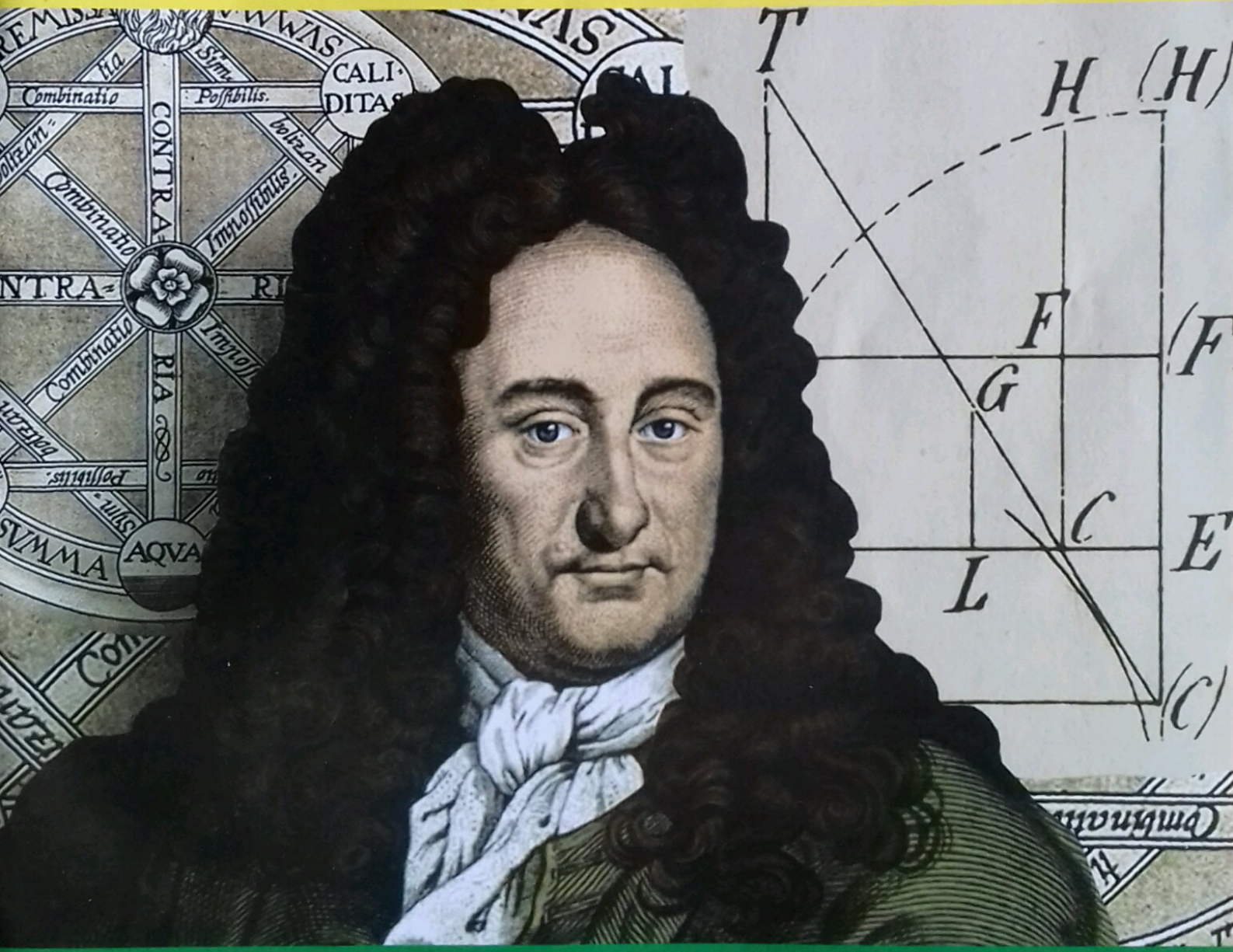
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2020
Số 521

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



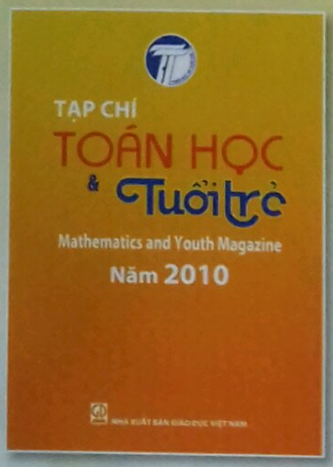
Nhà toán học Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

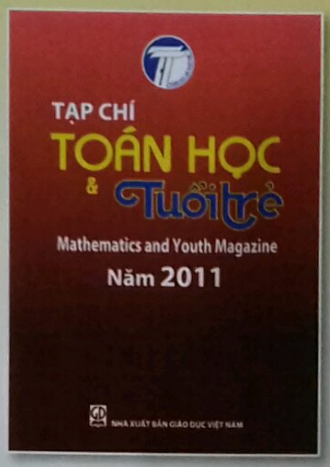
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

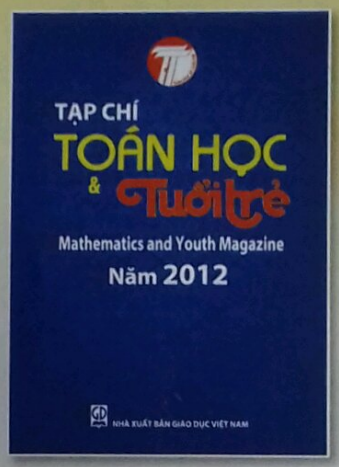
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

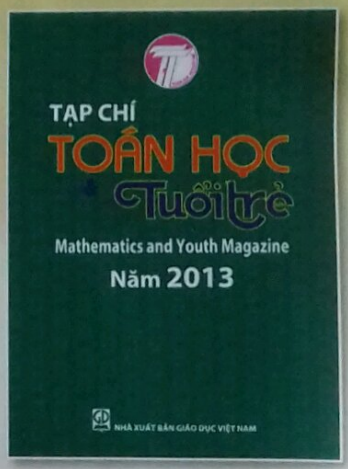
Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

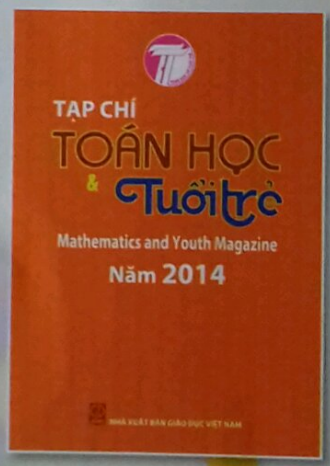


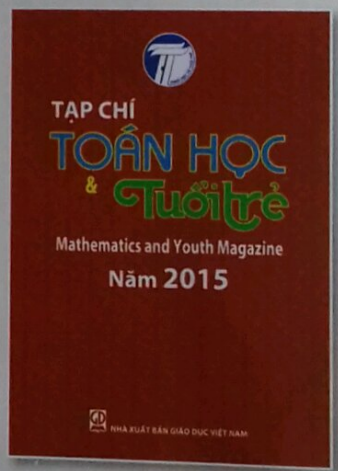


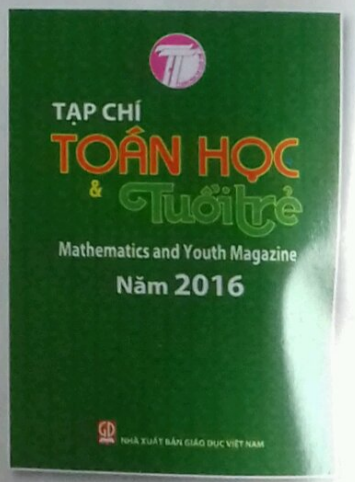


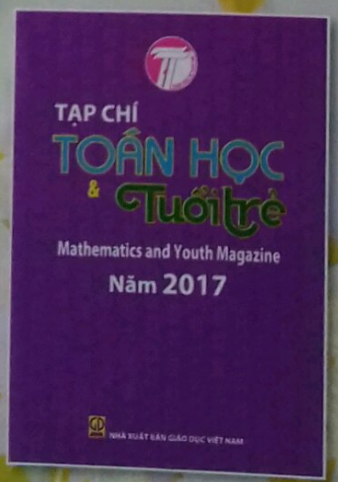


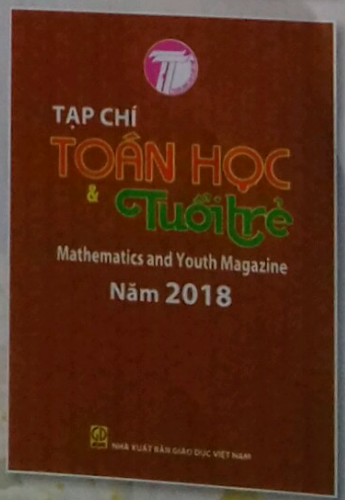
Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

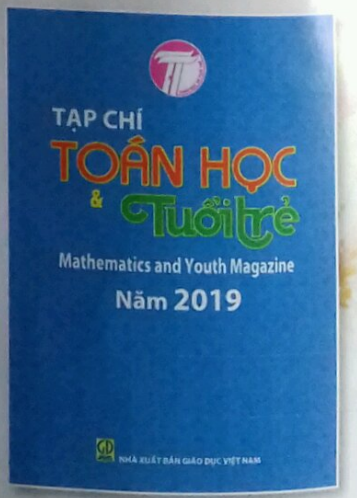












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO

TRUNG HỌC CƠ SỞ

XUNG QUANH BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC GIÁ TRỊ NGUYÊN

VŨ HỮU CHÍN (GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Trong quá trình biến đổi một biểu thức ra là số nguyên, thường cho ta một kết quả đẹp trong toán học. Tuy nhiên, việc chứng minh một biểu thức là số nguyên, hay tìm giá trị của biến để một biểu thức là số nguyên là những dạng toán khó nhưng cách giải lại rất phong phú. Để giải các bài toán biểu thức về số nguyên phải kết hợp giữa việc biến đổi đại số với các kiến thức về số học. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số bài toán xung quanh bài toán về biểu thức có giá trị là số nguyên.

I. CHỨNG MINH PHÂN THỨC ĐẠI SỐ LÀ SỐ NGUYÊN.

Bài 1.1. *Chứng minh với mọi $x \in \mathbb{Z}$ thì biểu thức sau nhận giá trị nguyên*

$$P(x) = 1985.\frac{x^3}{3} + 1979.\frac{x^2}{2} + 5.\frac{x}{6}.$$

Lời giải. Ta có:

$$P(x) = \left(1983.\frac{x^3}{3} + 989x^2 + x\right) + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6}$$

$$= \left(661x^3 + 989x^2 + x\right) + \frac{4x^3 + 3x^2 - x}{6}$$

$$= \left(661x^3 + 989x^2 + x\right) + \frac{3x^2(x+1) + x(x-1)(x+1)}{6}.$$

Vì $3x^2(x+1) \vdots 6$; $x(x-1)(x+1) \vdots 6$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ nên giá trị của $P(x)$ luôn là số nguyên.

Nhận xét. Tách biểu thức $P(x)$ thành biểu thức nguyên và phân thức, dựa vào dấu hiệu chia hết chứng minh phân thức có giá trị là số nguyên.

Bài 1.2. *Cho* $P = \dfrac{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)....(103^4+4)}{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)....(101^4+4)}$.

Chứng minh rằng P là số nguyên.

Lời giải. Ta có:

$$n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2);$$

$$(n+2)^2 - 2(n+2) + 2 = n^2 + 2n + 2.$$

Cho $n = 1,3,5,...$ ta có:

$$P = \frac{(3^2 - 2.3 + 2)(3^2 + 2.3 + 2)}{(1^2 - 2.1 + 2)(1^2 + 2.1 + 2)}...$$

$$...\frac{(103^2 - 2.103 + 2)(103^2 + 2.103 + 2)}{(101^2 - 2.101 + 2)(101^2 + 2.101 + 2)}$$

$$= \frac{103^2 + 2.103 + 2}{1^2 - 2.1 + 2} = 10817.$$

Vậy P là số nguyên.

Nhận xét. Rút gọn biểu thức dựa vào hằng đẳng thức đáng nhớ. Ta có thể giải bài toán tổng quát với biểu thức:

$$P = \frac{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)....\left[(4n-1)^4+4\right]}{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)....\left[(4n-3)^4+4\right]}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài 1.3. *Cho biểu thức*

$$A = \frac{x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2},$$

trong đó $x, y, z \in \mathbb{Z}$ và $x > y > z$. Chứng minh A là số nguyên dương.

Lời giải. Xét tử số của biểu thức A:

$$x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$$

$$= x^4(y - x + x - z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$$

$$= (x-y)(z^4 - x^4) + (z-x)(y^4 - x^4)$$

$$= (x-y)(z-x)\left[(z+x)(z^2+x^2) - (x+y)(x^2+y^2)\right]$$

$$= (x-y)(x-z)(y-z)\left[x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz\right]$$

$$= \frac{1}{2}.(x-y)(x-z)(y-z)\left[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2\right]$$

Do $x > y > z$ nên $A = \frac{1}{2}.(x-y)(x-z)(y-z) > 0.$

Mà trong ba số nguyên x, y, z có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ. Do đó có ít nhất một trong các hiệu $x-y, x-z, y-z$ là số chẵn. Suy ra A là số nguyên dương.

Bài 1.4. *Với a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca=abc+a+b+c$, $3+ab \neq 2a+b$, $3+bc \neq 2b+c, 3+ca \neq 2c+a$. Chứng minh rằng biểu thức sau là số nguyên*

$$P=\frac{1}{3+ab-(2a+b)}+\frac{1}{3+bc-(2b+c)}+\frac{1}{3+ac-(2c+a)}.$$

Lời giải. Từ $ab+bc+ca=abc+a+b+c$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)=1$, ta có:

$$P=\frac{1}{1+(1-a)+(1-a)(1-b)}+\frac{1}{1+(1-b)+(1-b)(1-c)}+\frac{1}{1+(1-c)+(1-c)(1-a)}$$

$$=\frac{1}{1+(1-a)+(1-a)(1-b)}+\frac{1-a}{(1-a)+(1-a)(1-b)+1}+\frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)+1+(1-a)}$$

$$=\frac{1+(1-a)+(1-a)(1-b)}{1+(1-a)+(1-a)(1-b)}=1.$$

Vậy biểu thức P là số nguyên.

Bài 1.5. *Cho a, b, c thỏa mãn đẳng thức $abc^2=1$. Chứng minh biểu thức*

$$P=\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bc^2}+\frac{1}{1+c+c^2+c^2a}+\frac{1}{1+c+ca+cab}$$

là số nguyên.

Lời giải. Ta có:

$$P=\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{a}{a(1+b+bc+bc^2)}+\frac{ab}{ab(1+c+c^2+c^2a)}+\frac{abc}{abc(1+c+ca+cab)}$$

$$=\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{a}{a+ab+abc+1}+\frac{ab}{ab+abc+1+a}+\frac{abc}{abc+1+a+ab}$$

$$=\frac{1+a+ab+abc}{1+a+ab+abc}=1.$$

Vậy biểu thức P là số nguyên.

Nhận xét. Giống như bài 1.4, trong bài này ta đã dựa vào giả thiết biến đổi bốn phân thức đã cho có cùng mẫu. Từ đó chứng tỏ được biểu thức đã cho là số nguyên.

Bài 1.6. *Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n>1$ thì giá trị của biểu thức $A=\frac{3n^2}{2n^2+n-1}+\frac{1}{n+1}$ không thể là một số tự nhiên.*

Lời giải. Ta có: $A=\frac{3n^2}{2n^2+n-1}+\frac{1}{n+1}$

$$=\frac{3n^2}{(n+1)(2n-1)}+\frac{1}{n+1}=\frac{3n^2+2n-1}{(n+1)(2n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n-1)}=\frac{3n-1}{2n-1}.$$

Cách 1. Giả sử A có giá trị là một số tự nhiên thì $(3n-1)\vdots(2n-1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n>1$). Suy ra:

$(6n-2)\vdots(2n-1) \Leftrightarrow [3(2n-1)+1]\vdots(2n-1)$.

$\Leftrightarrow 1\vdots(2n-1)$: vô lí vì $2n-1>1$ (do $n>1$).

Vậy giá trị biểu thức A không thể là số tự nhiên.

Cách 2. $A=\frac{3n-1}{2n-1}=1+\frac{n}{2n-1}$. Với $n \in \mathbb{N}, n>1$ thì $0<n<2n-1 \Rightarrow 0<\frac{n}{2n-1}<1$. Do đó $\frac{n}{2n-1}$ không là số nguyên, suy ra A không thể là số tự nhiên.

Nhận xét. Cách giải thứ nhất sử dụng phương pháp phản chứng, cách giải thứ hai sử dụng phương pháp tách biểu thức đã cho thành một biểu thức nguyên và một biểu thức không là số nguyên.

Bài 1.7. *Cho biểu thức $M=\frac{(x+y)^2}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$ với x, y là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.*

Lời giải. Ta có $M=\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)}$, với $x \neq y$.

Giả sử $M=\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x^2+y^2)} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1+\frac{2xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2xy \ge x^2+y^2 \Rightarrow x=y \text{ (vô lý).}$$

Vậy M không thể nhận giá trị là số nguyên.

II. TÌM GIÁ TRỊ CÁC BIẾN ĐỂ CHO BIỂU THỨC NHẬN GIÁ TRỊ LÀ SỐ NGUYÊN

Bài 2.1. *Cho biểu thức*

$$P=\left[\frac{3}{2}-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right).\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]:\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}.$$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho P có giá trị là số nguyên.

Lời giải. ĐK: $x\ne -3; x\ne -26; x\ne 2; x\ne -6; x\ne \pm 1$.

$$P=\left[\frac{3}{2}-\frac{x^6+x^4-x^4-1}{x^2+1}.\frac{x^2(x-4)+(x-4)}{(x+6)(x^6-1)}\right].\frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{x^6-1}{x^2+1}.\frac{(x^2+1)(x-4)}{(x+6)(x^6-1)}\right].\frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\left[\frac{3}{2}-\frac{x-4}{x+6}\right].\frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)}$$

$$=\frac{x+26}{2(x+6)}.\frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)}=\frac{3(x-2)}{2(x+3)}.$$

Để cho $P=\frac{3(x-2)}{2(x+3)}$ là số nguyên khi

$3(x-2)\vdots 2(x+3) \Rightarrow 3(x-2)\vdots (x+3)$

$\Leftrightarrow 3(x+3)-15 \vdots (x+3)$

$\Leftrightarrow 15\vdots (x+3) \Leftrightarrow x+3\in\{\pm 1;\pm 3;\pm 5;\pm 15\}$.

$\Leftrightarrow x\in\{-2;-4;0;-6;2;-8;12;-18\}$.

Kết hợp điều kiện và thử lại để giá trị biểu thức P nguyên khi $x\in\{-2;-4;0;-8;12;-18\}$.

Nhận xét. Khi tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị là số nguyên cần chú ý điều kiện tồn tại biểu thức, kết hợp với việc thử lại.

Bài 2.2. *Cho biểu thức*

$$P=\left(\frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27}+\frac{3}{x^2+9}\right):\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right).$$

Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị là số nguyên tố.

Lời giải. ĐK : $x\ne \pm 3$. Ta có:

$$P=\left[\frac{x(x+3)}{(x+3)(x^2+9)}+\frac{3}{x^2+9}\right]:\left[\frac{1}{x-3}-\frac{6x}{(x-3)(x^2+9)}\right]$$

$$=\frac{x+3}{x^2+9}:\frac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)}=\frac{x+3}{x^2+9}.\frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}.$$

Với $x\in\mathbb{Z}$ để P là số nguyên thì $x-3\in Ư(6)$, $x\ne\pm 3 \Leftrightarrow x-3\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$, $x\ne\pm 3$

$\Leftrightarrow x\in\{0;1;2;4;5;6;9\}$.

Mà P là số nguyên tố nên chỉ có các giá trị sau thỏa mãn $x\in\{4;6;9\}$.

Nhận xét. Khi tìm giá trị của biến để biểu thức nguyên tố, cần đối chiếu với điều kiện xác định của biểu thức và thử lại.

Bài 2.3. *Tìm tất cả các số hữu tỉ a sao cho* $|4a-2|\le 1$, *đồng thời giá trị* $P=\frac{4a-1}{27a^4}$ *là số nguyên.*

Lời giải. Từ $|4a-2|\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le a\le \frac{3}{4}$.

Cách 1. Ta có P là số nguyên không âm.

- Xét $P=0$, suy ra $a=\frac{1}{4}$.

- Xét $P=\frac{4a-1}{27a^4}\ge 1 \Leftrightarrow 27a^4-4a+1\le 0$

$\Leftrightarrow (3a-1)^2(3a^2+2a+1)\le 0.$

Vì $3a^2+2a+1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$ nên $3a-1=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$. Vậy $a\in\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right\}$.

Cách 2. Nếu $a\ge\frac{1}{4}$ thì $P\ge 0$.

$P=0$ khi và chỉ khi $a=\frac{1}{4}$.

Xét trường hợp $a>\frac{1}{4}$. Từ giả thiết, đặt $P=k$ (k nguyên dương). Đặt $k=\frac{1}{h}$, $0<h\le 1$. Ta có:

$$\frac{4a-1}{27a^4}=\frac{1}{h} \Leftrightarrow 27a^4-4ah+h=0.$$

$\Leftrightarrow 81a^4-18a^2+1+18a^2-12ah+3h-1=0$

$\Leftrightarrow (9a^2-1)^2+2(9a^2-6a+1)+12a-12ah+3h-3=0$

$\Leftrightarrow (9a^2-1)^2+2(3a-1)^2+3(4a-1)(1-h)=0 \quad (1).$

Với $0<h\le 1, a>\frac{1}{4}$ thì các hạng tử của vế trái của (1) không âm. Vậy đẳng thức (1) xảy ra khi :

$$\begin{cases}9a^2-1=0\\3a-1=0\\3(4a-1)(1-h)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}h=1\\a=\frac{1}{3}\end{cases},$$

thỏa mãn $\frac{1}{4}<a\le\frac{3}{4}$. Vậy $a\in\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right\}$.

Nhận xét. Trong hai cách giải, cách giải thứ nhất dễ hơn nhưng khó khăn trong cách thứ nhất là việc phân tích đa thức bậc 4 thành nhân tử.

Bài 2.4. *Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho biểu thức $P=\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$ là số nguyên.*

Lời giải. Ta có:

$$P=\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}=\frac{(x-1)(y-1)+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)}$$
$$=1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}.$$

Ta có: $x\ge 2, y\ge 2\Rightarrow 0<\frac{1}{x-1}\le 1,\ 0<\frac{1}{y-1}\le 1$.

Suy ra: $\begin{cases}1<P\le 3\\P\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow P\in\{2;3\}$.

Với $P=2$, ta có:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}=1\Leftrightarrow (x-1)(y-1)-(x-1)-(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}.$$

Với $P=3$, ta có:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}=2\Leftrightarrow 2(x-1)(y-1)-(x-1)-(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(2y-3)=1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3=1\\2y-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}.$$

Vậy các cặp (x,y) cần tìm là: $(3;3),(2;2)$.

Nhận xét. Từ đề bài giới hạn giá trị nguyên của biểu thức. Từ đó tìm các giá trị của biến để biểu thức có giá trị là số nguyên.

Bài 2.5. *Tìm $x,y\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $\frac{2x+1}{y}$ và $\frac{2y+1}{x}$ đều là số nguyên.*

Lời giải. Vì x, y có vai trò như nhau nên giả sử $x\ge y\ge 1$. Theo đề bài ta có $(2y+1)\vdots x, (2x+1)\vdots y$ $\Rightarrow 2y+1=kx\ (k\in\mathbb{Z}^+)$. Mà $x\ge y\Rightarrow 2y+1=kx\ge ky$ $\Rightarrow ky\le 2y+1\le 3y\Rightarrow k\le 3$. Suy ra $k\in\{1;2;3\}$.

- Với $k=1\Rightarrow 2y+1=x$, mà $2x+1\vdots y\Rightarrow$ $2(2y+1)+1\vdots y\Leftrightarrow 3\vdots y\Leftrightarrow y\in\{1;3\}$.

Nếu $y=1\Rightarrow x=3$; nếu $y=3\Rightarrow x=7$.

- Với $k=2\Rightarrow 2y+1=2x$ (loại).
- Với $k=3\Rightarrow 2y+1=3x\ge 3y\Rightarrow 1\ge y\Rightarrow 1=y$.

Do đó $x=y=1$.

Bài toán có các cặp (x,y) cần tìm là:

$$(3;1),(1;3),(3;7),(7;3),(1;1).$$

Bài 2.6. *Cho x, y là các số thực sao cho $x+\frac{1}{y}$ và $y+\frac{1}{x}$ đều là các số nguyên. Tìm $n\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $x^ny^n+\frac{1}{x^ny^n}$ là số nguyên.*

Lời giải. Ta có $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=xy+\frac{1}{xy}+2\in\mathbb{Z}$, nên $xy+\frac{1}{xy}\in\mathbb{Z}$. Suy ra:

$$\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2=x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}+2\in\mathbb{Z}.$$

Do đó $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\in\mathbb{Z}$. Ta chứng minh $x^ny^n+\frac{1}{x^ny^n}\in\mathbb{Z}$ bằng quy nạp theo $n\in\mathbb{N}^*$.

Với $n=1;2$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với $n\le k$, với $k\ge 2$. Xét $n=k+1$, ta có :

$$x^{k+1}y^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}y^{k+1}}$$

$$=\left(x^k y^k+\frac{1}{x^k y^k}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)-\left(x^{k-1}y^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}y^{k-1}}\right).$$

Vì $xy+\frac{1}{xy}\in\mathbb{Z}; x^k y^k+\frac{1}{x^k y^k}\in\mathbb{Z}; x^{k-1}y^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}y^{k-1}}\in\mathbb{Z}$,

suy ra: $x^{k+1}y^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}y^{k+1}}\in\mathbb{Z}$. Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$. Do đó $x^n y^n+\frac{1}{x^n y^n}\in\mathbb{Z}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 2.7. *Tìm các số nguyên dương a,b,c sao cho $\frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}$ là một số nguyên.*

Lời giải. Để biểu thức là số nguyên

$\Leftrightarrow (ab-1)(bc-1)(ca-1)\vdots abc$

$\Rightarrow (ab-1)(bc-1)(ca-1)\vdots ac$

$\Rightarrow (ab-1)(bc-1)\vdots ac$ (vì $(ac-1,ac)=1$)

$\Rightarrow (ab^2c-ab-bc+1)\vdots ac \Leftrightarrow (ab+bc-1)\vdots ac$

$\Rightarrow \begin{cases}(ab+bc-1)\vdots a\\(ab+bc-1)\vdots c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc-1\vdots a\\ab-1\vdots c\end{cases}$. Lập luận tương tự ta có: $ab-1\vdots c, bc-1\vdots a, ca-1\vdots b$ (1).

• Nếu $b=c$ từ (1) $\Rightarrow ac-1\vdots c \Rightarrow 1\vdots c\Rightarrow b=c=1$.

(1) $\Rightarrow ab-1\vdots b\Rightarrow 1\vdots b\Rightarrow b=c=1$.

Lập luận tương tự ta có trong 3 số a,b,c có hai số bằng nhau và bằng 1.

• Xét 3 số *a, b, c* khác nhau. Do vai trò a,b,c như nhau nên ta có thể giả sử $a>b>c\ge 2$. Ta có:

$(ab-1)(bc-1)(ca-1)\vdots abc$

$\Leftrightarrow abc(abc-a-b-c)+(ab+bc+ca-1)\vdots abc$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca-1)\vdots abc\Rightarrow (ab+bc+ca-1)\ge abc.$

Ta có: $a-c\ge 2\Rightarrow b(a-c)\ge 2b>4$

$\Rightarrow ab-bc>4\Rightarrow bc<ab-4.$

Ta có : $b-c\ge 1\Rightarrow a(b-c)\ge a>2\Rightarrow ac<ab-2.$

Vậy $abc\le ab+bc+ca-1<ab+ab-4+ab-2-1<3ab$

$\Rightarrow abc<3ab\Rightarrow 2\le c<3\Rightarrow c=2$.

Từ $(ab+bc+ca-1)\vdots abc\Rightarrow (ab+2b+2a-1)\vdots 2ab$

$\Rightarrow ab+(2b+2a-1)\vdots ab\Rightarrow 2b+2a-1\vdots ab$

$\Rightarrow 2b+2a+1>ab.$

Từ $a>b\Rightarrow a\ge b+1\Rightarrow 2a\ge 2b+2\Rightarrow 2a>2b+1.$

Do đó: $ab<2b+2a+1<2a+2a\Rightarrow 2<b<4\Rightarrow b=3.$

Từ $b=3, c=2$ và $bc-1\vdots a\Rightarrow 3.2-1\vdots a\Rightarrow a=5.$

Suy ra bộ (a,b,c) là $(5;3;2)$. Vậy các bộ số nguyên (a,b,c) cần tìm là:

+ Trong 3 số a,b,c có 2 số bằng nhau và bằng 1 số còn lại là số nguyên dương.

+ $(a,b,c)=(5;3;2)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Trong lời giải ta đã sử dụng phép chia hết và vai trò của các biến như nhau để giới hạn các giá trị của biến.

Bài 2.8. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên và là ước của* 1995.

Lời giải. Ta chỉ cần tìm các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $x>y\ge 1$. Khi đó $x^2+y^2=k(x-y)$, k là ước của 1995, 1995 = 3. 5. 7. 19.

Xét các trường hợp sau:

a) Với $k=1$, ta có $x^2+y^2=x-y$, không tìm được cặp (x,y) nguyên dương thỏa mãn đề bài.

b) Với $k=5$ ta có: $x^2+y^2=5(x-y)$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2+(2y+5)^2=50.$$

Phương trình có nghiệm (x,y) là: $(3;1)$, $(2;1)$.

c) Với $k=5^t m$, $t\in\{0;1\}$,

$$m\in\{3;\ 7;\ 19;\ 3.7;\ 3.19;\ 7.19;\ 3.7.19\}.$$

Ta có : $x_1^2+y_1^2=5^t.(x_1-y_1)$ với

$$x=mx_1, y=my_1, x_1>y_1\ge 1.$$

Nếu $t=0$, ta trở về trường hợp a), phương trình vô nghiệm.

Nếu $t=1$, ta trở về trường hợp b), phương trình có nghiệm (x_1,y_1) là: $(3;1)$, $(2;1)$.

Vậy các cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn bài toán là: $(3m;m),(m;3m),(2m;m),(m;2m)$ với $m\in\{1;3;7;19;3.7;3.19;7.19;3.7.19\}$.

Nhận xét. Lời giải xét các trường hợp giá trị nguyên của biểu thức dựa vào các ước của 1995. Khi kết luận bài toán ta hoán vị giá trị x và y.

Bài 2.9. *Tìm tất cả các bộ số hữu tỉ dương sắp thứ tự (x,y,z) sao cho các số $x+\frac{1}{y},y+\frac{1}{x},z+\frac{1}{x}$ đều là các số nguyên dương.*

Lời giải. Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{c}{d},z=\frac{e}{f}$, với $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}^+$, $(a,b)=(c,d)=(e,f)=1$.

Vì $x+\frac{1}{y}=\frac{a}{b}+\frac{d}{c}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow\frac{ac+bd}{bc}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow\begin{cases}(ac+bd)\vdots b\\(ac+bd)\vdots c\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}ac\vdots b\\bd\vdots c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\vdots b\\b\vdots c\end{cases}$, (do $(a,b)=(c,d)=1$).

Suy ra $b=c$. Tương tự có $d=e$ và $f=a$.

Do đó $x=\frac{a}{c},y=\frac{c}{e},z=\frac{e}{a}$. Suy ra:

$$x+\frac{1}{y}=\frac{a}{c}+\frac{e}{c}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow(a+e)\vdots c\Rightarrow(a+c+e)\vdots c$$

Tương tự $(a+c+e)\vdots a,(a+c+e)\vdots e$. Do a,c và e đôi một nguyên tố cùng nhau. Suy ra $(a+c+e)\vdots ace\Rightarrow a+c+e=ace.k,(k\in\mathbb{Z}^+)$.

Ta giả sử $e=\max\{a,c,e\}$. Khi đó $ace.k=a+c+e\le 3e$ (1) $\Rightarrow ack\le 3\Rightarrow k\in\{1;2;3\}$

- Với $k=3$ thì từ (1) suy ra $a=c=1,3e=e+2\Rightarrow e=1$. Từ đó $(x,y,z)=(1;1;1)$.
- Với $k=2$ thì từ (1) suy ra $2ac\le 3\Rightarrow a=c=1$. Suy ra $2e=e+2\Rightarrow e=2$. Từ đó $(x,y,z)=\left(1;\frac{1}{2};2\right)$ và các hoán vị theo thứ tự $\left(\frac{1}{2};2;1;\right),\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$.
- Với $k=1$ thì từ (1) suy ra $ac\le 3$, khi đó $a=1$ hoặc $c=1$.

+ Nếu $a=1$, ta có $ce=c+e+1$. Với $c=1$ thì $e=e+2$ (vô lý). Với $c=2$ thì $2e=e+3\Rightarrow e=3$. Từ đó $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3};3\right)$ và các hoán vị theo thứ tự $\left(\frac{2}{3};3;\frac{1}{2};\right),\left(3;\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Với $c=3$ thì $3e=e+4\Rightarrow e=2$ (mâu thuẫn với $c\le e$).

+ Nếu $c=1$, tương tự tìm được $a=2$ và $e=3$. Từ đó $(x,y,z)=\left(2;\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$ và các hoán vị theo thứ tự $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2};2\right),\left(\frac{3}{2};2;\frac{1}{3}\right)$.

Vậy các bộ (x,y,z) là: $(1;1;1)$, $\left(1;\frac{1}{2};2\right)$, $\left(\frac{1}{2};2;1;\right),\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3};3\right)$, $\left(\frac{2}{3};3;\frac{1}{2};\right)$, $\left(3;\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$, $\left(2;\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2};2\right)$, $\left(\frac{3}{2};2;\frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét. Từ cách đặt x,y,z theo theo các biến a,b,c,d,e,f, ta chứng minh được $b=c,d=e$, $f=a$. Khi đó ba biến x,y,z biểu diễn theo a,c,e. Từ đó chứng minh được $(a+c+e)\vdots ace$ và đưa bài toán về việc giải phương trình nghiệm nguyên dương với các biến a,c,e. Từ đó tìm được các giá trị của x,y,z.

III. BIỂU THỨC CHỨA CĂN LÀ SỐ NGUYÊN.

Bài 3.1. *Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn $(x+1)(y+1)=2$. Chứng minh biểu thức sau là số nguyên: $P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2}+xy$.*

Lời giải. Đặt $S=x+y,T=xy\,(S,T\ge 0)\Rightarrow x^2+y^2=S^2-2T$.

Từ $(x+1)(y+1)=2\Rightarrow S+T+1=2\Leftrightarrow S+T=1$.

Ta có: $(x^2+1)(y^2+1)=x^2+y^2+x^2y^2+1$

$$=S^2-2T+T^2+1=S^2+(T-1)^2.$$

Từ giả thiết $S+T=1\Rightarrow T-1=-S$ $\Rightarrow(x^2+1)(y^2+1)=S^2+(T-1)^2=2S^2$. Do đó:

$P=\sqrt{S^2-2T-2S+2}+T=\sqrt{S^2-2(T+S)+2}+T=S+T=1.$

Vậy biểu thức P là số nguyên.

Nhận xét. Dựa theo đề bài ta đặt các biến phù hợp để rút gọn biểu thức, từ đó khẳng định biểu thức nguyên.

Bài 3.2. *Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương*

$$P=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}}$$

với mọi giá trị nguyên dương n.

Lời giải. Ta có:

$$4n^2+2-2\sqrt{4n^4+1}=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)^2.$$

Với $n\in\mathbb{Z}^+$, ta có: $\sqrt{2n^2+2n+1}>\sqrt{2n^2-2n+1}$.

Suy ra:

$$P=\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\sqrt{\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)^2}$$

$$=\left(\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}\right)\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)$$

$$=\left(2n^2+2n+1\right)-\left(2n^2-2n+1\right)=4n.$$

Vậy biểu thức P nhận giá trị nguyên dương.

Nhận xét. Sử dụng các phép biến đổi căn thức để rút gọn biểu thức, từ đó khẳng định biểu thức là số nguyên.

Bài 3.3. *Cho* $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$ *(với* $a>b>0$*).*

Chứng tỏ biểu thức sau là số nguyên

$$A=\frac{1-ax}{1+ax}.\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}.$$

Lời giải. Do $a>b>0\Rightarrow 2a>2b\Rightarrow 2a-b>b>0\Rightarrow\frac{2a-b}{b}>1.$

Suy ra: $1-ax=1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}<0;\ 1+ax=1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}>1.$

Do đó $A=\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=-\sqrt{\frac{(1-ax)^2(1+bx)}{(1+ax)^2(1-bx)}}$

$$=-\sqrt{\frac{\left(1+\frac{2a-b}{b}-2.\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)\left(1+\frac{b}{a}.\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)}{\left(1+\frac{2a-b}{b}+2.\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)\left(1-\frac{b}{a}.\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\left(2a-2\sqrt{2ab-b^2}\right)\left(a+\sqrt{2ab-b^2}\right)}{\left(2a+2\sqrt{2ab-b^2}\right)\left(a-\sqrt{2ab-b^2}\right)}}=-\sqrt{1}=-1.$$

Vậy biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Nhận xét. Sử dụng các phép biến đổi đưa thừa số vào trong căn thức để rút gọn biểu thức. Từ đó khẳng định biểu thức là số nguyên.

Bài 3.4. *Cho biểu thức*

$$P=\frac{3\left(x+\sqrt{x}-3\right)}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

Tìm x để cho P nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải. ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$.

$$P=\frac{3\left(x+\sqrt{x}-3\right)+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{3x+5\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{3\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}=3+\frac{2}{\sqrt{x}+2}.$$

Ta có: $\sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow 3<P\le 4$ (vì $x\ge 0, x\ne 1$).

Để P là số nguyên, suy ra $P=4$ $\Leftrightarrow\sqrt{x}+2=2\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK).

Nhận xét. Trong bài tập trên nhiều học sinh mắc sai lầm khi coi $\sqrt{x}+2$ là số nguyên. Cách giải đã giới hạn giá trị nguyên của biểu thức, từ đó tìm được x.

Bài 3.5. *Cho biểu thức*

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+1}.$$

Tìm x để cho P nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải. ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$.

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}-\frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}+\frac{3.\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}.$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

Từ $x\ge 0,\ x\ne 1\Rightarrow\sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow 0<\frac{2}{\sqrt{x}+1}\le 2.$

Do đó $-1\le P<1$. Để P là số nguyên $\Rightarrow P\in\{0;-1\}$.

Với $P=0\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn ĐK).

Với $P=-1\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x=0$ thì giá trị biểu thức P là số nguyên.

Nhận xét. Trong cách giải trên đã giới hạn giá trị nguyên của biểu thức, từ đó tìm được các giá trị của biến, cần chú ý điều kiện của biến.

Bài 3.6. *Cho biểu thức*

$$P=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}.$$

Tìm x để biểu thức $Q=\frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải. ĐK: $x>0, x\neq 1$.

$$P=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)=x-\sqrt{x}+1.$$

Ta có : $P=x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Rightarrow Q=\frac{2\sqrt{x}}{P}=\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=\frac{2}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1}>0$ với mọi $x>0$. Ta có: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$, suy ra:

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1\geq 1\Rightarrow Q\leq 2$. Vậy $0<Q\leq 2$, mà Q là số nguyên. Suy ra $Q\in\{1;2\}$.

- Nếu $Q=1$ thì $\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$.

- Nếu $Q=2$ thì $\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn ĐK).

Vậy $x=\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Bài toán trên có giá trị của biến x là số thực nhưng học sinh hay mắc sai lầm coi biến x là số nguyên. Trong cách giải trên sử dụng bất đẳng thức để giới hạn giá trị nguyên của biểu thức.

Bài 3.7. *Cho biểu thức*

$$P=\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1}}.$$ *Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị là số nguyên.*

Lời giải. $P=\frac{\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\left|\frac{4}{x}-1\right|}$; P xác định khi $\begin{cases}x\neq 0\\ \frac{4}{x}-1\neq 0\\ x-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x>4.$

$$P=\frac{\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\frac{x-4}{x}}=\frac{x}{x-4}.\left(\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right).$$

- Khi $4<x<8$ thì

$$P=\frac{4x}{x-4}=\frac{4x-16+16}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}.$$

Để P là số nguyên thì $x-4\in Ư(16)$ (vì $x\in\mathbb{Z}$).

Do $4<x<8\Rightarrow 0<x-4<4$.

Suy ra $x-4\in\{1;2\}\Leftrightarrow x\in\{5;6\}$.

- Khi $x\geq 8$ thì $P=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}=\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$.

Để P là số nguyên thì $x-4=m^2, (m\in\mathbb{N}^*)$.

Suy ra $x=4+m^2$. Khi đó $P=\frac{2\left(m^2+4\right)}{m}=2m+\frac{8}{m}$.

Suy ra $m\in\{1;2;4;8\}\Rightarrow x\in\{5;8;20;68\}$.

Vậy biểu thức P nguyên khi $x\in\{5;6;8;20;68\}$.

Nhận xét. Trong bài toán trên giá trị của biến x là số nguyên, ta xét các trường hợp của biến x và sử dụng phép chia hết để giải bài toán.

Bài 3.8. *Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x-\sqrt{2}$; $x^2+2\sqrt{2}$; $x-\frac{1}{x}$; $x+\frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.*

Lời giải. Đặt $a=x-\sqrt{2}; b=x-\frac{1}{x}; c=x+\frac{1}{x}; d=x^2+2\sqrt{2}$.

Ta có b và c không thể cùng nguyên vì nếu trái lại thì $b+c=2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$. Suy ra $a,d\notin\mathbb{Z}$ (trái với giả thiết có đúng một số không là nguyên). Vậy trong hai số b và c có nhiều nhất 1 số nguyên, nên $a,d\in\mathbb{Z}$. Ta có: $x=a+\sqrt{2}$ suy ra:

$d=\left(a+\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}=a^2+2+(2a+2)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(2a+2)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$.

Mà $a\in\mathbb{Z}$ nên $2a+2=0\Leftrightarrow a=-1$. Với $a=-1$ ta có: $x=\sqrt{2}-1$; $b=-2$; $c=2\sqrt{2}$; $d=3$ (thỏa mãn đề bài).

Nhận xét. Trong bài toán trên khẳng định được hai số $x-\sqrt{2}$; $x^2+2\sqrt{2}$ đều là số nguyên. Từ đó xác định được số thực x.

Bài 3.9. *Cho* $A=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ *và* $B=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}}$. *Tìm các giá trị x nguyên sao cho* $C=\dfrac{2A+B}{3}$ *là một số nguyên.*

Lời giải. ĐK: $x\neq 1, x\neq -\dfrac{1}{2}$.

$A=\dfrac{1}{|2x+1|}$; $B=\dfrac{2(x-1)}{|x-1|}\Rightarrow C=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{|2x+1|}+\dfrac{x-1}{|x-1|}\right)$.

- Nếu $x=0$ hoặc $x=-1$ thì $C=0$ là số nguyên.

- Nếu $x>1$ thì $C=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2x+1}+1\right)=\dfrac{4(x+1)}{3(2x+1)}>0$.

Mặt khác $C-1=\dfrac{1-2x}{3(2x+1)}<0\Rightarrow 0<C<1$. Suy ra C không thể là số nguyên.

- Nếu $x<-1$ thì $C=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2x+1}-1\right)<0$.

Mặt khác $C+1=\dfrac{2x-1}{3(2x+1)}>0\Rightarrow -1<C<0$. Suy ra C không là số nguyên.

Vậy $x\in\{0;-1\}$ thì C là số nguyên.

Nhận xét. Trong biểu thức rút gọn chứa giá trị tuyệt đối nên xét các trường hợp để bỏ các dấu giá trị tuyệt đối

Bài 3.10. *Tìm các số thực x sao cho* $x+\sqrt{2009}$ *và* $\dfrac{16}{x}-\sqrt{2009}$ *đều là số nguyên.*

Lời giải. Đặt $a=x+\sqrt{2009}$, $b=\dfrac{16}{x}-\sqrt{2009}$. (với $a,b\in\mathbb{Z}$). Thay $x=a-\sqrt{2009}$ vào biểu thức b, ta có: $b=\dfrac{16}{a-\sqrt{2009}}-\sqrt{2009}$

$$\Leftrightarrow ab-2025=(b-a)\sqrt{2009}.$$

Nếu $a\neq b$ thì $\sqrt{2019}=\dfrac{ab-2025}{b-a}$, vô lý vì $a,b\in\mathbb{Z}$.

Nếu $a=b$ thì $ab-2025=0$. Từ đó suy ra $a=b=\pm 45\Rightarrow x=\pm 45-\sqrt{2009}$.

Thử lại với $x=\pm 45-\sqrt{2009}$ thì ta có $a,b\in\mathbb{Z}$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh biểu thức

$$P=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-1\frac{19}{63}x^3+\frac{32}{35}x$$

nhận giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

2. Tìm các giá trị nguyên của biểu thức $P=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$ với x,y là các số nguyên dương.

3. Tìm tất cả các số x,y nguyên dương lớn hơn 1 sao cho biểu thức $P=\dfrac{2xy}{(x-1)(y-1)}$ là số nguyên.

4. Cho $A=\dfrac{x^4+y^4}{15}$ với x,y,A là các số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

5. Tìm các giá trị x nguyên để biểu thức $P=\dfrac{x^2-5x+6+3\sqrt{x^2-6x+8}}{3x-12+(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$ có giá trị là một số nguyên dương.

6. Tìm x,y,z là các số nguyên dương biết

$$\frac{2010}{x+y}+\frac{x}{y+2009}+\frac{y}{4019}+\frac{2009}{2010+x}=\frac{2}{z}.$$

7. Cho biểu thức $P=\dfrac{a-b}{1+\sqrt{ab}}$, biết

$$a=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}};\ b=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ \left(\text{với } \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1\right).$$

Chứng minh biểu thức P là số nguyên.

8. Cho biểu thức

$$P=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}+\frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$$

(với $x>0, x\neq 1$). Tìm x để cho biểu thức $Q=\dfrac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên.

9. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{25}{2}+\sqrt{\dfrac{625}{4}-x}}+\sqrt{\dfrac{25}{2}-\sqrt{\dfrac{625}{4}-x}}$ có giá trị nguyên.

10. Cho x,y là hai số nguyên khác -1 sao cho $\dfrac{x^4-1}{y+1}+\dfrac{y^4-1}{x+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $x^{2020}-1$ chia hết cho $y+1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU- TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐH VINH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Câu 1. a) ĐK: $x \neq 0$. Khi đó

$$2x\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x \Leftrightarrow 2x^3+\frac{2}{x}-3=3x^2+x$$

$$\Leftrightarrow 2x^4+2-3x^3-3x-x^2=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=-1 \end{array}\right.$$

- Với $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=2, x=\frac{1}{2}$.

- Với $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là $S=\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$.

b) ĐK: $x \geq 0, y \geq 1, 2y \geq 3x+4$ (*). Ta có:

$$x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-\left(x^2+x+1\right)y+x^3+x^2=0 \quad (1).$$

Ta xem PT(1) có ẩn y, x là tham số, ta được: $y=x+1$ hoặc $y=x^2$. (Lưu ý: Có thể dùng phân tích đa thức thành nhân tử ta được: $x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0 \Leftrightarrow (y-x-1)(y-x^2)=0$).

- Nếu $y=x+1 \Rightarrow 2y=2x+2<3x+4$ không thỏa mãn ĐK (*)

- Nếu $y=x^2$, kết hợp với ĐK suy ra: $x \geq 1$, khi đó: $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4}$ trở thành:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2-3x-4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-4=x+x^2-1+2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-3=2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)-3(x+1)=2\sqrt{x(x-1)(x+1)}$$

Đặt $a=x(x-1)$; $b=x+1 \Rightarrow a \geq 0, b>0$

$$\Rightarrow a-3b=2\sqrt{ab}\,(a>3b) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}+\sqrt{b}=0 \text{ (loại)} \\ a=9b \end{array}\right. \Rightarrow x(x-1)=9(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-9=0 \Leftrightarrow x=5+\sqrt{34} \quad (\text{vì } x \geq 1)$$

$\Rightarrow y=\sqrt{5+\sqrt{34}}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(5+\sqrt{34};\sqrt{5+\sqrt{34}}\right)$.

Câu 2. a) Ta có: $p^x-y^4=4$

$\Leftrightarrow p^x=y^4+4=\left(y^2-2y+2\right)\left(y^2+2y+2\right)$.

Do p là số nguyên tố nên $y^2-2y+2=p^m; y^2+2y+2=p^n$ với m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m+n=x, n>m$, suy ra $4y=p^n-p^m$.

TH1: $m=0$ thì $y^2-2y+2=p^m=1 \Rightarrow y=1$ $\Rightarrow p^x=5$, do p là số nguyên tố, x là số nguyên dương, bằng phép thử ta suy ra $p=5, x=1$.

TH2: $m>0$, từ $4y=p^n-p^m \Rightarrow 4y \vdots p$.

Nếu $p>2 \Rightarrow (p;2)=1$ (do p nguyên tố) suy ra $y \vdots p$ kết hợp với $y^2+2y+2=p^n \vdots p$ $\Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2$: vô lí, nên $p=2$. Thay $p=2$ vào đề ra ta suy ra y chẵn nên $y=2k\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Từ $p^x=y^4+4 \Rightarrow 2^x=16k^4+4=4\left(4k^4+1\right) \vdots 4$ $\Rightarrow 2^x \vdots 4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow k=0$ (loại) (vì nếu $x>2$ $\Rightarrow 2^x \vdots 8$ mà $4\left(4k^4+1\right)$ không chia hết cho 8).

Vậy $x=y=1$ và $p=5$.

b) Từ $2m^2+m=3n^2+n$ suy ra: $(2m+2n+1)(m-n)=n^2$ là số chính phương.

Do m, n là các số tự nhiên nên $m \geq n \Rightarrow m-n \geq 0$.

Gọi $d=(m-n;2m+2n+1) \Rightarrow \begin{cases} m-n \vdots d \\ 2m+2n+1 \vdots d \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+1 \vdots d \quad (1) \\ (m-n)(2m+2n+1) \vdots d^2 \end{cases}.$$

Mặt khác từ: $(2m+2n+1)(m-n)=n^2 \vdots d^2 \Rightarrow n \vdots d$ $\Rightarrow 4n \vdots d$, kết hợp với (1) ta suy ra $1 \vdots d$ do đó $(m-n)$ và $(2m+2n+1)$ là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, mặt khác $(2m+2n+1)(m-n)=n^2$

là số chính phương nên mỗi số $(m-n)$ và $(2m+2n+1)$ là các số chính phương. Vậy $2m+2n+1$ là số chính phương.

Câu 3. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}$$

Ta chứng minh: $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}\ge 1.$

Thật vậy:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(c+ab)(a+bc)(b+ca)$$

$$\Leftrightarrow\left[b(a+b+c)+ac\right](c+a)\ge abc+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow(3b+ac)(c+a)\ge abc+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)\right]+a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 3bc+3ab+ac(c+a)\ge abc+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\left[9-2(ab+bc+ac)\right]+a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 3(bc+ab)+ac(a+b+c)\ge 2abc+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+9abc-2abc(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ac)\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+6abc-2abc(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2+5abc$$

$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ac)\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)-2abc(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2+5abc$$

$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ac)\ge(ab+bc+ac)^2-2abc(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2+5abc$$

$$\Leftrightarrow(ab+bc+ac)^2-3(ab+bc+ac)-3abc(ab+bc+ca)+9abc+a^2b^2c^2+abc(ab+bc+ca)-4abc\le 0$$

$$\Leftrightarrow(ab+bc+ac-3)(ab+bc+ac-3abc)+abc(abc+ab+bc+ca-4)\le 0\quad(*)$$

Ta thấy: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le 1$ (1).

Mà $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\dfrac{3abc}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3abc$ (2)

(vì $abc\le 1$). Mặt khác:

$$ab+bc+ac\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3\quad(3).$$

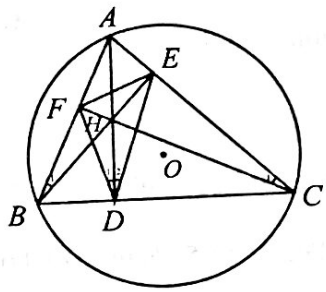
Từ (2) và (3) suy ra:

$$3abc\le ab+bc+ac\le 3\quad(4).$$

Từ (1) và (4) suy ra $abc+ab+bc+ac-4\le 0$.

Do đó (*) đúng. $\min P=1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 4. a) Từ bài ra ta suy ra các tứ giác: $BFEC$, $BFHD$, $CDHE$ nội tiếp nên

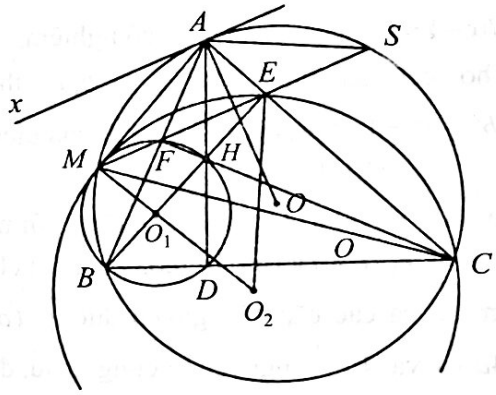


$\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$, $\widehat{B_1}=\widehat{D_1}$,

$\widehat{D_2}=\widehat{C_1}$ do đó $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$

mà $HD\perp BC$ nên BC là phân giác ngoài của tam giác DEF.

b)



Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{xAB}$. Mặt khác, do tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$), từ đây ta suy ra $\widehat{xAB}=\widehat{AFE}\Rightarrow Ax//EF$, mà $OA\perp Ax$ $\Rightarrow OA\perp EF$, khi đó gọi S là giao điểm thứ 2 của đường thẳng EF với (O) thì $AM=AS$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AM}=$ sđ $\overset{\frown}{AS}\Rightarrow\widehat{AMF}=\widehat{MBA}$ nên AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF hay $AM\perp MO_1$ (1).

Chứng minh tương tự, ta cũng có AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME suy ra $AM\perp MO_2$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra: $AM\perp O_1O_2$.

c) Vì $\widehat{FBG}=\widehat{ECF}$ nên $\dfrac{S_{\Delta GFB}}{S_{\Delta CEF}}=\dfrac{BF.BG}{CF.CE}$. Do đó

$$S_{\Delta GFB}=\left(\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF}\Leftrightarrow\frac{BF.BG}{CF.CE}=\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}$$

☞

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2020-2021

Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin - Thời gian làm bài 150 phút

Câu 1. (2 *điểm*) a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+2x^2+3y=15 \\ x^4+y^2-2x^2-4y=5 \end{cases}$.

Câu 2. (2,5 *điểm*) a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình $x^2+ax+1=0$, $x^2+bx+1=0$, $x^2+cx+1=0$ có nghiệm.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=(1+2a)(1+2bc).$$

Câu 3. (1,5 *điểm*) a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(2n+7)(7n+1)$ luôn chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $4a+1$ và $4b-1$ nguyên tố cùng nhau, đồng thời $a+b$ là ước của $16ab+1$.

Câu 4. (3 *điểm*) 1) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA. Vẽ tia Ix vuông góc với AB sao cho Ix cắt nửa đường tròn (O) tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ BC (khác B, C), nối AE cắt CI tại F.

a) Chứng minh $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của hai tia BE, Ix. Giả sử F là trung điểm của IC. Chứng minh hai tam giác AIF, KIB đồng dạng. Tính IK theo R.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK và đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng nhau.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho một bảng có kích thước $2n\times 2n$ ô vuông, với n là số nguyên dương. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng đó. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*) ***Giới thiệu***

****

☞ $\Leftrightarrow \dfrac{BF.(BE+EG)}{CF.CE}=\dfrac{FK}{FC}+\dfrac{BF.BE}{CF.CE}$

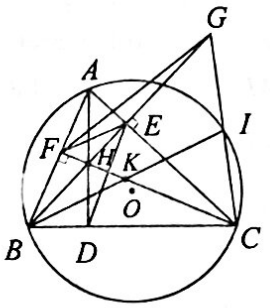
$\Leftrightarrow \dfrac{BF.EG}{CF.CE}=\dfrac{FK}{FC} \Leftrightarrow BF.EG=CE.FK.$

Xét hai tam giác vuông FBK và ECG có $\widehat{F}=\widehat{E}=90^0$ và $\widehat{FBK}=\widehat{ECG}$ (cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AI}$ của đường tròn (O)), do đó:

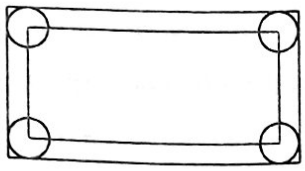
$\Delta FBK \sim \Delta ECG (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BF}{CE}=\dfrac{FK}{EG}$

$\Rightarrow BF.EG=CE.FK.$



Bài 5. Từ 2020 điểm đã cho dựng 2020 hình tròn có tâm là 2020 điểm đó và bán kính R = 1cm. Nhận thấy các hình tròn này đều nằm trong hình chữ nhật mở rộng (dài 151 cm, rộng 42 cm). Diện tích hình chữ nhật mở rộng là: $S_{HCN\text{mở rộng}}=151.42=6342\ (\text{cm}^2)$. Tổng diện tích của 2020 hình tròn có bán kính 1 là: $S_{2020\text{ hình tròn}}=2020.\pi.1^2\approx 6346\ (\text{cm}^2)$.



Ta thấy tâm của 2020 hình tròn này nằm trong hình chữ nhật có kích thước 149cm x 40cm nên 2020 hình tròn này sẽ nằm trong hình chữ nhật có kích thước 151cm x 42cm mà $S_{2020\text{ hình tròn}}>S_{HCN\text{mở rộng}} \Rightarrow$ tồn tại hai hình tròn cắt nhau. Gọi I, J là hai tâm hình tròn cũng là hai điểm trong số 2020 điểm $\Rightarrow IJ<2R=2$ (đpcm).

NGUYỄN THỊ VÂN ANH
(*SV K59 Sư phạm toán CLC, Viện nghiên cứu Sư phạm Tự nhiên, Đại học Vinh*) ***Giới thiệu***

HƯỚNG TIẾP CẬN KHÁC CHO MỘT BÀI TOÁN XÁC SUẤT

VŨ HỒNG SƠN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Chúng ta xét bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 1. *Xếp ngẫu nhiên 12 học sinh, trong đó có đúng một bạn tên là Tân và đúng một bạn tên là Dương, vào hai bàn tròn, mỗi bàn 6 học sinh. Tính xác suất để hai bạn Tân và Dương ngồi cạnh nhau.*

Thông thường, bài toán được giải như sau:

Lời giải.

- Số phần tử của không gian mẫu:

Chọn 6 bạn vào bàn thứ nhất, có C_{12}^6 cách. Mỗi bàn là xếp 6 bạn ngồi quanh một bàn tròn, có 5! cách xếp, khi đó số cách xếp 12 bạn vào 6 bàn tròn (không gian mẫu) là $C_{12}^6.5!.5!$ cách xếp.

- Tính số cách xếp 12 bạn sao cho *Tân* và *Dương* ngồi cạnh nhau:

Xếp *Tân* vào 1 bàn, có 2 cách. Cố định vị trí của *Tân*, xếp *Dương* ngồi cạnh có 2 cách. Chọn 4 bạn ngồi cùng bàn với *Tân* và *Dương* có C_{10}^4 cách, xếp 4 bạn ngồi vào bàn có 4! cách. 6 bạn còn lại ở bàn thứ hai có 5! cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{2.2.C_{10}^4.4!.5!}{C_{12}^6.5!.5!}=\dfrac{2}{11}$.

Ngoài lời giải trên, trong quá trình giảng dạy, tôi phát hiện ra nếu nhìn bài toán dưới một "con mắt" khác, ta có lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

Trước hết chúng ta nên hiểu rõ, "xếp ngẫu nhiên 12 bạn học sinh vào 2 bàn tròn (mỗi bàn 6 bạn)" là như thế nào?

Chúng ta có thể hiểu như thế này: Có 2 cái bàn tròn, mỗi bàn xếp 6 ghế, xếp ngẫu nhiên "từng bạn học sinh" vào 12 chiếc ghế này, nghĩa là bạn đầu tiên xếp ngẫu nhiên 12 ghế, bạn thứ hai xếp vào ngẫu nhiên 11 ghế còn lại, ..., bạn cuối cùng xếp vào chiếc ghế còn lại duy nhất.

Có thể dễ dàng chứng minh được, việc xếp ngẫu nhiên như trên mọi bạn học sinh đều có xác suất ngồi vào mỗi chiếc ghế là như nhau $\left(\dfrac{1}{12}\right)$. Hay nói cách khác, nếu chúng ta thực hiện việc xếp ngẫu nhiên như trên, thứ tự xếp của 12 bạn học sinh là không ảnh hưởng (không phụ thuộc bạn thứ nhất là ai, bạn thứ hai là ai ...). Cũng giống như trò chơi bốc thăm trúng thưởng, có n chiếc phiếu mà trong đó có m chiếc phiếu có quà được cho ngẫu nhiên từng người bốc, khi đó xác suất trúng thưởng của người bốc đầu tiên hay người bốc thứ i đều là giống nhau.

Khi đã hiểu bản chất vấn đề, bài toán có thể giải quyết dễ dàng như sau:

Xếp bạn Tân đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì. Xếp bạn Dương thứ hai, bên cạnh bạn Tân có 2 chiếc ghế (trong số 11 chiếc ghế còn lại), như vậy xác suất để Dương ngồi vào 2 trong 11 chiếc ghế này là $\dfrac{2}{11}$.

Áp dụng phương pháp này, ta có giải nhiều bài toán tương tự như sau:

Bài toán 2. *Xếp ngẫu nhiên 12 học sinh, trong đó có đúng một bạn tên là Tân và đúng một bạn tên là Dương, vào hai bàn tròn, mỗi bàn 6 học sinh. Tính xác suất để hai bạn Tân và Dương ngồi cùng bàn.*

Lời giải. Xếp bạn *Tân* đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì. Xếp bạn *Dương* thứ hai, cùng bàn bạn *Tân* có 5 chiếc ghế (trong số 11 chiếc ghế còn lại), như vậy xác suất để *Dương* ngồi vào 5 trong 11 chiếc ghế này là $\frac{5}{11}$.

Phức tạp hơn, ta có bài toán sau

Bài toán 3. *Xếp ngẫu nhiên 20 học sinh, trong đó có đúng một bạn tên là Tân và đúng một bạn tên là Dương, vào ba bàn tròn, bàn thứ nhất 6 học sinh, hai bàn còn lại mỗi bàn 7 học sinh. Tính xác suất để hai bạn Tân và Dương ngồi cạnh nhau.*

Hướng dẫn giải. Nếu đếm theo cách thông thường, rất nhiều bạn học sinh sợ nhầm, nhưng với cách làm như trên lại rất đơn giản:

Xếp bạn *Tân* đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì. Xếp bạn *Dương* thứ hai, bên cạnh bạn *Tân* có 2 chiếc ghế (trong số 19 chiếc ghế còn lại), như vậy xác suất để *Dương* ngồi vào 2 trong 19 chiếc ghế này là $\frac{2}{19}$.

Nhiều bạn có thể đặt ra câu hỏi, bài toán này thì sẽ giải như thế nào?

Bài toán 4. *Xếp ngẫu nhiên 20 học sinh, trong đó có đúng một bạn tên là Tân và đúng một bạn tên là Dương, vào ba bàn tròn, bàn thứ nhất 6 học sinh, hai bàn còn lai mỗi bàn 7 học sinh. Tính xác suất để hai bạn Tân và Dương ngồi cùng bàn.*

Hướng dẫn giải. Vẫn phương pháp tương tự, ta có thể giải như sau:

Xếp bạn *Tân* đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì, xác suất *Tân* ngồi vào bàn 6 là $\frac{6}{20}$, bàn 7 là $\frac{14}{20}$. Xếp bạn *Dương* thứ hai, nếu *Tân* ngồi bàn 6 thì xác suất *Dương* ngồi cùng bàn Tân là $\frac{5}{19}$. Nếu Tân ngồi bàn 7 thì xác suất *Dương* ngồi cùng bàn *Tân* là $\frac{6}{19}$. Áp dụng quy tắc cộng và nhân xác suất, xác suất để *Dương* ngồi cùng bàn với *Tân* là

$$\frac{6}{20}.\frac{5}{19}+\frac{14}{20}.\frac{6}{19}=\frac{3}{10}.$$

Một số bài toán tương tự

Bài toán 5. (HSG Tỉnh Phú Thọ 2018 – 2019). *Xếp ngẫu nhiên 12 học sinh, trong đó có một học sinh lớp 12A, 5 học sinh lớp 12B, 6 học sinh lớp 12C vào hai bàn tròn, mỗi bàn 6 học sinh. Tính xác suất để bạn học sinh lớp 12A ngồi giữa hai bạn lớp 12B.*

Hướng dẫn giải. Xếp bạn ở lớp 12A đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì, chiếc ghế bên trái chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 11 bạn còn lại, xác suất bạn đó ở lớp 12B là $\frac{5}{11}$. Chiếc ghế bên phải chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 10 bạn còn lại, xác suất bạn đó ở lớp 12B là $\frac{4}{10}$. Vậy xác suất để bạn lớp 12A ngồi giữa hai bạn lớp 12B là $\frac{5}{11}.\frac{4}{10}=\frac{2}{11}$.

Bài toán 6 (Khảo sát Chuyên Hùng Vương năm học 2018 – 2019). *Xếp ngẫu nhiên 12 học sinh, trong đó có đúng một bạn tên là Tân và đúng một bạn tên là Dương, vào một bàn tròn, một bàn dài mỗi bàn 6 học sinh. Tính xác suất để hai bạn Tân và Dương ngồi cạnh nhau.*

Hướng dẫn giải. Ta thấy sự khác của bài toán này là sự xuất hiện 2 vị trí ngoài cùng của bàn dài, ở mỗi vị trí này chỉ có duy nhất 1 vị trí ngồi cạnh, trong khi các vị trí khác con số này là 2.

Xếp bạn *Tân* đầu tiên vào 1 chiếc ghế bất kì, xác suất Tân ngồi vào đầu bàn dài là $\frac{2}{12}$, các vị trí còn lại là $\frac{10}{12}$. Xếp bạn *Dương* thứ hai, nếu *Tân* ngồi đầu bàn dài thì xác suất *Dương* ngồi cạnh *Tân* là $\frac{1}{11}$. Nếu *Tân* ngồi vị trị khác thì xác suất *Dương* ngồi cùng bàn *Tân* là $\frac{2}{11}$. Áp dụng quy tắc cộng

và nhân xác suất, xác suất để *Dương* ngồi cùng bàn với *Tân* là $\frac{2}{12}.\frac{1}{11}+\frac{10}{12}.\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$.

Bài toán 7. (Thi thử chuyên ĐH Vinh lần 1, năm học 2018 2019). *Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 8 đội tham gia, trong đó có hai đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc tham ngẫu nhiên để chia thành hai bảng đấu, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để hai đội của Việt Nam nằm ở hai bảng khác nhau.*

Hướng dẫn giải. Có 8 vị trí ở 2 bảng. Xếp ngẫu nhiên đội Việt Nam 1 đầu tiên vào 1 bảng, xếp đội Việt Nam 2 thứ hai, khi đó ở bảng còn lại (khác bảng của Việt Nam 1) có 4 vị trí trong tổng số 7 vị trí. Như vậy xác suất để đội Việt Nam 2 ở khác bảng Việt Nam 1 là $\frac{4}{7}$. Vậy xác suất hai đội VN ở hai bảng khác nhau là $\frac{4}{7}$.

Bài toán 8. *Giải bóng chuyền quốc tế VTV Cup có 9 đội tham gia, trong đó có 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc tham ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng đấu, mỗi bảng 3 đội. Tính xác suất để không có hai đội Việt Nam nào cùng bảng.*

Hướng dẫn giải. Có 9 vị trí ở 3 bảng. Xếp ngẫu nhiên đội Việt Nam 1 đầu tiên vào 1 bảng, xếp đội Việt Nam 2 thứ hai, khi đó ở 2 bảng còn lại (khác bảng của Việt Nam 1) có 6 vị trí trong tổng số 8 vị trí. Như vậy xác suất để đội Việt Nam 2 ở khác bảng Việt Nam 1 là $\frac{6}{8}$. Xếp đội Việt Nam 3 thứ ba, khi đó ở bảng đấu duy nhất không có hai đội Việt Nam, có 3 trong tổng số 7 vị trí còn lại. Như vậy xác suất để đội Việt Nam 3 ở khác bảng với đội Việt Nam 2 và đội Việt Nam 1 là $\frac{3}{7}$.

Vậy xác suất 3 đội Việt Nam ở 3 bảng khác nhau là $\frac{6}{8}.\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$.

Bài toán 9. *Giải AFF cup có 11 đội bóng tham dự, trong đó có đội Việt Nam và Thái Lan. Ban tổ chức chia ngẫu nhiên 11 đội vào hai bảng (một bảng 5 đội, một bảng 6 đội). Tính xác suất Việt Nam và Thái Lan ở hai bảng khác nhau.*

Đáp số: $\frac{5}{11}.\frac{6}{10}+\frac{6}{11}.\frac{5}{10}=\frac{6}{11}$.

Bài toán 10. (Đề minh họa toán 2019). *Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.*

Hướng dẫn giải. Xếp ngẫu nhiên 3 bạn nam trước. Mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ khi và chỉ khi không có 2 bạn nam nào ngồi đối diện nhau.

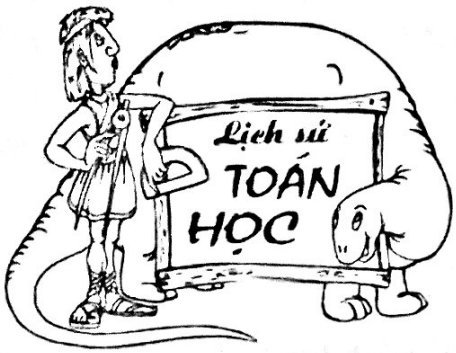
Xếp bạn nam đầu tiên vào 1 ghế.

Xếp bạn nam thứ hai vào 5 chiếc ghế còn lại, xác suất để bạn nam thứ hai không ngồi đối diện với nam thứ nhất là $\frac{4}{5}$. Xếp bạn nam thứ ba và thứ tư vào 4 chiếc ghế còn lại. Xác suất để bạn nam thứ ba không ngồi đối diện với nam thứ nhất và bạn nam thứ hai là $\frac{2}{4}$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4}{5}.\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$.

Kết luận. Ta có thể nhận thấy cách giải trên tỏ ra vượt trội với một số bài toán, nhưng không phải vạn năng. Do đó ta nên tìm hướng giải phù hợp với từng bài toán cụ thể, không nên quá phụ thuộc vào 1 phương pháp. Tuy nhiên qua cách giải này, hi vọng các bạn học sinh có thêm một phương án tiếp cận bài toán xác suất, cũng như hiểu thêm phần nào hai chữ "ngẫu nhiên".

Với phương pháp tương tự, các bạn học sinh cũng như các thầy cô có thể tự sáng tạo các bài toán tương tự với lời giải ngắn gọn và đơn giản.



SỰ RA ĐỜI CỦA PHÉP TÍNH VÔ CÙNG BÉ VÀ MỘT THÍ DỤ ĐÁNG BUỒN ...

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Thông thường Phép tính các vô cùng bé (PTVCB) được xây dựng theo trình tự: đầu tiên người ta xây dựng phép tính vi phân (PTVP) và tiếp theo - xây dựng Phép tính tích phân (PTTP). Sự phát triển lịch sử lại diễn ra theo chiều ngược lại...

I. ĐƯỜNG ĐẾN PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Phép tính tích phân là một phần của PTVCB. Nó được hình thành do nhu cầu xây dựng một phương pháp tổng quát để tính diện tích, thể tích và trọng tâm. Phép tính này đã có sự phát triển ngay từ thời cổ đại trong các tác phẩm "*Về hình cầu và hình trụ*" và "*Về các đường xoắn ốc*" của *Archimedes* và nó đã phát triển một cách có hệ thống vào thế kỷ XVII. Lúc bấy giờ, sự quan tâm chủ yếu là tìm phương pháp tính tích phân. Trong những công trình của *T. Kepler* (1571-1630), *B. Cavalieri* (1598-1647), *E. Toricelli* (1608-1647), *P. Fermat* (1601-1665). *B. Pascal* (1623-1662) và *I. Barrow* (1630-1677),... đã bắt đầu có mầm mống của chính khái niệm tích phân xác định.

Năm 1615, nhà Thiên văn học và Toán học người Đức là *I. Kepler* cho xuất bản cuốn sách với tên gọi "*Hình học không gian mới về những thùng rượu vang*". Mặc dù tác phẩm được viết hầu như về đề tài thực hành nhưng người ta xem đó là giáo trình về tích phân đầu tiên. Gần như đồng thời, *B. Cavlieri* cũng đưa ra cách tính tích phân xác định bằng "*phương pháp bất khả phân*".

Đặc biệt là ý niệm tinh vi về các VCB, tổng tích phân, phép qua giới hạn (ở dạng mộc mạc!) cũng bắt đầu xâm nhập và phát triển mặc dù chưa có định nghĩa giới hạn là gì. Tuy nhiên sự tìm tòi của các nhà toán học lúc đó là có tính chất rời rạc và chỉ giải quyết các bài toán riêng lẻ mà thôi.

Đến những năm 70 của thế kỷ XVII, việc tính diện tích, thể tích và trọng tâm đã không còn được xem là phát triển như đầu thế kỷ do lúc đó đã xuất hiện phép tính thể tích một số vật tròn xoay đầu tiên của *Kepler*. Chẳng hạn, ông đã "*tính được thể tích của 87 vật thể tròn xoay mới*".

Thế nhưng PTTP vẫn chưa hình thành vì đối với mỗi loại bài toán mới lại phải lập một dạng tổng tích phân mới và phải tìm một kiểu giới hạn mới...

Đối với PTTP cả *I. Newton* (1643-1727) lẫn *G. Leibniz* (1646-1716) đều có cách tiếp cận hoàn toàn khác nhau và độc lập với nhau.

Đối với *Newton*, tích phân (fluent) trước hết là tích phân bất định, tức là nguyên hàm. Vì vậy, *Newton* lấy khái niệm nguyên hàm làm cơ sở.

Độc lập với *Newton*, khái niệm tích phân đối với *Leibniz* thì ngược lại. *Leibniz* xem tích phân như là tổng vô hạn các hình chữ nhật bé vô hạn ydx (sau đó anh em nhà *Benoulli* gọi là "*tích phân*") và ông kí hiệu là $\int ydx$. Cuối hồi ký "*Về hình học sâu sắc*" (1686), ông còn dặn là "*dưới dấu* $\int$ *không được bỏ qua thừa số* dx". Năm 1693, *Leibniz* còn chứng minh rằng "*Để tính tích phân của hàm $f(x)$ đã cho cần tìm hàm $F(x)$ sao cho độ dốc $F'(x)$ là $f(x)$.*

Phải hơn một trăm năm sau *Newton* và *Leibniz*, người ta mới nhận được rõ ràng rằng chung quy *khái niệm tích phân là khái niệm giới hạn chứ không phải là gì khác*. Do vậy, để PTTP đạt được sự phát triển cần tìm con đường "*vòng*" nào đó để thay cho việc tìm giới hạn tổng tích phân.

II. ĐƯỜNG ĐẾN PHÉP TÍNH VI PHÂN

Khái niệm đạo hàm gắn liền với bài toán kẻ tiếp tuyến với đường cong. Bài toán này được nghiên cứu từ thời cổ đại trong tác phẩm "*Về các đường*

xoắn ốc" của *Archimedes*. Ý niệm cơ bản của *Archimedes* trong phương pháp giải bài toán này là dựa vào một *tam giác đủ bé* gọi là "*tam giác vi phân*" mà về sau *Leibniz* gọi là "*tam giác đặc trưng*". Đó là tam giác vuông mà $ds^2 = dx^2 + dy^2$ được tạo thành bởi các số gia VCB của các đoạn thẳng toạ độ và cung của đường cong.

Tư tưởng cơ bản của PTVP là nghiên cứu *tính chất địa phương* của các hàm. Điều đó cho phép khảo sát các hàm mà *dáng điệu* của chúng trong lân cận đủ bé của mỗi điểm là *xấp xỉ* với dáng điệu của hàm tuyến tính hay hàm đa thức.

Đối với thời kỳ tiền sử của PTVP thì *P. Fermat* được xem là người khởi xướng với công trình "*Phương pháp khảo sát các số lớn nhất và bé nhất*" (1629). Chẳng hạn ông đưa ra phương pháp tìm đạo hàm bằng cách tìm giới hạn của tang của góc nghiêng của cát tuyến. Cả *Descartes* và *G. Roberval* (1608-1675) và *Torricelli* cũng đã được sử dụng cái khái niệm động học vào nghiên cứu bài toán tiếp tuyến: xem đường cong như là quỹ đạo chuyển động và hướng của vận tốc là hướng của tiếp tuyến. Tiếp theo *Fermat*, *Ch. Huygens* (1629-1695) đã có đóng góp lớn về khảo sát cực trị của hàm số khi cho số gia là đại lượng vô cùng bé và ông cũng đã tiên đoán được một số phương pháp mà sau này *Leibniz* lấy làm quy tắc vi phân.

Cả *B. Pascal* và *I. Barrow* đã sử dụng một cách tích cực "tam giác đặc trưng". *Pascal* đã nói về "*tổng các vô cùng bé*", còn *Barrow* thì áp dụng "*tam giác đặc trưng*" để dựng các tiếp tuyến và nghiên cứu tính ngược nhau của các bài toán cầu phương và tiếp tuyến...

Năm 1669 ngay ở thời kỳ sung sức, *I. Barrow* đã nhường chức chủ nhiệm bộ môn Toán của ĐH Cambridge cho học trò mình là *I. Newton* để dành trọn thời gian cho Thần học. Đồng thời, *Barrow* đã chuyển cho *Newton* mọi kết quả nghiên cứu của mình, trong đó quan trọng nhất là tập "*Các bài giảng về quang học và hình học*" (1669) của ông.

Người ta cho rằng sự đóng góp lớn nhất trong quá trình hoàn thiện PTVCB là thuộc về *I. Newton* và *G. Leibniz*.

Newton đã sáng tạo ra phương pháp mà ông goi là "*Phương pháp fluxio*" (≡ "*Phương pháp thông lượng*") (1736). Ông gọi các đại lượng biến thiên liên tục là fluent (từ *chữ Latinh fluo*: có nghĩa là *thông vận*, phần tử lưu động) và thường được ký hiệu $y, z,...$ Mọi thông vận đều có đối số là thời gian. *Newton* gọi tốc độ biến thiên của fluent là *fluxio* (đạo hàm: dựa theo định nghĩa *Fermat*) và thường ký hiệu là $\dot{y}, \dot{z},...$ Những thay đổi vô cùng bé "o" của thông vận cần để tính fluxio được ông gọi là *moment* (theo *Leibniz* thì đó là vi phân) và được ký hiệu là $\dot{y}o, \dot{z}o,...$

Đối với PTVP, *Leibniz* đã đưa ra cách tiếp cận khác hẳn *Newton*. Đối với ông, khái niệm cơ bản của PTVP là các *vi phân* được ký hiệu bởi chữ "*d*" là chữ cái đầu của từ *differentia*, nghĩa là hiệu. Ông ký hiệu đạo hàm là $\frac{dy}{dx}$, trong đó dx là hiệu các hoành độ, dy là hiệu các tung độ của hai điểm gần nhau vô hạn của đường cong. Ông cũng đã chứng minh rằng $\frac{dy}{dx}$ là tang của góc nghiêng của tiếp tuyến.

Năm 1684, ông đã cho công bố bài báo đầu tiên dài sáu trang trình bày PTVP mới trên tạp chí *Acta Eruditorum* (AE) là tạp chí của các nhà bác học. Mặc dù bài báo ngắn gọn nhưng nó chứa đựng một sự tóm tắt gần như toàn bộ PTVP kể cả các thuật ngữ của nó. Đặc biệt, các ký hiệu đã được ông soạn thảo hoàn thiện đến mức gần như không thay đổi gì đến tận nay.

III. MỐI LIÊN HỆ GIỮA HAI PHÉP TÍNH VÀ SỰ XUẤT HIỆN PHÉP TÍNH VÔ CÙNG BÉ

Đến những năm 80 của thế kỷ XVII, PTVCB vẫn chưa có thành tựu thật lớn nào để nó có thể thoải khỏi giai đoạn hình thành. Hai PTTP và PTVP vẫn dường như không liên hệ gì với nhau.

Thành tựu hết sức sâu sắc và tinh vi của *Barrow* (1659) là ở chỗ lần đầu tiên trong "*Các bài giảng...*" ông đã khám phá ra tính ngược nhau của *bài toán tính diện tích và bài toán dựng tiếp tuyến*. Điều đó cũng có nghĩa là lần đầu tiên *Barrow* khám phá ra sự đối ngược nhau của PTTP và PTVP dưới dạng hình học. Về thành tựu này, GS toán học Liên Xô là *G.M. Fichtengôn* viết rằng: "*Trong số nhiều định lý liên quan* [của *Barrow*] *ở đây ta sẽ tách ra Định lý XI trong bài giảng X và Định lý XIX trong bài giảng XI, trong đó lần đầu tiên trong tiền sử của PTVCB hai bài toán cơ bản của PTTP và PTVP dưới dạng hình học trực tiếp đối ngược nhau: cụ thể là dựng tiếp*

tuyến với đường cong và tính diện tích miền trong đường cong. Nếu chuyển sang ngôn ngữ giải tích thì các Định lý này có thể phát biểu dưới dạng:

I. *Nếu* $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ *thì* $F'(x)=f(x)$.

II. Nếu $z=\frac{df}{dx}$ *thì* $\int_0^x z dt=f(x)$ *(hiểu ngầm là* $f(0)=0$*)*

(*Cơ sở GTTH, ĐH&THCN, Hà Nội 1972*).

Như vậy, *I. Barrow* đã bắc cầu được hai nhóm bài toán khác nhau. Đây chính là cái *mốc quan trọng nhất* đánh dấu thời tiền sử của PTVCB đã dần khép lại bởi vì nội dung giải tích của Định lý Barrow (còn gọi là Định lý Torricelli-Barrow) cũng chính là nội dung của *Định lý cơ bản của giải tích*. Định lý đó đã *Kết nối hai phép tính vi phân và tích phân với nhau* để tạo thành một thể trọn vẹn. Từ đó người ta suy ra công thức vô cùng tiện lợi

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

(mang tên công thức Newton-Leibniz) cho phép thay thế được những thủ thuật cá biệt rời rạc bằng phương pháp tổng quát có tính chất "*algorit*" hơn.

Sau phát kiến thực sự sâu sắc của *Barrow* và các dạng "*giải tích hoá*" của *Newton* và của *Leibniz* đối với Định lý đó PTVCB *thoát khỏi giai đoạn hình thành*, nó chào đời và kết nối các kết quả của từng phép tính và *xây dựng nên thuật toán thống nhất* cho cả một lĩnh vực rộng lớn này của toán học. Việc đó được tiến hành nhanh chóng do các ký hiệu của PTVCB mà *Leibniz* đưa ra là rất đơn giản và thuận lợi.

Phép tính các VCB xuất hiện hầu như đồng thời dưới hai dạng: *lý thuyết "thông lượng" của Newton và Phép tính vi phân của Leibniz*. Người ta đã so sánh phương pháp của *Newton* và của *Leibniz*, và nhận ra rằng về bản chất chúng như nhau nhưng hai ông đã thực hiện bằng hai cách khác nhau và độc lập với nhau.

Đối với *Newton* cái cốt lõi là: cho trước fluent (thông vận) cần tìm fluxio (thông lượng) bằng *phép toán đạo hàm* (theo phương pháp Fermat) và ngược lại là tìm fluent theo fluxio nhờ *phép tích phân*. Nhưng thật đáng tiếc, phần lớn các kết quả chỉ được công bố trong tác phẩm "*Phương pháp fluxio và chuỗi vô hạn*" năm 1736 sau khi ông qua đời gần mười năm!

Trong khi đó, năm 1684 và 1686 trên tạp chí AE *Leibniz* trình bày đầy đủ các kết quả của mình với dạng như được duy trì đến tận nay. Chẳng hạn, về biểu thức $\int y dy$, ông nói rằng: do $d\left(\frac{y^2}{2}\right)=ydy$ nên $\int ydy=\frac{y^2}{2}$ vì rằng "*Ở đây ta [như] có tổng và hiệu hay "∫" và "d" cùng đối ngược nhau như luỹ thừa và căn cứ trong phép tính thông thường*".

Năm 1696 nhà toán học Pháp *L'Hospital* (1661-1704) đã cho ra đời *cuốn sách giáo khoa đầu tiên với tên gọi "Giải tích các vô cùng bé"* (1696). Công trình đặc biệt này là kết quả "*học tập*" cực lực của tác giả trong bốn tháng mùa hè 1692 khi ông mời *I. Bernoulli* giảng riêng cho mình về PTVCB. Trong cuốn sách này có trình bày "*quy tắc L'Hospital*" (ở §163) khử dạng vô định. "*Quy tắc đó do I. Bernouli phát hiện ra rồi thông báo cho L'Hospital để công bố năm 1696*" (Từ điển Bách khoa Toán học, Viện sĩ *S.M. Nikolski* chủ biên, 1988).

Nhìn lại lịch sử toán học (LSTH) mấy nghìn năm kể từ thời *Arcimedes* cho đến hết thế kỷ XVII khi cuốn sách giáo khoa "*Giải tích các VCB*" (1696) của *L'Hospital* ra đời, khó có thể đưa ra câu trả lời xác đáng cho câu hỏi: Ai là người đã phát minh ra PTVCB?

Trong cuốn "*Toán học là gì?*" hai nhà toán học nổi tiếng Hoa Kỳ *R. Courant* (1888-1972) và *H. Robbins* (1915-2001) đã rất có lý khi cho rằng:

"*Trong thực tế PTVCB là kết quả của một quá trình tiến hoá lâu dài, không bắt đầu cũng không kết thúc bởi Newton hoặc Leibniz nhưng hai ông đã có vai trò khá quan trọng*".

Mặt khác, khi bàn về đại lượng biến thiên (ĐLBT) của *Descartes*, *Ph. Anghen* cũng nhấn mạnh rằng:

"*ĐLBT của Descartes đã đánh dấu một bước ngoặt trong toán học. Nhờ đó mà PTVP và PTTP trở nên cần thiết; phép tính đó đã xuất hiện ngay lập tức và nói chung và về toàn bộ nó đã được I. Newton và G. Leibniz hoàn thiện chứ không phải phát minh ra nó*"

(C. Mác, Ph. Anghen, T20, tr.576).

IV. MỘT THÍ DỤ ĐÁNG BUỒN

Trong một số tác phẩm LSTH, người ta đã dành khá nhiều trang để bàn luận về quyền ưu tiên phát minh ra PTVCB giữa những người ủng hộ *Newton* ở Anh

và những người ủng hộ *Leibniz* ở châu Âu. Ngay khi hai ông còn sống cũng đã xảy ra điều đó. Cuộc tranh cãi căng thẳng và đã đẩy đến mức độ thù hằn dân tộc. *R. Courant* và *H. Robbins* cho rằng: "*Sự tranh chấp quyền phát minh giải tích là một thí dụ đáng buồn... đầu độc bầu khí quyển của sự thống nhất khoa học*".

Để hiểu thí dụ đáng buồn mà hai tác giả của "*Toán học là gì?*" nói đến, xin được nêu ra một số trích đoạn ý kiến của một số nhà toán học và nhà LSTH.

Trong cuốn "*Khảo luận vắn tắt về LSTH*" (1963), nhà toán học và LSTH *J. Struik* (1925-2019) đề cập đến vấn đề này một cách ngắn gọn nhưng đầy đủ. Theo ông thì giờ đây người ta *đã xác lập được rằng Newton và Leibniz đá khám phá ra các phương pháp của mình một cách độc lập với nhau. Newton* thu được các kết quả đầu tiên vào những năm 1665-1666 bằng tiếp cận động học, còn *Leibniz* thì vào khoảng 1673-1676 bằng tiếp cận hình học. Nhưng *Leibniz* đã công bố các kết quả của mình trên tạp chí AE vào năm 1684-1686, còn các kết quả của *Newton* được công bố vào khoảng 1704-1736 sau khi ông qua đời. Thêm vào đó, trường pháp của *Leibniz* toả sáng hơn nhiều so với trường phái *Newton*.

S. Hawking (1942-2018) là giáo sư toán học của Đại học Cambridge. Ông đã ở cương vị mà trước đây *I. Barrow*, sau đó là *I. Newton* rồi *P.A.M. Dirac* (1902-1984) từng đảm nhiệm. Trong tác phẩm "*Lược sử thời gian*" (Hanoi-1995), ông đã viết khá tường tận và khách quan về cuộc tranh cãi này:

"*Cả Leibniz lẫn Newton đã phát triển độc lập với nhau ngành toán học gọi là Calculus (giải tích)...*"

Mặc dầu hiện nay chúng ta đều biết *Newton* đã phát hiện Calculus nhiều năm trước *Leibniz*, song ông đã công bố các công trình của mình muộn hơn *Leibniz*.

Nảy sinh cuộc tranh cãi om sòm xung quanh việc ai là người đầu tiên tìm ra Calculus giữa các nhà khoa học ủng hộ hai phía. Một điều đáng chú ý là số lớn các bài báo ủng hộ *I. Newton* lại được chính ông viết ra và công bố dưới tên các bạn ông. Khi cuộc cãi vã có quy mô lớn, *G. Leibniz* mắc sai lầm lớn là kêu gọi Hoàng gia giải quyết. *I. Newton* vốn là Chủ tịch Hội Hoàng gia, đã chỉ định một Hội đồng "*không thiên vị*" để tra xét vấn đề. Hội đồng này "*tình cờ*" lại gồm toàn những người bạn của *Newton*! Song chưa hết, *I. Newton* đã đệ lên Hội đồng một bản báo cáo và Hội Hoàng gia đã công bố bản báo cáo này, trong đó *I. Newton* đã công khai buộc tội *G. Leibniz* đánh cắp công trình. Chưa thoả mãn, *I. Newton* còn viết một bài nặc danh điểm lại bản báo cáo nói trên và đăng vào tạp chí riêng của Hội Hoàng gia. Sau khi *G. Leibniz* chết, người ta còn kể lại rằng *I. Newton* đã tuyên bố ông vô cùng thoả dạ khi "làm vỡ quả tim của *Leibniz*".

Tiếp theo, trong giáo trình "*Giải tích nhiều biến số*" (2007, ĐH Thuỷ lợi - Hà Nội) tác giả nhà toán học (Hoa Kỳ) *G.F. Simmons* (1925-2019) cũng viết:

"*Ngay cả cái chết của G. Leibniz cũng không làm dịu đi cơn thịnh nộ của Newton, ông vẫn tiếp tục theo đuổi kẻ thù ngay cả khi kẻ đó đã thành người thiên cổ... Tuy nhiên, một di sản để lại cho tất cả những nhà toán học vĩ đại nhất trong thời đại được bắt đầu với ông [Leibniz] - chứ không phải Newton - và mở rộng phạm vi kế tục nối liền đến thế kỷ XX*".

I. Newton qua đời năm 1727. Ông được mai táng tại nghĩa trang nhà thờ Wesminster nơi an nghỉ của các vĩ nhân nước Anh. *Ông được Nữ hoàng Anh Anne Stuart* (1665-1714) *tặng danh hiệu Hiệp sĩ* (1705). Pho tượng đồng *I. Newton* ở trường Trinity của ĐH Cambridge có khắc dòng chữ ở bệ: "*Trí tuệ của ông hơn hẳn mọi người*".

G. Leibniz qua đời năm 1716. Nhà thờ đã bác bỏ các quan điểm triết học của nhà toán học. Thi thể của ông được đặt dưới tầng hầm gần một tháng sau đó mới chôn cất. Tiễn đưa ông đến nơi an nghỉ cuối cùng chỉ có người phu mộ và người thư ký... Người làm chứng cho đám tang của ông viết rằng: "*Đây là người mang đến vinh quang cho nước Đức nhưng người ta đã chôn ông như chôn một tên kẻ cướp*".

Viện Hàn lâm khoa học (VHLKH) Berlin không biết phải ứng xử thế nào đối với cái chết của Chủ tịch Viện mình. Các nhà bác học ở Viên (thủ đô nước Áo) cũng lặng thinh. Chỉ có VHLKH Paris tổ chức long trọng Lễ tưởng niệm nhà tư tưởng vĩ đại. Trong *Bách khoa toàn thư* nổi tiếng của Pháp, nhà bác học *D. Diderot* (1713-1784) đã viết rằng: "*Leibniz đối với nước Đức cũng ngang như cả bộ ba Platon* (*429-348 TCN*), *Aristoteles* (384-322 *TCN*) *và Archimedes* (287-212 *TCN*) *gộp lại đối với Hy Lạp cổ đại...*

Quả thật *PTVCB là thắng lợi huy hoàng của "thuần tuý và hoàn toàn riêng của trí não con người". Nó đã biến toán học thành toán học của đại lượng biến thiên*. Đây cũng là ngọn nguồn và tiền đề để *A. Cauchy* (1789-1857), *C. Weierstrass* (1815-1897), *R. Dedekin* (1831-1916) và *G. Cantor* (1845-1918) thành công trong hoàn thiện và luận chứng cơ sở tiếp theo của PTVCB vào thế kỷ XIX.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/521 (Lớp 6). Xét 100 số nguyên dương 1; 2; 3; ...; 100. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho với mỗi cách lấy n số phân biệt từ 100 số trên đều tồn tại hai số a, b sao cho $a + b$ là một số nguyên tố.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/521 (Lớp 7). Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x + y$ và $xy + 1$ đều là lũy thừa của p.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Lập Thạch, Vĩnh Phú)

Bài T3/521. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình

$$x^3(3y+1)+y^2(3x+1)+(x+y)(x^2-xy+y^2+1)+2xy=343.$$

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T4/521. Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại C và D. Chứng minh rằng

$$\frac{AC}{AD}+\frac{BD}{BC}\geq 2.$$

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/521. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x^2y-xy-y=1\\-xy^2-y+y^2=3\end{cases}.$$

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/521. Cho các số thực dương $x, y \in (0; 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{12}\sqrt{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}.$$

TỪ HỮU SƠN
(Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Bài T7/521. Giải phương trình sau trên tập số thực: $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3$.

TRẦN VĂN LÂM
(Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, TX. Phổ Yên, Thái Nguyên)

Bài T8/521. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, E là tâm đường tròn Euler và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng

a) $EA+EB+EC\leq 3R$;

b) $EA^2+EB^2+EC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/521. Giải phương trình lượng giác

$$\sqrt{4^n\cos^{4n}x+3}+\sqrt{4^n\sin^{4n}x+3}=4,$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ.

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH
(GV Khoa Cơ bản – Học viện Phòng không Không quân, Sơn Tây, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/521. Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho ba số nguyên a^k+bc, b^k+ca, c^k+ab có ít nhất một ước nguyên tố chung.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/521. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(f(x)+yf(x^2))=x+x^2f(y)$ với mọi $x, y\in\mathbb{Z}$.

VŨ ĐỨC SƠN *(Hà Nội)*

Bài T12/521. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kỳ nằm trên cạnh BC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABM tiếp xúc với các cạnh BM, MA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (J) nội tiếp tam giác ACM tiếp xúc với các cạnh CM, MA, AC lần lượt

tại X, Y, Z. H là giao điểm của DF và XZ. Chứng minh các đường AH, DE, XY đồng quy.

ĐÀO ANH TIẾN

(*SV K66 khoa Toán-Tin ĐHSP Hà Nội*)

Bài L1/521. Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là $L_A = 50$ dB, tại B là $L_B = 30$ dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà $CB = 2CA$. Xác định mức cường độ âm tại điểm C.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/521. Cho đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Dùng ampe kế mắc nối tiếp vào đoạn mạch để đo cường độ dòng điện, khi đó số chỉ ampe kế là 2 A. Dùng một dây dẫn có điện trở r rất nhỏ nối tắt tụ điện C thì số chỉ ampe kế cũng là 2 A, vẫn dùng dây đó nối tắt đoạn mạch chứa L, C thì số chỉ ampe kế là 2,5 A. Khi dùng dây này nối tắt hai đầu cuộn cảm thuần L thì ampe kế chỉ bao nhiêu ?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/521 (For 6th grade). Find the smallest positive integer n so that for each set of n numbers chosen from 1; 2; 3; ...; 100, there always exist two numbers a, b so that $a + b$ is a prime number.

Problem T2/521 (For 7th grade). Given an odd prime number p. Find all pairs of positive integers $(x; y)$ so that both $x + y$ and $xy + 1$ are powers of p.

Problem T3/521. Find all integers x, y satisfying

$$x^3(3y+1)+y^2(3x+1)$$
$$+(x+y)(x^2-xy+y^2+1)+2xy=343.$$

Problem T4/521. Two circles (O) and (O') intersect at A and B. An exterior common tangent touchs (O) and (O') at C and D. Show that

$$\frac{AC}{AD}+\frac{BD}{BC}\geq 2.$$

Problem T5/521. Solve the system of equations

$$\begin{cases}3x^2y-xy-y=1\\-xy^2-y+y^2=3\end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/521. Given real numbers $x, y \in (0\,;1)$. Find the maximum value of the expression

$$P=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{12}\sqrt{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}.$$

Problem T7/521. Find the real roots of the equation

$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3.$$

Problem T8/521. Given a triangle ABC with the centroid G, the nine-point center E and the circumradius R. Show that

a) $EA+EB+EC\leq 3R$;

b) $EA^2+EB^2+EC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2$.

Problem T9/521. Solve the following trigonometric equation

$$\sqrt{4^n\cos^{4n}x+3}+\sqrt{4^n\sin^{4n}x+3}=4,$$

where n is an arbitrary natural number.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

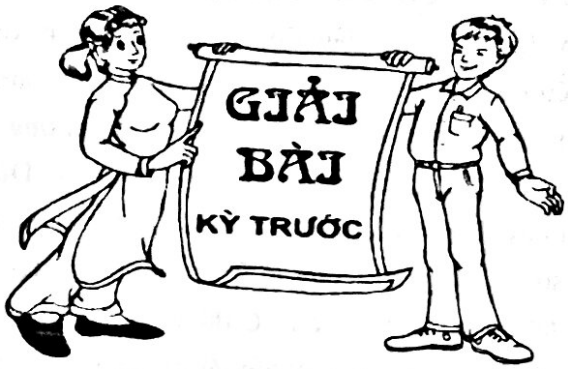
Problem T10/521. Let a, b, c be positive integers. Show that there exists an natural number k so that the three integers a^k+bc, b^k+ca, c^k+ab have at least one common prime divisor.

Problem T11/521. Find all functions $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfying $f(f(x)+yf(x^2))=x+x^2f(y)$ for all $x, y\in\mathbb{Z}$.

Problem T12/521. Given a triangle ABC and M is an arbitrary point on the side BC. The incircle (I) of the triangle ABM is tangent to the sides BM, MA, AB respectively at D, E, F. The incirrcle (J) of the triangle ACM is tangent to the sides CM, MA, AC respectively at X, Y, Z. Let H be the intersection between DF and XZ. Show that the lines AH, DE, XY are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)



Bài T1/517. *Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ là số nguyên tố.*

Lời giải. • Khi $p = 2$ thì $2^2 + 2^2 = 8$ là hợp số.

• Khi $p = 3$ thì $2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

• Khi $p > 3$ thì p là số lẻ và p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ với k là số nguyên dương.

Ta biến đổi $2^p + p^2 = 2^p + 1 + p^2 - 1$

$= 2^p + 1 + (p - 1)(p + 1)$.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p - 1 = 3k$, nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 1 = 3(k + 1)$, do đó $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ luôn chia hết cho 3. Do $p > 3$ và là số lẻ nên đặt $p = 2t + 1$ với t là số nguyên dương.

Lúc đó $2^p + 1 = 2^{2t+1} + 1 = 4^t.2 + 1$

$= (3 + 1)^t.2 + 1$.

Khi cho t lần lượt lấy các giá trị là số nguyên dương ta thấy $(3 + 1)^t$ luôn là tích của hai số dạng $3u + 1$ và $3v + 1$ nên luôn có dạng

$(3u + 1)(3v + 1) = 9uv + 3(u + v) + 1 = 3y + 1$

với y là số nguyên dương. Khi đó $2^p + 1$ có dạng $(3y + 1).2 + 1 = 6y + 3 = 3(2y + 1)$ với y là số nguyên dương, do đó $2^p + 1$ luôn chia hết cho 3 với $p > 3$ và p là số lẻ.

Khi $p > 3$ và p là số lẻ, từ các kết quả trên suy ra rằng $2^p + p^2 = 2^p + 1 + (p - 1)(p + 1)$ luôn chia hết cho 3 và lớn hơn 3, do đó $2^p + p^2$ là hợp số.

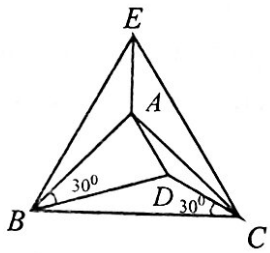
Vậy $2^p + p^2$ là số nguyên tố chỉ khi $p = 3$ và lúc đó $2^p + p^2 = 17$.

Nhận xét. Có thể xét khi $p > 3$ và p là số lẻ mà không chia hết cho 3 thì p có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5$ với k là số nguyên dương. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đoàn Anh Tú*, 6, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội:** *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh; **Nghệ An:** *Hồ Hoàng Vũ*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Kim Anh Quân*, 6A, *Nguyễn Văn Việt*, *Đào Phương Anh*, *Nguyễn Đăng Quang*, *Hoàng Văn Quyết*, *Thái Thị Mỹ Hạnh*, *Nguyễn Hải Triều*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thanh Thảo*, *Đặng Thị Ngọc Minh*, *Nguyễn Quỳnh Anh*, *Đặng Ngọc Mai*, *Trịnh Thùy Linh*, *Nguyễn Thị Trúc Quỳnh*, *Nguyễn Tấn Tài*, *Trần Tuấn Đạt*, *Nguyễn Minh Quân*, *Phan Thanh Huyền*, *Nguyễn Duy Khánh Huyền*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Bình Định:** *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 6A4, THCS Ph. Bình Định, Tx. An Nhơn; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Hoàng Anh*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/517. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm D nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 30^0$. Tính số đo góc $\widehat{CAD}$.*

Lời giải. (Của một số bạn) Dựng tam giác đều BCE có đỉnh E cùng phía với A so với nửa mặt phẳng bờ BC (hình vẽ). Khi đó do tính đối xứng, cho nên



$\widehat{BEA} = 30^0 = \widehat{BCD}$. Mặt khác theo giả thiết bài toán, ta dễ dàng có $\widehat{EBA} = 15^0 = \widehat{CBD}$. Hai tam giác BEA và BCA bằng nhau (g.c.g), suy ra $BA = BD$. Từ đó, trong tam giác cân BAD, ta có $\widehat{BAD} = 75^0$. Suy ra $\widehat{CAD} = 90^0 - \widehat{BAD} = 15^0$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng : **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Dinh*, *Nguyễn Thị Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, Đông Hà; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Võ Ánh Dương*, *Nguyễn Hằng Nga*, 7D, *Nguyễn Công An*, 8C THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1 THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa:** *Chu Thanh Ngọc*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Hà Nội:** *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội;

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/517. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}-\frac{1}{3(ab+bc+ca)}$.

Lời giải. Cách 1. Ta có

$$3P=\frac{3}{a+3}+\frac{3}{b+3}+\frac{3}{c+3}-\frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$=3-\left(\frac{a}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{c}{c+3}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3-3P=\frac{a^2}{a^2+3a}+\frac{b^2}{b^2+3b}+\frac{c^2}{c^2+3c}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{49}{50(ab+bc+ca)}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz, BĐT $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$ và dùng giả thiết $a+b+c=1$, ta có:

$$3-3P\ge\frac{\left(a+b+c+\frac{1}{5}\right)^2}{(a+b+c)^2+3(a+b+c)}+\frac{49}{50.\frac{(a+b+c)^2}{3}}=\frac{33}{10}$$

$\Leftrightarrow P\le\frac{-1}{10}$; $P=\frac{-1}{10}$ khi:

$$\begin{cases}a+b+c=1, a=b=c\\ \frac{a}{a^2+3a}=\frac{b}{b^2+3b}=\frac{c}{c^2+3c}=\frac{\frac{1}{5}}{2(ab+bc+ca)}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\frac{-1}{10}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2. Ta có BĐT quen thuộc:

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=1$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}-\frac{1}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}-1.$$

Ta chứng minh BĐT: $\frac{1}{x+3}\le\frac{33-9x}{100}$ (1) với mọi $x\in(0;1)$. Ta có: (1) $\Leftrightarrow(33-9x)(x+3)\le100$

$\Leftrightarrow -9x^2+6x-1\le0\Leftrightarrow-(3x-1)^2\le0$ (2).

BĐT(2) luôn đúng, đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$.

BĐT(1) được chứng minh. Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{1}{a+3}\le\frac{33-9a}{100};\ \frac{1}{b+3}\le\frac{33-9b}{100};\ \frac{1}{c+3}\le\frac{33-9c}{100}.$$

Do đó $P=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-1$

$$\le\frac{99-9(a+b+c)}{100}-1=-\frac{1}{10}.$$

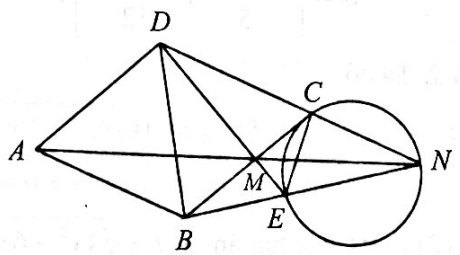
Vậy $\max P=\frac{-1}{10}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều làm theo cách tương tự như trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, *Vũ Minh Nghĩa*, 8A1, THCS Cầu Giấy, TP. Hà Nội; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Tây Ninh:** *Ngô Quốc Tài*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/517. *Cho hình thoi ABCD có* $\widehat{BAC}=60^0$. *Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC (M không trùng với các đỉnh B, C), đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại điểm N và gọi E là giao điểm của đường thẳng DM và đường thẳng BN. Chứng minh rằng đương thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN.*

Lời giải.



Do AD // BC nên $\widehat{DAM}=\widehat{AMB}$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{ADN} = \widehat{ABM}$.

Từ đó $\Delta ADN \sim \Delta MBA$ (g.g), ta có: $\frac{AD}{MB} = \frac{DN}{AB}$.

Vì ΔABD đều nên $AD = AB = BD$, suy ra:

$$\frac{BD}{BM} = \frac{DN}{DB}.$$

Lại có ΔBCD đều nên $\widehat{BDN} = \widehat{DBM}$, suy ra:

$$\Delta DBM \sim \Delta NDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{DNB}.$$

Suy ra $\Delta BDE \sim \Delta BND$ (g.g), ta có:

$$\frac{BD}{BN} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{BC}{BN} = \frac{BE}{BC}.$$

Từ đó suy ra $\Delta BCE \sim \Delta BNC$ (c.g.c), dẫn tới $\widehat{BCE} = \widehat{CNB}$. Do đó BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác NCE.

Nhận xét. Chỉ có hai bạn cho lời giải đúng là bạn *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; và bạn *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/517. *Giải phương trình*

$$8x^2 - 11x + 1 = (1-x)\sqrt{4x^2 - 6x + 5} \quad (1).$$

Lời giải. Cách 1. Bình phương hai vế PT(1) ta có: $(8x^2 - 11x + 1)^2 = (1-x)^2(4x^2 - 6x + 5)$

$$\Leftrightarrow 60x^4 - 162x^3 + 116x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(5x^2 - 6x - 1)(6x^2 - 9x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2 - 6x - 1 = 0 \\ 6x^2 - 9x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3 \pm \sqrt{14}}{5} \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{12} \end{array}\right..$$

Thử lại ta có tập nghiệm của PT là

$$S = \left\{\frac{3-\sqrt{14}}{5}; \frac{9+\sqrt{33}}{12}\right\}.$$

Cách 2. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow -(4x^2 - 6x + 5) + (x-1)\sqrt{4x^2 - 6x + 5} + 12x^2 - 17x + 6 = 0 \quad (2).$$

Xem (2) là PT bậc hai ẩn là $t = \sqrt{4x^2 - 6x + 5}$, ta có: $\Delta = (x-1)^2 + 4(12x^2 - 17x + 6) = (7x-5)^2$.

Do đó PT(2) có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = \frac{1 - x + (7x-5)}{-2} = -3x + 2 & (3) \\ \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = \frac{1 - x - (7x-5)}{-2} = 4x - 3 & (4) \end{array}\right..$$

Giải phương trình (3) và (4) ta tìm được nghiệm của PT đã cho là: $\frac{3-\sqrt{14}}{5}; \frac{9+\sqrt{33}}{12}$.

Nhận xét. Cách giải thứ nhất làm mất căn bằng bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc 4 và sau đó là đưa về phương trình tích số với hai thừa số là các tam thức bậc hai đã biết cách giải. Cách giải thứ hai sử dụng cách đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Hai cách giải đều không khó và có độ dài như nhau. Các bạn tham gia đều giải đúng bài này đều giải theo một trong hai cách trên. Sau đây là danh sách của các bạn: **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Q. Hồng Bàng; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, TP. Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, H. Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 8E, THCS Nguyễn Trãi, H. Nghi Xuân; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, H. Cam Lộ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NHƯ HOÀNG

Bài T6/517. *Cho sử x, y, z, t là các số thực sao cho* $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le 2$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P(x,y,z,t) = (x+3y)^2 + (z+3t)^2 + (x+y+z)^2 + (x+z+t)^2.$$

Lời giải. Bổ đề: Với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có: $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ..., + a_nx_n^2) \ge (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)^2$.

Thậy vậy, áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số: $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, ..., \sqrt{a_n}$ và $\sqrt{a_1}x_1, \sqrt{a_2}x_2, ..., \sqrt{a_n}x_n$ ta có ngay điều cần chứng minh.

Với hai số dương a, b tùy ý, ta có:

$$(x+3y)^2=\left(a.\frac{x}{a}+3b.\frac{y}{b}\right)^2\le(a+3b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{3y^2}{b}\right);$$

$$(z+3t)^2=\left(a.\frac{z}{a}+3b.\frac{t}{b}\right)^2\le(a+3b)\left(\frac{z^2}{a}+\frac{3t^2}{b}\right);$$

$$(x+y+z)^2=\left(a.\frac{x}{a}+b.\frac{y}{b}+a\frac{z}{a}\right)^2\le(2a+b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{x^2}{a}\right);$$

$$(x+z+t)^2=\left(a.\frac{x}{a}+a.\frac{z}{a}+b\frac{t}{b}\right)^2\le(2a+b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{a}+\frac{t^2}{b}\right).$$

Do đó:

$$P(x,y,z,t)\le\frac{5a+5b}{a}(x^2+z^2)+\frac{5a+10b}{a}(y^2+t^2).$$

Ta chọn a, b sao cho

$$\frac{5a+5b}{a}=\frac{5a+10b}{a}\Leftrightarrow a^2+ab-b^2=0.$$

Chọn $b=1$ thì $a^2+a-1=0\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Khi đó $P(x,y,z,t)\le\frac{5(3+\sqrt{5})}{2}(x^2+y^2+z^2+t^2)$

$$\le\frac{5(3+\sqrt{5})}{2}.2=5(3+\sqrt{5}).$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{a}=\frac{t}{b}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=2\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=z=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\\ y=t=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=z=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\\ y=t=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\end{cases}.$$

Nhận xét. Có không nhiều các bạn giải bài này. Một số bạn sử dụng phương pháp hàm số để giải bài này nhưng cách giải này còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/517. *Tìm tất cả các số thực x sao cho*

$$\left\{\frac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}\right\}=\frac{1}{2}\quad(1)$$

trong đó $\{a\}$ là kí hiệu phần lẻ của số thực a.

Lời giải. (Của nhiều bạn) Theo định nghĩa $\{a\}=a-[a]$ và $a-1\le[a]<a$ nên

$$(1)\Leftrightarrow\left[\frac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}\right]=\frac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}=\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}\in\mathbb{Z}\\ \frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}\le\frac{2x^2-5x+2}{x^2-x+1}<\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}+1\ (*)\end{cases}$$

Giải BPT(*) với nhận xét $x^2-x+1>0$ với mọi x, ta được: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-9x+3\le4x^2-10x+4\\ 4x^2-10x+4<5x^2-11x+5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1\ge0\\ x^2-x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Do vậy, bài toán trở thành: Tìm tất cả các số thực x để $y=\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}\in\mathbb{Z}$.

Ta có: $y=\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}$

$$\Leftrightarrow(3-2y)x^2-(9-2y)x+3-2y=0.$$

PT này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta=(9-2y)^2-4(3-2y)^2=-3(4y^2-4y-15)\ge0$$

$$\Leftrightarrow4y^2-4y-15\le0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le y\le\frac{5}{2}.$$

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y=\{-1,0,1,2\}$.

- Thay $y=\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}=-1$ ta được:

$$\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}=-1\Leftrightarrow5x^2-11x+5=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{21}}{10}.$$

- Thay $y=\frac{3x^2-9x+3}{2(x^2-x+1)}=0$ ta được:

$$x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

• Thay $y=\dfrac{3x^2-9x+3}{2\left(x^2-x+1\right)}=1$ ta được:

$$\frac{3x^2-9x+3}{2\left(x^2-x+1\right)}=1\Leftrightarrow x^2-7x+1=0\Leftrightarrow x_{5,6}=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

• Thay $y=\dfrac{3x^2-9x+3}{2\left(x^2-x+1\right)}=2$ ta được:

$$\frac{3x^2-9x+3}{2\left(x^2-x+1\right)}=2\Leftrightarrow x^2+5x+1=0\Leftrightarrow x_{7,8}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Kết luận: Phương trình có 8 nghiệm.

Nhận xét. 1) Bài này đưa về dạng cơ bản

$$[f(x)]=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\in\mathbb{Z},\\ g(x)\le f(x)<g(x)+1.\end{cases}$$

Có thể tham khảo: Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy, *Phần nguyên và ứng dụng trong giải toán*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020, trang 167.

2) Hầu hết các bạn đều ra đáp số đúng, tuy lời giải có hơi khác. Thí dụ, sử dụng đạo hàm để tìm $y_{\min}\le y\le y_{\max}$. Danh sách các bạn giải đúng là: **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, *Trần Phương Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách.

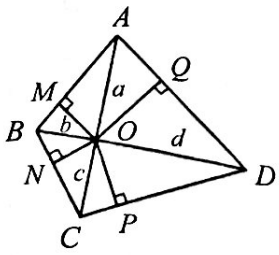
TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/517. *Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi*

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OQ^2}.$$

Lời giải. Đặt $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ và $\widehat{AOB}=\alpha$. Sử dụng định lý hàm số côsin cho tam giác OAB ta có:

$$AB^2=a^2+b^2-2ab.\cos\alpha.$$



Diện tích của tam giác OAB là

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OM.AB=\frac{1}{2}ab.\sin\alpha$$

suy ra:

$$\frac{1}{OM^2}=\frac{AB^2}{a^2b^2\sin^2\alpha}\Rightarrow\frac{1}{OM^2}=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{a^2b^2\sin^2\alpha}$$
$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2\cos\alpha}{ab}\right).$$

Mặt khác do $\widehat{COD}=\alpha;\widehat{BOC}=\widehat{AOD}=180^0-\alpha$ nên tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\cos\alpha}{bc}\right);$$
$$\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-\frac{2\cos\alpha}{cd}\right);$$
$$\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2\cos\alpha}{da}\right).$$

Từ đó

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-2\cos\alpha\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)\right);$$
$$\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+2\cos\alpha\left(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}\right)\right).$$

Suy ra $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{OP^2}=\dfrac{1}{ON^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$

$$\Leftrightarrow -2\cos\alpha\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)=2\cos\alpha\left(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\right)\cos\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=90^0\Leftrightarrow AC\perp BD.$$

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Xuân Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Bình:** *Trần Phương Linh*, *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, *Lê Mỹ Duyên*, *Đặng Hoàng Duy*, 11 Toán 1, *Nguyễn*

Anh Đức, 11 Toán 2, *Phạm Long Khánh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Ngô Hoàng Thành Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; TP. Huế; **Quảng Nam:** *Huỳnh Thanh Tường, Nguyễn Lâm Bảo Uyên*, 10 CT, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/517. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6abc}{ab+bc+ca}$.

Lời giải. Tất cả các bất đẳng thức trong bài này được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương. Ta có:

$$3(ab+bc+ca)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)+\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}$$
$$\le (a+b)(b+c)(c+a)+\frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{c+a}{2}$$
$$=\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a).$$

Suy ra: $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}\ge\frac{8}{3}$.

Nhận xét: Nếu x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn $xyzt \ge 16$ thì

$$x+y+z+t\ge 2\sqrt{xy}+2\sqrt{zt}$$
$$\ge 2.2\sqrt{\sqrt{xy}.\sqrt{zt}}=4\sqrt[4]{xyzt}\ge 4\sqrt[4]{16}=8.$$

Do đó $P+3=\left(\frac{a}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+1\right)+\left(\frac{c}{a}+1\right)+\frac{6abc}{ab+bc+ca}$

$$=\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}+\frac{6abc}{ab+bc+ca}\ge 8$$

vì $\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}.\frac{6abc}{ab+bc+ca}=6.\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}$

$$\ge 6.\frac{8}{3}=16.$$

Từ đó suy ra $P \ge 5$; $P = 5 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5.

Nhận xét. Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, quen thuộc với các bạn học sinh. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Lê Văn Anh Khoa, Nguyễn Thiên Lý, Bùi Hữu Phúc, Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tây Ninh:** *Ngô Quốc Tấn*, 8A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Tây Ninh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/517. *Cho p là số nguyên tố và k là số nguyên dương. Tìm tất cả các cặp (p, k) sao cho:*

$$k!=(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2).$$

Lời giải (Dựa theo ý của bạn *Nguyễn Anh Đức*, 11T2 và bạn *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình).**

Xét $p = 2$. Ta có $k! = 2^3.3.7 = 168$ không chia hết cho 5. Không có k thỏa mãn vì $5! = 120$ suy ra $k > 5$, dẫn đến $k!$ chia hết cho 5.

Xét $p \ge 3$. Ta chứng minh $k \ge 3p$.

Ta có: $k! = p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$.

Do đó $\gamma_p(k!)=3$. Mặt khác $\gamma_p(k!)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{k}{p^i}\right]$,

ở đó n thỏa mãn $p^n \le k < p^{n+1}$.

Nếu $n \ge 2$ thì $k \ge p^2 \ge 3p$. Nếu $n = 1$ thì

$$\left[\frac{k}{p}\right]=3 \Rightarrow k\ge 3p.$$

Khi đó $k\ge 3p>p+1; k\ge 3p>2(p+1)$.

Do đó $k!$ chia hết cho $(p+1)^2$ hay

$p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$ chia hết cho $p+1$.

Vì $(p^2+p+1, p+1) = 1$ nên $p^3(p-1)^3$ chia hết cho $p+1$, suy ra $p^3(p-1)^3\equiv 0 \pmod{p+1}$.

Ta có: $p\equiv -1 \pmod{p+1}$; $p-1\equiv 2 \pmod{p+1}$.

Do đó $p^3(p-1)^3\equiv -8 \pmod{p+1} \Rightarrow 8\equiv 0 \pmod{p+1}$

$\Rightarrow 8$ chia hết cho $p+1$, suy ra $p\in\{3,7\}$.

Với $p = 3$ ta có $k! = 11232$ không chia hết cho 5. Do đó không tồn tại k.

Với $p = 7$ ta có $k! = 2^4.\ 3^4\ .7^3.\ 19$ không chia hết cho 5. Do đó không tồn tại k. Vậy không tồn tại (p, k) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. Chỉ có 8 bạn tham gia giải bài này, trong đó có 7 bạn có lời giải đúng, tuy có dài hơn cách giải nêu trên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/517. *Tìm tất cả các hàm số* $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn:* $f(2f(a)+f(b)) = 2a+b-4$ (1), $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Theo (1), với $b = 4$ thì

$$f(2f(a)+f(4)) = 2a,\ \forall a \in \mathbb{Z}\ \ (2).$$

Giả sử $f(a_1) = f(a_2)$ với $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Theo (2) thì $2a_2 = f(2f(a_2)+f(4)) = f(2f(a_1)+f(4)) = 2a_1$. Suy ra $a_1 = a_2$, tức f là đơn ánh trên $\mathbb{Z}$. Để ý rằng $2a+b-4 = 2(a-1)+(b+2)-4$ nên từ (1) suy ra: $f(2f(a)+f(b))$

$$= f(2f(a-1)+f(b+2)), \forall a, b \in \mathbb{Z}\ (3).$$

Vì f đơn ánh nên từ (3) suy ra:

$2f(a)+f(b) = 2f(a-1)+f(b+2), \forall a, b \in \mathbb{Z}$ (4).

Từ (4) với $b = a-2$, ta thu được:

$2f(a)+f(a-2) = 2f(a-1)+f(a), \forall a \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow f(a)-f(a-1) = f(a-1)-f(a-2), \forall a \in \mathbb{Z}$ (4).

Suy ra dãy $\{f(a)\}$ là một cấp số cộng và $f(a) = pa+q, \forall a \in \mathbb{Z}$, với $p, q \in \mathbb{Z}$.

Thay $f(a) = pa+q$ vào (1), ta thu được:

$(2(pa+q)+(pb+q))p+q = 2a+b-4, \forall a, b \in \mathbb{Z}$

hay $2(p^2-1)a+(p^2-1)q+3pq+q+4 = 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ (5).

Từ (5) suy ra p, q phải thỏa mãn hệ thức:

$$\begin{cases} p^2-1=0 \\ 3pq+q+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=1, q=-1 \\ p=-1, q=2 \end{array}\right..$$

Kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn điều kiện bài ra là $f(x) = x-1$ và $f(x) = -x+2$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{Z}$. Đa số lời giải gửi đến theo cách đã trình bày. Một số bạn đưa về phương trình hàm Cauchy cũng cho lời giải ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Hoàng Tăng Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, Lâm Đồng; **Quảng Bình:** *Nguyễn Anh Đức*, 11T2, *Trần Phương Linh*, *Lê Đức Hạnh*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/517. *Cho tam giác ABC có B, C là hai điểm cố định thuộc đường tròn (O), điểm A thay đổi trên (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi* $(C_1), (C_2), (C_3)$ *lần lượt là các đường tròn đường kính AB, BC, CA. AH cắt* (C_2) *tại điểm M (M thuộc đoạn AH), BH cắt* (C_3) *tại điểm N (N thuộc đoạn BH), CH cắt* (C_1) *tại điểm P (P thuộc đoạn CH). AN cắt* (C_1) *tại điểm S khác A, AP cắt* (C_3) *tại điểm T khác A. Đường thẳng NP cắt* (C_1) *tại điểm X khác P, cắt* (C_3) *tại Y khác N; XS cắt YT tại điểm Z. Đường thẳng qua A vuông góc với NP cắt* (C_1) *tại J, cắt* (C_3) *tại L.*

a) *Đường tròn tâm A bán kính AN cắt* (C_1) *tại điểm V, cắt* (C_3) *tại điểm U. Chứng minh rằng ba điểm V, N, J thẳng hàng và ba điểm U, P, L thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ là điểm cố định khi A thay đổi trên (O).*

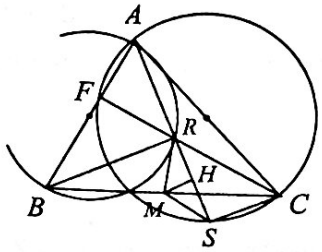
Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tam giác nhọn ABC, CF là đường cao, M là trung điểm của BC. R là giao điểm của đoạn CF và đường tròn đường kính AB. S là giao điểm*

thứ hai của AR và đường tròn đường kính AC. Khi đó MR = MS.

Chứng minh. Gọi H là hình chiếu của M trên RS. Dễ thấy: $BR \perp RS; CS \perp PS$. Vậy $MH // CS // BR$.

Từ đó, chú ý rằng M là trung điểm của BC, theo định lí Thales, suy ra H là trung điểm của RS. Vậy $MR = MS$.



Trở lại giải bài toán T12.517.

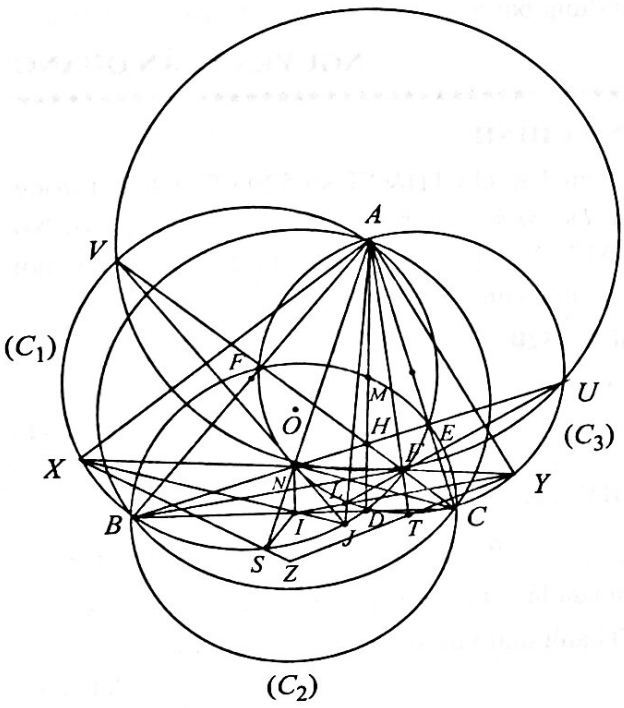
1) Dễ thấy $\widehat{ANC} = \widehat{APB} = 90°; NE \perp AC; PF \perp AB$ và B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $AN^2 = \overline{AC}.\overline{AE} = \overline{AB}.\overline{AF} = AP^2$. Điều đó có nghĩa là tam giác ANP cân tại A. Kết hợp với $AJ \perp NP$, suy ra J là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{PS}$ không chứa A của đường tròn đường kính AB. Vậy

$$(VN, VP) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}) \equiv (AJ, AP) \equiv (NJ, VP) \pmod{\pi}.$$

Do đó V, N, J thẳng hàng. Tương tự U, P, L thẳng hàng.

2) Gọi I là trung điểm của BC. Dễ thấy các tam giác XNS, ANP đồng dạng. Theo phần 1, tam giác ANP cân tại A. Vậy tam giác XNS cân tại X. Theo phần 1, J là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{PS}$ không chứa A của đường tròn đường kính AB. Vậy XJ vừa là phân giác của góc $\widehat{YXZ}$ vừa là trung trực của đoạn NS. Mặt khác, theo bổ đề trên, $IN = IS$. Vậy phân giác của góc $\widehat{YXZ}$ đi qua I. Tương tự phân giác của góc $\widehat{XYZ}$ đi qua I. Tóm lại khi A thay đổi trên (O), tâm đường tròn nội tiếp tam giác ZXY là một điểm cố định (điểm I).



Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng đa số các lời giải gửi tới Tòa soạn đều trình bày quá phức tạp.

2) Chỉ có bảy bạn tham gia giải: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tuấn*, THPT chuyên Chu Văn An; **Quảng Bình:** *Nguyễn Anh Đức*, 11T2, *Cao Huyền My*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP Sóc Trăng.

3) Tác giả của bổ đề trên là bạn *Nguyễn Anh Đức*.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/517. *Một vật dao động điều hoà với chu kì T và biên độ A = 10 cm. Tại thời điểm $t = t_1$ vật có li độ $x_1 = 5$ cm và tốc độ v_1. Đến thời điểm $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ vật có vận tốc $v_2 = 5\sqrt{3}$ cm/s. Xác định v_1.*

Lời giải. Áp dụng công thức độc lập thời gian :

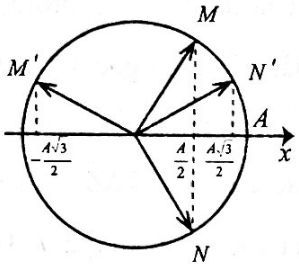
$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad (1).$$ Từ giản đồ hình vẽ:

Tại thời điểm t_1: $x_1 = 5$ cm $= \frac{A}{2}$.

Tại thời điểm $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}, x_2 = \pm\frac{A\sqrt{3}}{2} = \pm 5\sqrt{3}$ cm.

Thay các giá trị của x_1, v_1 vào (1), ta có:

$$25 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = 100 \quad (2).$$



Thay các giá trị của x_2, v_2 vào (1), ta có:

$$75 + \frac{75}{\omega^2} = 100 \quad (3).$$

Từ (3) suy ra $\omega^2 = 3\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2$.

Thay vào (2) ta tìm được $v_1 = 15$ cm/s.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu, Nguyễn Nhật Tân*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Đại Bảo Khanh*, 12A7, THPT Hai Bà Trưng, TP. Huế, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 2, THPT Quốc học Huế, TP. Huế; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/517. *Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\,\Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch*

$$i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right)(\text{A})$$

và $$i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)(\text{A}).$$

Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

Lời giải. Ta thấy trong hai trường hợp cường độ dòng điện hiệu dụng bằng nhau nên: $Z_1 = Z_2$ hay $Z_L = Z_C$. Do đó trường hợp *RL* cường độ dòng điện chậm pha hơn *u* một góc φ, còn trường hợp *RC* cường độ dòng điện lại nhanh pha hơn *u* một góc cũng bằng φ. Theo bài ra có:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{10\pi}{21} - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Lại có: $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}\ (\Omega)$.

Hiệu điện thế hiệu dụng của nguồn là:

$$U = I.Z_{RL} = \frac{6}{\sqrt{2}}\sqrt{(30)^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2} = 60\sqrt{6}\,(\Omega).$$

Khi cả 3 phần tử mắc nối tiếp, xảy ra cộng hưởng nên: $P = \frac{U^2}{R} = 720$ (W).

Nhận xét. Chỉ có bạn *Đặng Duy Hậu* 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên** có lời giải đúng bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

ĐÍNH CHÍNH.

1) Trên Tạp chí TH&TT số 520 (T10.2020) trong mục *Đề ra kỳ này* bài T1/520 đăng trùng với bài T1/517. Xin giới thiệu bài T1/520 mới với nội dung như sau:

Bài T1/520. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.*

PHÙNG CHÍ TỰ

(GV THCS Phương Liệt, Thanh Xuân, Hà Nội)

2) **Bài T10/520** đã viết:

$$u_n = 4u_{n-1} + 3n^2 - 12n^3 + 12n - 4$$

Xin sửa là: $$u_n = 4u_{n-1} + 3n^3 - 12n^2 + 12n - 4$$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

HAI ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC - HAI ĐIỂM ĐẲNG GIÁC

NGUYỄN MINH HÀ - LƯU CÔNG ĐÔNG
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài viết này muốn giới thiệu với bạn đọc TH&TT khái niệm *hai đường đẳng giác* và khái niệm *hai điểm đẳng giác*, những khái niệm quan trọng của hình học phẳng mà bất cứ một học sinh chuyên toán nào cũng cần phải biết.

1. Hai đường đẳng giác

Định nghĩa 1. Cho bốn đường thẳng a,b,c,d đồng quy tại O. Khi đó hai đường thẳng c,d được gọi là đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b nếu một trong các điều kiện tương đương sau xảy ra (h.1)

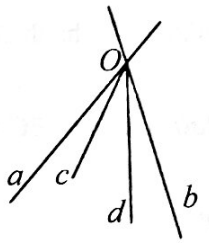
(a) $(a,c)\equiv-(b,d)\pmod{\pi}$.

(b) $(a,c)\equiv(d,b)\pmod{\pi}$.

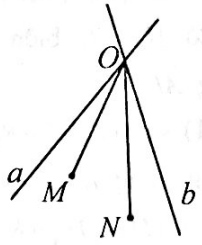
(c) $(c,a)\equiv-(d,b)\pmod{\pi}$.

(d) $(c,a)\equiv(b,d)\pmod{\pi}$.

Thay cho cách viết hai đường thẳng OM,ON đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b (cắt nhau tại O), ta có thể viết hai điểm M,N đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b (h.2).



(h.1)



(h.2)

Thay cho cách viết *hai đường thẳng c,d đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b*, ta có thể viết *cặp đường thẳng (c,d) đẳng giác đối với cặp đường thẳng (a,b)*.

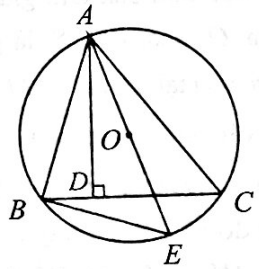
Thay cho cách viết *hai điểm M,N đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b*, ta có thể viết *hai điểm M,N đẳng giác đối với cặp đường thẳng (a,b)*.

Đương nhiên hai đường thẳng c,d đẳng giác đối với hai đường thẳng a,b khi và chỉ khi hai đường thẳng a,b đẳng giác với hai đường thẳng c,d.

Để cho đơn giản, trong bài viết này a,b,c,d luôn được coi là đôi một khác nhau.

Nếu không có gì nhầm lẫn, ta không viết hai đường thẳng a,b mà viết a,b, ta không viết cặp đường thẳng (a,b) mà viết (a,b), ta không viết hai điểm M,N mà viết M,N.

Để cho đơn giản, đường tròn ngoại tiếp ΔABC được viết là đường tròn (ABC).



(h.3)

2. Các thí dụ cơ bản về hai đường đẳng giác

Thí dụ 1. *Cho ΔABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, D là hình chiếu của A trên BC. Khi đó O,D đẳng giác đối với AB,AC.*

Chứng minh.

Gọi E giao điểm thứ hai của AO và đường tròn (ABC) (h.3). Chú ý rằng $AB\perp BE$, $AD\perp BC$, ta có:

$$\begin{aligned}(AB,AD)&\equiv(BE,BC)\\&\equiv(AE,AC)\\&\equiv(AO,AC)\pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Vậy O,D đẳng giác đối với AB,AC.

Thí dụ 2. *Cho tứ giác điều hòa $ABCD$, M là trung điểm của BD. Khi đó C, M đẳng giác đối với AB, AD.*

Chứng minh. (h.4) Dễ thấy:

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})\equiv(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})\equiv(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})\pmod{2\pi}.$$

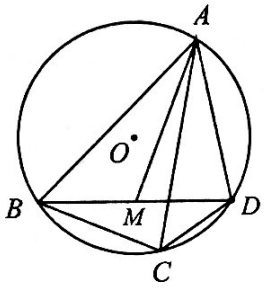
Theo định lí Ptolemy và chú ý rằng $ABCD$ là tứ giác điều hòa, ta có:

$AC.BM = \frac{1}{2}AC.BD$

$= \frac{1}{2}(AB.CD + AD.CB)$

$= \frac{1}{2}.2AB.CD = AB.CD.$

Do đó $\frac{BA}{BM} = \frac{CA}{CD}$.



(h.4)

Vậy các tam giác ABM, ACD đồng dạng cùng hướng. Điều đó có nghĩa là $(AB, AM) \equiv (AC, AD) (\bmod \pi)$. Nói cách khác C, M đẳng giác đối với AB, AD.

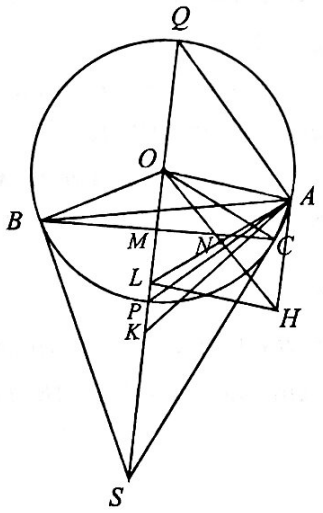
Thí dụ 3. *Cho tam giác ABC, O, N theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Euler. K là tâm của đường tròn (OBC). Khi đó N, K đẳng giác đối với AB, AC.*

Chứng minh. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp; H là trực tâm của tam giác ABC; L là điểm đối xứng của O qua BC; S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C; M là trung điểm của BC; P, Q là các giao điểm của SO và (O) (h.5). Dễ thấy $\overline{AH} = 2\overline{OM} = \overline{OL}$. Do đó $AOLH$ là hình bình hành. Từ đó và chú ý rằng N là trung điểm của OH, suy ra $AN \equiv AL$ (1). Dễ thấy S, O, P, Q, K, L, M cùng thuộc một đường thẳng. Vì O, P, Q thẳng hàng nên $AP \perp AQ$ (2). Dễ thấy

$$OP^2 = OB^2 = \overline{OM}.\overline{OS} = 2\overline{OM}.\frac{1}{2}\overline{OS} = \overline{OL}.\overline{OK}.$$

Từ đó, chú ý rằng O là trung điểm của PQ, theo hệ thức Newton, suy ra $A(KLPQ) = (KLPQ) = -1$ (3).

Từ , (1), (2) và (3) suy ra



(h.5)

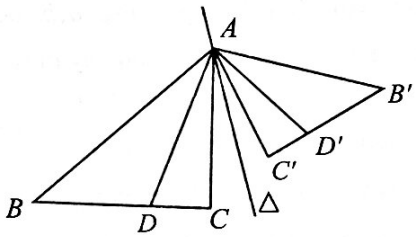
$$(AN, AP) \equiv (AL, AP) \equiv (AP, AK) (\bmod \pi).$$

Kết hợp với $(AP, AB) \equiv (AC, AP) (\bmod \pi)$, suy ra $(AN, AB) \equiv (AC, AK) (\bmod \pi)$. Nói cách khác N, K đẳng giác đối với AB, AC.

3. Các kết quả cơ bản về hai đường đẳng giác

Định lí 1. *Cho hai tam giác $ABC, AB'C'$ đồng dạng ngược hướng và các điểm D, D' theo thứ tự thuộc $BC, B'C'$. Khi đó D, D' đẳng giác đối với AB, AB' khi và chỉ khi* $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'C'}}$.

Chứng minh. (h.6) Vì hai tam giác $ABC, AB'C'$ đồng dạng ngược hướng nên tồn tại đường thẳng Δ đi qua A sao cho phép vị tự đối xứng $H_A^k \circ R_\Delta$ theo thứ tự biến B, C thành B', C' (1).



(h.6)

Điều kiện cần. Giả sử D, D' đẳng giác đối với AB, AB'. Dễ thấy

$$(AD, \Delta) \equiv (AD, AB) + (AB, \Delta)$$
$$\equiv -(AD', AB') - (AB', \Delta) \equiv -(AD', \Delta) (\bmod \pi).$$

Do đó $H_A^k \circ R_\Delta$ biến đường thẳng AD thành đường thẳng AD'.

Từ (1) suy ra $H_A^k \circ R_\Delta$ biến đường thẳng BC thành đường thẳng $B'C'$. Vậy

$$H_A^k \circ R_\Delta(D) = H_A^k \circ R_\Delta(AD \cap BC)$$
$$= H_A^k \circ R_\Delta(AD) \cap H_A^k \circ R_\Delta(BC) = AD' \cap B'C' = D'.$$

Kết hợp với (1), suy ra: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'C'}}$.

Điều kiện đủ. Giả sử $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'C'}}$. Kết hợp với (1), suy ra $H_A^k \circ R_\Delta$ biến D thành D'. Lại kết hợp với (1), suy ra hai tam giác $ABD, AB'D'$ đồng dạng ngược hướng. Do đó

$$(AB, AD) \equiv -(AB', AD') (\bmod \pi).$$

Vậy D, D' đẳng giác đối với AB, AB'.

Định lí 2. *Cho ΔABC và các điểm D, E trên đường thẳng BC. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(a) D, E đẳng giác đối với AB, AC.

(b) $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

(c) *Đường tròn (ADE) tiếp xúc với đường tròn (ABC).*

Chứng minh. Qua điểm B dựng đường thẳng song song với AC và theo thứ tự cắt AD, AE tại P, Q. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABC) (h.7).

Các mệnh đề sau tương đương

(1) D, E là đẳng giác đối với AB, AC.

(2) $(AB, AD) \equiv (AE, AC) \pmod{\pi}$.

(3) $(AB, AD) \equiv (AQ, BQ) \pmod{\pi}$.

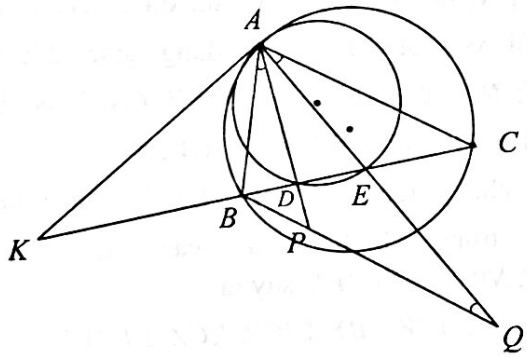
(4) BA tiếp xúc với đường tròn (APQ).

(5) $BA^2 = \overline{BP}.\overline{BQ}$.

(6) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AC}}.\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AC}}$.

(7) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$.

Vậy (a) và (b) tương đương.



(h.7)

Các mệnh đề sau tương đương.

(1) Đường tròn (ADE) tiếp xúc với đường tròn (ABC).

(2) AK tiếp xúc với đường tròn (ADE).

(3) $(AK, AD) \equiv (EA, ED) \pmod{\pi}$.

(4) $(AK, AB) + (AB, AD) \equiv (EA, ED) \pmod{\pi}$.

(5) $(CA, CB) + (AB, AD) \equiv (EA, ED) \pmod{\pi}$.

(6) $(AB, AD) \equiv (EA, ED) + (CB, CA) \pmod{\pi}$.

(7) $(AB, AD) \equiv (AE, AC) \pmod{\pi}$.

Vậy (c) và (a) tương đương.

Tóm lại (a), (b), (c) đôi một tương đương với nhau.

Định lí 3. *Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm O và hai điểm A, B khác O. M là trung điểm của AB. E, F theo thứ tự là hình chiếu của A trên a, b. Khi đó các mệnh đề sau tương đương*

(a) A, B đẳng giác đối với a, b.

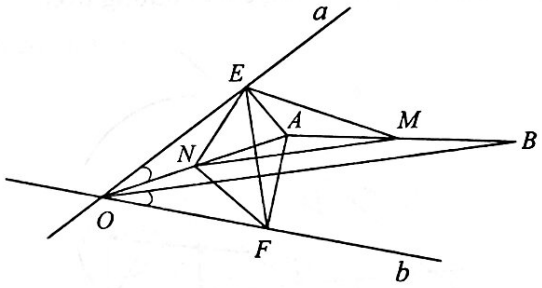
(b) $EF \perp OB$.

(c) $ME = MF$.

Chứng minh. Gọi N là trung điểm của OA (h.8).

Vì E, F theo thứ tự là hình chiếu của A trên a, b nên O, A, E, F cùng thuộc một đường tròn (1).

Vì E, F theo thứ tự là hình chiếu của A trên a, b nên $NE = \dfrac{1}{2}OA = NF$ (2). Vì M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, OA nên $MN \,//\, OB$ (3).



(h.8)

(a) $\Rightarrow$ (b). Từ (1), chú ý rằng A, B đẳng giác đối với a, b, suy ra: $(EF, OB) \equiv (EF, OF) + (OF, OB)$

$$\equiv (EA, OA) + (OA, OE) \equiv (EA, OE) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Vậy $EF \perp OB$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Từ (1), chú ý rằng $EF \perp OB$, suy ra

$$(a, OA) \equiv (OE, AE) + (EA, OA) \equiv \frac{\pi}{2} + (EF, OF) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (OB, EF) + (EF, OF) \equiv (OB, OF) \equiv (OB, b) \pmod{\pi}.$$

Vậy A, B đẳng giác đối với a, b.

(b) $\Rightarrow$ (c). Từ (3), chú ý rằng $EF \perp OB$, suy ra $MN \perp EF$. Kết hợp với (2), suy ra $ME = MF$.

(c) $\Rightarrow$ (b). Từ (2), chú ý rằng $ME = MF$, suy ra $MN \perp EF$. Kết hợp với (3), suy ra $OB \perp EF$.

Tóm lại ba mệnh đề (a), (b), (c) đôi một tương đương nhau.

Định lí 4. *Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm O và hai điểm A, B khác O. M, N theo thứ tự*

là hình chiếu của A trên a,b. P,Q theo thứ tự là hình chiếu của B trên a,b. Khi đó A,B đẳng giác đối với a,b khi và chỉ khi M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Dễ thấy O,A,M,N cùng thuộc một đường tròn và O,B,P,Q cùng thuộc một đường tròn (h.9).

Vì A,B đẳng giác đối với a,b nên

$$(OA,OM)\equiv-(OB,OP)(\bmod \pi).$$

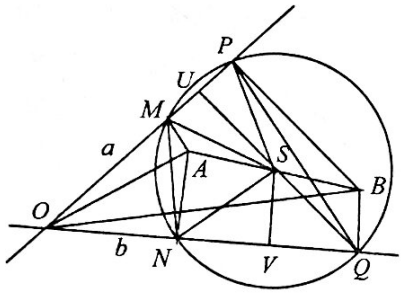
Từ đó, chú ý rằng $\widehat{OMA}=\widehat{OQB}=\frac{\pi}{2}$, suy ra các tam giác OAM,OBQ đồng dạng ngược hướng.

Vậy $(NQ,NM)\equiv(NO,NM)\equiv(AO,AM)$

$$\equiv-(BO,BQ)(\bmod \pi)\equiv(BQ,BO)$$

$$\equiv(PQ,PO)\equiv(PQ,PM)(\bmod \pi).$$

Do đó M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.



(h.9)

Điều kiện đủ. Gọi S,U,V theo thứ tự là trung điểm của AB,MP,NQ (h.9). Dễ thấy $AM\,//\,BP;AN\,//\,BQ$. Từ đó, theo định lí Thales đảo, suy ra

$$SU\,//\,AM\,//\,BP;SV\,//\,AN\,//\,BQ.$$

Kết hợp với $AM\,//\,BP\perp MP;AN\,//\,BQ\perp NQ$, suy ra SU,SV thứ tự là trung trực của MP,NQ. Vậy S là tâm đường tròn đi qua bốn điểm M,N,P,Q. Do đó $SM=SN$. Theo định lí 3, A,B đẳng giác đối với a,b.

4. Hai điểm đẳng giác

Định nghĩa 2. Hai điểm M,N được gọi là đẳng giác đối với ΔABC nếu M,N đẳng giác đối với ba cặp đường thẳng $(AB,AC),(BC,BA),(CA,CB)$.

Thay cho cách viết M,N đẳng giác đối với tam giác ABC, ta có thể viết M là điểm đẳng giác của N đối với ΔABC hay N là điểm đẳng giác của M đối với ΔABC.

5. Các thí dụ cơ bản về hai điểm đẳng giác

Thí dụ 4. *Tâm đường tròn ngoại tiếp O và trực tâm H của ΔABC là hai điểm đẳng giác đối với tam giác.*

Chứng minh. Hệ quả trực tiếp của thí dụ 1.

Thí dụ 5. *Trọng tâm G và điểm Lemoine L của ΔABC là hai điểm đẳng giác đối với tam giác.*

Chứng minh. Hệ quả trực tiếp của thí dụ 2.

Thí dụ 6. *Cho ΔABC. $(O),N$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Euler. X,Y,Z theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(OBC),(OCA),(OAB)$. Khi đó*

a) *Nếu N không thuộc (O) thì AX,BY,CZ đồng quy tại một điểm, đẳng giác với N đối với tam giác ABC.*

b) *Nếu N thuộc (O) thì AX,BY,CZ đôi một song song.*

Chứng minh. (h.10) Gọi U,V,W thứ tự là hình chiếu của N trên BC,CA,AB; U',V',W' theo thứ tự là điểm đối xứng của N qua BC,CA,AB.

Dễ thấy U',V',W' theo thứ tự là ảnh của U,V,W qua phép vị tự H_N^2 (1). Theo thí dụ 3, N,X đẳng giác đối với AB,AC; N,Y đẳng giác đối với BA,BC; N,Z đẳng giác đối với CB,CA. Theo định lí 3, $AX\perp VW,BY\perp WU,CZ\perp UV$.

Từ đó, chú ý rằng VW, WU,UV theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác, $NV'W',NW'U',NU'V'$, suy ra

$$AX\perp V'W',BY\perp W'U',CZ\perp U'V'.$$

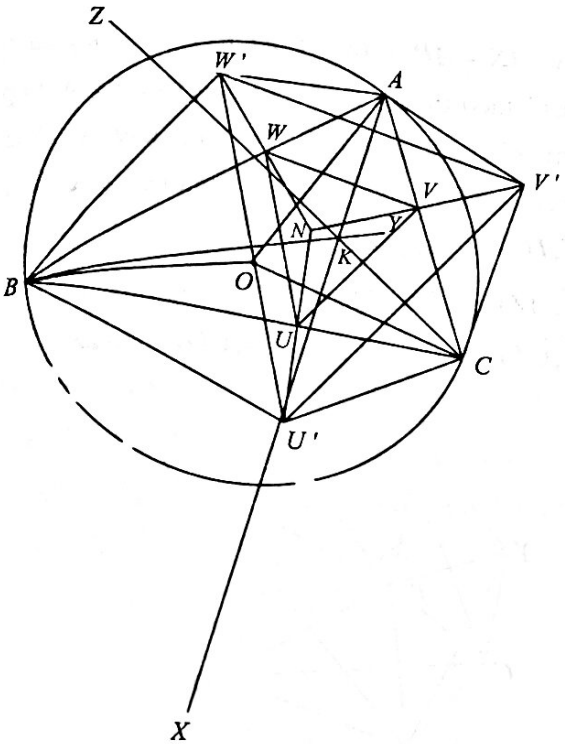
Dễ thấy

$$AV'=AN=AW',BW'=BN=BU',CU'=CN=CV'.$$

Vậy AX,BY,CZ theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn $V'W',W'U',U'V'$ (2).

(a) Nếu N không thuộc (O) thì theo kết quả về đường thẳng Simson, suy ra U,V,W không thẳng hàng. Kết hợp với (1), suy ra U',V',W' không thẳng hàng.

Từ đó, chú ý tới (2), theo ví dụ 3, suy ra AX,BY,CZ đồng quy tại điểm K, đẳng giác của N đối với tam giác ABC.



(h.10)

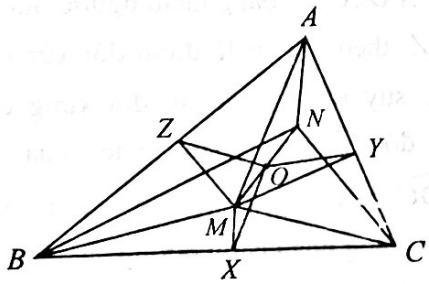
(b) Nếu N thuộc (O) thì, theo kết quả về đường thẳng Simson, U,V,W thẳng hàng. Kết hợp với (1), suy ra U',V',W' thẳng hàng.

Từ đó, chú ý tới (2), suy ra AX,BY,CZ đôi một song song.

6. Các kết quả cơ bản về hai điểm đẳng giác

Định lí 5. *Cho ΔABC và hai điểm M,N. Nếu M,N đẳng giác đối với hai trong ba cặp đường thẳng $(AB,AC),(BC,BA),(CA,CB)$ thì M,N đẳng giác đối với tam giác ABC.*

Chứng minh.



(h.11)

Giả sử M,N đẳng giác đối với hai cặp đường thẳng $(AB,AC),(BC,BA)$.

Gọi X,Y,Z theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC,CA,AB; O là trung điểm của MN. Theo định lí 3, $OY=OZ, OZ=OX$. Do đó $OX=OY$. Vậy, lại theo định lí 3, M,N đẳng giác đối với (CA,CB). Nói cách khác M,N đẳng giác đối với ΔABC.

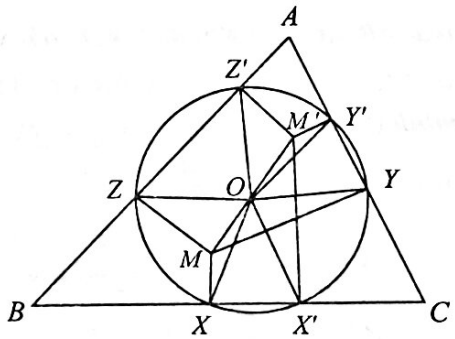
Định lí 6. *Cho tam giác ABC. Hai điểm M,M' đẳng giác đối với tam giác ABC. X,X' theo thứ tự là hình chiếu của M,M' trên BC. Y,Y' theo thứ tự là hình chiếu của M,M' trên CA. Z,Z' theo thứ tự là hình chiếu của M,M' trên AB. Khi đó X,X',Y,Y',Z,Z' cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm của MM'.*

Chứng minh. Gọi O là trung điểm của MM' (h.12). Vì M,M' đẳng giác đối với ΔABC nên, theo định lí 3, $OX=OY=OZ$.

Tương tự $OX'=OY'=OZ'$. Dễ thấy O thuộc đường trung trực của XX'. Do đó $OX=OX'$.

Vậy $OX=OX'=OY=OY'=OZ=OZ'$.

Tóm lại X,X',Y,Y',Z,Z' cùng thuộc một đường tròn có tâm là O.



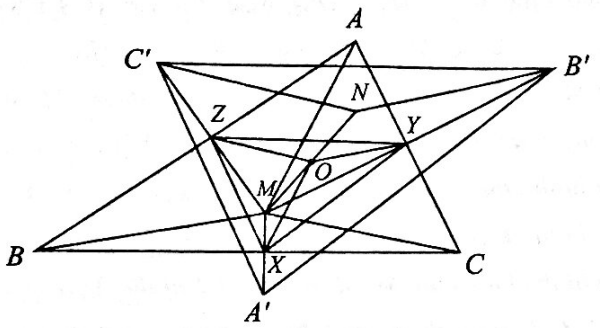
(h.12)

Định lí 7. *Cho ΔABC và hai điểm M,N đẳng giác đối với tam giác A',B',C' theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua BC,CA,AB. Khi đó N tâm đường tròn $(A'B'C')$.*

Chứng minh. Gọi X,Y,Z theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC,CA,AB; O là trung điểm của MN

Vì M,M' đẳng giác đối với ΔABC nên, theo định lí 3, $OX=OY=OZ$.

Vì O,X,Y,Z theo thứ tự là trung điểm của MN,MA',MB',MC' nên OX,OY,OZ theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác MNA',MNB',MNC'. Vậy $NA'=NB'=NC'$. Nói cách khác N tâm đường tròn $(A'B'C')$.



(h.13)

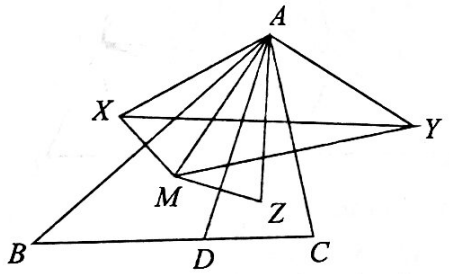
7. Một vài bài toán điển hình

Bài toán 1. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Đường chéo BD không là phân giác của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$. P là điểm nằm trong tứ giác sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBP}, \widehat{ADB} = \widehat{CDP}$. Chứng minh rằng $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $PA = PC$.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho ΔABC, AD là đường phân giác. M là điểm bất kì. X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua AB, AC, AD. Khi đó X, Y đối xứng với nhau qua AZ.*

Chứng minh (h.14).



(h.14)

Dễ thấy $AX = AM = AY$ (1). Dễ thấy

$(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AX}) \equiv (\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AX}) \pmod{2\pi}$

$\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$.

Tương tự: $(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AY}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}$.

Vậy $(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AX}) \equiv -(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AY}) \pmod{2\pi}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra X, Y đối xứng với nhau qua AZ.

Trở lại giải bài toán 1.

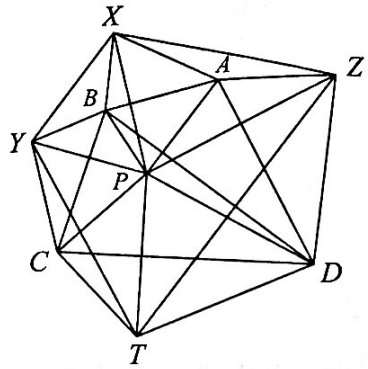
Gọi X, Y, Z, T thứ tự là điểm đối xứng của P qua BA, BC, DA, DC (h.15).

Theo bổ đề trên, Y, T theo thứ tự là điểm đối xứng của X, Z qua BD. Do đó $XZ = YT$.

Dễ thấy $AX = AP = AZ, CY = CP = CT$. Nói cách khác A, C theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PXZ, PYT. Từ đó, chú ý rằng PX, PY, PZ, PT theo thứ tự vuông góc với BA, BC, DA, DC suy ra

$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AZ}) \equiv 2(PX, PZ) \equiv 2(AB, AD) \pmod{2\pi}$,

$(\overrightarrow{CY}, \overrightarrow{CT}) \equiv 2(PY, PT) \equiv 2(CB, CD) \pmod{2\pi}$.



(h.15)

Vậy các điều kiện sau tương đương

(1) $PA = PC$.

(2. $AX = CY, AZ = CT$

(3) Các tam giác AXZ, CYT bằng nhau.

(4) Các tam giác AXZ, CYT bằng nhau cùng hướng.

(5) $(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AZ}) \equiv (\overrightarrow{CY}, \overrightarrow{CT}) \pmod{2\pi}$.

(6) $(AB, AD) \equiv (CB, CD) \pmod{\pi}$.

(7) $ABCD$ nội tiếp.

Chú ý. • (3) $\Rightarrow$ (4) được giải thích như sau: Giả sử tam giác AXZ, CYT bằng nhau ngược hướng. Chú ý rằng X, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của Y, T qua BD, suy ra A là điểm đối xứng của C qua BD. Do đó BD là phân giác của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$, mâu thuẫn. Vậy các tam giác AXZ, CYT bằng nhau cùng hướng

• Bài toán 1 là bài toán 5, IMO 2004.

Bài toán 2. *Cho ΔABC và hai điểm X, Y đẳng giác đối với AB, AC. $Z = BX \cap CY$, $T = BY \cap CX$. Khi đó Z, T đẳng giác đối với AB, AC.*

Lời giải. Gọi AD là phân giác của ΔABC (h.16).

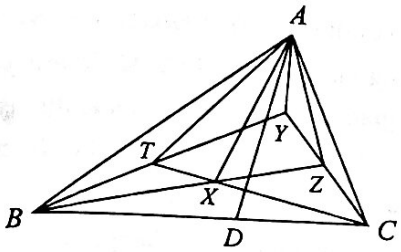
Dễ thấy:

$A(BCXZ) = C(BAXZ)$ (vì B, X, Z thẳng hàng)

$= C(BATY)$ (vì các bộ ba điểm C, X, T và C, Y, Z

thẳng hàng).

$= A(BCTY)$ (vì B, Y, T thẳng hàng) $= A(CBYT)$.



(h.16)

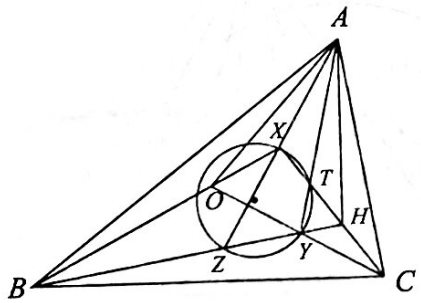
Từ đó, chú ý rằng AC, AB, AY theo thứ tự là ảnh của AB, AC, AX qua phép đối xứng trục R_{AD}, suy ra AT cũng là ảnh của AZ qua phép đối xứng trục R_{AD}. Vậy Z, T đẳng giác đối với AB, AC.

Bài toán 3. *Cho ΔABC, O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm. $X = BO \cap CH, Y = BH \cap CO, Z = AX \cap BH, T = AY \cap CH$. Chứng minh rằng X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. Theo thí dụ 4, O, H là hai điểm đẳng giác đối với tam giác ABC (h.17).

Từ đó, chú ý rằng $X = BO \cap CH, Y = BH \cap CO$, suy ra X, Y là hai điểm đẳng giác đối với (BA, BC) và X, Y là hai điểm đẳng giác đối với (CA, CB).

Do đó, theo định lí 5, X, Y là hai điểm đẳng giác đối với (AB, AC). Vì O là tâm đường tròn (ABC) nên $OB = OC$. Do đó $(BO, BC) + (CO, CB) \equiv 0 \pmod{\pi}$.



(h.17)

Vậy $(XZ, XT) \equiv (AZ, CT) \equiv (AZ, AC) + (CA, CT)$

$\equiv (AB, AY) + (CY, CB) \pmod{\pi}$

$\equiv (AB, YB) + (YZ, YT) + (CY, CB)$

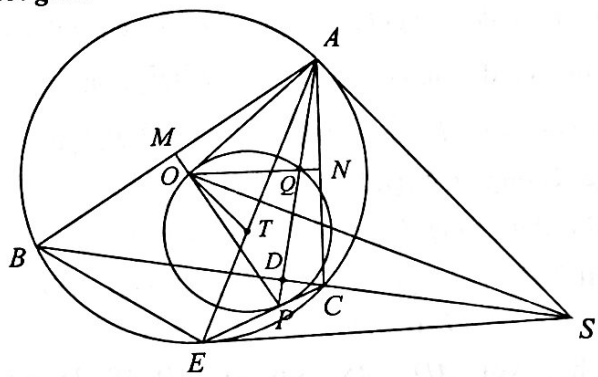
$\equiv (XB, CB) + (YZ, YT) + (CY, CB) \pmod{\pi}$

$\equiv (BO, BC) + (YZ, YT) + (CO, CB) \equiv (YZ, YT) \pmod{\pi}$.

Điều đó có nghĩa là X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 4. *Cho ΔABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, AD là đường cao. M, N thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC. P, Q theo thứ tự là giao điểm của OM, ON và AD. T là tâm của đường tròn (OPQ). Chứng minh rằng AT là đường đối trung của tam giác ABC.*

Lời giải.



(h.18)

Gọi S là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABC); E là giao điểm thứ hai của AT và đường tròn (ABC) (h.18).

Dễ thấy PQ, OQ, OP theo thứ tự vuông góc với BC, AC, AB. Do đó các tam giác OPQ, ABC đồng dạng cùng hướng (1). Vậy $AO \perp OT$. Suy ra OA tiếp xúc với đường tròn (OPQ) (2).

Từ (1) và (2) và do AS tiếp xúc với đường tròn (ABC), suy ra các tam giác AOT, SAO đồng dạng cùng hướng.

Kết hợp với $AO \perp SA$, suy ra $AE \equiv AT \perp SO$.

Do đó SE tiếp xúc với đường tròn (ABC). Điều đó có nghĩa là tứ giác $ABEC$ điều hòa.

Vậy, theo thí dụ 2, $AT \equiv AE$ là đường đối trung của tam giác ABC.

Bài toán 5. *Cho ΔABC, I_A là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh A. Δ là đường thẳng qua I_A vuông góc với AI_A. M là giao điểm của Δ và đường thẳng qua B vuông góc với AB. N là giao điểm của Δ và đường thẳng qua C vuông góc với AC. Các điểm P, Q thuộc BC sao cho $MP // NQ // AI_A$. Chứng minh rằng đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC).*

Lời giải. Gọi I_B, I_C theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh $B; C$ của tam giác ABC; D, S theo thứ tự là giao điểm của AI_A, I_BI_C và BC (h.19). Dễ thấy $\widehat{I_AAI_B} = \widehat{I_ABI_B} = 90°$ và $\widehat{ABM} = \widehat{AI_AM} = 90°$. Do đó các điểm A, B, I_A, I_B và A, B, I_A, M cùng thuộc đường tròn đường kính I_AI_B. Điều đó có nghĩa là A, B, I_A, I_B, M cùng thuộc đường tròn đường kính I_AI_B. Vậy $\widehat{I_AMI_B} = 90°$.

Kết hợp với $\widehat{I_AMP} = 90°$, suy ra M, P, I_B thẳng hàng. Tương tự N, Q, I_C thẳng hàng.

Từ đó, chú ý rằng $PI_B // QI_C // DA$, suy ra

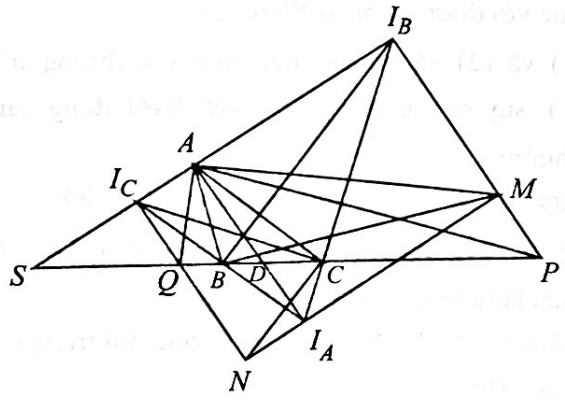
$$A(PQDS) = (PQDS) = (I_BI_CAS) = I_A(I_BI_CAS)$$
$$= I_A(CBDS) = (CBDS) = -1.$$

Kết hợp với $AD \perp AS$, suy ra AD, AS là các đường phân giác của góc (AP, AQ). Kết hợp với AD, AS là các đường phân giác của góc (AB, AC), suy ra: $(AB, AP) \equiv (AB, AD) + (AD, AP)$

$$\equiv (AD, AC) + (AQ, AD) \equiv (AQ, AC) \pmod{\pi}.$$

Nói cách khác P, Q đẳng giác đối với AB, AC.

Vậy, theo định lý 2, đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC).



(h.18)

Bài toán 6. *Cho tam giác không cân ABC. A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. O, O' theo thứ tự là tâm của các đường tròn (ABC), (A'B'C'). Chứng minh rằng các đường tròn (OAA'),(OBB')(OCC') cùng đi qua một điểm khác O và thuộc OO'.*

Lời giải. Gọi R là bán kính của đường tròn (ABC); X là tâm của đường tròn (OBC); N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC; K là điểm đẳng giác của N đối với tam giác ABC; S là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn (ABC) tại B và C; L là điểm đối xứng của O qua BC; M là trung điểm của BC; T là giao điểm thứ hai của các đường tròn (ABC), (OAA'); D, E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của N qua BC, CA, AB (h.20).

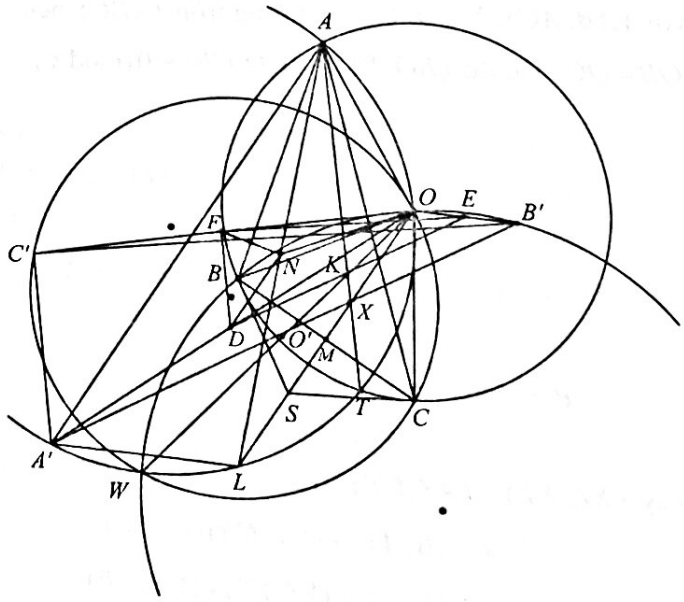
Đương nhiên O, S, M, L, X thẳng hàng.

Dễ thấy N là trung điểm của AL (xem phép chứng minh ví dụ 3). Dễ thấy A, A', O, L là bốn đỉnh của một hình thang cân ($AA' // OL$). Từ đó, chú ý rằng A', D, O theo thứ tự là điểm đối xứng của A, N, L qua BC, suy ra D là trung điểm của OA'. Nói cách khác, qua phép vị tự $H_O^{\frac{1}{2}}$, A' biến thành D.

Tương tự, qua phép vị tự $H_O^{\frac{1}{2}}$, B', C' theo thứ tự biến thành E, F. Từ đó, theo thí dụ 6 và định lí 7, K là tâm của đường tròn (DEF). Vậy, qua phép vị tự $H_O^{\frac{1}{2}}$, O' biến thành K. Nói cách khác K là trung điểm của OO' (1).

Vì OS là đường kính của đường tròn (OBC) nên X là trung điểm của OS.

Theo thí dụ 3, A, K, X thẳng hàng (2).



(h.20)

Vậy $P_{X/(OAA')} = \overline{XL}.\overline{XO} = (\overline{XO} + \overline{OL}).\overline{XO}$

$= XO^2 - \overline{OL}.\overline{OX} = XO^2 - \frac{1}{2}\overline{OL}.2\overline{OX}$

$= XO^2 - \overline{OM}.\overline{OS} = XO^2 - OB^2 = XO^2 - R^2 = P_{X/(ABC)}$.

Do đó A, T, X thẳng hàng (3).

Từ (2) và (3) suy ra A, K, T thẳng hàng. Nói cách khác $P_{K/(OAA')} = P_{K/(ABC)}$.

Tương tự $P_{K/(OBB')} = P_{K/(ABC)}$; $P_{K/(OCC')} = P_{K/(ABC)}$.

Vậy $P_{K/(OAA')} = P_{K/(OBB')} = P_{K/(OCC')}$.

Do đó OK là trục đẳng phương chung của các đường tròn $(OAA'), (OBB'), (OCC')$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra lại OO' là trục đẳng phương chung của các đường tròn (OAA'), (OBB'), (OCC').

Điều đó có nghĩa là các đường tròn (OAA'), (OBB'), (OCC') có điểm chung W, $W \neq O$ và $W \in OO'$.

Chú ý. Vì tam giác $A'B'C'$ tồn tại nên A', B', C' không thẳng hàng. Từ đó, chú ý rằng D, E, F theo thứ tự là ảnh của A', B', C' qua phép vị tự $H_O^{\frac{1}{2}}$, suy ra D, E, F thẳng hàng. Do đó hình chiếu của D, E, F trên BC, CA, AB không thẳng hàng (xét phép vị tự $H_N^{\frac{1}{2}}$). Vậy, theo kết quả kết quả về đường thẳng Simson, N không thuộc đường tròn (ABC). Do đó, theo thí dụ 6, K tồn tại.

Bài toán 7. *Cho ΔABC, I, J là hai điểm đẳng giác đối với tam giác. M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AJ. D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, CA, AB. $P = IE \cap DF$, $Q = IF \cap DE$. Chứng minh rằng $MN \perp PQ$.*

Lời giải. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của JB, JC và AC, AB; Z, T theo thứ tự là trung điểm của XY và CY; H, K theo thứ tự là hình chiếu của J trên AB, AC (h.21).

Theo kết quả về đường thẳngGauss, M, N, Z thẳng hàng (1). Dễ thấy B, D, I, F cùng thuộc một đường tròn và C, D, I, E cùng thuộc một đường tròn. Vậy

$(DP, DI) \equiv (DF, DI) \equiv (\mathrm{BF}, \mathrm{BI}) \equiv (BX, BC) (mod\, \pi)$;

$(IP, ID) \equiv (IE, ID) \equiv (CE, CD) \equiv (CX, CB) (mod\, \pi)$.

Do đó các tam giác DPI, BXC đồng dạng cùng hướng. Tương tự các tam giác DQI, CYB đồng dạng cùng hướng. Vậy, chú ý rằng TZ, TM theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác CYX, CYB, ta có:

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{IP}{ID} \cdot \frac{ID}{IQ} = \frac{CX}{CB} \cdot \frac{BC}{BY} = \frac{CX}{BY} = \frac{TZ}{TM};$$

$(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IQ}) \equiv (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IQ})$

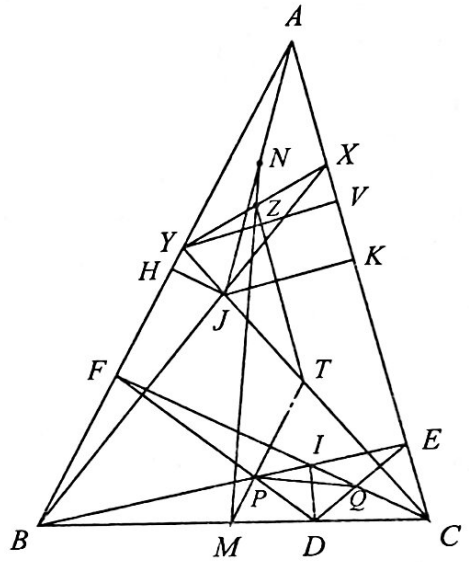
$\equiv (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BY}) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$\equiv (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{YB}) \equiv (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{YB}) \equiv (\overrightarrow{TZ}, \overrightarrow{TM}) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$.

Do đó các tam giác IPQ, TZM đồng dạng cùng hướng. Kết hợp với $AC // TZ$, $IE \perp AC$, suy ra:

$$(PQ, ZM) \equiv (IP, TZ) \equiv (IE, AC) \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, \pi) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $PQ \perp MN$.



(h.21)

Bài toán 8. *Cho ΔABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm P không thuộc (O). U, V, W theo thứ tự là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Các đường trung trực của PA, PB, PC đôi một cắt nhau định ra tam giác XYZ. E, F là các giao điểm của các đường tròn (O) và (XYZ). S là hình chiếu của P trên EF. Chứng minh rằng S là tâm của đường tròn (UVW).*

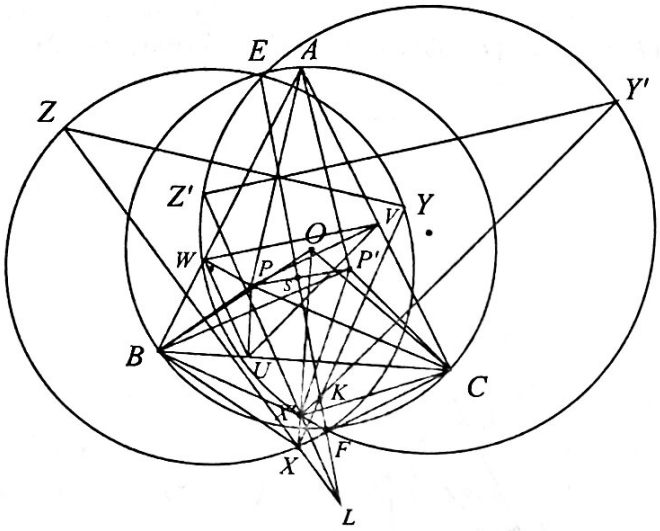
Lời giải. Gọi R là bán kính của (O); P' là điểm đẳng giác của P đối với tam giác ABC; $X'Y'Z'$ là tam giác được định ra bởi các đường trung trực của $P'A, P'B, P'C$; $K = XY \cap X'Y'$; $L = XZ \cap X'Z'$ (h.22).

Dễ thấy $XB = XP = XC$; $X'B = X'P' = X'C$ (1).

Từ (1), chú ý rằng $OB = OC$, suy ra O, X, X' thẳng hàng.

Từ (1), chú ý rằng P, P' là hai điểm đẳng giác của tam giác ABC, suy ra

$$(BX,BO)\equiv(XB,XO)+(OX,OB)$$
$$\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB},\overrightarrow{XC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})(\bmod\pi)$$
$$\equiv(PB,PC)+(AC,AB)\equiv(PB,AB)+(AC,PC)$$
$$\equiv(CB,P'B)+(P'C,BC)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(P'C,P'B)\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{X'C},\overrightarrow{X'B})\equiv(X'O,X'B)$$
$$\equiv(X'X,X'B)(\bmod\pi).$$



(h.22)

Do đó OB tiếp xúcvới đường tròn (BXX').

Vậy $\overline{OX}.\overline{OX'}=OB^2=R^2$.

Tương tự $\overline{OX}.\overline{OX'}=\overline{OY}.\overline{OY'}=\overline{OZ}.\overline{OZ'}=R^2$ (2).

Từ (2) suy ra E,F,X',Y',Z' theo thứ tự là ảnh của E,F,X,Y,Z qua phép nghịch đảo $N_O^{R^2}$. Điều đó có nghĩa là các đường tròn $(O),(XYZ),(X'Y'Z')$ nhận EF là trục đẳng phương chung (3).

Từ (2) suy ra X,X',Y,Y' cùng thuộc một đường tròn và X,X',Z,Z' cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $P_{K/(XYZ)}=\overline{KX}.\overline{KY}=\overline{KX'}.\overline{KY'}=P_{K/(X'Y'Z')},P_{L/(XYZ)}$
$=\overline{LX}.\overline{LZ}=\overline{LX'}.\overline{LZ'}=P_{L/(X'Y'Z')}$.

Kết hợp với (3), suy ra K,L thuộc EF. Từ đó, chú ý rằng $KP=KC=KP',LP=LB=LP'$, suy ra P,P' đối xứng với nhau qua EF. Nói cách khác S là trung điểm của PP'.

Vậy, theo định lí 3, $SU=SV=SW$.

Điều đó có nghĩa là S là tâm của đường tròn (UVW).

8. Một vài bài toán đề nghị

Bài 9. Cho tam giác ABC, O,H theo thứ tự là tâm đường trong ngoại tiếp và trực tâm. $P=BO\cap CH,Q=BH\cap CO,S=OH\cap BC$. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (APQ) thuộc AS.

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC, AD,BE,CF là các đường cao. M,N theo thứ tự là trung điểm của DE,DF. $P=BN\cap CM;Q=DP\cap EF$. Chứng minh rằng P,Q đẳng giác đối với AB,AC.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Điểm M chạy trên trung trực của BC. I_1,I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM,ACM. Chứng minh rằng đường tròn (AI_1I_2) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 12. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Các điểm X,Y,Z,T thuộc (O). E là giao điểm của AB và XY. F là giao điểm của AC và ZT. M,N,P,Q theo thứ tự là giao điểm của XZ,YT,XT, YZ và EF. Giả sử $EF//BC$. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng (AM,AN) và (AP,AQ) đẳng giác đối với cặp đường thẳng (AB,AC).

Bài 13. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. O' là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C. (O') là đường tròn tâm O' và đi qua B,C. Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O') tại M. OM cắt BC tại P. X,Y theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Chứng minh rằng $\widehat{XPY}=90°$.

Bài 14. Cho tam giác ABC. M,N,P theo thứ tự là trung điểm của BC,CA,AB. L là điểm Lemoine của tam giác ABC. K là điểm đẳng giác của L đối với tam giác MNP. Chứng minh rằng K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 15. Cho tam giác ABC và điểm P không thuộc BC,CA,AB. A',B',C' theo thứ tự là giao điểm của AP,BP,CP và BC,CA,AB. Q là điểm đẳng giác của P đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng ảnh đối xứng của AQ,BQ,CQ qua $B'C',C'A',A'B'$ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2019 - 2020

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật Lý năm học 2019-2020 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2019 đến tháng 8 năm 2020. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài sôi nổi. **Giải Xuất sắc** về môn Toán thuộc về bạn: ***Nguyễn Anh Thư***, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**. **Giải Nhất** môn Vật Lý thuộc về bạn: ***Cao Trung Hiếu***, 11 A1, THPT Dương Quảng Hàm,Văn Giang, **Hưng Yên.** Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2020-2021. Sau đây là danh sách **75** bạn đoạt giải Toán và **8** bạn đoạt giải Vật Lý năm học 2019-2020.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Nguyễn Anh Thư, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng.**

☆ Giải Nhất (7 giải)

1. *Lê Tuấn Nghĩa.* 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên**.
2. *Nguyễn Anh Quân*, 8D , THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ , **Quảng Trị.**
3. *Lê Ngọc Tùng,* 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội.**
4. *Phan Trung Kiên,* 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa, **Bà Rịa – Vũng Tàu.**
5. *Lâm Khánh Hòa,* 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng, **Sóc Trăng.**
6. *Phan Trung Đức,* 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ.**
7. *Nguyễn Huy Hoàng,* 10T1, THPT Đô Lương, **Nghệ An.**

☆ Giải Nhì (12 giải)

1. *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa, **HàNội.**
2. *Đỗ Ngọc Tiến,* 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
3. *Tạ Kim Nam Tuấn,* 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**
4. *Nguyễn Hữu Hoàng Long,* 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà, **Quảng Trị.**
5. *Đỗ Xuân Trọng,* 10A2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội.**
6. *Lê Minh Tâm,* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**
7. *Nguyễn Đăng Khoa,* 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ.**
8. *Nguyễn Trúc Như Bình,* 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**
9. *Nguyễn Viết Quang Anh,* 7H, THCS Trần Mai Ninh, Ba Đình, **Thanh Hóa.**
10. *Lê Ngọc Hoa,* 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
11. *Lê Mỹ Duyên,* 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới,**Quảng Bình.**
12. *Đậu Đức Quân,* 12A2 Toán, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng, **Sóc Trăng.**

☆ Giải Ba (20 giải)

1. *Nguyễn Nhật Hào,* 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**
2. *Nguyễn Tất Đạt,* 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh.**
3. *Nguyễn Thị Bảo Ngọc,* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế,**Thừa Thiên Huế.**
4. *Nguyễn Duy Phước,* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế,**Thừa Thiên Huế**.
5. *Trần Minh Hoàng,* 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh.**
6. *Trương Gia Bảo,* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**
7. *Bùi Phương Thảo,* 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
8. *Nguyễn Huy Hoàng Sơn,* 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**
9. *Nguyễn Xuân Tiến,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**
10. *Lê Đức Hạnh,* 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
11. *Trần Ánh Dương,* 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
12. *Ngô Quốc Bảo,* 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, **Bến Tre.**
13. *Lê Văn Quang Hiếu,* 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
14. *Võ Hữu Thanh Thảo,* 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quãng Ngãi.**
15. *Trương Công Cảnh,* 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** .
16. *Đỗ Cao Bách Tùng,* 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá.**
17. *Lê Chí Cường,* 10A8, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị.**
18. *Võ Nguyên Thăng,* 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**
19. *Phạm Hoàng Hiệp,* 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**

20. *Đặng Hoàng Duy,* 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**

☆ **Giải Khuyến khích (35 giải)**

1. *Nguyễn Hằng Nga,* 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
2. *Nguyễn Công An.* 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
3. *Phạm Ngọc Trinh,* 8B, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu, **Nghệ An.**
4. *Phạm Minh Anh,* 10T1, THPT chuyên Long An. **Long An.**
5. *Đặng Hữu Khanh,* 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An .**
6. *Lê Hồ Trọng Tín,* 7A8, THCS Kế Sách, Kế Sách, **Sóc Trăng**
7. *Trần Thị Yến Khanh,* 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
8. *Cao Trung Hiếu,* 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**
9. *Bùi Thị Hồng Huệ,* 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
10. *Đào Quang Huy.* 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
11. *Phạm Bá Hoàng,* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế.**
12. *Nguyễn Thị Thùy Linh,* 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, **Hà Tĩnh.**
13. *Lê Ngọc Xuân Thơ,* 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng.**
14. *Trần Minh Khôi,* 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ.**
15. *Nguyễn Thị Hà Chi,* 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, **Hà Tĩnh.**
16. *Vũ Đức Huy,* 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc **Vĩnh Phúc.**
17. *Lê Bá Luật,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**
18. *Trần Quang Khôi,* 6A5, THCS Chu Văn An, **Thái Nguyên.**
19. *Nguyễn Công Phúc,* 7C,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
20. *Nguyễn Trần Phương Mai,* 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi.**
21. *Ngô Văn Minh Thắng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**
22. *Lê Ngô Nhật Huy,* 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP Bến Tre, **Bến Tre.**
23. *Đinh Đoàn Xuân Phương,* 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
24. *Trương Ngọc Tâm,* 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**
25. *Vũ Đặng Đức Minh,* 7A0, THCS Ngôi Sao Hà Nội, Thanh Xuân, **Hà Nội**
26. *Nguyễn Hoài Phương,* 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
27. *Nguyễn Quỳnh Chi,* 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**
28. *Nguyễn Văn Việt,* 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
29. *Lê Văn Danh,* 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**
30. *Nguyễn Đăng Quang,* 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
31. *Đồng Hoàng Minh Đạo,* 6A4, THCS Nguyễn Du, TP. Thái Nguyên, **Thái Nguyên.**
32. *Ngô Hoàng Thành Đạt,* 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**
33. *Đặng Duy Hậu,* 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**
34. *Hoàng Tuấn Anh,* 6T, THPT Lương Thế Vinh, **Hà Nội.**
35. *Lê Thị Thùy Dung,* 8C, THCS TTr. Triệu Sơn, **Thanh Hóa.**

MÔN VẬT LÝ

☆ **Giải Nhất (1 giải)**

Cao Trung Hiếu, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**

☆ **Giải Nhì (1 giải)**

Đỗ Văn Dương, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long, **Bạc Liêu.**

☆ **Giải Ba (6 giải)**

1. *Hoàng Bảo Minh Châu,* 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **ThừaThiên Huế.**
2. *Trần Trung Phúc,* 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**
3. *Trần Thị Kim Phụng,* 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ.**
4. *Ngô Văn Minh Thắng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội.**
5. *Trần Thị Kim Hoàng,* 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ.**
6. *Nguyễn Trần Quốc Thái,* 11A1, THPT An Khánh, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (024) 35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 62

Problem. *Given the table*

x	1	2	3	...	n	...
Probability	q	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$	...

where $0 < p < 1$ *and* $q = 1 - p$. *Compute the sum of infinitely many terms*

$$S = q + qp + q^2p + \ldots + q^{n-1}p + \ldots$$

Solution. We have

$$S = p + qp + q^2p + \ldots + q^np + \ldots$$
$$= p(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots)$$
$$= p * \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Remark. The above table is actually the distribution table for a random variable x with geometric distribution with parameter p. The sum of all numbers in the second row is always equal to 1 because it is the probability of all the possible outcomes.

TỪ VỰNG

distribution table : *bảng phân phối xác suất*

random variable : *biến ngẫu nhiên*

geometric distribution: *phân phối hình học*

parameter : *tham số*

possible outcomes : *các khả năng có thể xảy ra*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National university, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 59

BÀI TOÁN. *Có 30 chiếc kẹo giống hệt nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phân phát kẹo, có thể không phải tất cả cho 4 đứa trẻ? Ta tính cả khả năng một vài đứa trẻ có thể không nhận được chiếc kẹo nào.*

Lời giải. Thêm một người bạn của bốn đứa trẻ để được 5 đứa trẻ. Việc phân phát 30 chiếc kẹo, có thể không phải là tất cả, cho 4 đứa trẻ ban đầu giống như việc phân phát tất cả 30 chiếc kẹo cho nhóm 5 đứa trẻ. Từ đó bài toán trở thành bài toán chia kẹo của Ơ – Le đã được giới thiệu ở số báo trước. Câu trả lời: số cách phân phát kẹo thỏa mãn đề bài chính là số cách chọn 4 vị trí (không theo thứ tự) trong số 34 vị trí (30 vị trí cho kẹo và 4 vị trí cho vách ngăn). Kết quả là C_{34}^4.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Trung Phúc*, 9A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Trịnh Thị Thúy Nga*, 11A11, THPT Krông Bông, **Quảng Trị**; *Trương Phan Minh Quân*, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu. **Bà Rịa – Vũng Tàu.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 62

Problem. *Given the table*

x	1	2	3	...	n	...
Probability	q	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$	...

where $0 < p < 1$ *and* $q = 1 - p$. *Compute the sum of infinitely many terms*

$$S = q + qp + q^2p + \ldots + q^{n-1}p + \ldots$$

Solution. We have

$$S = p + qp + q^2p + \ldots + q^np + \ldots$$
$$= p(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots)$$
$$= p * \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Remark. The above table is actually the distribution table for a random variable x with geometric distribution with parameter p. The sum of all numbers in the second row is always equal to 1 because it is the probability of all the possible outcomes.

TỪ VỰNG

distribution table : *bảng phân phối xác suất*

random variable : *biến ngẫu nhiên*

geometric distribution: *phân phối hình học*

parameter : *tham số*

possible outcomes : *các khả năng có thể xảy ra*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National university, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 59

BÀI TOÁN. *Có 30 chiếc kẹo giống hệt nhau. Hỏi có bao nhiêu cách phân phát kẹo, có thể không phải tất cả cho 4 đứa trẻ? Ta tính cả khả năng một vài đứa trẻ có thể không nhận được chiếc kẹo nào.*

Lời giải. Thêm một người bạn của bốn đứa trẻ để được 5 đứa trẻ. Việc phân phát 30 chiếc kẹo, có thể không phải là tất cả, cho 4 đứa trẻ ban đầu giống như việc phân phát tất cả 30 chiếc kẹo cho nhóm 5 đứa trẻ. Từ đó bài toán trở thành bài toán chia kẹo của Ơ – Le đã được giới thiệu ở số báo trước. Câu trả lời: số cách phân phát kẹo thỏa mãn đề bài chính là số cách chọn 4 vị trí (không theo thứ tự) trong số 34 vị trí (30 vị trí cho kẹo và 4 vị trí cho vách ngăn). Kết quả là C_{34}^4.

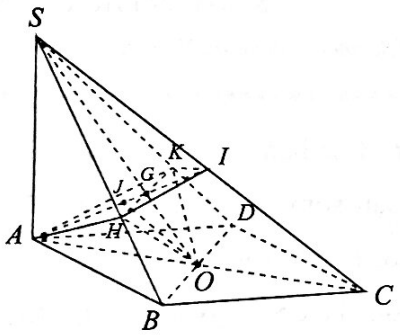
Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trần Trung Phúc*, 9A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Trịnh Thị Thúy Nga*, 11A11, THPT Krông Bông, **Quảng Trị**; *Trương Phan Minh Quân*, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Phan Trung Kiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu. **Bà Rịa – Vũng Tàu.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 42. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy hình chóp. Cho AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (AHK).*

Phân tích. Khối chóp *A.OHK* và *A.SBD* có chung đỉnh, đáy cùng nằm trên một mặt phẳng nên ta có thể tính được thể tích khối chóp *O.AHK*, hơn nữa tam giác *AHK* cân nên ta tính được diện tích của nó.



Lời giải. Cách 1, 2, 3 sử dụng công thức

$$d\left(O;(AHK)\right)=\frac{3.V_{OAHK}}{S_{AHK}}$$

Cách 1. $V_{OAHK}=V_{AOHK}=\frac{1}{3}d\left(A;(OHK)\right).S_{OHK}$

Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$;

$$\Delta SAD=\Delta SAB\Rightarrow AK=AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có *HK* và *BD* đồng phẳng và cùng vuông góc với *SC* nên *HK* // *BD*. Gọi *I* là giao điểm của *SC* và (*AHK*). Dễ thấy *SC* ⊥ (*AHK*) nên $AI\perp SC\Rightarrow I$ là trung điểm của *SC*. *AI* cắt *SO* tại *G* là trọng tâm của tam giác *SAC*, *G* thuộc *HK* nên

$$\frac{HK}{BD}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow HK=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

Tam giác *AHK* cân tại *A*, *G* là trung điểm của *HK* nên $AG\perp HK$ và

$$AG=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}SC=\frac{1}{3}.2a=\frac{2a}{3}$$

$$S_{AHK}=\frac{1}{2}AG.HK=\frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{2\sqrt{2}a}{3}=\frac{2\sqrt{2}a^2}{9}.$$

$$V_{OAHK}=V_{AOHK}=\frac{1}{3}d\left(A;(OHK)\right).S_{OHK}$$

$$=\frac{1}{3}d\left(A;(SBD)\right).S_{\Delta OHK}=\frac{1}{3}h.S_{OHK}.$$

Tứ diện *ASBD* vuông tại *A* nên:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{5}{2a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Tam giác *OHK* cân tại *O* nên có diện tích *S* bằng

$$S=\frac{1}{2}OG.HK=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{6}.\frac{2\sqrt{2}a}{3}=\frac{\sqrt{5}a^2}{9}$$

$$\Rightarrow V_{OAHK}=\frac{1}{3}S.h=\frac{\sqrt{2}a^3}{27}.$$

Vậy $d\left(O;(AHK)\right)=\frac{3V_{OAHK}}{S_{AHK}}=\frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{27}}{\frac{2\sqrt{2}a^2}{9}}=\frac{a}{2}.$

Cách 2. *Sử dụng kết quả* $V_{OAHK}=\frac{2}{9}V_{SABD}$ *để tính* V_{OAHK}.

Ta có: $HK=\frac{2}{3}BD;\ OG=\frac{1}{3}SO$

$$\Rightarrow S_{OHK}=\frac{1}{2}HK\cdot OG=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}BD\cdot SO=\frac{2}{9}S_{SBD}$$

$$\Rightarrow V_{AOHK}=\frac{2}{9}V_{SABD}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}SA\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}.$$

Đến đây tiếp tục tính $d\left(O;(AHK)\right)=\frac{3.V_{OAHK}}{S_{AHK}}$ như cách 1 ở trên.

Cách 3. *Sử dụng phương pháp tọa độ để tính* V_{OAHK}.

Chọn hệ tọa độ *Oxyz* sao cho *O* ≡ *A*, *B*(*a*; 0; 0), *D*(0; a; 0), *S*(0; 0; $a\sqrt{2}$).

Tính *SH, SK* như cách 1 suy ra tọa độ của $H\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right), K\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right),\ O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AK}\right]=\left(\frac{2\sqrt{2}a^2}{9};\frac{2\sqrt{2}a^2}{9};-\frac{4a^2}{9}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AO}.\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AK}\right]=\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. Áp dụng công thức $V_{OAHK}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AK}\right].\overrightarrow{AO}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$. Đến đây tiếp tục tính $d\left(O;(AHK)\right)=\frac{3.V_{OAHK}}{S_{AHK}}$ như cách 1 hoặc chúng ta có thể tính S_{AHK} theo phương pháp tọa độ đã xây dựng trên.

Cách 4, 5, 6, 7 là cách tính khoảng cách trực tiếp.

Cách 4. *Trượt đỉnh về chân đường cao.*

Ta có: $d\left(O;(AHK)\right)=d\left(A;(OHK)\right).\frac{S_{OHK}}{S_{AHK}}$

$$=d\left(A;(SBD)\right).\frac{S_{OHK}}{S_{AHK}}.$$

Theo như cách 1 chúng ta có:

$$d\left(A;(SBD)\right)=\frac{a\sqrt{10}}{5};\ S_{AHK}=\frac{2\sqrt{2}a^2}{9};\ S_{OHK}=\frac{\sqrt{5}a^2}{9}$$

$$\Rightarrow d\left(O;(AHK)\right)=\frac{a\sqrt{10}}{5}.\frac{\sqrt{5}a^2}{9}.\frac{9}{2\sqrt{2}a^2}=\frac{a}{2}.$$

Cách 5. *Sử dụng phương pháp tọa độ*

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv A$, $B(a;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ a;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ a\sqrt{2})$.

Tính SH, SK như cách 1 suy ra tọa độ của $H\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$, $K\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$, $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AK}\right]=\left(\frac{2\sqrt{2}a^2}{9};\frac{2\sqrt{2}a^2}{9};-\frac{4a^2}{9}\right)$ nên vectơ pháp tuyến của mp(AHK) là $\vec{n}_{(AHK)}=\left(1;1;-\sqrt{2}\right)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (AHK) là: $x+y-\sqrt{2}z=0$

$$\Rightarrow d\left(O;(AHK)\right)=\frac{\left|\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{a}{2}.$$

Cách 6. *Xác định chân đường cao hạ từ O xuống (AHK).*

Vì $SC\perp(AHK)$ nên chân đường vuông góc hạ từ O xuống (AHK) có thể xác định được theo phương SC:

$AH\perp SB$, $AH\perp BC$ (do $BC\perp(SAB)$) $\Rightarrow AH\perp SC$

Tương tự $AK\perp SC$. Vậy $SC\perp(AHK)$

Giả sử (AHK) cắt SC tại I, gọi J là trung điểm của AI, khi đó $OJ\,//\,SC\Rightarrow OJ\perp(AHK)$.

$SA=AC=a\sqrt{2}\Rightarrow\Delta SAC$ cân tại $A\Rightarrow I$ là trung điểm của SC. Vậy $OJ=\frac{1}{2}IC=\frac{1}{4}SC=\frac{1}{4}.2a=\frac{a}{2}$.

Cách 7. *Tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng đưa về tính khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng.*

Theo như cách 4 ở trên đã chứng minh được $OJ\perp(AHK)$. Mặt khác $\begin{cases}BD\perp AO\\BD\perp SA\end{cases}$ suy ra:

$$BD\perp(SAO)\Rightarrow BD\perp OJ.$$

Vậy $d\left(O;(AHK)\right)=d\left(BD;(AHK)\right)=OJ$.

Việc tính OJ đã làm ở cách 4.

LÊ VĂN NAM

(GV THPT Minh Hòa, Yên Lập, Phú Thọ)

Nhận xét. Ngoài 7 cách giải của bạn *Lê Văn Nam*, người giới thiệu bài toán 42, Tòa soạn cũng nhận được một số cách giải tương tự như những cách giải trên từ hai bạn: *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, tỉnh **Bình Định**. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 44 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.12.2020.

BÀI TOÁN 44. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Chứng minh MA = MB + MC.*

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

BÀI TOÁN 50. (Moscow Mathematical Olympiad 1941) *Tìm các số nguyên a, b, c phân biệt khác 0 sao cho đa thức bậc 4 dưới đây (với hệ số nguyên) có thể viết thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên* $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$.

Lời giải. Một đa thức bậc 4 có thể biểu thị thành tích của hai đa thức theo hai cách: một là tích của một đa thức bậc nhất và một đa thức bậc ba, hai là tích của hai đa thức bậc hai.

TH1: $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x+p)(x^3+qx^2+rx+s)$ (1)

Trong (1) cho $x = 0$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ và chú ý rằng $1 = 1.1 = (-1).(-1)$, ta suy ra trong ba thừa số $a + p$, $b + p$, $c + p$ có ít nhất 2 thừa số bằng nhau (cùng bằng 1 hoặc -1), do đó trong ba số a, b, c có ít nhất hai số bằng nhau. Điều này mâu thuẫn với giả thiết a, b, c phân biệt.

TH2: $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$ (2).

Trong (2) cho $x = 0$, $x = a$, $x = b$, $x = c$, ta thấy hai tam thức x^2+px+q và x^2+rx+s cùng có giá trị là 1 hoặc -1.

Tam thức bậc hai x^2+px+q không thể có cùng giá trị α với 3 giá trị phân biệt của x (vì nếu trái lại thì phương trình bậc hai $x^2+px+q-\alpha=0$ có 3 nghiệm phân biệt: vô lý). Vì vậy với 2 trong 4 giá trị phân biệt $x = 0$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ thì tam thức có giá trị là 1, 2 giá trị còn lại tam thức có giá trị là -1.

Giả sử rằng $x = 0$, $x = a$ là 2 giá trị làm tam thức có giá trị 1 và $x = b$, $x = c$ là 2 giá trị làm tam thức có giá trị -1. Ta có các phương trình:

$$\begin{cases} 0^2+p.0+q=1 \\ a^2+pa+q=1 \\ b^2+pb+q=-1 \\ c^2+pc+q=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=1 \\ a^2+pa=0 & (2) \\ b^2+pb=-2 & (3) \\ c^2+pc=-2 & (4) \end{cases}.$$

Từ (2) suy ra: $a(a+p)=0 \Leftrightarrow p=-a$ (do $a \neq 0$). Từ (3) và (4) suy ra:

$$b^2-ab-c^2+ac=(b-c)(b+c)-a(b-c)$$
$$=(b-c)(b+c-a)=0 \Leftrightarrow a=b+c \quad (5)$$

(do $b \neq c$). Từ (3) ta có:

$$b^2+pb=-2 \Leftrightarrow b^2-ab=-2 \Leftrightarrow b(b-a)=-2 \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra: $\begin{cases} b=1 \\ a=3 \\ c=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=-1 \\ a=-3 \\ c=-2 \end{cases}$ và ta có:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$
$$=x(x-3)(x-1)(x-2)+1=(x^2-3x+1)^2;$$
$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$
$$=x(x+3)(x+1)(x+2)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

Tương tự, nếu $x = 0$, $x = a$ là 2 giá trị làm tam thức có giá trị -1 và $x = b$, $x = c$ là 2 giá trị làm tam thức có giá trị 1 thì ta có: $\begin{cases} q=-1 \\ a^2+pa-1=-1 & (7) \\ b^2+pb-1=1 & (8) \\ c^2+pc-1=1 & (9) \end{cases}$.

Suy ra: $a=1, b=2, c=-1$ hoặc $a=-1, b=1, c=-2$ và ta có: $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$

$$=x(x-1)(x-2)(x+1)+1=(x^2-x+1)^2;$$
$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=x(x+1)(x-1)(x+2)+1$$
$$=(x^2+x-1)^2.$$

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều có hướng giải như lời giải trên. Một số bạn tính toán không chính xác dẫn đến kết quả sai. Các bạn có lời giải đúng là: *Nguyễn Thiên Lý*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Đào Quang Anh*, 8C2, THCS Archimedes Đông Anh, **Hà Nội**; *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 30.11.2020

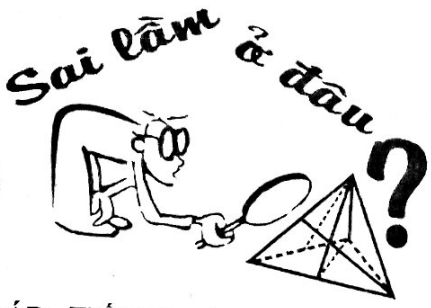
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 52. *Chứng minh rằng với các số thực* $a_1, a_2, ..., a_n$ *tùy ý, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2^2)}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3^2)}+...$$
$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1^2)} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: TIẾP TUYẾN PHÂN BIỆT

(*Đề đăng trên TH&TT số* 517, *tháng* 7 *năm* 2020)

Phân tích sai lầm. Cách giải như trên mới chỉ là điều kiện cần, chưa đủ.

Lời giải đúng. Cách giải đúng, *phải bổ sung điều kiện đủ* như sau: Ngược lại, với $-1<b<-\frac{15}{16}$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt. Giả sử 4 nghiệm phân biệt đó là p,q,r,s .

Giả sử tại hai điểm có 2 hoành độ khác nhau p,q nhưng có 2 tiếp tuyến trùng nhau, nghĩa là thỏa mãn:

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}p^3+3p^2-2p=-\frac{4}{3}q^3+3q^2-2q\\ p^4-2p^3+p^2-1=q^4-2q^3+q^2-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}(p^3-q^3)-3(p^2-q^2)+2(p-q)=0\\ p^4-q^4-2(p^3-q^3)+p^2-q^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}(p^2+pq+q^2)-3(p+q)+2=0\\ (p^3+q^3+p^2q+pq^2)-2(p^2+pq+q^2)+p+q=0\end{cases}$$

Đặt $S=p+q, P=p.q$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases}\frac{4}{3}(S^2-P)-3S+2=0\\ (S^3-2PS)-2(S^2-P)+S=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4P=4S^2-9S+6\\ 2S^3-4PS-4S^2+4P+2S=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S^3-(4S^2-9S+6)S-4S^2+(4S^2-9S+6)+2S=0$$

$$\Leftrightarrow -2S^3+4S^2-13S+6=0\Rightarrow S=1, S=2,\ S=\frac{3}{2}.$$

Với $S=1\Rightarrow P=\frac{1}{4}\Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$. Với $S=2\Rightarrow P=1$ $\Rightarrow p=q=1$. Với $S=\frac{3}{2}\Rightarrow P=\frac{3}{8}$. Do $p\neq q$ nên chỉ nhận $S=\frac{3}{2}, P=\frac{3}{8}$. Lúc này

$$(p,q)\in\left\{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4},\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right);\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)\right\}.$$

Vì $x=p, x=q$ là nghiệm của (1) nên $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$ là nghiệm của (1), từ (1) suy ra $b=-\frac{61}{64}$. Như vậy theo yêu cầu bài toán, điều kiện cần và đủ để qua M trên trục tung có các điểm $M(0;b)\in Oy$ từ đó kẻ đến đồ thị (C) có 4 tiếp tuyến phân biệt thì $b\in\left(-1;-\frac{15}{16}\right)\setminus\left\{-\frac{61}{64}\right\}$.

Nhận xét. Rất tiếc rằng không có bạn nào phát hiện được sai lầm của bài này.

KIHIVI

CÓ BAO NHIÊU TIẾP TUYẾN ?

Đề bài. *Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị* $(C): y=x^4-2x^2-1$ *kẻ từ điểm* $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Sau đây là lời giải của bạn Duyên lớp 11A3*:*

Gọi $M_0\left(x_0;x_0^4-2x_0^2-1\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C). Ta có: $y'=4x^3-4x, y'(x_0)=4x_0^3-4x_0$. Tiếp tuyến với (C) tại M_0 có PT: $y=\left(4x_0^3-4x_0\right)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2-1$ (d).

Tiếp tuyến d đi qua điểm $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ khi và chỉ khi

$$-2=\left(4x_0^3-4x_0\right)\left(\frac{7}{3}-x_0\right)+x_0^4-2x_0^2-1$$

$$\Leftrightarrow 9x_0^4-28x_0^3-6x_0^2+28x_0-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2-1)(x_0-3)(9x_0-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x_0=\pm1, x_0=3, x_0=\frac{1}{9}.$$

Ta tìm ra 4 giá trị của x_0 nên có 4 tiếp điểm M_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy từ $M\left(\frac{7}{3};-2\right)$ kẻ được 4 tiếp tuyến tới đồ thị $(C): y=x^4-2x^2-1$.

Chọn đáp án D.

Các bạn có tìm ra kết quả giống kết quả của bạn Duyên không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỖ TRỢ ĐỒNG BÀO MIỀN TRUNG KHẮC PHỤC HẬU QUẢ THIÊN TAI, LŨ LỤT

Tính đến ngày 24/10/2020, NXBGDVN đã hỗ trợ (đợt 1) 1 tỷ đồng gồm tiền mặt và sách giáo khoa ủng hộ các tỉnh Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên Huế, Quảng Nam.

Hiện nay, tại nhiều trường học thuộc Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, nước lũ đã làm hư hỏng hầu hết sách vở, đồ dùng học tập của học sinh. NXBGDVN sẽ phối hợp với chính quyền các địa phương khảo sát thiệt hại và tiếp tục hỗ trợ người dân, đặc biệt là học sinh vùng lũ.

NXBGDVN cũng đang gấp rút chuẩn bị bổ sung SGK phục vụ học sinh quay trở lại trường học tập. Đồng thời sẽ cung ứng SGK với mức hỗ trợ đặc biệt 25% cho các tổ chức, nhóm thiện nguyện có nhu cầu mua SGK để tặng học sinh khu vực bị ảnh hưởng bởi lũ lụt. Các tổ chức, cá nhân có thể liên hệ tới đường dây nóng (**0377 333545**) của NXBGDVN để được hỗ trợ thông tin.

Chiều ngày 23/10/2020, đại diện NXBGDVN đã trao tặng quà hỗ trợ giáo viên và học sinh tỉnh Quảng Trị bị ảnh hưởng bởi lũ lụt thông qua Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Quảng Trị. Ngày 24/10/2020, NXBGDVN đã tham gia đoàn công tác của Bộ GD&ĐT tặng quà tại Hà Tĩnh và Quảng Bình,... Bên phải là một số hình ảnh NXBGD Việt Nam trao tặng quà hỗ trợ đồng bào miền trung khắc phục hậu quả thiên tai, lũ lụt.

NXBGDVN hỗ trợ GV và HS tỉnh Quảng Trị

NXBGDVN đã tham gia đoàn công tác của Bộ GD&ĐT tặng quà tại Hà Tĩnh và Quảng Bình

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng