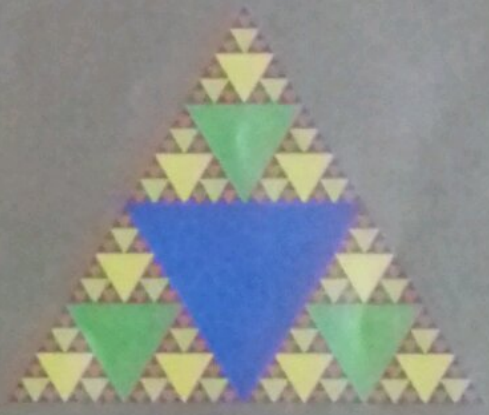
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

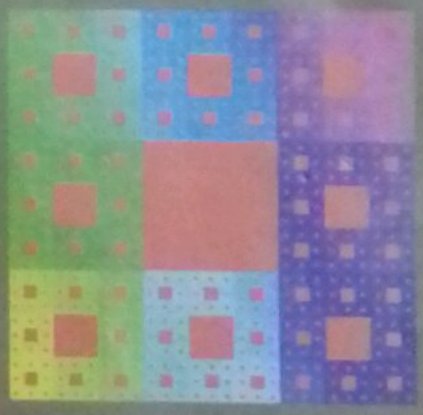
Số 522
Tháng 12 - 2020
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606. Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



Tam giác Sierpiński



Tấm thảm Sierpiński

Nhà toán học Ba Lan Wacław Sierpiński (1882 - 1969)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

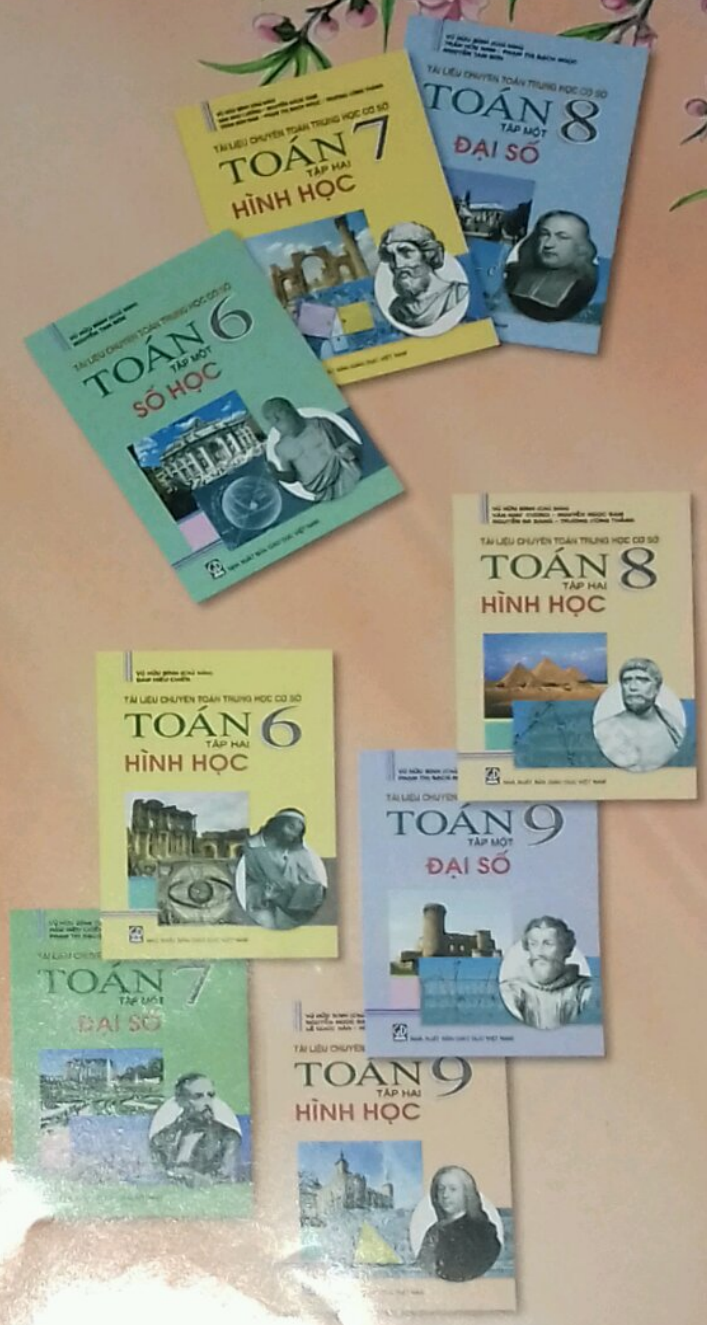
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việ Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGUT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu các kiến thức Toán đã học, và góp phần vào [illegible] cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh [illegible] Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty [illegible] hàng học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo [illegible]

Địa chỉ liên hệ: - PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1[illegible] Hồ Thủy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 351219[illegible] máy lẻ: 120[illegible] Fax: (024) [illegible]212[illegible]8
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

Một chặng đường mới

Bạn đọc thân mến!

Thực hiện chỉ đạo Quy hoạch phát triển và quản lý báo chí của Đảng và Chính phủ (Quyết định số 362/QĐ-TTg ngày 03/4/2019 của Thủ tướng Chính phủ phê duyệt Quy hoạch phát triển và quản lý báo chí toàn quốc đến năm 2025), được sự đồng ý của Bộ Thông tin và Truyền thông, Bộ Giáo dục và Đào tạo, bắt đầu từ ngày 1/12/2020, ba Tạp chí: Toán học và Tuổi trẻ, Văn học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, đã được hợp nhất thành Tạp chí mới là ***Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường*** *thuộc* ***Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục – Bộ Giáo dục và Đào tạo.***

Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường được xuất bản mỗi tháng 5 chuyên san (5 kỳ) gồm:

1. *Toán học và Tuổi trẻ*
2. *Toán Tuổi thơ 1*
3. *Toán Tuổi thơ 2.*
4. *Văn học và Tuổi trẻ*
5. *Văn Tuổi Thơ*

Mỗi chuyên san vẫn bao gồm các chuyên mục của mỗi Tạp chí trước khi hợp nhất. Bạn đọc khi gửi bài tới Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường cần ghi rõ gửi cho chuyên san nào cùng với chuyên mục nào.

Trong suốt mấy chục năm qua, các Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Văn học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ thực sự là người bạn của bạn đọc yêu Toán, yêu Văn trên toàn quốc. Có một thực tế là đa số các học sinh chăm đọc báo và tham gia giải bài trên các Tạp chí đều đoạt giải cao trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia, Khu vực và Quốc tế. Nhiều người đã trở thành các nhà toán học, nhà văn, nhà khoa học, nhà giáo dục, ... và các doanh nhân thành đạt.

Kế thừa truyền thống vinh quang và đầy tự hào đó, tôn chỉ, mục đích hoạt động của ***Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường*** *vẫn sẽ là: Phổ biến kiến thức toán học và văn học phổ thông, khơi dậy lòng ham mê, sức sáng tạo của các bạn trẻ yêu Toán, yêu Văn trên toàn quốc, góp phần nâng cao dân trí, đào tạo tài năng cho đất nước.*

Hy vọng rằng, với sự cộng tác nhiệt tình và đầy tinh thần trách nhiệm của Ban Cố vấn Khoa học, Hội đồng biên tập, của các cán bộ Tòa soạn cùng với sự gắn bó của đội ngũ cộng tác viên tâm huyết là các nhà khoa học, các nhà giáo dục, nhà văn, ... các ấn phẩm Tạp chí của Toán học và Văn học trong nhà trường sẽ ngày càng được nâng cao chất lượng, trở thành những ấn phẩm uy tín, nhận được sự tin cậy và gắn bó của bạn đọc.

Tòa soạn Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc và mong tiếp tục nhận được sự cộng tác viết bài của các thầy cô giáo và các em học sinh trên khắp cả nước.

Mọi chi tiết xin liên hệ theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường

187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, TP. Hà Nội.

Số điện thoại biên tập, phát hành và địa chỉ email sẽ được ghi trên mỗi chuyên san của Tạp chí.

TH&VH trong nhà trường

KHAI THÁC ĐỊNH LÝ MENELAUS VÀO GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG BẬC THCS

BÙI MINH TRUNG
(GV THCS Mỹ Long Nam, Cầu Ngang, Trà Vinh)

Ông là sinh viên trường Đại học Alexandria cổ đại, là giảng viên ở đó. Người ta cho rằng ông đã viết sáu tác phẩm về dây cung trong một đường tròn nhưng bị thất lạc. Ngày nay, người ta tìm thấy một bộ sách của ông tựa đề là Sphoerics bằng tiếng Ả rập, nguyên văn bằng tiếng Hy Lạp không tìm thấy. Trong bộ này, ông đã tổng quát hóa những kết quả mà *Euclid* đã tìm ra đối với tam giác phẳng vào tam giác cầu và chính ông là người đầu tiên của nhân loại chứng minh rằng hai tam giác đẳng cự với nhau khi và chỉ khi các góc tương ứng bằng nhau. Trong tập hai, ông viết về lượng giác và tập ba viết về thiên văn học. *Menelaus* đã phát hiện ra một định lý nổi tiếng sau này mang tên ông.

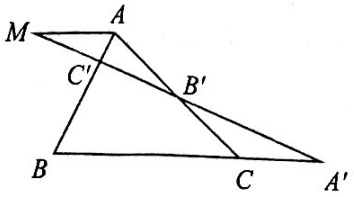
Menelaus
(70 - 130 SCN)

Định lý Menelaus. *Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài một cạnh và hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác. Khi đó A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1.$$

Chứng minh.

• TH1: Trong 3 điểm *A'*, *B'*, *C'* có đúng 2 điểm thuộc cạnh tam giác *ABC*. Giả sử là *B'*, *C'*



(⇒) Qua *A* kẻ đường thẳng song song với *BC* cắt đường thẳng *B'C'* tại *M*.

Ta có: $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B};\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}$.

Vậy $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}.\frac{A'B}{A'C}=1$

(⇐) Gọi *A''* là giao điểm của *B'C'* với *BC*.

Áp dụng định lý Menelaus (phần thuận) ta có $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$. Mà $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ nên $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$. Do *B'*, *C'* lần lượt thuộc cạnh *CA*, *AB* nên *A''* nằm ngoài cạnh *BC*. Vậy $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$ và *A'*, *A''* nằm ngoài cạnh *BC* suy ra $A''\equiv A'$.

Do đó *A'*, *B'*, *C'* thẳng hàng.

• TH2: Trong 3 điểm *A'*, *B'*, *C'* không có điểm nào thuộc cạnh tam giác *ABC* được chứng minh tương tự.

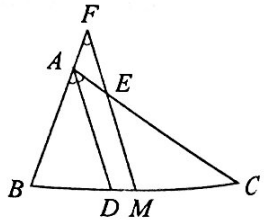
Sau đây tác giả xin giới thiệu một số dạng toán hình học phẳng bậc THCS mà lời giải được khai thác chủ yếu từ Định lý Menelaus.

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Thí dụ 1.1. (***Đề thi HSG huyện Cầu Ngang-2012***) *Cho △ABC (AB < AC) có AD là đường phân giác trong. Đường thẳng qua trung điểm M của cạnh BC song song với AD cắt AC tại E và cắt AB tại F. Chứng minh BF = CE.*

Lời giải.

Áp dụng định lý Menelaus cho △*ABC* với ba điểm *F*, *E*, *M* thẳng hàng ta được:



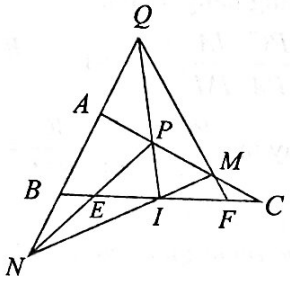
$$\frac{FA}{FB}.\frac{EC}{EA}.\frac{MB}{MC}=1 \Rightarrow \frac{EC}{FB}=\frac{MC}{MB}.\frac{EA}{FA}=\frac{EA}{FA}.$$

Mặt khác: $\widehat{BAD}=\widehat{AFE}$ (đồng vị); $\widehat{DAE}=\widehat{AEF}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{AEF}$ (vì AD là phân giác) $\Rightarrow \Delta AFE$ cân tại A hay $AE = AF$.

Vậy $\frac{EC}{FB}=\frac{EA}{FA}=1$ hay $EC = FB$.

Thí dụ 1.2. *Cho $\triangle ABC$, gọi I là trung điểm của BC. Qua I kẻ đường thẳng d_1 cắt CA, AB lần lượt tại M, N và d_2 cắt cạnh CA, AB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng PN cắt cạnh BC tại E và đường thẳng QM cắt BC tại F. Chứng minh $IE = IF$.*

Lời giải. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với ba điểm M, N, I thẳng hàng:



$$\frac{NA}{NB}.\frac{IB}{IC}.\frac{MC}{MA}=1$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1 \quad (1).$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với ba điểm I, P, Q thẳng hàng:

$$\frac{IC}{IB}.\frac{PA}{PC}.\frac{QB}{QA}=1 \Rightarrow \frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC}=1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC} \quad (3).$$

Tương tự, áp dụng áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$ với hai bộ ba điểm N, E, P và Q, M, F thẳng hàng:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{FC}{FB}.\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}=1 \quad (4).$$

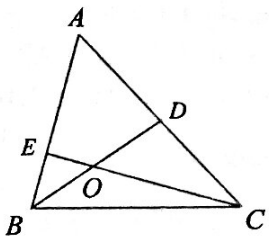
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FB}$.

Do đó: $\frac{EB}{EC+EB}=\frac{FC}{FB+FC}$, nên $\frac{EB}{BC}=\frac{FC}{BC}$.

Suy ra $EB = FC$ hay $EI = FI$ (đpcm).

Thí dụ 1.3. *Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\frac{CD}{DA}=\frac{AE}{EB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Hai đường thẳng thẳng BD và CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng OB = OD.*

Lời giải. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABD$ với ba điểm E, O, C thẳng hàng ta được:



$$\frac{EA}{EB}.\frac{OB}{OD}.\frac{CD}{CA}=1 \quad (1).$$

Từ giả thiết:

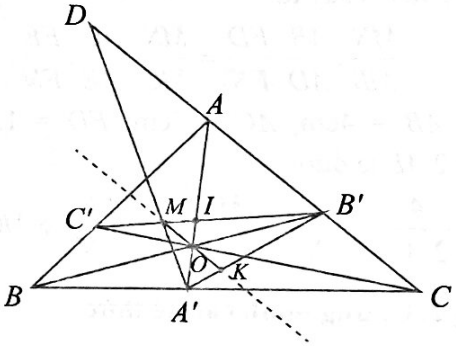
$$\frac{CD}{DA}=\frac{AE}{EB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta có: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{OB}{OD}.\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=1.$

Suy ra $\frac{OB}{OD}=1$ hay $OB = OD$.

Thí dụ 1.4. *Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy C', A', B' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại O. Vẽ đường thẳng d qua O song song với AC lần lượt cắt A'B' tại K, cắt B'C' tại M. Chứng minh OK = OM.*

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của AC và $A'M$.

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle AOB$ với cát tuyến $C'IB'$ có: $\frac{B'O}{B'B}.\frac{IA}{IO}.\frac{C'B}{C'A}=1 \quad (1).$

Cho $\triangle AOB'$ với cát tuyến $BA'C$ có:

$$\frac{A'A}{A'O}.\frac{BO}{BB'}.\frac{CB'}{CA}=1 \quad (2).$$

Cho $\triangle ABB'$ với cát tuyến COC' có:

$$\frac{C'A}{C'O}.\frac{OB}{OB'}.\frac{CB'}{CA}=1 \quad (3).$$

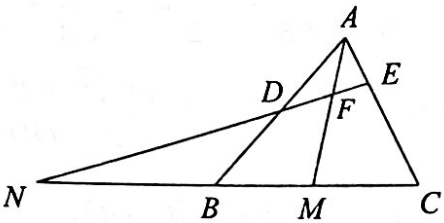
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{A'O}{A'A}=\frac{IO}{IA}$.

Mà $\frac{A'O}{A'A}=\frac{MO}{DA}$ và $\frac{IO}{IA}=\frac{OM}{AB'}$, do đó:

$$DA = AB' \Rightarrow OK = OM.$$

Thí dụ 1.5. *Cho tam giác ABC có AB = 4cm; AC = 3cm. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = 2.AE. Điểm F chia trong đoạn thẳng DE theo tỉ số* $\frac{3}{2}$ *(nghĩa là* $\frac{FD}{FE}=\frac{3}{2}$*). Tia AF cắt BC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.*

Lời giải. Gọi N là giao điểm của ED và BC. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DNB$ với cát tuyến AFM có:



$$\frac{MN}{MB}.\frac{AB}{AD}.\frac{FD}{FN}=1 \quad (1).$$

Tương tự cho $\triangle ENC$ với cát tuyến AFM có:

$$\frac{MN}{MC}.\frac{AC}{AE}.\frac{FE}{FN}=1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{MN}{MB}.\frac{AB}{AD}.\frac{FD}{FN}=\frac{MN}{MC}.\frac{AC}{AE}.\frac{FE}{FN}.$$

Thay AB = 4cm; AC = 3cm; $FD = 1{,}5.FE$ và $AD = 2.AE$ ta được:

$$\frac{MN}{MB}.\frac{4}{2.AE}.\frac{1{,}5.FE}{FN}=\frac{MN}{MA}.\frac{3}{AE}.\frac{FE}{FN}\Rightarrow MC=MB.$$

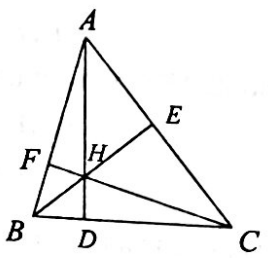
Dạng 2. Chứng minh các hệ thức

Thí dụ 2.1. (Định lý Van Aubel) *Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm D, E, F sao cho AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Chứng minh* $\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{BF}=\frac{AH}{HD}$.

Lời giải. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ACD$ với 3 điểm B, H, E thẳng hàng:

$$\frac{EA}{EC}.\frac{BC}{BD}.\frac{HD}{HA}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{BD}{BC}.\frac{AH}{HD} \quad (1).$$



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABD$ với 3 điểm F, H, C thẳng hàng ta được:

$$\frac{AF}{BF}=\frac{CD}{CB}.\frac{HA}{HD} \quad (2).$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có:

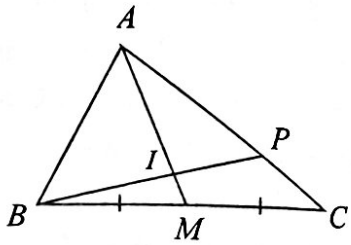
$$\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{BF}=\frac{BD}{BC}.\frac{AH}{HD}+\frac{CD}{BC}.\frac{AH}{HD}$$

$$=\frac{AH}{HD}.\left(\frac{BD}{BC}+\frac{CD}{BC}\right)=\frac{AH}{HD}.\frac{BC}{BC}=\frac{AH}{HD}.$$

Thí dụ 2.2. *Cho ΔABC có trung tuyến AM. Trên đoạn AM lấy I sao cho AI = 4MI. Đường thẳng BI cắt AC tại P. Chứng minh rằng: PA = 2PC.*

Lời giải.

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔAMC với ba điểm B, I, P thẳng hàng ta có:

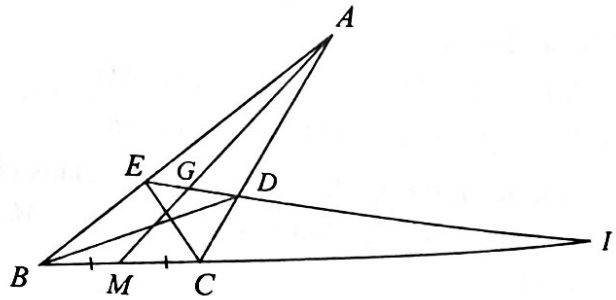


$$\frac{PC}{PA}.\frac{IA}{IM}.\frac{BM}{BC}=1.$$

Suy ra: $\frac{PC}{PA}=\frac{IM}{IA}.\frac{BC}{BM}=\frac{1}{2}\Rightarrow PA=2PC.$

Thí dụ 2.3. *Cho tam giác ABC không cân tại A có các phân giác trong BD, CE và trọng tâm G thỏa mãn G, E, D thẳng hàng. Chứng minh rằng:* $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ *(a = BC; b = AC; c = AB).*

Lời giải.



Kéo dài ED cắt BC tại I, kẻ trung tuyến AM. Đặt $BM = MC = x$.

Áp dụng Menelaus vào $\triangle AMC$ với ba điểm G, D, I thẳng hàng ta có:

$$\frac{MG}{GA}.\frac{AD}{DC}.\frac{CI}{MI}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{c}{a}.\frac{CI}{CI+x}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{CI+x}{CI}=\frac{c}{2a}\Leftrightarrow\frac{x}{CI}=\frac{c}{2a}-1.$$

Áp dụng Menelaus vào $\triangle ABC$ với ba điểm E, D, I thẳng hàng ta có:

$$\frac{BE}{EA}.\frac{AD}{DC}.\frac{CI}{BI}=1\Leftrightarrow\frac{a}{b}.\frac{c}{a}.\frac{CI}{2x+CI}=1$$

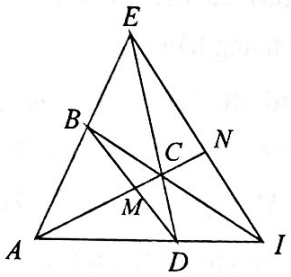
$$\Leftrightarrow \frac{CI+2x}{CI}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow \frac{x}{CI}=\frac{\frac{c}{b}-1}{2}.$$

Suy ra: $\frac{c}{2a}-1=\frac{\frac{c}{b}-1}{2}\Rightarrow cb=ac+ab\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$

Thí dụ 2.4. *Cho tứ giác $ABCD$. AB cắt CD tại E, BC cắt AD tại I, đường chéo AC cắt BD và EI lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng*

$$\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}.$$

Lời giải. Áp dụng định lí Menelaus ΔAEC có B, M, D thẳng hàng, ta có:



$$\frac{MA}{MC}.\frac{DC}{DE}.\frac{BE}{BA}=1.$$

Tương tự với tam giác ABC có N, I, E thẳng hàng, ta có:

$$\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{EB}{EA}=1.$$

Suy ra: $\frac{MA}{MC}.\frac{DC}{DE}.\frac{BE}{BA}=\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{EB}{EA}.$

Do đó: $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{DE}{DC}.\frac{AB}{AE}$ (1).

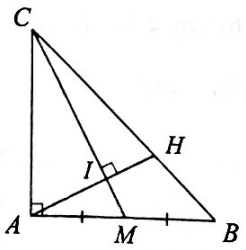
Trong ΔBEC có I, D, A thẳng hàng, ta có:

$$\frac{IC}{IB}.\frac{AB}{AE}.\frac{DE}{DC}=1 \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta được: $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}.$

Thí dụ 2.5 (Đề thi HSG tỉnh Trà Vinh – 2019). *Cho ΔABC vuông cân tại A, CM là đường trung tuyến. Từ A vẽ đường thẳng vuông với CM cắt BC ở H. Tính tỉ số $\frac{BH}{HC}$.*

Lời giải. Gọi I là giao điểm của CM và AH. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle CMB$ với ba điểm A, I, H thẳng hàng ta được:



$$\frac{AM}{AB}.\frac{IC}{IM}.\frac{HB}{HC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC}=\frac{AB}{AM}.\frac{IM}{IC}=2.\frac{IM}{IC}$$

Mặt khác, $\Delta AMC\sim\Delta IAC \Rightarrow \frac{IC}{IA}=\frac{AC}{AM}=2;$

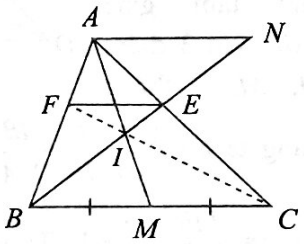
$$\Delta AMC\sim\Delta IMA\Rightarrow \frac{IM}{IA}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow IC=2IA=4IM$. Vậy $\frac{BH}{HC}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

Dạng 3. Chứng minh tính chất đồng quy, thẳng hàng

Thí dụ 3.1. *Cho ΔABC lấy E, F, M theo thứ tự trên cạnh AC, AB, BC sao cho EF // BC, $MB = MC$. Chứng minh CF, BE, AM đồng quy.*

Lời giải. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BE tại N, gọi I là giao điểm của AM và BE. Ta có:



$$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{EC}=\frac{AN}{BC};$$

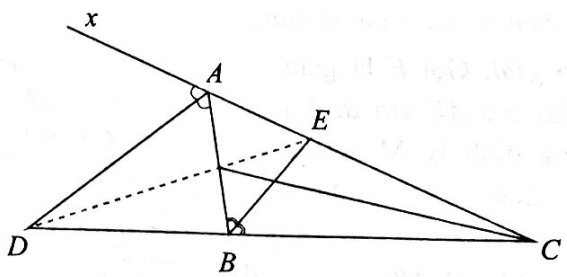
$$\frac{MI}{AI}=\frac{BM}{AN} \quad (AN // BC)$$

$$\frac{BC}{MC}=2 \ (M \text{ là trung điểm } BC).$$

Suy ra $\frac{AF}{BF}.\frac{BC}{MC}.\frac{MI}{AI}=\frac{AN}{BC}.2.\frac{BM}{AN}=1.$

Áp dụng định lý Menelaus đảo cho ΔABM thì F, I, C thẳng hàng. Từ đó CF, BE, AM đồng quy.

Thí dụ 3.2. *Cho $\triangle ABC$ có các đường phân giác BE, CF. Đường phân giác ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$ cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.*



Lời giải.

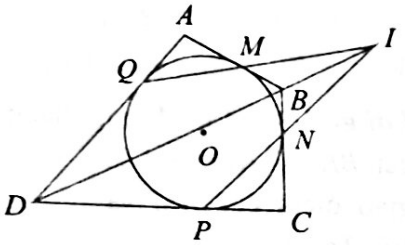
Xét $\triangle ABC$ với AD, BE, CF là các đường phân giác ta có: $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB};\frac{FB}{FA}=\frac{BC}{AC};\frac{EA}{EC}=\frac{AB}{BC}.$

Xét $\triangle ABC$ với $D\in BC, F\in AB, E\in AC$

và $\frac{DC}{DB}.\frac{FB}{FA}.\frac{EA}{EC}=\frac{BC}{AC}.\frac{AB}{BC}.\frac{AC}{AB}=1.$

Do đó theo định lý Menelaus đảo suy ra D, F, E thẳng hàng (đpcm).

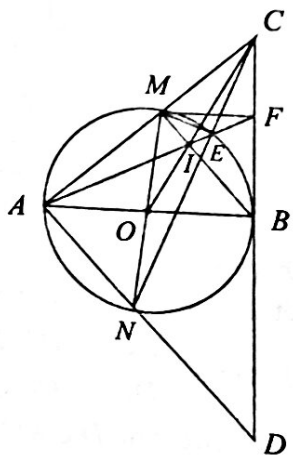
Thí dụ 3.3. (Định lý Newton) *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng: Các đường thẳng NP, MQ, BD đồng quy.*



Lời giải. Gọi I là giao của QM và BD. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với 3 điểm Q, M, I thẳng hàng ta có $\frac{QA}{QD}.\frac{ID}{IB}.\frac{MB}{MA}=1$. Mà $MA = QA$ nên suy ra $\frac{MB}{QD}.\frac{ID}{IB}=1$. Ta có $MB = NB$, $DQ = DP$, $PC = NC$ nên $\frac{NB}{DP}.\frac{ID}{IB}=1 \Rightarrow \frac{PC}{PD}.\frac{ID}{IB}.\frac{NB}{NC}=1.$

Do đó theo định lý Menelaus đảo thì I, N, P thẳng hàng.

Thí dụ 3.4. *Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Qua B kẻ tiếp tuyến d của đường tròn (O). MN là một đường kính thay đổi của đường tròn (M không trùng với A, B). Các đường thẳng AM và AN cắt đường thẳng d lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của CO và BM. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh ba điểm C, E, N thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi F là giao điểm của AE với d. Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ACO$ với ba điểm B, I, M ta có:

$$\frac{BA}{BO}.\frac{IO}{IC}.\frac{MC}{MA}=1$$

$$\Rightarrow \frac{IO}{IC}=\frac{MA}{2.MC} \quad (1).$$

Tương tự với $\triangle BCO$ và ba điểm A, I, F thẳng hàng ta có: $\frac{IO}{IC}=\frac{FB}{2.FC}$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $\frac{MA}{MC}=\frac{FB}{FC}$. Do đó $MF \parallel AB$ (định lí Thales đảo) mà $AB \perp BC \Rightarrow MF \perp BC \Rightarrow \widehat{MFC}=90^0$.

Ta lại có $\widehat{EFB}=\widehat{EBA}$ (cùng phụ với $\widehat{EAB}$;

$\widehat{EBA}=\widehat{EMC}$ (tứ giác $AMEB$ nội tiếp)

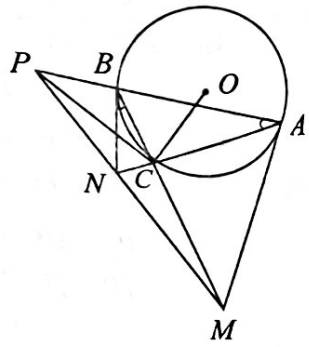
$\Rightarrow \widehat{EFB}=\widehat{EMC} \Rightarrow$ tứ giác $MEFC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MEC}=\widehat{MFC}=90^0$. Do đó: $ME \perp EC$ (3).

Lại có $\widehat{MEN}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow ME \perp EN$ (4). Từ (3) và (4) suy ra C, E, N thẳng hàng.

Thí dụ 3.5. *Cho tam giác không cân nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC ở M, tiếp tuyến của (O) tại B cắt AC tại N, tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.*

Lời giải. Ta có: $\widehat{NBC}=\widehat{NAB}$ suy ra ΔNBC đồng dạng với ΔNAB. Suy ra: $\frac{NB}{NA}=\frac{NC}{NB}=\frac{BC}{AB}$



$$\Rightarrow \frac{NB}{NA}.\frac{NC}{NB}=\frac{BC^2}{AB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{NC}{NA}=\frac{BC^2}{AB^2}.$$

Tương tự ta có: $\frac{MB}{MC}=\frac{AB^2}{AC^2}$, $\frac{PA}{PB}=\frac{AC^2}{BC^2}$. Do đó:

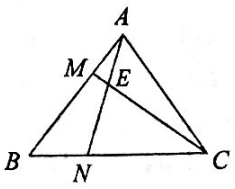
$$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=\frac{AB^2}{AC^2}.\frac{BC^2}{AB^2}.\frac{AC^2}{BC^2}=1.$$

Áp dụng định lí Menelaus đảo cho tam giác ABC thì M, N, P thẳng hàng.

Dạng 4. Các bài toán liên quan đến diện tích

Thí dụ 4.1. *Cho $\triangle ABC$, M trên cạnh AB thỏa mãn $AM=\frac{1}{2}MB$, N trên cạnh BC thỏa mãn $CN=2NB$, gọi E là giao điểm của AN và CM. Tính diện tích của tam giác BEC biết diện tích ABC bằng 1.*

Lời giải. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABN$ với ba điểm M, E, C thẳng hàng ta có:



$$\frac{MA}{MB}.\frac{CB}{CN}.\frac{EN}{EA}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{EN}{EA}=1 \Rightarrow \frac{EN}{EA}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BEN}=\frac{4}{3}S_{\Delta ABE}; S_{\Delta CNE}=\frac{4}{3}S_{\Delta AEC}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BEC}=\frac{4}{3}\left(S_{\Delta ABE}+S_{\Delta ACE}\right)=\frac{4}{3}\left(S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BEC}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}S_{\Delta BCE}=\frac{4}{3}S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta BEC}=\frac{4}{7}.$$

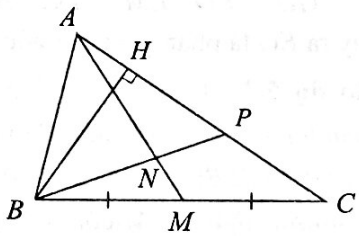
Thí dụ 4.2. *Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM. Lấy điểm N trên AM sao cho $AN=3NM$, Nối BN cắt AC tại P. Tính $\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta BCP}}$.*

Lời giải. Vẽ $BH \perp AC$, ta có:

$$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}AP.BH$$

$$S_{\Delta BCP}=\frac{1}{2}CP.BH$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{AP}{CP}$$



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ACM$ với ba điểm B, N, P thẳng hàng:

$$\frac{MP}{BC}.\frac{CP}{PA}.\frac{AN}{NM}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{CP}{PA}.3=1 \Rightarrow \frac{AP}{CP}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta BCP}}=\frac{3}{2}$.

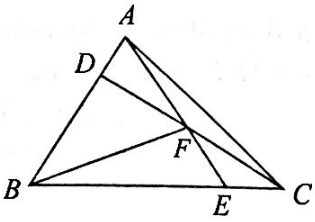
Thí dụ 4.3. *Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD=3DA$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE=4EC$. Gọi F là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng $FD=FC$ và $S_{ABC}=2S_{AFB}$.*

Lời giải.

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BDC$ với ba điểm A, F, E thẳng hàng:

$$\frac{AD}{AB}.\frac{FC}{FD}.\frac{EB}{EC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}.\frac{FC}{FD}.\frac{4}{1}=1.$$



Do đó $FD=FC$. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABE$ với ba điểm C, F, D thẳng hàng:

$$\frac{CE}{CB}.\frac{FA}{FE}.\frac{DB}{DA}=1 \Rightarrow \frac{1}{5}.\frac{FA}{FE}.\frac{3}{1}=1$$

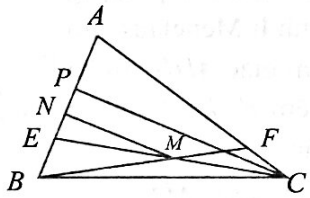
$$\Rightarrow FA=\frac{5}{3}.FE \Rightarrow S_{ABF}=\frac{5}{8}.S_{ABE}.$$

Mà $S_{ABE}=\frac{4}{5}.S_{ABC} \Rightarrow S_{ABF}=\frac{5}{8}.\frac{4}{5}.S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.

Vậy $S_{ABC}=2S_{AFB}$.

Thí dụ 4.4. *Cho tam giác ABC, trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $BE=\frac{1}{4}BA$, $AF=\frac{4}{5}AC$. Gọi M là giao điểm của BF và C. Biết $S_{\Delta AMB}=2$, tính diện tích tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi N, P lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống AB, C xuống AB. Xét tam giác AEC với B, M, F thẳng hàng ta có: $\frac{BA}{BE}.\frac{ME}{MC}.\frac{FC}{FA}=1$

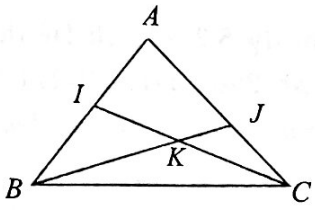


$$\Rightarrow 4.\frac{ME}{MC}.\frac{1}{4}=1 \Rightarrow MC=ME \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{MN}{CP}=\frac{1}{2}.$$

Do đó $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AMB}=4$.

Thí dụ 4.5. *Cho hai điểm I, J trên các cạnh AB, AC của $\triangle ABC$. Giả sử $\frac{AI}{IB}=m$, $\frac{CJ}{JA}=n$. Gọi K là giao điểm của CI và BJ. Tính $\frac{S_{KJC}}{S_{KIB}}$?*

Lời giải. Áp dụng Menelaus cho $\triangle ABJ$ với cát tuyến CKI ta có: $\frac{CJ}{CA}.\frac{IA}{IB}.\frac{KB}{KJ}=1$.



Ta có:

$$\frac{IA}{IB}=m, \frac{CJ}{CA}=\frac{CJ}{CJ+JA}=\frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{KB}{KJ}=\frac{n+1}{mn}.$$

Tương tự, xét $\triangle AIC$ với cát tuyến BKJ ta có:

$$\frac{BI}{BA}.\frac{JA}{JC}.\frac{KC}{KI}=1.$$

Ta có: $\frac{IB}{BA}=1-\frac{AI}{BA}=1-\frac{AI}{BI+IA}=1-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{m+1}$;

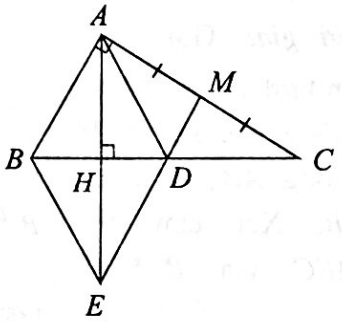
$\frac{JA}{JC}=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{KC}{KI}=n(m+1)$.

Do đó: $\frac{S_{KJC}}{S_{KIB}}=\frac{KJ.KC}{KI.KB}=\frac{KJ}{KB}.\frac{KC}{KI}=\frac{mn}{n+1}.\frac{1}{n(m+1)}$

$=\frac{m}{(n+1)(m+1)}$.

Dạng 5. Một số dạng toán chứng minh khác

Thí dụ 5.1. *Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC), kẻ đường cao AH. Vẽ AD là tia phân giác của góc BAH (D thuộc BH). Gọi M là trung điểm của cạnh AB, E là giao điểm của các đường thẳng MD và AH. Chứng minh CE // AD.*



Lời giải. Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác AHB với ba điểm E; D; M thẳng hàng. Ta có:

$\frac{EH}{EA}.\frac{DB}{DH}.\frac{MA}{MB}=1$

$\Rightarrow\frac{EH}{EA}=\frac{DH}{DB}$ (1).

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DH}{DB}=\frac{AH}{AB}$ (2).

Lại có: $\Delta HAC\sim\Delta HBA\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{CD}$ (3).

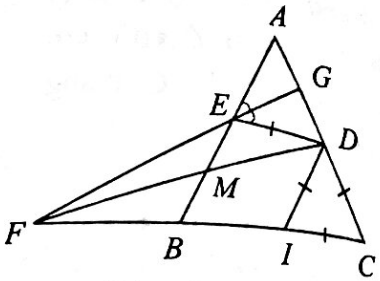
Xét ΔACD có $\widehat{ADC}=\widehat{DAC}$ $\left(+\widehat{MAD}=90^0\right)$

$\Rightarrow\Delta ACD$ cân tại $C\Rightarrow CA=CD$ (4). Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $\frac{EH}{EA}=\frac{CH}{CD}\Rightarrow CE\,//\,AD$.

Thí dụ 5.2. (Trích Đề thi vào lớp chuyên Tin, Vĩnh Phúc 2011-2012) *Cho $\triangle ABC$ có AB = AC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, D sao cho DE = DC. Giả sử đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn thẳng EB cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF chia đôi góc AED.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm BE, G là giao điểm của các đường thẳng EF, AC. Ta sẽ chứng minh:

$\frac{GA}{GD}=\frac{EA}{ED}$.



Áp dụng định lý Menelaus cho ΔADM với G, E, F thẳng hàng ta có: $\frac{GA}{GD}.\frac{FD}{FM}.\frac{EM}{EA}=1\Rightarrow\frac{GA}{GD}=\frac{FM}{FD}.\frac{EA}{EM}$.

Lấy $I\in BC$ sao cho $DI\,//\,AB$.

Khi đó $\Delta FMB\sim\Delta FDI$ nên $\frac{FM}{FD}=\frac{BM}{DI}$.

Do ΔABC cân, $DI\,//\,AB$ nên ΔDCI cân, hay $DI=DC=DE$ suy ra: $\frac{FM}{FD}=\frac{BM}{DI}=\frac{BM}{DE}$.

Do M là trung điểm của BE nên $EM=MB$ do đó

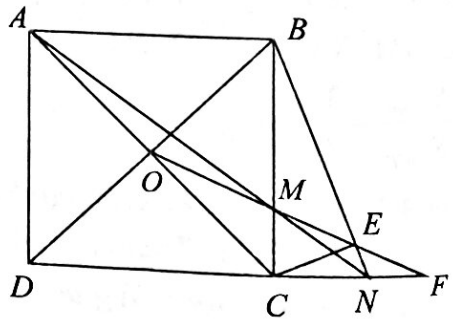
$$\frac{EA}{EM}=\frac{EA}{MB}.$$

Vậy $\frac{GA}{GD}=\frac{FM}{FD}.\frac{EA}{EM}=\frac{BM}{DE}.\frac{EA}{BM}=\frac{EA}{ED}$.

Suy ra EG là phân giác của góc AED.

Thí dụ 5.3. *Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Một đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N, đường thẳng OM cắt BN tại E và cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh CE vuông góc với BN.*

Lời giải.



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle CAN$ với ba điểm O, M, F:

$$\frac{OC}{OA}.\frac{MA}{MN}.\frac{FN}{FC}=1\Rightarrow\frac{MA}{MN}.\frac{FN}{FC}=1\quad(1).$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BCN$ với ba điểm M, E, F thẳng hàng:

$$\frac{MC}{MB}.\frac{EB}{EN}.\frac{FN}{FC}=1\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{MA}{MN}=\frac{MC}{MB}.\frac{EB}{EN}$ (3).

Theo định lý Thales ta có:

$$\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CN}=\frac{BC}{CN} \quad (4).$$

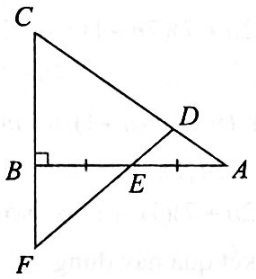
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{MC}{MB}.\frac{EB}{EN}=\frac{BC}{CN}$ hay $\frac{EB}{EN}=\frac{BC}{CN}.\frac{MB}{MC}$ nên $\frac{EB}{EN}=\frac{BC^2}{CN^2}$.

Gọi CH là đường cao trong tam giác BCN, khi đó ta có: $BC^2=BH.BN, CN^2=HN.BN$.

Suy ra: $\frac{HB}{HN}=\frac{BC^2}{CN^2}$ hay $\frac{EB}{EN}=\frac{HB}{HN}$.

Do đó $E\equiv H$ nên $CE\perp BN$.

Thí dụ 5.4. *Cho tam giác ABC với* $\widehat{B}=90^0$, BC = 3cm *và* AB = 4cm. *Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho* AD = 1cm, *gọi E là trung điểm của AB. Kéo dài DE cắt CB tại F. Tính độ dài cạnh BF.*



Lời giải. Áp dụng Menelaus cho $\triangle ABC$ với cát tuyến D, E, F có:

$\frac{EA}{EB}.\frac{FB}{FC}.\frac{DC}{DA}=1$ (1).

Mà $AE=EB=2, DA=1$ và

$FC=FB+BC=BF+3$, $AC=5$, thay tất cả vào (1) ta được:

$$\frac{2}{2}.\frac{BF}{BF+3}.\frac{4}{1}=1\Rightarrow BF=1 \text{ (cm)}.$$

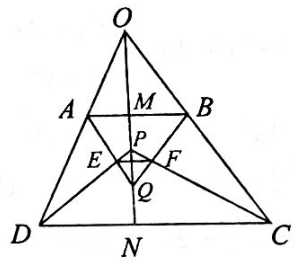
Thí dụ 5.5. *Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Lấy M trên AB, N trên CD và P, Q trên MN sao cho* $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}$, $\widehat{DPC}=\widehat{ABC}$ *và* $\widehat{AQB}=\widehat{BCD}$. *Chứng minh rằng P, Q, B, C cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AD và BC, E là giao điểm của AQ và DP, F là giao điểm của CP và QB. Ta có: $\widehat{EPF}=\widehat{ABC}$ và $\widehat{EQF}=\widehat{BCD}\Rightarrow$ $\widehat{EPF}+\widehat{EQF}=\widehat{ABC}+\widehat{BCD}=180^0$. Do đó tứ giác $PFQE$ nội tiếp. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DOP$ với cát tuyến AEQ và $\triangle COP$ với cát tuyến BFQ ta được:

$$\frac{AD}{AO}.\frac{QO}{QP}.\frac{EP}{ED}=1 \text{ và } \frac{BC}{BO}.\frac{QO}{QP}.\frac{FP}{FC}=1.$$

Suy ra:

$$\frac{AD}{AO}.\frac{QO}{QP}.\frac{EP}{ED}=\frac{BC}{BO}.\frac{QO}{QP}.\frac{FP}{FC}.$$



Vì AB // CD nên

$$\frac{AD}{AO}=\frac{BC}{BO},$$

suy ra $\frac{EP}{ED}=\frac{FP}{FC}$.

Do đó EF // CD // AB, suy ra:

$$\widehat{ABC}=\widehat{ABQ}+\widehat{QBC}=\widehat{EFQ}+\widehat{QBC} \quad (1).$$

Ta lại có:

$$\widehat{ABC}=\widehat{DPC}=\widehat{EPQ}+\widehat{QPC}=\widehat{EFQ}+\widehat{QPC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QBC}=\widehat{QPC}$ nên P, Q, C, B cùng nằm trên một đường tròn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Bá Đang (2015), *279 bài toán hình học phẳng Olympic các nước*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[2] Nguyễn Phú Lộc (chủ biên) (2015), *Giáo trình lịch sử Toán học*, NXB Đại học Cần Thơ.

[3] Tôn Thân (chủ biên) (2016), *Tài liệu chuyên Toán trung học cơ sở Toán 8- tập 2*, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[4] Đặng Đức Trọng, Nguyễn Đức Tấn, Vũ Minh Nghĩa, Nguyễn Anh Hoàng, Nguyễn Đức Hòa (2015), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh khá, giỏi hình học 9*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

[5] Bùi Văn Tuyên (2017) Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 8, NXB Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

[6] *Một số bài toán được sưu tầm trên mạng Internet.*

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2020-2021

Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin - Thời gian làm bài 150 phút

Câu 1. (2 *điểm*) a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}$.

Câu 2. (2,5 *điểm*) a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình $x^2+ax+1=0$, $x^2+bx+1=0$, $x^2+cx+1=0$ có nghiệm.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=(1+2a)(1+2bc).$$

Câu 3. (1,5 *điểm*) a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Câu 4. (3 *điểm*) 1) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA. Vẽ tia Ix vuông góc với AB sao cho Ix cắt nửa đường tròn (O) tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (khác B, C), nối AE cắt CI tại F.

a) Chứng minh $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của hai tia BE, Ix. Giả sử F là trung điểm của IC. Chứng minh hai tam giác AIF, KIB đồng dạng. Tính IK theo R.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho một bảng có kích thước $2n\times 2n$ ô vuông, với n là số nguyên dương. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng đó. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*) ***Giới thiệu***

****

☞ $\Leftrightarrow \dfrac{BF.(BE+EG)}{CF.CE}=\dfrac{FK}{FC}+\dfrac{BF.BE}{CF.CE}$

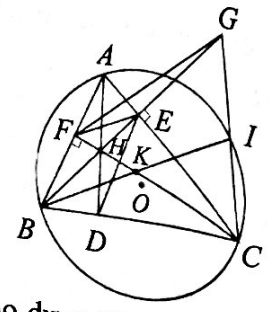
$\Leftrightarrow \dfrac{BF.EG}{CF.CE}=\dfrac{FK}{FC} \Leftrightarrow BF.EG=CE.FK.$

Xét hai tam giác vuông FBK và ECG có $\widehat{F}=\widehat{E}=90^0$ và $\widehat{FBK}=\widehat{ECG}$ (cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AI}$ của đường tròn (O)), do đó:

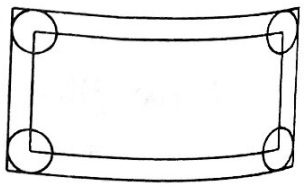
$\Delta FBK \sim \Delta ECG (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BF}{CE}=\dfrac{FK}{EG}$

$\Rightarrow BF.EG=CE.FK.$



Bài 5. Từ 2020 điểm đã cho dựng 2020 hình tròn có tâm là 2020 điểm đó và bán kính R = 1cm. Nhận thấy các hình tròn này đều nằm trong hình chữ nhật mở rộng (dài 151 cm, rộng 42 cm) tích hình chữ nhật mở rộng là: $S_{HCN\text{mở rộng}}=151.42=6342$ (cm^2). Tổng diện tích của 2020 hình tròn có bán kính 1 là: $S_{2020\text{ hình tròn}}=2020.\pi.1^2\approx 6346$ (cm^2).



Ta thấy tâm của 2020 hình tròn này nằm trong hình chữ nhật có kích thước 149cm x 40cm nên 2020 hình tròn này sẽ nằm trong hình chữ nhật có kích thước 151cm x 42cm mà $S_{2020\text{ hình tròn}} > S_{HCN\text{mở rộng}} \Rightarrow$ tồn tại hai hình tròn cắt nhau. Gọi I, J là hai tâm hình tròn cũng là hai điểm trong số 2020 điểm $\Rightarrow IJ<2R=2$ (đpcm).

NGUYỄN THỊ VÂN ANH
(SV K59 ...

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Câu 1. a) ĐK: $x>4$. Với $x\ge 8$ thì $A=\dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$.

Với $4<x<8$ thì $A=\dfrac{4x}{x-4}$.

b) Ta biến đổi: $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ 2(x^2y+2x^2+3y)+x^4+y^2-2x^2-4y=35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ (x^2+y)^2+2(x^2+y)-35=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y=5 \\ x^2+y=-7 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=5-x^2 \\ x^2(5-x^2)+2x^2+3(5-x^2)=15 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-7-x^2 \\ x^2(-7-x^2)+2x^2+3(-7-x^2)=15 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=5-x^2 \\ x^2(4-x^2)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-7-x^2 \\ -x^4-8x^2=36 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm $(x;\,y)$ là: $(0;5)$, $(2;1)$, $(-2;1)$.

Câu 2. a) Ba phương trình bậc hai đã cho có các biệt thức lần lượt là $\Delta_1=a^2-4$, $\Delta_2=b^2-4$, $\Delta_3=c^2-4$. Vì $a+b+c=6$ nên trong ba số a,b,c có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 2. Suy ra trong các số $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ có ít nhất một số không âm. Vậy trong ba phương trình bậc hai đã cho luôn có ít nhất một phương trình có nghiệm.

b) Ta có:

$$A=(1+2a)(1+2bc)\le(1+2a)(1+b^2+c^2)$$

$$=(1+2a)(2-a^2)=\frac{98}{27}-\left(2a+\frac{11}{3}\right)\left(a-\frac{2}{3}\right)^2\le\frac{98}{27}.$$

Đẳng thức $A=\dfrac{98}{27}$ xảy ra khi

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ b=c>0 \\ a=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=c=\dfrac{\sqrt{10}}{6} \end{cases}.$$

Vậy $\max A=\dfrac{98}{27}$ đạt được khi $a=\dfrac{2}{3}$, $b=c=\dfrac{\sqrt{10}}{6}$.

Câu 3. a) Ta thấy

$$n(2n+7)(7n+1)=6n(2n^2+8n+1)$$
$$+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2),$$

mà $(n-1)n(n+1)\,\vdots\,6$, $n(n+1)(n+2)\,\vdots\,6$ (tích của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6) nên $n(2n+7)(7n+1)\,\vdots\,6$, với mọi số tự nhiên n (thực ra kết quả này đúng với mọi số nguyên n).

b) Giả sử $(a;\,b)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn: $(4a+1;4b-1)=1$ và $16ab+1\,\vdots\,a+b$.

Nếu $4a+1$ và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì $4b-1=4(a+b)-(4a+1)\,\vdots\,p$, điều này mâu thuẫn với $(4a+1;4b-1)=1$.

Do đó $(4a+1;\,a+b)=1$. Từ đây và $(4a+1)(4b+1)=(16ab+1)+4(a+b)\,\vdots\,a+b$ suy ra $4b+1\,\vdots\,a+b$. Ta lại có $4b+1$ lẻ và $4b+1<4(a+b)$ nên $4b+1=a+b$ hoặc $4b+1=3(a+b)$. Dẫn tới $a=3b+1$ hoặc $b=3a-1$.

Ngược lại, với $a=3b+1$ (b nguyên dương) hoặc $b=3a-1$ (a nguyên dương) thì

$$16ab+1=(4a+1)(4b+1)-4(a+b)$$
$$=(4a+1).k(a+b)-4(a+b)\vdots a+b$$

($k=1$ hoặc $k=3$). Nếu $4a+1$ và $4b-1$ cùng chia hết cho số nguyên tố p thì p lẻ và

$$4(a+b)=(4a+1)+(4b-1)\vdots p \Rightarrow a+b\vdots p$$

$\Rightarrow 4b+1=k(a+b)\vdots p$ ($k=1$ hoặc $k=3$).

Ta có $(4b+1)-(4b-1)=2\vdots p$, điều này vô lí vì p là số nguyên tố lẻ. Do vậy $(4a+1;4b-1)=1$.

Chứng tỏ các cặp số $(a;b)$ mà $a=3b+1$ (b nguyên dương) hoặc $b=3a-1$ (a nguyên dương) thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

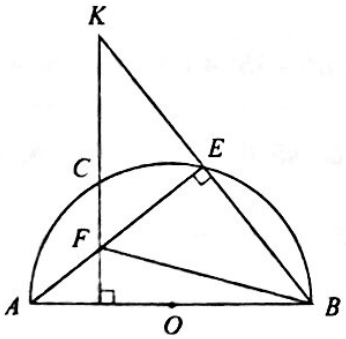
Vậy tập tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn $(4a+1;4b-1)=1$ và $16ab+1\vdots a+b$ là $\{(3c+1;c),(c;3c-1)|c\in\mathbb{N}^*\}$.

Câu 4. 1) a) Vì $\widehat{FEB}+\widehat{FIB}=180°$ nên tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn đường kính BF.

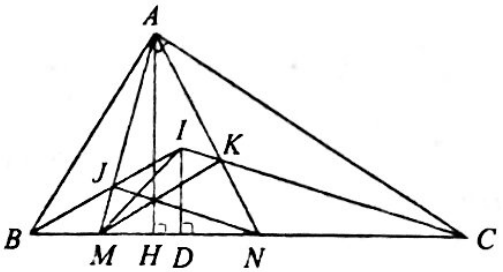
b) Vì $\widehat{AFI}=\widehat{KBI}$ và $\widehat{AIF}=\widehat{KIB}$ nên hai tam giác AIF, KIB đồng dạng. Suy ra $\frac{AI}{IK}=\frac{IF}{IB}$.

Ta có $CI^2=IA.IB=\frac{3}{4}R^2 \Rightarrow CI=\frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow IF=\frac{\sqrt{3}}{4}R$

Vậy $IK=\frac{AI.IB}{IF}=\sqrt{3}R$.



2) Gọi M,N lần lượt là giao điểm của AJ,AK với BC. Lấy $D\in BC$ sao cho $ID\perp BC$.



Ta có: $\widehat{BAN}=90°-\widehat{NAC}=90°-\widehat{NAH}=\widehat{BNA}$ nên ABN là tam giác cân tại B. Tương tự, ACM là tam giác cân tại C. Do đó $IA=IM=IN$. Dẫn tới D là trung điểm của MN. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$MN=BN+CM-BC=AB+AC-BC$$
$$=2r.\cot\frac{A}{2}=2r=2.ID$$

nên MIN là tam giác vuông tại I. Vì CK là đường trung trực của đoạn thẳng AM nên

$$\widehat{KMC}=\widehat{KAC}=\frac{1}{2}\widehat{HAC}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\widehat{IBC},$$

suy ra $BI//MK$. Mà BI là đường trung trực của đoạn thẳng AN nên $BI\perp AN$. Do đó $MK\perp AN$. Ta cũng chứng minh được $NJ\perp AM$. Như vậy ba điểm I,J,K nằm trên đường tròn đường kính MN có bán kính là r. Điều này chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 5. Chọn ra n hàng có chứa nhiều ô được đánh dấu nhất. Ta sẽ chứng minh số ô được đánh dấu còn lại (không nằm trong các hàng vừa chọn) nhỏ hơn hoặc bằng n. Thật vậy, nếu số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng $n+1$, mà những ô này đều thuộc n hàng chưa chọn, thì theo nguyên lí Drichlet sẽ có ít nhất 1 hàng (trong n hàng chưa chọn) có chứa ít nhất 2 ô được đánh dấu. Từ đây và theo cách chọn ra n hàng ở trên thì mỗi hàng trong n đã chọn đó đều chứa ít nhất 2 ô đánh dấu. Dẫn tới số ô đánh dấu sẽ lớn hơn hoặc bằng $2n+(n+1)=3n+1$ (điều này mâu thuẫn với giả thiết có $3n$ ô được đánh dấu). Vậy, sau khi chọn ra n hàng có chứa nhiều ô được đánh dấu nhất thì số ô đánh dấu còn lại (không nằm trong các hàng vừa chọn) nhỏ hơn hoặc bằng n. Bây giờ ta chỉ việc chọn ra n cột chứa chúng. Bài toán được chứng minh.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*) ***Giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2020-2021

MÔN THI: TOÁN CHUYÊN *(Thời gian làm bài 150 phút)*

Câu 1. (1 *điểm*) Cho biểu thức

$$A=\left(1-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a+1}\right)$$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi $a=2021-2\sqrt{2020}$

Câu 2. (2 *điểm*)

a) Giải phương trình:

$$2x^2-3x\sqrt{5x-4}+5x-4=0.$$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$

Câu 3. (2 *điểm*)

a) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d): $y=2x-m$ cắt parabol (P): $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hai phương trình $x^2+mx+8=0$ và phương trình $x^2+x+m=0$ có ít nhất một nghiệm chung.

c) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực khác 0 thì tồn tại ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm:

$$4ax^2+2(b+c)x+c=0;$$

$$4bx^2+2(c+a)x+a=0;$$

$$4cx^2+2(a+b)x+b=0\ (3).$$

Câu 4. (3,5 *điểm*) Cho tam giác nhọn ABC với $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H.

a) Chứng minh các tứ giác $BFHD$, $ABDE$ nội tiếp và H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác $DFEM$ nội tiếp.

c) Tia MH cắt (O) tại I. Chứng minh rằng các đường thẳng AI, EF, BC đồng quy.

Câu 5. (1 *điểm*)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$$y^2+2y=4x^2y+7x+7.$$

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b) thỏa mãn b^2+3a chia hết cho a^2b.

Câu 6. (1 *điểm*)

a) Cho a, b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$;

ii) $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}(a+5b+2)$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$$

LÊ VĂN VINH
(GV THPT TX. Phước Long, Bình Phước) Giới thiệu

ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

Một trong những phương pháp giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức (BĐT), tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (GTLN-GTNN), tính tích phân,... là chuyển các bài toán đại số về các bài toán lượng giác (phương pháp lượng giác hóa). Nội dung phương pháp này là từ các bài toán không chứa các yếu tố lượng giác, bằng phép biến đổi phù hợp ta có thể chuyển bài toán đại số sang bài toán lượng giác nhằm giúp ta tìm được lời giải ngắn gọn, độc đáo và thú vị. Trong chứng minh BĐT và tìm GTLN-GTNN, các bài toán có biến ràng buộc bởi một hệ thức cho trước thoạt nhìn ta nghĩ đó là bài toán đại số thuần túy nhưng nếu biết biến đổi linh hoạt điều kiện để chuyển bài toán về dạng lượng giác thì cách giải sẽ trở nên đơn giản hơn. Bài viết này giúp bạn đọc nhìn lại các bài toán chứng minh BĐT và tìm GTLN-GTNN (một loại bài tập khó trong chương trình) từ sách giáo khoa (SGK), sách bài tập (SBT) phổ thông đến các bài toán trong kỳ thi tuyển sinh Đại học (TS ĐH), kỳ thi học sinh giỏi môn toán trong và ngoài nước dưới con mắt lượng giác cũng như cách tạo ra các BĐT đại số từ những BĐT lượng giác.

I. Một số kiến thức sử dụng trong bài viết

1. Sử dụng dấu hiệu trong bài toán thích hợp để lượng giác hóa

Nếu trong bài toán có các biểu thức thường gặp

$\sqrt{a^2-x^2}$, đặt: $\left[\begin{array}{l} x=a\cos\alpha \ (0\le\alpha\le\pi) \\ x=a\sin\alpha \ \left(-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$;

$\sqrt{x^2-a^2}$, đặt: $x=\dfrac{a}{\cos\alpha}$ $\left(0\le\alpha<\frac{\pi}{2} \vee \pi\le\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$;

$\sqrt{a^2+x^2}$, đặt: $x=a\tan\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$;

$\dfrac{x+y}{1-xy}$; $\dfrac{x-y}{1+xy}$; $\dfrac{2x}{1-x^2}$; $\dfrac{2x}{1-x^2}$; $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

đặt: $\begin{cases} x=\tan\alpha \\ y=\tan\beta \end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right)$;

Nếu x thỏa mãn $|x|\le m$ $(m>0)$ thì đặt:

$$\left[\begin{array}{l} x=m\sin\alpha, \alpha\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]. \\ x=m\cos\alpha, \alpha\in[0;\pi] \end{array}\right.$$

Nếu x, y thỏa mãn $a^2x^2+b^2y^2=c^2$ $(a,b,c>0)$

thì đặt: $\begin{cases} x=\dfrac{c}{a}\sin\alpha \\ y=\dfrac{c}{b}\cos\alpha \end{cases}$ $(0\le\alpha\le 2\pi)$.

2. Nếu bài toán cho x, y, z dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$ hoặc $x+y+z=xyz$ hoặc $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ hoặc biến đổi đưa về ràng buộc đó thì sử dụng các kết quả sau kết hợp với các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

Kết quả 1. *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$ khi đó:*

1.1. *Tồn tại tam giác ABC sao cho*

$$x=\tan\frac{A}{2};\ y=\tan\frac{B}{2};\ z=\tan\frac{C}{2}.$$

1.2. *Tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho*

$$x=\cot A;\ y=\cot B;\ z=\cot C.$$

Chứng minh. 1.1) Ta có: $x,y,z>0$ $\Rightarrow \exists A,B,C\in(0;\pi)$ sao cho $x=\tan\frac{A}{2}$; $y=\tan\frac{B}{2}$; $z=\tan\frac{C}{2}$. Khi đó:

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}=\cot\frac{B+C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right).$$

Vì $A,B,C\in(0;\pi)$ nên $A+B+C=\pi$. Suy ra A,B,C là số đo ba góc tam giác.

Chứng minh 1.2 tương tự (bạn đọc tự chứng minh).

Kết quả 2. *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$, khi đó:*

2.1. *Tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho* $x=\tan A$; $y=\tan B$; $z=\tan C$.

2.2. *Tồn tại tam giác ABC sao cho* $x=\cot\frac{A}{2}$; $y=\cot\frac{B}{2}$; $z=\cot\frac{C}{2}$.

Chứng minh. 2.1) Ta có: $x,y,z>0\Rightarrow$ $\exists A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x=\tan A$; $y=\tan B$; $z=\tan C$. Khi đó:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\tan(\pi-C)$$

$$\Leftrightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=\pi \text{ vì } A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Suy ra A,B,C là số đo ba góc tam giác.

Chứng minh 2.2 tương tự (bạn đọc tự chứng minh).

Kết quả 3. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$, khi đó:*

3.1. *Tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho* $x=\cos A$; $y=\cos B$; $z=\cos C$.

3.2. *Tồn tại tam giác ABC sao cho* $x=\sin\frac{A}{2}$; $y=\sin\frac{B}{2}$; $z=\sin\frac{C}{2}$.

Chứng minh. 3.1) Ta có: $x,y,z\in(0;1)\Rightarrow$ $\exists A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x=\cos A$; $y=\cos B$; $z=\cos C$. Khi đó:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C+\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]\cos C=0$$

$$\Leftrightarrow \cos C\left[\cos C+\cos(A+B)\right]+\left[\cos C+\cos(A+B)\right]\cos(A-B)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos C+\cos(A-B)\right]\left[\cos C+\cos(A+B)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B+C}{2}.\cos\frac{A+B-C}{2}.\cos\frac{B+C-A}{2}.\cos\frac{C+A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B+C}{2}=0$$

$$\left(\cos\frac{A+B-C}{2},\cos\frac{B+C-A}{2},\cos\frac{C+A-B}{2}>0\right)$$

Vì $A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $A+B+C=\pi$. Suy ra A,B,C là số đo ba góc tam giác.

Chứng minh 3.2 (bạn đọc tự chứng minh).

2. Một số thí dụ

Thí dụ 1. 1) *Cho $x^2+y^2=1$, chứng minh rằng:* $|x+2y|\le\sqrt{5}$.

2) *Cho x,y thỏa mãn $3x+4y=7$. Chứng minh rằng:* $x^2+y^2\ge\frac{49}{25}$.

(Bài tập 4.23, trang 105, SBT Đại số 10 nâng cao)

Lời giải. 1) Ta có: $x^2+y^2=1$ do đó đặt $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $(t\in[0;2\pi])$. Ta có:

$$|x+2y|=|\cos t+2\sin t|=\sqrt{5}\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\cos t+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\right|$$

$= \sqrt{5}|\sin(\alpha+t)| \le \sqrt{5}$ (với $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$).

2) Ta có:

$$1 = 3x + 4y = 5\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{3}{5}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{4}{5}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Đặt $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos\alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$ và $\begin{cases} \sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ với

$\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$. Khi đó:

$$1 = 3x + 4y = 5\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{3}{5}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{4}{5}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= 5\sqrt{x^2+y^2}.\cos(\alpha-\beta) \le 5\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{1}{25}.$$

Thí dụ 2. 1) *Tìm GTLN và GTNN của biểu thức*

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}.$$

(Bài tập 17, trang 112, SGK Đại số 10 nâng cao)

2) *Tìm GTLN-GTNN của hàm số*

$$f(x) = x + \sqrt{4-x^2}.$$

(Bài tập 27b, trang 24, SGK Giải tích 12 nâng cao)

Lời giải. 1) ĐK: $1 \le x \le 4$.

Ta có: $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + \left(\sqrt{4-x}\right)^2 = 3$, do đó đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{3}\cos\alpha \\ \sqrt{4-x} = \sqrt{3}\sin\alpha \end{cases} \quad \left(\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Khi đó: $A = \sqrt{3}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \sqrt{6}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Vì

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow \sqrt{3} \le A \le \sqrt{6}.$$

Vậy $\max A = \sqrt{6}$ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $x = \frac{5}{2}$;

$\min A = \sqrt{3}$ khi $\alpha = 0$ hay $x = 4$.

2)TXĐ: $D = [-2; 2]$.

Đặt $x = 2\sin\alpha$ $\left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, ta có:

$$f(\alpha) = 2\sin\alpha + \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$$

$$= 2\sin\alpha + 2\cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vì $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$\Rightarrow -2 \le f(\alpha) \le 2\sqrt{2}.$$

Vậy $\max f(x) = \max f(\alpha) = 2\sqrt{2}$ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $x = \sqrt{2}$; $\min f(x) = \min f(\alpha) = -2$ khi $\alpha = \frac{-\pi}{2}$ hay $x = -2$.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng nếu $|a| \le 1$ và n là số nguyên dương ta có: $(1+a)^n + (1-a)^n \le 2^n$.*

(TS ĐH Kiến trúc TP. Hồ Chí Minh năm 1993)

Lời giải. Đặt $a = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, khi đó:

$$(1+a)^n + (1-a)^n = (1+\cos t)^n + (1-\cos t)^n$$

$$= 2^n\left(\cos^{2n}\frac{t}{2} + \sin^{2n}\frac{t}{2}\right) \le 2^n\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) = 2^n$$

(vì $\cos^2\frac{t}{2} \le 1 \Rightarrow \cos^2\frac{t}{2} \le \cos^2\frac{t}{2}$;

$\sin^2\frac{t}{2} \le 1 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} \le \sin^2\frac{t}{2}$)

Thí dụ 4. *Cho hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{1-x^2} - a$. Tìm a để hàm số không nhận giá trị dương với mọi x thuộc tập xác định.*

(TS ĐH Y Hà Nội năm 1996)

Lời giải. TXĐ: $D = [-1; 1]$. Đặt $x = \cos\alpha$ ($\alpha \in [0; \pi]$), ta có:

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha} - a$$

$$= \cos\alpha + \sin\alpha - a = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - a$$

$f(x) \le 0, \forall x$ khi $f(\alpha) \le 0, \forall \alpha \in [0; \pi]$

hay $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - a \le 0, \forall \alpha \in [0; \pi]$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{a}{\sqrt{2}}, \forall \alpha \in [0; \pi] \Leftrightarrow 1 \le \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $a \ge \sqrt{2}$.

Thí dụ 5. *Trong các nghiệm (x,y,z,t) của hệ* $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z^2+t^2=16 \\ xt+yz\ge 12 \end{cases}$, *tìm nghiệm để* $P=x+z$ *lớn nhất?*

(TS ĐH khối A năm 1987)

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z^2+t^2=16 \end{cases}$, do đó đặt:

$\begin{cases} x=3\cos\alpha \\ y=3\sin\alpha \end{cases}$ và $\begin{cases} z=4\cos\beta \\ t=4\sin\beta \end{cases}$ $(\alpha,\beta\in[0;2\pi])$.

Lại có: $xt+yz=12\sin\beta\cos\alpha+12\sin\alpha\cos\beta$

$=12\sin(\alpha+\beta)\ge 12 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta)=1$

$\Leftrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \cos\beta=\sin\alpha.$

Khi đó: $x+z=3\cos\alpha+4\cos\beta = 3\cos\alpha+4\sin\alpha$

$=5\left(\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\sin\alpha\right)=5\sin(\gamma+\alpha)\le 5$

(với $\sin\gamma=\frac{3}{5};\cos\gamma=\frac{4}{5}$)

$\max(x+z)=5 \Leftrightarrow \sin(\gamma+\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\gamma+n2\pi.$

Ta tính được: $x=3\cos\alpha=3\sin\gamma=\frac{9}{5};$

$y=3\sin\alpha=3\cos\gamma=\frac{12}{5};$

$z=4\cos\beta=4\sin\alpha=4\cos\gamma=\frac{16}{5};$

$t=4\sin\beta=4\cos\alpha=4\sin\gamma=\frac{12}{5}.$

Vậy $(x,y,z,t)=\left(\frac{9}{5};\frac{12}{5};\frac{16}{6};\frac{12}{5}\right).$

Thí dụ 6. *Cho* $\begin{cases} a,b\ge 0 \\ a+b=1 \end{cases}$. *Chứng minh rằng:*

$\frac{2}{3}\le\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\le 1$. *Dấu bằng xảy ra khi nào?*

(TS ĐH Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh 1996)

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a=\cos^2\alpha \\ b=\sin^2\alpha \end{cases}$ $\left(\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Khi đó: $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$

$=\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{2+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}\le 1.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha=0 \Rightarrow (a;b)\in\{(0;1);(1;0)\}$

Lại có: $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}-\frac{2}{3}=\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}-\frac{2}{3}$

$=\frac{2-2\sin^2 2\alpha}{3\left(2+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)}\ge 0 \Rightarrow \frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\ge\frac{2}{3}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha=1 \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$

Thí dụ 7. *Cho* $x,y>0$ *với* $x+y\le 1$. *Tìm GTNN của biểu thức* $Q=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy.$

(TS ĐH Ngoại thương 1995)

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x=m\cos^2\alpha \\ y=m\sin^2\alpha \end{cases}$ $\left(\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],m>0\right)$

$\Rightarrow m\le 1$. Ta có: $Q=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{4xy}+4xy+\frac{1}{4xy}$

$\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{4xy}+2$

$\Rightarrow Q\ge\frac{1}{m^2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)}+\frac{3}{4m^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+2$

$\Rightarrow Q\ge\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}+\frac{3}{\sin^2 2\alpha}+2$

$=\frac{6-\sin^2 2\alpha}{(2-\sin^2 2\alpha)\sin^2 2\alpha}+2\ge 8-\sin^2 2\alpha\ge 7.$

Do đó $\min Q=7 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ \sin 2\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$

Thí dụ 8. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x,y,z thỏa mãn* $x(x+y+z)=3yz$ (1) *thì*

$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3$ (*)

(TS ĐH khối A năm 2009)

Lời giải. Xét a,b,c dương thỏa mãn $\begin{cases} a=y+z \\ b=z+x \\ c=x+y \end{cases}$

$\Rightarrow a,b,c$ là số đo 3 cạnh của ΔABC và

$\begin{cases} x=\dfrac{b+c-a}{2} \\ y=\dfrac{a+c-b}{2} \\ z=\dfrac{a+b-c}{2} \end{cases}$. Khi đó (1) trở thành:

$$\frac{b+c-a}{2}.\frac{a+b+c}{2}=3.\frac{a+c-b}{2}.\frac{a+b-c}{2}$$

$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc.$

Lại có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ nên $\cos A=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$. Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow b^3+c^3+3abc\le 5a^3 \Leftrightarrow a(b+c)+3bc\le 5a^2$

$\Leftrightarrow \sin A(\sin B+\sin C)+3\sin B\sin C\le 5\sin^2 A$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)+12\sin B\sin C\le 15.$

Ta chứng minh được: $\sin B+\sin C\le 2\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{3}.$

$\sin B\sin C\le\dfrac{(\sin B+\sin C)^2}{4}\le\dfrac{3}{4}$, suy ra đpcm.

Thí dụ 9. *Cho x, y, z > 0 thỏa mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng* $x^2+y^2+z^2 2\sqrt{3xyz}\le 1.$

(Poland 1999)

Lời giải. Ta có: $x+y+z=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{yz}{x}}.\sqrt{\dfrac{zx}{y}}+\sqrt{\dfrac{zx}{y}}.\sqrt{\dfrac{xy}{z}}+\sqrt{\dfrac{xy}{z}}.\sqrt{\dfrac{yz}{x}}=1.$

Sử dụng kết quả 1.1, tồn tại tam giác ABC thỏa mãn: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{yz}{x}}=\tan\dfrac{A}{2} \\ \sqrt{\dfrac{zx}{y}}=\tan\dfrac{B}{2} \\ \sqrt{\dfrac{xy}{z}}=\tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$ $\left(A,B,C\in(0;\pi)\right)$.

Khi đó, BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}$$
$$+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$
$$\le 1+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\ge\sqrt{3}.$

Đây là BĐT cơ bản trong tam giác, bạn đọc tự chứng minh.

Thí dụ 10. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc+a+c=b$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}.$$

(Việt Nam 1998)

Lời giải. Ta có: $abc+a+c=b\Leftrightarrow ac+a.\dfrac{1}{b}+c.\dfrac{1}{b}=1.$

Sử dụng kết quả 1.1, tồn tại tam giác ABC với $a=\tan\dfrac{A}{2},\ \dfrac{1}{b}=\tan\dfrac{B}{2},\ c=\tan\dfrac{C}{2}.$

Khi đó: $P=\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-\dfrac{2}{1+\cot^2\frac{B}{2}}+\dfrac{3}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$

$=2\cos^2\dfrac{A}{2}-2\sin^2\dfrac{B}{2}+3\cos^2\dfrac{C}{2}$

$=-3\sin^2\dfrac{C}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+3$

$=3+\dfrac{1}{3}\cos^2\dfrac{A-B}{2}-3\left(\sin\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{A-B}{2}\right)^2\le\dfrac{10}{3}.$

$\max P=\dfrac{10}{3}$ khi $\begin{cases} A=B \\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ hay $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2};b=\sqrt{2};$

$c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Thí dụ 11. *Cho ba số thực dương x,y,z thay đổi thỏa mãn $xy=1+z(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\dfrac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)}+\dfrac{z}{1+z^2}.$

(Đề thi HSG tỉnh Hưng Yên năm 2014)

Lời giải. Ta có:

$$xy = 1 + z(x+y) \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$, ta có:

$$c = abc + a + b \Leftrightarrow ab + b.\frac{1}{c} + a.\frac{1}{c} = 1.$$

Theo kết quả 1.1, ta có tam giác ABC thỏa mãn $a = \tan\frac{A}{2}$, $b = \tan\frac{B}{2}$, $\frac{1}{c} = \tan\frac{C}{2}$ $(A, B, C \in (0;\pi))$.

Khi đó $P = \frac{2(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{c}{1+c^2}$

$$\le \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{c}{1+c^2}$$

$$= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}.$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$$

$$= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sin C$$

$$\Rightarrow P \le 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C).$$

Ta có: $\cos A + \cos B \le 2\cos\frac{A+B}{2}$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B$);

$$\sin C + \sin\frac{\pi}{3} \le 2\cos\frac{C - \frac{\pi}{3}}{2}$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2\pi}{3}$);

$$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{C - \frac{\pi}{3}}{2} \le 2\cos\frac{A+B+C-\frac{\pi}{3}}{4} = \sqrt{3}$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos\frac{A+B-C+\frac{\pi}{3}}{4} = 1$)

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó: $P \le \frac{4+3\sqrt{3}}{4}$; dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \text{ tức là khi } \begin{cases} a = b = 2 - \sqrt{3} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

hay $\begin{cases} x = y = 2 + \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy $\max P = \frac{4+3\sqrt{3}}{4}$ khi $\begin{cases} x = y = 2 + \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$.

Thí dụ 12. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn hệ thức: a + b + c + 1 = 4abc. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \le 3.$$

Lời giải. Giả thiết tương đương với: $\frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4abc} = 1$. Với x, y, z dương, ta đặt: $x = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{ca}}$, $z = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$.

Ta đưa giả thiết trở thành $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Sử dụng kết quả 3.1, tồn tại tam giác nhọn ABC thỏa mãn: $\begin{cases} x = \cos A \\ y = \cos B \\ z = \cos C \end{cases}$.

BĐT cần chứng minh tương đương với $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$. Đây là BĐT cơ bản trong tam giác, bạn đọc tự chứng minh.

Thí dụ 13. *Cho x, y, z > 1 thỏa mãn hệ thức* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

(Iran 1997)

Lời giải. Với $a, b, c > 0$, ta đặt: $\begin{cases} x = a+1 \\ y = b+1 \\ z = c+1 \end{cases}$.

Khi đó, giả thiết tương đương với

$$ab + bc + ca + 2abc = 1$$

và với BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{a+b+c+3}.$$

Theo kết quả 3.2, tồn tại tam giác ABC sao cho:

$$ab = \sin^2\frac{A}{2},\ bc = \sin^2\frac{B}{2},\ ca = \sin^2\frac{C}{2}.$$

Khi đó, BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}.$$

Đây là BĐT cơ bản trong tam giác, bạn đọc tự chứng minh.

Thí dụ 14. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn ab + bc + ca = abc. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) \ge \frac{4\sqrt{3}-3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có: $ab + bc + ca = abc$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Sử dụng kết quả 2.1, tồn tại tam giác ABC nhọn thỏa mãn $\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan A,\ \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan B,\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan C,$

$A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó:

$$P = \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{1}{1+\frac{ab}{c}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{1+\tan^2 B} + \frac{1}{1+\tan^2 C}\right)$$

$$= \cos^2 A + \sqrt{3}(\cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C)\right] + \frac{1}{2} + \sqrt{3}.$$

Xét $Q = \cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C)$

$$= 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$= 2\cos^2 A - 1 - 2\sqrt{3}\cos A\cos(B-C)$$

$$= 2\left[\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C)\right]^2 - \frac{3}{2}\cos^2(B-C) - 1$$

$$\ge -\frac{3}{2}\cos^2(B-C) - 1 \ge -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{4\sqrt{3}-3}{4}.$$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ B = C = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 + 2\sqrt{3} \\ b = c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Thí dụ 15. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 6$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{a+36bc}.\frac{b}{b+9ca}.\sqrt{\frac{c}{c+4ab}} \le \frac{1}{27}. \quad (1)$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$6\sqrt{\frac{bc}{a}}.3\sqrt{\frac{ca}{b}}.2\sqrt{\frac{ab}{c}} = 6\sqrt{\frac{bc}{a}} + 3\sqrt{\frac{ca}{b}} + 2\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Theo kết quả 2.2, tồn tại A, B, C là ba góc tam giác thỏa mãn

$$\frac{36bc}{a} = \cot^2\frac{A}{2},\ \frac{9ca}{b} = \cot^2\frac{B}{2},\ \frac{4ab}{c} = \cot^2\frac{C}{2},$$

$(A, B, C \in (0; \pi))$. Khi đó:

$$VT(1) = \frac{1}{1+\frac{36bc}{a}}\frac{1}{1+\frac{9ca}{b}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4ab}{c}}}$$

$$= \frac{1}{1+\cot^2\frac{A}{2}}.\frac{1}{1+\cot^2\frac{B}{2}}.\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\frac{C}{2}}}$$

$$= \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$\le \frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)2\sin\frac{C}{2}$$

$$\le \frac{1}{8}\left(\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(2\sin\frac{C}{2}\right)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

III. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các kết quả 1, 2, 3, chẳng hạn kết quả 1, tạo các bài toán bất đẳng thức đại số mới

1) Sử dụng BĐT $\cos A+\cos B\le 2\sin\frac{C}{2}$ ta có bài toán:

Bài toán 1. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}\le\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

2) Sử dụng BĐT $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ta có bài toán:

Bài toán 2. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+y^2}\le\frac{3}{2}.$

3) Sử dụng BĐT $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ta có bài toán:

Bài toán 3. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{2z}{1+z^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4) Sử dụng BĐT

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2},$$

ta có bài toán:

Bài toán 4. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}\le\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

5) Sử dụng BĐT $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$, tam giác ABC nhọn, ta có bài toán:

Bài toán 5. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$ và $xyz+x+y+z<2$, chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}\ge 3\sqrt{3}.$$

Từ các bất đẳng thức lượng giác khó hơn ta có thể xây dựng các BĐT đại số khó hơn:

6) Từ BĐT :

$$\frac{35}{4}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2},$$

ta có bài toán:

Bài toán 6. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{35}{4}+\frac{2xyz}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}.$$

7) Từ BĐT

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\ge\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

ta có bài toán:

Bài toán 7. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2$$

8) Sử dụng BĐT

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}\ge\frac{27}{2}.$$

ta có bài toán:

Bài toán 8. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}+\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{y^2})}+\sqrt{(1+\frac{1}{y^2})(1+\frac{1}{z^2})}+\sqrt{(1+\frac{1}{z^2})(1+\frac{1}{x^2})}\ge\frac{27}{2}$$

9) Sử dụng BĐT $\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)>4,$

ta có bài toán:

Bài toán 9. Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+y^2})(1+\sqrt{1+z^2})}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}>4.$$

Việc khai thác tiếp các bài toán tương tự trên, khai thác kết qủa 2, 3 kết hợp các BĐT trong tam giác có thể tạo nhiều bài toán khác cũng như chứng minh các bài toán trên bằng đại số xin dành cho bạn đọc.

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho $x^2+y^2=1$, chứng minh rằng: $|x+y|\le\sqrt{2}$.

(Bài tập 20, trang 112, SGK Đại số 10 nâng cao)

HD: $|x+y| = |\cos t + \sin t| = \left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}.$

Bài 2. Tìm GTNN của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

(*Bài 4.20, trang 105, SBT Đại số 10 nâng cao*)

HD: Đặt $\sqrt{x} = \sin\alpha$ $\left(\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$,

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{2}{\cos^2\alpha} = 3 + 2\tan^2\alpha + \cot^2\alpha \ge 3 + 2\sqrt{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số a, b ta đều có: $-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$.

HD: Đặt: $a = \tan\alpha$, $b = \tan\beta$ với $\alpha, \beta \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 4. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) \ge \frac{17}{2}.$$

HD: Ta có: $x + y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = 1$,

đặt: $\sqrt{x} = \cos a$, $\sqrt{y} = \sin b$.

Bài 5. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$.

HD: Viết lại $y = \frac{1+x^4}{1+2x^2+x^4} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2$.

Đặt $x = \tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, tìm được :

$$\max y = 1;\ \min y = \frac{1}{2}.$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \le \frac{9}{4}.$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \le \frac{3}{2}$.

(*Iran 2005*)

HD: Giả thiết tương đương với

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + (2a).(2b).(2c) = 1.$$

Sử dụng kết quả 3.1, tồn tại tam giác nhọn ABC thỏa mãn $bc = \cos A$, $ca = \cos B$, $ab = \cos C$; $\left(A, B, C \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Do đó:

$$ab + bc + ca \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

(BĐT cơ bản trong tam giác).

Bài 8. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$

Chứng minh rằng: $abc \ge 1$.

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3}\left(\frac{bc}{a+bc} - \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\right) + \frac{\sqrt{abc}}{b+ca} \ge \frac{2\sqrt{3}-5}{4}.$$

Bài 10. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{3c}{1+c^2} \le \sqrt{10}$.

Bài 11. Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{x}-1}.\sqrt{\frac{1}{y}-1} + \sqrt{\frac{1}{y}-1}.\sqrt{\frac{1}{z}-1} + \sqrt{\frac{1}{z}-1}.\sqrt{\frac{1}{x}-1} \ge 6.$$

(*Ukraine 2005*)

Bài 12. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $abc + a + b = c$. Tìm GTLN của $Q = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}$.

Bài 13. Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca).$$

(*APMO 2004*)

Bài 14. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$0 \le ab + bc + ca - abc \le 2.$$

(*USA 2001*)

Bài 15. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + bcd + cda + dab = 16.$$

Chứng minh rằng:

$$3(a + b + c + d) > 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

(*Việt Nam 1996*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/522 (Lớp 6). Chứng tỏ rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có: $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ chia hết cho 7.

NGUYỄN ANH THUẬN
(GV quận Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/522 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), đường cao AD. Vẽ các điểm M và N sao cho AB là đường trung trực của MD, AC là đường trung trung trực của ND. MN cắt AB tại E và cắt AC tại F. BF và CE cắt nhau tại H. Gọi I, K, O theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH và BC. Chứng minh

$$\widehat{EIF} = \widehat{EKF} = \widehat{EDF} = \widehat{EOF}.$$

ĐÀO QUỐC CHUNG
(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T3/522. Cho các tập hợp

$A = \{x \in \mathbb{N}:\ x = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \le 668\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N}:\ x = 5k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \le 668\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N}:\ x \in A$ và $x \in B\}$.

Hỏi tập hợp C có bao nhiêu phần tử ?

HUỲNH QUANG LÂU
(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T4/522. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^0$, đường cao AH. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Trên tia IH lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Tính số đo góc $\widehat{BKC}$.

LỤC BÌNH
(GV trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T5/522. Cho ba số thực a, b, c sao cho $ab \ne 0$ và thỏa mãn $2a(a^2 + b^2) = bc$ và $b(a^2 + 15b^2) = 6ac$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a^4 + 6a^2b^2 + 15b^4}{15a^4 + b^4}.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/522. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \sqrt{5 - x} + \sqrt{23 + x - 6y} = 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T7/522. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $25a + 45b + 52c \le 95$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1}.$$

LÊ HOÀI BẮC
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đức, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T8/522. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M là điểm đối xứng của F qua B và N là điểm đối xứng của E qua C. Đường cao DH của tam giác DEF cắt MN tại G. Chứng minh $DH = DG$.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/522. Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) \le 36(xy + yz + zx).$$

TRẦN TIẾN MẠNH
(Khối Quang Trung, P.Vinh Tân, TP.Vinh, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/522. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 16, u_2 = 288 \\ u_{n+2} = 18u_{n+1} - 17u_n, \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

Tìm số n nhỏ nhất sao cho u_n chia hết cho 2^{2020}.

PHAN CHIẾN THẮNG
(Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T11/522. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $f\left(\frac{f(n)}{n^{2020}}\right) = n^{2021}$, với mọi nguyên dương n.

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

Bài T12/522. Cho tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua trung điểm M của BC. AA' cắt đường tròn $(A'BC)$ tại điểm thứ hai K. Gọi I, J lần lượt là tâm các đường tròn (KAB) và (KAC). IJ cắt BC tại S. Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(*GV THPT chuyên Hà Giang*)
TRẦN ĐẠI LỘ
(*GV THPT chuyên Điện Biên*)

Bài L1/520. Sóng cơ truyền từ một nguồn điểm trên mặt nước với bước sóng 12 cm và tốc độ 6 m/s. Hai điểm A, B cùng nằm trên một phương truyền sóng cách nhau 2 cm. Tại thời điểm t, khi li độ dao động tại A là $u_A = +2$ mm thì li độ dao động tại B là $u_B = -2$ mm. Biết sóng truyền từ B đến A. Điểm A có li độ $2\sqrt{3}$ cm sau thời gian ngắn nhất kể từ thời điểm t là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/522. Một khu tập thể tiêu thụ công suất điện 14289 W, trong đó các dụng cụ điện ở khu này đều hoạt động bình thường ở điện áp hiệu dụng 220 V. Điện trở của dây tải điện từ nơi cấp điện đến khu tập thể là r. Khi khu tập thể không dùng máy hạ áp, để các dụng cụ điện của khu này hoạt động bình thường thì điện áp hiệu dụng ở nơi cung cấp điện là 359 V, khi đó điện áp tức thời ở 2 đầu dây của khu tập thể sớm pha $\frac{\pi}{6}$ so với dòng điện tức thời chạy trong mạch. Khi khu tập thể dùng máy hạ áp lí tưởng có tỉ số $\frac{N_1}{N_2} = 15$, để các dụng cụ điện của khu này vẫn hoạt động bình thường giống như khi không dùng máy hạ áp thì điện áp hiệu dụng ở nơi cấp điện là bao nhiêu? (biết hệ số công suất ở mạch sơ cấp của máy hạ áp bằng 1)

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/522 (For 6th grade). Show that, for every $n \in \mathbb{N}$, $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ is divisible by 7.

Problem T2/522 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC with $AB < AC$. Let AD be the altitude from A of the triangle. Let M and N so that AB is the perpendicular bisector of MD, and AC is the perpendicular bisector of ND. The line MN intersects AB at E and intersects AC at F. The lines BF and CE meet at H. Let I, K, O respectively be the midpoints of BH, CH and BC. Prove that

$$\widehat{EIF} = \widehat{EKF} = \widehat{EDF} = \widehat{EOF}.$$

Problem T3/522. Consider the following sets

$A = \{x \in \mathbb{N}: x = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \le 668\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N}: x = 5k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \le 668\}$;

and $C = \{x \in \mathbb{N}: x \in A$ và $x \in B\}$.

How many elements are there in the set C?

Problem T4/522. Gieven a right triangle ABC with the right angle A and $\widehat{B} = 60^0$. Let AH be the altitude from A of the triangle. Let I be the midpoint of AB. On the ray IH choose K so that $BK = BA$. Find the value of the angle $\widehat{BKC}$.

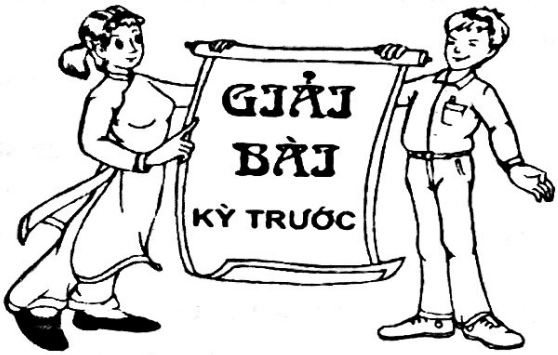
Problem T5/522. Given real numbers a, b, c satisfying $ab \neq 0$, $2a(a^2 + b^2) = bc$, and $b(a^2 + 15b^2) = 6ac$. Compute the value of the expression $P = \frac{a^4 + 6a^2b^2 + 15b^4}{15a^4 + b^4}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/522. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \sqrt{5 - x} + \sqrt{23 + x - 6y} = 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

(*Xem tiếp trang 42*)



Bài T1/518. *Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn đẳng thức* $x^5 + y^3 - (x + y)^2 = 3z^3$.

Lời giải. Ta biến đổi như sau:

$$0 = x^5 + y^3 - (x + y)^2 - 3z^3$$
$$= x^5 + y^3 - x^2 - y^2 - 2xy - 3z^3$$
$$= x^2(x^3 - 1) + y^2(y - 1) - 2xy - 3z^3.$$

Ta thấy: $x(x^3 - 1)$ là số chẵn dù x là số chẵn hay số lẻ (vì khi x lẻ thì $x^3 - 1$ là số chẵn), tích hai số nguyên liên tiếp $y(y - 1)$ là số chẵn, tích $2xy$ là số chẵn mà $x^2(x^3 - 1) + y^2(y - 1) - 2xy - 3z^3 = 0$, do đó $3z^3$ phải là số chẵn, suy ra z^3 là số chẵn, do đó z là số chẵn. Theo giả thiết z là số nguyên tố nên chỉ xảy ra $z = 2$. Thay vào đẳng thức trên được:

$$x^2(x^3 - 2) + y^2(y - 2) + x^2 + y^2 - 2xy - 24 = 0$$

hay $x^2(x^3 - 2) + y^2(y - 2) + (x - y)^2 - 24 = 0$.

Các số x, y đều là số nguyên tố nên $x \geq 2, y \geq 2$ và $(x - y)^2 \geq 0$.

• Nếu $x = 2, y \geq 2$ thì có:

$$2^2(2^3 - 2) + y^2(y - 2) + (y - 2)^2 - 24$$
$$= 24 + y^2(y - 2) + (y - 2)^2 - 24$$
$$= (y - 2)(y^2 + y - 2) = 0,$$

do $y \geq 2$ nên đẳng thức này xảy ra chỉ khi $y = 2$.

Thử lại thấy

$$2^2(2^3 - 2) + 2^2(2 - 2) + (2 - 2)^2 - 24 = 0,$$

thỏa mãn.

• Nếu $x \geq 3, y \geq 2$ thì do $y^2(y - 2) + (x - y)^2 \geq 0$ và

$$x^5 - 2x^2 - 24 = x^3x^2 - 2x^2 - 24 \geq 27x^2 - 2x^2 - 24$$
$$= 25x^2 - 24 > 0$$

vì $x \geq 3$, do đó đẳng thức $x^2(x^3 - 2) + y^2(y - 2) + (x - y)^2 - 24 = 0$ không xảy ra.

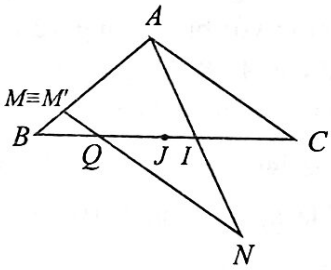
Vậy bài toán chỉ có một nghiệm là $x = y = z = 2$.

Nhận xét. Một số bạn chỉ ra đúng đáp số nhưng lập luận không chặt chẽ, hoặc chia nhiều trường hợp nên lời giải dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Nghệ An**: *Nguyễn Kim Anh Quân*, 6A, *Thái Minh Quân*, *Nguyễn Hải Triều*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội**: *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/518 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh AB sao cho* $MB = \frac{1}{4}AB$, *I là điểm trên cạnh BC sao cho* $IC = \frac{3}{8}BC$, *N là điểm đối xứng với điểm A qua I. Chứng minh rằng MN // AC.*

Lời giải.



Từ N kẻ song song với AC, cắt BC tại Q và AB tại M'. Ta có $IQ = IC$. Do N đối xứng với A qua I, cho nên $ACNQ$ là hình bình hành. Từ $IC = \frac{3}{8}BC$, ta có $QC = \frac{3}{4}BC$, và $BQ = BC - QC = \frac{1}{4}BC$. Vì $QM' // AC$, cho nên cho $M'B = \frac{1}{4}AB$ theo định lý Thales. Do $MB = \frac{1}{4}AB$, cho nên M trùng M'. Vậy $NM // AC$.

Nhận xét. Quá ít bạn gửi lời giải bài này. Một số bạn xét trung điểm của AM hoặc chọn Q sao cho $QI = IC$ đều có lời giải đúng và tương đối ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Huy Hoàng Sơn, Nguyễn Tiến Thành,* 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Tuấn Anh,* 6T, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Quảng Ngãi:** *Bùi Thị Quỳnh Như*, 7A,

THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thùy Trâm, Lê Tuấn Tài*, 7C, *Võ Thị Cẩm Ly*, 7D, THCS Nghĩa Hành; **Nghệ An:** *Vương Viết Lượng*, 7A, *Tăng Thế Anh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/518. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x+2020}+\sqrt[3]{x+2021}+\sqrt[3]{x+2022}=0.$$

Lời giải. Từ hệ thức quen thuộc

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

ta có: nếu $a+b+c=0$ thì

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \ (1).$$

Đặt $t=x+2021$, phương trình trở thành

$$\sqrt[3]{t-1}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t+1}=0.$$

Áp dụng (1), suy ra:

$$t-1+t+t+1-3\sqrt[3]{(t-1)t(t+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3t=3\sqrt[3]{t^3-t}\Leftrightarrow t^3=t^3-t\Leftrightarrow t=0.$$

Nghĩa là: $x+2021=0\Leftrightarrow x=-2021$.

Thử lại, ta thấy $x=-2021$ thỏa mãn đầu bài.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2021$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt trong cách giải trên là sử dụng nhận xét:

Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

2) Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau:

Đặt $f(x)=\sqrt[3]{x+2020}+\sqrt[3]{x+2021}+\sqrt[3]{x+2022}$, với mọi số a, b ta có: $a>b\Leftrightarrow f(a)>f(b)$.

Dễ thấy $f(-2021)=0$: PT thỏa mãn;

Nếu $x<-2021\Rightarrow f(x)<0$: PT không thỏa mãn;

Nếu $x>-2021\Rightarrow f(x)>0$: PT không thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2021$.

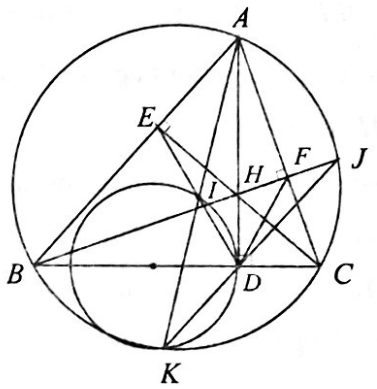
Tổng quát: nếu $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và $f(x_0)=0$ thì PT $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội, *Ngô Uyển Nhi*, 8A5, THCS Phương Liệt, Thanh Xuân; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** *Dương Trọng Nguyên*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 9A4, Ngô Gia Tự, Hồng Bàng.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/518. *Cho tam giác ABC nhọn (AB > BC) nội tiếp đường tròn (O). Vẽ hai đường cao AD và CE của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của DE. Tia AI cắt (O) tại K (K ≠ A). Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IDK nằm trên BD.*

Lời giải. Cách 1.



Gọi F là chân đường cao đỉnh B của ΔABC và J là giao điểm thứ hai của BH với đường tròn (O). Dễ thấy các tứ giác $ACDE$, $DHFC$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{HDF}=\widehat{HCF}=\widehat{EDA},\ \widehat{DHF}=180^\circ-\widehat{DCF}=\widehat{DEA}.$$

$$\Rightarrow \Delta DHF\sim\Delta DEA\ (g.g)\Rightarrow \frac{HD}{ED}=\frac{HF}{EA}\ (1).$$

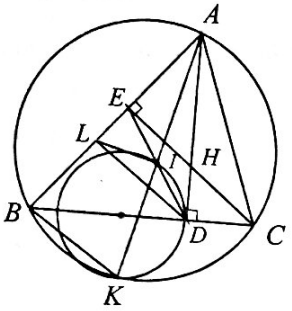
Mặt khác, F là trung điểm HJ (kết quả quen thuộc) và I là trung điểm ED, kết hợp với (1) ta có: $\frac{2HD}{ED}=\frac{2HF}{EA}\Leftrightarrow\frac{HD}{EI}=\frac{HJ}{EA}$.

Suy ra $\Delta HDJ \sim \Delta EIA$ (c.g.c), nên $\widehat{HJD} = \widehat{EAI}$, mà $\widehat{HJD} = \widehat{BJK}$ (chắn cung BK), do đó J, D, K thẳng hàng. Từ đó:

$$\widehat{DKI} \equiv \widehat{JKA} = \widehat{JBA} \equiv \widehat{EBH} = \widehat{EDH} \equiv \widehat{IDH}.$$

Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn (IDK). Vậy tâm của đường tròn (IDK) nằm trên BD.

Cách 2. (Dựa theo bạn *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**).



Hạ $DL \perp AB$ tại L, ta có $IE = ID = IL$. Ta có:

$$\widehat{ILE} = \widehat{IEL} = \widehat{ACB} = \widehat{AKB} \equiv \widehat{IKB}.$$

Suy ra tứ giác $BLIK$ nội tiếp. Sử dụng phương tích ta có: $AI.AK = AL.AB$.

Mặt khác, áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ADB ta có $AL.AB = AD^2$, dẫn đến $AI.AK = AD^2$.

Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn (IDK), từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn tham gia giải đều cho lời giải dài và trình bày chưa tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/518. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Lời giải. Trước hết ta chứng chứng minh bất đẳng thức: Với a, b, c, x, y, z là các số dương thì

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*).$$

Thật vậy, áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x+y+z) \geq \left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right)^2$$
$$= (a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Trở lại bài toán:

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2} = \frac{a^4}{a-a^3} + \frac{b^4}{b-b^3} + \frac{c^4}{c-c^3}$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)}.$$

Lại áp dụng BĐT Bunyakovsky và $a + b + c = 1$, ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + b^3 + c^3).(a+b+c)$$
$$\geq \left(\sqrt{a^3}.\sqrt{a} + \sqrt{b^3}.\sqrt{b} + \sqrt{c^3}.\sqrt{c}\right)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2$$
$$\geq \left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2$$
$$= \frac{1}{9}(a+b+c)^4 = \frac{1}{9}.$$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Do đó:

$$\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của biểu thức $\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2}$ là $\frac{1}{8}$ xảy ra khi và chỉ $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều làm theo cách tương tự như trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Trần Minh Tú*, 9C, THCS Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 9A2,THCS Yên Lạc; **Hải Phòng**: *Trần Trung Phúc*, 9A4, THCS Ngô Gia Tự; **Nghệ An**: *Dương Trọng*

Nguyên, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Tây Ninh**: *Ngô Quốc Tài*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 8A1. THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/518. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+8x+5}}+\dfrac{1}{\sqrt{4y^2-8y+5}}=\dfrac{2}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x > 1$, $y > 3$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{4(x+1)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4(y-1)^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{4(x+y)^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{(a+b)^2+4}},$$

trong đó $a = 2(x + 1)$, $b = 2(y - 1)$, $a > 4$, $b > 4$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số thực dương ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}\ge\dfrac{2}{\sqrt[4]{(a^2+1)(b^2+1)}}$.

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt[4]{(a^2+1)(b^2+1)}}\ge\frac{4}{\sqrt{(a+b)^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow ((a+b)^2+4)^2\ge 16(a^2+1)(b^2+1)\ (1)$$

Thật vậy ta có:

$$((a+b)^2+4)^2-16(a^2+1)(b^2+1)$$

$$=(a+b)^4+8(a+b)^2+16-16a^2b^2-16a^2-16b^2-16$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+8a^2+16ab+8b^2-16a^2b^2-16a^2-16b^2$$

$$=(a^4-2a^2b^2+b^4)+4ab(a^2-2ab+b^2)-8(a^2-2ab+b^2)$$

$$=(a^2-b^2)^2+4ab(a-b)^2-8(a-b)^2$$

$$=(a-b)^2((a+b)^2+4ab-8)\ \ge\ 0,$$

vì $(a+b)^2+4ab>8$ do $a>4$, $b>4$.

Như vậy BĐT(1) đúng. Do đó từ phương trình thứ hai: $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-3}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x-1=y-3=5$

$\Rightarrow x=6, y=8$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 6$, $y = 8$.

Nhận xét. Hệ phương trình trên thuộc loại hệ phương trình mà một bất đẳng thức nào đó có đẳng thức xảy ra. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hưng Yên**: *Cao Thị Tường Vy*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định**: *Phạm Việt Hòa*, 11Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình**: *Lê Đức Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam**: *Huỳnh Thanh Tường*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Long**: *Đỗ Đức Anh*, 11Toán 2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp**: *Lạc Xuân Thịnh*, *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Dương:** *Phan Văn Khải*, lớp 12.9, THPT Tân Phước Khánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/518. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn* $a + b + c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$8abc-8\le(ab+bc+ca+1)^2\quad(1).$$

Lời giải. Cách 1. Đặt $ab + bc + ca = q$, $abc = r$, ta quy về chứng minh: $8r-8\le(q+1)^2$. Bất đẳng thức này tương đương với $(q+5)^2\ge 8(q+r+2)$.

Đặt $1 + a = x$, $1 + b = y$, $1 + c = z$, ta được:

$$x+y+z=4 \text{ và}$$

$$q+5=ab+bc+ca+2(a+b+c)+3=xy+yz+zx;$$

$$q+r+2=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=xyz.$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh vì

$$(q+5)^2-8(q+r+2)=(xy+yz+zx)^2-2(x+y+z)xyz$$

$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge 0.$$

Cách 2. • TH1: Nếu các số a, b, c không dương. Khi đó $abc \le 0$ nên VT < 0, mà VP ≥ 0 nên (1) luôn đúng.

• TH2: Nếu các số a, b, c không âm. Khi đó theo BĐT Cauchy ta có: $abc \le \frac{(a+b+c)^3}{27} = \frac{1}{27}$. Khi đó VT < 0 nên (1) đúng.

• TH3: Hai trong 3 số a, b, c là các số không âm, số còn lại là số không dương. Khi đó $abc \le 0$ nên VT < 0, do đó (1) đúng.

• TH4: Hai trong 3 số a, b, c là các số không dương, số còn lại là số không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử: $c \ge 0, a \le 0, b \le 0$. Đặt $a = -p, b = -q$. Khi đó $p, c, q \ge 0, a + b + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 + p + q$ và

VT $= 8pq(1 + p + q) - 8$;

VP $= ((p + q)^2 + p + q - pq - 1)^2$.

Đặt $p + q = x \ge 0, pq = y \ge 0$. Theo BĐT Cauchy thì $x^2 \ge 4y$. Ta cần chứng minh:

$$8y(x + 1) - 8 \le (x^2 + x - y - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x^2y - 2x - 10xy + 9 + y^2 - 6y \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (x^2 - 4y) + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x^2y - 2x - 10xy + 8 \ge 0.$$

Ta có:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x^2y - 2x - 10xy + 8$$
$$\ge x^4 + 2x^3 - 2x^2 - \frac{2x^2.x^2}{4} - 2x - \frac{10x.x^2}{4} + 8$$
$$= \frac{(x-2)^2(x^2+3x+4)}{2} \ge 0.$$

Mặt khác $(y - 1)^2 \ge 0, x^2 - 4y \ge 0$ nên (1) đúng.

Dấu = xảy ra khi $x = 2, y = 1$ hay $p = q = 1$ hay $a = b = -1, c = 3$ và các hoán vị.

Nhận xét. Cách 1 là lời giải của tác giả đề toán. Cách thứ 2 là cách giải của đa số các bạn. Cách thứ 2 dài hơn nhưng cách giải này cho biết khi nào dấu = trong (1) xảy ra. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Cao Thị Tường Vi*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 9A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, *Bùi Hữu Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

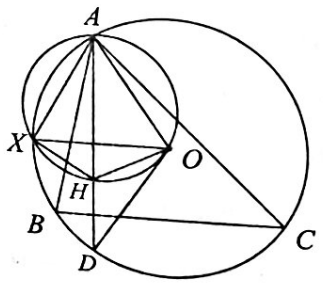
TRẦN HỮU NAM

Bài T8/518. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường tròn (AOH), (BOH), (COH) với (O). Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ. (Kí hiệu (UVW) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác UVW).*

Lời giải.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm là H. AH cắt lại đường tròn (O) tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X. Khi đó OH là đường trung trực của đoạn thẳng XD.*

Chứng minh.



Xét trường hợp $AB < AC$. Các trường hợp khác ta chứng minh tương tự.

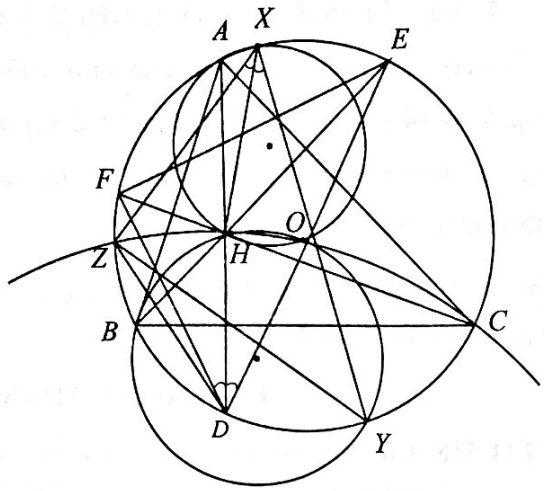
Do bốn điểm A, X, H, O cùng nằm trên một đường tròn, nên: $\widehat{OXH} = \widehat{OAH} = \widehat{ODH}$;

$$\widehat{XOH} = \widehat{XAH} = \frac{1}{2}\widehat{XOD} \Rightarrow \widehat{XOH} = \widehat{DOH}.$$

Kết hợp với $OX = OD$ ta thấy $\Delta OXH = \Delta ODH$ (g.c.g), suy ra $HX = HD$. Từ đó OH là đường

trung trực của đoạn thẳng XD. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài ***T8/518.***



Giả sử AH, BH, CH cắt lại đường tròn (O) theo thứ tự tại D, E, F. Từ bổ đề trên suy ra OH là đường trung trực chung của ba đoạn thẳng DX, EY, FZ. Để ý rằng H, D đối xứng với nhau qua BC; H, F đối xứng với nhau qua AB nên $BH = BD$; $BH = BF$ dẫn đến $BD = BF$. Từ đây dễ thấy EH là phân giác của góc FED. Tương tự, DH là phân giác của góc EDF. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Xét phép đối xứng trục OH (kí hiệu là $Đ_{OH}$) thì $Đ_{OH}: X \mapsto D$; $Y \mapsto E$; $Z \mapsto F$. Vì phép đối xứng trục bảo toàn góc, nên $\widehat{HXY} = \widehat{HDE} = \widehat{HDF} = \widehat{HXZ}$. Nghĩa là XH là phân giác của góc ZXY. Tương tự YH là phân giác của góc XYZ. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là kết quả ở bổ đề. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng với lời giải tương tự như cách giải trên. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Nam Định**: *Phạm Việt Hòa*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Quảng Bình:** *Nguyễn Anh Đức*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/518. *Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn phương trình* $2^{x^2-3y+z} + 2^{y^2-3z+x} + 2^{z^2-3x+y} = \frac{3}{2}$ (1).

Lời giải. (Của tác giả và của tất cả các bạn)

Vì $2^t > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên theo BĐT Cauchy, ta có: $2^{x^2-3y+z} + 2^{y^2-3z+x} + 2^{z^2-3x+y}$

$$\geq 3\sqrt[3]{2^{x^2-3y+z} \cdot 2^{y^2-3z+x} \cdot 2^{z^2-3x+y}}$$

hay $2^{x^2-3y+z} + 2^{y^2-3z+x} + 2^{z^2-3x+y} \geq 3\sqrt[3]{2^{(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)}}$ (2).

Mà $(x^2+y^2+z^2) - 2(x+y+z)$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 3 \geq -3,$$

do đó: $2^{(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)} \geq 2^{-3} = \frac{1}{8}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra với mọi (x, y, z) ta có:

$$2^{x^2-3y+z} + 2^{y^2-3z+x} + 2^{z^2-3x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy có duy nhất một bộ ba số (x, y, z) thỏa mãn phương trình (1) là $(1,1,1)$.

Nhận xét. Bài dễ nên tất cả các bạn giải đúng:

Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Minh Khôi*, 10T1; *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Nguyễn Duy Hiếu*, *Đỗ Viết Việt Nhân*, 8C2, THCS Archimedes Đông Anh;

Nguyễn Xuân Tùng, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2 THPT chuyên Quốc học Huế; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/518. *Các số nguyên từ 51 đến 150 được xếp thành một bảng ô vuông kích thước 10 × 10. Tồn tại hay không cách xếp để với mọi cặp (a; b) đứng kề nhau trong một hàng hoặc một cột thì có ít nhất một trong hai phương trình*

$$x^2 - ax + b = 0 \text{ và } x^2 - bx + a = 0$$

có nghiệm nguyên?

Lời giải (Của bạn *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và bạn *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**).

Đặt $S = \{51, 52, ..., 150\}$. Giả sử $a, b \in S$ với b là số nguyên tố.

i) Nếu phương trình $x^2 - ax + b = 0$ có nghiệm x_1, x_2 nguyên thì do $x_1 + x_2 = a \in \mathbb{N}^*$, $x_1.x_2 = b$ nên $\{x_1, x_2\} = \{1, b\}$. Vậy $a = x_1 + x_2 = b + 1$.

ii) Nếu phương trình $x^2 - bx + a = 0$ có nghiệm x_1, x_2 nguyên thì do $x_1 + x_2 = b \in \mathbb{N}^*$ nên

$$\left[\begin{array}{l} \{x_1; x_2\} = \{1; b-1\} \\ \{x_1; x_2\} = \{2; b-2\} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \{x_1; x_2\} = \left\{\left[\frac{b}{2}\right]; b - \left[\frac{b}{2}\right]\right\} \end{array}\right.$$

Suy ra $a = x_1.x_2 = \left[\begin{array}{l} b-1 \\ 2(b-2) \\ \dots\dots\dots \\ \left[\frac{b}{2}\right]\left(b - \left[\frac{b}{2}\right]\right) \end{array}\right.$

Lại có: $b - 1 \le 2(b-2) \le ... \le \left[\frac{b}{2}\right]\left(b - \left[\frac{b}{2}\right]\right)$.

Nếu $b > 77$ thì $a = 2(b-2) > 150$.

Do đó $a = b - 1$. Như vậy nếu tồn tại cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài thì mỗi số nguyên tố $b > 77$ chỉ có tối đa hai số đứng kề với nó là $b + 1$ và $b - 1$. Vậy chỉ có thể xếp số nguyên tố b với $b > 77$ vào một trong bốn góc của lưới vuông. Nhưng S có 14 số $b > 77$ nên không thể xếp hết chúng vào lưới vuông. Từ đó không tồn tại cách xếp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. Tòa soạn chỉ nhận được hai lời giải trên của bạn *Mỹ Lệ* và *Thiên Lý*.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/518. *Cho dãy số $(a_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi:*

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ và } a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó p là số nguyên tố. Tìm tất cả các giá trị của p sao cho tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn $a_m = -3$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ giả thiết suy ra mọi số hạng a_n của dãy là các số nguyên. Để ý rằng khi $p = 2$ thì mọi a_n với $n = 2, 3, ...$ đều chia hết cho 2 nên $a_n \ne -3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử p là số nguyên tố sao cho tồn tại số nguyên dương m để $a_m = -3$ thì $p \ne 2$ và $m \ge 3$.

Từ hệ thức $a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

suy ra: $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} \pmod p, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy nên $a_{n+2} \equiv 2^n a_2 \pmod p = 2^{n+1} \pmod p, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - (p-1)a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

nên $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} - a_n \pmod{(p-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay

$a_{n+2} - a_{n+1} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod{(p-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra: $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = ... = a_2 - a_1 = 1 \pmod{(p-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$a_{n+2} - a_1 \equiv n+1 \pmod{(p-1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hay $a_n \equiv n \pmod{(p-1)}, \forall n \geq 3$.

Do đó: $a_m = -3 \Leftrightarrow -3 \equiv m \pmod{(p-1)}$

hay $m+3$ chia hết cho $p-1$. Theo định lý nhỏ Fermat thì $2^{p-1} = 1 \pmod{p}$ nên từ kết luận $m+3$ chia hết cho $p-1$, suy ra

$$2^{m+3} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mặt khác thì $2^{m+3} = -48 \pmod{p}$. Suy ra 49 chia hết cho p, tức $p = 7$.

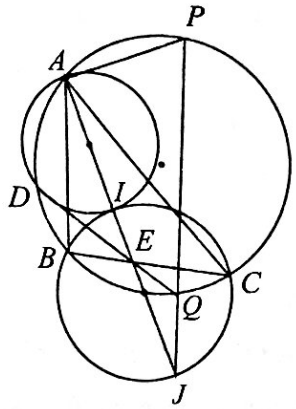
Ngược lại, với $p = 7$ thì $a_3 = -3$. Vậy $p = 7$ là số nguyên tố duy nhất để tồn tại số nguyên dương m để $a_m = -3$.

Nhận xét. Đây là dạng toán quen về dãy số nguyên trong số học, thuộc loại khó nên có ít lời giải gửi tới Tòa soạn. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Lâm Đồng:** *Hoàng Duy Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Quảng Nam:** *Nguyễn Xuân Tiến*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/518. *Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc A của tam giác ABC không cân. D là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. E là giao điểm của AI và BC. P là điểm chính giữa cung tròn $\overset{\frown}{BAC}$. Chứng minh PJ và DE cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**).



Gọi Q là giao điểm thứ hai của DE và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy B, C, I, J cùng thuộc một đường tròn. Do đó

$$\overline{EI}.\overline{EJ} = \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{ED}.\overline{EQ}.$$

Điều đó có nghĩa là D, I, Q, J cùng thuộc một đường tròn (1).

Vì P là điểm chính giữa cung tròn $\overset{\frown}{BAC}$ nên AP là phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Từ đó, chú ý rằng AI là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$, suy ra $AP \perp AI$.

Vậy AP tiếp xúc với đường tròn đường kính AI, để cho đơn giản ta kí hiệu AP bởi AA (2). Từ (1) và (2) suy ra:

$$(QJ, QP) \equiv (QJ, QD) + (QD, QP)$$
$$\equiv (IJ, ID) + (AD, AP) (\text{mod}\, \pi) \equiv (IJ, ID) + (AD, AA)$$
$$\equiv (IJ, ID) + (ID, IA) \equiv (IJ, IA) \equiv 0 (\text{mod}\, \pi).$$

Do đó Q, J, P thẳng hàng.

Vậy PJ và DE cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, nhưng đa số các lời giải gửi tới tòa soạn đều trình bày quá phức tạp.

2) Trong lời giải trên, không có vấn đề LỜI GIẢI PHỤ THUỘC HÌNH VẼ nhưng bạn *Hoàng* vẫn sử dụng góc định hướng với mục đích LỜI GIẢI ĐẸP.

3) Bạn *Hoàng* còn nhận xét đúng rằng: *Nếu thay giả thiết I, J theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC bởi giả thiết I, J là các giao điểm của một đường tròn bất kì đi qua B, C và phân giác trong của góc* $\widehat{BAC}$ *thì PJ và DE vẫn cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

4) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tuấn*, THPT chuyên Chu Văn An; **Quảng Bình:** *Nguyễn Anh Đức*, 11T2, *Cao Huyền My*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/518. *Trên bề mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp A, B cách nhau* 12 cm *dao động ngược pha. Biết sóng do mỗi nguồn phát ra có tần số* $f = 10$ Hz, *tốc độ truyền sóng là* 40 cm/s. *Gọi M là một điểm nằm trên đường vuông góc với AB tại A, gần A nhất dao động với biên độ cực tiểu. Xác định độ dài đoạn AM.*

Lời giải. Vì hai nguồn dao động ngược pha nhau nên tại M có cực tiểu giao thoa khi:

$MB - MA = k\lambda$; $\lambda = v/f = 4\text{cm}$, $AB = 3\lambda$

chứng tỏ cực tiểu gần A nhất ứng với $k = 2$.

Theo bài ra tam giác ABM vuông nên:

$$MB = \sqrt{AM^2 + AB^2}.$$

Do đó ta có: $\sqrt{AM^2 + AB^2} - AM = 2\lambda = 8\text{cm}$.

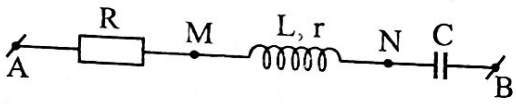
Suy ra $AM = 5$ cm.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng là: **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Khôi Nguyên, Nguyễn Thiên Lý* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Nguyễn Nhật Tân*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/518. *Trên đoạn mạch điện xoay chiều có bốn điểm theo đúng thứ tự A, M, N và B. Giữa hai điểm A và M chỉ có điện trở thuần, giữa hai điểm M và N chỉ có cuộn dây, giữa hai điểm N và B chỉ có tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều* 175 V – 50 Hz *thì điện áp hiệu dụng trên đoạn AM là* 25 V, *trên đoạn MN là* 25 V *và trên đoạn NB là* 175 V. *Xác định hệ số công suất của toàn mạch.*

Lời giải.



Nếu cuộn dây là cuộn cảm thuần thì:

$$U_{AB}^2 = U_{AM}^2 + (U_{MN} - U_{NB})^2.$$

Theo đề bài, hệ thức này không được thoả mãn, chứng tỏ cuộn dây MN có điện trở thuần r hoạt động. Vì $U_{AM} = U_{MN}$, nên $Z_{AM} = Z_{MN}$ hay

$$Z_L^2 + r^2 = R^2 \quad (1)$$

Vì $U_{AB} = U_{NB} = 7U_{AM}$ nên $Z = Z_{NB} = 7Z_{AM}$

hay $Z_C^2 = Z^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 49R^2$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $r = \dfrac{24}{25}R$; $Z_L = \dfrac{7}{25}R$

Từ đó : $\cos\varphi = \dfrac{R+r}{Z} = \dfrac{R + \frac{24}{25}R}{7R} = \dfrac{7}{25}$.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

BÀI TOÁN BÓ VẬT TRONG HAI CUỐN SÁCH HÁN NÔM DẪN ĐẾN BÀI TOÁN TÍNH TỔNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

Trần Đại An (*Nghiên cứu sinh, ĐHSP Hà Nội*)
Phạm Văn Hoằng (*Trường THPT Kim Liên, Hà Nội*)
Đoàn Thị Lệ (*Nghiên cứu sinh, National Tsing Hua University, Taiwan*)
Phạm Vũ Lộc (*Trung tâm Vũ trụ Việt Nam, Viện HLKH và Công nghệ Việt Nam*)
Tạ Duy Phượng (*CTV Viện Toán học, Viện HLKH và Công nghệ Việt Nam*)
Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết (*Thạc sĩ Hán Nôm*)

Tóm tắt. *Bài báo giới thiệu bài toán bó vật dẫn đến tính tổng của cấp số cộng trong hai cuốn sách toán Hán Nôm.*

Nhập đề. Các bài toán dạng *tính tổng* đã được biết đến trong các sách toán Trung Hoa từ thế kỉ XI-XIII (xem, thí dụ, [3], [4]). Một trong các dạng toán tính tổng đơn giản nhất trong sách toán Trung Hoa và sách toán Hán Nôm (sách toán của Việt Nam viết bằng chữ Hán và chữ Nôm) là bài toán *bó vật*, tức là xếp các vật (hộp bánh, hộp sữa,...) thành bó hình vuông, hình tròn hoặc tam giác đều. Các bài toán này dẫn đến bài toán tính tổng của cấp số cộng.

Bài viết này trình bày các bài toán tính tổng của cấp số cộng và bài toán bó vật trong hai cuốn sách toán Hán Nôm [1]-[2], được viết vào thế kỉ XIX. Để tiện trình bày và dễ dàng cho bạn đọc, chúng tôi kết hợp cách giải trong sách toán Trung Hoa và sách toán Hán Nôm với những giải thích theo ngôn ngữ hiện đại.

DẠNG TOÁN 1. Bài toán tính tổng các số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (là dãy số có số hạng sau bằng số hạng trước cộng với một số không đổi, được gọi là *công sai*):

$$a_1, a_2 = a_1 + d, \ldots, a_n = a_{n-1} + d.$$

Bài toán: *Tính tổng* $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.*

Cấp số cộng có tính chất:

$$a_i + a_{n-i+1} = a_1 + a_n, \ i = 1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Thật vậy, từ định nghĩa ta có

$$a_i = a_{i-1} + d = a_{i-2} + 2d = \\ = a_1 + (i-1)d;$$

$$a_{n-i+1} = a_{n-i+2} - d = a_{n-i+3} - 2d = \cdots \\ = a_n - (i-1)d.$$

Vậy $a_i + a_{n-i+1} = (a_1 + (i-1)d) + (a_n - (i-1)d)$
$= a_1 + a_n$

hay (1) được chứng minh.

Ta có công thức:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \qquad (2).$$

Công thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng nhiều cách, thí dụ, từ (1) ta có

$$2S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_n + \cdots + a_1) \\ = (a_1 + a_n) + \cdots + ((a_1 + (i-1)d) \\ + (a_n - (i-1)d)) + \cdots + (a_n + a_1) \\ = (a_1 + a_n)n.$$

Suy ra (2) được chứng minh.

Bài 1.1 ([2], tờ 88a). *Có 9 người kiếm tiền, người thứ nhất kiếm được 1 đồng, người thứ hai kiếm được 2 đồng, người thứ ba kiếm được 3 đồng, người thứ tư kiếm được 4 đồng, người thứ năm kiếm được 5 đồng, người thứ sáu kiếm được 6 đồng, người thứ bảy kiếm được 7 đồng, người thứ tám kiếm được 8 đồng, người thứ chín kiếm được 9 đồng. Hỏi tổng cộng 9 người kiếm được bao nhiêu đồng?*

Đáp. Tổng cộng kiếm được 45 đồng.

Giải ([2], tờ 88a). Đầu đuôi tương ứng cộng lại chia đôi. Đặt 1 và 9 thành 10 chia đôi lấy nửa thành 5, lấy 5 nhân với 9 thành 45 đồng.

Giải thích. Áp dụng công thức (2) với $a_1 = 1, d = 1, a_9 = 9$ và $n = 9$ ta được:

$$S_9 = \frac{(1+9)}{2} \times 9 = 45.$$

Các bài toán trong sách Trung Quốc và Hán Nôm thường có cấu trúc: Phát biểu bài toán; Đáp số, Lời giải hoặc Sơ lược cách giải bằng lời. Công thức thường không được chứng minh.

Bài 1.2 ([2], tờ 88b) *Có 24 con ngựa, con thứ nhất đi 1 dặm, con thứ hai đi 2 dặm, con thứ ba đi 3 dặm,..., đến con thứ hai mươi tư đi 24 dặm. Hỏi tổng đi được bao nhiêu dặm.*

Đáp ([2], tờ 88b). Tổng cộng đi được 300 dặm. Sách chỉ có đáp số, không có lời giải.

Giải thích. Áp dụng công thức (2) với $a_1 = 1, d = 1, a_{24} = 24$ và $n = 24$ được:

$$S_{24} = \frac{(1+24)24}{2} = 300.$$

Chú ý. Dưới đây ta còn dùng cấp số cộng $a_{i+1} = a_i + d,\ i = 0,1,2,\ldots$ với số hạng đầu tiên là a_0 cho trước. Tổng $S_{n+1} := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ của $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng được tính theo công thức

$$S_{n+1} = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \quad (3).$$

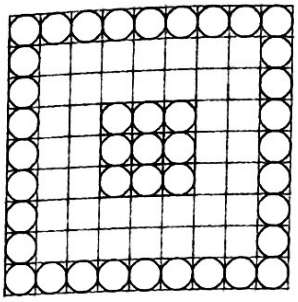
DẠNG TOÁN 2. Toán bó vật: *Các vật được bó với nhau thành một bó tròn, bó vuông hay bó tam giác. Hãy tính tổng số vật bị bó.*

Dạng toán 2.1. Bó vuông

Bài 1 ([1] tờ 16a; [3], trang 1082). *Nay có các hộp tròn đựng tên bó thành hình vuông, chu vi ngoài 32 cái, hỏi tổng chứa bao nhiêu hộp tên?*

Đáp. 81 cái.

Giải 1 ([1] tờ 16a). Đặt chu vi ngoài 32 cái ở bên trái, lại đặt 32 cái ở bên phải, thêm chu vi trong là 8 được 40. Nhân với nhau được 1280 cái. Lấy *suất bó vuông* là 16 chia đi, được 80. Thêm một cái ở trung tâm, được 81 cái.



Hình 1: Bó vuông

Giải thích. *Chu vi trong* tức là vòng trong cùng bao hình vuông ở nhân, gồm 8 ô (Hình 1). Để bao được một ô vuông ở nhân cần một hình vuông cạnh là 3 (ô). Tổng cộng là 3×4 ô, trừ bốn ô ở 4 góc được tính hai lần, còn lại chu vi trong là $3 \times 4 - 4 = 8$ ô. Vòng tiếp theo sẽ là hình vuông có cạnh gồm 5 ô, tổng số ô vuông của vòng tiếp theo là $5 \times 4 - 4 = 16$ ô. Vòng thứ ba là hình vuông có cạnh là 7 ô, tổng số ô vuông của vòng thứ ba là $7 \times 4 - 4 = 24$ ô. Vòng ngoài cùng (*chu vi ngoài*) là hình bao ngoài của hình vuông cạnh 9 đơn vị (theo bài ra) gồm $9 \times 4 - 4 = 32$ ô. Đây cũng chính là bài toán tính tổng của cấp số cộng với $a_i = (2i+1) \times 4 - 4 = 8i,\ i = 0,1,2,3,4$. *Suất bó vuông* là 2 lần công sai của cấp số cộng trong bài toán bó vật thành hình vuông $d = 8$, $2d = 16$. Vì $a_n = a_0 + nd$ nên $n = \frac{a_n - a_0}{d}$.

Suy ra $n + 1 = \frac{32-0}{8} + 1 = \frac{40}{8}$ và

$$S_{n+1} = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} = \frac{32 \times 40}{2 \times 8} = \frac{1280}{16} = 80.$$

Cộng với một cái ở trung tâm. Tổng cộng là 81 hộp tên.

Giải 2 ([3], trang 1082). Chu vi trong 8 chiếc, cộng với chu vi ngoài 32, tổng 40 chiếc. Chia đôi, lấy 4 lớp, nhân vào, hợp với câu hỏi.

Giải thích. *Lấy 8 chia khỏi chu vi ngoài được 4 lớp,* nghĩa là lấy chu vi ngoài là 32 chia cho 8 được 4 lớp, hay $n=\frac{a_n-a_0}{d}=\frac{32-0}{8}=4$ lớp.

Khi ấy $S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\times n=\frac{32+8}{2}\times 4=80.$

Cộng với một cái ở trung tâm, được 81 hộp tên.

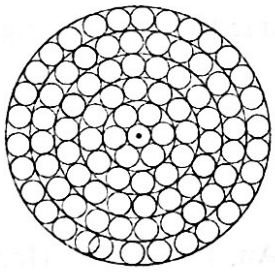
Lời bình. Cách giải của [1] (sách toán Việt Nam) và [3] (sách toán Trung Quốc) khác nhau.

Dạng toán 2.2. Bó tròn

Bài 2 ([1], tờ 16b; [3], trang 1083). *Nay có một số ống tên xếp thành bó tròn, chu vi ngoài 30 cái, hỏi tổng chứa bao nhiêu?*

Đáp. 91 cái.

Giải 1 ([1], tờ 16b). Đặt chu vi ngoài 30 làm thực, lại cộng 30 với chu vi trong là 6 được 36 làm pháp. Nhân với nhau được 1080. Lấy *suất bó tròn* là 12 chia đi, được 90. Thêm một cái ở trung tâm được 91 cái.



Hình 2: Bó tròn

Giải thích. Pháp và thực là tên gọi hai thừa số trong phép nhân.

Một hình tròn được bao bởi 6 hình tròn nên chu vi trong bằng 6 (Hình 2). *Suất bó tròn* là 2 lần công sai của cấp số cộng trong bài toán bó vật tròn $d=6, 2d=12$.

Bài toán trở thành tính tổng của cấp số cộng với $a_0=0; a_1=6$ (chu vi trong); $a_2=12$; $a_3=18$; $a_4=24$ và $a_5=30$ (chu vi ngoài theo bài ra).

Vì $n=\frac{a_n-a_0}{d}$ nên $n+1=\frac{30-0}{6}+1=\frac{36}{6}$ và $S_{n+1}=\frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}=\frac{30\times 36}{2\times 6}=\frac{1080}{12}=90.$

Cộng với 1 hình tròn trong cùng được 91 cái.

Giải 2 ([3], trang 1083). Chu vi trong 6 chiếc cộng với chu vi ngoài 30 chiếc, tổng là 36 chiếc. Chia đôi, nhân với 5 tầng, hợp với câu hỏi (Lấy 6 chia khỏi chu vi ngoài là 30 thì được 5 tầng).

Giải thích. [3] đã sử dụng công thức (2) để tính

$$S_5=\frac{a_1+a_5}{2}\times 5=\frac{6+30}{2}\times 5=18\times 5=90.$$

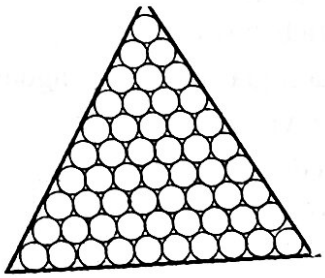
Cộng với 1 hình tròn trong cùng được 91 cái.

Dạng toán 2.3. Bó tam giác

Bài 3 ([1], tờ 16b). *Nay có vật xếp thành tam giác, chu vi ngoài 27 cái, tổng chứa bao nhiêu?*

Đáp: 55 cái.

Giải ([1], tờ 16b). Đặt chu vi ngoài là 27, lại lấy 27 cộng chu vi trong là 9 được 36. Nhân với nhau được 972 cái làm thực. Lấy *suất lăng trụ tam giác* là 18 chia đi, được 54 cái. Thêm một cái ở trung tâm, được 55 cái.



Hình 3: Bó tam giác

Giải thích. Đây là cấp số cộng với $a_0=0, a_1=9, a_2=18, a_3=27.$

Tổng chứa $(9+18+27)+1=54+1=55$ vật.

Suất lăng trụ tam giác là hai lần công sai của cấp số cộng trong bài toán bó vật tam giác $d=9, 2d=18$. Suy ra:

$$n=\frac{a_n-a_0}{d}=\frac{27}{9};\ n+1=\frac{27+9}{9}=\frac{36}{9}.$$

Áp dụng công thức (3) ta được:

$$S_n=\frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}=\frac{27\times 36}{18}=54.$$

Cộng một cái trong cùng được đáp số 55 vật.

Phụ lục. Các sách Hán Nôm thường có ca quyết (bài thơ) nêu qui tắc giải dạng toán cho dễ nhớ, dễ thuộc. Dưới đây là bài ca quyết về dạng toán bó trong [1], trang 16a.

DẠNG TOÁN BÓ TÊN ([1], trang 16a)

Tứ phương chi thúc thiêm bát thặng
Thập lục quy trừ số mạc tăng
Viên thúc ngoại chu gia lục tấu
Thặng thanh thập nhị pháp trừ hưng
Tam giác gia cưu thừa chu số
Thập bát quy chi toán dĩ tằng
Các yếu lâm thời thiêm nhất số
Tường suy thúc tích cổ lai xưng.

Giải nghĩa thơ:

Nếu là bó vuông thì cộng (chu vi ngoài) thêm 8 rồi nhân (với chu vi ngoài).
Sau đó chia cho 16 là số không đổi.
Bó tròn vòng ngoài thêm 6 rồi nhân với vòng ngoài. Lấy tích chia cho 12.
Nếu là bó tam giác thì (vòng ngoài) thêm 9 rồi nhân với chu vi và chia cho 18.
Mỗi kết quả đều cộng thêm với 1.
Được tổng số tên trong bó.

Kết luận. Những dạng toán trong bài viết không chỉ có ý nghĩa lịch sử, mà vẫn mang ý nghĩa thời sự. Các dạng toán trong bài viết hoàn toàn có thể sử dụng trong giảng dạy hiện nay. Tất nhiên, khi sử dụng, cần và nên thay các từ cổ (bó tên, vật,...) bằng các ngôn từ hiện đại hơn (hộp sữa, hộp bánh, hộp trà tròn nằm trong hộp vỏ giấy đáy vuông rồi xếp chúng vào hộp lớn cho tiện chuyên chở,...).

Bài toán xếp vật dựa tường cũng dẫn tới bài toán tính tổng của cấp số cộng (xem [6]). Nhiều dạng toán tính số vật xếp thành đống dẫn đến bài toán tính tổng phức tạp hơn (thí dụ, tổng bình phương của các số tự nhiên đầu tiên) trong các sách toán Hán Nôm đã được trình bày trong [5].

TÀI LIỆU DẪN

[1] 范嘉紀 Phạm Gia Kỷ, 大成算學指明 *Đại thành toán học chỉ minh*, khoảng 1840, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555.

[2] 謝有常 Tạ Hữu Thường, 統宗算法 *Thống tông toán pháp*, Khoảng cuối thế kỉ XIX, Thư viện Quốc gia, Mã hiệu số hóa nlvnpf-0493, Mã kho R.1194

[3] 楊 輝 Dương Huy, 楊輝算法 *Dương Huy toán pháp*, Quách Thư Xuân (chủ biên), *Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vựng* (Toán học - Quyển 1), trang 1044 - 1117. Nhà xuất bản giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993.

[4] Jean-Claude Marzloff, *History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 2006.

[5] Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Phạm Vũ Lộc, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Toán gò đống trong các sách toán Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng*, Bài gửi đăng Kỷ yếu Hội thảo *Một số chuyên đề Toán Olympic chọn lọc kỷ niệm 30 năm Semina các chuyên đề Olympic Toán học* (Nguyễn Văn Mậu chủ biên), Vĩnh Phúc, 5-6 tháng 12-2020.

[6] Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Bài toán xếp vật dựa tường trong ba cuốn sách toán Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của dãy số tự nhiên*, Tạp chí *Toán Tuổi thơ 2*, Số 212+213 (tháng 11-2020), trang 54-57.

BẠN CÓ BIẾT ?

LÀM MẠNH THÊM BỔ ĐỀ BERTRAND

HOÀNG ĐỨC TÂN
(Hà Nội)

Năm 1845 *Jean Bertrand* phát biểu Định đề nổi tiếng sau "*Nếu n là số tự nhiên* >3 *thì giữa n và* $2n-2$ *có chứa ít nhất là một số nguyên tố*" và được *P. L. Chebyshev* chứng minh năm 1850 bằng phương pháp giải tích. Năm 1932 *P. Erdos* đã đưa ra chứng minh sơ cấp đầu tiên cho Bổ đề Bertrand (Báo TH&TT số 432 tháng 6/2013 đã giới thiệu chứng minh này). Nội dung bài báo này giới thiệu một cải tiến mới chứng minh của *P. Erdos* bởi *W. Sierpinski* để nhận được kết quả mạnh hơn và nhiều kết quả thú vị suy ra từ nó. Một chứng minh khá phức tạp, nhưng hoàn toàn sơ cấp.

Nếu cho trước số thực x thì dấu $[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất $\le x$. Từ định nghĩa ta suy ra rằng đối với mỗi số thực x ta có $x-1<[x]\le x$. Đẳng thức $[x]=x$ có khi và chỉ khi x là số nguyên. Nếu k là số nguyên thì với mọi số thực x ta có $[x+k]=[x]+k$. Rõ ràng với mọi số thực x và y ta có $[x]+[y]\le[x+y]$.

Định lý 1. *Nếu n là số tự nhiên thì trong phân tích số n! thành các thừa số nguyên tố thì số nguyên tố p có số mũ* α, *trong đó*

$$\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots \qquad (1).$$

Chứng minh. Giả sử n và k là các số tự nhiên cho trước, còn p là số nguyên tố $\le n$. Nếu một số trong dãy số $1,2,\dots,n$ chia hết cho p^k thì nó cần phải có dạng lp^k, trong đó l là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $lp^k\le n$ tức là $l\le\frac{n}{p^k}$. Số các số l bằng $\left[\frac{n}{p^k}\right]$. Mặt khác rõ ràng là số mũ α của số p nằm trong phân tích số $n!$ thành các thừa số nguyên tố sẽ là tổng các số mà số ấy bằng số phần tử của dãy $1,2,\dots,n$ chia hết cho p, số phần tử chia hết cho p^2, số phần tử chia hết cho p^3,... Từ đó ta nhận được công thức (1).

Bổ đề 1. *Đối với các số tự nhiên* $n>1$ *ta có:*

$$\binom{2n}{n}>\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \qquad (2).$$

Chứng minh. BĐT(2) luôn có với $n=2$, bởi vì $\binom{4}{2}=6>\frac{4^2}{2\sqrt{2}}$. Giả thiết rằng BĐT(2) là đúng với số tự nhiên n. Khi đó ta có:

$$\binom{2n+2}{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}>\frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\sqrt{n+1}}>\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}},$$

do $(2n+1)^2>4n(n+1)$ suy ra $2n+1>\sqrt{4n(n+1)}$. Vì vậy ta đã chứng minh được BĐT(2) đúng với các số tự nhiên $n>1$ bằng quy nạp toán học.

Bổ đề 2. *Tích* P_n *tất cả các số nguyên tố* $\le n$ *(ở đây n là một số tự nhiên lớn hơn 1) nhỏ hơn* 4^n.

Chứng minh. Rõ ràng bổ đề đúng với $n=2$. Giả sử n là số tự nhiên >2. Giả sử bổ đề là đúng với các số tự nhiên $<n$. Nếu n là một số chẵn thì $P_n=P_{n-1}$ có nghĩa là bổ đề cũng đúng với số n. Nếu $n=2k+1$, trong đó k là số tự nhiên khác 0 thì mỗi số nguyên tố p sao cho $k+2\le p\le 2k+1$ sẽ là ước số của số:

$$\binom{2k+1}{k}=\frac{(2k+1).2k.(2k-1)\dots(k+2)}{1.2\dots k} \qquad (3).$$

Bởi vì: $(1+1)^{2k+1} > \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2\binom{2k+1}{k}$,

nên ta có $\binom{2k+1}{k} < 4^k$. Tích tất cả các số nguyên tố (khác nhau) sao cho $k+2 \le p \le 2k+1$ là ước số của số (3). Do đó nó phải nhỏ hơn 4^k. Theo giả thiết bổ đề là đúng đối với các số tự nhiên nhỏ hơn n nên tích các số nguyên tố $\le k+1$ sẽ phải nhỏ hơn 4^{k+1}. Cho nên

$$P_n = P_{2k+1} < 4^k.4^{k+1} = 4^{2k+1} = 4^n,$$

từ đó $P_n < 4^n$. Vì vậy theo quy nạp toán học thì bổ đề là đúng với mọi số tự nhiên n.

Bổ đề 3. *Nếu p là ước số nguyên tố của số* $\binom{2n}{n}$, *ngoài ra* $p \ge \sqrt{2n}$ *thì p nằm trong phân tích của số* $\binom{2n}{n}$ *thành các thừa số nguyên tố sẽ có số mũ lớn hơn 1.*

Chứng minh. Theo định lý 1 số mũ của số nguyên tố p nằm trong phân tích của số $(2n)!$ thành các thừa số nguyên tố là $\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \dots$, còn số mũ của p nằm trong phân tích của số $n!$ thành các thừa số nguyên tố là $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$. Bởi vì $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ nên số mũ của số nguyên tố p nằm trong phân tích của số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố sẽ là $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$.

Nếu $p \ge \sqrt{2n}$ thì $p = \sqrt{2n}$ chỉ trong trường hợp $n = 2$. Cho nên đối với $n \ne 2$ ta có $p > \sqrt{2n}$, từ đó $\alpha = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] < 2$ do vậy $\alpha < 2$. Vì α là số nguyên nên $\alpha \le 1$. Vậy bổ đề được chứng minh đối với các số tự nhiên $n \ne 2$, còn đối với $n = 2$ bổ đề vẫn đúng do $\binom{4}{2} = 2.3$.

Bổ đề 4. *Mỗi ước số của số* $\binom{2n}{n}$ *có dạng* p^r, *trong đó p là số nguyên tố còn r là số tự nhiên không vượt quá 2n, ta có:* $\binom{2n}{n} \le (2n)^{\pi(2n)}$, *trong đó* $\pi(x)$ *là ký hiệu số tất cả các số nguyên tố* $\le x$.

Chứng minh. Nếu $p^r \mid \binom{2n}{n}$ thì số nguyên tố p nằm trong phân tích của số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố sẽ có số mũ là

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \ge r.$$

Nếu $p^r > 2n$ thì $k \ge r$ và ta sẽ có:

$\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ do đó $\alpha = \sum_{k=1}^{r-1}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$.

Nhưng do đối với các số thực x ta luôn có bất đẳng thức $[2x] - 2[x] \le 1$, nên từ đó ta suy ra $\alpha \le r-1$, trái với $\alpha \ge r$. Vì vậy $p^r \le 2n$. Để chứng minh phần thứ hai của bổ đề ta có nhận xét rằng trong phân tích số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố chỉ gồm có các số nguyên tố $\le 2n$. Từ đó $\binom{2n}{n} \le (2n)^{\pi(2n)}$. Bổ đề được chứng minh xong.

Bổ đề 5. *Nếu n là số tự nhiên* > 2 *thì không có một số nguyên tố nào thỏa mãn điều kiện* $\frac{2}{3}n < p \le n$ *lại có thể là ước số của số* $\binom{2n}{n}$.

Chứng minh. Nếu $\frac{2}{3}n < p \le n$ thì $\frac{2n}{p} < 3$; $\frac{n}{p} \ge 1$.

Do đó: $\left[\frac{2n}{p}\right] \le 2, \left[\frac{n}{p}\right] \ge 1 \Rightarrow \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ (điều

đó được suy ra từ $\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\le 2-2.1=0$ nghĩa là $\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\le 0$; mặt khác đối với mỗi số thực x ta luôn có $[2x]-2[x]\ge 0$). Đối với $k\ge 1$ ta luôn có $p^k>\frac{4}{9}n^2$, do đó $\frac{2n}{p^k}<\frac{9}{2n}<1$ đối với $n>4$. Cho nên $\left[\frac{2n}{p^k}\right]-2\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$ đối với $k\ge 1$ và $n>4$. Do đó với $n>4$ số p nằm trong phân tích số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố phải có số mũ bằng 0, tức là số $\binom{2n}{n}$ không chia hết cho p. Vì vậy đối với $n>4$ bổ đề là đúng. Đối với các trường hợp $n=2$ và $n=3$ ta kiểm tra để xác nhận bổ đề cũng đúng. Trong cả hai trường hợp số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{3}n<p\le n$ cần phải bằng 3. Số 3 cũng không phải là ước số của số $\binom{6}{3}=20$ và cũng không phải là ước số của số $\binom{8}{4}=70$. Bổ đề đã được chứng minh.

Bổ đề 6. *Số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện $n<p<2n$ nằm trong phân tích số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố có số mũ bằng 1.*

Chứng minh. Đối với $n<p<2n$ ta có $1<\frac{2n}{p}<2$, $\frac{n}{p}<1$. Cho nên $\left[\frac{2n}{p}\right]=1$, $\left[\frac{n}{p}\right]=0$. Đối với $k\ge 2$ ta có $\frac{2n}{p^k}\le\frac{2n}{p^2}<\frac{2}{n}$. Do đó đối với $n>1$ thì $\frac{2n}{p^k}<1$ nghĩa là $\left[\frac{2n}{p^k}\right]=0$, do vậy ta cũng có $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$. Vì vậy số mũ α của số p nằm trong phân tích số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố phải bằng 1. Trường hợp $n=1$ ta không cần phải xét, do không có số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện $n<p<2n$. Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 7. *Đối với các số tự nhiên $n\ge 14$ ta luôn có bất đẳng thức $\pi(n)\le\frac{1}{2}n-1$.*

Chứng minh. Dễ tính được $\pi(14)=6=\frac{14}{2}-1$. Do đó bổ đề là đúng đối với $n=14$. Giả sử n là số tự nhiên ≥ 15. Trong dãy số $1,2,\ldots,n$ các số chẵn $2,4,8,\ldots,2\left[\frac{n}{2}\right]$ là các hợp số. Số lượng của chúng là $\left[\frac{n}{2}\right]-1$. Ngoài ra trong dãy số $1,2,\ldots,n$ với $n\ge 15$ có các số 1, 9, 15 nằm trong cũng không phải là các số nguyên tố. cho nên

$$\pi(n)\le n-\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1+3\right)=n-\left[\frac{n}{2}\right]-2<\frac{n}{2}-1$$

(bởi vì $\left[\frac{n}{2}\right]>\frac{n}{2}-1$). Vì vậy $\pi(n)\le\frac{1}{2}n-1$ đối với $n\ge 15$ và bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 8. *Giả sử R_n là ký hiệu tích tất cả các số nguyên tố p sao cho $n<p\le 2n$ và giả sử $R_n=1$ trong trường hợp khi không có số nguyên tố nào như vậy cả. Khi đó $R_n>\frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}}$ (4) đối với tất cả các số tự nhiên $n\ge 98$.*

Chứng minh. Từ định nghĩa của R_n ta suy ra rằng $R_n\mid\binom{2n}{n}$. Do đó $\binom{2n}{n}=Q_n.R_n$, trong đó Q_n là số tự nhiên. Từ đó do bổ đề 6 ta kết luận rằng không có một số nguyên tố p nào, thỏa mãn điều kiện $n<p\le 2n$, là có mặt trong phân tích số Q_n thành các thừa số nguyên tố cả. Vì vậy số nguyên tố p nằm trong phân tích đó cần phải $\le n$. Nhưng khi đó theo bổ đề 5 thì chúng cần phải

$\le \frac{2}{3}n$. Như vậy tích của tất cả các số nguyên tố khác nhau sao cho $p \mid Q_n$ sẽ không vượt quá tích tất cả các số nguyên tố $\le \frac{2}{3}n$ và do đó theo bổ đề 2 sẽ $< 4^{\left[\frac{2n}{3}\right]} \le 4^{\frac{2n}{3}}$. Từ bổ đề 3 và quan hệ $Q_n \mid \binom{2n}{n}$ ta kết luận rằng số mũ của số nguyên tố p nằm trong phân tích số Q_n thành các thừa số nguyên tố sẽ >1 chỉ trong trường hợp khi $p < \sqrt{2n}$. Số các số nguyên tố như vậy theo bổ đề 7 (được khi ta thay n trong đó bằng $\left[\sqrt{2n}\right]$, và bởi vì ta thấy rằng từ điều kiện $n \ge 98$ ta có $\sqrt{2n} \ge 14$, từ đó $\left[\sqrt{2n}\right] \ge 14$) phải nhỏ hơn $\frac{\sqrt{2n}}{2}$. Theo bổ đề 4 tích lũy thừa của các số nguyên tố nằm trong phân tích số $\binom{2n}{n}$ thành các thừa số nguyên tố, do đó tích lũy thừa của các số nguyên tố nằm trong phân tích số Q_n thành các thừa số nguyên tố sẽ phải bé hơn $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$. Từ đó suy ra $Q_n < 4^{\frac{2n}{3}}.(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$. Nhưng do $\binom{2n}{n} = Q_n.R_n$ và theo bổ đề 1 $Q_n.R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ thì ta dễ dàng nhận được công thức (4). Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 9. *Đối với mọi số tự nhiên $k \ge 8$ ta có $2^k > 18(k+1)$.*

Chứng minh. Ta có $2^8 = 256 > 18.9$. Nếu $2^k > 18(k+1)$ thì $2^{k+1} = 2^k + 2^k$

$$> 18k + 18 + 18k + 18 > 18k + 36 = 18(k+2).$$

Vì vậy ta nhận được chứng minh bổ đề theo phương pháp quy nạp.

Bổ đề 10. *Đối với số thực $x \ge 8$ ta có $2^x > 18x$.*

Chứng minh. Đối với số thực $x \ge 8$ ta có $[x] \ge 8$. Do đó theo bổ đề 9 có $2^x > 2^{[x]} > 18([x]+1) > 18x$ từ đó $2^x > 18x$.

Bổ đề 11. *Đối với số tự nhiên $k \ge 6$ ta có $2^k > 6(k+1)$.*

Chứng minh. Do bổ đề 9 nên ta chỉ cần chứng minh bổ đề 11 đối với $k = 6$ và $k = 7$ là đủ. Nhưng $2^6 = 64 > 6.7$ và $2^7 = 128 > 6.8$.

Bổ đề 12. *Đối với số thực $x \ge 6$ ta có $2^x > 6x$.*

Chứng minh. Chứng minh tương tự như với Bổ đề 10.

Bổ đề 13. *Đối với số tự nhiên $n \ge 648$ thì $R_n > 2n$.*

Chứng minh. Do bổ đề 8 ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $n \ge 648$ thì $4^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}$ là đủ. Ta nhận xét rằng nếu $n \ge 648$ thì $\frac{\sqrt{2n}}{6} \ge 6$ và theo bổ đề 12 ta có BĐT $2^{\frac{\sqrt{2n}}{6}} > \sqrt{2n}$. Từ đó bằng cách nâng cả 2 vế BĐT này lên lũy thừa mũ $\sqrt{2n}$ ta nhận được $2^{\frac{n}{3}} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$. Nhưng do $n \ge 648$ tức là $\frac{2n}{9} > 8$ nên theo bổ đề 10 ta có $2^{\frac{2n}{9}} > 18.\frac{2n}{9} = 4n$ nên $2^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{4n} > 4n\sqrt{n}$. Vì vậy, với $n \ge 648$ ta có $2^{\frac{n}{3}} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$ và $2^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}$ từ đó $4^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}$. Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 14. *Nếu $n \ge 648$ thì giữa n và 2n có chứa ít nhất hai số nguyên tố khác nhau.*

Chứng minh. Theo định nghĩa số R_n ta suy ra rằng nếu giữa n và $2n$ có chứa ít nhất một số nguyên tố thì ta có $R_n \le 2n$ mà điều này đối với $n \ge 648$ là không thể có bởi vì nó sẽ mâu thuẫn với bổ đề 13. Bổ đề được chứng minh.

Định lý 2. *Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 5 thì giữa n và 2n có chứa ít nhất hai số nguyên tố khác nhau.*

Chứng minh. Đối với $n = 6$ định lý hiển nhiên là đúng bởi giữa 6 và 12 có hai số nguyên tố là 7 và 11. Vì vậy theo bổ đề 14 thì ta chỉ cần chứng minh

định lý là đúng đối với các số tự nhiên n sao cho $7 \le n < 648$ là đủ. Để chứng tỏ điều đó ta không nhất thiết phải kiểm tra trực tiếp định lý đối với từng số tự nhiên $7,8,\ldots,a = 647$. Chỉ cần thiết lập dãy tăng các số nguyên tố $q_0, q_1, \ldots, q_m$ sao cho $q_0 = 7$, $q_k < 2q_{k-2}$ đối với $k = 2,3,\ldots,m$ và $q_{m-1} > a$ là đủ. Thật vậy, giả sử n là ký hiệu một số tự nhiên nào đó sao cho $7 \le n \le a$. Số hạng đầu tiên của dãy $q_0, q_1, \ldots, q_m$ không vượt quá n, số hạng cuối cùng $> a \ge n$ do đó $> n$. Vì vậy tồn tại chỉ số lớn nhất k, nhỏ hơn $m-1$, sao cho $q_k \le n$. Vậy ta có $k+2 \le m$, $n < q_{k+1}$. Do có quan hệ $q_{k+2} \le 2q_k \le 2n$ đã xác lập rằng giữa n và $2n$ có chứa ít nhất 2 số nguyên tố: q_{k+1} và q_{k+2}.

Với sự giúp đỡ của bảng các số nguyên tố ta dễ dàng kiểm tra được rằng dãy số ở trên là dãy số 7, 11, 13, 19, 23, 37, 43, 73, 83, 139, 163, 277, 317, 547, 631, 653, 1259.

Ta thấy rằng từ chứng minh định lý 2 ta trực tiếp suy ra

Định lý 3 (Chebyshev). *Nếu n là số tự nhiên > 3 thì giữa n và $2n-2$ có chứa ít nhất là một số nguyên tố.*

Chứng minh. Đối với $n = 4$ và $n = 5$ định lý là đúng, bởi vì giữa 4 và 6 có chứa số nguyên tố 5, giữa 5 và 8 có chứa số nguyên tố 7. Nếu $n > 5$ theo định lý 2 giữa n và $2n$ có chứa ít nhất hai số nguyên tố. Nếu số lớn nhất trong chúng là số $q = 2n-1$ thì số kia cần phải $< 2n-2$, bởi vì $2n-2$ với $n > 5$ là một hợp số. Vì vậy $n < p < 2n-2$. Cũng vậy nếu $q < 2n-1$ thì do $p < q$ một lần nữa ta lại có $n < p < 2n-2$.

Hệ quả 1. *Nếu n là số tự nhiên > 1 thì giữa n và 2n có chứa ít nhất một số nguyên tố.*

Chứng minh. Theo định lý 3 thì hệ quả là đúng với các số tự nhiên $n > 3$. Còn với $n = 2$ và $n = 3$ thì hệ quả cũng đúng, do giữa 2 và 4 có số nguyên tố 3, còn giữa 3 và 6 có số nguyên tố 5.

Năm 1892 *J. J. Sylvester* đã chứng minh (trong [2]) một tổng quát hóa sau đây của hệ quả 1: "*Nếu $n > k$ thì trong dãy số $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ tồn tại ít nhất một số có ước số nguyên tố $> k$*". Từ đó ta nhận được hệ quả 1 với $n = k+1$. Mệnh đề tổng quát đó đã được *I. Schur* (trong [3]) chứng minh vào năm 1929. Năm 1934 *P. Erdos* (trong [4]) đã cho một chứng minh ngắn gọn và sơ cấp hơn (xem *Erdos* [5]).

Hệ quả 2. *Đối với các số tự nhiên $k > 1$ ta có $p_k < 2^k$ (theo thứ tự p_k là số nguyên tố thứ k).*

Chứng minh. Ta có $p_2 = 3 < 2^2$. Nếu đối với số tự nhiên k mà bất đẳng thức $p_k < 2^k$ là đúng thì theo hệ quả 1 tồn tại ít nhất một số nguyên tố nằm giữa 2^k và 2^{k+1}, mà rõ ràng nó lớn hơn số p_k. Vì vậy ta suy ra bất đẳng thức $p_{k+1} < 2^{k+1}$ là đúng và hệ quả 2 được chứng minh bằng phép quy nạp toán học theo k.

Hệ quả 3. *Nếu $n > 1$ thì trong phân tích số $n!$ thành các thừa số nguyên tố thì tồn tại ít nhất một thừa số nguyên tố có số mũ là 1.*

Chứng minh. Rõ ràng đối với $n = 2$ hệ quả là đúng. Nếu $n = 2k > 1$, trong đó k là số tự nhiên > 1 thì (do hệ quả 1) sẽ tồn tại số nguyên tố p sao cho $k < p < 2k$, từ đó $p < n < 2p$ do đó p là ước số của chỉ một thừa số trong tích $1.2\ldots n$. Mặt khác, nếu $n = 2k+1$, trong đó k là số tự nhiên thì tồn tại số nguyên tố p sao cho $k < p \le 2k < n$, từ đó $2k < 2p$, do đó $2k+1 < 2p$ sao cho như trong trường hợp đầu tiên ta có $p < n < 2p$ có nghĩa là một lần nữa ta lại thấy sự đúng đắn của hệ quả.

Từ hệ quả 3 ta trực tiếp suy ra kết quả sau.

Hệ quả 4. *Đối với các số tự nhiên $n > 1$ số $n!$ không phải là một lũy thừa của số tự nhiên với số mũ tự nhiên > 1.*

Bây giờ từ định lý 2 ta suy ra khẳng định sau đây.

Định lý 4. *Đối với các số tự nhiên $k > 3$ ta có $p_{k+2} < 2p_k$.*

Chứng minh. Giả sử k là số tự nhiên > 3. Khi đó $p_k > p_3 = 5$. Theo định lý 2 giữa p_k và $2p_k$ ☞

PROBLEMS IN THIS ISSUE (tiếp theo trang 23)

Problem T7/522. Given non-negative numbers a, b, c satisfying $25a+45b+52c \le 95$. Find the maximum value of the expression

$$\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1}.$$

Problem T8/522. Given a triangle ABC. Its incircle (I) is tangent to BC, CA, AB respectively at D, E, F. Let M be the reflection of F over B and N the reflection of E over C. The altitude DH of DEF intersects MN at G. Show that $DH = DG$.

Problem T9/522. Given non-negative numbers x, y, z satisfying $x+y+z=3$. Prove that

$$(x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) \le 36(xy+yz+zx).$$

Towards Mathematical Olympiad

Problem T10/522. The sequence (u_n) is determined as follows

$$\begin{cases} u_1 = 16, u_2 = 288 \\ u_{n+2} = 18u_{n+1} - 17u_n, \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

Find the smallest possible value for n so that u_n is divisible by 2^{2020}.

Problem T11/522. Find all functions $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ satisfying $f\left(\frac{f(n)}{n^{2020}}\right) = n^{2021}, (\forall n \in \mathbb{Z})$.

Problem T12/522. Given a triangle ABC. Let A' be the reflection of A over the midpoint M of BC. The line AA' intersects $(A'BC)$ at the second point K. Let I, J respectively be the centers of (KAB) and (KAC). IJ intersects BC at S. Show that SA is a tangent line of the circumcircle (O) of ABC.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

☞

có ít nhất là hai số nguyên tố và do hai số nguyên tố bé nhất lớn hơn p_k là các số nguyên tố p_{k+1} và p_{k+2}, nên ta phải có $p_{k+2} < 2p_k$.

Ngược lại từ định lý 4 ta có thể trực tiếp suy ra định lý 2. Thật vậy, giả sử định lý 4 là đúng và giả sử n là ký hiệu số tự nhiên bất kỳ >6. Vậy $n \ge 7$, có nghĩa là $p_4 = 7 \le n$. Giả sử p_k là số nguyên tố lớn nhất không vượt quá n; Rõ ràng $k > 3$ và $p_{k+1} > n$. Theo định lý 4 ta có $p_{k+2} < 2p_k \le 2n$. Vì vậy giữa n và $2n$ có chứa ít nhất là hai số nguyên tố: p_{k+1} và p_{k+2}. Vì vậy ta chỉ còn phải kiểm tra tính đúng đắn của định lý 2 đối với $n = 6$ thôi.

Vậy ta đã chứng minh được định lý 2 và định lý 4 là tương đương theo nghĩa từ định lý này suy ra định lý kia và ngược lại.

Hệ quả 1. Ta có $p_{k+1} < 2p_k$ đối với $k = 1, 2, \ldots$.

Chứng minh. Đối với $k = 4, 5, \ldots$ hệ quả 1 được suy ra trực tiếp từ định lý 4. Ta kiểm tra hệ quả 1 đối với các số $k = 1, 2, 3$: $p_2 = 3 < 4 = 2p_1$; $p_3 = 5 < 6 = 2p_2$; $p_4 = 7 < 10 = 2p_3$.

Hệ quả 2. *Đối với các số tự nhiên $k > 1$ ta có $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$.*

Chứng minh. Đối với $k > 3$ thì quan hệ này được suy trực tiếp từ Định lý 4: $p_{k+2} < 2p_k < p_k + p_{k+1}$ (do $p_k < p_{k+1}$). Nhưng nó đồng thời cũng đúng đối với $k = 2$ và $k = 3$. Thật vậy, $p_4 = 7 < 3 + 5 = p_2 + p_3$ và $p_5 = 11 < 5 + 7 = p_3 + p_4$.

Một chứng minh khá phức tạp nhưng hoàn toàn sơ cấp. Hy vọng các bạn yêu toán sẽ học hỏi được nhiều điều từ chứng minh này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Erdos P. Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Litt. Sci. Szeged, 5, 1932, p. 194—198.

[2]. Sylvester J. J. On arithmetical series, Messenger Math, 21, 1892, p. 1 —19, .87—120.

[3]. Schur I. Einige Satze fiber Primzahlen mit Anwendung auf Irreduzibilitatsfragen, S. B. Preuss. Akad. Wiss., Phus. Math. KL, 23, 1929, p. 1—24.

[4]. Erdos P. A theorem of Sylvester and Schur, J. London Math. Soc, 9, 1934, p.282—288.

[5]. Erdos P. On consecutive integers, Nieuw. Arch Wisk., C,3, 1955, p. 124-128.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 62

PROBLEM. *Let n be the smallest positive integer such that the sum of its digits is equal to 2020. Find the number of digits of n.*

Solution. To find such smallest positive integer *n*, we should have 9 as the digits as many as possible in *n*.

We have 2020 = 224 x 9 + 4.

Therefore the number n is 499…9 (224 number 9's) and it has 225 digits.

TỪ VỰNG

digit : *chữ số*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National university, Hanoi*)

****

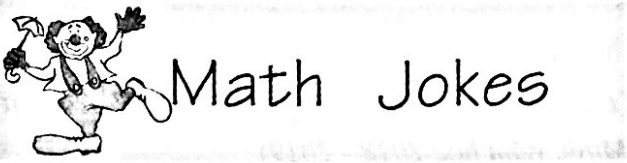
BÀI DỊCH SỐ 60

BÀI TOÁN. *Hãy tính số các điểm nguyên nằm trên mặt hoặc bên trong khối tứ diện được xác định bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng* $x + y + z \leq 30$.

Lời giải. Ta cần tìm bộ ba số tự nhiên (x, y, z) thỏa mãn bất đẳng thức $x + y + z \leq 30$. Như trong số báo trước, chúng ta có thể dễ nhận thấy rằng số các điểm nguyên thỏa mãn đề bài đúng bằng số nghiệm tự nhiên của phương trình $x + y + z + t = 30$. Nó bằng C_{33}^{3}.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Phạm Văn Thông*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Văn Nhật Huy*, 11 Toán 1, *Ngô Hữu Quốc Bảo*, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 11 Toán 2, *Lê Thị Minh Thùy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



"*Two things are infinite: The universe and human stupidity; and I'm not sure about the universe.*"

Alberts Einstein

A famous statistician would never travel by airplane, because he had studied air travel and estimated the probability of there being a bomb any given flight was 1 in a million, and he was not prepared to accept these odds.

One day the colleague met him at the conference far from home.

"*How did you get here, by train?*

"*No, I flew.*"

"*What about your possibility of a bomb?*"

"*Well, I began thinking that if the odds of one bomb are* 1: 1000000, *then the odds of two bombs are* $\frac{1}{1000000} \times \frac{1}{1000000}$. *This is very, very small probability, which I can accept. So, now I bring my bomb along!*"

****

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 43. *Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.*

(Đề thi TS vào lớp 10 chuyên toán – TP. Hồ Chí Minh, năm học 2018 - 2019)

Lời giải.

Cách 1: *Sử dụng phương pháp đánh giá*

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2 - xy + y^2) = 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x-y)^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 6 - (x-y)^2 \le 6.$$

Suy ra $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$.

$$P = x^2 + y^2$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{3(x^2+y^2)}{2}$$
$$\ge \frac{2}{3}.\frac{3(x^2+y^2)-(x+y)^2}{2}$$
$$= \frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2) = 2.$$

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1$, $y = -1$.

Cách 2: *Sử dụng phương pháp bất đẳng thức*

Ta có: $\frac{3}{P} = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2}$

$$= 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$x^2 + y^2 \ge 2|xy|$$
$$\Leftrightarrow \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \le \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{xy}{x^2 + y^2} \le \frac{1}{2}.$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \le 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} \le 1 + \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{3}{P} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \le P \le 6.$$

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$;

$\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1$, $y = -1$.

Cách 3: *Sử dụng phương pháp miền giá trị*

Ta có: $\frac{P}{3} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{3} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1}.$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ và $M = \frac{t^2 + 1}{t^2 - t + 1}$. Với mỗi giá trị M thuộc miền giá trị của hàm số thì phương trình $\frac{t^2 + 1}{t^2 - t + 1} = M$ có nghiệm t khi và chỉ khi phương trình: $(M-1)t^2 - Mt + M - 1 = 0$ (*) có nghiệm t.

Nếu $M = 1$ thì phương trình (*) có nghiệm $t = 0$.

Nếu $M \ne 1$ thì (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

$$\Leftrightarrow M^2 - 4(M-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le M \le 2$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{P}{3} \le 2 \Leftrightarrow 2 \le P \le 6.$$

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$;

$\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1$, $y = -1$.

Cách 4: *Sử dụng điều kiện hệ đối xứng có nghiệm*

(ycbt) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = P - 3 \\ (x+y)^2 = P + 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = P - 3 \\ (x+y)^2 = P + 2(P-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = P - 3 \\ (x+y)^2 = 3P - 6 \geq 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 3P - 6 - 4(P-3) \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 6$ và $3P - 6 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 2$. Suy ra $2 \leq P \leq 6$.

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$;

$\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1,\ y = -1$.

Cách 5: *Sử dụng phương pháp hàm số*

Đặt $t = xy$. Từ $x^2 - xy + y^2 = 3$

$\Leftrightarrow 3xy = -3 + (x+y)^2 \geq -3 \Rightarrow xy \geq -1$ và

$x^2 - xy + y^2 = 3 \Leftrightarrow xy = 3 - (x-y)^2 \leq 3 \Rightarrow xy \leq 3$.

Suy ra $-1 \leq xy \leq 3$ hay $-1 \leq t \leq 3$. Ta có:

$$P = x^2 + y^2 = 3 + xy = 3 + t$$

Xét $f(t) = t + 3,\ t \in [-1;3]$, $f(t)$ là hàm số đồng biến. Do đó: $-1 \leq t \leq 3$

$$\Leftrightarrow f(-1) \leq f(t) \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq f(t) \leq 6.$$

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$;

$\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1,\ y = -1$.

Cách 6: *Sử dụng phương pháp đạo hàm*

Ta có: $\dfrac{P}{3} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{3} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1}$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ và xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^2 - t + 1},\ t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-t^2 + 1}{(t^2 - t + 1)^2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Suy ra: $\dfrac{2}{3} \leq f(t) \leq 2$

hay $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{P}{3} \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq P \leq 6$.

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$;

$\min P = 2 \Leftrightarrow x = 1,\ y = -1$.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải của bạn *Trần Văn Hạnh*, người giới thiệu bài toán 43, Tòa soạn cũng nhận được một số cách giải tốt từ: *Trần Văn Quân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Lê Ngọc Cẩm Tú*, *Nguyễn Phương Thảo*, *Từ Nguyễn Đức Anh*, 10 Toán 1, *Lê Thị Thanh Tâm*, *Lê Thủy Tiên*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, tỉnh **Bình Định**. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 45 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.1.2021.

BÀI TOÁN 45. *Cho n số thực dương* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. *Chứng minh bất đẳng thức:*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Thái Bình)

BÀI TOÁN 51. (2002 Romanian Team Selection Test for JBMO) *Bốn chữ số cuối của một số chính phương bằng nhau. Tất cả các chữ số đó bằng 0.*

Lời giải. Ký hiệu k^2 là số chính phương và a là chữ số xuất hiện trong 4 chữ số cuối của nó. Dễ thấy a là một trong các chữ số: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Ta có: $k^2 \equiv a.1111 \pmod{16}$ (1).

1) Nếu $a = 0$ thì ta có ngay điều cần chứng minh.

2) Giả sử rằng $a \in \{1,5,9\}$. Do $k^2 \equiv 0 \pmod 8$, $k^2 \equiv 1 \pmod 8$, $k^2 \equiv 4 \pmod 8$ và $1111 \equiv 7 \pmod 8$ nên ta có: $1.1111 \equiv 7 \pmod 8$, $5.1111 \equiv 3 \pmod 8$, $9.1111 \equiv 7 \pmod 8$. Vậy (1) không đúng.

3) Giả sử $a \in \{4,6\}$. Do $1111 \equiv 7 \pmod{16}$ nên $4.1111 \equiv 12 \pmod{16}$ và $6.1111 \equiv 10 \pmod{16}$.

Như vậy trong trường hợp này (1) cũng không đúng.

Kết luận: Từ các trường hợp trên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều có cách giải đúng cho bài này với những đánh giá khác nhau. Tuy nhiên một số bạn lập luận còn dài. Xin nêu tên các bạn là: *Phan Trung Kiên,* 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**. **Đồng Tháp**; *Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Đào Văn Nam*, 8C2, THCS&THPT Archimedes Đông Anh, **Hà Nội**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 30.1.2021

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

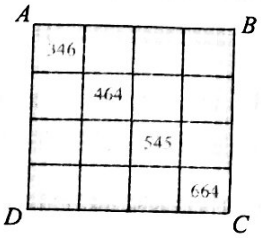
BÀI TOÁN 53. *Tam giác nguyên được định nghĩa là tam giác có số đo các cạnh là các số nguyên. Hãy tìm tất cả các tam giác nguyên có chu vi bằng diện tích (không tính đến đơn vị đo).*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

****

Giải đáp: ĐỐ VUI T12.2019

Đề bài. *Cho hình vuông ABCD gồm 16 ô vuông như hình vẽ. Bạn hãy điền tiếp vào mỗi ô vuông còn trống của hình vuông đó một số gồm ba chữ số với các chữ số đó thuộc tập hợp các chữ số {3, 4, 5, 6} sao cho các số trong các ô vuông đều khác nhau mà tổng các số theo mỗi hàng ngang, tổng các số theo mỗi cột dọc, tổng các số theo mỗi đường chéo AC và BD đều bằng nhau và bằng 2019.*

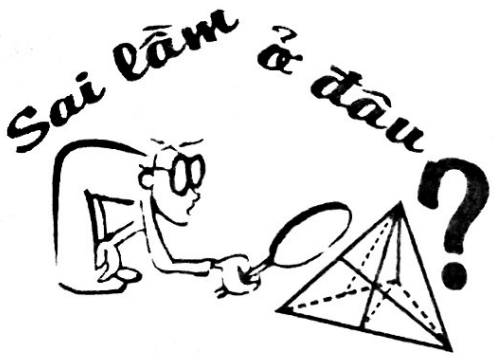


Lời giải. Tổng các số theo đường chéo AC bằng 346 + 464 + 545 + 664 = 2019. Gọi a, b, c, d là các chữ số hàng đơn vị của 4 số thuộc một cột thì phải có $12 = 3.4 \le a + b + c + d \le 6.4 = 24$ nên $a + b + c + d = 19$. Từ 19 = 3 + 4 + 6 + 6 = 3 + 5 + 5 + 6 = 4 + 4 + 5 + 6 = 4 + 5 + 5 + 5 ta tạo được ma phương 4x4 sao cho tổng các số theo mỗi hàng ngang, tổng các số theo mỗi cột dọc, tổng các số theo mỗi đường chéo AC và BD đều bằng nhau và bằng 19. Làm tương tự khi a, b, c, d là các chữ số hàng chục của 4 số thuộc một cột thì phải có $a + b + c + d = 20$, khi a, b, c, d là các chữ số hàng trăm của 4 số thuộc một cột thì phải có $a + b + c + d = 18$. Tổ hợp ba ma phương đó ta được ma phương 4x4 mà mỗi ô vuông là một số có ba chữ số với các chữ số thuộc tập hợp {3, 4, 5, 6} thỏa mãn yêu cầu về tổng các số, chỉ còn xét tất cả 16 số đó phải khác nhau. Một cách điền số thỏa mãn đề bài như hình bên.

346	564	663	446
645	464	355	555
465	665	545	354
563	336	456	664

Hoan nghênh bạn *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7A3, THCS Pom Lót, huyện Điện Biên, **Điện Biên** đã cho một đáp án đúng.

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: TIẾP TUYẾN PHÂN BIỆT

(Đề đăng trên TH&TT số 517, tháng 7 năm 2020)

Phân tích sai lầm. Cách giải như trên mới chỉ là điều kiện cần, chưa đủ.

Lời giải đúng. Cách giải đúng, *phải bổ sung điều kiện đủ* như sau: Ngược lại, với $-1<b<-\frac{15}{16}$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt. Giả sử 4 nghiệm phân biệt đó là p,q,r,s .

Giả sử tại hai điểm có 2 hoành độ khác nhau p,q nhưng có 2 tiếp tuyến trùng nhau, nghĩa là thỏa mãn:

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}p^3+3p^2-2p=-\frac{4}{3}q^3+3q^2-2q\\ p^4-2p^3+p^2-1=q^4-2q^3+q^2-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}(p^3-q^3)-3(p^2-q^2)+2(p-q)=0\\ p^4-q^4-2(p^3-q^3)+p^2-q^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}(p^2+pq+q^2)-3(p+q)+2=0\\ (p^3+q^3+p^2q+pq^2)-2(p^2+pq+q^2)+p+q=0\end{cases}$$

Đặt $S=p+q, P=p.q$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases}\frac{4}{3}(S^2-P)-3S+2=0\\ (S^3-2PS)-2(S^2-P)+S=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4P=4S^2-9S+6\\ 2S^3-4PS-4S^2+4P+2S=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S^3-(4S^2-9S+6)S-4S^2+(4S^2-9S+6)+2S=0$$

$$\Leftrightarrow -2S^3+4S^2-13S+6=0\Rightarrow S=1, S=2, S=\frac{3}{2}.$$

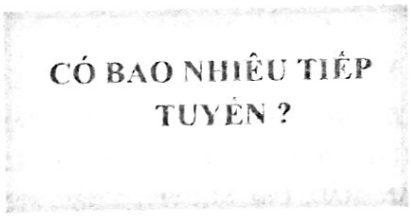
Với $S=1\Rightarrow P=\frac{1}{4}\Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$. Với $S=2\Rightarrow P=1$ $\Rightarrow p=q=1$. Với $S=\frac{3}{2}\Rightarrow P=\frac{3}{8}$. Do $p\neq q$ nên chỉ nhận $S=\frac{3}{2}, P=\frac{3}{8}$. Lúc này

$$(p,q)\in\left\{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4},\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right);\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)\right\}.$$

Vì $x=p, x=q$ là nghiệm của (1) nên $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$ là nghiệm của (1), từ (1) suy ra $b=-\frac{61}{64}$. Như vậy theo yêu cầu bài toán, điều kiện cần và đủ để qua M trên trục tung có các điểm $M(0;b)\in Oy$ từ đó kẻ đến đồ thị (C) có 4 tiếp tuyến phân biệt thì $b\in\left(-1;-\frac{15}{16}\right)\setminus\left\{-\frac{61}{64}\right\}$.

Nhận xét. Rất tiếc rằng không có bạn nào phát hiện được sai lầm của bài này.

KIHIVI



Đề bài. *Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị* $(C): y=x^4-2x^2-1$ *kẻ từ điểm* $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Sau đây là lời giải của bạn Duyên lớp 11A3*:*

Gọi $M_0\left(x_0;x_0^4-2x_0^2-1\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C). Ta có: $y'=4x^3-4x, y'(x_0)=4x_0^3-4x_0$. Tiếp tuyến với (C) tại M_0 có PT: $y=\left(4x_0^3-4x_0\right)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2-1$ (d).

Tiếp tuyến d đi qua điểm $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ khi và chỉ khi

$$-2=\left(4x_0^3-4x_0\right)\left(\frac{7}{3}-x_0\right)+x_0^4-2x_0^2-1$$

$$\Leftrightarrow 9x_0^4-28x_0^3-6x_0^2+28x_0-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2-1)(x_0-3)(9x_0-1)=0$$

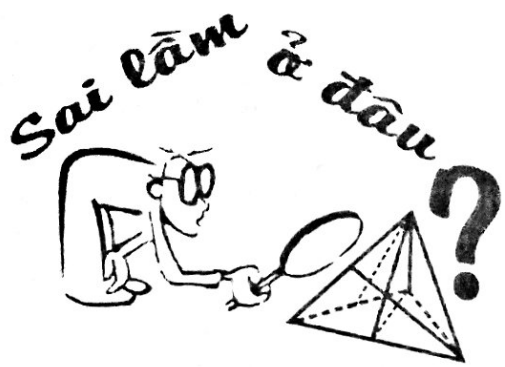
$$\Leftrightarrow x_0=\pm1, x_0=3, x_0=\frac{1}{9}.$$

Ta tìm ra 4 giá trị của x_0 nên có 4 tiếp điểm M_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy từ $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ kẻ được 4 tiếp tuyến tới đồ thị $(C): y=x^4-2x^2-1$.

Chọn đáp án D.

Các bạn có tìm ra kết quả giống kết quả của bạn Duyên không?

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU!

(Đề đăng trên TH&TT số 518, tháng 8 năm 2020)

Phân tích. Ta cần lưu ý rằng, để sử dụng BĐT Cauchy ta quan tâm tới hai điều: thứ nhất là chon được " điểm rơi" (giá trị xảy ra dấu "=") của bài toán nằm trong tập xác định cần xét, thứ hai chọn các số hạng trong biểu thức để đánh giá sao cho biểu thức cần xét đạt được GTLN (GTNN) tại điểm rơi. Trong lời giải, bạn *An* đã đã mắc sai lầm ở hai điều đã chỉ ra này, cụ thể: bạn *An* đã chọn hai số hạng là x và $\frac{4}{x}$ là không phù hợp vì khi áp dụng BĐT Cauchy thì dấu "=" xảy ra khi $x=2\notin[3;+\infty)$.

Lời giải đúng. Ta có: $f(x)=\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}}$ (do $x\geq 3$).

Sử dụng giả thiết $x\geq 3$ và áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$x+\frac{4}{x}=\frac{4x}{9}+\frac{4}{x}+\frac{5x}{9}\geq 2\sqrt{\frac{4x}{9}.\frac{4}{x}}+\frac{5.3}{9}=\frac{13}{3}.$$

Do đó: $\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}}\leq\frac{3}{13}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=3$. Vậy $\max\limits_{x\geq 3} f(x)=\frac{3}{13}$.

Chú ý: Có thể dùng công cụ đạo hàm để tìm GTLN của $f(x)$ như sau: $f'(x)\frac{-x^2+4}{x^2+4}<0,\forall x\geq 3\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[3;+\infty)$, do đó $f(x)\leq f(3)=\frac{3}{13}\Rightarrow\max\limits_{x\geq 3} f(x)=\frac{3}{13}$.

Nhận xét. Tuyên dương ba bạn đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng, đó là các bạn: *Lê Ngô Nhật Huy*, số nhà 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**; *Nuyễn Anh Thư*, 8A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Lê Thị Thanh Tâm*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

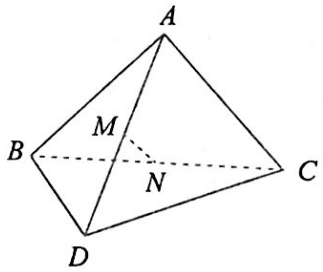
KIHIVI

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Trong bài kiểm tra môn Hình học lớp 11 có câu hỏi sau đây:

Cho tứ diện ABCD có AC = a, BD = 3a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết góc giữa hai đường thẳng AC và DB là 60^0. Tính MN.

Sau đây là phần lập luận và đáp án của bạn *Minh Quân*:



Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$ nên

$2.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

Do đó: $4.MN^2=AC^2+DB^2+2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

$=a^2+9a^2+2.a.3a.\cos 60^0=13a^2$.

Vậy $MN=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Theo các bạn, bạn Minh Quân có được điểm tối đa của câu hỏi này không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 522 (12.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 *Thư gửi bạn đọc*

2 **Dành cho Trung học Cơ sở**

For Lower Secondary School

Bùi Minh Trung – Khai thác định lý Menelaus vào giải toán hình học phẳng bậc trung học cơ sở.

10 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Bắc Ninh, năm học 2020 - 2021.

12 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Bình Phước, năm học 2020-2021.

13 **Phương pháp giải toán**

Nguyễn Thanh Giang – Ứng dụng lượng giác trong chứng minh bất đẳng thức.

22 **Đề ra kỳ này**

T1/522, ..., T12/522, L1/522, L2/522.

Problem in This Issue

24 **Giải bài kì trước**

T1/518, ..., T12/518, L1/518, L2/518.

Solutions to Previous Problems

33 **Lịch sử toán học**

Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Phạm Vũ Lộc, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết – Bài toán bó vật trong hai cuốn sách Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của cấp số cộng.

37 **Bạn có biết**

Hoàng Đức Tân – Làm mạnh thêm bổ đề Bertrand.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 62

Bài dịch số 60.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**

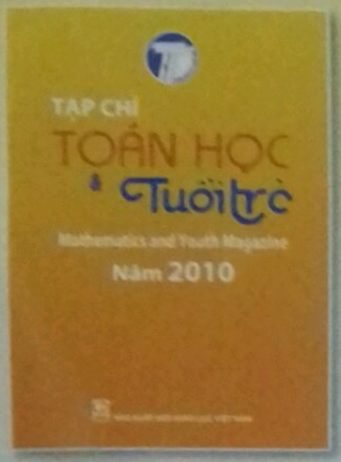
Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

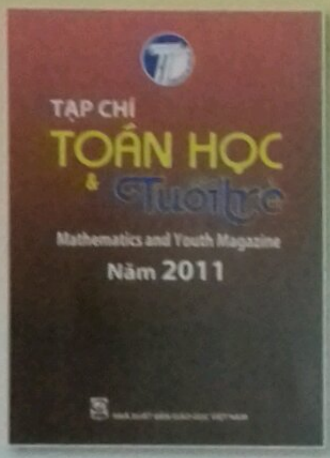
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

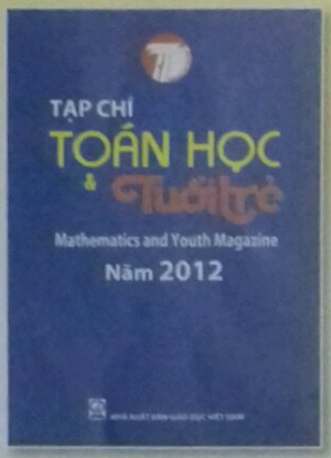
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

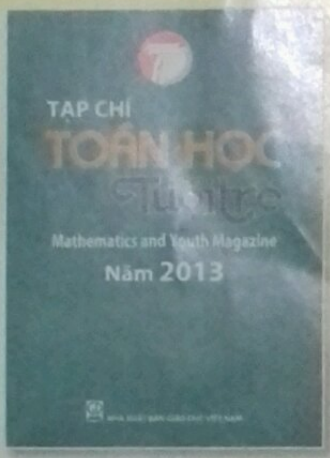
Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

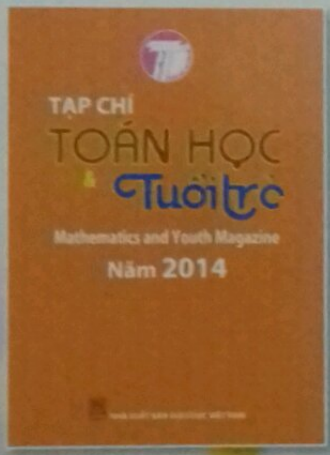


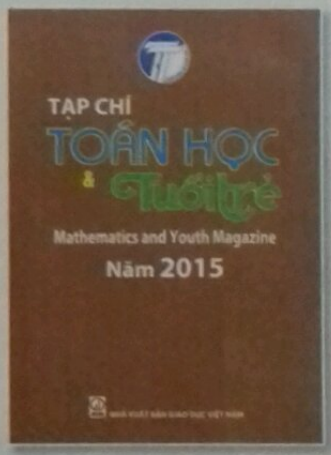


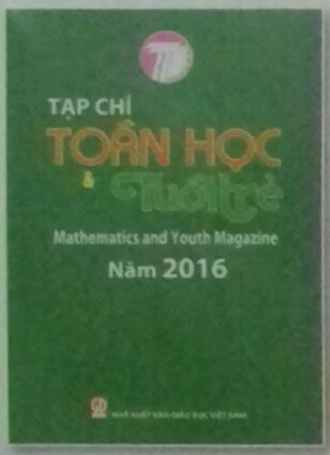


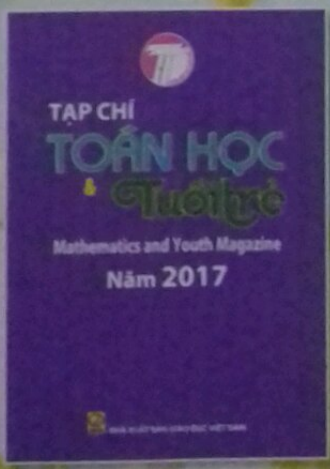


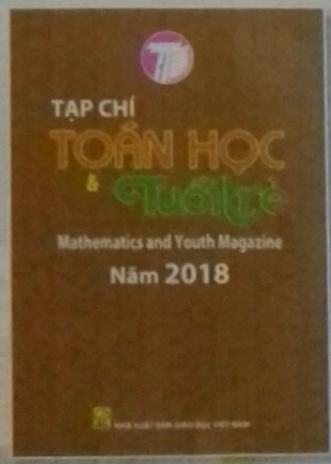
Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

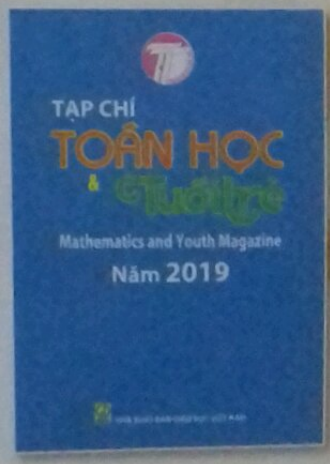












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhoctuoitre@vnuhp.edu.vn

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM ĐẢM BẢO ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC 2020-2021

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo tại công văn số 2058/BGDĐT-GDTH ngày 10/6/2020 về việc bồi dưỡng giáo viên (GV) và cung ứng sách giáo khoa (SGK) lớp 1 năm học 2020-2021, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đang khẩn trương triển khai kế hoạch phát hành SGK, đảm bảo GV và học sinh (HS) có đầy đủ, đồng bộ SGK nói chung và SGK lớp 1 nói riêng trước ngày 15/8/2020.

NXBGDVN đã có sự chuẩn bị kĩ lưỡng trong công tác in - phát hành đảm bảo việc cung ứng đầy đủ, đồng bộ, kịp thời SGK lớp 1 mới đến HS, GV cả nước. SGK lớp 1 được NXBGDVN triển khai in tại các nhà in có trang thiết bị hiện đại, công nghệ tiên tiến nhằm đảm bảo chất lượng, tiến độ. Sử dụng tem chống giả công nghệ 4.0 cho SGK mới nhằm hỗ trợ HS, GV khai thác các học liệu điện tử kèm theo SGK và hạn chế sách giả, sách in lậu.

SGK lớp 1 bắt đầu được phát hành từ 15/6/2020 trên toàn quốc, đảm bảo HS và GV có đủ sách trước ngày 15/8/2020 theo chỉ đạo của Bộ GD&ĐT.

Trong tháng phát hành phục vụ khai giảng năm học mới, toàn hệ thống cửa hàng bán lẻ chuẩn bị đầy đủ hàng hoá, mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời tổ chức các chương trình khuyến mại.

- Đường dây nóng giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK tiếp tục được duy trì từ ngày 15/6/2020 như sau:

Số điện thoại: **0377 333 545**

Thời gian trực: ***từ* 8h00 *đến* 22h00** (*từ ngày* **15/6** *đến ngày* **15/9/2020**, *kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ*).

- Để tránh mua phải sách giả, sách in lậu, GV, PH và HS nên tìm mua sách tại các cửa hàng thuộc hệ thống phân phối chính thức của NXBGDVN, các công ty sách - thiết bị trường học địa phương; không mua sách từ các nguồn trôi nổi trên thị trường.

Nhằm giúp GV, PH và HS thuận tiện trong việc tìm hiểu, góp ý cho SGK lớp 1 mới, NXBGDVN đã đăng tải để bạn đọc truy cập miễn phí phiên bản điện tử các bộ SGK lớp 1 cùng những tài liệu và học liệu hỗ trợ GV giảng dạy SGK mới tại địa chỉ *nxbgd.vn/sachdientu* và *nxbgd.vn/taphuan*. Ngoài ra, GV, PH, HS có thể trao đổi những vấn đề xung quanh SGK mới của NXBGDVN thông qua địa chỉ E-mail: *hoidapsgk@nxbgd.vn*.

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT12M0
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng