TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 523
Tháng 1 - 2021
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

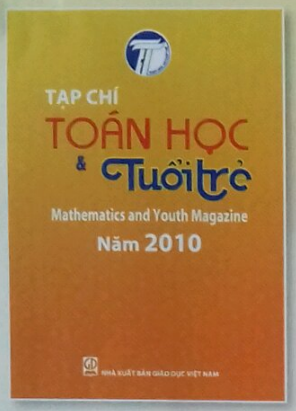
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

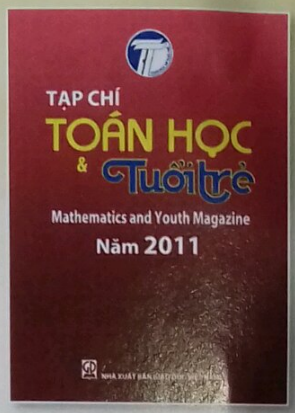
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

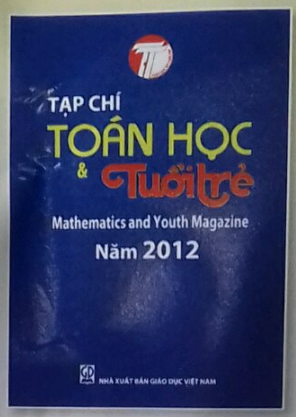
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

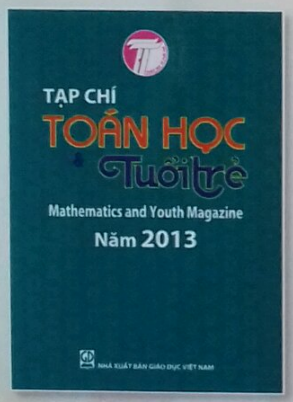
Bộ đóng tập

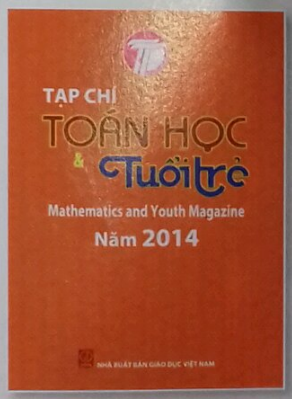
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

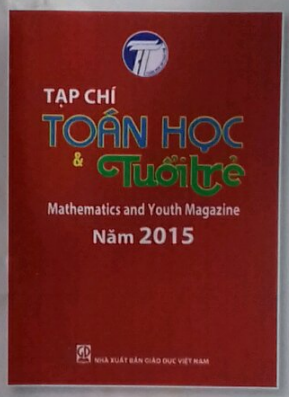


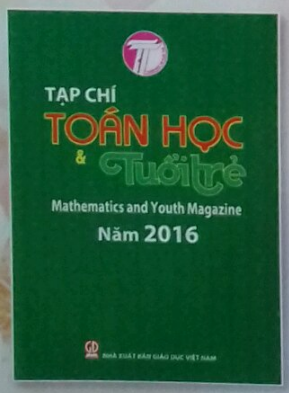


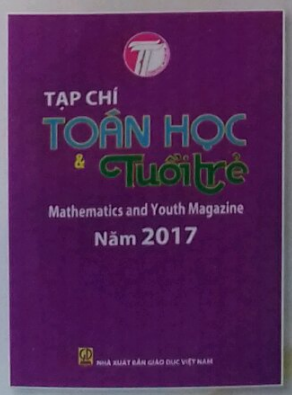


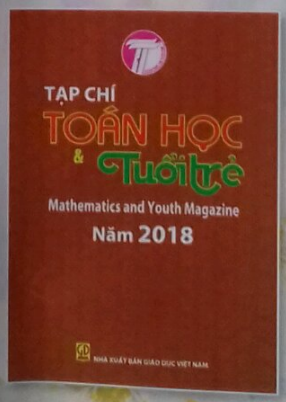


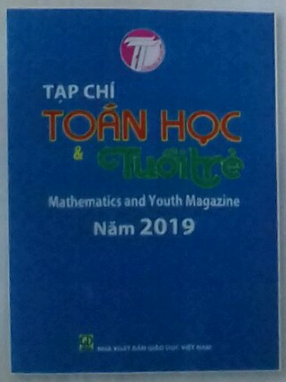


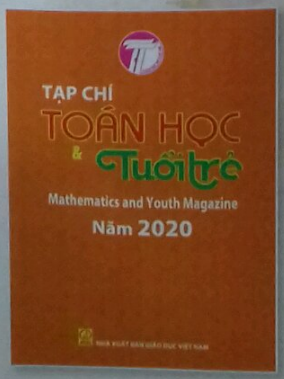












Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ BÀI TOÁN CON BƯỚM

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD&ĐT thị xã Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Ở chương trình THCS, việc khai thác và vận dụng các tính chất cơ bản trong giải toán là hết sức quan trọng. Qua đó nâng cao năng lực, tư duy giải toán, nhất là năng lực giải toán hình học. Bài viết này tôi muốn giới thiệu với bạn đọc vận dụng tính chất cơ bản của tứ giác nội tiếp để chứng minh bài toán con bướm và một số ứng dụng của bài toán con bướm cho học sinh THCS.

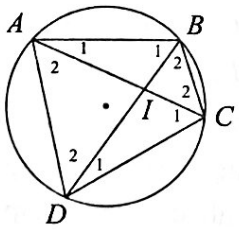
I. Khái niệm và các tính chất của tứ giác nội tiếp

1. Định nghĩa. Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn. Tứ giác nội tiếp đường tròn gọi tắt là tứ giác nội tiếp.

2. Các tính chất và dấu hiệu cơ bản của tứ giác nội tiếp

Tính chất 1. Tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi tổng hai góc đối bằng 180^0.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$ (h.1).



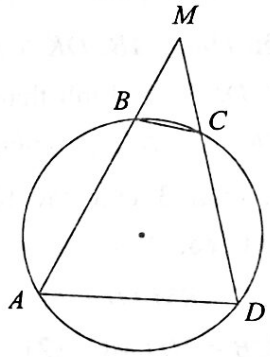
Hình 1

Tính chất 2. Tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh không chứa hai đỉnh đó các góc bằng nhau.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{A}_1=\widehat{D}_1$ hoặc $\widehat{B}_1=\widehat{C}_1$ hoặc $\widehat{A}_2=\widehat{B}_2$ hoặc $\widehat{D}_2=\widehat{C}_2$ (h.1).

Tính chất 3. Tứ giác $ABCD$ có I là giao điểm hai đường chéo, khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $IA.IC = IB.ID$ (h.1).

Tính chất 4. Nếu tứ giác $ABCD$ có AB và CD cắt nhau tại M thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $MA.MB = MC.MD$ (h.2).



Hình 2

II. Bài toán con bướm. *Cho đường tròn tâm O và dây cung AB không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm của dây cung AB, qua I kẻ hai dây cung tùy ý DE và CF của đường tròn (O). Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của các dây CD và EF với AB. Chứng minh IM = IN.*

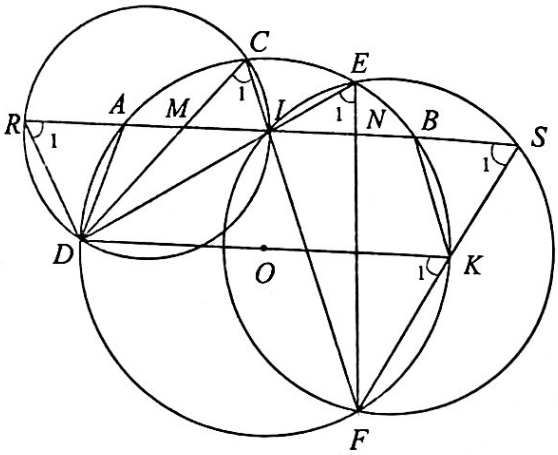
Chứng minh.

Trường hợp 1 (h.3): C và E thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O).

Vẽ đường tròn ngoại tiếp các tam giác FEI và CDI lần lượt cắt đường thẳng AB tại các điểm thứ 2 là S và R. Gọi K là giao điểm của đường tròn (O) với FS (K khác F).

Theo định nghĩa ta thấy các tứ giác $DCEF$, $FIES$, $DICR$, $CDKF$ nội tiếp nên suy ra:

$$\widehat{R}_1=\widehat{C}_1=\widehat{E}_1=\widehat{S}_1=\widehat{K}_1.$$



Hình 3

Do $\widehat{S}_1=\widehat{K}_1$ nên $DK \parallel AB$; $DK \parallel RS$, suy ra các tứ giác $DKSR$, $DKBA$ là hình thang cân, từ đây ta suy ra $\Delta ADR=\Delta BKS$ (c.g.c) nên $AR = BS$.

Áp dụng tính chất 3 của các tứ giác $DICR$, $ADBC$ nội tiếp ta có:

$$MD.MC = RM.MI \quad (1)$$

$$AM.MB = MD.MC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $RM.MI = AM.MB$

$$\Leftrightarrow (AR + AM).MI = AM.(MI + IB)$$

$$\Leftrightarrow AR.MI = AM.IB \Rightarrow AR=\frac{AM.BI}{MI} \ (*)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$BS=\frac{BN.AI}{NI} \ (**).$$

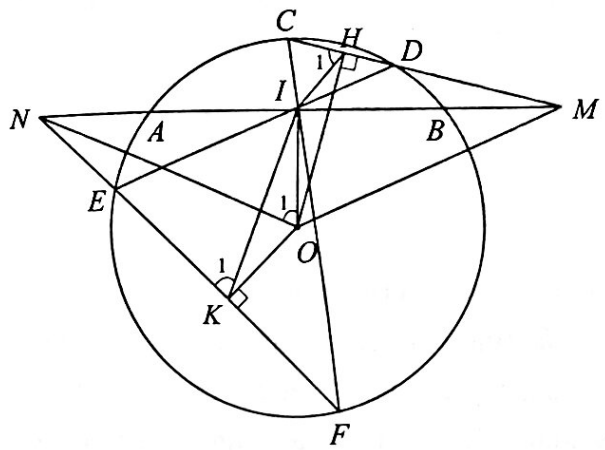
Do $AR = BS$ nên từ (*) và (**) ta suy ra:

$$\frac{AM.BI}{MI}=\frac{BN.AI}{NI} \ (***).$$

Mặt khác do I là trung điểm của AB nên $AI = BI$ nên từ (***) ta suy ra: $\frac{AM}{MI}=\frac{BN}{NI}$

$$\Rightarrow \frac{MI}{MA+MI}=\frac{IN}{NI+NB} \Rightarrow \frac{MI}{AI}=\frac{IN}{IB} \Rightarrow IM=IN \text{ (vì } AI=BI).$$

Trường hợp 2: C và D thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O).



Hình 4

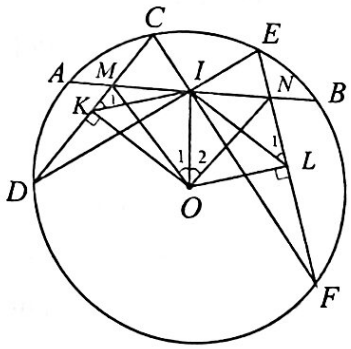
Xét CD và EF không song song với AB (h.4).

Kẻ $OH \perp CD; OK \perp FE$, vì I là trung điểm của dây AB của đường tròn (O) nên $OI \perp AB$.

Khi đó, dễ thấy các tứ giác $OINK$, $OIHM$ nội tiếp suy ra: $\widehat{K}_1=\widehat{O}_1=\widehat{ION}$ (1) (cùng chắn cung $\overset{\frown}{NI}$) và $\widehat{H}_1=\widehat{IOM}$ (2) (cùng phụ với $\widehat{IHM}$). Do 4 điểm C, D, F, E thuộc đường tròn (O) và DE, CF cắt nhau tại I nên ta có: $\Delta ICD \sim \Delta IEF$ (g.g), mà H và K theo thứ tự là trung điểm của CD và EF suy ra: $\Delta ICH \sim \Delta IEK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{H}_1=\widehat{K}_1$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{ION}=\widehat{IOM}$, mà $OI \perp AB \Rightarrow OI \perp MN \Rightarrow OM = ON$.

Nhận xét. Vận dụng cách chứng minh ở trường hợp 2 ta cũng chứng minh được trường hợp 1 (h.5). Bài toán con bướm có nhiều cách chứng minh, ở đây tác giả chỉ nêu cách phương pháp sử dụng tính chất cơ bản của tứ giác nội tiếp nhằm đưa ra cách chứng minh gọn để hiểu cho người học.

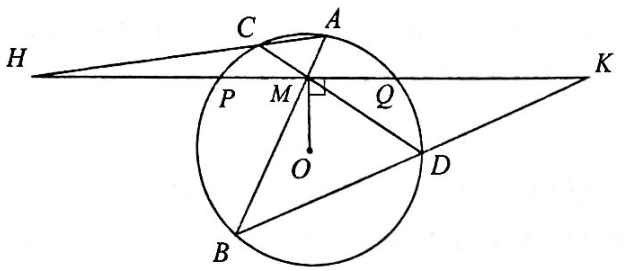


Hình 5

III. Ứng dụng của bài toán con bướm

Thí dụ 1. *Cho đường đường tròn (O), có M là trung điểm của dây PQ. Gọi AB và CD là hai dây qua M của đường tròn (O). Gọi H, K lần lượt là giao điểm của PQ với AC và BD. Chứng minh HC.HA = KD.KB.*

Lời giải.



Hình 6

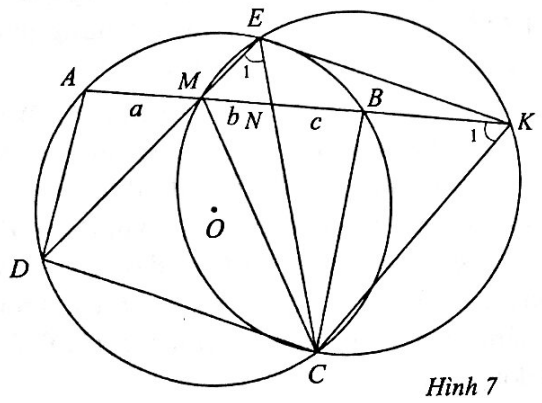
Theo bài toán con bướm ta có $MH = MK$ suy ra $HP = KQ$, $HQ = KP$ nên $HP.HQ = KQ.KP$, mà $HC.HA = HP.HQ$; $KQ.KP = KD.KB$, do đó $HC.HA = KD.KB$.

Thí dụ 2. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm E di chuyển trên cung AB. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của của ED, EC với AB.*

a) *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EMC cắt đường thẳng AB tại một điểm cố định.*

b) *Đặt AM =a; MN = b; NB = c; chứng minh rằng* $\frac{ac}{b}$ *không đổi.*

Lời giải. (h.7)



Hình 7

a) Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔEMC và AB. Do tứ giác $MEKC$ nội tiếp nên $\widehat{E}_1 = \widehat{K}_1$ (cùng chắn cung MC).

Mặt khác tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), E thuộc cung AB (không chứa điểm C, D) suy ra: $\widehat{E}_1 = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ không đổi, do đó $\widehat{K}_1$ không đổi hay $\overset{\frown}{BKC}$ không đổi, mà K thuộc đường thẳng AB cố định, B, C cố định nên K là điểm cố định.

b) Ta có tứ giác $MEKC$ nội tiếp nên suy ra: $MN.NK = EN.CN$ hay $b(c + BK) = EN.CN$ (1).

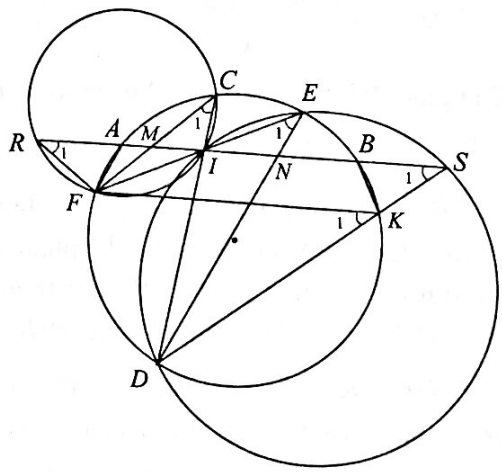
Tứ giác $AEBC$ nội tiếp nên: $AN.NB = EN.CN$ hay $(a + b).c = EN.CN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra:

$$b(c + BK) = c(a + b) \Leftrightarrow bc + b.BK = ac + cb$$

$$\Leftrightarrow b.BK = ac \Leftrightarrow \frac{ac}{b} = BK$$ (không đổi, vì B, K cố định).

Thí dụ 3 (Bài toán Napoleon). *Cho đường tròn tâm (O) và dây AB, các điểm C và E thuộc cung AB (C thuộc cung AE). Vẽ các dây CD, EF đi qua điểm của I của dây AB. Gọi M và N theo thứ tự là là giao điểm của CF, ED với AB. Chứng minh rằng* $\frac{1}{AI} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{BI} + \frac{1}{IM}$.

Lời giải (h.8).



Hình 8

Vẽ đường tròn ngoại tiếp các tam giác ICF và IDE cắt AB theo thứ tự tại R và S. Tương tự như cách chứng minh định lý con bướm ta suy ra:

$$\frac{AM.BI}{MI}=\frac{BN.AI}{NI}\ (=AR=BS)$$

$$\Leftrightarrow AM.BI.NI=MI.BN.AI$$

$$\Leftrightarrow AM.BI.NI=MI.AI.BN$$

$$\Leftrightarrow (AI-MI)BI.NI=MI.AI(BI-NI)$$

$$\Leftrightarrow AI.BI.NI-MI.BI.NI=MI.AI.BI-MI.AI.NI$$

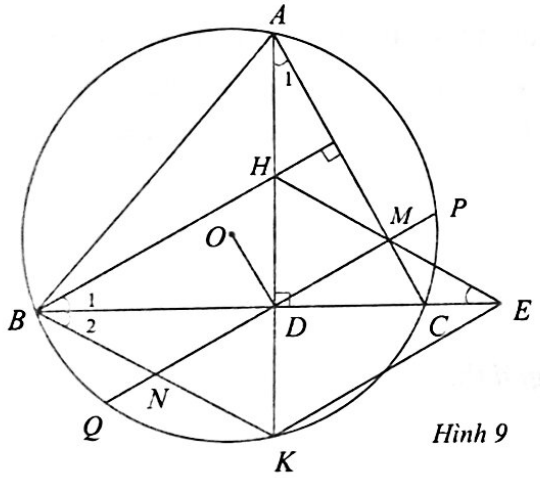
$$\Leftrightarrow AI.BI.NI+MI.AI.NI=MI.AI.BI+MI.BI.NI$$

$$\Leftrightarrow AI.NI(BI+MI)=MI.BI(AI+NI)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AI+NI}{AI.IN}=\frac{BI+MI}{MI.BI}\Leftrightarrow \frac{1}{AI}+\frac{1}{NI}=\frac{1}{BI}+\frac{1}{MI}.$$

Thí dụ 4. *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) (AB>AC), đường cao AD, H là trực tâm của tam giác. Gọi E là điểm đối xứng với B qua D, M là giao điểm của HE với AC. Chứng minh* $\widehat{ODM}=90^0$.

Lời giải.



Hình 9

Gọi K là giao điểm của AD với đường tròn (O) (h.9). Theo bài ra ta có: $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$), $\widehat{B_2}=\widehat{A_1}$ (cùng chắn cung KC). Do đó trong tam giác BHK có BD vừa là phân giác cũng là đường cao nên $HD = DK$, mà theo bài ra $BD = DE$, $HK\perp BE$ nên tứ giác $BHEK$ là hình thoi $HE\|BK\Rightarrow\widehat{B_2}=\widehat{MED}$ (so le trong).

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của DM với đường tròn (O), N là giao điểm của DM với BK. Khi đó dễ có $\Delta DEM=\Delta DBN$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM=DN$. Áp dụng bài toán con bướm ta suy ra $MP = NQ$. Do đó:

$$OD\perp PQ \text{ hay } OD\perp MN\Rightarrow\widehat{ODM}=90^0.$$

Nhận xét. Đối với bài toán trên ngoài cách sử dụng bài toán con bướm ta có thể sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp như sau:

Từ chứng minh trên ta thấy $\widehat{A_1}=\widehat{MEC}$, suy ra tứ giác $AHCE$ nội tiếp và $HM = NK$.

Áp dụng tính chất của tứ giác nội tiếp ta suy ra:

$$QN.(MN+MP)=BN.NK=ME.MH=AM.MC$$
$$=MP.(MN+QN)$$

$$\Rightarrow QN.(MN+MP)=MP.(MN+QN)$$

$$\Rightarrow QN.MN=PM.MN\Rightarrow QN=MP.$$

IV. Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm và M là trung điểm của BC. Kẻ đường thẳng qua H và vuông góc với MH cắt các đoạn thẳng AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh $MP = MQ$.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác (I khác O). Đường thẳng BI, CI cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại E, F. Gọi K, D lần lượt là giao điểm của AI với EF và BC. Biết $AB+AC = 2BC$. Chứng minh $IK = ID$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao CD, H là trực tâm. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với OD cắt BC tại E. Chứng minh $\widehat{DHE}=\widehat{ABC}$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại I (I khác O). Qua I kẻ đường thẳng vuông góc OI cắt AB và CD lần lượt tại M và N. Chứng minh $AB = CD$ khi và chỉ khi $BM = CN$.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R) cắt nhau tại A và B. Gọi I là trung điểm của AB. Dây CD của đường tròn tâm O đi qua trung điểm I. Gọi M là giao điểm của đoạn thẳng CD với đường tròn tâm O', EF là dây qua I của đường tròn tâm O' và đoạn thẳng EF cắt đường tròn tâm O tại N. Chứng minh rằng: AB, CN và EM đồng quy.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ HÓA HỮU TỶ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐIỂN HÌNH

PHẠM VĂN SƠN
(GV THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ)

Trong quá trình giải toán ta gặp không ít phương trình, hệ phương trình từ dễ đến khó và các cách giải cũng rất đa dạng và phong phú. Tham số hóa là một phương pháp không còn xa lạ với học sinh được sử dụng vào các bài toán như chọn điểm rơi trong chứng minh bất đẳng thức, số học,.... Trong bài viết này tác giả xin mạnh dạn trình bày phương pháp tham số hữu tỷ để giải một số dạng phương trình hệ phương trình điển hình.

1. Tham số hóa hữu tỷ để giải phương trình bậc 4: $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (b, c, d, e là các số thực cho trước)

Trước hết ta biến đổi:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + bx^3 + \frac{b^2}{4}x^2 = \left(-c + \frac{b^2}{4}\right)x^2 - dx - e$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{b}{2}x\right)^2 = \left(-c + \frac{b^2}{4}\right)x^2 - dx - e.$$

Đặt $y = x^2 + \frac{b}{2}x$, ta có:

$$\begin{cases} y^2 = \left(-c + \frac{b^2}{4}\right)x^2 - dx - e \\ y = x^2 + \frac{b}{2}x \end{cases}.$$

Nhân phương trình thứ hai với số $(2m)$ rồi cộng từng vế vào phương trình thứ nhất, sau đó tạo ra hằng đẳng thức ở hai vế:

$$y^2 + 2my = \left(-c + \frac{b^2}{4} + 2m\right)x^2 + (-d + mb)x - e$$

$$\Leftrightarrow (y+m)^2 = \left(-c + \frac{b^2}{4} + 2m\right)x^2 + (-d + mb)x - e + m^2 \quad (*).$$

Ta chọn m thích hợp để vế phải (*) là một bình phương $(Ax+B)^2$, muốn vậy: $\Delta_x = 0$ $(\Delta'_x = 0)$ hay $(-d + mb)^2 - 4\left(-c + \frac{b^2}{4} + 2m\right)(-e + m^2) = 0.$

Công việc còn lại là giải phương trình bậc ba ẩn m để tìm xem có m hữu tỷ thích hợp hay không? Nếu có ta thường chọn m là các số hữu tỷ khác 0. Khi đó phương trình (*) trở thành:

$(y+m)^2 = (Ax+B)^2$ hoặc $(y+m)^2 = -(Ax+B)^2$

$\Leftrightarrow (y+m)^2 = (Ax+B)^2$ hoặc $(y+m)^2 + (Ax+B)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y + m = \pm(Ax+B)$ hoặc $y + m = Ax + B = 0.$

Đến đây bài toán giải phương trình bậc bốn được quy về giải các phương trình bậc hai. Việc làm xuất hiện hệ tạm thời như trên kết hợp phương pháp tham số hóa hữu tỷ giúp giải quyết hiệu quả các bài phương trình bậc bốn nếu như ta chọn được m hữu tỷ. Ta cùng xét thí dụ sau.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0.$$

Phân tích. Trước hết ta biến đổi:

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 14x^2 - 37x + 14$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 = 14x^2 - 37x + 14.$$

Đặt $y = x^2 - 2x$, ta có: $\begin{cases} y^2 = 14x^2 - 37x + 14 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}.$

Nhân phương trình thứ hai với số $(2m)$ rồi cộng từng vế vào phương trình thứ nhất:

$$\begin{cases} y^2+2my=(14+2m)x^2+(-37-4m)x+14 \\ 2my=2mx^2-4mx \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2+2my=(14+2m)x^2+(-37-4m)x+14$$

$$\Leftrightarrow (y+m)^2=(14+2m)x^2+(-37-4m)x+14+m^2 \quad (1)$$

Ta chọn m thích hợp để vế phải (1) là một bình phương, muốn vậy: $\Delta_x=0$ hay

$$(-37-4m)^2-4(14+2m)(14+m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow -8m^3-40m^2+184m+585=0.$$

Ta chọn được $m=\dfrac{-5}{2}$.

Ta có lời giải như sau:

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2=14x^2-37x+14$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)^2=14x^2-37x+14.$$

Đặt $y=x^2-2x$, ta có:

$$\begin{cases} y^2=14x^2-37x+14 \\ y=x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=14x^2-37x+14 \\ -5y=-5x^2+10x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=14x^2-37x+14 \\ y^2-5y=9x^2-27x+14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=14x^2-37x+14 \\ \left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=9x^2-27x+\dfrac{81}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3x-\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y-\frac{5}{2}=\pm\left(3x-\frac{9}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow x^2-5x+2=0$ hoặc $x^2+x-7=0$

- $x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.
- $x^2+x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm:

$$S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}\right\}.$$

Nhận xét. Bằng cách đặt ẩn phụ kết hợp tham số hóa hữu tỷ ta có thể giải phương trình bậc bốn nếu như chọn được m hữu tỷ thích hợp. Ta cũng có thể sử dụng phương pháp tham số hóa hữu tỷ để giải hệ phương trình.

2. Tham số hóa hữu tỷ để giải hệ phương trình

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2-12y-6=0 & (2a) \\ 2y^2-x+1=0 & (2b) \end{cases}.$$

Phân tích. Nhân 2 vế phương trình (2a) với m rồi cộng từng vế với phương trình (2b) sau đó tạo ra hằng đẳng thức ở hai vế:

$$mx^2-12my-6m+2y^2-x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-12my=-mx^2+x-1+6m$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-24my=-2mx^2+2x-2+12m$$

$$\Leftrightarrow (2y-6m)^2=-2mx^2+2x+36m^2+12m-2 \quad (2c).$$

Để vế phải (2c) có dạng hằng đẳng thức $(Ax+B)^2$, ta chọn m thích hợp để $\Delta'_x=0$ hay

$$1+2m(36m^2+12m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 72m^3+24m^2-4m+1=0.$$

Ta chọn được $m=\dfrac{-1}{2}$.

Ta có lời giải:

$$\begin{cases} x^2-12y-6=0 \\ 2y^2-x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{2}x^2+6y+3=0 \\ 2y^2-x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{2}x^2+6y+3=0 \\ \dfrac{-1}{2}x^2+6y+3+2y^2-x+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}x^2+6y+3+2y^2-x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-12y-6-4y^2+2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (2y+3)^2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow (2y+3)^2=(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y+3=\pm(x+1)$$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x-2}{2}$ hoặc $y=\dfrac{-x-4}{2}$.

Thế trở lại phương trình (2a), ta được:

$$\begin{cases} x^2-6x+6=0 \\ y=\dfrac{x-2}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2+6x+18=0 \\ y=\dfrac{-x-4}{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{x-2}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3-\sqrt{3} \\ y=\dfrac{x-2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3-\sqrt{3} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Nhận xét. Bằng cách tham số hóa hữu tỷ kết hợp phương pháp cộng ta giải quyết được dạng hệ này. Ta tiếp tục phương pháp tham số hóa hữu tỷ để giải phương trình vô tỷ có thể đưa được về dạng hệ phương trình.

3. Tham số hóa để giải phương trình vô tỷ

Thí dụ 3. *Giải phương trình*:

$$(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\frac{3x}{2}-3 \quad (3).$$

Phân tích. ĐK: $2x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow |x|\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đặt $\sqrt{2x^2-1}=y\ge 0$, phương trình (3) trở thành: $\begin{cases} y^2=2x^2-1 & (3a) \\ (3x+1)y=5x^2+\dfrac{3x}{2}-3 & (3b) \end{cases}$.

Nhân phương trình (3b) với $2m$ rồi cộng vào phương trình (3a):

$$y^2+2m(3x+1)y=(10m+2)x^2+3mx-6m-1$$

$$\Leftrightarrow y^2+2m(3x+1)y+m^2(3x+1)^2$$

$$=(9m^2+10m+2)x^2+(3m+6m^2)x-6m-1+m^2$$

$$\Leftrightarrow (y+3mx+m)^2=(9m^2+10m+2)x^2$$

$$+(3m+6m^2)x-6m-1+m^2 \quad (3c).$$

Ta chọn m thích hợp để vế phải (3c) là một bình phương $(Ax+B)^2$, muốn vậy $\Delta_x=0$ hay

$$(3m+6m^2)^2-4(9m^2+10m+2)(-6m-1+m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 212m^3+277m^2+88m+8=0$$

$\Rightarrow m=\dfrac{-1}{4}$. Thay vào (3c), ta có:

$$\left(y-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow (4y-3x-1)^2=(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y-3x-1=\pm(x-3)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+1 \text{ hoặc } y=x-\frac{1}{2}.$$

• $y=\dfrac{x}{2}+1 \Rightarrow \sqrt{2x^2-1}=\dfrac{x}{2}+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1=\dfrac{x^2}{4}+x+1 \\ \dfrac{x}{2}+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-4x-8=0 \\ x\ge -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm 2\sqrt{15}}{7}$ (thỏa mãn ĐK).

• $y=x-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x^2-1}=x-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1=x^2-x+\dfrac{1}{4} \\ x-\dfrac{1}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-\dfrac{5}{4}=0 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình (3) có tập nghiệm:

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{6}}{2};\frac{2+2\sqrt{15}}{7};\frac{2-2\sqrt{15}}{7}\right\}.$$

Nhận xét. Ở thí dụ này ta kết hợp đặt ẩn phụ và tham số hóa làm xuất hiện các hằng đẳng thức:

$$(A+B+C)^2=(D+E)^2.$$

Thí dụ 4. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{2x+9}=x^2+9x+21 \quad (4).$$

Hướng dẫn giải. ĐK: $2x+9\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{9}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x+9}=y\ge 0$, phương trình (4) trở thành: $\begin{cases} y^2=2x+9 & (4a) \\ y=x^2+9x+21 & (4b) \end{cases}$.

Nhân phương trình (4b) với $2m$ rồi cộng vào phương trình (4a):

$$y^2+2my=2mx^2+(18m+2)x+42m+9$$

$$\Leftrightarrow (y+m)^2=2mx^2+2(9m+1)x+m^2+42m+9 \text{ (4c).}$$

Ta chọn m thích hợp để vế phải (4c) là một bình phương, muốn vậy $\Delta'_x=0$ hay

$$(9m+1)^2-2m(m^2+42m+9)=0$$

$$\Leftrightarrow -2m^3-3m^2+1=0.$$

Ta chọn được $m\in\left\{\frac{1}{2};-1\right\}$.

- Với $m=\frac{1}{2}$ thay vào (4c) ta có:

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+11x+\frac{121}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=\pm\left(x+\frac{11}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow y=x+5$ hoặc $y=-x-6$

• $y=x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+16=0 \\ x\ge \frac{-9}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$

• $y=-x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2x+9}=-x-6<0$ với $x\ge\frac{-9}{2}$

nên phương trình vô nghiệm.

- Với $m=-1$ thay vào (4c) ta có:

$$(y-1)^2=-2x^2-16x-32$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2+2(x+4)^2=0 \quad \text{(4d).}$$

VT(4d) ≥ 0. Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} y-1=0 \\ x+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+9}-1=0 \\ x=-4\end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\{-4\}$.

Nhận xét. Bằng cách tham số hóa hữu tỷ ta đã có thể giải quyết được các bài toán phương trình hệ phương trình điển hình như trên. Sau đây chúng ta cùng tìm hiểu một kiểu tham số hóa hữu tỷ khác để giải quyết phương trình dạng đẳng cấp.

4. Tham số hóa để giải phương trình dạng đẳng cấp

Thí dụ 5. *Giải phương trình sau:*

$$x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1 \quad (5).$$

Lời giải. ĐK: $\left[\begin{array}{l} -1\le x<0 \\ x\ge 1\end{array}\right.$. Ta có:

$$x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)+2x\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=3x.$$

Giả sử tồn tại m không âm thỏa mãn $x^2-1=mx$, khi đó phương trình trở thành:

$$mx+2x\sqrt{\frac{mx}{x}}=3x \Leftrightarrow mx+2x\sqrt{m}=3x$$

$\Leftrightarrow x(m+2\sqrt{m}-3)=0$

$\Leftrightarrow m+2\sqrt{m}-3=0$ (do $x\ne 0$)

$\Leftrightarrow (\sqrt{m}-1)(\sqrt{m}+3)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{m}-1=0$ (do $\sqrt{m}+3>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}=1 \Leftrightarrow m=1.$

Với $m=1$ ta được phương trình: $x^2-1=x$

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn ĐK)

hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình (5) có tập nghiệm:

$$S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Thí dụ 6. *Giải phương trình :*

$$x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1 \quad (6).$$

Phân tích. Ta có:

$$x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-1+\sqrt[3]{x^2(x^2-1)}=2x.$$

Giả sử tồn tại m thỏa mãn: $x^2-1=mx$ khi đó phương trình trở thành:

$$mx+\sqrt[3]{x^2mx}=2x \Leftrightarrow x(m+\sqrt[3]{m}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ m+\sqrt[3]{m}-2=0 \end{array}\right..$$

• Nếu $x=0$, phương trình (6) trở thành: $0=1$ (vô lí).

• Nếu $m+\sqrt[3]{m}-2=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{m}-1)(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{m}+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{m}-1=0 \\ \sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{m}+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \underbrace{(\sqrt[3]{m}+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}_{>0}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=1.$$

Với $m=1$ ta được phương trình:

$$x^2-1=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy PT(5) có tập nghiệm: $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Nhận xét. Ở cả hai thí dụ về giải phương trình vô tỷ trên ta đều dựa vào các biểu thức có sẵn trong bài toán kết hợp tham số hóa hữu tỷ để tạo ra nhân tử chung từ đó có thể dễ dàng chọn *m*.

5. Tham số hóa để giải phương trình dạng $f(x).g(x)=h(x)$

Nếu tồn tại hai số *m*, *n* sao cho $m.n\neq 0$ và $h(x)=m[f(x)]^2+n[g(x)]^2$

$\Rightarrow f(x).g(x)=m[f(x)]^2+n[g(x)]^2$, ta sẽ đưa được phương trình đã cho về phương trình đẳng cấp cơ bản. Ta cùng xét một số phương trình vô tỷ sau

Thí dụ 7. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{2x^3-3x^2+5x-2}=x^2-5x+4.$$

Phân tích. Nếu thực hiện bình phương hai vế ta sẽ khiến bài toán trở nên cồng kềnh phức tạp hơn nên có thể tìm cách đưa phương trình trên về dạng đẳng cấp như sau:

ĐK: $2x^3-3x^2+5x-2\geq 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x^2-x+2)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2} \text{ (do } x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\ \forall x).$$

Khi đó: $\sqrt{2x^3-3x^2+5x-2}=x^2-5x+4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)(x^2-x+2)}=x^2-5x+4.$$

Đặt: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x-1} \\ g(x)=\sqrt{x^2-x+2} \end{cases}$ $(f(x)\geq 0, g(x)>0)$,

ta có : $f(x).g(x)=x^2-5x+4$ (7).

Vấn đề còn lại có tồn tại *m*, *n* để:

$x^2-5x+4=m[f(x)]^2+n[g(x)]^2$ hay không?

Ta tìm hệ số *m*, *n* để:

$$x^2-5x+4=m[f(x)]^2+n[g(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow m(2x-1)+n(x^2-x+2)=x^2-5x+4$$

$$\Leftrightarrow nx^2+(2m-n)x-m+2n=x^2-5x+4$$

$$\Leftrightarrow n=1, m=-2.$$

Khi đó phương trình (7) trở thành:

$$f(x).g(x)=-2[f(x)]^2+[g(x)]^2.$$

Vì $g(x)>0$ nên chia hai vế phương trình cho $[g(x)]^2$ ta được:

$$2t^2+t-1=0 \text{ với } t=\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn) hoặc $t=-1<0$ (loại).

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow g(x)=2f(x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2}=2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+2=8x-4$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{57}}{2}.$$

Vì $x\geq\frac{1}{2}$ nên $x=\frac{9\pm\sqrt{57}}{2}$ thỏa mãn.

Thí dụ 8. *Giải phương trình*:

$$3\sqrt{x(x+1)(x-2)}=2x^2-6x-2 \text{ với } x>2.$$

Phân tích. Với $x>2$ thì $\sqrt{x(x+1)(x-2)}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x-2}$ luôn xác định.

Đặt $f(x).g(x)=\sqrt{x(x+1)(x-2)}$. Khi đó $f(x)=\sqrt{x(x+1)}$ hoặc $f(x)=\sqrt{x(x-2)}$ hoặc $f(x)=\sqrt{(x+1)(x-2)}$.

Ta tìm hệ số *m*, *n* để:

$$2x^2-6x-2=m\left[f(x)\right]^2+n\left[g(x)\right]^2.$$

Dễ thấy: $-2=m\left[f(0)\right]^2+n\left[g(0)\right]^2$;

$$6=m\left[f(-1)\right]^2+n\left[g(-1)\right]^2;$$

$$-6=m\left[f(2)\right]^2+n\left[g(2)\right]^2.$$

- Nếu $f(x)=\sqrt{x(x+1)}\Rightarrow f(0)=f(-1)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2=n\left[g(0)\right]^2\\6=n\left[g(-1)\right]^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n<0\\n>0\end{cases}:\text{ không tồn tại } n.$$

- Nếu $f(x)=\sqrt{(x+1)(x-2)}\Rightarrow f(-1)=f(2)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}-6=n\left[g(2)\right]^2\\6=n\left[g(-1)\right]^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n<0\\n>0\end{cases}:\text{ không tồn tại } n.$$

Vậy ta chọn đặt: $f(x)=\sqrt{x(x-2)}>0$, $g(x)=\sqrt{x+1}>0$, và xét xem liệu có tồn tại *m*, *n* để $2x^2-6x-2=m\left[f(x)\right]^2+n\left[g(x)\right]^2$ không?

Ta tìm hệ số *m*, *n* để:

$$2x^2-6x-2=mx(x-2)+n(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x-2=mx^2+(-2m+n)x+n$$

$$\Leftrightarrow n=-2, m=2.$$

Ta có thể giải bài toán như sau: Ta có:

$$3\sqrt{x(x+1)(x-2)}=2x^2-6x-2$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2-2x)(x+1)}=2(x^2-2x)-2(x+1).$$

Đặt: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}>0$, $g(x)=\sqrt{x+1}>0$, ta có: $3f(x).g(x)=2\left[f(x)\right]^2-2\left[g(x)\right]^2$.

Chia 2 vế phương trình cho $\left[g(x)\right]^2$ ta được:

$$2t^2-3t-2=0 \text{ với } t=\frac{f(x)}{g(x)}>0$$

$\Leftrightarrow t=2$ (thỏa mãn) hoặc $t=\frac{-1}{2}<0$ (loại).

Với $t=2\Rightarrow f(x)=2g(x)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-2x=4(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}$. Do $x>2$ nên phương trình có nghiệm $x=3+\sqrt{13}$.

Nhận xét. Phương trình, hệ phương trình là chủ đề rất rộng được các em học sinh yêu thích, có rất nhiều phương pháp giải khác nhau cho mỗi bài. Việc giải toán cũng cần linh hoạt trong việc kết hợp các phương pháp. Trong bài viết này tác giả chỉ giới thiệu thêm một phương pháp tham số hóa hữu tỷ để giải quyết một số dang phương trình, hệ phương trình điển hình. Sau đây là một số bài mời bạn đọc tham khảo thêm:

BÀI TẬP ÁP DỤNG

I. ***Giải các phương trình sau:***

1. $x^4+4x^3+3x^2+2x-1=0.$

2. $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0.$

3. $32x^4-48x^3-10x^2+21x+5=0.$

4. $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}.$

5. $x^2+4x=(x+2)\sqrt{x^2-2x+4}.$

6. $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5.$

7. $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}.$

8. $\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2-16}.$

9. $(4x-1).\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1.$

10. $2\sqrt{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)}=2x^2+8x+9$ với $x\geq 0.$

11. $\sqrt{3}(-x^2+3x-1)=\sqrt{x^4+x^2+1}.$

II. ***Giải hệ phương trình:***

$$\begin{cases}y^3+xy^2-2y^2+x+y-1=0\\(y^2+1)(x+y)^2=1\end{cases}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BÌNH PHƯỚC
NĂM HỌC 2020 - 2021

Câu 1.

a) $A=\left(1-\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$

a) ĐK: $a\ge 0$ và $a\ne 1$.

$$A=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{a+1}:\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{(a+1)\left(\sqrt{a}+1\right)}=\sqrt{a}+1.$$

b) $a=2021-2\sqrt{2020}=\left(\sqrt{2020}-1\right)^2$

$\Rightarrow A=\left|\sqrt{2020}-1\right|+1=\sqrt{2020}=2\sqrt{505}.$

Câu 2. a) $2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0.$

ĐK: $x\ge\dfrac{4}{5}$. Ta có:

$2x\left(x-\sqrt{5x-4}\right)-\sqrt{5x-4}\left(x-\sqrt{5x-4}\right)=0$

$\Rightarrow\left(x-\sqrt{5x-4}\right)\left(2x-\sqrt{5x-4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{5x-4}=x\vee\sqrt{5x-4}=2x.$

TH1: $\sqrt{5x-4}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\5x-4=x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐK).

TH2: $\sqrt{5x-4}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\5x-4=4x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-5x+4=0\end{cases}$: vô nghiệm.

b) $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}48x^2y-12xy^2=60\\64x^3-y^3=61\end{cases}$

$\Rightarrow 64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3=1$

$\Leftrightarrow(4x-y)^3=1\Leftrightarrow y=4x-1.$

Thế $y=4x-1$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta có: $4x^2(4x-1)-x(4x-1)^2=5$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.$.

Với $x=-1\Rightarrow y=-5$; với $x=\dfrac{5}{4}\Rightarrow y=4.$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là: $(-1;-5)$, $\left(\dfrac{5}{4};4\right)$.

Câu 3. a) $y=2x-m$ và $y=x^2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi PT $x^2=2x-m\Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\m>0\\2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1.$$

b) Vì hai phương trình có nghiệm chung nên hệ $\begin{cases}x^2+mx+8=0\\x^2+x+m=0\end{cases}$ có nghiệm $\Rightarrow(m-1)x+8-m=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{m-8}{m-1}$ (do $m=1$ không thỏa mãn).

Thay x vào PT thứ hai ta có:

$$\left(\frac{m-8}{m-1}\right)^2+\frac{m-8}{m-1}+m=0$$

$\Leftrightarrow m^2-16m+64+m^2-9m+8+m^3-2m^2+m=0$

$\Leftrightarrow m^3-24m+72=0$

$\Leftrightarrow(m+6)\left(m^2-6m+12\right)=0$

$\Leftrightarrow(m+6)\left[(m-3)^2+3\right]=0\Leftrightarrow m=-6.$

Thử lại ta thấy $m=-6$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x=2$.

c) Ta có: $\Delta'_1=(b+c)^2-4ac,\Delta'_2=(c+a)^2-4ab,$

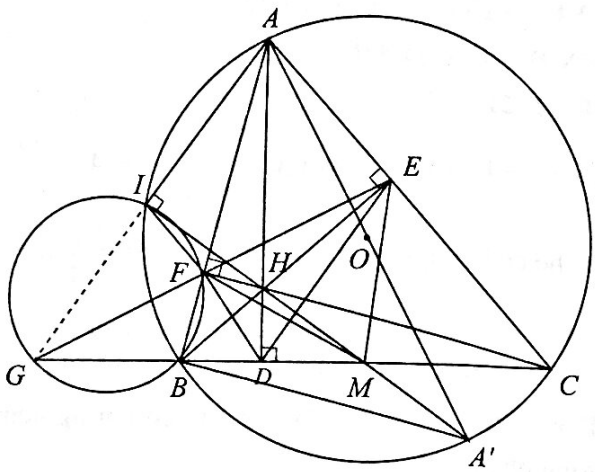
$\Delta'_3=(a+b)^2-4bc.$

Suy ra:

$$\Delta'_1+\Delta'_2+\Delta'_3=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0.$$

Vậy $\Delta'_1\ge 0$ hoặc $\Delta'_2\ge 0$ hoặc $\Delta'_3\ge 0$ nên ít nhất một trong ba phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 4. a) Ta có: $\widehat{BFH}+\widehat{BDH}=180^0\Rightarrow$ tứ giác $BFHD$ nội tiếp. $\widehat{BDA}=\widehat{BEA}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $ABDE$ nội tiếp.



Tứ giác $BFHD$ và tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{FBH}=\widehat{FDH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FH}$ của đường tròn ($BFHD$)) và $\widehat{FBH}=\widehat{HDE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$ của đường tròn ($ABDE$)), suy ra $\widehat{FDH}=\widehat{HDE}$ nên DA là tia phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

Tương tự: EB là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M nên $\widehat{EMF}=2.\widehat{EBF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chăn cung EF) và $\widehat{EDF}=2.\widehat{HDF}=2.\widehat{EBF}$. Suy ra $\widehat{EMF}=\widehat{EDF}$ nên tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

c) Kẻ đường kính AA' của (O), ta có tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên A', M, H thẳng hàng nên A', M, H, I thẳng hàng, mà $\widehat{A'IA}=90^0$ suy ra $HI\perp AI$.

Gọi G là giao điểm EF và BC. Tứ giác $AIBC$ nội tiếp nên $\widehat{IBG}=\widehat{IAE}$ và nằm điểm A, I, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH nên $\widehat{IFG}=\widehat{IAE}$, suy ra $\widehat{IBG}=\widehat{IFG}$ nên tứ giác $GBFI$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{GIF}=\widehat{FBC}$, tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{FBC}=\widehat{AEF}$, suy ra $\widehat{GIF}=\widehat{AEF}$.

Vậy $\widehat{GIF}+\widehat{AIF}=\widehat{AEF}+\widehat{AIF}=180^0$ (do tứ giác $AIFE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH), suy ra A, I, G thẳng hàng hay AI, EF, BC đồng quy tại G.

Câu 5. a) Ta có: $y^2+2y=4x^2y+7x+7$

$\Leftrightarrow y^2+2y(1-2x^2)+\left(1-2x^2\right)^2=\left(1-2x^2\right)^2+8x+7$

$\Leftrightarrow \left(y+(1-2x^2)\right)^2=4\left(x+1\right)^2\left(x^2-2x+2\right)$.

Ta có vế trái là số chính phương nên vế phải là số chính phương.

TH1: $x=-1\Rightarrow y=-1$.

TH2: $x^2-2x+2=k^2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2-k^2=-1$

$\Leftrightarrow\left(x-1+k\right)\left(x-1-k\right)=-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1+k=1\\x-1-k=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-1+k=-1\\x-1-k=1\end{cases}\Rightarrow x=1.$

Vậy $x=1$ thì $y^2+2y=4y+15$

$\Leftrightarrow y^2-2y-15=0\Leftrightarrow y=5$ hoặc $y=-3$.

Phương trình có ba nghiệm nguyên:

(1; –1), (1; 5) và (1 ; –3).

b) TH1: $0<a\le b\Rightarrow a^2b^2+3a^3$ chia hết cho a^2b nên $3a$ chia hết cho b, mà $a<b$ nên 3 chia hết cho b, suy ra b bằng 1, 2 hoặc 3.

+) $b=1\Rightarrow a=1$ (thỏa mãn).

+) $b=2\Rightarrow a=1$ hoặc 2 (không thỏa mãn)

+) $b=3\Rightarrow a$ bằng 1 hoặc 2 hoặc 3. Chỉ có $a=1$ thỏa mãn.

TH2: $a>b$. Khi đó b^2+3a chia hết cho a^2b $\Rightarrow$ $b^2+3a>a^2b=a(ab)>ab^2$ (do $ab>b^2$) $\Rightarrow$ $ab^2-b^2-3a<0\Rightarrow b^2(a-1)-3(a-1)<3$

$\Rightarrow(a-1)(b^2-3)<3$ (*)

$\Rightarrow b=1$ (vì $b\ge 2$ thì $a\ge 3$ không thỏa mãn (*)).

Khi đó $\dfrac{1+3a}{a^2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\dfrac{a+3a^2}{a^2}=\dfrac{1}{a}+3\in\mathbb{N}\Rightarrow a=1$ (không thỏa mãn do $a>b$).

Vậy có hai cặp số cần tìm là (1; 1) và (1; 3).

Câu 6. a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ (do a, $b>0$).

$\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\dfrac{1}{4}(a+5b+2)>0$ (do a, $b>0$)

$\Leftrightarrow 16(a^2-ab+3b^2+1)\ge a^2+25b^2+4+10ab+20b+4a$

$\Leftrightarrow 15a^2-26ab+23b^2-20b-4a+12\ge 0$

$\Leftrightarrow 2(a-1)^2+13\left(a-b\right)^2+10\left(b-1\right)^2\ge 0.$

BĐT cuối luôn đúng.

b) $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$

Áp dụng ý thứ hai của câu a) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le\frac{4}{a+5b+2};$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9, TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM 2020

MÔN THI: TOÁN (*Thời gian làm bài 150 phút*)

Bài 1 (*4 điểm*)

1) Tính giá trị biểu thức:

$$M = (4a^{2019} - 4a^{2018} + 1)^{2019}.$$

với $a = \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} + 1.$

2) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

Bài 2 (*5 điểm*)

1) Giải phương trình:

$$8x - (x+9)(x+10)(x+11) = 0.$$

2) Cho phương trình:

$x^2 - m(m-2)x - (m-1)^2 = 0$, m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $2\sqrt{x_1+x_2-2(m-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \ge 1.$

Bài 3 (*3 điểm*).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c).$$

Bài 4 (*7 điểm*)

1) Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ thuộc miền trong của tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Hai đường thẳng BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Chứng minh ba điểm A, H, A_1 thẳng hàng.

2) Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và số đo góc A bằng 45^0, độ dài cạnh $BC = a$. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, các điểm B', C' là chân các đường cao hạ từ B và C xuống các cạnh AC, AB tương ứng. Gọi O' là điểm đối xứng của điểm O qua $B'C'$.

a) Chứng minh rằng: bốn điểm A, B', O', C' cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính độ dài đoạn thẳng $B'C'$ theo a.

Bài 5 (*1 điểm*)

Viết các số $\frac{1}{2020}, \frac{2}{2020}, \frac{3}{2020}, \ldots, \frac{2020}{2020}$ lên bảng.

Thực hiện trò chơi: Mỗi lần xóa đi hai số a,b bất kỳ có trên bảng và viết thêm số $a + b - 2ab$. Trò chơi dừng lại khi trên bảng còn đúng một số. Hỏi số còn lại cuối cùng trên bảng là số nào?

BÙI VĂN CHI

(*21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Giới thiệu

****

☞

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}} \le \frac{4}{a+5b+2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}} \le \frac{4}{b+5c+2}; \frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}} \le \frac{4}{c+5a+2}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{4}{a+5b+2} + \frac{4}{b+5c+2} + \frac{4}{c+5a+2}.$$

Áp dụng ý thứ nhất câu a) ta có:

$$\frac{4}{a+5b+2} = \frac{4}{(a+3b)+(2b+2)} \le \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{2b+2}$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4a}+\frac{5}{4b}+\frac{1}{2}\right).$$

Tương tự: $\frac{1}{b+5c+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4b}+\frac{5}{4c}+\frac{1}{2}\right);$

$$\frac{1}{c+5a+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4c}+\frac{5}{4a}+\frac{1}{2}\right).$$

Vậy $P \le \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right) \le \frac{3}{8}(3+1) = \frac{3}{2}.$

Vậy $\max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

LÊ VĂN VINH

(*GV THPT TX. Phước Long, Bình Phước*) ***Giới thiệu***

CÁC NGHIỆM NGUYÊN THỦY CỦA PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORE CÓ NHỮNG TÍNH CHẤT GÌ?

PHAN THẾ HẢI
(GV CĐSP Bà Rịa - Vũng Tàu)

Phương trình $x^2+y^2=z^2$ hiển nhiên có vô số nghiệm trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$. Tuy nhiên, nếu chúng ta chỉ tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2=z^2$ thì ta gọi nó là *phương trình Pythagore*. Phương trình Pythagore đã được nghiên cứu từ trước công nguyên dưới dạng bài toán cổ như sau: "Hãy viết một bình phương dưới dạng tổng của hai bình phương". Khi phương trình Pythagore có nghiệm (x_0,y_0,z_0) thì bộ ba số $(\pm x_0,\pm y_0,\pm z_0)$ cũng là các nghiệm của phương trình. Hơn nữa, nếu có một trong ba số x, y hoặc z bằng 0 thì phương trình trở nên tầm thường. Do vậy, khi giải phương trình Pythagore, chúng ta chỉ cần tìm các nghiệm nguyên dương của nó. Một nghiệm nguyên dương (x_0,y_0,z_0), trong đó x_0,y_0 và z_0 nguyên tố cùng nhau được gọi là một *nghiệm nguyên thủy* của phương trình. Hiển nhiên, khi (x_0,y_0,z_0) là một nghiệm nguyên thủy thì bộ ba (kx_0,ky_0,kz_0) với k là một số nguyên dương tùy ý cũng là một nghiệm nguyên dương. Do vậy, để tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình Pythagore, chúng ta chỉ cần tìm các nghiệm nguyên thủy của nó.

Trong bài viết này, chúng tôi quan tâm đến việc tìm các nghiệm nguyên thủy của phương trình và nêu lên một số tính chất của các nghiệm nguyên thủy này.

I. NGHIỆM NGUYÊN THỦY CỦA PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORE

Trước hết, chúng ta xem xét Bổ đề sau:

1.1. Bổ đề

Giả sử a, b và c là 3 số nguyên dương, trong đó a và b nguyên tố cùng nhau. Nếu ta có $ab=c^2$ thì tồn tại các số nguyên x, y sao cho $a=x^2$ và $b=y^2$.

Chứng minh.

+) Nếu $a=1$ hoặc $b=1$ thì Bổ đề hiển nhiên đúng.

+) Nếu $a>1$ và $b>1$ thì ta cũng có $c>1$. Cho m là một số nguyên dương, nếu m phân tích được dưới dạng $m=p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$ trong đó p_i với $i=1,2,\cdots,n$ là các số nguyên tố khác nhau thì sự phân tích này được gọi là *sự phân tích tiêu chuẩn*. Giả sử $a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ và $b=q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}$ là các sự phân tích tiêu chuẩn của a và b. Vì a và b nguyên tố cùng nhau nên các số nguyên tố $p_1,\cdots,p_k,q_1,\cdots,q_t$ là đôi một khác nhau. Do vậy, $c^2=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}.q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}$ là sự phân tích tiêu chuẩn của c^2. Vì sự phân tích tiêu chuẩn là duy nhất nên các số $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_t$ phải chia hết cho 2. Điều này có nghĩa là luôn tồn tại các số nguyên x, y sao cho $a=x^2$ và $b=y^2$.

Định lý dưới đây cho chúng ta cách tìm tất cả các nghiệm nguyên thủy của phương trình Pythagore.

1.2. Định lý

Giả sử m và n là hai số nguyên dương, trong đó $m>n$, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau. Khi đó, bộ ba số nguyên dương (x,y,z) xác định

bởi hệ thức $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ *là tất cả các nghiệm nguyên thuỷ của phương trình Pythagore.*

Chứng minh. Vì vai trò của x và y là như nhau trong phương trình Pythagore nên ta chỉ cần chứng minh định lý với bộ (x, y, z) thỏa mãn

$$\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}.$$

+) Trước hết ta dễ thấy nghiệm $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ luôn thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Bây giờ ta sẽ chứng minh nó là một nghiệm nguyên thủy. Thật vậy, giả sử $\begin{cases} m^2 - n^2 \vdots d \\ m^2 + n^2 \vdots d \end{cases}$. Vì m, n khác tính chẵn lẻ nên $m^2 - n^2$ và $m^2 + n^2$ đều là những số lẻ, do đó d là số lẻ. Từ $\begin{cases} m^2 - n^2 \vdots d \\ m^2 + n^2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m^2 \vdots d \\ 2n^2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 \vdots d \\ n^2 \vdots d \end{cases}$. Do m, n nguyên tố cùng nhau nên m^2, n^2 cũng nguyên tố cùng nhau. Điều này chứng tỏ $d = 1$ hay $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ là một nghiệm nguyên thủy của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

+) Ngược lại, nếu (x, y, z) là một nghiệm nguyên thuỷ của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ thì do x, y và z nguyên tố cùng nhau nên x và y không thể cùng là số chẵn. Nếu x và y đồng thời là số lẻ thì x^2 và y^2 đều chia cho 4 dư 1. Do vậy, $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 2 hay z^2 chia cho 4 dư 2. Vì một số chính phương thì không thể chia cho 4 dư 2 nên x và y sẽ khác tính chẵn lẻ. Giả sử x chẵn, y lẻ. Khi đó, z sẽ lẻ. Từ giả thiết, ta có

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$$

hay $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z-y}{2}\right)\left(\frac{z+y}{2}\right)$. Vì $(z, y) = 1$ nên $\left(\frac{z-y}{2}; \frac{z+y}{2}\right) = 1$. Theo Bổ đề ở Mục 1.1, ta có $\frac{z-y}{2}$ và $\frac{z+y}{2}$ là các số chính phương. Giả sử $\frac{z-y}{2} = n^2$ và $\frac{z+y}{2} = m^2$ với m và n là các số nguyên dương. Khi đó, $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$. Hơn nữa, vì $(m^2, n^2) = \left(\frac{z-y}{2}; \frac{z+y}{2}\right) = 1$ nên $(m, n) = 1$ và m, n có tính chẵn lẻ khác nhau do y và z lẻ.

1.3. Một số nghiệm nguyên thủy đầu tiên của phương trình Pythagore

+) Với $n = 1$ thì ta lấy $m = 2k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta được các nghiệm nguyên thủy là $(4k, 4k^2 - 1, 4k^2 + 1)$ hoặc $(4k^2 - 1, 4k, 4k^2 + 1)$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Chẳng hạn, ta có các nghiệm $(3, 4, 5)$; $(4, 3, 5)$; $(8, 15, 17)$; $(15, 8, 17)$; ...

+) Với $n = 2$ thì ta lấy $m = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta được các nghiệm nguyên thủy là $(4(2k+1), (2k+1)^2 - 4, (2k+1)^2 + 4)$ hoặc $((2k+1)^2 - 4, 4(2k+1), (2k+1)^2 + 4)$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Chẳng hạn, ta có các nghiệm $(5, 12, 13)$; $(12, 5, 13)$; $(20, 21, 29)$; $(21, 20, 29)$...

+) Với $n = p$ trong đó p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì ta phải chọn $m > p$, m chẵn và m không chia hết cho p. Do đó, m sẽ có $p - 1$ dạng bao gồm: $\begin{cases} m = 2pt + 2 \\ m = 2pt + 4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ m = 2pt + (p - 1) \end{cases}$ trong đó $t \in \mathbb{N}^*$ và

$$\begin{cases} m = 2pt + (p+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m = 2pt + (2p-2) \end{cases}$$ trong đó $t \in \mathbb{N}$.

Đặc biệt, khi $n = p = 3$ thì $m > 3$, m chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 3. Do vậy, ta lấy $\left[\begin{array}{l} m = 6t+2 \\ m = 6h+4 \end{array}\right.$ trong đó $t \in \mathbb{N}^*$ còn $h \in \mathbb{N}$.

- Nếu $\begin{cases} n = 3 \\ m = 6t+2 \end{cases}$ thì ta được các nghiệm nguyên thuỷ dạng $\left(6(6t+2),\ (6t+2)^2 - 9,\ (6t+2)^2 + 9\right)$ hoặc $\left((6t+2)^2 - 9, 6(6t+2), (6t+2)^2 + 9\right)$ với $t \in \mathbb{N}^*$. Chẳng hạn, ta có các nghiệm $(48, 55, 73)$; $(55, 48, 73)$; ...

- Nếu $\begin{cases} n = 3 \\ m = 6h+4 \end{cases}$ thì ta được các nghiệm nguyên thuỷ dạng $\left(6(6h+4), (6h+4)^2 - 9, (6h+4)^2 + 9\right)$ hoặc $\left((6h+4)^2 - 9, 6(6h+4), (6h+4)^2 + 9\right)$ với $h \in \mathbb{N}$. Chẳng hạn, ta có các nghiệm $(24, 7, 25)$; $(7, 24, 25)$; ...

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM NGUYÊN THỦY CỦA PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORE

2.1. Tính chất 1. *Nếu (x, y, z) là một nghiệm nguyên thuỷ của phương trình Pythagore thì:*

a) $\dfrac{(z-x)(z-y)}{2}$ *là số chính phương.*

b) $xy \vdots (x+y+z)$.

c) *Nghiệm nguyên thủy duy nhất (x, y, z) theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.*

d) *Không tồn tại nghiệm nguyên thuỷ (x, y, z) nào sao cho x, y và z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.*

Chứng minh.

a) Ta có

$$\frac{(z-x)(z-y)}{2} = \frac{(m^2+n^2-2mn)(m^2+n^2-m^2+n^2)}{2}$$
$$= n^2(m-n)^2 = (nm-n^2)^2.$$

Do vậy, $\dfrac{(z-x)(z-y)}{2}$ là số chính phương.

b) Ta có: $\begin{cases} xy = 2mn(m^2-n^2) \\ x+y+z = 2mn + 2m^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} xy = 2m(m+n)n(m-n) \\ x+y+z = 2m(n+m) \end{cases}$

$\Rightarrow xy = (x+y+z)n(m-n)$. Vậy, $xy \vdots (x+y+z)$.

c) Để x, y và z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $y = \dfrac{x+z}{2}$.

+) Nếu $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ thì từ $y = \dfrac{x+z}{2}$ ta có

$m^2 - n^2 = \dfrac{(m+n)^2}{2} \Rightarrow m - n = \dfrac{m+n}{2} \Rightarrow m = 3n$.

Vì m và n khác tính chẵn lẻ nên không tồn tại đẳng thức $m = 3n$.

+) Nếu $\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ thì từ $y = \dfrac{x+z}{2}$ ta có

$2mn = m^2 \Rightarrow m = 2n$. Vì m và n nguyên tố cùng nhau nên $n = 1$ và $m = 2$. Do vậy, bộ $(3,4,5)$ là nghiệm nguyên thuỷ duy nhất lập thành một cấp số cộng.

d) Để x, y và z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì $y^2 = xz$.

+) Nếu $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ thì từ $y^2 = xz$ ta có

$(m^2 - n^2)^2 = 2mn(m^2 + n^2)$

$\Rightarrow m^4 + n^4 = 2mn(m^2+n^2) + 2m^2n^2$. Vì m và n khác tính chẵn lẻ nên $m^4 + n^4$ là số lẻ. Mà $2mn(m^2+n^2) + 2m^2n^2$ luôn là số chẵn nên không

tồn tại x, y và z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân trong trường hợp này.

+) Nếu $\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ thì từ $y^2 = xz$ ta có $4m^2n^2 = m^4 - n^4$. Vì m và n khác tính chẵn lẻ nên $m^4 - n^4$ là số lẻ. Do $4m^2n^2$ là số chẵn nên cũng không tồn tại x, y và z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân trong trường hợp này.

2.2. Tính chất 2. *Nếu (x, y, z) là một nghiệm nguyên thuỷ của phương trình Pythagore thì:*

a) *Có đúng một trong hai số x hoặc y chia hết cho 3.*

b) *Có đúng một trong hai số x hoặc y chia hết cho 4.*

c) *Có đúng một trong ba số x hoặc y hoặc z chia hết cho 5.*

Chứng minh.

a) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \end{cases}$ trong đó, m và n là hai số nguyên dương, $m > n$, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau.

+) Nếu $\begin{cases} m \vdots 3 \\ n \not\vdots 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n \vdots 3 \\ m \not\vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x \vdots 3 \\ y \not\vdots 3 \end{cases}$.

+) Ngược lại, nếu cả hai số m và n đều không chia hết cho 3 thì m^2 và n^2 đều chia cho 3 dư 1.

Do đó, $\begin{cases} y = m^2 - n^2 \vdots 3 \\ x \not\vdots 3 \end{cases}$.

b) Vì trong các nghiệm nguyên thủy của phương trình thì m và n là hai số nguyên dương, khác tính chẵn lẻ nên ta luôn có $2mn \vdots 4$.

+) Nếu $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x = 2mn \vdots 4 \\ y \not\vdots 4 \end{cases}$.

+) Nếu $\begin{cases} y = 2mn \\ x = m^2 - n^2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} y = 2mn \vdots 4 \\ x \not\vdots 4 \end{cases}$.

c) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$, trong đó m và n là hai số nguyên dương, $m > n$, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau.

+) Nếu $\begin{cases} m \vdots 5 \\ n \not\vdots 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n \vdots 5 \\ m \not\vdots 5 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x \vdots 5 \\ y \not\vdots 5 \end{cases}$. Hiển nhiên z cũng không chia hết cho 5.

+) Ngược lại, nếu cả hai số m và n đều không chia hết cho 5 thì m^2 và n^2 chỉ có 2 dạng là $5k+1$ hoặc $5k+4$ với $k \in \mathbb{Z}$. Nếu m^2 và n^2 chia cho 5 cùng số dư thì chỉ có $y = m^2 - n^2 \vdots 5$. Nếu m^2 và n^2 chia cho 5 khác số dư thì chỉ có $z = m^2 + n^2 \vdots 5$.

Nhận xét:

1) Do 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên từ kết quả của a) và b) trong tính chất này, ta luôn có $xy \vdots 12$.

2) Do 3, 4 và 5 nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ kết quả của a), b) và c) trong tính chất này, ta luôn có $xyz \vdots 60$.

2.3. Tính chất 3. *Nếu (x, y, z) là một nghiệm nguyên thuỷ của phương trình Pythagore thì:*

a) *Trong 4 số $x, y, x+y$ và $x-y$, luôn có đúng một số chia hết cho 7.*

b) *Trong 4 số $z+x, z-x, z+y$ và $z-y$, luôn có đúng một số chia hết cho 8.*

c) *Trong 4 số $z+x, z-x, z+y$ và $z-y$, luôn có đúng một số chia hết cho 9.*

Chứng minh:

a) Trước hết ta có: Một số chính phương khi chia cho 7 thì số dư chỉ có thể là 0, 1, 2 và 4. Do x và y nguyên tố cùng nhau nên:

+) Nếu $x \vdots 7$ thì $y \not\vdots 7$, do đó $x+y$ và $x-y$ không chia hết cho 7.

+) Nếu $y \vdots 7$ thì $x \not\vdots 7$, do đó $x+y$ và $x-y$ không chia hết cho 7.

+) Nếu $x \not\vdots 7$ và $y \not\vdots 7$ thì x^2 và y^2 không chia hết cho 7. Giả sử số dư của x^2 và y^2 khi chia cho 7 không bằng nhau. Khi đó, số dư của $x^2 + y^2$ khi

chia cho 7 chỉ có thể là 3, 5 hoặc 6. Vì $x^2+y^2=z^2$ nên số dư của z^2 khi chia cho 7 chỉ có thể là 3, 5 hoặc 6. Điều này là vô lý do z^2 là số chính phương. Vậy số dư của x^2 và y^2 khi chia cho 7 là bằng nhau hay $x^2-y^2 \vdots 7$. Vì x và y nguyên tố cùng nhau và khác tính chẵn lẻ nên $x+y$ và $x-y$ cũng nguyên tố cùng nhau. Do vậy, từ $x^2-y^2 \vdots 7$ suy ra $\begin{cases} x+y \vdots 7 \\ x-y \not\vdots 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y \not\vdots 7 \\ x-y \vdots 7 \end{cases}$.

Tóm lại, trong 4 số x, y, $x+y$ và $x-y$ thì luôn có đúng một số chia hết cho 7.

b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\begin{cases} x=2mn \\ y=m^2-n^2 \\ z=m^2+n^2 \end{cases}$ trong đó, $m>n$ là hai số nguyên dương, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z \pm x=(m \pm n)^2 \\ z+y=2m^2 \\ z-y=2n^2 \end{cases}$.

Do m và n khác tính chẵn lẻ nên $z \pm x=(m \pm n)^2 \not\vdots 8$ vì $(m \pm n)^2$ lẻ.

- Nếu $\begin{cases} m=2k \\ n=2t+1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=2m^2=8k^2 \vdots 8 \\ z-y=2n^2=8(t^2+t)+2 \not\vdots 8 \end{cases}$.

- Nếu $\begin{cases} m=2k+1 \\ n=2t \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=2m^2=8(k^2+k)+2 \not\vdots 8 \\ z-y=2n^2=8t^2 \vdots 8 \end{cases}$.

Như vậy, trong trường hợp này, ta chỉ có $z+y$ hoặc $z-y$ chia hết cho 8.

Tóm lại, trong 4 số $z+x, z-x, z+y$ và $z-y$, luôn có đúng một số chia hết cho 8.

c) Theo tính chất 2 thì trong 2 số x và y có đúng 1 số chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\begin{cases} x \vdots 3 \\ y \not\vdots 3 \end{cases}$, khi đó $z \not\vdots 3$. Do vậy, $z \pm x \not\vdots 3$ và hiển nhiên $z \pm x \not\vdots 9$.

- Nếu $\begin{cases} x=2mn \\ y=m^2-n^2 \\ z=m^2+n^2 \end{cases}$ trong đó, $m>n$ là hai số nguyên dương, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau thì do $x \vdots 3 \Rightarrow 2mn \vdots 3 \Rightarrow \begin{cases} m \vdots 3 \\ n \not\vdots 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m \not\vdots 3 \\ n \vdots 3 \end{cases}$. Nếu $\begin{cases} m \vdots 3 \\ n \not\vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=2m^2 \vdots 9 \\ z-y=2n^2 \not\vdots 9 \end{cases}$, còn nếu $\begin{cases} m \not\vdots 3 \\ n \vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=2m^2 \not\vdots 9 \\ z-y=2n^2 \vdots 9 \end{cases}$.

- Nếu $\begin{cases} x=m^2-n^2 \\ y=2mn \\ z=m^2+n^2 \end{cases}$ trong đó, $m>n$ là hai số nguyên dương, khác tính chẵn lẻ và nguyên tố cùng nhau thì do $x \vdots 3 \Rightarrow m^2-n^2 \vdots 3$ nên

$$(m-n)(m+n) \vdots 3.$$

Nếu $\begin{cases} m+n \vdots 3 \\ m-n \vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} m \vdots 3 \\ n \vdots 3 \end{cases}$. Khi đó, $y=2mn \vdots 3$ (mâu thuẫn với giả thiết $y \not\vdots 3$). Do vậy, từ $(m-n)(m+n) \vdots 3$ ta có $\begin{cases} m+n \vdots 3 \\ m-n \not\vdots 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m+n \not\vdots 3 \\ m-n \vdots 3 \end{cases}$.

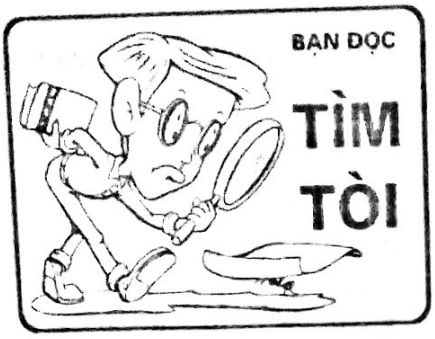
Nếu $\begin{cases} m+n \vdots 3 \\ m-n \not\vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=(m+n)^2 \vdots 9 \\ z-y=(m-n)^2 \not\vdots 9 \end{cases}$ còn nếu $\begin{cases} m+n \not\vdots 3 \\ m-n \vdots 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} z+y=(m+n)^2 \not\vdots 9 \\ z-y=(m-n)^2 \vdots 9 \end{cases}$.

Tóm lại, trong 4 số $z+x, z-x, z+y$ và $z-y$, luôn có đúng một số chia hết cho 9.

Nhận xét. 1) Từ kết quả của a) trong tính chất này, ta luôn có $xy(x^2-y^2) \vdots 7$.

2) Do 8 và 9 nguyên tố cùng nhau nên từ kết quả của b) và c) trong tính chất này, ta luôn có $(z^2-x^2)(z^2-y^2) \vdots 72$.

Kết luận. Bài viết trên đây chỉ mới đưa ra được một số tính chất cơ bản ban đầu về nghiệm nguyên thủy của phương trình Pythagore. Chúng tôi tin tưởng rằng, với niềm say mê toán học đến cháy bỏng và sự khát khao tìm đến cái đẹp trong mọi bài toán, chắc chắn các độc giả sẽ tìm thêm được nhiều được nhiều tính chất hay hơn nữa, tổng quát hơn nữa về nghiệm nguyên thủy của phương trình Pythagore trong các bài viết sau.



MỞ RỘNG CHO MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Trong báo THTT số 514 có bài viết rất hay của thầy *Nguyễn Tuấn Anh*. Nội dung chính của bài viết đó là khai thác bất đẳng thức $a+b\ge\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ với a,b không âm. Sau nhiều ngày ngắm nghía vẽ đẹp của bất đẳng thức trên thì tôi đã tìm được hướng mở rộng khá thú vị cho bất đẳng thức đó.

1. Mở rộng cho 3 biến (MR3)

$$a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}$$

với a,b,c không âm.

Chứng minh. Thật vậy, theo bất đẳng thức Holder thì ta có:

$$\text{VP}=1.1.\sqrt[3]{abc}+1.1.\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+1.1.\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}$$

$$\le\sqrt[3]{1^3+1^3+1^3}\times\sqrt[3]{1^3+1^3+1^3}\times\sqrt[3]{abc+\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}+\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}$$

$$=\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{3}}$$

$$\le\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{\frac{(a+b+c).\frac{(a+b+c)^2}{3}}{3}}$$

$$=a+b+c=\text{VT}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Từ đây, chúng ta có thể tạo ra nhiều bài toán bất đẳng thức và lời giải độc đáo. Chẳng hạn

Bài toán. *Cho a,b,c là các số thực dương. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F=a+b+c+\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{1}{a^2c+c^2b+b^2a}-\sqrt[3]{abc}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức MR3 ở trên thì ta có:

$$a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}.$$

Vậy nên:

$$F\ge\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}+\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{1}{a^2c+c^2b+b^2a}.$$

Đặt $X=\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}$, $Y=\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}$.

Khi đó ta có: $F\ge X+Y+\frac{1}{3X^3}+\frac{1}{3Y^3}$

$$=\frac{1}{3}\left(X+X+X+\frac{1}{X^3}\right)+\frac{1}{3}\left(Y+Y+Y+\frac{1}{Y^3}\right)$$

$$\overset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge}\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases}a=b=c\\X=1/X^3\\Y=1/Y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\a^2b+b^2c+c^2a=3\\a^2c+c^2b+b^2a=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Với việc dùng bất đẳng thức Holder như trên thì chúng ta hoàn toàn có thể chứng minh được:

$$a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^2b+a^2c+b^2c}{3}}+\sqrt[3]{\frac{b^2a+c^2a+c^2b}{3}}$$

hay $a+b+c\ge\sqrt[3]{\frac{abc+a^2b+b^2c}{3}}$

$$+\sqrt[3]{\frac{abc+a^2c+c^2b}{3}}+\sqrt[3]{\frac{abc+b^2a+c^2a}{3}}$$

với a,b,c không âm.

2. Mở rộng cho n biến (MRn)

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương với $n \geq 2$. Đặt $X = \left\{ \frac{a_i}{a_j} / \text{i,j} \in \overline{1,n} \right\}$ và chia X thành n tập hợp $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sao cho $|Y_i| = n$ với $i = \overline{1,n}$ và $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i = \varnothing$. Gọi $S(Y_i)$ là tổng tất cả các phần tử của tập hợp Y_i. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{S(Y_i)} \right).$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{S(Y_i)} \leq \left(\sqrt[n]{n} \right)^{n-1} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} S(Y_i)}.$$

Theo bất đẳng thức hợp mẫu thì ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} S(Y_i) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{a_k} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1^2}{a_i} \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right) = n^2.$$

Từ đây ta suy ra được:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{S(Y_i)} \leq \left(\sqrt[n]{n} \right)^{n-1} \sqrt[n]{n^2} = n.\sqrt[n]{n}.$$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{S(Y_i)} \right) \leq \sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{n}} . n\sqrt[n]{n} = n.\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Minh họa 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó ta luôn có:

a) $a+b+c \geq \sqrt[3]{\frac{abc}{3}} \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}} \right);$

b) $a+b+c \geq \sqrt[3]{\frac{abc}{3}} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}} + \sqrt[3]{2 + \frac{c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} \right).$

Minh họa 2. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Khi đó ta luôn có:

a)

$$a+b+c+d \geq \sqrt[4]{\frac{abcd}{4}} \times \left(\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}} + \sqrt[4]{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}} + \sqrt[4]{\frac{a}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}} \right);$$

b) $$a+b+c+d \geq \sqrt[4]{\frac{abcd}{4}} \times \left(\sqrt[4]{1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}} + \sqrt[4]{1 + \frac{b}{a} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}} + \sqrt[4]{1 + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{a}} + \sqrt[4]{1 + \frac{d}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}} \right).$$

Như vậy là từ một bất đẳng thức đơn giản đã được mở rộng lên thành một hệ thống bất đẳng thức với tràn đầy hi vọng về những ứng dụng của sự mở rộng đó. Dưới đây là 2 bài bất đẳng thức khó và lời giải gọn gàng (có được nhờ bất đẳng thức mở rộng) để thay cho lời kết của tác giả.

Bài toán 1. *Cho a, b, c, d là các số thực dương. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F = a+b+c+d + \frac{1}{\sqrt{a^2(bc+cd+db) + d^2bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2(ac+cd+da) + d^2ac}} + \frac{1}{\sqrt{c^2(ab+bd+da) + d^2ab}} - \sqrt[4]{abcd}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức mở rộng thì ta có:

$$a+b+c+d \geq \sqrt[4]{\frac{abcd}{4}} \times \left(\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{d} + \frac{d}{a}} + \sqrt[4]{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}} \right)$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+d \geq \sqrt[4]{abcd} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{a^2(bc+cd+db) + d^2bc} + \sqrt[4]{b^2(ac+cd+da) + d^2ac} + \sqrt[4]{c^2(ab+bd+da) + d^2ab} \right).$$

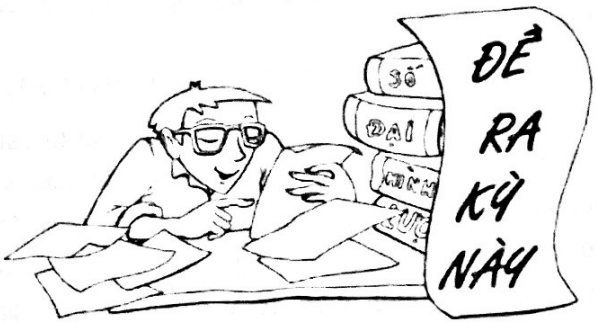
Đặt $X = \sqrt[4]{a^2(bc+cd+db) + d^2bc};$

$Y = \sqrt[4]{b^2(ac+cd+da) + d^2ac};$

$Z = \sqrt[4]{c^2(ab+bd+da) + d^2ab}.$

Khi đó ta có:

(*Xem tiếp trang 36*)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/523 (Lớp 6). Tìm các số nguyên tố p, q và số nguyên dương n sao cho

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1).$$

TRẦN BÁ DUY LINH

(Lớp 30, K34, ĐHKT TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/523. Tìm các số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn:

$$\begin{cases} a+b^2=cd \\ c+d^2=17b \end{cases}.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

Bài T3/523. Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình

$$x^y+y^x+(x+y+1)^3=x^3+y^3+z+1.$$

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/523. Cho M là một điểm nằm trong hình vuông $ABCD$, các tia AM, BM, CM, DM lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp hình vuông tại E, F, G, H. Giả sử các tiếp tuyến tại F và H cắt nhau tại K. Chứng minh rằng ba điểm K, G, E thẳng hàng.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

(3/29E- Đà Nẵng- Hải Phòng)

Bài T5/523. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{c^3+a^2+b^2}{c^2+1}\ge\frac{9}{2}.$$

LƯU THẾ ANH

(GV THCS thị trấn Hưng Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/523. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^z+y^z-2=z^3-z \\ y^x+z^x-2=x^3-x \\ z^y+x^y-2=y^3-y \end{cases}$$

trong đó x, y, z là các số nguyên.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/523. Giải phương trình trên tập hợp các số thực

$$x.2^{x^2}=2^{2x+1}$$

NGUYỄN VĂN THOAN

(GV THPT Bình Lục B, Hà Nam)

Bài T8/523. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. M là một điểm di chuyển trên cung BC không chứa A (M khác B, C). Kẻ BE vuông góc với AM (E nằm trên AM). Gọi N là giao điểm của AM và BC, H là trực tâm tam giác CMN. Chứng minh rằng đường thẳng HE luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên cung BC không chứa A.

NGUYỄN TUẤN ANH

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T9/523. Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$S=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{1+2+\ldots+n}}{x_1x_2^2\ldots x_n^n}.$$

HUỲNH BẢO TOÀN

(GV THPT Long Kiến, Chợ Mới, An Giang)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/523. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(xf(y))+f(y^{2021}f(x))=xy+xy^{2021}, \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

TẠ HOÀNG THÔNG

(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/523. Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$ và $na_n=(n-1)a_{n-1}+(n-2)a_{n-2}$. Tìm $\lim\frac{a_n}{a_{n-1}}$ khi $n\to\infty$.

NGUYỄN LÊ DŨNG

(P402, lô B, cư xá Thanh Đa, phường 27, quận Bình Thạnh, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T12/523. M là một điểm trên đường thẳng BC của tam giác ABC (M khác B, C). K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn (AMB), (AMC) và một đường thẳng qua M nhưng khác MA và BC. P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BK, CL. R là giao điểm của BK và CL. N là giao điểm của đường thẳng PQ và MK. Chứng minh:

a) $\dfrac{NP}{NQ} = \dfrac{MB}{MC}$;

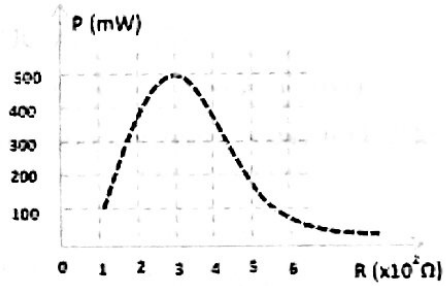
b) Khi M là trung điểm BC thì $AKRL$ là tứ giác điều hòa (tứ giác điều hòa là tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau).

TRẦN VIỆT HÙNG
(*Sóc Trăng*)

Bài L1/523. Trong hiện tượng giao thoa sóng nước, hai nguồn sóng kết hợp A và B cách nhau 20 cm dao động điều hòa theo phương thẳng đứng, cùng pha, cùng tần số 50 Hz. Tốc độ truyền sóng trên mặt nước là 1,5 m/s. Xét các điểm trên mặt nước thuộc đường tròn tâm A bán kính AB, điểm dao động với biên độ cực đại cách đường trung trực của AB một khoảng ngắn nhất là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/523. Một học sinh muốn đo hệ số tự cảm của một cuộn dây thuần cảm. Học sinh đó mắc nối tiếp cuộn dây với một biến trở có giá trị thay đổi được. Mạch điện mắc nối tiếp với một am pe kế và mắc vào nguồn điện xoay chiều có điện áp $u = U_0\cos(100\pi t)$, trong đó U_0 có giá trị không đổi. Do đo được cường độ dòng điện trong mạch khi R thay đổi nên học sinh đó đã vẽ được đồ thị sự phụ thuộc công suất tiêu thụ của mạch vào điện trở như hình vẽ. Xác định hệ số tự cảm của cuộn dây.



THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/523 (For 6th grade). Find all prime numbers p, q and positive integers n so that

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1).$$

Problem T2/523 (For 7th grade). Find all prime numbers a, b, c, d satisfying

$$\begin{cases} a+b^2=cd \\ c+d^2=17b \end{cases}.$$

Problem T3/523. Find all solutions which are prime numbers of the following equation

$$x^y+y^x+(x+y+1)^3=x^3+y^3+z+1.$$

Problem T4/523. Let M be a point inside a square $ABCD$. The rays AM, BM, CM, DM respectively intersect the circle circumscribing the square at E, F, G, H. The tangents of the circle at F and H meet at K. Show that three points K, G, E are collinear.

Problem T5/523. Given positive numbers a, b, c satisfying $a+b+c=3$. Show that

$$\frac{a^3+b^2+c^2}{a^2+1}+\frac{b^3+c^2+a^2}{b^2+1}+\frac{c^3+a^2+b^2}{c^2+1}\ge\frac{9}{2}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/523. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^z+y^z-2=z^3-z \\ y^x+z^x-2=x^3-x \\ z^y+x^y-2=y^3-y \end{cases}$$

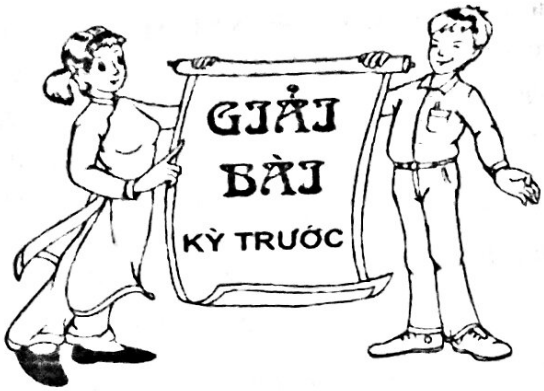
where x, y, z are integers.

Problem T7/523. Find real solutions of the equation $x.2^{x^2}=2^{2x+1}$

Problem T8/523. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). Let M be a point on the arc BC which does not contain A (M is different from B and C). Draw BE perpendicular to AM (E is on AM). Let N be the intersection between AM and BC, and H the orthocenter of the triangle CMN.

Show that the line HE always passes through a fixed point when M varies.

(*Xem tiếp trang 42*)



Bài T1/519. *Tìm các số nguyên dương x, y sao cho* $x^y + y^x = 23 - xy$.

Lời giải. Ta viết lại điều kiện ở giả thiết là

$$x^y + y^x + xy = 23 \ (*).$$

Nhận xét: Nếu $x \geq 3$ và $y \geq 3$ thì $x^y + y^x + xy \geq 3^3 + 3^3 + 9 = 27 + 27 + 9 = 63 > 23$, vì vậy ít nhất phải có một số trong hai số x, y nhỏ hơn 3.

• Nếu $x = 1$, thay vào (*) được $1 + y + y = 23$, hay là $2y = 22$, suy ra $y = 11$, thỏa mãn.

• Nếu $x = 2$, thay vào (*) được $2^y + y^2 + 2y = 23$ (**). Từ (**) dễ thấy $y > 1$, với $y = 2$ thì vế trái của (**) là số chẵn mà vế phải là số lẻ nên không thỏa mãn. Với $y = 3$ thay vào (**) được $2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$, thỏa mãn. Từ đó với $y > 3$ thì vế trái của đẳng thức (**) lớn hơn 23 nên không thỏa mãn.

• Nếu $x \geq 3$, thì từ nhận xét trên suy ra số $y \leq 2$. Với $y = 1$, thay vào (*) được $x + 1 + x = 23$, hay là $2x = 22$, suy ra $x = 11$, thỏa mãn. Với $y = 2$, thay vào (*) được $x^2 + 2^x + 2x = 23$ (***).

Với $x = 3$, thay vào (***) được $3^2 + 2^3 + 6 = 9 + 8 + 6 = 23$, thỏa mãn. Từ đó với $x > 3$ thì vế trái của (***) lớn hơn 23, không thỏa mãn.

Vậy có 4 bộ số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là (1; 11), (2; 3), (3; 2), (11; 1).

Nhận xét. *Cách giải khác*: Chú ý rằng số x và số y có thể đổi chỗ cho nhau trong đẳng thức (*), từ nhận xét trên chỉ cần xét $x \leq 3$ rồi xét tương tự với $y \leq 3$. Một số bạn không đưa ra nhận xét trên nên phải thử nhiều trường hợp.

Bài toán được giải tương tự khi thay số 23 bởi số lớn hơn ở vế phải của đẳng thức (*).

Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh, *Trần Văn Khánh*, *Nguyễn Đức Gia Anh*, *Lê Phương Linh*, *Nguyễn Đặng Thái Anh*, *Đỗ Thanh Tùng*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Nghệ An**: *Lâm Phương Thảo*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Trương Quốc Thành*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi**: *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/519. *Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết rằng* $\frac{AH}{BC} = \frac{12}{25}$, *tính tỷ số* $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải. (Của nhiều bạn). Theo định lý Pythagore ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

và $AB.AC = AH.BC = 2S_{ABC}$, do đó:

$$\frac{25}{12} = \frac{BC}{AH} = \frac{BC^2}{AH.BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB.AC} = \frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}.$$

Đặt $x = \frac{AB}{AC}$, ta có phương trình $x + \frac{1}{x} = \frac{25}{12}$. Giải ra ta có: $12x^2 - 25x + 12 = 0$ hay $(4x-3)(3x-4) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$ hoặc $x = \frac{4}{3}$. Vậy $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ hoặc $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$.

Nhận xét : Tất cả các bạn gửi bài đều có lời giải đúng: **Nghệ An** : *Hoàng Anh Quân, Cao Thị Thảo Hiền, Cao Thị Khánh Chi, Lê Việt Hoàng, Cao Long*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Thái Gia Huy*, 7A, *Thái Minh Quân, Hoàng Văn Quyết, Nguyễn Thái Hoàng Anh, Nguyễn Văn Việt* 7B, *Lê Văn Quang Hiếu*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Nguyễn Thị Yến Ngọc*, 7A, *Lê Hương Giang, Văn Thị Phương Thùy*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Sóc Trăng:** *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 7A3, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 7A2, THCS Yên Lạc, huyện Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Phương Ngọc*, 7C2, PTLC Archimedes, Đông Anh, *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh; **Quảng Trị:** *Võ Nguyễn Thăng*, 7D, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà.

Có một số bạn gửi bài tập thể là phạm quy. Bài gửi các bạn phải là bài giải cá nhân của riêng mỗi người.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/519. *Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn* $9a^2+9b^2+82ab+10a+10b\ge 1$. *Chứng minh rằng* $41a^2+41b^2+18ab\ge 3-2\sqrt{2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $4ab\le (a+b)^2$, ta có:

$$9a^2+9b^2+82ab+10a+10b$$
$$=9\left(a^2+b^2+2ab\right)+64ab+10(a+b)$$
$$\le 9(a+b)^2+16(a+b)^2+10(a+b).$$

Kết hợp với giả thiết, ta được:

$$25(a+b)^2+10(a+b)+1\ge 2$$
$$\Rightarrow \left[5(a+b)+1\right]^2\ge 2\Rightarrow 5(a+b)+1\ge\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow a+b\ge\frac{\sqrt{2}-1}{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{\sqrt{2}-1}{10}$. Do đó:

$$41a^2+41b^2+18ab=41\left(a^2+b^2+2ab\right)-64ab$$
$$\ge 41(a+b)^2-16(a+b)^2$$
$$=25(a+b)^2\ge\left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

nghĩa là $41a^2+41b^2+18ab\ge 3-2\sqrt{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{\sqrt{2}-1}{10}$.

Nhận xét. 1) Trong lời giải, ta chỉ sử dụng bất đẳng thức $4ab\le (a+b)^2$, kết hợp với giả thiết, suy ra $a+b\ge\frac{\sqrt{2}-1}{5}$. Sau đó chứng minh

$$41a^2+41b^2+18ab\ge 25(a+b)^2\ge\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

2) Có thể giải bài toán theo cách khác: Phân tích:

$$9a^2+9b^2+82ab+10a+10b$$
$$=(9a+b)(a+9b)+(9a+b)+(a+9b);$$
$$41a^2+41b^2+18ab=\frac{1}{2}\left[(9a+b)^2+(a+9b)^2\right].$$

Đặt $x=9a+b$; $y=a+9b$. Bài toán trở thành:

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $xy+x+y\ge 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\ge 3-2\sqrt{2}$.

Ta được bài toán gọn hơn.

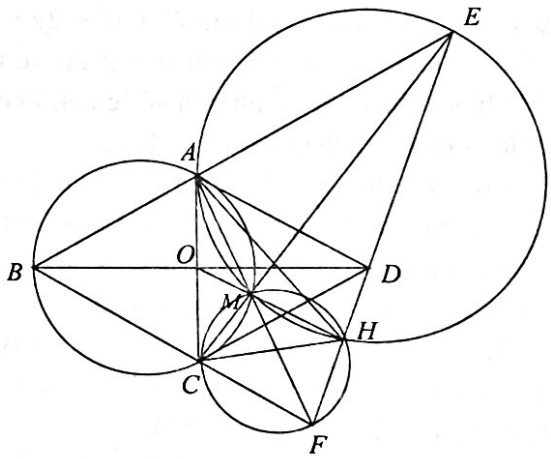
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Phú Thọ: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Nội:** *Lại Thế Hiển, Đinh Mai Hương, Hoàng Phương Ngọc*, 8C2, PTLC Archimedes , Đông Anh , *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/519. *Cho hình thoi ABCD có* $\widehat{ABC}=60^0$, *hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng d bất kỳ đi qua điểm D cắt các tia đối của các tia AB, CB lần lượt tại E, F* $(E\ne A, F\ne C)$. *Gọi M là giao điểm của CE và AF, H là giao điểm của OM và EF. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ABC}=60°$, suy ra $AB=AC=BC=AD=CD$, ta có:



$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AE}=\frac{BF}{BE}=\frac{CF}{CD}=\frac{CF}{AC}.$$

Hơn nữa $\widehat{ACF}=\widehat{EAC}=120°$, suy ra:

$\Delta EAC\sim\Delta ACF\Rightarrow\widehat{ECA}=\widehat{AFC}$ hay $\widehat{ACM}=\widehat{MAD}$ nên AD là tiếp tuyến của đường tròn (ACM) (1).

Mặt khác, $\widehat{DAC}=\widehat{ACB}=60°$ nên AD là tiếp tuyến của đường tròn (ACB) (2). Từ (1) và (2) suy ra $ABCM$ là tứ giác nội tiếp (đường tròn qua A, C, tiếp xúc với AD).

Gọi H' là giao điểm thứ hai của đường tròn (AME) với EF, ta có $\widehat{MH'E}=\widehat{MAB}=\widehat{MCF}\Rightarrow$ tứ giác $MCFH'$ nội tiếp. Mặt khác, $\widehat{ACM}=\widehat{CFM}$ nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (MCF);

Nhận xét. Đây là bài toán giải hệ phương trình có chứa căn thức, ta thường đặt ẩn phụ để chuyển về phương trình không còn chứa căn thức để giải. Nhiều bạn tham gia gửi bài và đều cho kết quả đúng, tuy nhiên còn biến đổi dài dòng.Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*,11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Bình:** *Trương Thị Thu Hà*, 11 Toán 1, *Lê Đức Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Đăng Tân, Nguyễn Thị Mỹ Lệ, Lê Minh Trung*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Phước Minh Trí*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam Kì; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Phú Yên:** *Thái Vĩnh Đạt*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/519. *Cho hàm số* $f(x)=x^2-x+1$. *Đặt* $f_1(x)=f(x)$ *và* $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), \forall n\geq 2$ *và n là số nguyên dương. Tìm hệ số của* x^2 *trong khai triển thành đa thức của* $f_{2021}(x)$.

Lời giải. Giả sử $f_n(x) = a_n + b_nx + c_nx^2 + x^3g_n(x)$, trong đó $g_n(x)$ là đa thức. Ta có: $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 1$. Từ giả thiết

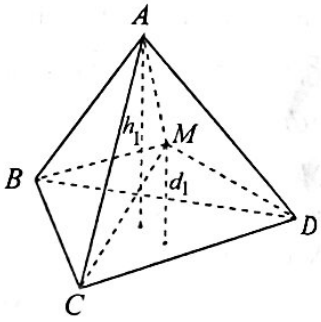
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n^2(x) - f_n(x) + 1 \\ &= (a_n + b_nx + c_nx^2 + x^3g_n(x))^2 \\ &\quad - a_n - b_nx - c_nx^2 - x^3g_n(x) + 1, \end{aligned}$$

ta suy ra $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$; $b_{n+1} = 2a_nb_n - b_n$; $c_{n+1} = 2a_nc_n + b_n^2 - c_n$, $\forall n\geq 1$. Do đó chứng minh bằng quy nạp ta thấy ngay $a_n = 1$; $b_n = -1$; $\forall n\geq 1$, $c_{n+1} = c_n + 1, \forall n\geq 1$. Suy ra $c_n = n$, $\forall n\geq 1$. Vậy hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của f_{2021} bằng 2021.

Nhận xét. Đây là bài toán xác định hệ số của đa thức dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội**: *Hoàng Phương Ngọc*, $8C_2$, PTLC Archimedes Đông Anh, *Nguyễn Xuân Tùng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Nam:** *Trương Nguyễn Ngọc Minh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Đức Thọ*, 10A1T, *Lâm Khánh Hòa*, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/519. *Tìm điểm M nằm trong tứ diện ABCD sao cho tích các khoảng cách từ M đến bốn mặt của tứ diện ABCD lớn nhất.*



Lời giải. Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC); h_1. h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Kí hiệu V_1, V_2, V_3, V_4, V lần lượt là thể tích các khối tứ diện $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ và $ABCD$, khi đó:

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}=\frac{V_1}{V}+\frac{V_2}{V}+\frac{V_3}{V}+\frac{V_4}{V}=1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương $\frac{d_1}{h_1},\frac{d_2}{h_2},\frac{d_3}{h_3},\frac{d_4}{h_4}$ ta được:

$$1=\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}\geq 4\sqrt[4]{\frac{d_1}{h_1}.\frac{d_2}{h_2}.\frac{d_3}{h_3}.\frac{d_4}{h_4}}$$

$$\Rightarrow d_1.d_2.d_3.d_4 \leq \frac{h_1.h_2.h_3.h_4}{256} \text{ (không đổi).}$$

Từ đó tích $d_1.d_2.d_3.d_4$ lớn nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{d_1}{h_1}=\frac{d_2}{h_2}=\frac{d_3}{h_3}=\frac{d_4}{h_4} \\ \frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d_1}{h_1}=\frac{d_2}{h_2}=\frac{d_3}{h_3}=\frac{d_4}{h_4}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{V_2}{V}=\frac{V_3}{V}=\frac{V_4}{V}=\frac{1}{4}.$$

Điều này tương đương với M là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Nhận xét. Bài **T8/519** là sự mở rộng trong không gian của bài toán sau trong mặt phẳng: *Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trong tam giác để tích các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB lớn nhất.* Có ít bạn tham gia giải bài toán này, ba bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bình Định:** *Nguyễn*

Huy Hoàng, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/519. *Tồn tại hay không một tam giác thỏa mãn sin của góc thứ nhất bằng côsin của góc thứ hai và bằng tang của góc thứ ba?*

Lời giải (của tác giả và nhiều bạn) Ta phải tìm tam giác ABC hay ba góc A,B,C thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} 0 < A,B,C < \pi;\ C \neq \dfrac{\pi}{2} \\ A+B+C=\pi \\ \sin A = \cos B = \tan C \end{cases}$.

Do $0 < A < \pi$ nên $\sin A > 0$. Suy ra $\cos B > 0$ và $\tan C > 0$, hay B và C là các góc nhọn.

Ta có: $\sin A = \cos B \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right) = \cos B$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - A = B + k2\pi$ hoặc $\dfrac{\pi}{2} - A = -B + k2\pi$.

TH1: $\dfrac{\pi}{2} - A = B + k2\pi \Leftrightarrow A + B = \dfrac{\pi}{2}$. Vô lí vì khi đó $C = \dfrac{\pi}{2}$.

TH2: $\dfrac{\pi}{2} - A = -B + k2\pi \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{2} + B$. Ta có:

$\cos B = \tan C \Leftrightarrow \cos B = \tan\left(\pi - (A+B)\right)$

$\Leftrightarrow \cos B = \tan\left(\pi - \left(\dfrac{\pi}{2} + B + B\right)\right)$

$\Leftrightarrow \cos B = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2B\right) \Leftrightarrow \cos B = \cot 2B$

$\Leftrightarrow \cos B = \dfrac{\cos 2B}{\sin 2B} \Leftrightarrow \cos B \sin 2B = \cos 2B$

$\Leftrightarrow 2\sin B\cos^2 B = 1 - 2\sin^2 B$

$\Leftrightarrow 2\sin B\left(1 - \sin^2 B\right) = 1 - 2\sin^2 B$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 B - 2\sin^2 B - 2\sin B + 1 = 0$.

Đặt $t = \sin B$. Hàm số $f(t) = 2t^3 - 2t^2 - 2t + 1$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ có $f(0) = 1$ và $f(1) = -1$ nên có nghiệm $t_0 \in [0,1]$. Suy ra tồn tại góc B sao cho $\sin B = t_0$. Vậy tồn tại tam giác ABC thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét. Bài này dễ, đa số các bạn giải đúng. Bạn *Trương Thị Thu Hà* đã dùng máy tính để giải phương trình $2t^3 - 2t^2 - 2t + 1 = 0$ được $t_1 \approx -0.85; t_2 \approx 1.45; t_3 \approx 0.4030317168$. Vậy phương trình chỉ có duy nhất nghiệm $\sin B = t_3 \approx 0.4030317168 \Leftrightarrow B \approx 23^0 46' 4.24''$. Do đó $A \approx 113^0 46' 4.24''$; $C \approx 42^0 27' 51.52''$. Một số bạn biến đổi sai nên dẫn đến đáp số sai.

Danh sách các bạn giải đúng là: **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Lê *Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Trương Thị Thu Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 12AT2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/519. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \dfrac{4n+5}{4n+6}a_n, \forall n \geq 0$. Đặt $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{n}$.*

Lời giải (theo đa số các bạn). Ta có:

$$a_{n+1} = \frac{4n+5}{4n+6}a_n \Leftrightarrow (4n+6)a_{n+1} = (4n+5)a_n$$

$$\Leftrightarrow [4(n+1)+2]a_{n+1} = (4n+2)a_n + 3a_n$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{[4(n+1)+2]a_{n+1} - (4n+2)a_n}{3}.$$

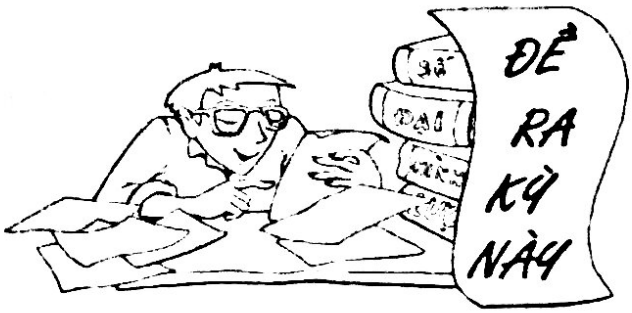
Suy ra: $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \dfrac{[4(i+1)+2]a_{i+1} - (4i+2)a_i}{3}$

$$= \frac{1}{3}[(4n+6)a_{n+1} - 1].$$

Từ giả thiết, ta có: $a_n = \dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{4n+1}{4n+2} = \prod_{k=0}^{n}\dfrac{4k+1}{4k+2}$.

Xét các dãy: $c_n = \prod_{k=0}^{n}\dfrac{4k+2}{4k+3}$, $d_n = \prod_{k=0}^{n}\dfrac{4k+3}{4k+4}$,

$h_n = \prod_{k=0}^{n}\dfrac{4k+4}{4k+5}$. Từ hệ thức



CÁC LỚP THCS

Bài T1/519 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^y + y^x = 23 - xy$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/519 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết rằng $\frac{AH}{BC} = \frac{12}{25}$, tính tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/519. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $9a^2 + 9b^2 + 82ab + 10a + 10b \geq 1$. Chứng minh rằng $41a^2 + 41b^2 + 18ab \geq 3 - 2\sqrt{2}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T4/519. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60^0$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng d bất kỳ đi qua điểm D cắt các tia đối của các tia AB, CB lần lượt tại E, F $(E \neq A, F \neq C)$. Gọi M là giao điểm của CE và AF, H là giao điểm của OM và EF. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng nằm trên một đường tròn.

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T5/519. Giải phương trình

$$\frac{2020x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 2020} + x^2}{2019} = 2020.$$

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/519. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left|\sqrt{x^2+1} + x - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 8\right| = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}} - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 4 \\ 2y^2 - 2\sqrt{2y} - \sqrt{x^2+1} + x + 2 = 0 \end{cases}$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Sở GD&ĐT Thái Bình)

Bài T7/519. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Đặt $f_1(x) = f(x)$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \forall n \geq 2$ và n là số nguyên dương. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của $f_{2021}(x)$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T8/519. Tìm điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho tích các khoảng cách từ M đến bốn mặt của tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

DƯƠNG QUỐC VIỆT
(Hà Nội)

Bài T9/519. Tồn tại hay không một tam giác thỏa mãn sin của góc thứ nhất bằng côsin của góc thứ hai và bằng tan của góc thứ ba?

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/519. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = \frac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \frac{4n+5}{4n+6}a_n, \forall n \geq 0$. Đặt $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Tính giới hạn $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{n}$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/519. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 5]$ thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau

1) $P = abc$.

2) $F = ab + bc + ca$.

3) $S_\lambda = a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$, với $\lambda \in \{0\} \cup [1; +\infty)$ là hằng số.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh)

$$\frac{4k+1}{4k+2}<\frac{4k+2}{4k+3}<\frac{4k+3}{4k+4}<\frac{4k+4}{4k+5},$$

suy ra $a_n < c_n < d_n < h_n$. Do đó

$$a_n^4 < a_n c_n d_n h_n = \frac{1}{4n+5} \text{ hay } a_n < \frac{1}{\sqrt[4]{4n+5}}.$$

Vậy nên

$$b_n = \frac{1}{3}[(4n+6)a_{n+1}-1] < \frac{1}{3}\left(\frac{4n+6}{\sqrt[4]{4n+9}}-1\right).$$

Nhận xét rằng $a_n > 0$ nên $b_n > -\frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $-\frac{1}{3} < b_n < \frac{1}{3}\left(\frac{4n+6}{\sqrt[4]{4n+9}}-1\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3n} < \frac{b_n}{n} < \frac{1}{3}\left(\frac{4n+6}{n\sqrt[4]{4n+9}}-\frac{1}{n}\right).$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3n}\right)=0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4n+6}{n\sqrt[4]{4n+9}}-\frac{1}{n}\right)=0$

nên theo định lý kẹp thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n}=0$.

Nhận xét. Đây là dạng toán giới hạn của dãy số sinh bởi hàm phân tuyến tính. Các bạn hiểu về định lý Cesaro hoặc về ước lượng của hàm logarit

$$x > \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

sẽ cho lời giải đúng theo cách khác.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Trần Văn Quân, Hà Vinh Quang*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai;

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/519. *Cho các số thực $a,b,c \in [1;5]$ thay đổi và thỏa mãn $a+b+c=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau*

1) $P=abc$; 2) $F=ab+bc+ca$.

3) $S_\lambda = a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$, *với* $\lambda \in \{0\} \cup [1;+\infty)$ *là hằng số.*

Lời giải. (Câu 1, 2, và một phần câu 3 của bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**).

2) • *Tìm giá trị lớn nhất của F.*

Ta có: $F=ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3}=27$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3 \in [1;5]$. Vậy max$F=27$.

• *Tìm giá trị nhỏ nhất của F.* Không giảm tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}$, suy ra $a \in [1;3]$. Vì $b,c \in [1;5]$ nên $(b-5)(c-5) \ge 0 \Rightarrow bc \ge 5(b+c)-25$. Vậy $ab+bc+ca = a(b+c)+bc$ $\ge a(b+c)+5(b+c)-25 = a(9-a)+5(9-a)-25$ $=(a-1)(3-a)+23 \ge 23$. Dấu bằng xảy ra khi $a=1, b=3, c=5 \in [1;5]$. Vậy min $F=23$.

1) Ta có: $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 27$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=3 \in [1;5]$. Vậy max$P=27$.

Do $a,b,c \in [1;5]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0$ $\Leftrightarrow abc \ge (ab+bc+ca)-(a+b+c)+1 = F-8$ $\ge 23-8=15$ (theo câu 2). Dấu bằng xảy ra khi $a=1, b=3, c=5 \in [1;5]$. Vậy min $P=15$.

3) Ta chứng minh $S_\lambda \ge 3^{\lambda+1}$ (1). Với $\lambda=0$, $\lambda=1$, bất đẳng thức (1) đúng.

Xét $\lambda > 1$. Xét hàm số $f(x)=x^\lambda$, $x>0$. Ta có $f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}$, $f''(x)=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}>0$. Do đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0;+\infty)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen với a,b,c thuộc $(0;+\infty)$ ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=3f(3)$$

$\Leftrightarrow S_\lambda = a^\lambda+b^\lambda+c^\lambda \ge 3.3^\lambda = 3^{\lambda+1}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3 \in [1;5]$. Vậy $\min S_\lambda = 3^{\lambda+1}$.

• *Tìm giá trị lớn nhất của S_λ (của tác giả bài toán).* Giả sử $b=\max\{a,b,c\}$, khi đó $b \in [3;5]$. Vì $c=9-a-b \in [1;5]$ nên $4-b \le a \le 8-b$. Xét hàm số $f(x)=x^\lambda+b^\lambda+(9-x-b)^\lambda$ với $x \in [1;8-b]$ có $f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}-\lambda(9-x-b)^{\lambda-1}$.

Bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	1		$\frac{9-b}{2}$		$8-b$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{9-b}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(8-b)$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$f(x) \le f(1) = 1 + b^\lambda + (8-b)^\lambda$, $\forall x \in [1; 8-b]$. Ta có: $S_\lambda = a^\lambda + b^\lambda + (9-a-b)^\lambda = f(a) \le 1 + b^\lambda + (8-b)^\lambda$ (2) (do $a \in [1; 8-b]$). Dấu "=" ở (2) xảy ra khi $a = 1$ hoặc $a = 8 - b$. Xét hàm số:

$h(x) = x^\lambda + (8-x)^\lambda$ có: $h'(x) = \lambda.x^{\lambda-1} - \lambda(8-x)^{\lambda-1}$,

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Ta có BBT của $h(x)$ như sau:

x	3		4		5
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(3)$	↘	$h(4)$	↗	$h(5)$

Vậy $h(x) \le h(3) = 3^\lambda + 5^\lambda, \forall x \in [3; 5]$. Do đó $1 + b^\lambda + (8-b)^\lambda = 1 + h(b) \le 1 + h(3) = 1 + 3^\lambda + 5^\lambda$ (3) (do b ∈ [3 ; 5]). Theo (2) ta có:

$S_\lambda \le 1 + b^\lambda + (8-b)^\lambda$ nên từ (3) có $S_\lambda \le 1 + 3^\lambda + 5^\lambda$. Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. Vậy giá trị lớn nhất của S_λ là $1 + 3^\lambda + 5^\lambda$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Hoàng*, không có bạn nào khác tham gia giải bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/519. *Cho tam giác ABC không đều với G là trọng tâm tam giác. Các đường thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác DBC, ECA, FAB đồng quy.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**).

Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Đường thẳng m qua B và theo thứ tự cắt (O), (O') tại M, M'. Đường thẳng n qua B và theo thứ tự cắt (O), (O') tại N, N'. Khi đó*

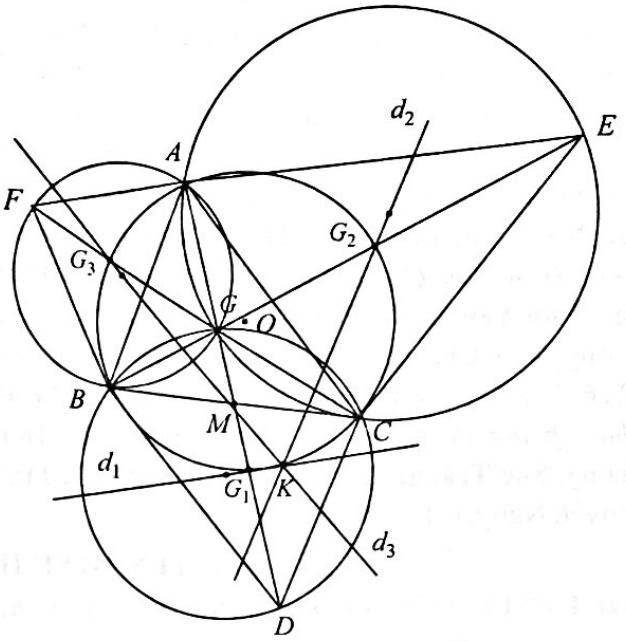
1) *Các tam giác AMM', ANN' đồng dạng cùng hướng.*

2) *Các tam giác AMN, AM'N' đồng dạng cùng hướng.*

Bổ đề 2. *Nếu các tam giác ABC, A'B'C' đồng dạng cùng hướng và d, d' theo thứ tự là đường thẳng Euler của chúng thì* $(d, d') \equiv (BC, B'C') \equiv (CA, C'A') \equiv (AB, A'B') (\bmod \pi)$.

Phép chứng minh hai bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12/519.



Gọi d_1, d_2, d_3 theo thứ tự là đường thẳng Euler của các tam giác *DBC*, *ECA*, *FAB*; G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác *DBC*, *ECA*, *FAB*; (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*; *M* là trung điểm của *BC*; *K* là giao điểm của d_2 và d_3.

Vì *B*, *C*, *D*, *G* cùng thuộc một đường tròn nên

$$\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MG}.\overline{MD} = \frac{1}{3}\overline{MA}.3\overline{MG_1} = \overline{MA}.\overline{MG_1}.$$

Do đó G_1 thuộc (*O*). Tương tự G_2, G_3 thuộc (*O*) (1). Theo bổ đề 1, các tam giác *AEC*, *ABF* đồng dạng cùng hướng. Do đó các tam giác AG_2E, AG_3B đồng dạng cùng hướng. Vậy, theo bổ đề 2, ta có:

$$(KG_2; KG_3) \equiv (d_2, d_3) \equiv (AE, AB) \equiv (AG_2, AG_3) (\bmod \pi).$$

Do đó *K*, G_1, G_2, *A* cùng thuộc một đường tròn (2). Từ (1) và (2) ⇒ *K* thuộc (*O*). Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $K \equiv G_1$. Đương nhiên d_1, d_2, d_3 đồng quy (tại *K*).

Trường hợp 2. $K \ne G_1$. Theo bổ đề 1, các tam giác *CEA*, *CBD* đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác CG_2E, CG_1B đồng dạng cùng hướng. Vậy, theo bổ đề 2, ta có:

$$(d_1, KG_1) \equiv (d_1, d_2) + (KG_2, KG_1)$$
$$\equiv (CE, CB) + (CG_2, CG_1) (\bmod \pi)$$
$$\equiv (CG_1, CG_2) + (CG_2, CG_1) \equiv (CG_1, CG_1) \equiv 0 (\bmod \pi).$$

Từ đó, chú ý rằng G_1 thuộc d_1, suy ra $d_1 \equiv KG_1$.

Điều đó có nghĩa là K thuộc d_1. Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy (tại K). Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có d_1, d_2, d_3 đồng quy (tại K).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên, vì không biết sử dụng góc định hướng nên lời giải của nhiều bạn còn dài.

2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Hà Quang Vinh*, *Trần Văn Quân*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Yên:** *Thái Vĩnh Đạt*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Phước:** *Hà Trọng Tài*, 12T6, THPC chuyên Bình Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/519. *Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = A\cos(5\pi t + \varphi)$. Tại thời điểm t, vật đang đi về phía vị trí cân bằng và tỉ số giữa thế năng và động năng của vật bằng 3* $\left(\frac{W_t}{W_đ} = 3\right)$. *Sau đó* $\frac{1}{60}$s *thì tỉ số đó bằng bao nhiêu?*

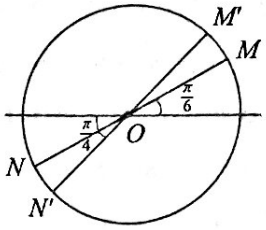
Lời giải. Tại thời điểm t thì $\left(\frac{W_t}{W_đ} = 3\right)$, tức là $W_t = \frac{3}{4}W$ (W là cơ năng của vật) hay $\frac{kx^2}{2} = \frac{3}{4}\frac{kA^2}{2}$ $\Rightarrow x = \pm\frac{A\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ngọn của vectơ diễn tả dao động của vật ở M hoặc N. OM và ON hợp với trục hoành một góc α xác định bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{A\sqrt{3}}{2}}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Sau thời gian $\Delta t = \frac{1}{60}$s thì vectơ dao động quay được một góc là: $\Delta\varphi = \omega\Delta t = 5\pi.\frac{1}{60} = \frac{\pi}{12}$. Đến lúc đó, vectơ dao động sẽ đến OM' hoặc ON' hợp với trục hoành một góc: $\alpha' = \alpha + \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ (hình vẽ). Lúc đó: $x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

Do đó: $W_1 = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{kA^2}{2}$

$$= \frac{W}{2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_đ} = 1.$$



Nhận xét. Chúc mừng các bạn: *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; tỉnh **Đồng Tháp**; *Lê Thị Minh Thùy*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/519. *Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch* $i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right)$ (A) *và* $i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)$ (A). *Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Ta thấy trong hai trường hợp cường độ dòng điện hiệu dụng bằng nhau nên: $Z_1 = Z_2$ hay $Z_L = Z_C$. Do đó trường hợp RL cường độ dòng điện chậm pha hơn u một góc φ, còn trường hợp RC cường độ dòng điện lại nhanh pha hơn u một góc cũng bằng φ. Theo bài ra ta có:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{10\pi}{21} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Lại có: $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}(\Omega)$.

Hiệu điện thế hiệu dụng của nguồn là:

$$U = I.Z_{RL} = \frac{6}{\sqrt{2}}\sqrt{(30)^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2} = 60\sqrt{6}(\Omega).$$

Khi cả 3 phần tử mắc nối tiếp, xảy ra cộng hưởng nên: $P = \frac{U^2}{R} = 720$ (W).

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

ỨNG DỤNG CỦA MỘT ĐẲNG THỨC TRONG KHỐI CHÓP TỨ GIÁC

LÊ THẾ THÔNG
(GV THPT Lê Quảng Chí, TX. Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Trong các đề thi THPT Quốc gia và thi chọn học sinh giỏi bạn đọc thường gặp các bài toán về tỉ số thể tích. Với khối chóp tam giác ta có một kết quả thường được sử dụng như một công cụ đắc lực mà dưới đây chúng tôi có đề cập đến nhưng kết quả đó không còn đúng cho khối chóp tứ giác. Do đó việc tính tỉ số thể tích hay tính thể tích thông qua tỉ số thể tích đối với khối chóp tứ giác là khó khăn. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một đẳng thức đẹp có ý nghĩa như một chiếc chìa khóa để mở cánh cửa của bài toán tỉ số thể tích khối chóp tứ giác. Sau đây là đẳng thức đó.

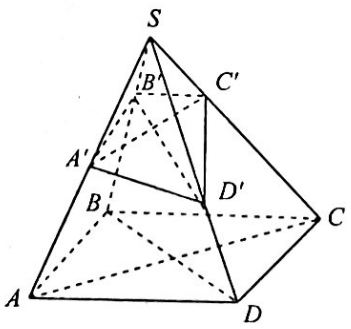
I. MỘT ĐẲNG THỨC ĐẸP

Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D' khác với S. Khi đó

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'} \quad (*).$$

Chứng minh.

Cách1. Sử dụng tỉ số thể tích. Đầu tiên ta nhắc lại kết quả thường dùng cho khối chóp tam giác mà việc chứng minh nó xin nhường cho bạn đọc.



Bổ đề 1. *Cho khối chóp tam giác S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Khi đó*

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

Chứng minh đẳng thức. Áp dụng bổ đề 1 ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD},$$

$$\frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.CBD}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} \quad (1).$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.C'B'D'}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC}{SC'}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.C'B'D'}}=\frac{SA'.SC+SA.SC'}{SA.SC'} \quad (2).$$

Tương tự: $\dfrac{V_{S.B'A'C'}}{V_{S.BAC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}$,

$$\frac{V_{S.D'A'C'}}{V_{S.DAC}}=\frac{SD'}{SD}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC} \quad (3).$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{V_{S.B'A'C'}}{V_{S.D'A'C'}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD}{SD'}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.D'A'C'}}=\frac{SB'.SD+SB.SD'}{SB.SD'} \quad (4).$$

Mặt khác từ (1) và (3) ta suy ra:

$$\frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.D'A'C'}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SA}{SA'} \quad (5).$$

Từ (2), (4) và (5) ta thu được:

$$\frac{SA'.SC+SA.SC'}{SA.SC'}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SA}{SA'}=\frac{SB'.SD+SB.SD'}{SB.SD'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SC+SA.SC'}{SA'.SC'}=\frac{SB'.SD+SB.SD'}{SB'.SD'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$

Cách 2. Sử dụng điều kiện đồng phẳng. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 2. Nếu $\overrightarrow{SA}=x\overrightarrow{SB}+y\overrightarrow{SC}+z\overrightarrow{SD}$ với mọi S và A, B, C, D đồng phẳng thì $x+y+z=1$.

Chứng minh bổ đề. Ta có A, B, C, D đồng phẳng khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Lúc đó tồn tại duy nhất cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$. Do đó với mọi điểm S ta có: $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=m\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)+n\left(\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}\right)$

$$\Leftrightarrow (m+n-1)\overrightarrow{SA}=-\overrightarrow{SB}+m\overrightarrow{SC}+n\overrightarrow{SD}.$$

Với $m+n-1=0$ thì $\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{SC}+n\overrightarrow{SD}$. Suy ra $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ đồng phẳng hay S, B, C, D đồng phẳng. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $m+n-1\neq 0$, lúc đó: $(m+n-1)\overrightarrow{SA}=-\overrightarrow{SB}+m\overrightarrow{SC}+n\overrightarrow{SD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}=\frac{-1}{m+n-1}\overrightarrow{SB}+\frac{m}{m+n-1}\overrightarrow{SC}+\frac{n}{m+n-1}\overrightarrow{SD}.$$

Đặt $x=\frac{-1}{m+n-1}$; $y=\frac{m}{m+n-1}$; $z=\frac{n}{m+n-1}$ thì $x+y+z=1$.

Chứng minh đẳng thức. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó với mọi điểm S ta có: $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}.\overrightarrow{SA'}=\frac{SB}{SB'}.\overrightarrow{SB'}-\frac{SC}{SC'}.\overrightarrow{SC'}+\frac{SD}{SD'}.\overrightarrow{SD'}.$$

Áp dụng bổ đề 2 ta có điều phải chứng minh.

II. THÍ DỤ ÁP DỤNG

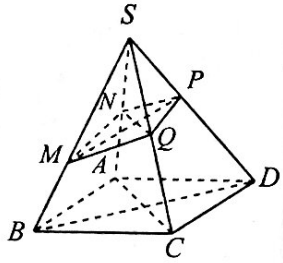
Thí dụ 1. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi N là trung điểm của SA. Trên các cạnh SB, SD lấy các điểm M, P sao cho $3\overrightarrow{SM}=2\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PS}$. Mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q. Khi đó, tỉ lệ thể tích giữa hai khối chóp S.MNPQ và S.ABCD là bao nhiêu?*

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải. Theo đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{SC}{SQ}+\frac{SA}{SN}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SP}\Rightarrow \frac{SD}{SQ}=\frac{5}{2}.$$

Do đó $\frac{SQ}{SC}=\frac{2}{5}$. Ta có:



$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BAD}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SA}.\frac{SP}{SD}=\frac{1}{9},$$

$$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.BDC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SD}.\frac{SQ}{SC}=\frac{4}{45}.$$

Từ đó suy ra:

$$V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}=\frac{1}{5}.\frac{V_{S.ABCD}}{2}=\frac{1}{10}V_{S.ABCD}.$$

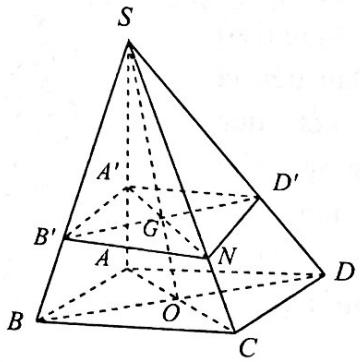
Vậy $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{10}$. Chọn **C**.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=2a$, $AD=a$. SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Điểm N thuộc cạnh SC sao cho $SN=\frac{3}{4}SC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD. Mặt phẳng (α) đi qua GN và song song với BD chia khối chóp thành hai khối đa diện (H) và (H'), trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh S. Tính thể tích V của khối đa diện (H').*

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{5}a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$

C. $V=\frac{4\sqrt{3}}{15}a^3$ **D.** $V=\frac{7\sqrt{3}}{15}a^3$.

Lời giải.



Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.AB.AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. Gọi B', D', A' lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các đoạn SB, SD, SA. Vì $BD//(\alpha)$ nên (α) cắt (SBD) theo giao tuyến $B'D'$ song song với

BD. Do đó $\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$ với O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Theo đẳng thức (*) ta có $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow\frac{SA}{SA'}=\frac{5}{3}$.

Do đó: $\frac{SA'}{SA}=\frac{3}{5}$.

Ta có: $\frac{V_{S.NA'D'}}{V_{S.CAD}}=\frac{SN}{SC}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}=\frac{3}{10}$,

$$\frac{V_{S.NA'B'}}{V_{S.CAB}}=\frac{SN}{SC}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}=\frac{3}{10}.$$

Từ đó suy ra:

$$V_{S.ND'A'B'}=V_{S.NA'D'}+V_{S.NA'B'}$$
$$=\frac{3}{5}.\frac{V_{S.ABCD}}{2}=\frac{3}{10}V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{5}a^3.$$

Vậy $V_{(H')}=V_{S.ABCD}-V_{S.ND'A'B'}=\frac{7\sqrt{3}}{15}a^3$.

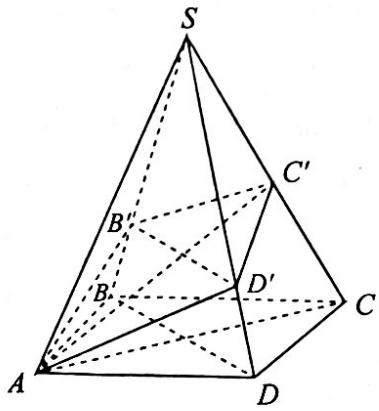
Chọn **D**.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt các đoạn SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích V của khối chóp $S.AB'C'D'$ biết rằng $\frac{SD'}{SD}=\frac{2}{3}$.*

A. $V=\frac{7}{2}a^3$ **B.** $V=\frac{28}{3}a^3$

C. $V=14a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{6}}{18}a^3$.

Lời giải.



Vì $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp SC$. Do đó $BD//(P)$. Từ đó suy ra (P) cắt (SBD) theo giao tuyến $B'D'$ song song với BD. Do đó $\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{2}{3}$.

Theo đẳng thức (*) thì $\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow$ $\frac{SC}{SC'}=2$. Do đó $\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}$ hay C' là trung điểm cạnh SC. Ta có:

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra: $V_{S.AB'C'D'}=V_{S.A'D'C'}+V_{S.A'B'C'}$

$$=\frac{2}{3}.\frac{V_{S.ABCD}}{2}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}.$$

Mặt khác, trong tam giác SAC có AC' vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên $SA=AC$. Kéo theo ΔSAC đều. Từ đó suy ra

$$h=d(S,(ABCD))=AC\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2},$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{6}}{6}a^3.$$

Vậy $V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{6}}{18}a^3$. Chọn **D**.

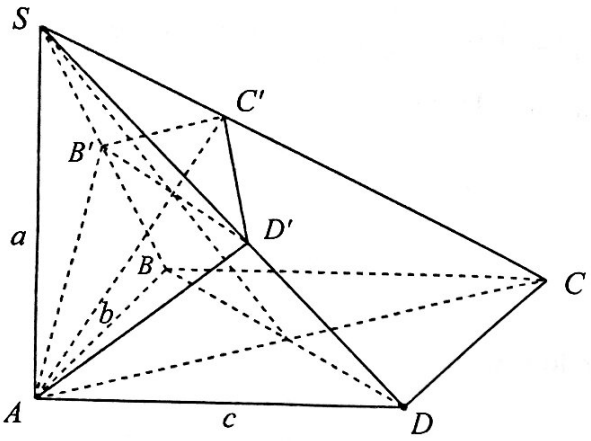
Thí dụ 4. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy và $SA=a$, $AB=b$, $AD=c$.. Gọi B' và D' lần lượt là hình chiếu của A lên các đường thẳng SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'.. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.*

A. $V=\frac{a^5bc(2a^2+b^2+c^2)}{6(a^2+b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}$.

B. $V=\frac{a^4(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}$.

C. $V=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)(2a^2+b^2+c^2)}{6(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$.

D. $V=\dfrac{a^5bc\left(2a^2+b^2+c^2\right)}{3\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.



Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.AB.AD=\frac{1}{3}abc.$$

Trong tam giác vuông SCD có $SD'.SD=SA^2$ $\Rightarrow \dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{SA^2}{SD^2}=\dfrac{a^2}{a^2+c^2}$. Trong tam giác vuông SAB có $SB'.SB=SA^2 \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$.

Theo đẳng thức (*) thì:

$$\frac{SC}{SC'}+1=\frac{a^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{SC'}{SC}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{a^4}{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)},$$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{a^4}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Từ đó suy ra: $V_{S.AB'C'D'}=V_{S.AD'C'}+V_{S.AB'C'}$

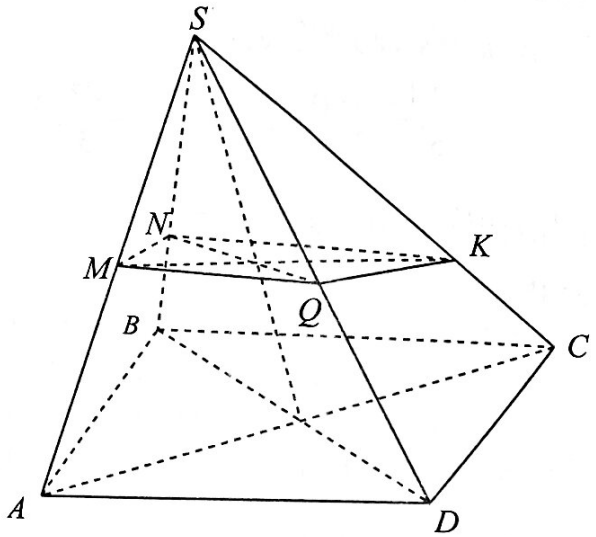
$$=\frac{a^4}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}\right).\frac{V_{S.ABCD}}{2}$$

$$=\frac{a^5bc\left(2a^2+b^2+c^2\right)}{6\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$ Chọn **A**.

Thí dụ 5. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, thể tích là V. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN=2NB$. Mặt phẳng (α) di động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K, Q. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp S.MNKQ.*

A. $\dfrac{V}{2}$ **B.** $\dfrac{V}{3}$ **C.** $\dfrac{3V}{4}$ **D.** $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.



Đặt $\dfrac{SQ}{SD}=x$ $(x>0)$. Sử dụng đẳng thức (*) thu được: $\dfrac{SC}{SK}+2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}$ (6) $\Rightarrow \dfrac{SK}{SC}=\dfrac{2x}{2-x}$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{x}{3}$,

$$\frac{V_{S.KNQ}}{V_{S.CBD}}=\frac{SK}{SC}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD}=\frac{4x^2}{3(2-x)}.$$

Từ đó suy ra: $V_{S.MNKQ}=V_{S.MNQ}+V_{S.KNQ}$

$$=\frac{3x^2+2x}{3(2-x)}.\frac{V_{S.ABCD}}{2}=\frac{3x^2+2x}{6(2-x)}.V.$$

Do đó: $\dfrac{V_{S.MNKQ}}{V}=\dfrac{3x^2+2x}{6(2-x)}$.

Vì $\frac{SC}{SK}\geq 1$ nên từ (6) suy ra $0<x\leq\frac{2}{3}$. Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+2x}{6(2-x)}$ trên $\left(0;\frac{2}{3}\right]$. Ta có:

$f'(x)=\frac{-3x^2+12x+4}{6(2-x)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{6-4\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\left(0;\frac{2}{3}\right]$:

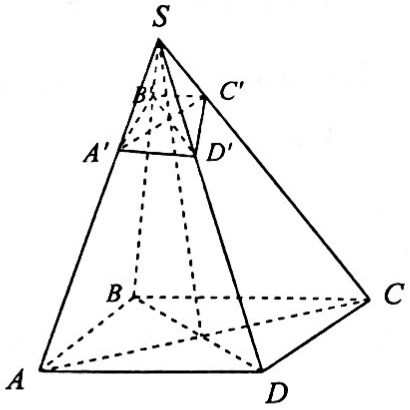
x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$			$\nearrow$		

Vậy $\max\limits_{\left(0;\frac{2}{3}\right]} f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Chọn **B**.

Thí dụ 6. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các đoạn thẳng SA, SC lần lượt lấy các điểm A', C' sao cho $\frac{SA'}{SA}=\frac{1}{3}$, $\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{5}$. Mặt phẳng (α) đi qua $A'C'$ và cắt các đoạn SB, SD lần lượt tại B', D'. Khi đó, tỷ lệ thể tích giữa khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$ nhỏ nhất là bao nhiêu.*

A. $\frac{1}{60}$ **B.** $\frac{1}{30}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải.



Đặt $\frac{SD'}{SD}=x$ $(0<x\leq 1)$. Sử dụng đẳng thức (*) ta có $\frac{SB}{SB'}+\frac{1}{x}=3+5 \Rightarrow \frac{SB'}{SB}=\frac{x}{8x-1}$. Lúc đó, $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}=\frac{x^2}{3(8x-1)}$,

$\frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.CBD}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}=\frac{x^2}{5(8x-1)}$. Từ đó suy ra

$$V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'D'}+V_{S.C'B'D'}$$
$$=\frac{8x^2}{15(8x-1)}.\frac{V_{S.ABCD}}{2}=\frac{4x^2}{15(8x-1)}.V_{S.ABCD}.$$

. Do đó $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{4x^2}{15(8x-1)}$. Xét hàm số $g(x)=\frac{4x^2}{15(8x-1)}$ trên $(0;1]$. Ta có $g'(x)=\frac{32x^2-8x}{15(8x-1)^2}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;1]$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$		1	$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$		
$g(x)$			$\searrow$	$\frac{1}{60}$	$\nearrow$		

Vậy $\min\limits_{(0;1]} g(x)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{60}$. Chọn **A**.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Lấy các điểm N, M theo thứ tự thuộc SC, SD sao cho $5\overrightarrow{SN}=2\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{MS}=-\overrightarrow{MD}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SB tại P. Tỉ số thể tích k giữa hai khối chóp $S.AMNP$ và $S.ABCD$ là bao nhiêu?

A. $k=\frac{2}{5}$ **B.** $k=\frac{7}{15}$ **C.** $k=\frac{2}{15}$ **D.** $k=\frac{7}{30}$.

☞

☞ **2.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. Một mặt phẳng đi qua M, N cắt SB, SD lần lượt tại P, Q. Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MPNQ$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ là

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{5}{48}$ **C.** $\frac{2}{15}$ **D.** $\frac{5}{24}$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Mặt phẳng chứa MN cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại P, Q. Đặt $\frac{SP}{SB}=x$. Với giá trị nào của x được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây thì $V_{S.MPNQ}=\frac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

A. $x=\frac{1}{3}$ **B.** $x=\frac{2}{3}$ **C.** $x=\frac{1}{6}$ **D.** $x=\frac{1}{4}$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng chứa AM cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.AEMF$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ là

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$.

****

MỞ RỘNG ..... *(Tiếp theo trang 20)*

$$F\ge\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y+Z)+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{Z^2}$$
$$=\left(\frac{X}{2\sqrt{2}}+\frac{X}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{X^2}\right)+\left(\frac{Y}{2\sqrt{2}}+\frac{Y}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{Y^2}\right)+\left(\frac{Z}{2\sqrt{2}}+\frac{Z}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{Z^2}\right)$$
$$\ge\frac{9}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$ab+bc+ca\le\frac{3abc+9\sqrt[3]{(abc)^2}-27\sqrt[3]{abc}+27}{4}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức MR3, ta có:

$$a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}.$$

Vì $a+b+c=3$ nên theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$3-\sqrt[3]{abc}\ge\sqrt[3]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a^2c+c^2b+b^2a}{3}}$$
$$\ge\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{3}}$$
$$=\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{ab+bc+ca-abc}.$$

Từ đây ta suy ra được:

$$\left(3-\sqrt[3]{abc}\right)^3\ge4(ab+bc+ca-abc)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{3abc+9\sqrt[3]{(abc)^2}-27\sqrt[3]{abc}+27}{4}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(a^2c+c^2b+b^2a\right)\le\frac{9\left(3-\sqrt[3]{abc}\right)^6}{64}.$$

2. Cho a là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$3\sqrt{a+1}\le\sqrt[4]{4}\left(a-\sqrt[4]{a}+3\right).$$

3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\le\frac{\sqrt{2}}{3}(a+b+c+6).$$

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV Trung tâm Gia sư toantuhoc.vn, Đồng Tháp)

Những năm gần đây, hầu như các đề thi học sinh giỏi Toán cấp THPT thường có bài toán liên quan đến tính liên tục và đạo hàm của hàm số dưới dạng toán không mẫu mực nhất là lớp bài toán chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình, giải phương trình, giải bất phương trình, chứng minh bất đẳng thức và tìm giới hạn của dãy số. Việc tìm hướng giải lớp các bài toán trên là không dễ dàng nếu ta không nắm vững, không biết sử dụng hoặc không biết kết hợp với các vấn đề liên quan chúng với nhau thì sẽ khó xử lý được mặc dù ta học rất nhiều phương pháp cổ điển chẳng hạn phương pháp thế, phương pháp đánh giá, phương pháp hàm số, phương pháp biến đổi PT, BPT lôgarit và mũ về cùng cơ số, ...Vấn đề đáng quan tâm của đa số học sinh là ngoài các phương pháp cổ điển vừa nêu trên liệu còn phương pháp nào để giải chúng không. Chính vì sự quan tâm đó mà tác giả giới thiệu lại định lí Lagrange để giải thích sự thắc mắc của học sinh.

Trong phạm vi bài báo này chúng ta chỉ tập trung nghiên cứu ứng dụng của định lí Lagrange vào việc giải một số dạng bài toán vừa nêu.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ngoài các kiến thức liên quan đến tính liên tục và đạo hàm của hàm số ta đã biết, chúng tôi giới thiệu thêm các bạn định lí Lagrange để tiện ứng dụng trong việc giải toán.

Định lí Lagrange. *Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;\, b]$ $(a<b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;\, b)$ thì tồn tại $c\in(a;\, b)$ sao cho*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

hay là $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Ứng dụng định lí Lagrange vào bài toán chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình

Bài toán 1. *Chứng minh rằng phương trình* $2(x^2-x-2)\cos^2 x-(1-2x)\sin x.\cos x=(x+1)(x-2)$ *luôn có ít nhất ba nghiệm phân biệt trên khoảng* $(-1;\, 2)$.

Lời giải. PT đã cho tương đương với:

$$(x^2-x-2)(2\cos^2 x-1)-(1-2x)\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-2)\cos 2x-(1-2x)\sin 2x=0\ (*).$$

Đặt $f(x)=\text{VT}(*)$. Xét hàm số:

$$F(x)=(x^2-x-2)\sin 2x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[-1;\, 2]$ và có đạo hàm bậc nhất $F'(x)=f(x)$;

$$F(-1)=F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F(2)=0.$$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $x_0\in(-1;\, 0)$ sao cho $F'(x_0)=\dfrac{F(0)-F(-1)}{0-(-1)}=0\Rightarrow f(x_0)=0$.

Tương tự, tồn tại $x_1\in\left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $f(x_1)=0$, tồn tại $x_2\in\left(\dfrac{\pi}{2};\, 2\right)$ sao cho $f(x_2)=0$. Mà các khoảng $(-1;\, 0)$; $\left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2};\, 2\right)$ đôi một không giao nhau nên các nghiệm $x_0;\, x_1;\, x_2$ cũng đôi một khác nhau.

Vậy PT đã cho có ít nhất ba nghiệm phân biệt trên khoảng $(-1;\ 2)$.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng phương trình* $2(3x-2)\log_3 x+\dfrac{3x^2-4x+1}{x\ln 3}=0$ (*) *luôn có nghiệm trên khoảng* $\left(\dfrac{1}{3};\ 1\right)$.

Lời giải. Đặt $f(x)=\text{VT}(*)$. Xét hàm số:

$$F(x)=(3x^2-4x+1)\log_3 x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right]$ và có đạo hàm bậc nhất $F'(x)=f(x)$; $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=F(1)=0$.

Theo định lí Lagrange, tồn tại $x_0\in\left(\dfrac{1}{3};\ 1\right)$ sao cho $F'(x_0)=\dfrac{F(1)-F\left(\dfrac{1}{3}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}=0\Rightarrow f(x_0)=0$.

Vậy PT đã cho luôn có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};\ 1\right)$.

2. Ứng dụng định lí Lagrange vào bài toán giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

Bài toán 3. *Giải phương trình*

$$4^x\left(3^x+5^x\right)+29^x=2^x\left(8^x+9^x\right)+27^x.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$12^x+14^x-18^x-27^x=14^x+16^x-20^x-29^x\ (*).$$

Giả sử PT có nghiệm x_0. Ta xét hàm số:

$$f(t)=t^{x_0}+(t+2)^{x_0}-(t+6)^{x_0}-(t+15)^{x_0},\ t>0.$$

PT đã cho chính là $f(12)=f(14)$. Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[12;\ 14]$ và có đạo hàm trên $(12;\ 14)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại $c\in(12;\ 14)$ thỏa mãn $f'(c)=\dfrac{f(14)-f(12)}{14-12}=0$

$$\Leftrightarrow x_0\left[c^{x_0-1}+(c+2)^{x_0-1}-(c+6)^{x_0-1}-(c+15)^{x_0-1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ c^{x_0-1}+(c+2)^{x_0-1}=(c+6)^{x_0-1}+(c+15)^{x_0-1}\ (**)\end{array}\right.$$

Xét PT(**). Ta có:

- Nếu $x_0>1$ thì $x_0-1>0$, suy ra: $\text{VT}(**)<\text{VP}(**)$.
- Nếu $x_0<1$ thì $x_0-1<0$, suy ra: $\text{VT}(**)>\text{VP}(**)$.
- Nếu $x_0=1$ thì $x_0-1=0$, suy ra: $\text{VT}(**)=\text{VP}(**)=2$.

Từ đó PT(**) có nghiệm $x_0=1$. Thử lại trực tiếp, ta thấy hai giá trị $x=0$, $x=1$ thỏa mãn PT đã cho. Vậy PT đã cho có hai nghiệm là $x=0$, $x=1$.

Bài toán 4. *Giải bất phương trình*

$$2^x-2^{2x+1}<2021(x+1)3^x.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(t)=2^t$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(t)=2^t\ln 2,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Theo định lí Lagrange, tồn tại c nằm giữa x và $2x+1$ sao cho

$$2^x-2^{2x+1}=f'(c)\big(x-(2x+1)\big)=-(x+1)2^c\ln 2.$$

BPT đã cho trở thành:

$$-(x+1)2^c\ln 2<2021(x+1)3^x$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(2^c\ln 2+2021.3^x\right)>0\Leftrightarrow x>-1$$

(do $2^c\ln 2+2021.3^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là $S=(-1;\ +\infty)$.

Bài toán 5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-2)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)\\ 3^x=2^y+x\end{cases}.$$

Lời giải. PT thứ nhất của HPT có thể viết lại dưới dạng:

$$x^3-2x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=y^3-2y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)$, $t\in\mathbb{R}$,

có: $f'(t)=3\left(t^2+\dfrac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\dfrac{2}{3}\right)$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{t^2+9}{27}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{26}{27}(t^2+9)\geq 1+\frac{26}{27}(t^2+9)$$

$$\geq 1+\frac{26}{27}\cdot 9=\frac{29}{3}.$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\geq 0\Rightarrow f'(t)\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

(dấu đẳng thức xảy ra khi $t=0$).

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (1) có $f(x)=f(y)$, suy ra $y=x$.

Thay $y=x$ vào PT thứ hai của HPT ta được:

$$3^x=2^x+x\Leftrightarrow 3^x-3x=2^x-2x\ (2).$$

Giả sử PT(2) có nghiệm x_0. Ta xét hàm số:

$$g(u)=u^{x_0}-ux_0,\ u>0.$$

PT(2) chính là $g(2)=g(3)$. Hàm số $g(u)$ liên tục trên $[2;3]$ và có đạo hàm trên $(2;3)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại $c\in(2;3)$ thỏa mãn: $g'(c)=\dfrac{g(3)-g(2)}{3-2}=0$

$$\Leftrightarrow x_0\left(c^{x_0-1}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=1\end{array}\right..$$

Thử lại trực tiếp, ta thấy hai giá trị $x=0$, $x=1$ thỏa mãn PT(2). Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$, $(1;1)$.

3. Ứng dụng định lí Lagrange vào các bài toán chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 6. *Cho* $0<y<x<\dfrac{1}{2}$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}+\frac{\sqrt{1-4y^2}}{4y}$$

$$\geq\frac{25\sqrt{15}}{18}(x-y)+\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4x}+\frac{y}{\sqrt{1-4y^2}}.$$

Lời giải. Đặt $a=2x$ và $b=2y$ thì bài toán đã cho trở thành bài toán:

Cho $0<b<a<1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{\sqrt{1-b^2}}{b}$$

$$\geq\frac{25\sqrt{15}}{18}(a-b)+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}\ (*).$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$ với $t\in(0;1)$.

Khi đó BĐT (*) tương đương với

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\geq\frac{25\sqrt{15}}{18}.$$

Ta thấy hàm số $f(t)$ xác định, liên tục trên $(0;1)$, có:

$$f'(t)=\frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{t^2(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}.$$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $c\in(b;a)\subset(0;1)$ sao cho: $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{c^2(1-c^2)\sqrt{1-c^2}}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Đặt $M=c^2(1-c^2)\sqrt{1-c^2}$, $M>0$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 5 số dương gồm 2 số $\dfrac{3}{2}c^2$ và 3 số $1-c^2$, ta có:

$$M^2=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}c^2\right)\left(\frac{3}{2}c^2\right)(1-c^2)(1-c^2)(1-c^2)$$

$$\leq\frac{4}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^5=\frac{108}{5^5}$$

$$\Rightarrow 0<M\leq\frac{6\sqrt{15}}{125}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{M}\geq\frac{125}{6\sqrt{15}}=\frac{25\sqrt{15}}{18}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng: với mọi* $a<b<c$, *ta có:*

$$3a<a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$$<a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}<3c.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$\Rightarrow f(a)=f(b)=f(c)=0\ (*);$$
$$f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Ta thấy hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có: $f'(x)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$.

Theo định lí Lagrange, tồn tại $x_1\in(a;\ b)$ và $x_2\in(b;\ c)$ sao cho:

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a};\ f'(x_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Do (*) suy ra $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3} \\ x_2=\dfrac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}\end{array}\right..$$

Ta lại có $a<x_1<b<x_2<c\Rightarrow 3a<3x_1<3b<3x_2<3c$ $\Rightarrow$ đpcm.

4. Ứng dụng định lí Lagrange vào bài toán tìm giới hạn dãy số

Bài toán 8. (Olympic 30/4 lần XIV- Năm 2008) *Cho phương trình* $x+2x^2+\cdots+nx^n=\frac{3}{4}$, *với n nguyên dương.*

1) *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, trên khoảng* $(0;\ +\infty)$ *phương trình trên có nghiệm duy nhất, kí hiệu là* x_n.

2) *Chứng minh rằng dãy số* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi n tiến dần đến dương vô cùng. Tính giới hạn đó.*

Lời giải. 1) Xét hàm số $f_n(x)=x+2x^2+\cdots+nx^n-\frac{3}{4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f_n'(x)=1+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}$.

Ta có $f_n'(x)>0\ \forall x\in(0;\ +\infty)$ nên hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0;\ +\infty)$ (1).

Mà $f_n(0)=-\frac{3}{4}<0,\ f_n(1)>0\Rightarrow$ PT $f_n(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;\ +\infty)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

2) Ta có: $3f_n\left(\frac{1}{3}\right)=1+2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{4}$;

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{3}{4}.$$

Trừ theo vế được:

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{n}{3^n}-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^n}-\frac{3}{2}=-\frac{2n+3}{2.3^n}<0.$$

Do đó $x_n>\frac{1}{3},\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Áp dụng định lí Lagrange, tồn tại $y_n\in\left(\frac{1}{3};\ x_n\right)$ sao cho:

$$\frac{2n+3}{4.3^n}=\left|f_n(x_n)-f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|x_n-\frac{1}{3}\right|\left|f_n'(y_n)\right|>\left|x_n-\frac{1}{3}\right|$$

(do $f_n'(y_n)>1$ với $y_n>0$).

Mặt khác $\lim\frac{2n+3}{4.3^n}=0\Rightarrow\lim x_n=0$.

Bài toán 9. *Cho hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm trên* $[a;\ b](a<b)$ *và thỏa mãn các điều kiện* $f(a)=f(b),\ f'(x)\neq 0,\forall x\in[a;\ b]$. *Chứng minh tồn tại dãy* (x_n) *với* $x_n\in(a;\ b)$ *sao cho* $\lim\frac{f'(x_n)}{\left(\sqrt[n]{e}-1\right)f(x_n)}=2021$.

Lời giải. Với mỗi $n=1,\ 2,..$ ta xét hàm số:

$$G_n(x)=\left(e^{\frac{2021x}{n}}\right)\cdot f(x)\text{ với } x\in[a;\ b].$$

Hiển nhiên, hàm số $G_n(x)$ liên tục trên $[a;\ b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;\ b)$. Theo định lí Lagrange, tồn tại $x_n\in(a;\ b)$ sao cho:

$$G_n'(x)=-\frac{2021}{n}f(x_n).e^{-\frac{2021}{n}x_n}+f'(x_n)e^{-\frac{2021}{n}x_n}$$

$$=\frac{G_n(b)-G_n(a)}{b-a}=0 \Rightarrow \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}=\frac{2021}{n}.$$

Do đó: $\lim\frac{f'(x_n)}{\left(\sqrt[n]{e}-1\right)f(x_n)}=\lim\frac{2021}{n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)}$

$$=\lim\frac{2021}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=2021.$$

Nhận xét. Qua các bài toán nêu trên, ta nhận thấy rằng người ra đề thường bắt đầu tạo ra bài toán từ việc tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (đã biết) trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn $F(a)=F(b)$ hay bắt đầu từ một hằng đẳng thức, từ một PT đơn giản hay từ trường hợp xảy ra dấu bằng của BĐT nào đó,... Họ càng cất giấu biểu thức ban đầu bao nhiêu thì mức độ khó của bài toán cũng theo lên và công việc của người giải toán là tìm ra con đường mà người ra đề đã sử dụng. Một số bài toán có thể ta giải theo một hướng khác của tác giả, tuy nhiên cũng có bài toán dường như con đường tác giả xuất phát là con đường duy nhất hay nói cách khác ta cần sử dụng phương pháp đặc trưng mới giải quyết được bài toán đã cho. Để nhuần nhuyễn ứng dụng của định lí Lagrange vào việc giải một số dạng toán, chúng ta hãy thực hành thêm một số bài tập sau:

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho bốn số thực a, b, c, d và $m\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\frac{a}{m+3}+\frac{b}{m+2}+\frac{c}{m+1}+\frac{d}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

2. Chứng minh rằng PT

$$\sqrt{2}(2x-1)\sin 2x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{8}; 1\right)$.

3. Giải phương trình $(a+c)^x+b^x=a^x+(b+c)^x$ với $a, b, c>0$ và $a<b$.

4. Giải phương trình $5^{\cos x}-4^{\cos x}=\cos x$.

5. Giải phương trình $x^{\log_6 2}+10^{\log_6 x}=2x$.

6. Giải bất phương trình

$$3^{x^2-4}+(x^2-4).3^{x-2}\geq 1.$$

7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x+y=4^x-9^x\end{cases}.$$

8. Cho $x\in(0; 1)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$x^n\sqrt{1-x}<\frac{1}{\sqrt{2ne}}.$$

9. Cho n và k là các số nguyên với $n, k\geq 2$. Chứng minh rằng $\sqrt[n]{1+\frac{n}{k}}\leq 1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{k-1}\right)$.

10. Cho năm số thực dương x, y, z, a, b thỏa mãn $\begin{cases}x\geq y\geq z>0\\ a\geq b>0\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$x^a\left(y^b-z^b\right)+y^a\left(z^b-x^b\right)+z^a\left(x^b-y^b\right)\geq 0.$$

11. (*Dự bị VMO 2008*) Cho số thực a và dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases}x_1=a\\ x_{n+1}=\ln(3+\cos x_n+\sin x_n)-2008, \forall n=1, 2,...\end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến dần tới dương vô cùng.

12. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases}x_1=2021\\ x_{n+1}=\sqrt{3}+\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2-1}}, \forall n=1, 2, ...\end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến dần tới dương vô cùng.

PROBLEMS IN ... (Tiếp theo trang 22)

Problem T9/523. Given n positive numbers $x_1, x_2, ..., x_n$. Find the minimum value of the expression $S = \dfrac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^{1+2+...+n}}{x_1 x_2^2 ... x_n^n}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/523. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying

$$f(xf(y)) + f(y^{2021} f(x)) = xy + xy^{2021}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Problem T11/523. Consider the sequence $\{a_n\}$ with $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$ and $na_n = (n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2}$. Find $\lim \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

Problem T12/523. Given a triangle ABC and a point M on the line passes through B, C (M is different from B, C). Let K, L respectively be the second intersections between the circumcircles of the triangles AMB, AMC and another line which passes through M and different from MA and BC. Let P, Q respectively be the perpendicular projections of A on BK, CL. BK and CL meet at R. PQ and MK meet at N. Show that

a) $\dfrac{NP}{NQ} = \dfrac{MB}{MC}$;

b) If M is the midpoint of BC then $AKRL$ is a harmonic quadrilateral (a harmonic quadrilateral is a cyclic quadrilateral in which the products of the lengths of opposite sides are equal).

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T4.2020

NĂM CANH TÝ VÀ 2020

Đề: *Bạn hãy thay mỗi chữ cái trong đẳng thức* CANH + TÝ = 2020 *bởi một chữ số thập phân khác 0 và 2 sao cho được đẳng thức đúng với điều kiện chữ cái khác nhau thì chữ số thập phân khác nhau. Bạn tìm được bao nhiêu đáp số?*

Lời giải. Dễ thấy H + Ý = 10, từ đó N + T bằng 1 hoặc 11. Nếu N + T = 1 thì A = 0, C = 2, trái giả thiết. Vậy chỉ có thể N + T = 11, suy ra A = 9, C = 1. Có thể phân tích các số 11 và 10 thành tổng với các số hạng khác 1, 9 như sau:

N + T = 11 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6

và H + Ý = 10 = 3 + 7 = 4 + 6.

Kết hợp lại được:

1) N + T = 3 + 8 thì H + Ý = 4 + 6. Đổi chỗ các chữ số cho nhau được 4 nghiệm.

2) N + T = 4 + 7 thì trong H + Ý có số hạng trùng với 4 hoặc 7, trái giả thiết.

3) N + T = 5 + 6 thì H + Ý = 3 + 7. Đổi chỗ các chữ số cho nhau được 4 nghiệm.

Như vậy bài toán có 8 nghiệm. Đó là:

1934 + 86 = 2020, 1936 + 84 = 2020,
1984 + 36 = 2020, 1986 + 34 = 2020,
1953 + 67 = 2020, 1957 + 63 = 2020,
1963 + 57 = 2020, 1967 + 53 = 2020.

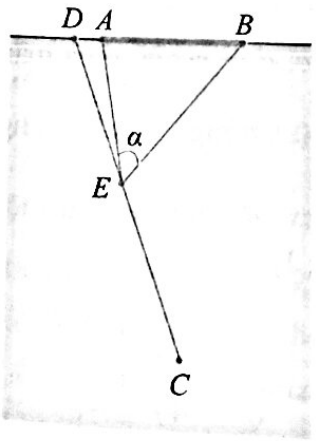
Hoan nghênh bạn *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7A3, THCS xã Pom Lót, huyện Điện Biên, tỉnh **Điện Biên** đã tìm được 8 nghiệm của Bài toán.

ĐAN QUỲNH *(Hà Nội)*

ĐỐ VUI

TÌM VỊ TRÍ SÚT BÓNG

Trong một trận luyện tập bóng đá một tiền đạo đang dẫn bóng từ điểm C muốn sút bóng vào khung thành được thể hiện bởi đoạn thẳng AB trên mặt phẳng sân cỏ. Do trước mặt tiền đạo này có hậu vệ đội bạn nên tiền đạo đó không thể tiến thẳng vào khung thành mà phải dẫn bóng chạy theo đường thẳng CD và đến điểm E thì sút bóng vào khung thành AB. Biết rằng điểm D thuộc tia đối của tia AB, đường thẳng CD không cắt đường tròn đường kính AB và góc $\widehat{ADC}$ là góc nhọn. Điểm C khá xa khung thành AB như ở hình vẽ. Bằng thước thẳng và compa, bạn hãy xác định vị trí điểm E khi sút bóng sao cho góc sút $\alpha = \widehat{AEB}$ là lớn nhất và giải thích câu trả lời.



VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 63

Problem. *Among 4-digit numbers formed by using all four digits* 1, 2, 3, *and* 4, *how many of them are divisible by* 11?

***Solution*:** We use the following rule: a number is divisible by 11 if the sum of the digits in the even places and the sum of the digits in the odd places differ by a multiple of 11.

Consider the numbers of the form 1 - - - . By the above rule, the third digit (from the left) must be 4, and the digits 2 and 3 can be put in the remaining spaces in any order. Hence there are two of them 1243 and 1342.

Similarly, for each of the 3 other cases, we have two numbers which are divisible by 11.

Therefore, we have 8 numbers satisfying the requirements.

TỪ VỰNG

digit : *chữ số*

divisible by : *chia hết cho*

differ : *sai khác*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National university, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 61

Bài toán. *Ta gieo liên tiếp một con súc sắc cân đối, đồng chất cho đến khi xuất hiện mặt 3 chấm. Kí hiệu X là số lần gieo, X là một biến ngẫu nhiên. Tính* $P(X < 10)$.

Lời giải. X có thể nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, ...

Ta có:

$P(X < 10) = P(X = 1) + P(X = 2) + ... + P(X = 9)$.

Dễ thấy $P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$;

$P(X = 2) = q.p$ với $q = 1 - p = \frac{5}{6}$;

$P(X = 3) = q^2p$;

.....

$P(X = 9) = q^8p$.

Vì vậy $P(X = 1) + P(X = 2) + ... + P(X = 9)$

$= p + qp + q^2p + ... + q^8p$

$= p(1 + q + q^2 + ... + q^8)$

$= p.\frac{1-q^9}{1-q} = 1 - q^9$.

Do đó $P(X < 10) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trương Thị Thu Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Bình**; *Văn Ngọc Bình*, *Nguyễn Hoàng Ngọc*, *Từ Nguyễn Đức Anh*, *Trương Hồ Bảo Nhi*, 10 Toán 1, *Trần Nữ Minh Thư*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

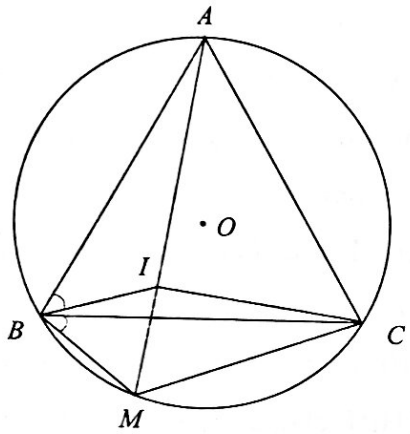
****

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 44. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R), M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng:* $MA = MB + MC$.

Hướng 1: *Tiếp cận theo kiến thức THCS*

Cách 1.



Trên cạnh MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$ (1)

Vì $\widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60° \Rightarrow \Delta MBI$ đều.

Xét ΔABI và ΔCBM có:

$\widehat{ABI} = \widehat{CBM} = 60° - \widehat{IBC}$, $AB = BC, BI = BM$

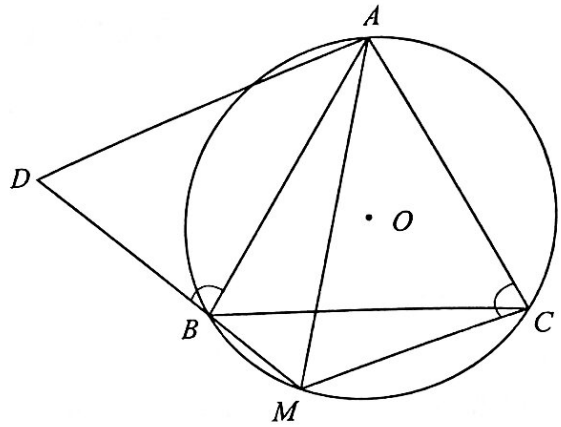
$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta CBM$ (c.g.c) $\Rightarrow AI = MC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MA = MI + IA = MB + MC$.

Cách 2. Trên tia đối của tia BM lấy điểm D sao cho $BD = MC$. Xét hai tam giác ΔACM và ΔABD có: $AC = AB$, $MC = BD$, $\widehat{ACM} = 60° + \widehat{BCM}$;

$$\widehat{ABD} = \widehat{BAM} + \widehat{AMB}$$
$$= \widehat{BCM} + \widehat{ACB} = \widehat{BCM} + 60°$$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ABD} \Rightarrow \Delta ACM = \Delta ABD \Rightarrow AM = AD$.

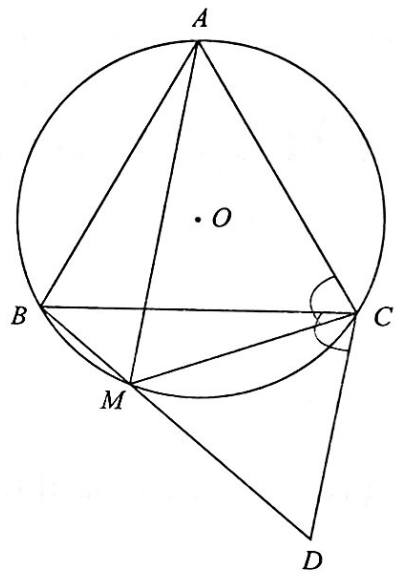


Tam giác ΔADM cân tại A và có $\widehat{AMD} = 60°$

$\Rightarrow \Delta ADM$ đều $\Rightarrow MA = MD$.

Vậy $MA = MD = MB + BD = MB + MC$.

Cách 3.



Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho $MD = MC$. Khi đó ΔMCD là tam giác đều, suy ra $MC = CD$. Xét hai tam giác $\Delta ACM, \Delta BCD$ có: $AC = BC$, $MC = CD$,

$\widehat{ACM} = 60° + \widehat{BCM} = \widehat{BCD}$

$\Rightarrow \Delta ACM = \Delta BCD$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = BD$.

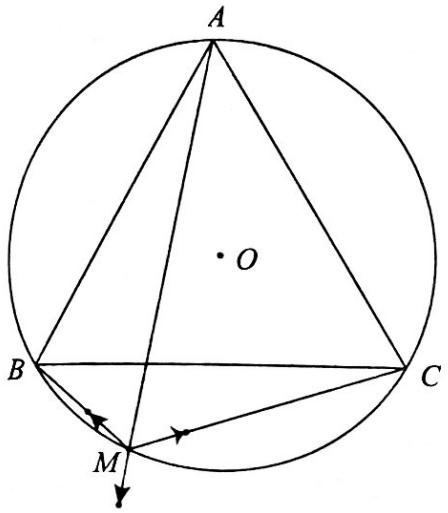
Vậy $MA = BD = MB + MD = MB + MC$.

Hướng 2: *Tiếp cận theo kiến thức THPT*

Cách 4. Ta có: $R^2 = OA^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MO})^2$

$$= R^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA}$$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA} = MA^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{MO}.\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA} = MA$ (1)



Tương tự: $2\overrightarrow{MO}.\dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB} = MB$ (2); $2\overrightarrow{MO}.\dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC} = MB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$-MA + MB + MC = 2\overrightarrow{MO}.\left(-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\right).$$

Ta sẽ chứng minh: $-\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \vec{0}$.

Thật vậy, vì $-\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}, \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}, \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}$ là các vectơ đơn vị và đôi một tạo với nhau góc 120^0 nên

$$-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \vec{0}.$$

Vậy $-MA + MB + MC = 0 \Leftrightarrow MA = MB + MC$.

Cách 5. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ΔMAB và ΔMAC ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos 60^\circ$$
$$= MA^2 + MB^2 - MA.MB.$$

Tương tự : $AC^2 = MA^2 + MC^2 - MA.MC$.

Vì $AB = AC$ nên

$MA^2 + MB^2 - MA.MB = MA^2 + MC^2 - MA.MC$

$\Leftrightarrow (MB - MC)(MB + MC - MA) = 0$ (1).

TH1: Nếu $MB = MC$, khi đó M, O, A thẳng hàng và các tam giác $\Delta MBO, \Delta MCO$ đều $\Rightarrow MB = MC = MO \Rightarrow MA = 2MO = MB + MC$.

TH2: Nếu $MB \neq MC$, khi đó

(1) $\Leftrightarrow MB + MC - MA = 0 \Leftrightarrow MA = MB + MC$.

Vậy $MA = MB + MC$.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Nhận xét. Có thể dùng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ để chứng minh $MA = MB + MC$. Ngoài 5 cách giải của bạn *Nguyễn Quang Nam*, người giới thiệu bài toán, Tòa soạn cũng nhận được một số cách giải tương tự của bạn *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, tỉnh **Bình Định**. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 46 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28.2.2021.

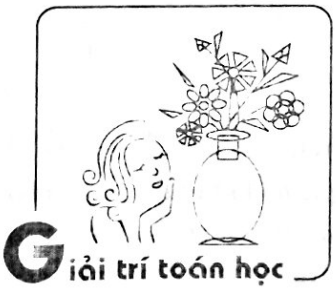
BÀI TOÁN 46. *Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CN của tam giác ABC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng*

$$\frac{DC}{DN} - \frac{AC}{BC} = 1.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

****



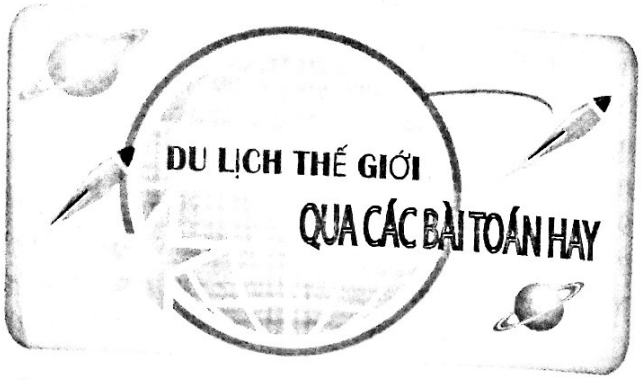
MỪNG XUÂN TÂN SỬU
NHỚ CẢNH ĐỒNG QUÊ

(Bài thơ xướng)

Sống khỏe, vui cười tựa nghé con
Bức tranh đồng ruộng cứ nguyên hồn
Cha cày thẳng luống còn tươi dấu
Mẹ cấy giăng hàng nét vẫn son
Ứng xử người - trâu văn hóa đẹp
Nhân tâm xóm - xã ánh trăng tròn
Mừng Tân Sửu đến hương xuân mới
Nhớ cảnh trâu hiền ngắm lúa non.

ĐÀO TAM

(Giảng viên Đại học Vinh)

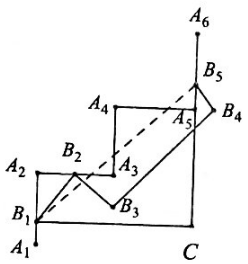


BÀI TOÁN 52. (Moscow Mathematical Olympiad) *Chứng minh rằng với các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ tùy ý, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1^2)}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Xét hai trường hợp:



• n là số chẵn. Dựng đường gấp khúc nối các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ sao cho $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n+1}A_{n+2}$ có độ dài bằng đơn vị và liên tiếp vuông góc với nhau (như hình vẽ với $n = 4$). Trên mỗi đoạn A_iA_{i+1} hoặc trên A_iA_{i+1} kéo dài ($i = 1, ..., n+1$) ta lấy B_i sao cho $B_iA_{i+1} = a_i$ (ta giả sử $a_{n+1} = a_1$, nghĩa là chọn B_{n+1} sao cho $B_{n+1}A_{n+2} = a_1$); B_i phía trái (hoặc phía dưới) của điểm A_{i+1} nếu $a_i > 0$ và B_i phía phải (hoặc phía trên) của điểm A_{i+1} nếu $a_i < 0$. Trong hình vẽ thì $0<a_1<1, 0<a_2<1, a_3>1,\ a_4<0$. Nối các điểm B_i lập nên đường gấp khúc $B_1B_2...B_{n+1}$. Theo định lý Pythagore ta có: $B_iB_{i+1}=\sqrt{B_iA_{i+1}^2+B_{i+1}A_{i+1}^2}$.

Vì $B_iA_{i+1} = a_i$ và $B_{i+1}A_{i+1} = |1-a_{i+1}|$ nên

$$B_iB_{i+1}=\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}.$$

Do đó tổng $\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1^2)}$$
bằng độ dài của đường gấp khúc $B_1B_2...B_{n+1}$. Hiển nhiên rằng độ dài của đường gấp khúc $B_1B_2...B_{n+1}$ không nhỏ hơn độ dài của đoạn B_1B_{n+1}. Ta tìm độ dài của đoạn B_1B_{n+1} này.

Ta dựng tam giác vuông B_1CB_{n+1} (như hình vẽ). Khi đó: $B_1C = A_2A_3 + A_4A_5 + ... + A_nA_{n+1} = \frac{n}{2}$

và $CB_{n+1} = A_1A_2 + A_3A_4 + ... + A_{n-1}A_n = \frac{n}{2}$

(với $A_1B_1 = A_{n+1}B_{n+1} = |1-a_1|$). Suy ra:

$$B_1B_{n+1}=\sqrt{(B_1C)^2+(CB_{n+1})^2}=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi các điểm $B_2, B_3, ..., B_n$ nằm trên đoạn thẳng B_1B_{n+1}, điều này nghĩa là B_i phải trùng với giao điểm của các đoạn thẳng A_iA_{i+1} với B_1B_{n+1}. Vì đoạn B_1B_{n+1} lập một góc 45^0 với B_1C ($B_1C = CB_{n+1}$) nên

$$B_1A_2 = A_2B_2 = B_3A_4 = ... = B_{n-1}A_n = A_nB_n,$$

nghĩa là $a_1 = 1-a_2 = a_3 = 1-a_4 = ... = a_{n-1} = 1-a_n$.

Vậy với n chẵn thì $a_1 = a_3 = ... = a_{n-1} = a$;

$a_2 = a_4 = ... = a_n = 1-a$, ở đó a là số tùy ý.

• n là số lẻ. Đặt $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2, ..., a_{2n} = a_n$ và xét tổng $\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$
$$+\sqrt{a_{2n-1}^2+(1-a_{2n}^2)}+\sqrt{a_{2n}^2+(1-a_1^2)}.$$

Tổng này bằng 2 lần tổng
$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1^2)}.$$

Tuy nhiên tổng thứ nhất không nhỏ hơn $\frac{2n\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1^2)}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải bài này.

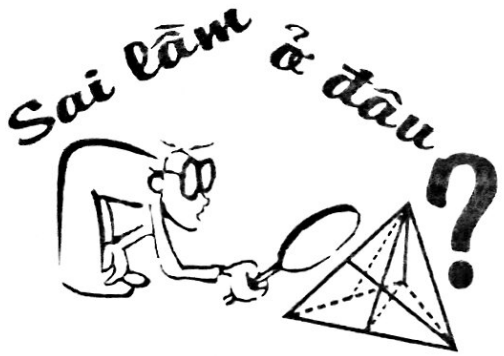
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 28.2.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 54. *Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z = 1 thì ta có bất đẳng thức:* $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}\leq\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU?

(Đề đăng trên TH&TT số 519, tháng 9 năm 2020)

Phân tích sai lầm. Lời giải của bạn *Diễm Quỳnh* chưa đúng. *Diễm Quỳnh* đã mắc hai chỗ sai sau: Thứ nhất, đặt $t = 4x - 2y$, mà không tìm miền giá trị của t. Thứ hai, khi xác định được $\frac{1}{3} \le P = f(t) \le 3$, không kiểm tra có tồn tại x, y để đẳng thức xảy ra không, mà đi kết luận luôn $M = 3, m = \frac{1}{3}$. Từ hai chỗ sai trên dẫn đến kết luận sai.

Lời giải đúng. Ta có:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x - 2y.$$

Khi đó, $P = \dfrac{12x^2 - 16xy + 20x - 10y + 1}{(x^2+y^2)^2 - 4x + 2y + 1}$

$$= \frac{16x^2 - 16xy + 4y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20x - 10y + 1}{(4x-2y)^2 - (4x-2y) + 1}$$

$$= \frac{(4x-2y)^2 + 4x - 2y + 1}{(4x-2y)^2 - (4x-2y) + 1}.$$

Đặt $t = 4x - 2y$, khi đó $P = \dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$. Ta có:

$t = 4x - 2y = 4(x-2) - 2(y+1) + 10$

$\Leftrightarrow t - 10 = 4(x-2) - 2(y+1)$. Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$|t - 10| \le \sqrt{[4^2 + (-2)^2][(x-2)^2 + (y+1)^2]} = 10$$

$\Leftrightarrow 0 \le t \le 20$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} \Leftrightarrow x = -2y$. Với $x = -2y$, ta có:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -2 \end{array}\right..$$

Suy ra tương ứng $x = 0$ và $x = 4$.

Vậy $t = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$; $t = 20 \Leftrightarrow x = 4, y = -2$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$ trên [0; 20]. Ta có:

$f'(t) = \dfrac{-2t^2+2}{(t^2-t+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$. BBT:

t	$-\infty$		-1		0		1		20		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(t)$	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1 |		3	↘	$\frac{41}{39}$	↘	1

Suy ra: $M = \max\limits_{[0;20]} f(t) = f(1) = 3$, $m = \min\limits_{[0;20]} f(t) = f(0) = 1$.

Vậy $M + m = 4$. Chọn A.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều phát hiện được sai lầm, tuy nhiên lời giải của một số bạn vẫn không đưa ra chính xác điều kiện của t (mặc dù kết quả vẫn đúng). KIHIVI tuyên dương các bạn sau: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre; **Hưng Yên:** *Trần Sơn Tùng, Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

KIHIVI

LỜI GIẢI ĐÃ CHÍNH XÁC CHƯA?

Bài toán: *Tìm giá trị của m để hàm số*

$$f(x) = -x^4 + (m^2 - 4)x^2 + (m+2)x - 3m + 5$$

đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$.

Sau đây là lời giải của một bạn học sinh:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x + m + 2$;

$f''(x) = -12x^2 + 2(m^2 - 4)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \Phi.$$

Vậy không có giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$. ***Theo các bạn, bài giải của bạn học sinh đó có đúngkhông? Vì sao?***

LÝ MINH PHƯƠNG

(GV THPT Phước Thiền, Nhơn Trạch, Đồng Nai)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 523 (1.2021)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

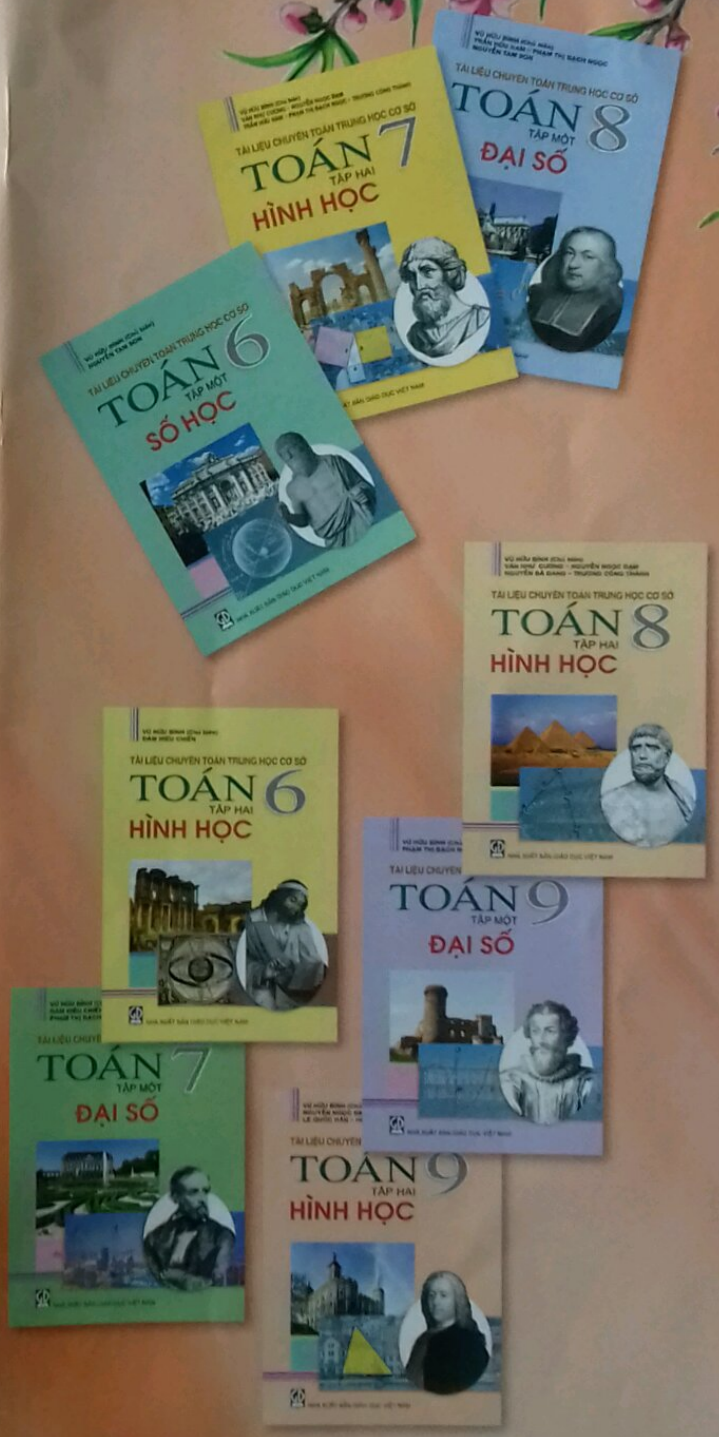
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập [illegible] bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá [illegible]ông, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những [illegible] thi học sinh giỏi Toán Quốc [illegible]ia, thi Olympic [illegible]... Bằng việc đọc, giải nhữ[illegible] ví dụ và bài tập [illegible], HS sẽ được mở rộng, đào [illegible] những kiến th[illegible] đã học, qua đó được rèn luyện [illegible]ả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việ Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGƯT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - **PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278

- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TP. ĐÀ NẴNG
Địa chỉ: 771 Nguyễn Hữu Thọ, P. Khuê Trung, Q. Cẩm Lệ, TP. Đà Nẵng
Điện thoại: (0236).3787877 - Fax: (0236).3787368

Chúc mừng năm mới

HẠNH PHÚC
AN KHANG
THỊNH VƯỢNG

2021

Tân Sửu

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT1N21
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2021
Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng