-(x-2)(x^2-x+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R} \ (5').\end{aligned}$$

Cho $x=-2$, $(5') \Rightarrow P(-2)=0$.

Cho $x=2$, $(5') \Rightarrow P(1)=0$.

Cho $x=-1$, $(5') \Rightarrow P(-1)=0$.

Cho $x=1$, $(5') \Rightarrow P(0)=0$.

Suy ra $P(x)=(x-1)x(x+1)(x+2)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay vào $(5')$, ta được: $(x^2+x+1)Q(x-1)=$

$(x^2-x+1)Q(x), \forall x \neq 0;\pm1;\pm2$

$\Rightarrow (x^2+x+1)Q(x-1)=(x^2-x+1)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Do $(x^2+x+1, x^2-x+1)=1$ nên

$Q(x)=(x^2+x+1)R(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Q(x-1)=(x^2-x+1)R(x-1)$

$\Rightarrow R(x-1)=R(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x)=c.$

Do đó:

$P(x)=c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$

Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 6.** *Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$(x-2001)^k P(x)=(x-2002)^k P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$ (6).

***Lời giải.*** Từ phương trình suy ra $x=2002$ là nghiệm bội bậc $\geq k$ của $P(x)$, do đó $P(x)=(x-2002)^k Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình $(6)$, ta được:

$(x-2001)^k.(x-2002)^k Q(x)$

$=(x-2002)^k.(x-2001)^k Q(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Q(x)=Q(x+1), \forall x \neq 2001, 2002$

$\Rightarrow Q(x)=Q(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(x)=c, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó $P(x)=c(x-2002)^k, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thoả mãn phương trình đã cho.

**Thí dụ 7 (*Canada 2013*)** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$ là một đa thức hằng $(7)$.*

***Lời giải.*** Phương trình đã cho tương đương với

$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)=k, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[P(x-1)-\frac{k}{2}\right]=(x-1)\left[P(x)-\frac{k}{2}\right], \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt $Q(x)=P(x)-\frac{k}{2}$, ta có:

$(x+1)Q(x-1)=(x-1)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$ $(7')$.

Cho $x=1$, $(7') \Rightarrow Q(0)=0.$

Cho $x=-1$, $(7') \Rightarrow Q(-1)=0.$

Suy ra $Q(x)=x(x+1)R(x)$. Thay vào phương trình $(7')$, ta được:

$(x+1)(x-1)xR(x-1)$

$=(x-1)x(x+1)R(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow R(x-1)=R(x), \forall x \neq 0;\pm1$

$\Rightarrow R(x-1)=R(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x)=c, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó $Q(x)=cx(x+1)$

$\Rightarrow P(x)=cx(x+1)+\frac{k}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Thử lại thoả mãn phương trình.

**Thí dụ 8.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$(x^2-x)P(x+2)-(x^2+5x+6)P(x)=4(x^2+2x),$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(8)$.

***Lời giải.*** Phương trình đã cho viết lại như sau

$(x^2-x)[P(x+2)+x+2]$

$=(x^2+5x+6)[P(x)+x], \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $Q(x)=P(x)+x$, ta có

$x(x-1)Q(x+2)=(x+2)(x+3)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Giải tương tự như các thí dụ trên ta được

$Q(x)=c(x-1)x(x+1)=c(x^3-x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(x)=cx^3-(c+1)x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Thử lại thoả mãn.

**Thí dụ 9 (*CentroAmerican 2008*).** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho*

$(x+10)P(2x)=(8x-32)P(x+6), \forall x \in \mathbb{R}$ $(9)$

*và* $P(1)=210.$

*Lời giải.* Giả sử

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$

thì $P(2x)=a_n2^nx^n+a_{n-1}2^{n-1}x^{n-1}+...+a_0$

$P(x+6)=a_nx^n+....$

So sánh hệ số của $x^{n+1}$ trong hai vế của phương trình $(9)$, ta được $a_n2^n=8a_n\Rightarrow n=3$.

Cho $x=-10$, $(9)\Rightarrow P(-4)=0$.

Cho $x=-2$, $(9)\Rightarrow -48P(4)=8P(-4)=0\Rightarrow P(4)=0$.

Cho $x=4$, $(9)\Rightarrow 14P(8)=0.P(10)=0\Rightarrow P(8)=0$.

Vậy $P(x)=a(x-4)(x+4)(x-8), a\in\mathbb{R}$.

Do $P(1)=210\Rightarrow a=2$. Do đó

$P(x)=2(x-8)(x^2-16), \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thoả mãn.

***Nhận xét.*** Thay $x$ bởi $x-6$ thì $(9)$ trở thành $(x+4)P(2x-12)=(8x-80)P(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $P(x)=(x+4)(x-8)Q(x)$

và $(x-4)Q(2x-12)-2(x-8)Q(x)$.

Đặt $Q(x)=(x-4)R(x)$, suy ra $R(x)=c$

$\Rightarrow Q(x)=c(x-4)\Rightarrow P(x)=c(x-8)(x^2-16)$.

**Thí dụ 10 (*KHTN 2014*)** *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *sao cho* $(x-2)P(3x+2)=$

$$3^{2015}xP(x)+3^{2016}x-3x+6, \forall x\in\mathbb{R}\ (10).$$

***Lời giải.*** Xét $P(x)=c$ thì $P(x)=-3$.

Xét $P(x)$ không là hằng số. Phương trình đã cho tương đương với

$(x-2)[P(3x+2)+3]=3^{2015}x[P(x)+3], \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $Q(x)=P(x)+3$ thì ta được

$$(x-2)Q(3x+2)=3^{2015}xQ(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Cho $x=2\Rightarrow Q(2)=0$. Đặt $Q(x)=(x-2)R(x)$, ta được: $R(3x+2)=3^{2014}R(x), \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow R(3x-1)=3^{2014}R(x-1), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lại đặt $S(x)=R(x-1)$ thì ta có:

$$S(3x)=3^{2014}S(x), \forall x\in\mathbb{R}\ (10').$$

Giả sử $S(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$, thay vào phương trình $(10')$ và so sánh hệ số của $x^n$ có: $3^na_n=3^{2014}a_n\Rightarrow n=2014$. Tiếp tục so sánh hệ số của $x^i, i=0,1,...,2013$ ta được

$3^ia_i=3^{2014}a_i, i=0,1,...,2013$

$\Rightarrow a_i=0, i=0,1,...,2013$.

Vậy $S(x)=cx^{2014}, \forall x\in\mathbb{R}\ (c\neq 0)$, từ đó suy ra:

$R(x)=c(x+1)^{2014}\Rightarrow Q(x)=(x-2)c(x+1)^{2014}$

$\Rightarrow P(x)=c(x-2)(x+1)^{2014}-3, \forall x\in\mathbb{R}\ (c\neq 0)$.

Tóm lại $P(x)=c(x-2)(x+1)^{2014}-3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại thoả mãn phương trình đã cho.

***Nhận xét.*** Qua các thí dụ trên bạn đọc có thể tự sáng tác các phương trình hàm đa thức dạng này theo mong muốn của mình để phục vụ công tác bồi dưỡng học sinh giỏi có hiệu quả, chẳng hạn

Xuất phát từ $Q(x+1)=Q(x), \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow Q(x)=c$, ta suy ra $x(x-2)Q(x+1)=x(x-2)Q(x)\ (*)$.

Đặt $P(x)=x(x-2)Q(x)$

$$\Rightarrow P(x+1)=(x+1)(x-1)Q(x+1).$$

Do đó $(*)\Rightarrow x(x-2)\dfrac{P(x+1)}{(x+1)(x-1)}=P(x)$

$$\Rightarrow x(x-2)P(x+1)=(x+1)(x-1)P(x)$$

hay $(x^2-2x)P(x+1)=(x^2-1)P(x)$ và ta có bài toán:

*Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *thoả mãn:*

$$(x^2-2x)P(x+1)=(x^2-1)P(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bằng cách đặt $R(x)=P(x)-x$ thì

$(x^2-2x)[R(x+1)+x+1]=(x^2-1)[R(x)+x]$

$\Leftrightarrow (x^2-2x)R(x+1)-(x^2-1)R(x)=x^2+x$.

Và ta có bài toán:

*Tìm tất cả các đa thức* $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ *thoả mãn*

$(x^2-2x)P(x+1)-(x^2-1)P(x)=x^2+x, \forall x\in\mathbb{R}$.

## BÀI TẬP

**1. (Baltic Way 2010)** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$(x-2010)P(x+67)=xP(x),\forall x\in\mathbb{Z}.$$

**2.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $xP(x-1)=(x-15)P(x),\forall x\in\mathbb{R}.$

**3. (Croatian 1994)** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$xP(x-n)=(x-1)P(x),\forall x\in\mathbb{R} \text{ với } n\in\mathbb{N}.$$

**4.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $xP(x-1)=(x-2014)P(x)-2014,\forall x\in\mathbb{R}.$

**5.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $(x+4)P(x)+2x=xP(x+2),\forall x\in\mathbb{R}.$

**6.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $xP(x)+P(1-x)=2x^2-x+3,\forall x\in\mathbb{R}.$

**7.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $(x-1)^2P(x)=(x-3)^2P(x+2),\forall x\in\mathbb{R}.$

**8.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn $x(x-1)^2P(x)=(x+1)^3P(x-1),\forall x\in\mathbb{R}.$

**9. (Irish 1997)** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$(x-16)P(2x)=16(x-1)P(x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**10.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$\left(4x^2+4x+2\right)\left(4x^2-2x\right)P(x)$$
$$=\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x+2\right)P(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}.$$

**11.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$\left(4x^2+6x\right)P(x)-\left(x^2+x-2\right)P(2x+1)$$
$$=2x^3+3x^2+3x+2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

**12.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $k$ tồn tại duy nhất đa thức $P_k(x)\in\mathbb{R}[x]$ bậc $k+1$ sao cho $P_k(0)=0$ và $P_k(x+1)-P_k(x)=x^k,\forall x\in\mathbb{R}.$

**13. (Bulgaria 2004)** Tìm tất cả các cặp đa thức $P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]$ không phải đa thức hằng thoả mãn $P(x)Q(x+1)=P(x+2004)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}.$

**14. (Putnam 2010)** Tìm tất cả các cặp đa thức $P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x)Q(x+1)-P(x+1)Q(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

**********

*Họa bài thơ:*

**Mừng Xuân Tân Sửu nhớ cảnh đồng quê**

*(của tác giả Đào Tam đăng ở số 523)*

**ĐÓN XUÂN TÂN SỬU MẸ KHUYÊN CON**

**I.** *Tân Sửu đã về khuyên các con*
*Luôn làm việc thiện đẹp tâm hồn*
*Đã yêu cuộc sống thời chăm chỉ*
*Là bạn thân rồi mãi sắt son*
*Thu xếp việc nhà tăng mức sống*
*Lo toan công sở đặng vuông tròn*
*Đón xuân thì nhớ ơn tiên tổ*
*Ơn Đảng quang vinh, ơn núi non.*

**II.** *Tân Sửu đã về chuyện với con*
*Nông thôn đổi mới cảnh mê hồn*
*Máy bừa phát triển tăng hương sắc*
*Còn lắm trâu cày giữ nét son*
*Hiến đất mở đường thêm rộng thẳng*
*Chuyện vùng đổi thửa thuận vuông tròn*
*Vùng quê đáng sống vui xuân mới*
*Ngắm cảnh quanh làng hái lộc non.*

**III.** *Tân Sửu lại về khuyên các con*
*Góp tiền xây nước, cả tâm hồn*
*Giúp người nghèo khó thêm cơm áo*
*Ghét kẻ chây lười hám phấn son*
*Ngày ấy quê nghèo trâu gầy yếu*
*Bây giờ thôn đẹp bụng căng tròn*
*Chơi xuân cũng nhớ về trâu nhé !*
*Cắt cỏ thật nhiều, loại cỏ non.*

**IV.** *Tân Sửu lại về khuyên các con*
*Nông thôn vất vả đẹp tâm hồn*
*Mặt ai ra thị tuy nhiều phấn*
*Ta ở lại làng vẫn lắm son*
*Dẫu phải chăn trâu cùng nắng gió*
*Cũng luôn nhảy múa với ô tròn*
*Đón xuân lẳng xóm vui đoàn kết*
*Cúng lễ cầu trời, hái lộc non.*

**NGUYỄN HỮU DỰ**
*(Đại Đồng, Quỳnh Liên, Hoàng Mai, Nghệ An)*


# CUỘC TRANH CÃI DAI DẲNG KHÔNG ĐÁNG CÓ GIỮA I. NEWTON VÀ G. LEIBNIZ

**NGUYỄN THỦY THANH**
*(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)*

## 1. HỆ THỐNG GIẢI TÍCH CỦA I.NEWTON VÀ G.LEIBNIZ

**1.1.** ***Hệ thống của I.Newton.*** *Lý thuyết thông lượng* do *Newton* phát minh ra vào khoảng 1665-1666 là dạng sớm nhất của Giải tích các vô cùng bé (GTVCB). Ở đây, về cơ bản cách tiếp cận của Newton là động học nên theo Ông mọi bài toán của Giải tích đều có thể quy về hai dạng vấn đề được phát biểu bởi các thuật ngữ cơ học.

A. Xác định vận tốc của chuyển động tại thời điểm cho trước theo đoạn đường đã biết.

B. Xác định đoạn đường đi được trong khoảng thời gian đã cho theo vận tốc chuyển động đã biết.


*I. Newton*
*(1642 - 1727)*

Ở đây *Newton* xem thời gian là *đối số chung* của mọi đại lượng biến thiên. Theo thông lệ Trung thế kỷ, *đại lượng biến thiên liên tục được gọi là fluens. - thông vận* (*fluens*: Latinh nghĩa là lưu chuyển) *vận tốc biến thiên của các thông vận được gọi là fluxio - thông lượng* (fluxionum, Latinh: - nghĩa là: sự thoát ra). Các khái niệm cơ bản của hệ thống giải tích của *Newton* là như sau:

$1^+$ *Khái niệm đạo hàm* (fluxio) được đưa vào theo phương pháp Fermat và đạo hàm các cấp liên tiếp được Ông ký hiệu tương ứng là $\dot{z}, \ddot{z}, \dot{\dddot{z}}, \ddot{\dddot{z}}, \ldots$ Rõ ràng hệ ký hiệu này là rất phức tạp và bất tiện trong sử dụng ...

$2^+$ Khái niệm cơ bản thứ hai là *tích phân bất định* hay *nguyên hàm* (fluens).

Nhà lịch sử toán học Xô Viết là *L.S. Freiman* viết rằng: "Chính *I. Barrow* (1630 - 1677) đã trao lại cho *Newton* toàn bộ các kết quả [về Giải tích] của mình... và phát minh của *Barrow* [Về tính ngược nhau giữa bài toán diện tích (tích phân) và bài toán tiếp tuyến (đạo hàm)] trở thành một phần của công trình *Newton*".

$3^+$ Khái niệm quan trọng thứ ba là "*moment*" - tương ứng như vi phân của *G.Leibniz* là VCB. Moment của thời gian được Ông ký hiệu là "o" (không nhầm lẫn với zero). Khi đó moment của fluens *z* được ký hiệu là $\dot{z}o$.

$4^+$ *Khái niệm thứ tư hết sức quan trọng là Khai triển nhị thức (1664 - 1665)* và *Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa* vô hạn với kỹ thuật khai triển rất tinh vi.

Đáng tiếc, phần lớn các kết quả thu được của Ông đều chủ yếu *nằm yên "trong ngăn kéo bàn" hoặc nói chung không ai biết hoặc chỉ một số không lớn người quen biết gần gũi với Newton được biết*... Đến những năm 1704, 1711 và 1736 các công trình của Ông mới được ấn hành, trong đó công trình "*Về cầu phương đường cong*" (1704) là công trình công bố đầu tiên về Giải tích của *Newton*. Theo *J.Struik* thì "*Chỉ sau công trình này thế giới mới biết lý thuyết thông lượng là gì*".

**1.2.** ***Hệ thống của G.Leibniz.*** Chậm hơn *Newton* khoảng mười năm nhưng với cách tiếp cận hình học độc lập với *Newton* và xuất phát từ căn cứ khác (*từ các vi phân*) G.Leibniz cũng thiết lập các nguyên lý của GTVCB ngay từ năm 1675 và cho công bố


*G.W. Leibniz*
*(1646 – 1716)*

các kết quả của mình trên tạp chí Acta Eruditorum (AE) mà Ông thành lập năm 1682, là tạp chí của các nhà bác học.

$1^+$ Trong công trình "*Phương pháp mới về cực đại và cực tiểu*" (1684) Ông đưa khái niệm cốt lõi là khái niệm *vi phân*. Ở đây vi phân được hiểu là hiệu vô cùng bé của hai giá trị kề nhau của đại lượng và được chỉ bởi chữ "d" là chữ cái đầu của từ *diferentia* nghĩa là *hiệu*. Tỷ số của các vi phân $\frac{dy}{dx}$ được Ông gọi là *đạo hàm*. Ngay tại đây Ông thiết lập mọi quy tắc tính vi phân và đạo hàm mọi cấp của các hàm kể cả hàm mũ $a^x$ và hàm lũy thừa tổng quát $x^x$.

$2^+$ Trong công trình "*Vẽ hình học sâu sắc ...*" (1686) Ông công bố phép tính tích phân. Tích phân được xem là *tổng vô hạn các VCB vi phân* và ký hiệu $\int$ như ngày nay.

Về biểu thức $\int ydy$ *Leibniz* viết:

"Vì $d\left(\frac{y^2}{2}\right) = ydy$ nên $\int ydy = \frac{y^2}{2}$ vì ở đây ta như có *tổng và hiệu* hay nói cách khác phép toán $\int$ và d là ngược nhau *như lũy thừa và khai căn* trong phép tính thông thường ".

Đây chính là cái hồn của Định lý cơ bản của Giải tích. Điều này có ý nghĩa đặc biệt quan trọng trong lịch sử toán học vì dạng trình bày thuần túy Giải tích của Ông được bàn đến ở đây là đầu tiên và được duy trì qua hàng thế kỷ.

Hơn thế nữa, trong công trình "*Bài toán tổng quát về cầu phương ...*" (1693) Ông còn chứng minh rằng: để tính tích phân của hàm $f(x)$ cần tìm hàm $F(x)$ sao cho độ dốc $F(x)$ của nó bằng $f(x)$, tức là $\int_0^x f(x)dx = F(x)$, nếu $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (.... ngầm hiểu $F(0) = 0$). Thực chất đây là Định lý cơ bản của Giải tích.

$3^+$ Năm 1673 – 1674, Ông phát minh ra chuỗi đan dấu (gọi là chuỗi Leibniz) và dấu hiệu hội tụ của nó (1695) - gọi là dấu hiệu Leibniz.

Điều đáng kinh ngạc là các thành tựu mà *Leibniz* và các học trò của Ông thu được nhanh đến mức mà vào năm 1696, *G.L'Hospital* (1661 - 1704) đã đúc kết và cho ra đời sớm cuốn sách giáo khoa đầu tiên "*Giải tích các VCB...*" trong đó có quy tắc khử dạng vô định "$\frac{0}{0}$" do *I.Bernoulli* tìm ra.

## 2. CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ VỀ GIẢI TÍCH

**2.1.** ***Các công trình của Newton.*** *I.Newton* bắt đầu nghiên cứu PTVCB vào khoảng 1665 - 1666 (trước *Leibniz*) và đã trình bày các kết quả trong các công trình sau đây.

1. (1704). "*Về cầu phương đường cong*" (1704) là Phụ lục về toán của tác phẩm "*Quang học*" (1704) của *Newton*.

2. (1711). "*Giải tích thông qua các phương trình có vô số số hạng*" (viết năm 1669, xuất bản năm 1711).

3. (1736). "*Phương pháp fluxio và các chuỗi vô hạn*" (viết năm 1670 - 1671, xuất bản năm 1736 sau khi Ông qua đời.

4. (1687). "*Các nguyên lý toán học của triết học tự nhiên*" (1687) là tác phẩm được *Lagrange* gọi là "tác phẩm vĩ đại nhất của trí tuệ nhân loại".

**2.2.** ***Các công trình của Leibniz.*** *G.Leibniz* bắt đầu nghiên cứu PTVCB vào khoảng 1673 - 1676 muộn hơn Newton nhưng *độc lập với Newton* và Ông công bố các công trình của mình rất sớm.

1. 1673 - 1674. Công bố công trình về chuỗi đan dấu (chuỗi Leibniz), dấu hiệu hội tụ Leibniz . Cũng thời gian này Ông còn chế tạo thành công chiếc máy tính số học.

2. (1684). "*Phương pháp mới về cực đại và cực tiểu ...*" (AE) là công trình đầu tiên của Ông về các nguyên lý cơ bản của PTVP.

3. (1686). Công trình "*Về hình học sâu sắc ...*" (AE) được dành để trình bày PTTP, trong đó lần

đầu tiên người ta gặp ký hiệu tích phân ∫ với lời dặn dò: "dưới dấu ∫ không được phép bỏ qua thừa số d$x$".

4. (1693). "*Bài toán tổng quát về cầu phương*" (AE).

5. (1694). Trong công trình tiếp theo về PTTP Ông đề cập đến sự xuất hiện hằng số cộng trong phép tích phân bất định.

## 3. SỰ CÃI CỌ KHÔNG ĐÁNG CÓ GIỮA NEWTON VÀ LEIBNIZ

Một số nhà khoa học lịch sử cho rằng cuộc tranh cãi giữa hai nhà bác học vĩ đại nhất nửa sau thế kỷ XVII (*Newton* và *Leibniz*) là sự xích mích đáng xấu hổ nhất trong toàn bộ lịch sử toán học.

*Ta hãy xem câu chuyện đã xảy ra thế nào?*

Năm 1695, *Newton* nhận được một bức thư từ *J.Wallis* (1616 - 1703) viết về những khám phá toán học đầu tiên của *Newton* với lời cảnh báo rằng: ở Hà Lan các quan điểm của Ông [*Newton*] được người ta xem như là một phần của "Phép tính các vi phân" của *Leibniz*. *Wallis* thúc giục *Newton* phải làm gì đó để bảo vệ danh dự cho mình.

Tiếp đó, khi Phụ lục về toán "*Về cầu phương các đường cong*" của cuốn sách "Quang học" (1704) của *Newton* ra đời thì trên tạp chí AE xuất hiện một *Bài nặc danh điểm sách* xúc phạm một cách bóng gió nhằm vào *Newton*. Bài nặc danh khẳng định tác giả của Phép tính mới (GTVCB) là *Leibniz* chứ không phải *Newton*.

Bản thân *Leibniz* kiên quyết phủ nhận rằng Ông viết Bài nặc danh đó. Nhưng các học trò của *Newton* vẫn sôi sục cơn tức giận và do vậy *Newton* bị lôi vào cuộc. Mọi chuyện bắt nguồn từ những lời ám chỉ và nhanh chóng chuyển thành những màn công kích gay gắt qua lại từ hai phía.

Tác giả của "*Giải tích nhiều biến số*" (Hà Nội-2007) là *G.F.Simmons* (1925 - 2019) cho rằng: "*Newton đã tự cho phép mình bị lôi cuốn vào trung tâm của sự tranh chấp và một khi cơn giận của Ông đã bùng phát ... thì không bao giờ có thể kiềm chế nổi*". Có lẽ vì vậy mà Ông vô cùng thỏa dạ khi "*làm vỡ quả tim của Leibniz*" (*S.Hawking*, 272).

*Các nhà lịch sử khoa học và các nhà toán học nói gì?*

Theo nhà lịch sử toán học *J. Struik* (1894-2000) thì giờ đây người ta đã *xác lập được rằng hai Ông đã đạt được những thành tựu to lớn và phương pháp của họ là độc lập với nhau. Newton* đã đạt được kết quả đầu tiên vào những năm 1665 - 1666, còn *Leibniz* thì vào khoảng 1673 - 1676 có muộn hơn. Nhưng *Leibniz* là người đầu tiên công bố sớm các kết quả trên tạp chí (*Leibniz* trong khoảng 1684 - 1686, còn các kết quả của *Newton* được công bố vào các năm 1704, 1711 và công trình lớn nhất được công bố vào năm 1736 sau khi Ông qua đời gần mười năm).

Hơn thế nữa, trước thời điểm công trình đầu tiên về Giải tích của *Newton* ra đời năm 1704, không những hầu hết các công trình của *Leibniz* về Giải tích đều đã được công bố mà nhiều công trình của học trò của Ông là anh em nhà *Bernoulli* cũng đã được công bố. Thậm chí (!) cuốn sách giáo khoa đầu tiên về PTVP và PTTP được *L'Hospital* viết cũng đã được chào đời.

Trong *Từ điển Bách khoa phổ thông toán học của CHLB Nga* (1997) người ta cũng viết rằng: "*Xung quanh vấn đề giữa Newton và Leibniz ai đã xây dựng trước PTVP và PTTP đã xảy ra cuộc tranh cãi dai dẳng không đi đến kết quả có chiều hướng bị hai phe đối kháng thổi phồng lên. Newton đã đạt được kết quả đầu tiên trong lĩnh vực đó trước Leibniz (vào năm 1665 và sau đó), nhưng Leibniz cũng đi đến những kết quả đó một cách độc lập và công bố chúng sớm hơn nhiều. Ngoài ra, thuật toán và hệ ký hiệu mà sinh thời Ông rất xem trọng thì lại có những ưu thế vượt trội hơn các công trình của Newton*".

Trong cuốn sách "*Lược sử thời gian*" (Hà Nội-1995) tác giả - nhà toán học và vật lý học lỗi lạc *S.Hawking* (1942 - 2018) người từng giữ cương vị mà trước đây *I.Barrow* và *I.Newton* từng đảm nhiệm - viết rằng: "*Cả Leibniz lẫn Newton đã phát triển độc lập với nhau ngành toán học gọi là Calculus (Giải tích) vốn là cơ sở cho vật lý học hiện đại. Mặc dù hiện nay chúng ta đều biết Newton đã phát hiện Calculus nhiều năm trước Leibniz, song Ông đã công bố các công trình của mình muộn hơn Leibniz.*

*Nảy sinh cuộc tranh cãi om sòm xung quanh việc ai là người đầu tiên tìm ra Calculus giữa các nhà khoa học ủng hộ hai phía…*".

Còn *G.F.Simmons* thì viết: "*Đến lúc cần phải làm rõ rằng mỗi một người đều có thể phát triển những hình thức vi phân của mình theo cách khác nhau độc lập với người kia. Lúc đầu là Newton trong 8 hoặc 10 năm nhưng không xuất bản ý tưởng của mình, và những công trình của Leibniz năm 1684 và 1686 là những ấn phẩm sớm nhất về vấn đề này...*".

Chuyện om sòm trong giới toán học Châu Âu thời bấy giờ cũng đã làm cho Công chúa *Caroline* xứ Ansback (1683 - 1737) (sau là Vương hậu của Liên hiệp Anh và Irland) - người rất khâm phục và kính trọng tài năng của *Leibniz* - cũng phải lên tiếng. Bà gửi cho *Leibniz* một bức thư ngắn với nội dung như sau:

"*Tôi thực sự rất tiếc khi chứng kiến những nhà bác học tầm cỡ như Ngài và I.Newton lại không thể hòa giải được với nhau. Thế gian này sẽ lợi biết bao nhiêu nếu các Ngài hàn gắn với nhau! Nhưng thật đáng tiếc, những con người vĩ đại như các Ngài lại hành động quá nhỏ nhen và thiếu lòng vị tha. Các Ngài, đó là thiển ý của tôi* ***về cuộc cãi cọ dai dẳng không đáng có giữa các Ngài***".

Rồi một bức thư của *Leibniz* đề ngày 31-1-1713 với lời lẽ dung hòa gửi lên Hội Hoàng gia cũng không mảy may tác dụng và không làm dịu đi cơn thịnh nộ của *Newton*.

Khi bàn về sự xích mích giữa *I.Newton* và *G.Leibniz* hai nhà toán học Hoa Kỳ *R.Courant* và *H.Robbins* đã viết:

"*Có thể có một phát minh đồng thời và độc lập [với nhau] khi mà bầu khí quyển đã tràn đầy những yếu tố của một lý thuyết mới nào đó*" Có lẽ "*Giải tích cái vô cùng bé*" (GTVCB) là một phát minh như vậy…

**4. SỐ PHẬN CỦA HAI VĨ NHÂN**

*I.Newton* đã cống hiến trọn đời mình cho khoa học. Ông được coi là người đã đặt nền móng cho khoa học hiện đại. Năm 1703 Ông được bầu là Chủ tịch Hội Hoàng gia và được tín nhiệm giữ chức vụ đó cho đến lúc mất. Vào năm 1705, Ông được nữ hoàng *Anne* tặng danh hiệu Hiệp sĩ (Sir Isaac) và năm 1699 Ông được bầu là Viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn lâm Khoa học (VHLKH) Paris. Cuối đời Ông còn nắm giữ cương vị Thống đốc Sở đúc tiền Hoàng gia.

*I.Newton* qua đời ngày 31-3-1727 vì bệnh sỏi thận và xung huyết phổi. Ông được mai táng tại nghĩa trang nhà thờ - nơi an nghỉ của các vĩ nhân nước Anh. Ở bệ pho tượng đồng tưởng niệm Ông dựng ở trường Trinity của ĐH Cambridy có khắc dòng chữ: "*Trí tuệ của Ông hơn hẳn mọi người*".

Đối với *Leibniz*, *G.F.Simmons* viết rằng: "*Nhìn lại Leibniz thông qua làn sương mù của 300 năm trong lịch sử, chúng ta dường như thấy rất nhiều người trong một người - nhà triết học, nhà toán học, nhà khoa học, nhà logic học, nhà ngoại giao, luật sư,... thay vì là một cá nhân đơn lẻ …*"

Năm 1700, Ông được Hoàng hậu *Sofia Charlotte* (1668 - 1705) trao nhiệm vụ thành lập VHLKH Berlin và Ông là Chủ tịch đầu tiên. Ông cũng được bầu là Viện sĩ nước ngoài của VHLKH Paris (năm 1700) và Hội viên nước ngoài của Hội Hoàng gia Luân Đôn năm 1673 trong dịp Ông đến Luân Đôn trưng bày chiếc máy tính số học mà Ông sáng tạo ra.

Những năm cuối đời của *Leibniz* đã trôi qua trong cô đơn và lạnh lẽo… *L.S.Freiman* viết rằng: "*Bệnh gút như thể trói Ông ngồi một chỗ. Từ sáng ngày 14-11-1716 người ta thấy bệnh tình của Ông trở nên xấu hơn. Khi mời được bác sĩ tới thì Ông đã ra đi…*".

*G.Leibniz* mất ngày 14-11-1716. Nhà thờ đã bác bỏ các quan điểm triết học của Ông và do đó triều đình cũng không thèm đoái hoài tới. Trái với lệ thường, Hội hoàng gia Luân Đôn cứ im hơi lặng tiếng, không hé răng nửa lời, làm bộ như không biết *Leibniz* là ai mặc dù Ông là Hội viên nước ngoài của Hội từ năm 1673. Viện Hàn lâm Khoa học Berlin thì không biết phải hành xử thế nào trước anh linh của Ông là Viện sĩ và cũng là Chủ tịch của Viện mình. Chỉ có VHLKH Paris tổ chức tưởng niệm long trọng ngày giỗ đầu của Ông ngày 13-11-1717. Chủ tịch VHLKH Paris là *B.Fontenelle* (1657 - 1757) đọc diễn văn ca ngợi *G.Leibniz* là nhà tư tưởng vĩ đại và là một trong những bộ óc hoạt động nhất và đa dạng nhất.

*PROBLEM...* (*Tiếp theo trang 22*)

## TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/524.** Show that

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3^n}$$

is an integer which is greater or equal to $3^{n+1}$ and is divisible by 3 for every $n \in \mathbb{N}$.

**Problem T11/524.** Given positive numbers $\alpha$ and $\beta$. Consider the following sequences $(x_n),(y_n)$: $x_1=\alpha, y_1=\beta$ and

$$x_{n+1}=\frac{5x_ny_n}{2y_n+3x_n}, y_{n+1}=\frac{5x_{n+1}y_n}{2y_n+3x_{n+1}}, \forall n=1,2,...$$

Find $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

**Problem T12/524.** Given an acute triangle $ABC$ inscribed in a circle $(O)$ and suppose that $AD$ is the altitude. The tangent lines of $(O)$ at $B$, $C$ intersect at $T$. On the line segment $AD$, choose $K$ so that $\widehat{BKC}=90^0$. Let $G$ be the centroid of $ABC$. $KG$ intersects $OT$ at $L$. The points $P$, $Q$ are on the line segments $BC$ so that $LP$ // $OB$, $LQ$ // $OC$. The points $E$, $F$ respectively on the line segments $CA$, $AB$ so that $QE$, $PF$ are both perpendicular to $BC$. Let $(T)$ be the circle with center $T$ which passes through $B$, $C$. Show that the circumcircle of $AEF$ is tangent to $(T)$.

Transleted by NGUYEN PHU HOANG LAN
*(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)*

*CÁC DẠNG TOÁN...* (*Tiếp theo trang 20*)

**Bài 7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn

$$3f'(x)+xf'(x)=x^{2019}, \forall x\in[0;1].$$

Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{4084440}$ **B.** $\frac{1}{4082418}$

**C.** $\frac{1}{4082420}$ **D.** $\frac{1}{4078380}$

**Bài 8.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

**A.** 1 **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{9}$.

**Bài 9.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2^{f(x)}+f(x)=x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{7}{2}-\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\frac{5}{2}-\frac{3}{\ln 2}$.

**C.** $\frac{7}{2}-\ln 2$. **D.** $\frac{5}{2}+\ln 2$.

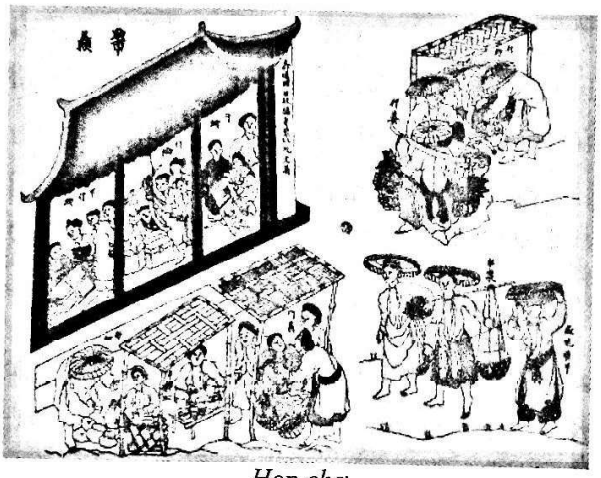
**Bài 10.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=2x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_2^3 f(x)dx$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$

**C.** $\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$.


## ĐỐ VUI XUÂN TÂN SỬU

# ĐỘC ĐÁO CHỢ TẾT



*Họp chợ*
(*Tranh khắc gỗ của Henri Oger*)

Dịp vui Tết, đón Xuân trên khắp cả nước có những phiên chợ Tết độc đáo như: Chợ phiên xứ Đoài (huyện Thạch Thất, Hà Nội); Chợ đồ cổ phố Hàng Mã (Hà Nội); Chợ tết đình Bích La (huyện Triệu Phong, Quảng Trị);...

***Theo bạn những câu truyền khẩu sau lần lượt nói về phiên chợ Tết độc đáo nào ở vùng Đồng bằng Bắc Bộ và vùng Duyên hải Nam Trung bộ Việt Nam ?***

1. *Mồng tám tháng giêng đi chơi chợ*
*Đồn rằng cảnh chợ đẹp vui thay*
*Ngựa xe chen chúc người đi lại*
*Hàng quán đua nhau kẻ xếp bầy*
*Năm sớm bán buôn mong được đắt*
*Khánh đua sắm sửa để cầu may*
*Một năm có một ngày phiên chợ*
*Chơi chợ ai không đến chợ này.*

2. *Chợ họp mỗi năm có một phiên*
*Người bán, người mua ở khắp miền*
*Mồng một kêu nhau đi họp chợ*
*Tưng bừng khăn áo bước chân chen.*

# TRÂU "XẾP HÌNH"

*Con trâu trong tranh dân gian Đông Hồ*

*Đầu năm Tân Sửu, một đàn trâu*
*Dáng vẻ nhung nhăng, gục gục đầu*
*Có kẻ buồn buồn, đưa tay đếm*
*Đếm tới đếm lui, bỗng ... phát rầu*
*Một, hai, ba, bốn ... mười bốn chú*
*Bày hàng chằn chặn, trước như sau!*
*Mỗi hàng ... bốn chú, y như một*
*Thế thì chúng đứng kiểu gì đây?*

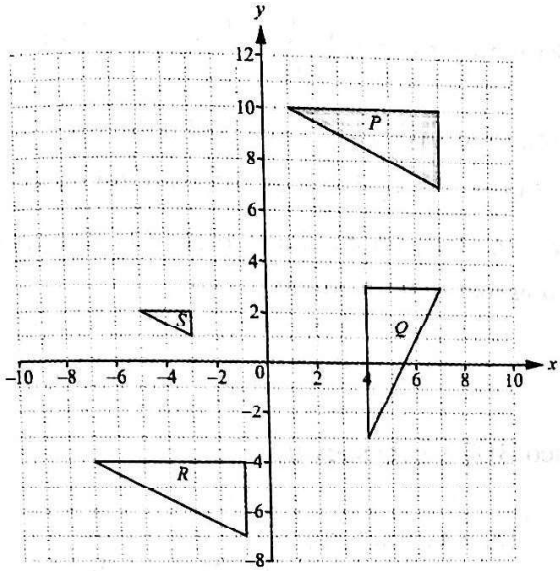
***Theo bạn đàn trâu "Xếp hình" theo kiểu gì mà kỳ vậy?***

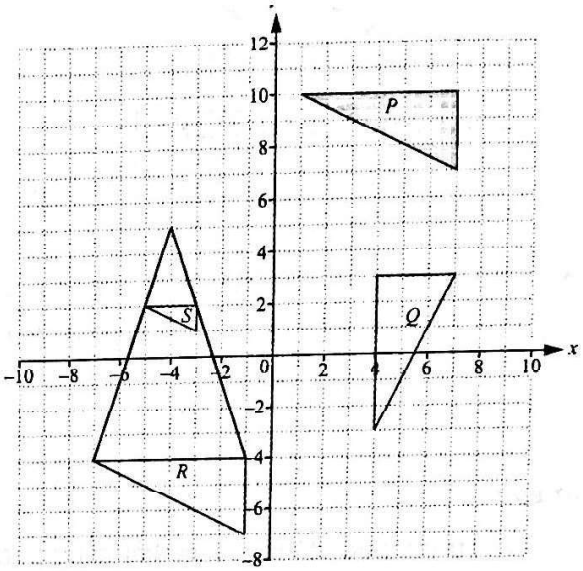
**NGUYỄN THANH GIANG**
(*Hưng Yên*) ***Sưu tầm***

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 65

**Problem.** *Determine a single transformation that maps the shape S on to the shape R.*




***Solution.*** We can see that the required transformation should be an enlargement. Hence we need to determine the scale factor and the center of the enlargement.

We can see that each side of $R$ is three times as big as each side of $S$, thus the scale factor is 3.

The center (–4 ; 5) can be determined as in the following figure.

### TỪ VỰNG

*transformation* : *phép biến đổi*

*enlargement* : *phép vị tự (phóng to, thu nhỏ)*

*scale factor* : *tỉ số (của phép vị tự)*

*center* : *tâm (của phép vị tự)*


NGUYEN PHU HOANG LAN

*(College of Science – Vietnam National university, Hanoi)*


**********

## BÀI DỊCH SỐ 62

***Bài toán.*** *Cho bảng*

| $x$ | 1 | 2 | 3 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Xác suất | $p$ | $qp$ | $q^2p$ | … | $q^{n-1}p$ | … |

*với* $0 < p < 1$ *và* $q = 1 - p$. *Tính tổng vô hạn các số hạng* $S = p + qp + q^2p + \ldots + q^{n-1}p + \ldots$

***Lời giải.*** Ta có:

$$S = p + qp + q^2p + \ldots + q^{n-1}p + \ldots$$

$$= p(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

$$= p.\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

***Lưu ý.*** Bảng trên thực chất là bảng phân phối xác suất cho một biến ngẫu nhiên $x$ với phân phối hình học theo tham số $p$. Tổng của tất cả các số hạng trong hàng thứ hai của bảng luôn bằng 1, bởi vì nó là xác suất của tất cả khả năng có thể xảy ra.

***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Thị Thanh Thư*, 10T1, *Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2, *Nguyễn Thị Khánh Linh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

**HỒ HẢI** *(Hà Nội)*

## NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

**BÀI TOÁN 45.** *Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Chứng minh rằng bất đẳng thức* $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

***Lời giải.***

***Cách 1.*** Từ giả thiết đã cho, theo bất đẳng thức (BĐT) AM-GM ta được

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Nhân theo vế hai BĐT trên và rút gọn sẽ được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n = 1$ hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

***Cách 2.*** Với giả thiết đã cho, theo BĐT CBS sẽ được $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$

$$\left[\left(\sqrt{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{x_n}\right)^2\right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right] \geq n^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n = 1$ hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

***Cách 3.*** Theo BĐT Cauchy-Schwarz dạng Engel $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq$

$$\frac{\left(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}\right)^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n = 1$ hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Bài toán được chứng minh.

***Cách 4.*** Bài toán đã cho là một BĐT đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{x_2} \leq \ldots \leq \frac{1}{x_n}.$$

Theo BĐT Chebyshev thì

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geq n\left(\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_n}\right) = n^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n = 1$ hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Bài toán được chứng minh.

***Cách 5.***

* Với $n = 1$ BĐT trở thành đẳng thức, cũng dễ dàng chứng minh BĐT đúng với $n = 2$.

* Giả sử BĐT đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tức là $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k}\right) \geq k^2$.

Ta chứng minh BĐT cũng đúng với $n = k + 1$.

Đặt $P = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, $Q = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k}$.

Vì $(P + x_{k+1})\left(Q + \frac{1}{x_{k+1}}\right) \geq PQ + 2\sqrt{PQ} + 1$

$$\geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n = 1$ hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

*Cách 6.* Bài toán cần chứng minh tương đương BĐT $\frac{S-nx_1}{x_1}+\frac{S-nx_2}{x_2}+\ldots+\frac{S-nx_n}{x_n}\geq 0.$

Bài toán đã cho là một BĐT đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử $0<x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$

$\Rightarrow S-nx_1\geq S-nx_2\geq\ldots\geq S-nx_n.$

Dễ thấy trong dãy các biểu thức $S-nx_1$, $S-nx_2$, ..., $S-nx_n$, sẽ tồn tại biểu thức thứ $J$ $(1<J\leq n)$, để $0\geq S-nx_J$, khi đó

$$S-nx_1\geq 0\geq\ldots\geq S-nx_J\geq\ldots\geq S-nx_n.$$

Nên $\frac{S-nx_i}{x_i}\geq\frac{S-nx_i}{x_J},\forall i=\overline{1,n}$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{S-nx_i}{x_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{S-nx_i}{x_J}=\frac{nS-nS}{x_J}=0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n=1$ hoặc $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Bài toán được chứng minh.

*Cách 7.* Đặt $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$, ta chứng minh BĐT tương đương: $\left(\frac{S}{x_1}+\frac{S}{x_2}+\ldots+\frac{S}{x_n}\right)\geq n^2$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{S-x_1}{x_1}+\frac{S-x_2}{x_2}+\ldots+\frac{S-x_n}{x_n}\right)\geq n^2-n.$$

Hiển nhiên $\left[\frac{S-x_i}{x_i}-(n-1)\right]^2\geq 0,\forall i=\overline{1,n}$

$$\Leftrightarrow\frac{S-x_i}{x_i}\geq\frac{[2(n-1)+1]\left(\frac{S-x_i}{x_i}\right)-(n-1)^2}{\frac{S-x_i}{x_i}+1}0;\forall i=\overline{1,n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{S-x_i}{x_i}\geq\frac{(2n-1)(S-x_i)-(n-1)^2x_i}{S}0;\forall i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S-x_i}{x_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n-1)(S-x_i)-(n-1)^2x_i}{S}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S-x_i}{x_i}\geq\frac{(2n-1)(n-1)S-(n-1)^2S}{S}=n^2-n$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $n=1$ hoặc $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

***Lời bình.*** Bài toán trên là một BĐT cơ bản có tính ứng dụng mạnh để chứng minh nhiều bài toán BĐT đại số và BĐT hình học. Khi chọn cách chứng minh cho BĐT này người ta thường sử dụng các BĐT kinh điển hoặc BĐT AM-GM hoặc BĐT CBS hoặc BĐT Cauchy-Schwarz dạng Engel hoặc BĐT Chebyshev như đã trình bày ở cách 1, 2, 3, 4. Bởi vậy có thể coi BĐT đề ra là hệ quả của cả bốn BĐT kinh điển đó. Cách 5 giải bằng phương pháp quy nạp toán học cũng là cách giải quen thuộc, thông qua cách giải này một lần nữa nhắc chúng ta, khi giải loại toán có chứa biến đúng với mọi giá trị nguyên dương $n$ thì phải nghĩ ngay tới phương pháp quy nạp toán học. Cách 6, 7 là hai cách giải mới, về mặt hình thức so với cách giải 1, 2, 3, 4, 5 là dài nhưng lại là những cách giải thuần tuý mang tính độc lập, sáng tạo, đó là cách giải ngắn gọn dễ hiểu dành cho các bạn chưa học về các BĐT kinh điển.

**NGÔ VĂN THÁI** (*Thái Bình*)

***Nhận xét.*** Ngoài 7 cách giải của bạn *Ngô Văn Thái*, người giới thiệu đề bài Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải đúng từ các bạn *Lê Ngọc Cẩm Tú*, 10 Toán 1, *Phan Thị Minh Châu*, *Lê Thị Thanh Tâm*, *Nguyễn Hương Thuỷ*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

**LÊ MAI** (*Hà Nội*)

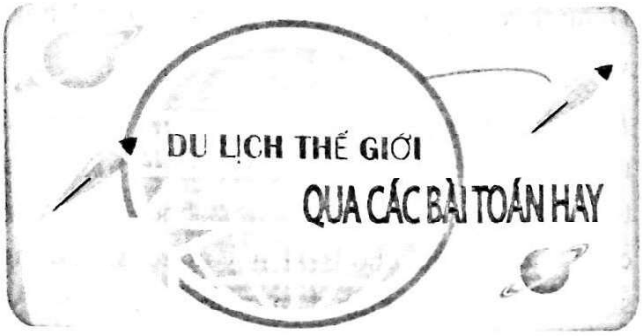
Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 47 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.3.2021.

**BÀI TOÁN 47.** *Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm nằm trên đường phân giác trong AD thoả mãn* $\widehat{ABN}=\widehat{CBM}$. *Chứng minh rằng*

$$\widehat{ACN}=\widehat{BCM}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(*GV THCS P. Bình Định, tỉnh Bình Định*) ***giới thiệu***




**BÀI TOÁN 53.** *Tam giác nguyên được định nghĩa là tam giác có số đo các cạnh là các số nguyên. Hãy tìm tất cả các tam giác nguyên có chu vi bằng diện tích (không tính đến đơn vị đo)*

***Lời giải.*** Điều kiện bài toán tương đương với

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p \quad (1)$$

với số ba số nguyên dương $a$, $b$, $c$ là ba cạnh của tam giác, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

Đặt $p-a = x, p-b = y, p-c = z$. Khi đó (1) trở thành: $\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow xyz = 4(x+y+z) \quad (2).$$

Ở đây $x$, $y$, $z$ tất cả là các số nguyên dương hoặc chúng là các phân số với mẫu số là 2. Tuy nhiên với $x$, $y$, $z$ là các phân số với mẫu số là 2 không thỏa mãn phương trình (2). Do đó $x$, $y$, $z$ là các số nguyên dương. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \ge y \ge z$. Từ (2) suy ra:

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4}, \text{ do đó } x = \frac{4y+4z}{yz-4} \ge y.$$

Rõ ràng là $yz - 4 > 0$ nên ta có:

$$y^2z - 8y - 4z \le 0 \Leftrightarrow (y-y_1)(y-y_2) \le 0 \quad (3).$$

Với $y_1, y_2$ là nghiệm của PT $zy^2 - 8y - 4z = 0$:

$$y_1 = \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}, \; y_2 = \frac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z}.$$

Vì $y_2 < 0$ nên $y - y_2 > 0$, do đó

$$(3) \Leftrightarrow y - y_1 \le 0 \Leftrightarrow y \le y_1 \Leftrightarrow y \le \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}$$

$$\Leftrightarrow yz \le 4 + \sqrt{16+4z^2} \Rightarrow z^2 - 4 \le \sqrt{16+4z^2} \quad (4)$$

(vì $y \ge z$)

$$\Rightarrow z^4 - 8z^2 + 16 \le 16 + 4z^2$$

$$\Leftrightarrow z^4 \le 12z^2 \Leftrightarrow z^2 \le 12 \Rightarrow z \le 3.$$

Xét ba trường hợp:

• TH1: $z = 1$, $y \le \dfrac{4+\sqrt{16+4}}{1} < 9$;

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4y+4}{y-4}.$$

Để $x$ nguyên dương ta có các trường hợp:
- Với $y = 5$ thì $x = 24$; - Với $y = 6$ thì $x = 14$;
- Với $y = 8$ thì $x = 9$.

• TH2: $z = 2$, $y \le \dfrac{4+\sqrt{16+4.4}}{2} < 5$;

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4y+8}{2y-4} = \frac{2y+4}{y-2}.$$

Để $x$ nguyên dương ta có các trường hợp:
- Với $y = 3$ thì $x = 10$; - Với $y = 4$ thì $x = 6$.

• TH3: $z = 3$, $y \le \dfrac{4+\sqrt{16+4.9}}{3} < 4$;

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4} = \frac{4y+12}{3y-4}.$$

Với $y = z = 3$ thì $x$ không nguyên.

Từ các trường hợp $x$, $y$, $z$ tìm được ta tìm được 5 nghiệm của bài toán:

| $x$ | $y$ | $z$ | $x+y+z=p$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 5 | 1 | 30 | 6 | 25 | 29 |
| 14 | 6 | 1 | 21 | 7 | 15 | 20 |
| 9 | 8 | 1 | 18 | 9 | 10 | 17 |
| 10 | 3 | 2 | 15 | 5 | 12 | 13 |
| 6 | 4 | 2 | 12 | 6 | 8 | 10 |

***Nhận xét.*** Hoan nghênh bạn *Đào Quang Anh*, 8C2, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, **Hà Nội** và bạn *Phạm Hữu Đăng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** có lời giải đúng.

**NHƯ HOÀNG** *(Hà Nội)*

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI TOÁN 55.** *Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 5, AC = 7 và AD, CE là các phân giác trong cắt nhau tại P. Tính độ dài đoạn thẳng AP.*

**KHÁNH HỮU** *(Hà Nội)*


**GIẢI ĐÁP: THEO CÁCH DẠY CỦA THẦY MÀ!**

***(Đề đăng trên TH&TT số 520, tháng 10 năm 2020)***

***Phân tích sai lầm.*** Lời giải sai ngay từ phần xét đạo hàm để lập bảng biến thiên, đó là việc bỏ đi miền nửa khoảng $[-2;0)$ (được tô đậm).

***Lời giải đúng.*** Miền xác định của hàm số: $D=[-2;2]$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x\in(-2;2)$.

Khi $x<0\Rightarrow\ y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}>0$. Khi $x\ge 0$, ta có:

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$. BBT:

| $x$ | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ‖ | + | | + | \| | + | $0$ | − | ‖ |
| $y$ | $-2$ | ↗ | | ↗ | | ↗ | $2\sqrt{2}$ | ↘ | $2$ |

Vậy: $\max y=2\sqrt{2}$, khi $x=\sqrt{2}$; $\min y=-2$, khi $x=-2$.

***Nhận xét.*** Hai bạn: *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, phường Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng

**KIHIVI**

## MAX $P$ = ?

Trong giờ Toán thầy giáo ra đề bài như sau :

**Bài toán.** *Cho $x,y$ thỏa mãn*

$$\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy.$$

*GTLN của biểu thức* $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}$ *khi $x,y$ thay đổi gần nhất với số nào dưới đây?*

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Sau một lúc, nhiều bạn học sinh cùng có lời giải sau:

$$\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$$

$$\log_3\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$$

$$\Leftrightarrow\log_3(x+y)-\log_3(x^2+y^2+xy+2)+2$$
$$=x^2+y^2+xy+2-9x-9y\ (x+y>0)$$

$$\Leftrightarrow\log_3(9x+9y)+(9x+9y)$$
$$=\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2\ \ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t,\ (t>0)$, ta có:

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ (*) suy ra:

$f(9x+9y)=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow 9x+9y=x^2+y^2+xy+2$

$\Leftrightarrow 9(x+y)=(x+y)^2-xy+2\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-9(x+y)+2$ (1).

Ta có: $x=x+xy-xy=x(y+1)-xy\le\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2-xy$

$\Rightarrow xy\le\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2-x$ (2). Từ đó:

$xy=(x+y)^2-9(x+y)+2\le\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2-x$

$\Leftrightarrow x\le\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2-(x+y)^2+9(x+y)-2$

Đặt $t=x+y>0$ thì $P=\dfrac{x+2(x+y)-9}{x+y+10}=\dfrac{x+2t-9}{t+10}$

$$\le\frac{\dfrac{(t+1)^2}{4}-t^2+9t-2+2t-9}{t+10}$$
$$=\frac{t^2+2t+1-4t^2+44t-44}{4t+40}=\frac{-3t^2+46t-43}{4t+40}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-3t^2+46t-43}{4t+40}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{-3t^2-60t+503}{(t+4)^2}=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{30+\sqrt{2409}}{3}$ (loại), $t=\dfrac{-30+\sqrt{2409}}{3}$. BBT:

| $t$ | $0$ | | $\dfrac{-30+\sqrt{2409}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $0$ | − | |
| $f(t)$ | | ↗ | $\approx 1.9582$ | ↘ | |

Từ BBT ta tìm được $\max P\approx 2$. Chọn **A**.

***Theo em, lời giải trên đã đúng chưa?***

**NGUYỄN QUANG MINH**

*(GV THPT Hai Bà Trưng, thị xã Buôn Hồ, Đắk Lắk)*

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
## Mathematics and Youth Magazine

*XUẤT BẢN TỪ 1964*
Số 524 (2.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com




## TRONG SỐ NÀY




***Biên tập:*** LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
***Trị sự, phát hành:*** HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản:*** DƯƠNG THUẬN

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM CHUẨN BỊ, CUNG ỨNG ĐẦY ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC 2020-2021

1. Thực hiện công văn số 2058/BGDĐT-GDTH ngày 10/6/2020 của Bộ GD&ĐT về việc thực hiện bồi dưỡng giáo viên (GV) và cung ứng SGK lớp 1 năm học 2020-2021, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã hoàn thành công tác bồi dưỡng GV sử dụng SGK lớp 1 và chuẩn bị đầy đủ SGK, cung ứng tới các địa phương trong cả nước.

- NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho hơn 113 triệu bản SGK phục vụ học sinh từ lớp 2 đến lớp 12. Đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã phát hành được 93% sản lượng theo kế hoạch về các địa phương, đạt 92% so với cùng kỳ (do ảnh hưởng của đại dịch COVID-19 nên việc mua sắm SGK và đồ dùng học tập diễn ra chậm hơn mọi năm).

- Đối với SGK lớp 1, NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho được hơn 14 triệu bản, tương đương 115% kết quả lựa chọn của các địa phương. Đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã cung ứng tới các địa phương hơn 13 triệu bản SGK lớp 1 đạt tỉ lệ 107% so với kết quả lựa chọn SGK của các địa phương.

2. *Giá bán SGK từ lớp 2 đến lớp 12 vẫn được giữ như những năm học trước.* Bảng giá SGK được niêm yết tại các cửa hàng sách của NXBGDVN, các công ty Sách và Thiết bị trường học trên cả nước và trên webiste của NXBGDVN tại địa chỉ: www.nxbgd.vn.

3. NXBGDVN đã tiếp tục kiện toàn, củng cố hệ thống kênh phát hành trong toàn quốc nhằm đảm bảo cung ứng đầy đủ, đồng bộ, kịp thời đến các nhà trường, học sinh (HS), GV, không để xảy ra tình trạng thiếu sách, sốt sách đặc biệt trong giai đoạn triển khai áp dụng Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Phát triển hệ thống bán lẻ, tại các địa phương để phục vụ nhu cầu của HS và GV.

Trong tháng phát hành phục vụ khai giảng năm học mới, hệ thống cửa hàng bán lẻ thuộc hệ thống NXBGDVN chuẩn bị đầy đủ hàng hoá, mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời tổ chức các chương trình khuyến mại phong phú.

• Đường dây nóng (0377 333 545) giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK được duy trì từ 8h00 đến 22h00 hàng ngày trong khoảng thời gian từ ngày 15/6 đến ngày 15/9/2020, kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ.

NXBGDVN khẳng định sẽ tiếp tục chủ động ứng phó với diễn biến phức tạp của dịch bệnh, các hiện tượng bất thường của thời tiết để đảm bảo cung ứng đầy đủ SGK tới tay HS khi bước vào năm học mới.

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT2M21

In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2021

Giá 45.000 đồng

Mười lăm nghìn đồng