TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2020
Số 520

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học Pháp René Descartes 1596-1650

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: [illegible]

HAI ĐỊNH HƯỚNG THƯỜNG GẶP KHI GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KỲ THI TUYỂN SINH VÀO 10

TRẦN MINH VŨ (*GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai*)
NGUYỄN NHƯ THƯỜNG (*GV THPT Nguyễn Hữu Cảnh, An Giang*)

Trong những kỳ thi Tuyển sinh vào lớp 10 trên toàn quốc trong những năm gần đây, đặc biệt là kỳ thi chọn học sinh vào chuyên Toán, những câu hỏi về chứng minh Bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất(giá trị nhỏ nhất) của biểu thức là những câu hỏi hóc búa.

Những bài toán về bất đẳng thức luôn đa dạng và phong phú, rất khó định hình cách giải cho các em. Chính vì lẽ đó, chúng tôi lựa chọn viết chuyên đề này nhằm mục đích giúp các em khi ôn thi vào 10 sẽ phần nào tự tin khi làm các bài toán về bất đẳng thức.

1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Bất đẳng thức Cauchy và hệ quả

Định lý 1.1. Ta công nhận các kết quả sau

a) Cho a và b là hai số thực không âm, khi đó ta có bất đẳng thức Cauchy cho 2 số:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) Cho a,b và c là ba số thực không âm, khi đó ta có bất đẳng thức Cauchy cho 3 số:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

c) Tổng quát, nếu $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ thì

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$

Hệ quả 1.2. Các kết quả sau được chứng minh dựa trên Bất đẳng thức Cauchy, ta gọi nó là ***Bất đẳng thức cộng mẫu.***

a) Cho a,b là hai số thực dương, khi đó:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) Cho a,b và c là ba số thực dương, khi đó:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

c) Cho $a_1;a_2;...;a_n$ là n là số thực dương, khi đó:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

Chứng minh.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}.2.\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3.\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương, ta có:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\geq n.\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.n.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

1.2. Bất đẳng thức Bunyakovsky và hệ quả

Định lý 1.3. Ta công nhận bất đẳng thức Bunyakovsky sau:

a) Cho a,b,c,d là các số thực tùy ý, ta có bất đẳng thức sau

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $ad=bc$.

b) Cho $2n$ số $a_1;a_2;\ldots;a_n$ và $b_1;b_2;\ldots;b_n$ ta có bất đẳng thức sau

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$
$$\ge(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}: a_i=tb_i\ (i=\overline{1,n})$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}\ (\text{với } b_i\ne 0).$$

Hệ quả 1.4. Các bất đẳng thức sau được suy ra từ Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta gọi nó là ***Bất đẳng thức cộng mẫu tổng quát*** (BĐT Schwarz).

a) Cho a,b,x,y là các số thực với x, y dương, ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$

b) Cho n số $a_1;a_2;\ldots;a_n$ và n số dương $x_1;x_2;\ldots;x_n$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{x_1}=\dfrac{a_2}{x_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{x_n}$.

Chứng minh.

a) Ta có:

$$(a+b)^2=\left(\sqrt{x}\frac{a}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\le(x+y)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

b) Chứng minh tương tự.

2. HAI ĐỊNH HƯỚNG CHÍNH ĐỂ GIẢI CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KỲ THI TUYỂN SINH VÀO 10

Các kết quả trong các hệ quả **1.2** và **1.4** mà ta gọi là các ***Bất đẳng thức cộng mẫu*** sẽ được áp dụng để giải các bài toán có xu hướng cộng các mẫu lại với nhau. Trong một số trường hợp ngược lại, cần tách mẫu ra ta tạm gọi đó là ***Bất đẳng thức rã mẫu***. Chẳng hạn một số bất đẳng thức bất đẳng thức **rã mẫu** là

- $\dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$;
- $\dfrac{1}{x+y+z}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$;
- $\dfrac{1}{x+y+z+t}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\right)$;

và những bất đẳng thức **rã mẫu tổng quát**

- $\dfrac{(a+b)^2}{x+y}\le\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}$;
- $\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\le\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}$.

2.1. Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu

Khi mẫu số của phân số không đầy đủ các biến số, ta liên tưởng đến **cộng mẫu**. Chúng ta cùng theo dõi các Thí dụ sau.

Thí dụ 2.1.1 (Chuyên Hòa Bình-2019-2020)

Cho $a>0,b>0$ và $a+b=4ab$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{1+4b^2}+\dfrac{b}{1+4a^2}\ge\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. Quan sát các mẫu không có đầy đủ các biến cũng là một định hướng để ta cộng mẫu.

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$4ab=a+b\ge2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge\frac{1}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta có:

$$\frac{a}{1+4b^2}+\frac{b}{1+4a^2}=\frac{a^2}{a+4ab^2}+\frac{b^2}{b+4ba^2}$$
$$\ge\frac{(a+b)^2}{a+b+4ab(a+b)}$$

$$= \frac{a+b}{1+4ab} = 1 - \frac{1}{1+4ab}$$

$$\geq 1 - \frac{1}{1+4.\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 2.1.2 (Chuyên Kiên Giang 2018-2019)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} = 1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$.

Thí dụ 2.1.3 (Chuyên Toán tỉnh Bình Phước 2011 - 2012)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, ta có:

$$A = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca}.$$

Mặt khác dễ thấy:

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Mà $a + b + c \leq 3$ nên $ab + bc + ca \leq 3$.

Do đó

$$A \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+3} \geq \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} 1+ab = 1+bc = 1+ca \\ a = b = c \\ a+b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Thí dụ 2.1.4 (Chuyên Phú Thọ 2009 - 2010)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a^2+2} + \frac{2}{b^2+2} + \frac{2}{c^2+2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{a^2+2} - 1\right) + \left(\frac{2}{b^2+2} - 1\right) + \left(\frac{2}{c^2+2} - 1\right) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 2.1.5 (Chuyên Thái Nguyên 2018-2019)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}} \geq \frac{x+y+z}{5}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Suy ra

$$\sqrt{8x^2+3y^2+14xy} = \sqrt{8x^2+3y^2+12xy+2xy}$$

$$\leq \sqrt{8x^2+3y^2+12xy+x^2+y^2}.$$

Do đó:

$$\sqrt{8x^2+3y^2+14xy} \leq \sqrt{9x^2+12xy+4y^2}$$

$$= \sqrt{(3x+2y)^2} = 3x+2y.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\sqrt{8y^2+3z^2+14yz} \leq 3y+2z;$$

$$\sqrt{8z^2+3x^2+14zx} \leq 3z+2x.$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

ta được: $\text{VT}\ge\dfrac{x^2}{3x+2y}+\dfrac{y^2}{3y+2z}+\dfrac{z^2}{3z+2x}$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{3x+2y+3y+2z+3z+2x}=\frac{x+y+z}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Thí dụ 2.1.6 (Chuyên Bình Thuận 2019-2020)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$.. Chứng minh rằng

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge\frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Lời giải. Chia hai vế cho xyz, ta được:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge\frac{1}{2}(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\ \dfrac{1}{y}=b;\ \dfrac{1}{z}=c$ và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu tổng quát ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Thí dụ 2.1.7 (Chuyên Đăk Lăk 2019 - 2020)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}\ge 2.$$

Lời giải. Lần lượt áp dụng các bất đẳng thức cộng mẫu ta có:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a^2+2ab}+\frac{b^4}{b^2+2bc}+\frac{c^4}{c^2+2ac}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{3^2}{9}=1.$$

Tương tự vậy, ta có:

$$\frac{b^3}{a+2b}+\frac{c^3}{b+2c}+\frac{a^3}{c+2a}=\frac{b^4}{ab+2b^2}+\frac{c^4}{bc+2c^2}+\frac{a^4}{ca+2c^2}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)}$$

$$=\frac{3^2}{9}=1.$$

Ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

2.2. Sử dụng bất đẳng thức rã mẫu

Giả thiết của bài toán là điều cực kỳ quan trọng để chúng ta định hình sử dụng đến bất đẳng thức cộng mẫu hay rã mẫu. Ta hãy cùng theo dõi các thí dụ sau.

Thí dụ 2.2.1 (Chuyên Tin Hà Nội 2019-2020)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

1) *Chứng minh rằng:* $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1$.

2) *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}}+\frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}}+\frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}.$$

Lời giải. 1) Ta biến đổi điều cần chứng minh tương đương với giả thiết như sau:

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$

$$\Leftrightarrow(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)+(a+2)(b+2)=(b+2)(c+2)(a+2)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12=abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+abc=4.$$

2) Căn cứ vào câu 1, sau khi giải xong có thể xem nó là giả thiết, như vậy các biến được rã ra nằm ở

các phân số riêng biệt, điều đó giúp chúng ta định hướng lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy, với mọi số dương x, y ta có:

$$2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2 \text{ và } \frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

do đó: $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}}\le\dfrac{1}{a+b+4}$

$$=\frac{1}{(a+2)+(b+2)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\right).$$

Tương tự vậy, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}\right).$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)+4}}+\frac{1}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)+4}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)+4}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 2.2.2 (Chuyên Ninh Bình 2016-2017)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Vì mẫu số không đầy đủ các biến nên ta liên tưởng đến bất đẳng thức cộng mẫu hoặc rã mẫu, song trong trường hợp này, rã mẫu là hợp lý vì bất đẳng thức có dấu $\le$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{ab+a+2}=\frac{c}{abc+ac+2c}=\frac{1}{\left(\frac{1}{c}+1\right)+(a+1)}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right).$$

Tương tự vậy, ta được:

$$\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right);$$

$$\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 2.2.3 (Chuyên Phú Yên 2010-2011)

Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2010$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{2y+z+x}+\dfrac{1}{2z+x+y}$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+y+x+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{2y+z+x}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{y+x}\right);$$

$$\frac{1}{2z+x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}\right).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2y+z+x}+\frac{1}{2z+x+y}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2010}{4}=\frac{1005}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{670}$.

Thí dụ 2.2.4 (Chuyên Hưng Yên 2017-2018)

Cho ba số a,b,c dương và $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Ta có: $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=3 \quad (1).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương ta được: $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^{12}}.\frac{1}{b^4}}=\frac{4}{a^3b}$.

Làm tương tự và cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\quad(2).$$

Mặt khác $\frac{1}{a^4}+1\ge\frac{2}{a^2}$. Làm tương tự và cộng lại ta được: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{3}{2}$ (3).

Áp dụng bất đẳng thức rã mẫu ta được:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}=\frac{1}{a^3b+c^2+c^2+1}$$
$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}+1\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{2}{c^2}+1\right).$$

Tương tự: $\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^3c}+\frac{2}{a^2}+1\right)$;

$$\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{c^3a}+\frac{2}{b^2}+1\right).$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}$$
$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}.$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}$$
$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}$$
$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+3\right)+\frac{3}{16}$$
$$=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Thí dụ 2.2.5 *Cho ba số a,b,c dương bất kỳ. Chứng minh* $\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức rã mẫu tổng quát $\frac{(a+b)^2}{x+y}\le\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$ ta có:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{1}{9}\frac{[(1+2)a]^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(2a^2+bc)}$$
$$\le\frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4a^2}{2(2a^2+bc)}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right).$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}\right);$$
$$\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, vế theo vế ta được:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}$$
$$\le\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right).$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)\le\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\le 2$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2}{2a^2+bc}-1+\frac{2b^2}{2b^2+ac}-1+\frac{2c^2}{2c^2+ab}-1\le -1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-bc}{2a^2+bc}+\frac{-ac}{2b^2+ac}+\frac{-ab}{2c^2+ab}\le -1$$

$$\Leftrightarrow\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ac}{2b^2+ac}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge 1.$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, ta có:

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ac}{2b^2+ac}+\frac{ab}{2c^2+ab}$$
$$=\frac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{a^2c^2}{2b^2ac+a^2c^2}+\frac{a^2b^2}{2c^2ab+a^2b^2}$$
$$\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}=1.$$

Dấu "=" xảy $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 2.2.6 (Chuyên Toán tỉnh Phú Thọ 2011-2012)

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}$.

Lời giải. Đặt $x=a, y=2b, z=3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết thành

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}.$$

Ta có: $\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{x+2y+x+y+z+x+y+z}$

$$\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{x+y+z}+\frac{1}{x+y+z}\right)$$

$$\le\frac{xy}{9}\left(\frac{1}{9x}+\frac{2}{9y}+\frac{2}{x+y+z}\right)=\frac{2x+y}{81}+\frac{2xy}{9(x+y+z)}.$$

Tương tự: $\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)}$,

$$\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}.$$

Lại có $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$ (3). Do đó:

$$\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(x+y+z)}{27}=\frac{x+y+z}{9}.$$

Vậy $\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=2b=3c$.

3. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 (*Chuyên Thừa Thiên Huế, 2018-2019*)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$A=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.$$

Bài 2 (*Chuyên Ninh Thuận, 2016-2017*)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+1}=12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a+3b+3c}+\frac{1}{2b+3c+3a}+\frac{1}{2c+3a+3b}\le 3.$$

Bài 3 (*Chuyên Lam Sơn, 2016-2017*)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức

$$B=\frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)}+\frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}+\frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}.$$

Bài 4 (*Chuyên Nam Định, 2015-2016*)

Cho a,b,c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\ge 3.$$

Bài 5 (*Chuyên Cần Thơ, 2015-2016*)

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=2abc$. Tìm GTNN của biểu thức

$$D=\frac{a}{c(c+a)}+\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(a+c)}.$$

Bài 6 (*Chuyên Vũng Tàu, 2011-2012*).

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm GTLN của biểu thức

$$E=\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{bc}{bc+b+c}+\frac{ca}{ac+c+a}.$$

Bài 7 (*Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2, 2017-2018*).

Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2c+2}.$$

Bài 8 (*Chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ 2011-2012*).

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}.$$

(*Xem tiếp trang 11*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH, NĂM HỌC 2020 - 2021

Câu 1. ***Cách 1.*** Từ

$$\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)(x+y)=a+b+c$$

$\Leftrightarrow a+b+c=0$ hoặc $x+y=1$.

• Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

$\Rightarrow a^3+b^3-3abc=-c^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}=3.$

• Nếu $x+y=1$, từ hệ $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ bx+cy=a & (2) \\ cx+ay=b & (3) \end{cases}$

lấy PT(1) cộng với PT(2) vế theo vế ta có:

$ax+b(x+y)+cy=a+c \Rightarrow ax+b+cy=a+c$

$\Rightarrow ax+b+c(1-x)=a+c \Rightarrow x(a-c)=a-b$ (*).

+ Nếu $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ từ (*) suy ra $\left[\begin{array}{l} a-c=0 \\ x=0 \end{array}\right.$.

- Xét $a-c=0 \Leftrightarrow a=c$, do đó $a=b=c\neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}=3.$

- Xét $x=0$ suy ra $y=1$ nên thay vào hệ ta suy ra:

$$a=b=c\neq 0 \Rightarrow \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=3.$$

+ Nếu $a-b\neq 0$ từ (*) ta suy ra $\left[\begin{array}{l} a-c\neq 0 \\ x\neq 0 \end{array}\right.$, do đó:

$x=\dfrac{a-b}{a-c}$. Tương tự ta cũng có: $x=\dfrac{b-c}{b-a}$.

Do đó $x=\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{b-c}{b-a}=\dfrac{a-c}{b-c}$

$\Rightarrow x^3=\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right)\left(\dfrac{b-c}{b-a}\right)\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)=-1$

$\Rightarrow x=-1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí vì $a-b\neq 0$).

Vậy $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}=3.$

Cách 2. Ta có:

$a^3+b^3+c^3=a^2(bx+cy)+b^2(cx+ay)+c^2(ax+by)$

$=ab(ax+by)+bc(bx+cy)+ac(cx+ay)=3abc,$

suy ra $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3.$

Câu 2. a) Cộng theo vế của hệ ta suy ra:

$x^4-2x^2(y-1)+y^2-2y=3$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2(y-1)+(y-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[x^2-(y-1)\right]^2=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-(y-1)=2 \\ x^2-(y-1)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=y+1 \\ x^2=y-3 \end{array}\right.$.

• Với $x^2=y+1$ ($\Rightarrow y\geq -1$) thay vào PT thứ 2 ta được: $2(y+1)+y^2-2y=2 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow y=0$.

Với $y=0 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

• Với $x^2=y-3$ ($\Rightarrow y\geq 3$), tương tự thay vào PT thứ 2 suy ra:

$2(y-3)+y^2-2y=2 \Leftrightarrow y^2=8 \Leftrightarrow y=2\sqrt{2}$ (do $y\geq 3$)

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2\sqrt{2}-3}$.

Vậy nghiệm (x, y) của hệ đã cho là:

$(-1;0)$, $(1;0)$, $\left(-\sqrt{2\sqrt{2}-3};2\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2\sqrt{2}-3};2\sqrt{2}\right)$.

b) ĐK: $x\geq -2$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$x^2-3x+2(x-2)\sqrt{x+2}=3$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+2(x-2)\sqrt{x+2}+x+2=9$

$\Leftrightarrow \left[x-2+\sqrt{x+2}\right]^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2+\sqrt{x+2}=3 \\ x-2+\sqrt{x+2}=-3 \end{array}\right.$.

• Với $x-2+\sqrt{x+2}=3 \Leftrightarrow (x+2)+\sqrt{x+2}-7=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2} \\ \sqrt{x+2}=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{29}}{2}.$$

• Với $x-2+\sqrt{x+2}=-3 \Leftrightarrow (x+2)+\sqrt{x+2}-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x+2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm:

$$S=\left\{\frac{11-\sqrt{29}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Câu 3. a) Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho các số $2n+2021$ và $3n+2020$ là các số chính phương. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương a, b thỏa mãn: $\begin{cases} 2n+2021=a^2 & (1) \\ 3n+2020=b^2 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) ta suy ra a^2 là số chính phương lẻ nên a là số nguyên dương lẻ, đặt $a=2a_1+1$ $(a_1 \in \mathbb{N})$, thay vào (1) rút gọn, ta có:

$$2n+2020=4a_1^2+4a_1=4a_1(a_1+1)\vdots 8 \ (*)$$

$\Rightarrow 2n\vdots 4 \Rightarrow n\vdots 2.$

Do $n\vdots 2 \Rightarrow 3n+2020\vdots 2$ từ (2) ta suy ra:

$$b^2\vdots 2 \Rightarrow b\vdots 2 \Rightarrow b^2\vdots 4,$$

mà $2020\vdots 4$, do đó: $3n\vdots 4 \Rightarrow n\vdots 4$ (vì $(3,4)=1$), suy ra $2n\vdots 8$, mà $4a_1(a_1+1)\vdots 8$ nên từ

$$2n+2020=4a_1^2+4a_1=4a_1(a_1+1)\vdots 8$$

suy ra $2020\vdots 8$, vô lí.

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn đề bài.

b) Từ bài ra ta suy ra:

$$x^2-2\vdots xy+2 \Rightarrow y\left(x^2-2\right)\vdots xy+2$$

$$\Rightarrow x(xy+2)-y\left(x^2-2\right)\vdots xy+2$$

$$\Rightarrow 2(x+y)\vdots xy+2 \Rightarrow 2(x+y)=k(xy+2) \ (1).$$

Do x, y là các số nguyên dương nên ta sẽ chứng minh $k=1, 2, 3$. Thật vật, nếu

$$k\ge 4 \Rightarrow k(xy+2)\ge 4(xy+2)=2xy+2xy+8$$
$$\ge 2x+2y+8>2x+2y,$$

vô lí.

• Nếu $k=1$, từ (1) ta suy ra:

$$2x+2y=xy+2 \Leftrightarrow xy-2x-2y+4=2$$

$$\Rightarrow (x-2)(y-2)=2 \Rightarrow (x,y)\in\{(4;3),(3;4)\}.$$

Thử lại ta được $(x, y)=(4; 3)$.

• Nếu $k=2$, từ (1) ta suy ra:

$$x+y=xy+2 \Leftrightarrow xy-x-y+1=-1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=-1,$$

vô lí vì x, y nguyên dương.

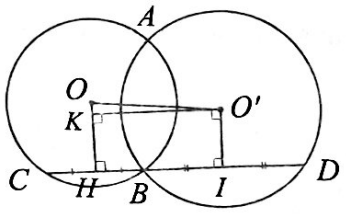
• Nếu $k=3$ từ (1) ta suy ra :

$$2(x+y)=3xy+6 \Leftrightarrow 3xy-2x-2y+6=0$$
$$\Leftrightarrow (3x-2)(3y-2)+14=0,$$

vô lí vì x, y là các số nguyên dương.

Vậy $(x, y)=(4 ; 3)$.

Câu 4. a)

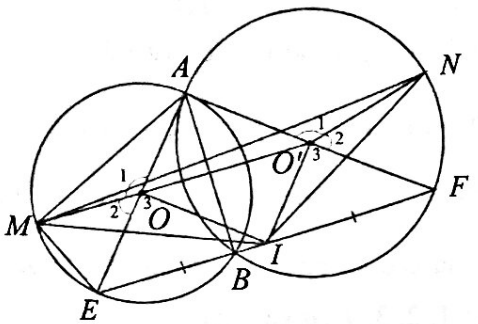


Kẻ $OH\perp CD$, $O'I\perp CD$, $O'K\perp OH$.

Dễ thấy: $CD=2.HI=2.O'K\le 2.O'O$.

Vậy CD lớn nhất bằng $2.OO'$ khi $d\,//OO'$.

b)



Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) và đường kính AF của đường tròn (O') thì E, F là các điểm cố định.

Gọi I là trung điểm của EF suy ra I cố định và từ giả thiết ta suy ra tứ giác $AOIO'$ là hình bình hành nên

$$O'I = AO = OM,\ O'N = O'A = OI \quad (1).$$

$AO \,//\, O'I$, $AO' \,//\, OI$ nên $\widehat{O_3} = \widehat{O'_3}$ (cùng bằng góc $\widehat{EAF}$). Theo giả thiết:

$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'N} \text{ hay } \widehat{O_1} = \widehat{O'_1} \Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O'_2}.$$

Từ đó: $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{O'_2} + \widehat{O'_3}$ hay $\widehat{MOI} = \widehat{NO'I}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta MOI = \Delta IO'N$ (c.g.c), do đó $IM = IN$ hay đường trung trực của MN đi qua điểm I cố định.

Do M là điểm di chuyển trên từ điểm A, ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O), N là điểm di chuyển trên từ điểm A, cùng chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O') nên khi M trùng E, N trùng F thì MN trùng EF nên trung trực của MN đi qua I cố định.

Câu 5. Trước hết ta chứng minh BĐT

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \ge \frac{8}{(A+B)^2} \quad (*)$$

(với A, B là các số thực dương)

$$\Leftrightarrow \frac{A^2+B^2}{A^2B^2} \ge \frac{8}{(A+B)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(A^2+B^2\right)(A+B)^2 \ge 8A^2B^2.$$

BĐT này luôn đúng vì

$$A^2 + B^2 \ge 2AB > 0;$$

$$(A+B)^2 \ge 4AB > 0.$$

Từ giả thiết $z > 0$, đặt $x = a, y = b, z = \dfrac{1}{2c}$.

Từ $x^2z^2 + y^2z^2 + 1 \le 3z$ suy ra

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \le 6c - 4c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 6c - 3c^2 = 3\left[1 - (c-1)^2\right] \le 3.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) \le 9$$

$$\Rightarrow a+b+c \le 3 \Rightarrow 0 < a+b+c+5 \le 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+b+c+5)^2} \ge \frac{1}{64} \quad (**).$$

Ta có: $P = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{8}{(y+3)^2} + \dfrac{4z^2}{(1+2z)^2}$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2z}\right)^2} + \frac{8}{(y+3)^2}$$

$$= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{8}{(b+3)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2}\right] + \frac{8}{(b+3)^2}$$

$$\ge \frac{8}{(a+c+2)^2} + \frac{8}{(b+3)^2} \quad \text{(do (*))}$$

$$= 8\left[\frac{1}{(a+c+2)^2} + \frac{1}{(b+3)^2}\right]$$

$$\ge \frac{64}{(a+c+2+b+3)^2} \quad \text{(do (*))}$$

$$\ge 1. \quad \text{(do (**))}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$, tức là

$$\begin{cases} x = y = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$.

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, HàTĩnh).

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, NĂM HỌC 2020-2021
MÔN TOÁN CHUYÊN (*Thời gian làm bài 150 phút*)

Câu 1. (6 *điểm*).

a) Giải phương trình: $2x\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3=3x^2+x.$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+x^2+y^2-x^2y-xy-y=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-3x-4} \end{cases}$$

Câu 2. (3 *điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y và p là số nguyên tố thỏa mãn: $p^x-y^4=4$.

b) Chứng minh rằng nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn: $2m^2+m=3n^2+n$ thì $2m+2n+1$ là số chính phương.

Câu 3. (2 *điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}.$$

Câu 4. (7 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh BC là đường phân giác ngoài của tam giác DEF

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn (O) (M nằm trên cung nhỏ AB); O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMF và CME. Chứng minh: $AM\perp O_1O_2$.

c) Lấy K trên đoạn thẳng HC (K khác H và C), đường thẳng BK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I và đường thẳng CI cắt đường thẳng BE tại G. Chứng minh hệ thức:

$$S_{\Delta GFB}=\left(\frac{FK}{FC}+\frac{BF.BE}{CF.CE}\right)S_{\Delta CEF}.$$

Câu 5. (2 *điểm*) Trong hình chữ nhật có chiều dài 149cm, chiều rộng 40cm cho 2020 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2cm.

NGUYỄN THỊ VÂN ANH
(*SV K59 Sư phạm toán CLC,*
Viện nghiên cứu Sư phạm Tự nhiên, Đại học Vinh)
Giới thiệu

****

HAI ĐỊNH HƯỚNG ..... (*Tiếp theo trang 7*)

Bài 9 (*Chuyên Toán Vĩnh Phúc 2012-2013*)
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{1}{abc}+\frac{1}{1-2(ab+bc+ca)}.$$

Bài 10 (*Chuyên Thái Bình 2014-2015*)
Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\le 18$. Tìm GTNN của biểu thức $B=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}$.

Bài 11 (*Chuyên Thanh Hóa 2014-2015*)
Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014.$ Tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$.

Bài 12 (*Chuyên Toán Bình Thuận 2015-2016*)
Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}.$$

Bài 13 (*Chuyên toán Bình Phước 2015-2016*)
Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Bài 14 (*Chuyên Toán Bắc Giang 2015-2016*)
Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}.$$

LỊCH SỬ PHÁT SINH VÀ PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

LÊ QUỐC HÁN
(GV Viện Sư phạm Tự nhiên, Đại học Vinh)

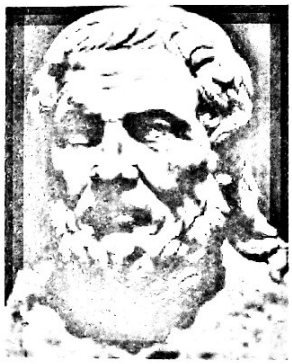
1. Đặc trưng của hình học giải tích

Nét đặc trưng của Hình học giải tích không chỉ trình bày các kết quả của các hình hình học mà quan trọng hơn nó được trình bày bằng một *phương pháp* khác so với hình học sơ cấp Euclid. Ý tưởng cơ bản của nó là sự xác lập tương ứng giữa các cặp số thực được sắp thứ tự với các điểm trong mặt phẳng từ đó tạo ra một sự tương ứng giữa các đường trong mặt phẳng và các phương trình hai biến sao cho mỗi đường trong mặt phẳng đó có một phương trình xác định $f(x,y)=0$, và với mỗi phương trình như vậy có một đường hoặc một tập hợp điểm xác định trong mặt phẳng. Một sự tương ứng tương tự như vậy cũng được xác lập giữa tính chất đại số và giải tích của phương trình $f(x,y)=0$ với các tính chất hình học của các đường liên kết. Nhiệm vụ chứng minh một định lý trong hình học được chuyển qua một cách tài tình sang việc chứng minh một định lý trong đại số và giải tích. Rõ ràng việc chứng minh một định lý trong đại số và giải tích thuận lợi hơn vì có nhiều công cụ hơn.

Hiển nhiên, đối với hình học trong không gian thì một điểm tương ứng với một ba số thực được sắp thứ tự và các mặt tương ứng với phương trình ba ẩn $f(x,y,z)=0$. Khi đó các đường tương ứng với hệ hai phương trình ba ẩn $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$.

2. Lịch sử phát sinh Hình học giải tích

Hình học giải tích có một nguồn gốc rất lâu đời. Người Hy Lạp cổ đại đã quan tâm đến đại số hóa hình học; điển hình là *Apollonius* đã thâu lượm được một khối lượng lớn hình học các thiết diện cônic của mình từ những tương đương hình học của một số phương trình của các đường đó, một tư tưởng dường như bắt nguồn từ *Menaechmus*. Hơn nữa tư tưởng tọa độ đã được người Ai Cập và La Mã sử dụng trong trắc địa cũng như người Hy Lạp dùng trong việc vẽ bản đồ.


Apollonius

Ở thế kỷ XIV, *Nicole Oresme* (1323 - 1382) người Normady đã thể hiện trước một khía cạnh khác của hình học giải tích khi ông biểu thị một số quy luật bằng cách vẽ biểu đồ cho biến phụ thuộc (latitudo) so với biến độc lập (longitudo) khi biến sau được phép lấy trên số gia nhỏ.

Tuy nhiên, trước khi hình học giải tích có được dạng thực tiễn cao như ngày nay nó đã phải chờ đợi sự phát triển của *ký hiệu đại số* và do vậy có thể chính xác hơn khi nhất trí với đại bộ phận các sử gia khi họ cho rằng những đóng góp quyết định mà hai nhà toán học người Pháp là *Réné*

Descartes và *Pierre de Fermat* đã thực hiện trong thế kỷ XVII là cốt lõi và ít ra là tư tưởng hiện đại về Hình học giải tích ở dạng mà ta thấy như ngày nay.

3. Réné Descartes (1596 - 1650) - cha đẻ của Hình học giải tích hiện đại

Réné Descartes sinh ở gần Tours năm 1596. Khi lớn lên ông được gửi tới trường Dòng Tên ở La Flèche. Ông có một thói quen suốt đời (do sức khỏe quá yếu ớt) là nằm lại trên giường khá muộn vào buổi sáng. Những giờ phút ấy ông trầm tư suy nghĩ mà về sau ông cho là những khoảng thời gian năng suất nhất trong nghiên cứu của mình (!). Năm 1612, *Descartes* thôi học và ít lâu sau đến Paris, ở đó cùng với *Mersenne* và *Mydorge* ông đã dành ít nhiều thời gian vào việc nghiên cứu toán học. Năm 1617 ông bắt đầu gia nhập trong nhiều năm vào quân đội của Hoàng tử *Maurice* vùng Orange. Vào lúc rời quân ngũ ông đã có dịp trong bốn hoặc năm năm qua các nước Đức, Đan Mạch, Hà Lan, Thụy Sĩ và Italia. Sau khi về lại Paris, ông tiếp tục các nghiên cứu toán học, suy ngẫm về triết học và có thời kỳ chế tạo các dụng cụ quang học. Lúc đó Hà Lan phát triển rất mạnh nên ông quyết định chuyển sang Hà Lan sống và nghiên cứu toán học, triết học và khoa học khác trong suốt 20 năm. Năm 1649, theo lời mời của Hoàng hậu Thụy Điển Christina, ông sang đó được một năm thì qua đời vì bị viêm phổi.

Trong 20 năm ở Hà Lan, *Descartes* đã hoàn thành tác phẩm chính "*Về phương pháp hướng dẫn tới lẽ phải và tìm kiếm chân lý của mình*" với ba phụ lục *La dicptrique* (Khúc xạ học), *Les méteres* (Các hiện tượng khí tượng) và *La géometrie* (Hình học). Ngoài ra ông còn công bố các công trình triết học khác như *Le monde* (Thế giới), *Meditationes* (Những suy tưởng), *Princippia philóphiae* (Nguyên lý triết học)...

Réné Descartes

Pirre de Fermat

La géometrie là những đóng góp chính của *Descartes* cho Hình học giải tích. Nó chiếm khoảng 100 trang và được chia thành ba phần. Phần đầu giải thích một số nguyên lý của hình học đại số và cho thấy một bước tiến thực sự hơn hẳn người Hy Lạp cổ đại. Đối với người Hy Lạp cổ đại, một biến tương đương với độ dài một đoạn thẳng, tích của hai biến tương đương với diện tích một hình chữ nhật và tích của ba biến tương đương với thể tích một hộp hình chữ nhật nào đó. Người Hy Lạp cổ đại không thể vượt qua giới hạn đó. Đối với *Descartes* thì khác, x^2 không chỉ gợi ra hình ảnh diện tích mà còn gợi ra số hạng thứ thứ tư trong tỉ lệ thức $1:x=x:x^2$. Và do đó khi đã chọn được một đoạn thẳng nào đó làm đơn vị đo, có thể dựng được các đoạn thẳng x^2 (và do đó $x^n, n\in\mathbb{Z}^+$) khi biết x theo các dụng cụ dựng hình Euclid quy định. Bằng cách số học hóa hình học như vậy, trong phần đầu *La géometrie*, *Descartes* đã chọn x trên một trục cho trước và chiều dài y tạo thành một góc cố định với trục đó. Khi đó có thể dựng được y khi biết x và y được biểu diễn qua x: $y=f(x)$. Bằng phương pháp đó *Descartes* đã giải quyết được bài toán: *Giả sử* $p_1,\dots,p_m,p_{m+1},\dots,p_{m+n}$ *là các chiều dài của* $m+n$ *đoạn thẳng vẽ từ một điểm* P *đến* $m+n$ *điểm cho trước và tạo thành các góc cho trước với những đường thẳng đó thỏa mãn điều kiện* $p_1p_2\cdots p_m=kp_{m+1}p_{m+2}\cdots p_{m+n}$ *trong đó* k *là một hằng số. Hãy tìm quỹ tích* P. Trong khi đó người

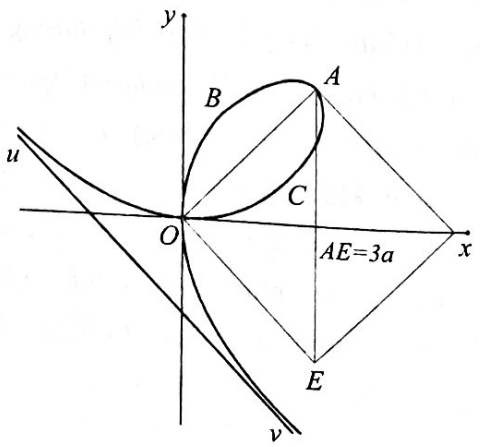
Hy Lạp cổ đại chỉ giải quyết được cho các trường hợp $m \le 2, n \le 2$. Đây là một quà tặng đẹp thể hiện sức mạnh mà phương pháp hình học giải tích mới nhận được và cũng là nguồn cảm hứng vô tận giúp *Descartes* tiếp tục sáng tạo.

Phần thứ hai của *La géometrie* đề cập cách phân loại các đường và một phương pháp để dựng tiếp tuyến cho các đường khá thú vị như sau: Cho đường cong (Γ) có phương trình $f(x,y)=0$, để dựng tiếp tuyến của (Γ) đi qua điểm $P(x_1,y_1)$ cho trước ta gọi $Q(x_2,0)$ là một điểm trên trục x. Khi đó đường tròn tâm Q đi qua P có phương trình $(x-x_2)^2+y^2=(x_1-x_2)^2+y_1^2$. Khử y từ phương trình này và phương trình $f(x,y)=0$ ta được phương trình theo x cho hoành độ của các điểm tại đó đường tròn này cắt (Γ). Bây giờ ta xác định x_2 sao cho phương trình theo x này có một *cặp* nghiệm bằng x_1. Điều kiện này cố định Q là giao của trục x với pháp tuyến của đường cong (Γ) tại P vì đường tròn bây giờ đã tiếp xúc với (Γ) tại P. Một khi đã dựng được đường tròn thì cũng dựng được tiếp tuyến cần dựng. Chẳng hạn cần viết phương trình của tiếp tuyến đi qua điểm $P(1;2)$ với parabol cho bởi phương trình $y^2=4x$. Phương trình đường tròn sẽ là $(x-x_2)^2+y^2=(1-x_2)^2+4$. Khử y ta được $(x-x_2)^2+4x=(1-x_2)^2+4$ hay $x^2+2(2-x_2)x+(2x_2-5)=0$. Điều kiện để phương trình này có hai nghiệm bằng nhau là biệt thức phải bằng không, nghĩa là $(2-x_2)^2-(2x_2-5)=0$ hay $x_2=3$. Đường tròn có tâm $Q(3;0)$ và đi qua $P(1;2)$ dựng được và do đó dựng được tiếp tuyến của parabol. Phương pháp này được *Descartes* áp dụng cho một số đường cong khác nhau trong đó có một đường trái xoan bậc bốn mà sau này mang tên ông.

Phần thứ ba của *La géometrie* nói về cách giải các phương trình bậc lớn hơn hai. Ở đây trình bày luật xác định giới hạn số các nghiệm dương và số các nghiệm âm của một phương trình đa thức mà ngày nay gọi là "*Luật dấu Descartes*". Ông cũng đã đưa ra hệ thống các chỉ số hiện nay (như a^3, a^4,...), đó là một cải tiến lớn so với *Viète*.

La géometrie được trình bày với một văn phong mờ ảo có chủ đích nên rất khó phổ biến. Mãi đến năm 1649 đã xuất hiện một bản dịch Latin kèm theo những chú giải của *F. de Beane* và được xuất bản cùng với lời bình của *Frans van Schooten* tác phẩm mới được lưu hành rộng rãi. Phải mất 100 năm sau, với những thành tựu của các tác giả khác, và cùng với các từ *tọa độ, hoành độ, tung độ* do *Leibniz* đưa vào năm 1682, Hình học giải tích mới được trình bày hoàn chỉnh dưới dạng quen thuộc như ta thường thấy trong các giáo trình ngày nay.

Để ghi nhớ những cống hiến của *Decartes* trong việc phát minh và phát triển phương pháp tọa độ, người ta đã dùng tên ông để đặt cho Hệ tọa độ vuông góc, và đồ thị hàm số $x^3+y^3-3axy=0$ (trong đó a là hằng số dương) trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc là *Lá Decartes*. Đồ thị này nhận đường thẳng $x+y+a=0$ làm đường tiệm cận và nhận điểm $O(0;0)$ làm điểm kép (điểm tự cắt). Phương trình tham số của *Lá Decartes* là $x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} (t \in \mathbb{R})$

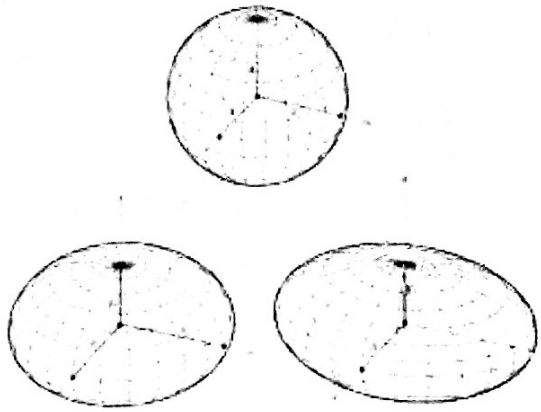


4. Hệ tọa độ Descartes vuông góc trong không gian và một số mặt bậc hai

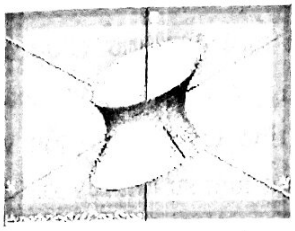
Ta trình bày chi tiết hệ tọa độ Decartes vuông góc trong không gian. Nó gồm gốc O và ba trục số Ox, Oy, Oz cắt nhau vuông góc tại O. Ký hiệu vectơ đơn vị trên các trục số Ox, Oy, Oz là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Nói rằng điểm M của không gian có tọa độ (x, y, z) nếu $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ (x được gọi là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của điểm M). Các trục Ox, Oy, Oz tương ứng được gọi là trục hoành, trục tung và trục cao. Người ta thường ký hiệu hệ tọa độ trên là $Oxyz$. Chẳng hạn trong không gian với hệ tọa độ ấy, mặt cầu $(I(a,b,c); R)$ có phương trình :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

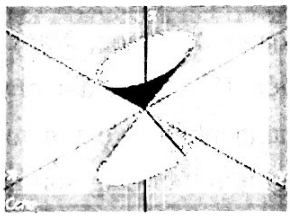
Trong không gian với Hệ tọa độ Decartes vuông góc $Oxyz$, tập hợp những điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình $F(x, y, z) = 0$ (trong đó $F(x, y, z)$ là một đa thức bậc hai đối với x, y, z) được gọi là một *mặt bậc hai.* Người ta thường quan tâm đến một số mặt bậc hai sau: Mặt bậc hai có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$ được gọi là *mặt bậc hai eplipsoid.* Mặt bậc hai có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ $(a, b, c > 0)$ được gọi là *mặt bậc hai hyperboloid hai tầng* và mặt bậc hai có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$ được gọi là *mặt bậc hai hyperboloid một tầng.* Khi $a = b$, hai mặt sau tương ứng được gọi là *mặt bậc hai hyperboloid hai tầng tròn xoay* và *mặt bậc hai hyperboloid một tầng* trục Oz. Tất cả các mặt trên đều nhận O làm tâm đối xứng, nhận Ox, Oy, Oz làm các trục đối xứng và nhận ba mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx làm các mặt phẳng đối xứng.



Elipsoid

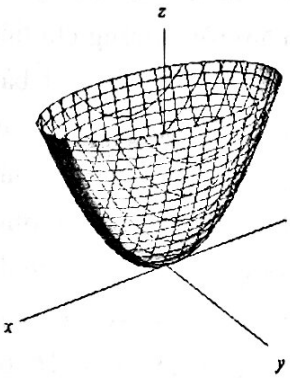


Hyperboloid một tầng

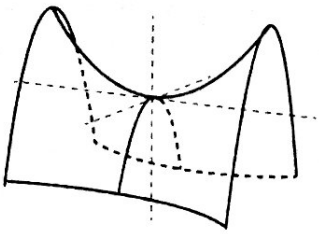


Hyperboloid hai tầng

Các mặt bậc hai có phương trình $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ và $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, trong đó p, q là các tham số dương, được gọi tương ứng là *mặt bậc hai paraboloid eliptic* và *mặt bậc hai paraboloid hyperboloid.* Khi $p = q$, mặt bậc hai paraboloid eliptic $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ biến thành mặt tròn xoay paraloid trục Oz, nó được sinh ra khi ta cho quay parabol tham số $p: \begin{cases} x^2 = 2py \\ z = 0 \end{cases}$ quanh trục đối xứng Oz của nó. Vì hình dáng trực quan, mặt bậc hai paraboloid hyperboloid còn được gọi là *mặt yên ngựa* (xem hình dưới).



Paraboloid eliptic



Paraboloid hyperboloid

5. Fierre de Fermat (1601 - 1665) với những cống hiến về hình học giải tích.

Nhà toán *học Pirre de Fermat* sinh năm 1601 ở gần thành phố Toulouse trong một gia đình kinh doanh da thuộc. Năm 30 tuổi ông giữ chức ủy viên Hội đồng địa phương ở Toulouse và hoàn thành nhiệm vụ với một tinh thần khiêm tốn và nghiêm túc. Ông vốn là một luật sư tận tụy và kín đáo nhưng lại rất đam mê nghiên cứu toán học. Mặc dù khi còn sống ông công bố rất ít các công trình song lại thường xuyên trao đổi về khoa học với các nhiều nhà toán học hàng đầu thời đó nên ông đã gây được ảnh hưởng đáng kể với những người cùng thời. Trong những đóng góp đa dạng của *Fermat* cho toán học thì nổi bật nhất là việc đặt nền móng cho lý thuyết hiện đại về số. Ông được xem là nhà toán học Pháp vĩ đại nhất của thế kỷ XVII. Ở đây chỉ xin đề cập đến những cống hiến của ông trong lĩnh vực Hình học giải tích.

Trong khi *Descartes* hình thành cơ sở của Hình học giải tích hiện đại thì đồng thời *Pirre de Fermat* cũng quan tâm đến vấn đề này. Ông công bố rằng mình đã thấy trước vấn đề thể hiện trong một bức thư ông gửi cho *Roberval* vào tháng 9 năm 1636 trong đó nói rằng tư tưởng của người viết đã được hình thành 7 năm rồi. Những chi tiết của công trình đó được xuất hiện trong một bài báo sau khi ông qua đời có tên là *Isogo ad locus planos et solidos*. Ở đây ta tìm thấy phương trình của một đường thẳng nói chung và của một đường tròn tổng quát, một bài luận giải về các hypebol, elip và parabol. Trong một công trình về các tiếp tuyến và phép cầu phương hoàn tất trước 1636, Fermat đã định nghĩa nhiều đường theo cách giải tích. Ở những chỗ mà *Descartes* đưa ra một vài đường mới, có được theo chuyển động cơ học thì *Fermat* lại giới thiệu được nhiều đường mới, được định nghĩa bằng các phương trình đại số. Các đường cho bởi các phương trình $x^m y^n = a$, $y^n = ax^m$ và $r^n = a\theta$ sau này được gọi là các *hypebol, parabol và đường xoắn ốc Fermat. Fermat* đã đưa ra các cùng với các những đường khác, một đường bậc ba mà về sau được gọi là *đường phù thủy Agnesi* đặt theo tên của *Maria Gaetana Agnesi* (1718 - 1799), một phụ nữ uyên bác, một nhà toán học, một nhà ngôn ngữ học và là một triết gia. Như vậy nhiều chỗ khi *Descartes* bắt đầu bằng một quỹ tích và tiếp đó tìm ra một phương trình của nó thì *Fermat* bắt đầu từ một phương trình rồi tiếp đó nghiên cứu quỹ tích. Đó là hai sắc thái ngược nhau của nguyên lý cơ bản của hình học giải tích. Ngoài ra *Fermat* còn dùng các vô cùng bé trong hình học và áp dụng chúng vào các vấn đề cực đại và cực tiểu. Điều này cho thấy ông là người có tư tưởng tiên phong trong giải tích và hình học vi phân.

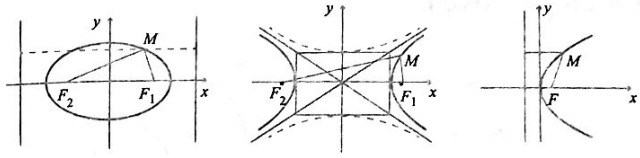
6. Sự phát triển Hình học giải tích hiện đại sau Descartes. Hệ tọa độ cực

a. Có những hệ tọa độ phẳng khác với hệ tọa độ vuông góc và chéo góc. Các *hệ tọa độ Descartes* là các hệ tọa độ thông dụng nhất và được phát triển nhiều nhất, đặc biệt hệ tọa độ Descartes vuông góc. Nhiều thuật ngữ, ví dụ như việc phân loại các đường thành tuyến tính, bậc hai, bậc ba... bắt nguồn từ việc dùng hệ thống tọa độ này. Tuy nhiên, một số đường như các đường xoắn ốc thì phương trình của chúng trong hệ tọa độ Descartes rất phức tạp trong khi ở những hệ tọa độ khác được thiết kế khéo léo một chút thì chúng lại nhận được những phương trình khá đơn giản. Đặc biệt hữu ích trong trường hợp các đường xoắn ốc là *hệ tọa độ cực* trong đó hệ quy chiếu là một tia vô hạn trong đó mỗi điểm được định vị bằng một cặp số

thực, một biểu thị khoảng cách và một biểu thị góc. Tư tưởng về tọa độ cực do *Jakob Bernulli* (1654 - 1705) đưa ra vào năm 1691. Các hệ tọa độ khác được nghiên cứu ít tính đến cuối thế kỷ XVIII, khi các nhà hình học buộc phải né tránh các hệ tọa độ Descartes trong những nhu cầu đặc biệt của bài toán tỏ ra cần phải có một công cụ đại số khác thích hợp hơn. Xét đến cùng thì các hệ tọa độ được tạo ra cho hình học chứ không phải hình học tạo ra vì tọa độ.

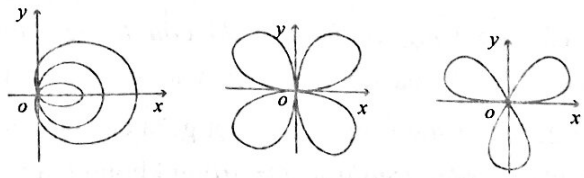
b. *Xin nói rõ hơn về hệ tọa độ cực trong mặt phẳng.* Cho tia Ox trong mặt phẳng định hướng. Khi đó sự tương ứng một – một giữa các tập điểm M khác O trong mặt phẳng với tập các cặp số thực (r,φ) trong đó $r = OM$ là khoảng cách từ O đến M và $\varphi = (Ox, OM)$ là góc quay từ tia Ox đến tia OM, $r > 0, 0 \le \varphi < 2\pi$ gọi là *tọa độ cực* của điểm M trong (đối với) hệ tọa độ cực xác định bởi tia Ox; O gọi là *cực*; Ox gọi là *trục cực*; r gọi là *bán kính cực*; φ gọi là góc *cực*. Chẳng hạn *Lá Decartes* trong mục 3 trong hệ tọa độ cực có phương trình $r = \dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$.

Trong hệ trục tọa độ Decartes Oxy, xét elip (E) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$. Khi đó $F_1(c;0), F_2(-c;0)$ là các tiêu điểm trong đó $c^2 = a^2 - b^2\ (c > 0)$. Giả sử $e = \dfrac{c}{a}$, $p = a(1 - e^2)$. Thế thì trong hệ tọa độ cực F_2 và tia cực F_2F_1, elip (E) có phương trình $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$. Bây giờ ta xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$. Khi đó $F_1(c;0), F_2(-c;0)$ là các tiêu điểm trong đó $c^2 = a^2 + b^2\ (c > 0)$. Giả sử $e = \dfrac{c}{a}, p = a(1 - e^2)$. Thế thì trong hệ tọa độ cực F_1 và tia cực là tia đối của tia F_1F_2, hai nhánh của hyperbol (H) có phương trình $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$ và $r = \dfrac{-p}{1 + e\cos\varphi}$ với $r > 0$. Cuối cùng xét parabol (P) có phương trình chính tắc $y = 2px\ (p > 0)$. Khi đó $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ là tiêu điểm và trong hệ tọa độ cực xác định bởi tia cực Ox, parabol (P) có phương trình $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$.



Elip *Hypebol* *Parabol*

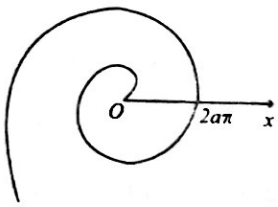
Đường ốc sên Pascal có phương trình trong hệ tọa độ vuông góc là $(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$ còn trong hệ tọa độ cực là $r = a\cos\varphi + b\ (a, b \ne 0)$. *Đường hoa hồng* có phương trình trong hệ tọa độ cực là $r = a\sin k\varphi$ trong đó a, k là các hằng số khác không. Với $k = 2$ ta được *đường hoa hồng bốn cánh* với phương trình trong hệ tọa độ vuông góc Decartes là $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$. Với $k = 3$ ta được *đường hoa hồng ba cánh* với phương trình trong hệ tọa độ vuông góc Decartes là $(x^2 + y^2)^2 - a(3x^2y - y^3) = 0$.



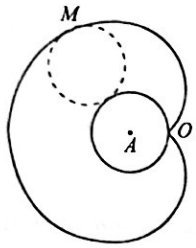
Đường ốc sên Pascal *Đường hoa hồng bốn cánh và ba cánh*

Đường xoắn Achimède có phương trình trong tọa độ cực là $r = a\varphi$ (a là hằng số khác không). Nó là quỹ đạo vạch bởi điểm M với vận tốc không đổi dọc tia Ot, tia này quay quanh điểm O cố định với vận tốc không đổi (trong mặt phẳng).

Xét đường thẳng vạch bởi một điểm M của đường tròn bán kính R lăn không trượt trên một đường tròn tâm A có cùng bán kính R bên ngoài đường tròn đó. Đó là *đường epicyloid với một điểm lùi. Đường hình tim* (còn gọi là đường cardioit) là ảnh của một parabol qua một phép biến đổi nghịch đảo của mặt phẳng với tâm nghịch đảo là tiêu điểm của parabol đó (do đó nó cũng là đường ốc sên Pascal). Lấy điểm lùi của đường hình tim làm gốc tọa độ cực trong mặt phẳng thì có thể viết phương trình đó trong hệ tọa độ cực là $r = 2R(1-\cos\varphi)$.



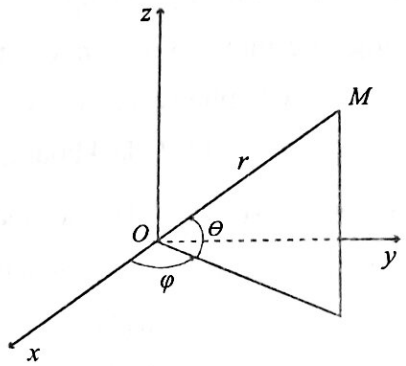
Đường xoắn Achimède



Đường epicyloid với một điểm lùi

Chú ý rằng điểm lùi của đường cong được định nghĩa như sau: Cho đường cong (C). Điểm M được gọi là *điểm lùi* của đường cong đó nếu tại đó (C) có tiếp tuyến (d) và đường thẳng (Δ) khác (d) sao cho trong lân cận của M thì (C) nằm về một phía đối với (Δ). Nếu trong lân cận đó (C) nằm cả hai phía đối với (d) thì M là *điểm lùi loại* 1, nếu trong lân cận đó (C) nằm về một phía đối với (d) thì M là *điểm lùi loại* 2.

Ta chuyển sang về hệ tọa độ cầu trong không gian. Xét hệ tọa độ Decartes vuông góc $Oxyz$. Khi đó sự tương ứng một – một giữa các tập điểm M không nằm trên trục Oz trong không gian với tập các bộ ba số thực (r,φ,θ) trong đó $r = OM$ là khoảng cách từ O đến M và $\varphi = (Ox, OM)$ là góc quay từ tia Ox đến tia OP với P là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy, $\theta = (OP, OM)$ là (số đo) góc quay từ tia OP sang tia OM (xem (OP, Oz) là cơ sở định hướng thuận), $r > 0, 0 \le \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ gọi là *tọa độ cầu* của điểm M đối với hệ tọa độ Decartes vuông góc; φ còn được gọi là góc là *kinh độ*; θ được gọi là *vĩ độ* của M. Công thức đổi đơn vị tọa độ cầu sang tọa độ Decartes vuông góc cho bởi $x = r\cos\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\cos\theta, z = r\sin\theta$. Định thức Jacobi của phép đổi tọa độ đó là $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\cos\theta$.



c. Một phát triển đáng chú ý về các tọa độ đã được *Julius Pluker* (1801 - 1868) mở đầu vào năm 1829 khi ông nhận xét rằng phần tử cơ bản không nhất thiết là điểm mà có thể là bất kỳ một thực thể hình học nào khác. Chẳng hạn nếu chúng ta chọn đường thẳng làm phần tử cơ bản thì ta có thể định vị được bất kỳ đường thẳng nào không đi qua gốc của hệ quy chiếu Descartes bằng cách ghi lại chẳng hạn các đoạn thẳng bị chắn của đường thẳng đó trên trục x và trục y. *Pluker* thực tế đã chọn các nghịch đảo âm của các đoạn thẳng bị chắn ấy làm các con số định vị của đường thẳng và đã khai thác triệt để hình học của cái gọi là tọa độ các đường thẳng hoặc *tọa độ tuyến*. Bây giờ một điểm, thay vì có các tọa độ lại có một phương trình tuyến tính, đó là phương trình thỏa mãn bởi tọa độ của tất cả các đường thẳng đi qua điểm đó. Cách biểu diễn kép một cặp tọa độ là tọa độ điểm hoặc các tọa độ tuyến và một phương trình tuyến tính là phương trình của một đường thẳng hoặc phương trình của một điểm là cơ sở của phép chứng minh giải tích của *Pluker* về nguyên lý đối

ngẫu của hình học xạ ảnh. Một đường có thể xem là quỹ tích các điểm của nó hoặc là hình bao bởi các tiếp tuyến của nó.

d. Nếu thay vì các điểm hoặc đường thẳng ta lại chọn các đường tròn làm phần tử cơ bản, thì ta cần có một bộ ba các số thực được sắp thứ tự để xác định trọn vẹn mỗi một phần tử được xét. Chẳng hạn trong hệ quy chiếu Descartes vuông góc ta có thể lấy hai tọa độ Descartes của tâm đường tròn cùng độ dài bán kính đường tròn đó. Những tư tưởng như vậy đã dẫn đến một sự khái quát hóa đáng kể và phát triển một Lý thuyết thứ nguyên. *Thứ nguyên trong hình học được xem là số các tọa độ cần có để định vị một phần tử cơ bản của hình học.* Theo quan điểm này thì mặt phẳng là hai thứ nguyên (hai chiều) đối với các điểm cũng như các đường thẳng, nhưng là ba thứ nguyên (ba chiều) đối với đường tròn. Có thể thấy mặt phẳng là năm thứ nguyên (năm chiều) nếu tổng của tất cả các các thiết diện cônic được chọn làm đa tạp của các phần tử cơ bản. Về sau *Lý thuyết thứ nguyên* đã được phát triển xa hơn nhiều và ngày nay nó là một đối tượng được mở rộng và đi vào chiều sâu đáng kể.

e. Mặc dầu *Descartes* có nói đến hình học giải tích các khối song lại không thấy để lại kết quả gì về nó. Những người khác như *Frans van Schooten em*, *La Hire* và *Jonhann Bernoulli* đã đưa ra hình học giải tích khối các hình khối quen thuộc ngày nay, nhưng phải tới năm 1700 vấn đề này mới được phát triển có hệ thống lần đầu tiên bởi *Antoine Parent* (1666 - 1716) trong một báo cáo ở Viện Hàn lâm Khoa học Pháp. Về sau *Euler* đã đẩy mạnh chủ đề này khá xa các giai đoạn ban đầu. Những người đầu tiên quan tâm nghiên cứu vấn đề này đã chọn điểm làm phần tử cơ bản. Mặc dầu mặt phẳng là ba chiều đối với các điểm song có thể chỉ ra rằng nó là bốn chiều đối với các đường thẳng cũng như các hình cầu. Tuy nhiên đối với mặt phẳng nó lại là ba chiều.

f. Những khái niệm mơ hồ đầu tiên về một siêu không gian n chiều $(n>3)$ đối với các điểm đã biến mất cùng với một quá khứ cũng mơ hồ như vậy. Mãi đến giữa thế kỷ XIX, mới có những người dũng cảm nghiên cứu các không gian như vậy: Arthur Caley (1821 - 1895) vào năm 1843, Hermann Grassman (1809 - 1877) vào năm 1844 và Berhard Riemann (1826 - 1866) vào năm 1854.

Arthur Caley

Hermann Grassman

Berhard Riemann

Ngày nay, một không gian thực (hoặc đa tạp) n chiều được định nghĩa là tập hợp tất cả các $n-$bộ số $(x_1,x_2,...,x_n)$ của n số thực $x_1,x_2,...,x_n$ mà mỗi số được phép có miền xác định trên một lớp số thực. Bất kỳ một $n-$bộ như vậy đều được gọi là một *điểm* của không gian ấy. Các mối liên hệ giữa các điểm đó được xác định bởi các công thức tương tự như những công thức đối với mối liên hệ tương ứng giữa các điểm trong các không gian điểm Descartes hai hoặc ba chiều. Chẳng hạn khoảng cách giữa hai điểm $(x_1,x_2,...,x_n)$ và $(y_1,y_2,...,y_n)$ trong hệ thống Descartes vuông góc n chiều được cho bởi công thức

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}.$$

Một hình học n thứ nguyên loại này là một nghiên cứu giải tích thuần túy và dùng các thuật ngữ hình học. Nói cách khác, một số các phát triển quan trọng nhất của toán học hiện đại là bắt nguồn từ những nghiên cứu của Hình học giải tích.

6. Kết luận. Mặc dù đã có nguồn gốc từ thời cổ đại, nhưng phải qua hai nghìn năm, đến thời kỳ Văn hóa Phục hưng, Hình học giải tích hiện đại mới được xây dựng có hệ thống, đạt được nhiều thành tựu rực rỡ trong cả hai phương diện lý thuyết và ứng dụng. Nhờ thế nó được trường tồn và phát triển đến ngày nay.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/520 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

PHÙNG CHÍ TỰ
(GV THCS Phương Liệt, Thanh Xuân, Hà Nội)

Bài T2/520 (Lớp 7). Cho tam giác ABC nhọn. D là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác. Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, AC. Gọi G là hình chiếu của E trên AB, gọi J là trung điểm của DE. Chứng minh tam giác BGJ cân.

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Xã Thanh Yên, huyện Điện Biên, tỉnh Điện Biên)

Bài T3/520. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ y^3 + z = 2 \\ z^3 + t = 2 \\ t^3 + x = 2 \end{cases}.$$

HOÀNG NGỌC TUẤN
(K27E Toán, ĐHSP Hà Nội 2, Vĩnh Phúc)

Bài T4/520. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$. Kẻ $BH \perp AD$ tại H. Trên đường chéo AC lấy $AI = AB$. Gọi O là trung điểm của AD. Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt BH và CD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $IF = 2IE$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/520. Giải phương trình: $x + \dfrac{2x\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$

HUỲNH THANH TÂM
(Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/520. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 1 = 4\sqrt{xyz} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{z}+1} = \dfrac{3\sqrt{xyz}}{x+y+z} \end{cases}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T7/520. Cho các số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn a, b, c, d lớn hơn hoặc bằng -2 và có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ *(Hà Nội)*

Bài T8/520. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a^2c^2}\left[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right] \geq \frac{6\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH *(Hà Nội)*

Bài T9/520. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{(x+1)\ldots(x+r)} = \frac{1}{2}$$

với n là số nguyên dương cho trước.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/520. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 4u_{n-1} + 3n^2 - 12n^3 + 12n - 4 \text{ với } n = 2,3,\ldots \end{cases}$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p lẻ thì $2019\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ luôn chia hết cho p.

NGUYỄN VĂN BẢN
(Thôn Trà Đoài, xã Quang Trung, huyện Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T11/520. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)-2y)=6x+f(f(y)+x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

HỒ THANH LAI
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/520. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB. (O_a) là đường tròn đi qua B_0, C_0 và tiếp xúc trong với (O) tại A_2 khác A, (O_b) là đường tròn đi qua C_0, A_0 và tiếp xúc trong với (O) tại B_2 khác B, (O_c) là đường tròn đi qua A_0, B_0 và tiếp xúc trong với (O) tại C_2 khác C. A_3 là giao điểm của B_1C_1 và B_2C_2. B_3, C_3 được xác định tương tự. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

DƯƠNG THỊ XUÂN AN
(GV THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre)

Bài L1/520. Trong thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn kết hợp, cùng pha S_1 và S_2 với $S_1S_2 = 4{,}2$ cm. Khoảng cách giữa hai điểm gần nhất dao động cực đại trên S_1S_2 là 0,5 cm. Điểm C di động trên mặt nước sao cho CS_1 luôn vuông góc với CS_2. Xác định khoảng cách lớn nhất từ S_1 đến C khi C nằm trên một vân giao thoa cực tiểu.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/520. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Trên đoạn mạch AM có điện trở $R = 112\,\Omega$ nối tiếp với cuộn cảm thuần có độ tự cảm thay đổi được. Đoạn mạch MB chỉ chứa bóng đèn sợi đốt loại 120 V – 60 W. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều 220 V - 50 Hz. Để bóng đèn sáng bình thường thì độ tự cảm của cuộn dây là bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/520 (For 6th grade). Find all prime numbers p so that $2^p + p^2$ is a prime.

Problem T2/520 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC. Let D be the point which is equidistant to 3 vertices of the triangle. Suppose that E, F respectively are the midpoints of BC, AC. Let G be the perpendicular projection of E on AB, then call J the midpoint of DE. Show that the triangle BGJ is isosceles.

Problem T3/520. Solve the following system of equations $\begin{cases} x^3+y=2 \\ y^3+z=2 \\ z^3+t=2 \\ t^3+x=2 \end{cases}$.

Problem T4/520. Given a quadrilateral $ABCD$ with $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^0$. Draw $BH \perp AD$ at H. On the diangonal AC we choose the point I so that $AI = AB$. Let O be the midpoint of AD. The line perpendicular to OI at I intersects BH and CD at E and F respectively. Show that $IF = 2IE$.

Problem T5/520. Solve the equation $x+\dfrac{2x\sqrt{6}}{\sqrt{x^2+1}}=1$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/520. Solve the following system of equations $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+1=4\sqrt{xyz} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{z}+1}=\dfrac{3\sqrt{xyz}}{x+y+z} \end{cases}$.

Problem T7/520. Given non-zero numbers a, b, c, d whose sum is 4 and each of them is greater or equal to –2. Show that

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Problem T8/520. Given a triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Prove that

$$\frac{b}{a^2c^2}\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right] \ge \frac{6\sin^3 B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

When does the equality happen ?

Problem T9/520. Solve the equation

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{x(x-1)...(x-r+1)}{(x+1)...(x+r)}=\frac{1}{2}$$

where n is a given positive integer.

(Xem tiếp trang 43)

Bài T1/516. *Cho* $A=\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!4}+\frac{1}{3!5}+...+\frac{1}{(n-2)!n}$ *trong đó* $n! = 1.2.3...n$ *với* $n\in\mathbb{N}$ *và* $n\geq 3$. *Chứng tỏ rằng* $A<\frac{1}{2}$.

Lời giải. Với mỗi số nguyên $m\geq 3$ ta thấy:

$$\frac{1}{(m-2)!m}=\frac{m-1}{(m-2)!(m-1)m}$$
$$=\frac{m-1}{m!}=\frac{1}{(m-1)!}-\frac{1}{m!}.$$

Cho m lần lượt các giá trị 3, 4, 5,..., $n-1$, n ta có:

$$A=\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!4}+\frac{1}{3!5}+...+\frac{1}{(n-2)!n}$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Các bạn đã giải đúng bài này là: **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Huy Hoàng Sơn, Hoàng Minh Hiếu*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Phạm Minh Đức*, 6A1, THCS Nam Từ Liêm; *Lê Mạnh Hùng*, 6C2, THCS Archimedes, Đông Anh; **Nghệ An**: *Thái Minh Quân, Nguyễn Hải Triều*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi**: *Phạm Quốc Hoàng Anh*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2.216. *Chứng minh rằng số* $a=27.7^n+2021$ *không thể là tích của m số tự nhiên liên tiếp* $(m\in\mathbb{N}, m\geq 2)$ *với mọi số tự nhiên n chia hết cho 4.*

Lời giải. Ta có: $a=27.7^n+2021$. Giả sử a là tích của m số tự nhiên liên tiếp $(m\in\mathbb{N}, m\geq 2)$.

Khi đó nếu $m\geq 3$ thì $a\,\vdots\,3$ (vì trong tích có chứa 3 thừa số là 3 số tự nhiên liên tiếp thì tích đó chia hết cho 3). Mà $a=27.7^n+2021\not\vdots\,3$ do $27.7^n\,\vdots\,3$ nhưng $2021\not\vdots\,3$ (vô lý). Suy ra $m=2$.

Vì n chia hết cho 4 nên $n=4k$ $(k\in\mathbb{N})$, do đó 7^n có tận cùng là 1, suy ra $a=27.7^n+2021$ có tận cùng là 8. Mà tích của 2 số tự nhiên liên tiếp lại không có tận cùng là 8, điều này dẫn tới sự vô lý. Vậy số $a=27.7^n+2021$ không thể là tích của m số tự nhiên liên tiếp $(m\in\mathbb{N}, m\geq 2)$ với mọi số tự nhiên n chia hết cho 4.

Nhận xét. 1) Một số bạn đưa ra nhận xét: *Tích của m số tự nhiên liên tiếp* $(m\geq 2)$ *không thể có tận cùng bằng* 8, mà a có tận cùng là 8 nên dẫn tới điều phải chứng minh. Tuy nhiên một số bạn lại không chứng minh nhận xét này. Nhận xét này có thể chứng minh đơn giản như sau: Với $m=2$ thì tích 2 số tự nhiên liên tiếp có chữ số có tận cùng là 0, 2, 4, 6; Với $m=3$ thì tích của 3 số tự liên tiếp có chữ số tận cùng là 0, 4, 6; Với $m=4$ thì tích của 4 số tự liên tiếp có chữ số tận cùng là 0, 4; Với $m\geq 5$ thì tích của 5 số tự nhiên liên tiếp (có chứa hai thừa số là bội của 5 và của 2) nên có chữ số có tận cùng là 0.

2) Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng. Sau đây là sanh sách các bạn: **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Hiếu*, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Lê Mạnh Hùng, Đinh Mai Phương*, 7C2, THCS Archimedes Đông Anh, *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội, *Ngô Uyển Nhi*, 7A5, THCS Phương Liệt, Thanh Xuân; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Thái Minh Quân, Nguyễn Hải Triều*, 6B, *Lê Văn Quang Hiếu*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Ngãi:** *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6B, *Phạm Quốc Hoàng Anh*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

TRẦN HỮU NAM

Bài T3/516. *Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$. *Chứng minh rằng*

$$2(a+b+c+d)-4$$
$$\geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh BĐT sau:

Với x, y là các số thực dương thì

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \leq \frac{x^2+y^2}{x+y} \quad (*).$$

Thật vậy, áp dụng BĐT Cauchy cho ba số, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{2}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{x+y}{2}.\frac{2(x^2-xy+y^2)}{x+y}.\frac{x+y}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{3}.\left(\frac{x+y}{2}+\frac{2(x^2-xy+y^2)}{x+y}+\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\left(x+y+\frac{2(x+y)^2}{x+y}-\frac{6xy}{x+y}\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\left(3(x+y)-\frac{6xy}{x+y}\right)=x+y-\frac{2xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Từ đó suy ra BĐT(*), đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Trở lại bài toán T3/516.

Áp dụng (*) ta có :

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}$$
$$\leq \frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$
$$=a+b-\frac{2ab}{a+b}+b+c-\frac{2bc}{b+c}+c+d$$
$$-\frac{2cd}{c+d}+d+a-\frac{2da}{d+a}$$
$$=2(a+b+c+d)-2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}\right) \quad (1).$$

Mặt khác, áp dụng BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ (với x, y là các số dương) và kết hợp với $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ ta có: $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{d}+\frac{1}{a}}\right)$$
$$\geq \frac{8}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=2. \text{ Do đó:}$$

$$2(a+b+c+d)-2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}\right)$$
$$\leq 2(a+b+c+d)-4 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4\\ a=b=c=d\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=1.$$

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều tìm ra kết quả và cách làm tương tự như cách trên.

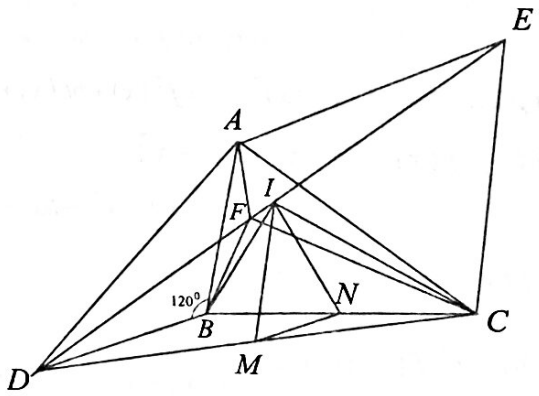
Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội**: *Trần Anh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Tuấn Anh*, 9A1, THCS Tiền An, TP. Bắc Ninh; **Tây Ninh**: *Nguyễn Quốc Tài*, 8A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Tây Ninh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/516. *Cho ΔABC nhọn. Bên ngoài tam giác đó vẽ ΔACE đều và ΔABD cân có $\widehat{ABD}=120^0$. Chứng minh rằng 4 điểm B, C, trung điểm I của DE và giao điểm F ($F\neq E$) của DE và đường tròn ngoại tiếp ΔACE cùng thuộc một đường tròn*

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BC. Ta có: $MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$,

và $MI \parallel BE, MI = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}AC$.

Suy ra: $(MN, MI) = (DB, CE)$
$= (DB, AB) + (AB, AC) + (AC, CE) = (AB, AC)$.

Từ đó $\Delta ABC \sim \Delta MNI$ (c.g.c), suy ra $IN = \frac{1}{2}BC$, dẫn tới $\widehat{BIC} = 90°$ (1).

- Tứ giác $AECF$ nội tiếp nên $\widehat{AFC} = 180° - \widehat{AEC} = 120°$ và $\widehat{AFE} = \widehat{ACE} = 60°$.

Suy ra $\widehat{AFD} = 120° = \widehat{ABD} \Rightarrow$ tứ giác $AFBD$ nội tiếp. Ta có: $\widehat{AFB} = 180° - \widehat{ADB} = 150°$.

Vậy $\widehat{BFC} = 360° - \widehat{AFB} - \widehat{AFC} = 90°$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm B, C, I, F thuộc đường tròn đường kính BC.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Minh Trí*, 7/5, THCS Nguyễn Văn Tố, Q.10; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/516. *Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt và $b^2 - 2b - 3 > 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.*

Lời giải. Ta có: $f[f(x)] - x = f^2(x) + bf(x) + c - x$

$$= f(x)[f(x) - x] + x[f(x) - x] + b[f(x) - x] + x^2 + bx + c - x$$

$$= [f(x) - x][f(x) + x + b + 1].$$

Do đó: $f[f(x)] = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) + x + b + 1 = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + (b-1)x + c = 0 & (1) \\ x^2 + (b+1)x + b + c + 1 = 0 & (2) \end{array}\right..$$

Theo giả thiết, PT(1) có hai nghiệm phân biệt.

PT(2) có: $\Delta = (b+1)^2 - 4(b + c + 1)$

$= b^2 - 2b - 4c - 3 > 0$ (theo giả thiết).

PT(2) cũng có hai nghiệm phân biệt. Ta sẽ chứng minh các PT(1) và (2) không có nghiệm chung.

Thật vậy, giả sử hai phương trình này có nghiệm chung x_0 thì $\begin{cases} x_0^2 + (b-1)x_0 + c = 0 & (3) \\ x_0^2 + (b+1)x_0 + b + c + 1 = 0 & (4) \end{cases}$.

Trừ theo vế của (4) cho (3), ta được:

$$2x_0 + b + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b+1}{2}.$$

Thay vào (3) có: $\frac{(b+1)^2}{4} - \frac{b^2 - 1}{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow -b^2 + 2b + 3 + 4c = 0.$$

Điều này trái với giả thiết $b^2 - 2b - 3 > 4c$. Do đó các PT(1) và (2) không có nghiệm chung. Vậy phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Việc giải bài toán có hai bước rất rõ ràng là chứng minh phương trình $f[f(x)] = x$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + (b-1)x + c = 0 & (1) \\ x^2 + (b+1)x + b + c + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$ và các PT (1), (2) không có nghiệm chung.

2) Trong đầu bài đã in nhầm $b^2 - 2b - 3 > 4c$ thành $b^2 - 2b - 3 \geq 4c$. Xin lỗi bạn đọc. Bạn *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng** đã chứng minh rằng nếu $b^2 - 2b - 3 = 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có 2 nghiệm phân biệt. Bạn đọc tự kiểm tra lại. Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Sóc Trăng: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo huyện Cam Lộ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/516. *Cho đa thức $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $g(x) = f(f(f(f(x))))$.*

Lời giải. Để cho gọn ta kí hiệu

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(...f}_{n}(x)...)).$$

Ta có: $f(x) = 3x^2 + 8x + 4 = \frac{1}{3}(3x+4)^2 - \frac{4}{3}$.

Suy ra: $3f(x) + 4 = (3x + 4)^2$ (1). Do đó:

$$3g(x) + 4 = 3f_4(x) + 4 = (3f_3(x) + 4)^2 = (3f_2(x) + 4)^4$$
$$= (3f(x) + 4)^8 = (3x + 4)^{16},$$

suy ra: $g(x) = \frac{1}{3}(3x+4)^{16} - \frac{4}{3}$.

Bởi vậy hệ số của x^4 trong khai triển thành đa thức của $g(x)$ bằng:

$$\frac{1}{3}.C_{16}^{4}.3^4.4^{12} = \frac{16.15.14.13}{4.3.2.1}.3^3.4^{12} = 3^3.4^{13}.5.7.13.$$

Nhận xét. Kết quả của bài toán trên được suy ra chủ yếu từ công thức lùi (1). Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Bình**: *Lê Đức Hạnh*, *Trần Phương Linh*, 10T2, *Phạm Long Khánh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị**: *Lê Xuân Tùng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/516. *Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng* $\frac{5a+c}{b+c} + \frac{6b}{c+a} + \frac{5c+a}{a+b} \geq 9$.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Minh Khôi* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** và một số bạn khác).

Đặt $x = a + b, y = b + c, z = c + a$. Từ đó ta suy ra được: $5a + c = 2x - 2y + 3z$, $6b = 3x + 3y - 3z$,

$a + 5c = 2y + 3z - 2x$.

Thay vào bất đẳng thức ban đầu, và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số trong ngoặc, ta có:

$$\frac{2x+3z-2y}{y} + \frac{3x+3y-3z}{z} + \frac{2y+3z-2x}{x}$$

$$= -7 + \left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{3z}{y} + \frac{3x}{z} + \frac{3y}{z} + \frac{3z}{x}\right)$$

$$\geq -7 + 2.\sqrt{\frac{2x}{y}.\frac{2y}{x}} + 4.\sqrt[4]{\frac{3z}{y}.\frac{3x}{z}.\frac{3y}{z}.\frac{3z}{x}} = 9.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Đồng Tháp:** *Đinh Thái Duy*, 11T, *Nguyễn Trúc Như Bình*, 12T, *Bùi Hữu Phúc*, *Lê Văn Anh Khoa*, *Nguyễn Thiên Lý*, *Nguyễn Thiện Trí*, *Nguyễn Minh Khôi*, 10 T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 Toán 2, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, *Hoàng Ngọc Bảo*, 11 Toán 2, *Trương Phan Minh Quân*, 11 Toán 1, *Nguyễn Duy Phước*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 11A2, THPT Cù Huy Cận, *Vũ Quang*, *Lê Phan Việt Cường*, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê Văn Thoại*, 10B1, THPT Đăkrông, *Nguyễn Xuân Tiến*, 11T, *Nguyễn Anh Quân*, 8d THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ, *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, *Ngô Hoàng Thành Đạt*, *Nguyễn Ngọc Thọ*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đông Hà; **Quảng Bình:** *Bùi Thị Thu Hà*, 12 Toán 2, *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, *Bùi Nguyễn Thanh Ngân*, *Lê Đức Hạnh*, *Lê Hồng Anh* và *Trương Thị Thu Hà*, *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội:** *Nguyễn Duy Hiếu*, *Đinh Mai Phương*, 7C2, THCS Achimedes Đông Anh, *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, *Nguyễn Xuân Tùng* 10 Toán, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội; **Tây Ninh**: *Ngô Quốc Tài*, 8A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP Tây Ninh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tuấn Anh*, 9A1, THCS Tiền An; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, *Nguyễn Thanh Trường*, *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đà Lạt:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11 T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa- Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **USA:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, lớp 12 Cambrian Academy, San Jose, CA 95127.

VŨ ĐÌNH HÒA

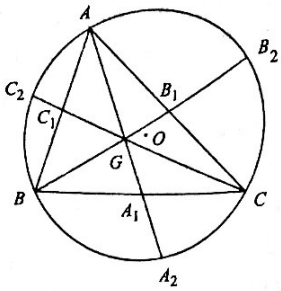
Bài T8/516. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O có G là trọng tâm, các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:* $\frac{A_1A_2}{GA_1} + \frac{B_1B_2}{GB_1} + \frac{C_1C_2}{GC_1} \geq 3$.

Lời giải. Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Sử dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$AA_1^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4};$$

$$BB_1^2=\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4};$$

$$CC_1^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$



Mặt khác $AA_1.A_1A_2=BA_1.CA_1$, từ đó có: $A_1A_2=\frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$. Tương tự:

$$B_1B_2=\frac{b^2}{2\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}};C_1C_2=\frac{c^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}.$$

Theo tính chất trọng tâm thì

$$GA_1=\frac{1}{6}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2};\ GB_1=\frac{1}{6}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2};$$

$$GC_1=\frac{1}{6}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta được:

$$\frac{A_1A_2}{GA_1}=\frac{3a^2}{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{9a^4}{3a^2\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]}$$

$$\geq\frac{9a^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}.\text{ Tương tự:}$$

$$\frac{B_1B_2}{GB_1}\geq\frac{9b^4}{(a^2+b^2+c^2)^2};\ \frac{C_1C_2}{GC_1}\geq\frac{9c^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Từ đó theo BĐT Schwarz:

$$\frac{A_1A_2}{GA_1}+\frac{B_1B_2}{GB_1}+\frac{C_1C_2}{GC_1}$$

$$\geq\frac{9a^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{9b^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{9c^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2)^2}=3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên**: *Trần Sơn Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Đặng Hoàng Duy*, *Trương Thị Thu Hà*, 10T1, *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, *Nguyễn Anh Đức*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, *Ngô Hoàng Thành Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán 1, *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán 1, *Hồ Ngọc Hùng*, 11 Toán 2, *Nguyễn Duy Phước*, *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; TP. Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, *Lê Văn Anh Khoa*, 10T1, *Nguyễn Trúc Như Bình*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **USA:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, Lớp 12, Trường Cambrian Academy, địa chỉ: 1167 Formosa Ridge Dr, San Jose, CA 95127.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/516. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2+y^2-\frac{1}{2}} & (1)\\ 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x^2+y^2-\frac{1}{2}\geq 0$ (*).

TH1: $x=0$. Thay $x=0$ vào (1) ta được:

$$1-\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{y^2-\frac{1}{2}}\quad(3)$$

$$\Rightarrow 1-2\sqrt{y^2-y+1}+y^2-y+1=y^2-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{2}-y=2\sqrt{y^2-y+1}$$

$$\Rightarrow\frac{25}{4}-5y+y^2=4y^2-4y+4$$

$$3y^2+y-\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm2\sqrt{7}}{6}.$$

Thử lại chỉ có cặp $(x;y)=\left(0;\frac{-1+2\sqrt{7}}{6}\right)$ thỏa mãn hệ (I).

TH2: $x\neq 0$. Chia hai vế của (2) cho x^3 ta được:

$$(2)\Leftrightarrow 2y-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^3}-2y\sqrt{4y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}. \quad (4)$$

Hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Từ đây và từ (4) suy ra $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)$. Vậy $2y=\frac{1}{x}$ hay $xy=\frac{1}{2}$. Với điều kiện $xy=\frac{1}{2}$ thì

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{y^2-y+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad (5).$$

Đặt $\vec{u}=\left(\frac{x}{2}-y;\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$, $\vec{v}=\left(y-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thì

$$\vec{u}+\vec{v}=\left(\frac{1}{2}(x-1);\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)\right).$$ Suy ra:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{3}{4}(x+1)^2}=\sqrt{x^2+x+1}.$$

Vậy $(5)\Leftrightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}$ hay

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{y-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x\Leftrightarrow x-2y=x(2y-1)\Leftrightarrow x-y=xy=\frac{1}{2}.$$

Giải hệ $\begin{cases} x-y=\frac{1}{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$ ta được $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$ và $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};-1\right)$. Thử lại chỉ có $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$ là nghiệm. Vậy $(x;y)=\left(0;\frac{-1+2\sqrt{7}}{6}\right)$ hoặc $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Đây là dạng toán giải *hệ phương trình hỗn hợp* thường gặp trên Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* hoặc thi *Olympic 30-4*. Sử dụng vectơ và đạo hàm (suy ra tính đơn điệu của hàm số) được coi như *các phương pháp* giải hệ phương trình này. Đa số các bạn dùng biến đổi tương đương cũng đúng, nhưng dài hơn. Một số bạn lớp 10 không sử dụng đạo hàm nhưng bằng biến đổi tương đương vẫn đi đến $2xy=1$. Một số bạn biến đổi nhầm hoặc không thử lại nên chọn cả đáp số sai: $(0;0)$ hoặc $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$. Sau đây là danh sách các bạn tham gia giải đúng bài này: **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, *Lê Huỳnh Nhật Nguyệt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên:** *Trần Sơn Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 11 toán 1, *Lê Đức Hạnh*, 10 toán 2 chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Ngô Hoàng Thành Đạt*, *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, 12 toán 1, *Hồ Ngọc Hùng*, 11 toán 2, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP, Huế; **USA**: *Nguyễn Phúc Thịnh*, 12 trường Cambrian Academy, San Jose. Có 1 bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/516. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho* $p^2+1\,|\,3^q+1, q^2+1\,|\,3^p+1$.

Lời giải (Của bạn *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp).**

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p\le q$.

i) Xét $p=2$. Khi đó $5\,|\,3^q+1$ và $q^2+1\,|\,10$.

Từ $q^2+1\,|\,10$ suy ra $q=2$ hoặc $q=3$.

Từ $5\,|\,3^q+1$ suy ra $q=2$. Vậy $(p;q)=(2;2)$.

ii) Xét $p>2$. Giả sử r là ước nguyên tố lẻ bất kỳ của p^2+1. Ta có: $r\,|\,p^2+1\,|\,3^q+1$, suy ra:

$3^q\equiv -1 \pmod r$, dẫn đến $(-3)^q\equiv 1 \pmod r$.

Gọi $h=\mathrm{ord}_q(-3)$, khi đó $h\setminus q$ nên $h=1$ hoặc $h=q$.

Nếu $h = 1$ thì $(-3) \equiv 1 \pmod r$ suy ra $r \mid 4$, dẫn đến $r = 2$ (loại). Vậy $h = q$. Mặt khác theo định lý Fermat nhỏ: $(-3)^{r-1} \equiv 1 \pmod r$. Do đó $q \mid r-1$ suy ra $r \equiv 1 \pmod q$ (1).

Vì p lẻ nên $p^2 + 1 = 2m$ với m lẻ. Do (1) nên $m \equiv 1 \pmod q$. Vậy $p^2 + 1 \equiv 2 \pmod q$.

Từ đó $p^2 - 1$ chia hết cho q, suy ra $(p-1)(p+1)$ chia hết cho q. Vì q là số nguyên tố $q \geq p > p-1$ nên $q \mid p-1$ suy ra $q \leq p+1$.

Lại có: $\begin{cases} p \leq q \leq p+1 \\ q \setminus p+1 \end{cases}$, nên $q = p + 1$. Mà p lẻ suy ra q chẵn. Vô lí. Do đó $(p ; q) = (2 ; 2)$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Nhận xét. Ngoài bạn *Thịnh* ra chỉ có nhóm các bạn *Lê Đức Hạnh, Lê Hồng Anh, Nguyễn Anh Đức, Phạm Long Khánh, Trần Phương Linh*, THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** có lới giải tốt. Hai bạn ở THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định** và THPTchuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** có lời giải không đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/516. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(4xy) = f\left(2x^2 + 2y^2\right) + 4(x-y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. (theo đa số các bạn). Theo (1) với $y = 0$, ta được: $f(0) = f(2x^2) + 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f(2x^2) = f(0) - 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $f(t) = c - 2t, \forall t \geq 0$ (2), trong đó $c = f(0), t = 2x^2$. Tiếp theo, cho $y = -x$, ta được:

$$f(-4x^2) = f(4x^2) + 16x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(-t) = f(t) + 4t, \forall t \geq 0 \ (3),$$

trong đó $t = 4x^2$. Kết hợp (2) và (3), ta thu được:

$$f(-t) = c - 2t + 4t = c - 2(-t), \forall t \geq 0$$

hay $f(t) = c - 2t, \forall t \leq 0$ (4).

Từ (2) và (4) suy ra $f(t) = c - 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}$. Qua lời giải đã trình bày, ta thấy không cần dùng đến giả thiết về tính liên tục của $f(x)$. Sử dụng giả thiết hàm cần tìm là liên tục, nhiều bạn đã sử dụng giới hạn của hàm liên tục cũng tìm được nghiệm. Một số bạn không để ý đến việc cần thiết phải thử lại để khẳng định rằng hàm $f(t) = c - 2t$ thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Tháp:** *Bùi Hữu Phúc, Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, *Đinh Thái Duy*, 11T, *Nguyễn Trúc Như Bình*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Phạm Bá Hoàng*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, *Trần Phương Linh, Lê Đức Hạnh*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

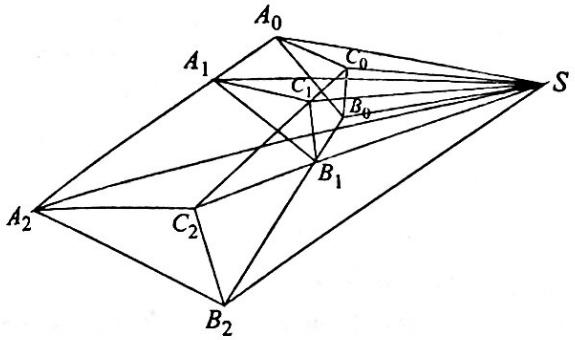
Bài T12/516. *Cho hình bình hành ABCD có góc $\widehat{BAD}$ nhọn. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua B, cắt đoạn thẳng CD tại M. Đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại N. BM, DN lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tại K, L khác M, N. Lấy các điểm P và Q sao cho PN = PK, $PN \perp AD$, QM = QL và $QM \perp AB$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi quanh B.*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Trung Bồn*, **Hà Nội**).

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Nếu các tam giác $A_0B_0C_0, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ đồng dạng cùng hướng và $\overrightarrow{A_0A_1} = k\overrightarrow{A_0A_2}$; $\overrightarrow{B_0B_1} = k\overrightarrow{B_0B_2}$ thì $\overrightarrow{C_0C_1} = k\overrightarrow{C_0C_2}$.*

Chứng minh. Dựng điểm C_2' sao cho $\overrightarrow{C_0C_1} = k\overrightarrow{C_0C_2'}$. Vì các tam giác $A_0B_0C_0, A_1B_1C_1$ đồng dạng cùng hướng nên tồn tại (duy nhất) điểm S sao cho các tam giác $SA_0A_1, SB_0B_1, SC_0C_1$ đồng dạng cùng hướng.



Từ đó, chú ý rằng $\overrightarrow{A_0A_1} = k\overrightarrow{A_0A_2}$; $\overrightarrow{B_0B_1} = k\overrightarrow{B_0B_2}$; $\overrightarrow{C_0C_1} = k\overrightarrow{C_0C_2'}$, suy ra các tam giác SA_0A_2, SB_0B_2, SC_0C_2' đồng dạng cùng hướng.

Do đó các tam giác SA_0B_0, SA_2B_2 đồng dạng cùng hướng và các tam giác SA_0C_0, SA_2C_2' đồng dạng cùng hướng. Vậy

$$(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0}) \equiv (\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0S}) + (\overrightarrow{A_0S}, \overrightarrow{A_0C_0})$$

$$\equiv (\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2S}) + (\overrightarrow{A_2S}, \overrightarrow{A_2C_2'}) \equiv (\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2C_2'}) (\text{mod } 2\pi);$$

$$\frac{A_0B_0}{A_0C_0} = \frac{A_0B_0}{A_0S} \cdot \frac{A_0S}{A_0C_0} = \frac{A_2B_2}{A_2S} \cdot \frac{A_2S}{A_2C_2'} = \frac{A_2B_2}{A_2C'}.$$

Do đó các tam giác $A_0B_0C_0, A_2B_2C_2'$ đồng dạng cùng hướng. Từ đó, chú ý rằng các tam giác $A_0B_0C_0, A_2B_2C_2$ đồng dạng cùng hướng, suy ra $C_2' = C_2$. Kết hợp với $\overrightarrow{C_0C_1} = k\overrightarrow{C_0C_2'}$, ta có $\overrightarrow{C_0C_1} = k\overrightarrow{C_0C_2}$.

Trở lại giải bài toán T12.

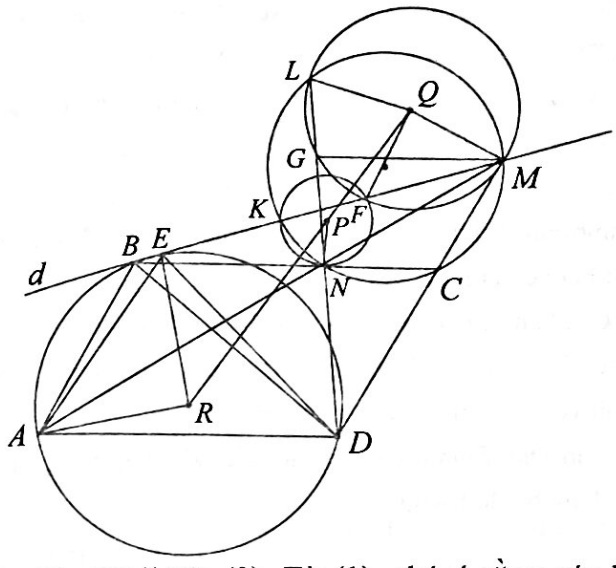
Gọi (R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD; (Q) là đường tròn tâm Q và đi qua M; (P) là đường tròn tâm P và đi qua N; E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BM và (R), (Q); G là giao điểm thứ hai của DN và (Q); MM là tiếp tuyến với đường tròn (Q) tại M; NN là tiếp tuyến với (P) tại N. Vì các bộ bốn điểm (G, M, L, M), (L, N, C, M) cùng thuộc một đường tròn nên

$$(GM, CN) \equiv (GM, GL) + (LN, CN)$$
$$\equiv (MM, ML) + (LM, CM)$$
$$\equiv (MM, CM) \equiv 0 (\text{mod } \pi).$$

Từ đó, chú ý rằng $ABCD$ là hình bình hành, suy ra: $GM // CN \equiv CB // AD$ (1).

Vì các bộ bốn điểm (K, N, M, C), (E, B, D, A) cùng thuộc một đường tròn và $CM \equiv AD$ nên

$$(KN, ED) \equiv (KN, KM) + (EB, ED)$$
$$\equiv (CN, CM) + (AB, AD)$$
$$\equiv (CN, AD) \equiv 0 (\text{mod } \pi).$$



Do đó $KN // ED$ (2). Từ (1), chú ý rằng các bộ bốn điểm (G, M, L, M), (L, N, C, M) cùng thuộc một đường tròn và $AB // CD \equiv MM$, suy ra:

$$(ED, FG) \equiv (ED, EB) + (FM, FG)$$
$$\equiv (AD, AB) + (MM, MG)$$
$$\equiv (AD, MG) \equiv 0 (\text{mod } \pi).$$

Do đó $ED // FG$ (3).

Từ (1), (2) và (3), theo định lí Thales, suy ra:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NG}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} \quad (4).$$

Vì CM, CN theo thứ tự tiếp xúc với (Q), (P), bốn điểm (M, C, K, N) cùng thuộc một đường tròn và $NC \equiv BC // DA; NK // DE$ nên

$$(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QF}) \equiv 2(MM, MF) \equiv 2(MC, MF)$$
$$\equiv 2(MC, MK) \equiv 2(NC, NK) \equiv (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PK}) (\text{mod } 2\pi);$$
$$(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PK}) \equiv 2(NN, NK) \equiv 2(NC, NK)$$
$$\equiv 2(DA, DE) \equiv (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RE}) (\text{mod } 2\pi).$$

Kết hợp với $\frac{QM}{QF} = \frac{PN}{PK} = \frac{RA}{RE} (= 1)$,

suy ra các tam giác QMF, PNK, RAE đồng dạng cùng hướng (5). Từ (4) và (5), theo bổ đề trên, suy ra P, Q, R thẳng hàng. Nói cách khác, PQ luôn qua một điểm cố định (điểm R).

Nhận xét. 1) Bài toán này thừa hai giả thiết: $\widehat{BAD}$ nhọn; M thuộc đoạn CD.

2) Chỉ có bốn bạn tham gia giải, ngoài bạn *Vũ Trung Bồn* còn có các bạn sau: **Hà Nội:** *Nguyễn Tiến Cường*, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội và *Nguyễn Anh Tuấn*, THPT chuyên Chu Văn An; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước*, 12T1, THPT chuyên Quốc Học Huế. Đặc biệt có bạn *Nguyễn Phúc Thịnh*, 12 trường Cambrian Academy, San Jose đang sống tại Mỹ cũng gửi bài về tham dự.

2) Các bạn *Tiến Cường* và *Anh Tuấn* đã có ý thức trong việc khắc phục tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ, mặc dù chưa hoàn chỉnh.

3) Bạn *Duy Phước* cho một lời giải khá hay bằng cách sử dụng bổ đề ERIQ.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/516. *Một con lắc lò xo dao động động điều hòa theo phương thẳng đứng với tần số góc* 10 rad/s. *Lấy mốc thế năng ở vị trí cân bằng của vật. Biết rằng khi động năng và thế năng bằng nhau thì độ lớn của lực đàn hồi và tốc độ của vật lần lượt là* 1,5 N *và* $25\sqrt{2}$ cm. *Biết độ cứng của lò xo* $k < 20$ N/m *và* $g = 10$ m/s^2. *Xác định độ lớn cực đại của lực đàn hồi.*

Lời giải. Ta có: $\omega = \sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}} \Rightarrow \Delta l = 0{,}1$ m.

Khi $W_đ = W_t$, ta có: $W = 2W_t$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 2\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra lực đàn hồi

$$F = k|x \pm \Delta l| = k\left|\frac{A\sqrt{2}}{2} \pm 0{,}1\right| = 1{,}5 \ (1),$$

và $\quad v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 0{,}25\sqrt{2} \ (2).$

Từ (2) $\Rightarrow 0{,}25\sqrt{2}v = \sqrt{A^2 - \dfrac{A^2}{2}} = \dfrac{10A}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow A =$ 0,05 m, thay A vào (1) ta có:

$$\left|\frac{0{,}05}{\sqrt{2}} \pm 0{,}1\right| = 1{,}5 \Rightarrow k = \frac{1{,}5}{\left|\dfrac{0{,}05}{\sqrt{2}} \pm 0{,}1\right|}$$

$$k = \frac{1{,}5}{\left|\dfrac{0{,}05}{\sqrt{2}} + 0{,}1\right|} = 11{,}08 \text{ N/m}; \ k = \frac{1{,}5}{\left|\dfrac{0{,}05}{\sqrt{2}} - 0{,}1\right|} < 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy $F_{max} = k|x \pm \Delta l| = 11{,}08.|0{,}05 + 0{,}1| = 1{,}66$ N.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long, **Bạc Liêu**; *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, **Đồng Tháp**; *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**; *Trần Kim Phụng*, lớp 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều, **Cần Thơ**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/516. *Một máy biến áp có số vòng dây cuộn thứ cấp gấp 3 lần cuộn sơ cấp. Khi đặt vào hai đầu cuộn sơ cấp một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U thì điện áp hiệu dụng ở đầu cuộn thứ cấp để hở là 2,5U. Khi kiểm tra thì phát hiện có một số vòng dây cuộn thứ cấp bị quấn ngược chiều so với đa số các vòng dây của nó. Biết số vòng dây cuộn sơ cấp là 500 vòng. Tính số vòng dây quấn ngược của cuộn thứ cấp.*

Lời giải. Gọi N_1, N_2 lần lượt là số vòng dây dự định ban đầu của cuộn sơ cấp và thứ cấp: $N_2 = 3N_1$. n là số vòng dây quấn ngược của cuộn thứ cấp; n vòng dây quấn ngược sẽ có tác dụng như $2n$ vòng dây bị quấn thiếu. Do đó khi kiểm tra ta có: $\dfrac{N_2 - 2n}{N_1} = \dfrac{2{,}5U}{U} = 2{,}5$ hay $\dfrac{3.500 - 2n}{500} = 2{,}5.$

Suy ra $n = 125$ vòng

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; ***Hưng Yên:*** *Đặng Duy Hậu, Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Cần Thơ:** *Trần Thị Kim Phụng*, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hùng, Ninh Kiều; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông.

NGUYỄN XUÂN QUANG

KHAI THÁC ƯỚC SỐ LẺ VÀ ƯỚC SỐ LẺ LỚN NHẤT CỦA SỐ TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN THỜI
(GV THPT chuyên Lê Thánh Tông, Quảng Nam)

I. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

Nhận xét. Mọi số nguyên dương đều có ước số lẻ. Trong bài viết này khai thác một số tính chất của ước số lẻ của số nguyên dương.

Khái niệm. Mọi số nguyên dương n đều có ước số lẻ, trong các ước lẻ đó luôn tồn tại ước số lẻ lớn nhất ta ký hiệu là $L(n)$.

Ta có thể biểu diễn một số nguyên dương n bất kỳ dưới dạng sau: $n = 2^k.\ell$ với $k \in \mathbb{N}$ và ℓ là ước số lẻ lớn nhất. Khi đó $L(n) = \ell$.

Nhận xét.

- Mọi số nguyên dương n luôn tồn tại $L(n)$, và $1 \le L(n) \le n$.
- $L(n) | n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Một số tính chất của ước lẻ:

- $L(2n) = L(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $L(2n+1) = 2n+1$
- Mọi ước số lẻ của n đều là ước của $L(n)$.
- $L(n)$ là một hàm trên tập $\mathbb{N}^*$, hàm $L(n)$ có tính chất nhân tính: $L(a.b) = L(a).L(b), \forall a;b \in \mathbb{N}^*$.

Ta có một số hệ quả sau:

- Nếu có $L(n) = n$ thì n là số lẻ
- Khi p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì $L(p) = p$. Đặc biệt $L(p) = 1 \Leftrightarrow p = 2$.
- Với mọi số tự nhiên n thì $n.L(n)$ là số chính phương hoặc bằng 2 lần của số chính phương. (Vì $n = 2^k.\ell$, nếu k chẵn thì $n.L(n) = 2^k.\ell^2 = a^2$, nếu k lẻ thì $n.L(n) = 2.(2^{k-1}\ell^2) = 2a^2$).
- $L(2^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Trong tập các số tự nhiên từ 2 đến 2018 ta chọn 1010 số bất kỳ và lập nên tập con $M = \{a_1; a_2; \ldots; a_{1010}\}$. Chứng minh trong M luôn tìm được 2 số sao cho số này chia hết cho số kia.*

Lời giải. Với các số của tập M ta luôn biểu diễn được $a_i = 2^{k_i}.b_i$ $(i = \overline{1;1010})$, b_i là ước số lẻ lớn nhất của số a_i và $1 \le b_i \le 2017$ $(k_i \in \mathbb{N})$. Do đó có 1010 ước số lẻ lớn nhất của các phần tử tập M. Mà từ 1 đến 2017 có 1009 số lẻ, nên theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau, chẳng hạn $b_k = b_l$. Giả sử $a_k > a_l$. khi đó a_k chia hết cho a_l.

Thí dụ 2. *Một số tự nhiên n có số các ước số gấp 3 lần số lượng ước số lẻ của nó. Chứng minh tích $n.L(n)$ là số chính phương, với $L(n)$ là ước số lẻ lớn nhất của n.*

Lời giải. Ta có phân tích chuẩn của số tự nhiên $n = 2^m.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1;k}$ với p_i là các số nguyên tố lẻ. Như vậy ước số lẻ lớn nhất của n là $L(n) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$.

Số lượng các ước số lẻ của n là

$$\tau(L(n)) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1)....(\alpha_k + 1).$$

Ta có số các ước số của n là

$$\tau(n) = \tau(2^m).\tau(L(n)) = (m+1)\tau(L(n))$$

(hàm $\tau(n)$ nhân tính). Mà theo giả thiết $\tau(n) = 3.\tau(L(n))$ nên suy ra $m = 2$.

Do đó

$n.L(n) = 2^2.p_1^{2\alpha_1}.p_2^{2\alpha_2}...p_k^{2\alpha_k} = \left(2.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}\right)^2$

là số chính phương.

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng* $p = n^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), *biết p có không nhiều hơn 19 chữ số.*

Lời giải. Đặt $n = 2^k.\ell$ ($k \in \mathbb{N}, \ell$ lẻ) $\Rightarrow$ $p = n^{2^k\ell} + 1 = \left(n^{2^k}\right)^\ell + 1 \vdots (n^{2^k} + 1)$.

Do $p \in P$ nên $\ell = 1$. Suy ra $n = 2^k$.

Nếu $k = 0$ thì $n = 1$, $p = 2$ thỏa mãn.

Nếu $k \geq 1$ lại tiếp tục đặt $k = 2^t.a$ ($t \in \mathbb{N}$, a lẻ), khi đó $p = \left(2^{2^t a}\right)^n + 1 = \left(2^{2^t n}\right)^a + 1 \vdots 2^{2^t n} + 1$. Do $p \in P$ nên $a = 1$, khi đó $k = 2^t$, $n = 2^{2^t}$, $t \in \mathbb{N}$.

- Với $t = 0 \Rightarrow n = 2, p = 5$.
- Với $t = 1 \Rightarrow n = 4, p = 4^4 + 1 = 257$ là số nguyên tố.
- Với $t \geq 2 \Rightarrow n \geq 16$

$\Rightarrow p \geq 16^{16} + 1 = 2^{64} + 1 = 16.\ 1024^6 + 1 > 16.10^{18}$, suy ra p có nhiều hơn 19 chữ số. Vậy $p = 2; 5; 257$.

Nhận xét. Bài này khai thác tính phân tích thành tích của nhị thức $a^n + b^n$ khi n lẻ và $a^n + b^n \vdots (a + b)$ nên $p = a^n + b^n = \left(a^{2^k}\right)^\ell + \left(b^{2^k}\right)^\ell$, để p là số nguyên tố thì $\ell = 1$. Thí dụ sau đây cũng có tính chất như vậy.

Thí dụ 4. *Cho n là số nguyên dương sao cho* $3^n - 1$ *chia hết cho* 2^{2020}. *Chứng minh* $n \geq 2^{2018}$.

Lời giải. Ta biểu diễn $n = 2^k.\ell$ ($k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}$, ℓ là số nguyên lẻ). Khi đó:

$$3^n - 1 = 3^{2^k.\ell} - 1^\ell$$
$$= \left(3^{2^k} - 1\right)\left(3^{2^k(\ell-1)} + 3^{2^k(\ell-2)} + ... + 3^{2^k} + 1\right) \text{ (1).}$$

Ta có 3^x là số lẻ với mọi $x \in \mathbb{N}^*$ và $3^{2^k(\ell-1)} + 3^{2^k(\ell-2)} + ... + 3^{2^k} + 1$ có một số lẻ số hạng nên $3^{2^k(\ell-1)} + 3^{2^k(\ell-2)} + ... + 3^{2^k} + 1$ là số lẻ.

Từ (1) suy ra ($3^n - 1$) chia hết cho 2^{2020} khi và chỉ khi $(3^{2^k} - 1) \vdots 2^{2020}$ (2).

Ta cũng có hằng đẳng thức:

$$3^{2^k} - 1 = \left(3^{2^{k-1}}\right)^2 - 1 = \left(3^{2^{k-1}} + 1\right)\left(3^{2^{k-1}} - 1\right)$$
$$= \left(3^{2^{k-1}} + 1\right)\left(3^{2^{k-2}} + 1\right)...\left(3^2 + 1\right)\left(3^2 - 1\right).$$

Chú ý mỗi thừa số $\left(3^{2^{k-i}} + 1\right)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (với $i = \overline{1; k-1}$). Ngoài ra $3^2 - 1 = 8 = 2^3$. Do vậy:

$$\left(3^{2^k} - 1\right) \vdots 2^{k+2} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\left(3^{2^k} - 1\right) \vdots 2^{2020}$

$$\Leftrightarrow k + 2 \geq 2020 \Leftrightarrow k \geq 2018 \quad (4).$$

Do $n = 2^k.\ell$, ℓ lẻ nên $n \geq 2^k$. Vì thế từ (4) suy ra:

$\left(3^n - 1\right)$ chia hết cho 2^{2020} $\Leftrightarrow n \geq 2^{2018}$ (đpcm)

Chú ý: *Bài này dùng cấp hoặc dùng bổ đề LTE cũng cho lời giải gọn. (Do khuôn khổ bài viết nên không bổ sung cách dùng cấp hoặc dùng ước đúng).*

Thí dụ 5. (Czech – Slovak 2013) *Gọi L(n) là ký hiệu ước số lẻ lớn nhất của n. Hãy tính tổng sau:*

$$S = L(1) + L(2) + L(3) + ... + L(2^{2013}).$$

Lời giải. Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ ta có $L(2k) = L(k)$ và $L(2k - 1) = 2k - 1$. Ta gọi:

$$S(n) = L(1) + L(2) + L(3) + ... + L(2^n).$$

Theo tính chất nêu trên, ta có:

$$S(n) = \left[L(2) + L(4) + ... + L(2^n)\right]$$
$$+ \left[L(1) + L(3) + ... + L(2^n - 1)\right]$$
$$= \left[L(1) + L(2) + ... + L(2^{n-1})\right] + \left[1 + 3 + ... + (2^n - 1)\right]$$
$$= S(n-1) + \frac{(1 + 2^n - 1)2^{n-1}}{2} = S(n-1) + 4^{n-1}.$$

Ta được công thức truy hồi:

$$S(n)=S(n-1)+4^{n-1}$$

đúng với mọi số nguyên dương n.

Áp dụng công thức truy hồi trên ta có;

$$S(n)=S(n-1)+4^{n-1}$$

$$S(n-1)=S(n-2)+4^{n-2}$$

$$S(n-2)=S(n-3)+4^{n-3}$$

.....

$$S(2)=S(1)+4^{1}$$

$$S(1)=2.$$

Cộng n đẳng thức trên ta được:

$$S(n)=2+4+4^2+4^3+...+4^{n-1}$$

$$=2+\frac{4^n-4}{3}=\frac{4^n+2}{3}.$$

Do đó theo đề bài ta tính được:

$$S(2013)=\frac{4^{2013}+2}{3}.$$

Thí dụ 6. (IMO Shorlist 2014). *Cho trước số nguyên dương $n>1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số hạng của dãy $(a_k)_{k\geq 1}$ là lẻ, trong đó $a_k=\left[\frac{n^k}{k}\right]$.*

Lời giải . Nếu n lẻ, ta cần chọn k sao cho $\frac{n^k}{k}$ là số nguyên lẻ, do đó đặt $k=n^m$ với $m=1,2,...$ thì $a_k=n^{n^m-m}$ là số lẻ với mọi m (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Ta xét n chẵn, đặt $n=2t$ với $t\geq 1$. Ta có $\left[\frac{n^k}{k}\right]=a\in\mathbb{N}^*$ mà luôn có $k=2^m.\ell$ (ℓ là ước số lẻ lớn nhất của k) nên ta phải chọn số α đủ nhỏ để $\frac{n^k-\alpha}{2^m.\ell}=a\in\mathbb{N}^*$. Như vậy ta cần chọn ℓ là ước số nguyên tố lẻ lớn nhất của $n^k-\alpha$ và chọn $\alpha=2^m$.

Khi đó với mỗi $m\geq 2$,

$$n^k-2^m=(2t)^k-2^m=2^m\left(2^{k-m}.t^k-1\right).$$

Do $k-m=2^m.\ell-m>1$, nên $2^{k-m}-1$ có ước số nguyên tố, gọi p là ước nguyên tố lớn nhất. Ta đặt $k=p.2^m$. Ta có n^k-2^m có ước nguyên tố p nên $n^k\equiv 2^m \pmod p$.

Mặt khác từ $n^k-2^m<n^k<n^k+2^m(p-1)$, suy ra: $\frac{n^k-2^m}{p.2^m}<\frac{n^k}{k}<\frac{n^k+2^m(p-1)}{p.2^m}$.

Do đó $a_k=\left[\frac{n^k}{k}\right]=\frac{n^k-2^m}{p.2^m}=\frac{\frac{n^k}{2^m}-1}{p}$.

Vì $\frac{n^k}{2^m}=\frac{(2t)^{p.2^m}}{2^m}$ là số chẵn nên $\frac{n^k}{2^m}-1$ là một số nguyên lẻ nên a_k lẻ, bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 7. (Trích một phần đề thi Serbia- 2012) *Gọi $f(n)$ là số các số $m\leq n$ mà tổng tất cả các ước số của m là số lẻ (tức là $\sigma(m)$ lẻ). Xác định $f(n)$.*

Lời giải. Giả sử $m=2^k.t$ với k là số tự nhiên, t là ước số lẻ lớn nhất của m.

Ta có: $\sigma(m)=\sigma(2^k.t)=\sigma(2^k).\sigma(t)$ (do hàm tổng tất cả các ước $\sigma(m)$ nhân tính) nên

$$\sigma(m)=(1+2+2^2+...+2^k)\sigma(t)$$

$$=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}.\sigma(t)=\left(2^{k+1}-1\right).\sigma(t).$$

Ta có $2^{k+1}-1$ là số lẻ, mà $\sigma(m)$ lẻ nên cần chứng minh $\sigma(t)$ lẻ tức là chứng minh t là số chính phương.

Gọi tất cả các ước không lớn hơn $\sqrt{t}$ là các số lẻ: $1=d_1<d_2<...<d_x$. Khi đó tất cả các ước không nhỏ hơn $\sqrt{t}$ là các số lẻ: $t=\frac{t}{d_1}>\frac{t}{d_2}>...>\frac{t}{d_x}$.

Nếu $d_x \neq \frac{t}{d_x}$ thì số t không chính phương có $2x$ ước số nên $\sigma(t) \vdots 2$, suy ra $\sigma(m)$ chẵn, không thỏa mãn.

Nên $d_x = \frac{t}{d_x}$ khi đó t là số chính phương suy ra $\sigma(t)$ lẻ do đó $\sigma(m)$ lẻ.

Bây giờ số $m = 2^k.t$ có 2 dạng: $m = 2^k.t = a^2$ nếu k chẵn, hoặc $m = 2^k.t = 2a^2$ nếu k lẻ.

Như vậy các số m mà $\sigma(m)$ lẻ có dạng a^2 hoặc $2a^2$. Số các số dạng a^2 hoặc $2a^2$ không vượt quá n là $f(n) = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

Bài 8. (Czech – Slovak– 25/3/2014) *Cho số tự nhiên n, ký hiệu tất cả các ước số của n là $d_1; d_2; \ldots; d_k$ giả sử $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (với $d_1 = 1; d_k = n$). Hãy xác định tất cả các giá trị của n thỏa mãn hai điều kiện sau: $d_5 - d_3 = 50$ và $11d_5 + 8d_7 = 3n$.*

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

• Nếu n lẻ: thì n là ước số lẻ lớn nhất của n, khi đó tất cả các ước $d_i\ (i = \overline{1;k})$ đều lẻ. Từ $11d_5 + 8d_7 = 3n$ suy ra $d_7 | 11d_5$ và $d_5 | 8d_7$ và do các d_i lẻ nên $d_5 | d_7$. Từ giả thiết $d_7 > d_5$ và quan hệ $d_5 | d_7 | 11d_5$ suy ra $d_7 = 11d_5$.

Từ $11d_5 + 8d_7 = 3n$ ta được $99d_5 = 3n$ hay $33d_5 = n$, suy ra 1;3;11;33 đều là ước của n và các ước này nhỏ hơn 50.

Từ ước thứ 5 là d_5 thỏa mãn $d_5 = d_3 + 50 > 50$.

Như vậy ta xác định:

$d_1 = 1; d_2 = 3; d_3 = 11; d_4 = 33$

và $d_5 = d_3 + 50 = 61$ và ta có:

$n = 33d_5 = 33.61 = 2013$. Số 2013 thỏa mãn điều kiện: $d_7 = 11d_5 = 11.61$

• Nếu n chẵn: từ đẳng thức $11d_5 + 8d_7 = 3n \Rightarrow 2 | d_5$ và $2 | d_5 - 50$ suy ra $2 | d_3$.

Từ $d_1 = 1; d_2 = 2$ và $d_3 \neq 3$ nên $d_3 = 4$ hoặc $d_3 = 2t\ (t > 2)$. Nếu $d_3 = 2t$ suy ra t là ước của n, với $d_2 < t < d_3$, không phù hợp.

Do đó $d_3 = 4$; $d_5 = d_3 + 50 = 54$ chia hết cho 3 nên $3 | d_5$ mà $d_5 | n \Rightarrow 3 | n \Rightarrow d_2 < 3 < d_3$ không xác định, nên n chẵn loại. Kết luận $n = 2013$.

Bài 9. (Putnam 1969) *Cho số nguyên dương n sao cho n + 1 chia hết cho 24. Chứng minh rằng tổng của tất cả các ước của n cũng chia hết cho 24.*

Lời giải. Từ giả thiết $24 | n+1$, suy ra n là số lẻ và n cũng là ước số lẻ lớn nhất của n. Gọi d là ước số của n suy ra d lẻ. Do n không chia hết cho 3 và không chia hết cho 8 nên suy ra $d \equiv 1;2 \pmod 3$ và $d \equiv 1,3,5;7 \pmod 8$.

Ta có n không thể là số chính phương, vì nếu không thì $n+1 = (a^2+1) \vdots 24 \Rightarrow (a^2+1) \vdots 3$, vô lý!

Ta thấy ứng với ước số lẻ d của n thì cũng có ước số lẻ là $\frac{n}{d}$ và ta có $d.\frac{n}{d} = n$ nên để có $24 | (n+1)$ thì ta phải có tích $d.\frac{n}{d} \equiv 2 \pmod 3$ và $d.\frac{n}{d} \equiv 7 \pmod 8$, điều đó chỉ có thể xảy ra khi:

• $d \equiv 1 \pmod 3, \frac{n}{d} \equiv 2 \pmod 3$ hoặc ngược lại.

• $d \equiv 1 \pmod 8, \frac{n}{d} \equiv 7 \pmod 8$ hoặc ngược lại.

• $d \equiv 3 \pmod 8, \frac{n}{d} \equiv 5 \pmod 8$ hoặc ngược lại.

Trong tất cả các trường hợp ta luôn có $d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod 3$ và $d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod 8$, từ đó $24 | d + \frac{n}{d}$ với $d \neq \frac{n}{d}$, không ước nào được sử

dụng hai lần trong các cặp. Suy ra $24 \mid \sum_{d \mid n} d = \sigma(n)$. Chứng tỏ tổng của tất cả các ước của n cũng chia hết cho 24.

Bài 10. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương* (m,n) *thỏa mãn* $\begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases}$.

Lời giải.

• Nếu $m=1 \Rightarrow \begin{cases} n \mid 2^0+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases} \Rightarrow n \mid 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array}\right.$.

• Nếu $n=1 \Rightarrow \begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^0+1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

• Nếu $m>1, n>1$ ta có:

$$\begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases} \text{ suy ra } m, n \text{ lẻ.}$$

Giả sử $m-1=2^a.x\ (a \in \mathbb{N}^*)$ và $n-1=2^b.y$ $(b \in \mathbb{N}^*)$ với x; y là các ước số lẻ lớn nhất của $m-1$ và $n-1$.

Gọi p là ước nguyên tố lẻ bất kỳ của n $\Rightarrow p \mid 2^{m-1}+1 \Rightarrow p \mid (2^x)^{2^a}+1$ (1).

Suy ra $p \mid (2^x)^{2^{a+1}}-1 \Rightarrow (2^x)^{2^{a+1}} \equiv 1 \pmod p$.

Gọi $h = ord_p(2^x) \Rightarrow h \mid 2^{a+1} \Rightarrow h = 2^t\ (t \le a+1)$. Nếu $t \le a$ thì $2^t \mid 2^a \Rightarrow (2^x)^{2^a} \equiv 1 \pmod p$.

Suy ra $p \mid (2^x)^{2^a}-1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $p \mid 2$ mâu thuẫn với p lẻ. Do đó $t=a+1$ nên $h = 2^{a+1} \mid \varphi(p) \Rightarrow 2^{a+1} \mid (p-1)$ $\Rightarrow p \equiv 1 \pmod{2^{a+1}} \Rightarrow p = 2^{a+1}k+1$.

Như vậy mọi ước lẻ của n đều có dạng $2^{a+1}.k+1$. Do tích của các số có dạng $2^{a+1}.k+1$ cũng là số có dạng $2^{a+1}.k+1$ nên $n \equiv 1 \pmod{2^{a+1}}$.

Ta có: $n-1=2^{a+1}.y_1\ (y_1 \in \mathbb{N}^*)$ mà $n-1=2^b.y$ (y lẻ) $\Rightarrow b \ge a+1$ (3).

Gọi q là ước nguyên tố bất kỳ của m. Ta có:

$$q \mid 2^{n-1}+1 \Rightarrow q \mid (2^x)^{2^b}+1.$$

Tương tự trên ta cũng có: $q \equiv 1 \pmod{2^{b+1}}$

$\Rightarrow q = 2^{b+1}.t+1 \Rightarrow m = 2^{b+1}.x_1+1\ (x_1 \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow m-1 = 2^{b+1}.x_1\ (x_1 \in \mathbb{N}^*)$, mà $m-1=2^a.x$ (x lẻ) $\Rightarrow a \ge b+1$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra điều vô lý. Vậy không có $m>1, n>1$ thỏa mãn đề bài.

Kết luận: $m=1, n=1$; $m=1, n=2$; $m=2, n=1$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 17^n-1 chia hết cho 2^{2020}.

Bài 2. (*Đề đề nghị của tỉnh Hòa bình - 2014*) Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho tồn tại số tự nhiên $n>1$ mà a^n+1 chia hết cho n^2.

Bài 3. Tồn tại hay không các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn:

$$a_1 \mid 2^{a_2}-1; a_2 \mid 2^{a_3}-1; ...; a_{n-1} \mid 2^{a_n}-1; a_n \mid 2^{a_1}-1?$$

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của $a^{2^n}+1\ (a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p \equiv 1 \pmod{2^n}$, hay p có dạng $p = 2^{n+1}.k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 5. Cho n chẵn, $n>2$ và gọi p là một ước nguyên tố của $n-1$. Chứng minh p^{i+1} là ước của $n^{p^i}-1$ với mọi $i=0,1,...$

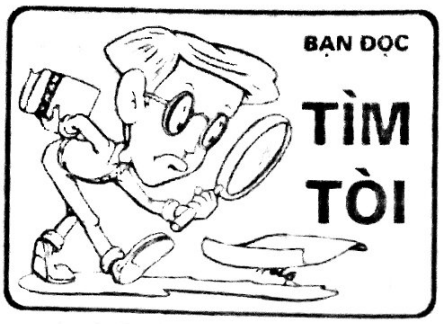
Bài 6. Chứng minh nếu n là số nguyên dương có k ước nguyên tố lẻ phân biệt thì $\varphi(n) \vdots 2^k$.

Bài 7. a) Chứng minh rằng với mọi n lẻ, $n>1$ thì $(2^n+2) \not\vdots\, n$.

b) Chứng minh rằng có vô số số n chẵn để $(2^n+2) \vdots\, n$.

Bài 8. Cho k là số nguyên dương, p là số nguyên tố thỏa mãn $p \mid 2^{2^k}+1$. Chứng minh rằng $(p-1) \vdots\, 2^{k+1}$.

Bài 9. (*Bungari MO 2006*). Cho p là số nguyên tố với $p^2 \mid 2^{p-1}-1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì số $(p-1)(p!+2^n)$ có ít nhất ba ước số nguyên tố phân biệt.

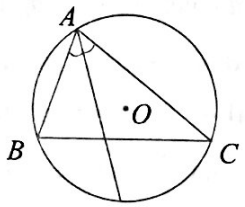


PHÉP NGHỊCH ĐẢO ĐỐI XỨNG

LÊ ANH DŨNG
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Phép nghịch đảo đối xứng là hợp thành của phép nghịch đảo và phép đối xứng. Nó là một công cụ mạnh để giải quyết các bài toán về đường tròn, đặc biệt có yếu tố phân giác hoặc đối xứng qua phân giác. Thông thường ta xét phép nghịch đảo đối xứng ω *sau:* thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ rồi sau đó đối xứng qua đường thẳng d là phân giác trong góc A. Ta dễ dàng có các kết quả sau:

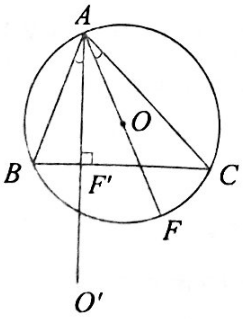
Qua phép nghịch đảo đối xứng ω *tâm A phương tích AB.AC:*



i) *Ảnh của B là C, ảnh của C là B;*

ii) *Ảnh của BC là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Do tính chất của các đường thẳng chứa đường cao đỉnh A và đường kính AF đối xứng nhau qua đường phân giác đỉnh A nên:



iii) *Ảnh của F là F'.*

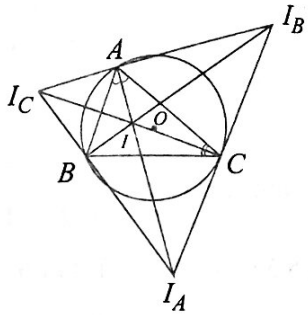
iv) *Ảnh của O là O' đối xứng với A qua BC.*

Gọi I, I_A, I_B, I_C *lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC. Do hai tam giác* AIB, ACI_A *đồng dạng; hai tam giác* AI_CB *và* ACI_B *đồng dạng nên*

$$AI.AI_A = AB.AC;\ AI_C.AI_B = AB.AC.\ \textit{Vậy:}$$

v) *Ảnh của I là* I_A.

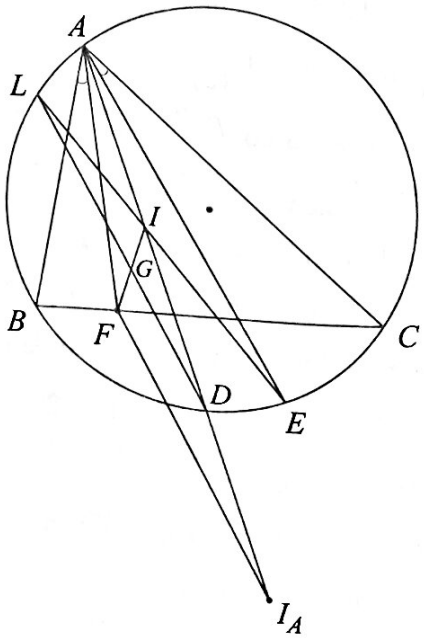
vi) *Ảnh của* I_B *là* I_C.



Ta phân tích các bài toán sau

Bài toán 1. (IMO 2010) *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và (O) là đường tròn ngoại tiếp. AI cắt (O) tại điểm thứ hai D. Gọi E là điểm trên cung* $\widehat{BDC}$, *F là điểm trên đoạn BC, sao cho* $\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. *Gọi G là trung điểm của IF, chứng minh rằng giao điểm của 2 đường thẳng EI và DG nằm trên (O).*

Lời giải.



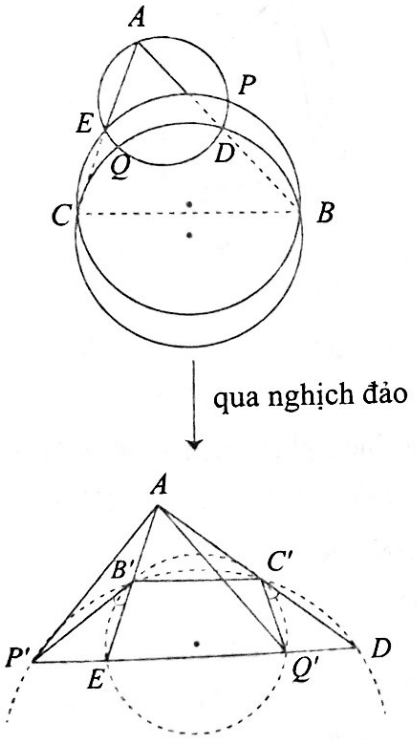
Xét phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$, sau đó đối xứng qua đường phân giác trong góc A.

Gọi I_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, L là giao điểm của EI và DG. Ta đã biết D là trung điểm của II_A suy ra $GD // FI_A$. I_A là ảnh của I; E là ảnh của F qua phép biến hình ω. Suy ra, $\widehat{IDG} = \widehat{AI_AF} = \widehat{AEI}$.

Từ đó A, E, D, L cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 2. (Đức TST 2015) *Cho tam giác nhọn ABC, $AB > AC$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE tại điểm thứ hai P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.*

Lời giải.



Xét phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AE.AD$, rồi sau đó lấy đối xứng qua đường phân giác trong góc A. Kí hiệu X' là ảnh của X qua phép này.

Qua phép này ta được: ảnh của E là D; ảnh của D là E; ảnh của B là điểm B' là trung điểm của AE (do $AB = 2AD$ và E là ảnh của D); ảnh của C là điểm C' là trung điểm của AD (do $AC = 2AE$ và D là ảnh của E).

Ảnh của (AED) là ED; ảnh của (BCD) là $(B'C'E)$; ảnh của (BCE) là $(B'C'D)$. Do đó, P' là giao điểm thứ hai của $(B'C'D)$ và ED; Q' là giao điểm thứ hai của $(B'C'E)$ và ED. Ta chỉ cần chứng minh $AP' = AQ'$.

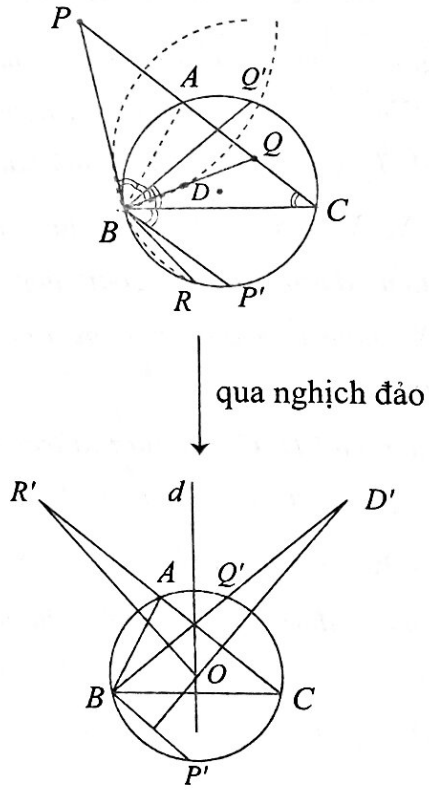
Do $B'C'DP'$; $B'C'Q'E$ là các hình thang nội tiếp đường tròn nên chúng là các hình thang cân. Do đó, $B'E = C'Q'$; $P'Q' = C'D$ và

$\widehat{P'B'E} = \widehat{Q'C'D}$ (do tính đối xứng qua trục).

Suy ra $\Delta P'B'A = \Delta AC'Q'$, do đó $AP' = AQ'$.

Bài toán 3. (IMO Shortlist 2013 G4) *Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Gọi P, Q là hai điểm khác nhau trên đường thẳng AC sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{QBA} = \widehat{ACB}$ và A nằm giữa P và C. Giả sử tồn tại một điểm D nằm trên đoạn QB sao cho $PD = PB$. Tia AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai R. Chứng minh rằng $QB = QR$.*

Lời giải. Xét phép biến hình ω sau: thực hiện phép nghịch đảo tâm B, phương tích $BA.BC$, sau đó đối xứng qua đường phân giác trong góc B. Kí hiệu X' nói chung là ảnh của X qua phép biến hình này.



Qua ω thì A biến thành C, C thành A và AC biến thành (ABC) nên P' thuộc (ABC); R' thuộc AC; D' thuộc BQ'.

Bài toán tương đương với bài toán: R là giao điểm của đường tròn tâm Q bán kính QB và đường tròn (ABC). Chứng minh, A, D, R thẳng hàng.

Ta có $\widehat{P'BC} = \widehat{PBA} = \widehat{ACB}$ nên $BP' // AC$. Suy ra, $ABP'C$ là hình thang cân.

$\widehat{Q'BC} = \widehat{QBA} = \widehat{ACB}$ nên $ABCQ'$ là hình thang cân.

+ D nằm trên đường tròn tâm P bán kính PB nên D' nằm trên trung trực của BP'. Suy ra, OD' là trung trực của AB.

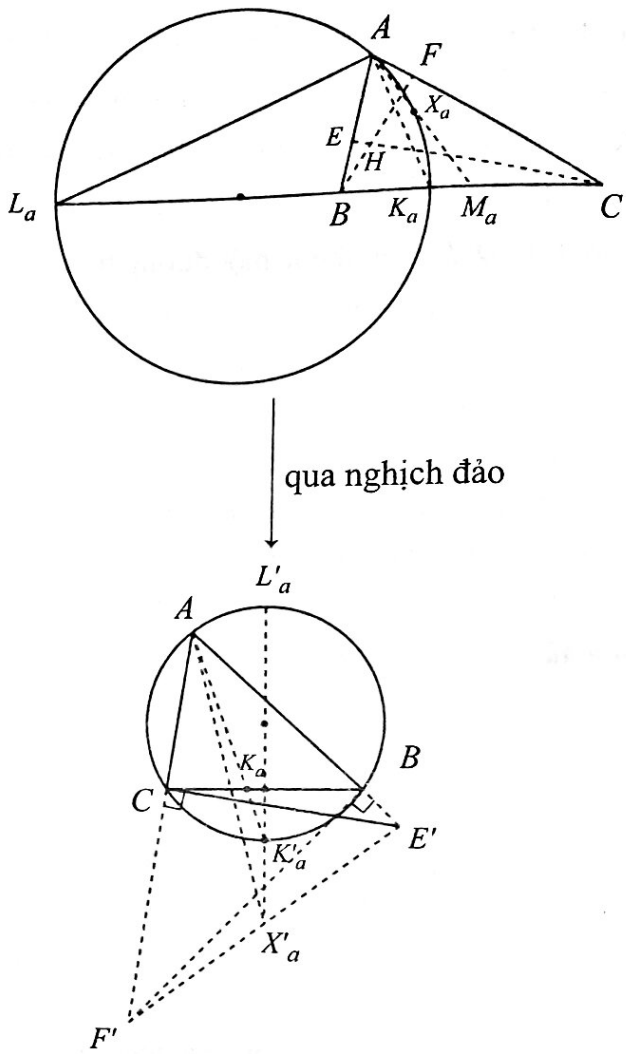
+ R nằm trên đường tròn tâm Q bán kính QB nên R' nằm trên trung trực của BQ'. Suy ra, OR' là trung trực của BQ'.

Do $AQ'CB$ nhận trung trực của BC làm trục đối xứng nên D', R' đối xứng nhau qua trung trực này. Suy ra, $BCD'R'$ là hình thang cân. Suy ra, $BCD'R'$ nội tiếp được. Do đó, A, D, R thẳng hàng.

Bài toán 4. (**TSTST 2015**) *Cho tam giác không đều ABC. Gọi K_a, L_a, M_a lần lượt là chân đường phân giác trong, phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ và trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AK_aL_a cắt AM_a tại điểm thứ hai X_a. Định nghĩa X_b, X_c một cách tương tự. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $X_aX_bX_c$ nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Phân tích. *Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm tam giác ABC, ta nhận thấy $\widehat{AX_aH} = 90^0$ hay $\widehat{HX_aG} = 90^0$. Tương tự cho X_b, X_c. Như vậy, nếu chứng minh được $\widehat{AX_aH} = 90^0$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $X_aX_bX_c$ là trung điểm của GH. Ta chứng minh X_a thuộc đường tròn đường kính AH. Tức là đường tròn (AEF) với E, F là chân đường cao đỉnh C, B của tam giác ABC.*

Lời giải.



Ta thực hiện phép biến hình T là hợp của phép nghịch đảo $N_A^{AB.AC}$, sau đó đối xứng qua đường thẳng AK_a. Kí hiệu X' là ảnh của X qua phép biến hình này.

Khi đó, qua T thì ảnh của B là C; ảnh của C là B; ảnh của $K_a \in BC$ là giao điểm của AK_a và đường tròn (ABC); ảnh của $L_a \in BC$ là điểm L'_a là giao của L_aA và đường tròn (ABC) cũng là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$.

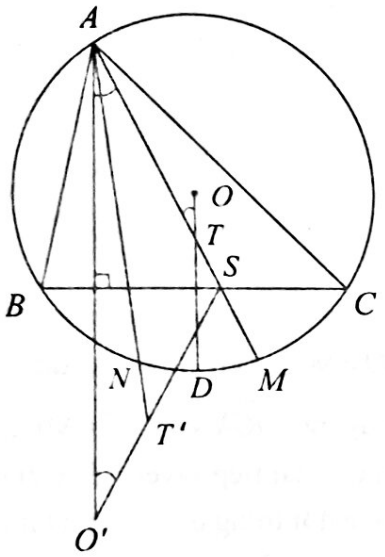
Ảnh của AM_a là đường đối trung d của AM_a, nên $X'_a = d \cap K'_aL'_a$.

F thuộc AC và $\widehat{AFB} = 90^0$ nên F' là điểm thuộc AC mà $\widehat{F'BA} = 90^0$; tương tự, E' là điểm thuộc AB mà $\widehat{E'CA} = 90^0$. Dễ chứng minh X'_a thuộc

$E'F'$ và X'_a là trung điểm của $E'F'$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 5. (VMO 2016 bài 6, ý a) *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung BC không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N (N khác A). Chứng minh rằng* $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Lời giải.



Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ tức là ta đi chứng minh AM biến thành AN qua phép biến hình ω sau: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ sau đó đối xứng qua AD. Kí hiệu K' nói chung là ảnh của K qua phép này.

ω thay đổi B, C và biến BC thành (ABC). O' là điểm đối xứng với A qua BC.

AM cắt BC tại S. Theo tính chất về góc qua phép nghịch đảo, ta có:

$$(O'A, O'T') = -(AT, OT) = -(AT, AO').$$

Suy ra $O'T'$ đi qua S. Vậy N là giao của (AOT) và (ABC) nên N' là giao của $O'T'$ và BC.

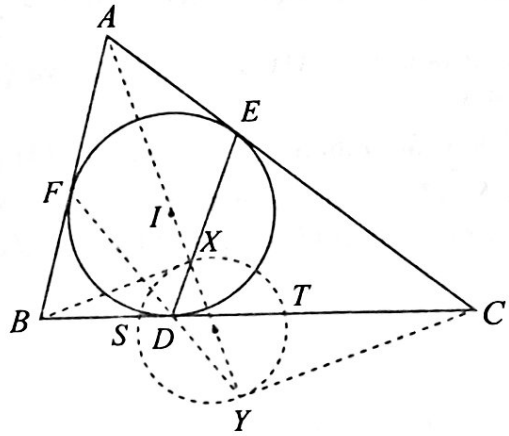
Suy ra: $N' \equiv S \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Bài toán 6. (ELMO 2016) *Cho tam giác ABC với $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt DE, DF lần lượt tại X, Y. Gọi S, T là các điểm khác nhau trên BC sao cho $\widehat{XSY} = \widehat{XTY} = 90^0$. Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác AST.*

a) *Chứng minh rằng ω tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

b) *Chứng minh rằng ω tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải.

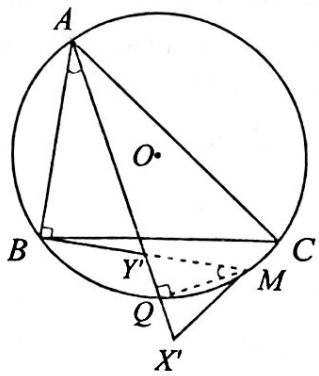


a) *Quan sát, ta thấy $CY, BX \perp AI$. Đây là cơ sở cho phép dựng ảnh qua phép nghịch đảo. Ta chứng minh điều này.*

Do $\widehat{FDX} = \frac{1}{2}\widehat{FIE} = \widehat{FIA}$ nên 4 điểm F, I, X, D nằm trên đường tròn. Từ đó 5 điểm F, I, X, D, B nằm trên đường tròn đường kính BI. Suy ra $BX \perp AI$, tương tự $CY \perp AI$.

Ta thực hiện phép biến hình f là hợp của phép nghịch đảo $N_A^{AB.AC}$, sau đó đối xứng qua đường thẳng AI. Kí hiệu K' là ảnh của K qua phép biến hình này.

Khi đó, qua f thì ảnh của B là C; ảnh của C là B.



X thuộc AI và $\widehat{AXB} = 90^0$ nên X' thuộc AI và $\widehat{X'CA} = 90^0$. Tương tự thì Y' thuộc AI và $\widehat{Y'BA} = 90^0$.

S', T' là giao điểm của đường tròn đường kính $X'Y'$ và (ABC). Để chứng minh ω tiếp xúc với (ABC) ta chỉ cần chứng minh $BC // S'T'$.

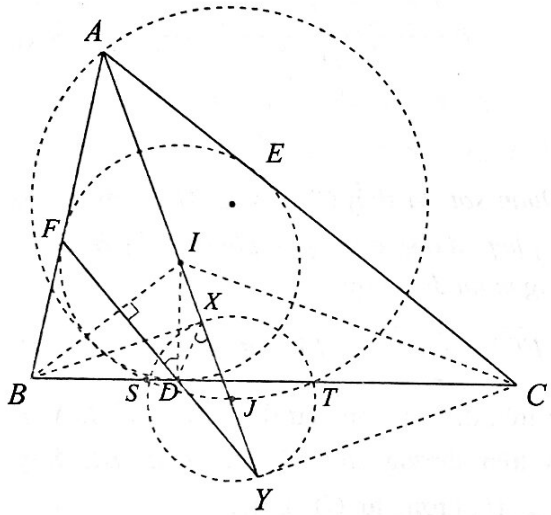
Để chứng minh điều này, ta chứng minh trung điểm của X'Y' là điểm chính giữa cung BC (vì khi đó ST ⊥ OQ).

Gọi $M = BY' \cap CX'$, Q là giao điểm thứ hai của AI và (ABC). Dễ thấy AM là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{AQM} = 90^0$,

$\widehat{BMX'} = \widehat{BAC}$; $\widehat{Y'MQ} = \widehat{BAQ} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{Y'MX'}$.

Suy ra tam giác $MX'Y'$ cân tại M và Q là trung điểm $X'Y'$.

b) Theo câu *a* thì $S'T' // BC$ do đó AI là phân giác của $\widehat{S'AT'}$, cũng là phân giác của góc $\widehat{SAT}$. Suy ra đường tròn (SAT) đi qua trung điểm J của XY.

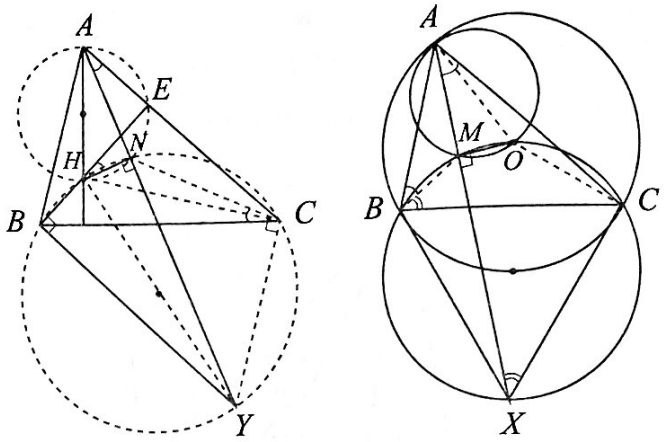


Xét phép nghịch đảo $N_J^{JT^2}$, ảnh của (SAT) là ST.

Mà ST tiếp xúc với (I) nên ta chỉ cần chứng minh qua phép nghịch đảo này thì (I) giữ nguyên. Điều này tương đương với việc chứng minh (I) trực giao với XY hay chứng minh $IX.IY = r^2 = ID^2$. Ta chỉ cần chỉ ra hai tam giác IXD, IDY đồng dạng. Điều này là rõ ràng vì 5 điểm B, F, I, X, D cùng thuộc đường tròn đường kính BI.

Bài toán 7. (ELMO 2014) *Cho tam giác nhọn ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là O, trực tâm là H. Gọi ω_1, ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC, BHC. Giả sử đường tròn đường kính AO cắt ω_1 tại điểm thứ hai M, đường thẳng AM cắt ω_1 tại điểm thứ hai X. Tương tự, đường tròn đường kính AH cắt ω_2 tại điểm thứ hai N, đường thẳng AN cắt ω_2 tại điểm thứ hai Y. Chứng minh MN // XY.*

Phân tích. *Chứng minh MN // XY, ta có thể dùng hợp của hai phép nghịch đảo tâm A và phép đối xứng qua đường phân giác góc A (biến M thành Y và N thành X). Ta tìm hiểu cấu trúc của M, X; các đường tròn qua M để tìm ảnh của M.*



Lời giải.

Do $\widehat{AMO} = 90^0$ nên MX là đường kính của (OBC). Suy ra $\widehat{OCX} = \widehat{OBX} = 90^0$, do đó X là giao điểm của hai tiếp tuyến với (O) tại B, C. Vậy AX là đường đối trung đỉnh A của tam giác ABC.

Theo giả thiết $\widehat{HNY} = 90^0$ nên HY là đường kính của (BHC). Do đó $HC \perp CY$, suy ra $AB//CY$.

Tương tự, $BY//AC$. Vậy $ABYC$ là hình bình hành và do đó AY là đường trung tuyến của tam giác ABC. Mà do AX là đường đối trung nên AX và AY đối xứng nhau qua đường phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Đang cần chứng minh M biến thành Y, mà Y là giao của hai đường thẳng CY // AB và BY // AC nên M là giao điểm của hai đường tròn tiếp (AMB) tiếp xúc AC; (ACM) tiếp xúc AB và C biến thành B. Điều này cho ta biết phép biến hình và phải chứng minh (ABM) tiếp xúc AC; (ACM) tiếp xúc AB. Lập luận tương tự, ta cũng phải chứng minh (ANC) tiếp xúc với BC và (ANB) tiếp xúc với BC.

Ta có: $\widehat{MBA} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = \widehat{ABC} - \widehat{MXC}$

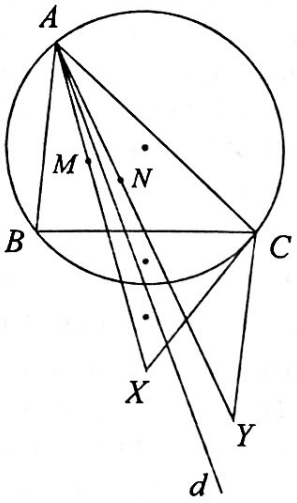
$= \widehat{ABC} - \left(180^0 - \widehat{MAC} - 90^0 - \widehat{OCA}\right)$

$= \widehat{MAC} + \widehat{ABC} + \widehat{OCA} - 90^0 = \widehat{MAC}$.

Vậy (ABM) tiếp xúc với AC.

Tương tự đường tròn (AMC) tiếp xúc với AB.

Ta có $\widehat{NAC} = \widehat{NHE} = \widehat{NCB}$ (do $AHNE$, $BHNC$ nội tiếp). Vậy (ANC) tiếp xúc với BC. Tương tự (ANB) tiếp xúc với BC.



Xét phép biến hình φ: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ sau đó đối xứng qua đường phân giác d. Qua φ: B biến thành C, (ABM) tiếp xúc với AC biến thành đường thẳng qua C và song song với AB; (ACM) tiếp xúc với AB biến thành đường thẳng qua B và song song với AC. Do đó M biến thành Y.

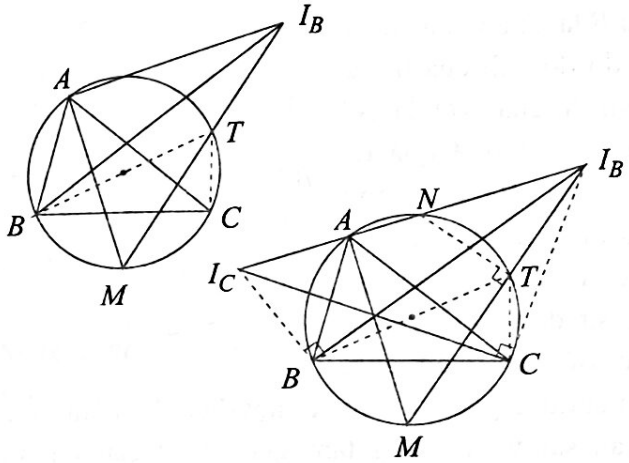
Qua φ: BC biến thành (ABC); (ANC) tiếp xúc với BC biến thành đường thẳng qua B và tiếp xúc với (ABC); (ANB) tiếp xúc với BC biến thành đường thẳng qua C và tiếp xúc với (ABC). Suy ra N biến thành X.

Vậy qua φ, thì M biến thành X, N biến thành Y nên $AM.AY = AN.AX$ hay $\dfrac{AM}{AX} = \dfrac{AN}{AY}$.

Suy ra $NM // XY$.

Bài toán 8. (Iran TST 2015 ngày 1) *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I_B, M lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B, điểm chính giữa cung BC của (O) (không chứa A). Đường thẳng MI_B cắt (O) tại điểm thứ hai T khác M. Chứng minh rằng $TB.TC = I_BT^2$.*

Phân tích. *TM là phân giác góc $\widehat{BTC}$, do đó chứng minh $TB.TC = I_BT^2$ tương đương chứng minh I_B biến thành chính nó qua phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm T, phương tích $TB.TC$ sau đó đối xứng qua phân giác góc $\widehat{BTC}$. Tức là chứng minh đường tròn (BCI_B) cố định qua phép biến hình ω.*



Lời giải. Ta xét cấu trúc của đường tròn (BCI_B). Như đã biết thì B, C, I_B, I_C nằm trên đường tròn đường kính I_CI_B tâm N là điểm chính giữa cung BC chứa A.

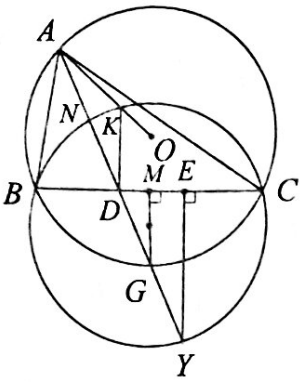
Qua ω thì B, C thay đổi cho nhau, đường thẳng TN biến thành chính nó; đường tròn tâm N đi qua B, C biến thành đường tròn tâm thuộc TN và đi qua B, C. Đường tròn này cũng có tâm N. Vậy đường tròn (BCI_B) cố định qua ω. Suy ra $TB.TC = I_BT^2$.

Bài toán 9. (IMO Shortlist 2012 G4) *Cho tam giác ABC có $AB \neq AC$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là O. Đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm M của BC. Đường thẳng qua D vuông góc BC cắt AO tại X; đường thẳng qua E và vuông góc BC cắt AD tại Y. Chứng minh rằng tứ giác $BXCY$ nội tiếp.*

Phân tích. *Đường tròn (BCX) cắt đoạn AD tại N, ta cần chứng minh Y thuộc $(BNXC)$ hay chứng minh $DN.DY = DB.DC = DA.DG$* (G là giao điểm của AD với (O), $G \neq A$).

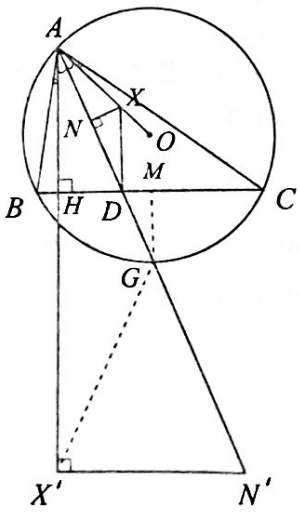
Mà $DG = \frac{1}{2}DY$ (do MG // EY) nên ta chứng minh $AN = \frac{1}{2}AD$. Vậy ta sẽ chứng minh: trung điểm N của AD, B, C, X cùng thuộc đường tròn. Xét phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích AB.AC sau đó đối xứng qua AD là phù hợp. Kí hiệu K' là ảnh của K qua phép này.

Lời giải. Qua ω, ảnh của *B* là *C*; ảnh của *D* là *G*, do đó ảnh của trung điểm *N* của *AD* là *N'* đối xứng với *A* qua *G*. Ảnh của *AO* là đường cao đỉnh *A*. Ảnh của *X* là điểm nào? Ta không thể sử dụng *XD* vuông góc *BC* để dựng ảnh, nên ta dùng góc với tâm và một điểm biết ảnh rồi. Quan sát thì rõ ràng tam giác *AXD* cân tại *X*: $\widehat{XDA} = \widehat{HAD}$ (so le trong) $= \widehat{DAX}$ (do *AO, AH* đối xứng nhau qua phân giác góc *A*). Do đó $\widehat{ANX} = 90^0$, suy ra $\widehat{AX'N'} = 90^0$.



Cấu trúc của BX'N'C bây giờ là hình thang, để chứng minh nó nội tiếp ta chỉ cần chứng minh nó cân.

Do tam giác *GX'N'* cân tại *G* (do *G* là trung điểm *AN'*) nên *MG* là trung trực của *X'N'* và *BC*. Vậy *BX'N'C* là hình thang cân nên nó nội tiếp được.



Sau đây là một số bài tập tự luyện

Bài 1. (*USA TST 2016*) Cho tam giác *ABC* không đều, nội tiếp đường tròn (*O*). Đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với *BC* tại *D*. Đường phân giác trong góc *A* cắt *BC* và (*O*) lần lượt tại *E, F*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEF* cắt đường tròn bàng tiếp góc *A* lần lượt tại S_1, S_2 và cắt (*O*) tại *T* khác *F*. Chứng minh rằng *AT* đi qua S_1 hoặc S_2.

Bài 2 (*IMO Shortlist 2014 G7*) Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*T*) và ngoại tiếp đường tròn tâm *I*. Một đường thẳng qua *I* và vuông góc với *CI* cắt đoạn *BC* và cung *BC* (không chứa *A*) của (*T*) lần lượt tại *U, V*. Đường thẳng qua *U* và song song với *AI* cắt *AV* tại *X*, và đường thẳng qua *V* và song song với *AI* cắt *AB* tại *Y*. Gọi *W, Z* lần lượt là trung điểm của *AX, BC*. Chứng minh rằng nếu *I, X, Y* thẳng hàng thì *I, W* và *Z* cũng thẳng hàng.

Bài 3. (*Iran 2014 vòng 2*) Điểm *D* di động trên cạnh *BC* của tam giác *ABC*. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *ABC, ABD, ACD*. Gọi *M, N* (khác *A*) lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác (*ABC*) và các đường tròn ngoại tiếp tam giác IAI_1, IAI_2. Chứng minh rằng, khi *D* thay đổi thì *MN* luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (*TST Việt Nam 2016*) Cho tam giác nhọn *ABC* có $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} < \widehat{ACB} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Lấy *D* thuộc cạnh *BC* sao cho $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Trên phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ và trên tia *AC* lần lượt lấy các điểm *K* và *M* sao cho $KB = KD = KM$, trên phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ và trên tia *AB* lần lượt lấy các điểm *L* và *N* sao cho $LC = LD = LN$. Đường tròn đi qua *M, N* và trung điểm *I* của *BC* cắt *BC* tại $P(P \neq I)$. Chứng minh rằng *BM, CN, AP* đồng quy.

Bài 5. (*TST Việt Nam 2016 bài 3, ý a*) Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*) có *B, C* cố định, *A* chuyển động trên cung *BC* của (*O*). Các phân giác *AD, BE, CF* giao nhau tại *I*. Đường tròn qua *D* tiếp xúc với *OA* tại *A* cắt (*O*) tại *G*. *GE, GF* giao (*O*) lần thứ hai tại *M, N*. *BM* cắt *CN* tại *H*. Chứng minh *AH* luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. (*USA MO 2016*) Cho tam giác nhọn *ABC*. Gọi I_B, I_C, O lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc *B, C* và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Gọi *E, Y* lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong đỉnh *B* của tam giác *ABC*. Gọi *F, X* lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong đỉnh *C* của tam giác *ABC*. Đường thẳng I_BF cắt đường thẳng I_CE tại *P*. Chứng minh $OP \perp XY$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 61

Problem. *We toss a fair die repeatedly until we get number 3. The number of throws taken is denoted by X which is a random variable. Compute $P(X < 10)$.*

Solution. X can receive the values 1, 2, 3, 4, ...

We have

$P(X < 10) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 9)$.

And it is easy to see that:

$P(X = 1) = p = 1/6$;

$P(X = 2) = q.p$, with $q = 1 - p = 5/6$;

$P(X = 3) = q^2p$;

...

$P(X = 9) = q^8p$.

Hence $P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 9)$

$= p + qp + q^2p + \ldots + q^8p = p(1 + q + q^2 + \ldots q^8)$

$= p.\dfrac{1-q^9}{1-q} = 1 - q^9$.

Therefore $P(X < 10) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^9$.

TỪ VỰNG

die : *súc sắc*

random variable : *biến ngẫu nhiên*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 58

Bài toán. *Một chất điểm P chuyển động trên một đường thẳng, xuất phát từ một điểm O. Tại thời điểm t(s) sau khi rời khỏi điểm O, vận tốc v của P, đơn vị $m.s^{-1}$ được cho bởi công thức $v = 2t^2 - 5t + 2$. Tìm tổng khoảng cách mà chất điểm P di chuyển trong 2 (s) đầu tiên.*

Lời giải. Ta có $v = 2t^2 - 5t + 2 = (2t - 1)(t - 2)$, điều này có nghĩa là chất điểm đổi hướng tại thời điểm $t = 0,5$ (s) và $t = 2$(s). Từ đó tổng khoảng cách mà chất điểm P đi được trong 2 (s) đầu tiên là: $\left|\int_0^{0,5}(2t^2-5t+2)dt\right| + \left|\int_{0,5}^{2}(2t^2-5t+2)dt\right|$.

Nó bằng $\dfrac{11}{24} + \dfrac{9}{8} \approx 1,58$ (m).

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phan Thế Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**; *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Hằng Nga*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Trúc Quỳnh*, 11A2, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Trương Phan Minh Quân*, *Đào Thị Khánh Nhi*, 11 Toán 1, *Hoàng Bảo Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương. P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

PROBLEMS ..... (*Tiếp theo trang 21*)

Problem T10/520. The sequence (u_n) is determined as follows

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 4u_{n-1} + 3n^2 - 12n^3 + 12n - 4 \text{ với } n = 2,3,\ldots \end{cases}.$$

Show that for any odd prime number p, $2019\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ is always divisble by p.

Problem T11/520. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(f(x) - 2y) = 6x + f(f(y) + x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Problem T12/520. Given a triangle ABC and let (O) be its circumcircle. Let A_0, B_0, C_0 respectively be the midpoints of BC, CA, AB. Assume that A_1, B_1, C_1 respectively are the perpendicular projections of A, B, C on BC, CA, AB. Let (O_a) be the circle passing through B_0, C_0 and is internally tangent to (O) at A_2 which is different from A; (O_b) the circle passing through C_0, A_0 and is internally tangent to (O) at B_2 which is different from B; and (O_c) the circle passing through A_0, B_0 and is internally tangent to (O) at C_2 which is different from C. Let A_3 be the intersection between B_1C_1 and B_2C_2, and similarly we get the points B_3, C_3. Show that A_3, B_3, C_3 belong to a line which is perpendicular to the Euler line of the triangle ABC.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 41. *Giải phương trình*

$3\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x+1=0$ (1).

Lời giải. **Cách 1.** *Sử dụng công thức* $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ *đưa về phương trình có dạng bậc hai ẩn là* $\sin x$.

$$(1)\Leftrightarrow 3\sin^2 x+2\left(\sqrt{3}\cos x-1\right)\sin x-3\cos^2 x+2\sqrt{3}\cos x-1=0.$$

Ta có: $\Delta'=4\left(\sqrt{3}\cos x-1\right)^2$. Khi đó:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\sqrt{3}\cos x+1\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}\cos x-1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\ 3\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\end{array}\right..$$

Cách 2. *Sử dụng công thức* $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ *đưa về phương trình có dạng bậc hai ẩn là* $\cos x$.

$$(1)\Leftrightarrow 3\cos^2 x-2\sqrt{3}\left(\sin x+1\right)\cos x-3\sin^2 x+2\sin x+1=0$$

Ta có: $\Delta'=12\sin^2 x$. Khi đó:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{-\sin x+1}{\sqrt{3}}\\ \cos x=\dfrac{3\sin x+1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\ 3\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

Cách 3. *Sử dụng công thức* $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ *đưa về phương trình có dạng* $A^2=B^2$.

$$(1)\Leftrightarrow \sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x+2\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)+1=4\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x+1\right)^2=4\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-\sqrt{3}\cos x+1=2\sin x\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x+1=-2\sin x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\ 3\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}-\arcsin\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

Cách 4. *Sử dụng:*

$$a\cos x-b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\alpha\right).$$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x\right)-2\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x+4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]^2=2-2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]^2=4\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\sin x \\ 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=-2\sin x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\sqrt{3}\cos x+1=2\sin x \\ \sin x-\sqrt{3}\cos x+1=-2\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \\ 3\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}-\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)+k2\pi \end{array}\right..$$

Cách 5. *Đưa về phương trình bậc bốn ẩn* $t=\tan\frac{x}{2}$.

TH1. Xét $\cos\frac{x}{2}=0$ không thỏa mãn PT.

TH2. Xét $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, đặt $t=\tan\frac{x}{2}$. PT đã cho trở thành

$$\left(4+2\sqrt{3}\right)t^4+\left(4\sqrt{3}+4\right)t^3-16t^2+\left(4-4\sqrt{3}\right)t+4-2\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)t^2+\left(3+3\sqrt{3}\right)t-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2+\sqrt{3} \\ t_{1,2}=\frac{-3-3\sqrt{3}\pm\sqrt{44+22\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=2\arctan t_{1,2}+k2\pi \end{array}\right.$$

Cách 6. *Sử dụng công thức* $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ *và phương trình hệ quả.*

$$\Leftrightarrow 3-6\sin^2 x+2\sin x+1=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(3\sin x+2)=\sqrt{3}\cos x(\sin x+1)\ (*)$$

$$\overset{bp}{\Rightarrow}(1-\sin x)^2(3\sin x+2)^2=3\left(1-\sin^2 x\right)(\sin x+1)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sin x=0 \\ 12\sin^3 x+12\sin^2 x+\sin x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=-\frac{1}{2} \\ 6\sin^2 x+3\sin x-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=-\frac{1}{2} \\ \sin x=\frac{-3-\sqrt{33}}{12} \\ \sin x=\frac{-3+\sqrt{33}}{12} \end{array}\right.$$

Thử lại:

- Với $\sin x=1$ thay vào $(*)$ ta được $\cos x=0$. Vậy $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.
- Với $\sin x=-\frac{1}{2}$ thay vào $(*)$ ta được $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$.
- Với $\sin x=\frac{-3+\sqrt{33}}{12}$ thay vào $(*)$ ta được $\cos x=\frac{3\sqrt{11}+\sqrt{3}}{12}$. Vậy $x=\alpha+k2\pi$ với $\sin\alpha=\frac{-3+\sqrt{33}}{12}$ và $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{11}+\sqrt{3}}{12}$.
- Với $\sin x=\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$ thay vào $(*)$ ta được $\cos x=\frac{-3\sqrt{11}+\sqrt{3}}{12}$. Vậy $x=\beta+k2\pi$ với $\sin\beta=\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$ và $\cos\beta=\frac{-3\sqrt{11}+\sqrt{3}}{12}$.

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG
(GV THPT Giao Thủy, Nam Định)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải của bạn *Trần Đức Phương*, người giới thiệu bài toán, Tòa soạn Tạp chí không nhận được lời giải nào của các bạn gửi về.

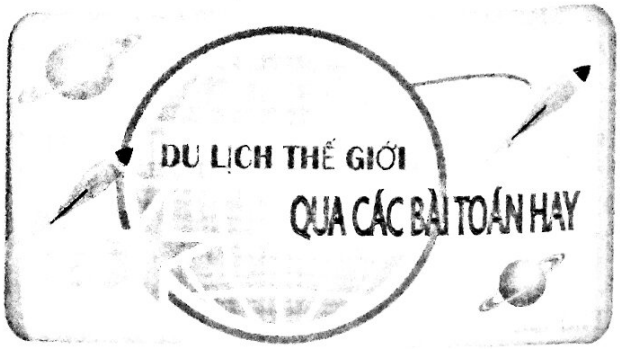
LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 43 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.11.2020.

BÀI TOÁN 43. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn* $x^2-xy+y^2=3$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=x^2+y^2$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP. Hồ Chí Minh).

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)



BÀI 49. *Cho m, n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của* $5^m + 7^m$ *và* $5^n + 7^n$.

Lời giải. (Theo bạn *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội** và bạn *Hoàng Ngọc Bảo*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**)

Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$, ta có:

$$5^m + 7^m = (5^n + 7^n)(5^{m-n} + 7^{m-n}) - 5^n 7^{m-n} - 5^{m-n} 7^n.$$

TH1: $m < 2n$. Ta có:

$$5^m + 7^m = (5^n + 7^n)(5^{m-n} + 7^{m-n}) - 5^{m-n} 7^{m-n}(5^{2n-m} + 7^{2n-m}).$$

Theo thuật toán Euclid, ta có:

$$(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = (5^{m-n} 7^{m-n}(5^{2n-m} + 7^{2n-m}), 5^n + 7^n) = (5^{2n-m} + 7^{2n-m}, 5^n + 7^n)$$

(vì $(5^{m-n} 7^{m-n}, 5^n + 7^n) = 1$).

TH2: $m > 2n$. Ta có:

$$5^m + 7^m = (5^n + 7^n)(5^{m-n} + 7^{m-n}) - 5^n 7^n (5^{m-2n} + 7^{m-2n}).$$

Tương tự như trên, theo thuật toán Euclid, ta có:

$$(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = (5^{2n-m} + 7^{2n-m}, 5^n + 7^n).$$

Đặt $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = a_{m,n}$. Khi đó:

- Nếu $m < 2n$ thì $a_{m,n} = a_{n,2n-m}$.

- Nếu $m > 2n$ thì $a_{m,n} = a_{n,m-2n}$.

Giả sử $m = 12, n = 5 \Rightarrow m + n = 17$ lẻ và ta có:

$$a_{12,5} \to a_{5,2} \to a_{2,1} \to a_{1,0}.$$

Tổng quát, nếu $m + n$ lẻ thì

$$a_{m,n} = a_{0,1} = (5^0 + 7^0, 5^1 + 7^1) = 2.$$

Giả sử $m = 13, n = 5 \Rightarrow m + n = 18$ chẵn, ta có:

$$a_{13,5} \to a_{5,3} \to a_{3,1} \to a_{1,1}.$$

Tổng quát, nếu $m + n$ chẵn thì

$$a_{m,n} = a_{1,1} = (5^1 + 7^1, 5^1 + 7^1) = 12.$$

Kết luận: $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } m+n \text{ chẵn} \\ 12 & \text{nếu } m+n \text{ lẻ} \end{cases}$.

Nhận xét. Ngoài lời giải của bạn *Thắng* và bạn *Bảo* ở trên, bạn *Phan Trung Kiên*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu** cũng đưa ra một lời giải đúng nhưng lập luận có khác với cách giải trên.

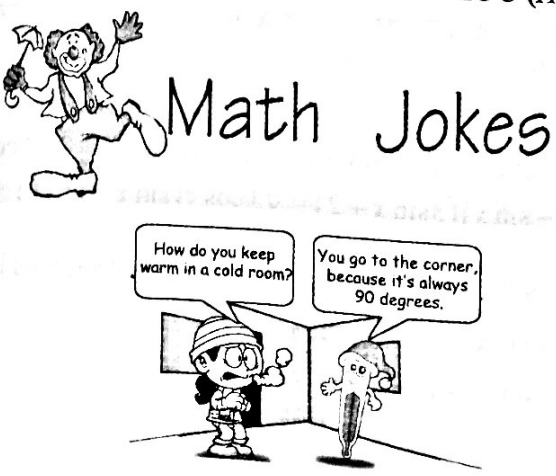
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

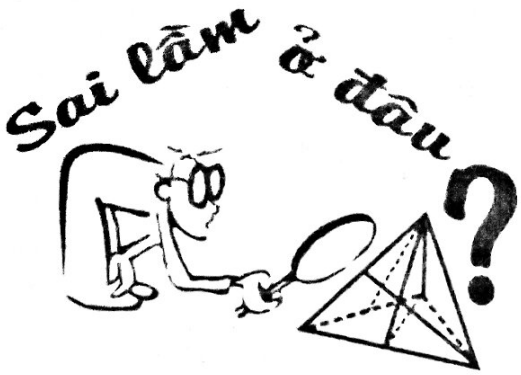
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 30.11.2020

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 51. *Bốn chữ số cuối của một số chính phương bằng nhau. Chứng minh tất cả các chữ số đó bằng 0.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)





GIẢI ĐÁP: THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY!

(Đề đăng trên TH&TT số 516, tháng 6 năm 2020)

Phân tích sai lầm. Ta có công thức tính thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $x = g(y)$, trục Ox, hai đường thẳng $y = c, y = d$ $(c < d)$ quanh trục Oy là

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy.$$

Bạn Như Hà đã quên mất rằng $x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1) \geq 0$. Nên khi tính tích phân ta chỉ lấy cận dưới là $y = 1$ và cận trên là $y = 2$ chứ không phải lấy tích phân từ 0 đến 2 vì không tồn tại tích phân $\int_0^1 (y^3 - y^2)\,dy$.

Lời giải đúng. Ta có:

$$y^3 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^3 - y^2.$$

Giải phương trình tung độ giao điểm giữa (C) với trục tung: $y^3 - y^2 = 0$ dễ dàng tìm được hai giao điểm là $y = 0$ và $y = 1$. Nhưng vì

$$x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y \geq 1 \end{array}\right.$$

nên thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức: $V = \pi\int_1^2 (y^3 - y^2)dy = \pi\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{17}{12}\pi.$

Nhận xét. Chỉ có bạn *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội** phát hiện được sai lầm và cho lời giải đúng.

KIHIVI

THEO CÁCH DẠY CỦA THẦY MÀ !

Kiểm tra 1 tiết ở lớp Toán, về phần ứng dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có câu hỏi sau:

Đề: *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

Giải. Miền xác định của hàm số: $D = [-2; 2]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
y'						$+$	0	$-$	
Y					2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của y là $2\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2}$,

giá trị nhỏ nhất của y là 2 khi $x = 0, x = 2$.

Hơn nửa lớp đã giải như vậy, Thầy nói không đúng. Các em phản ứng lại: *Giải như Thầy dạy mà Thầy?*

Vậy các bạn cho biết lời giải trên sai đúng ở chỗ nào nhé!

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 520 (10.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀNH TRÌNH "CÙNG ĐÓN EM VÀO LỚP 1" - MANG NIỀM VUI ĐẾN VỚI HỌC SINH VÙNG KHÓ

Từ nhiều năm nay, việc thực hiện công tác xã hội, từ thiện, chung tay hỗ trợ các trường học không chỉ là nghĩa vụ, trách nhiệm xã hội, mà còn là nguyện vọng của toàn thể cán bộ công nhân viên Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) và đã trở thành hoạt động truyền thống của đơn vị. Năm 2019, NXBGDVN đã thực hiện chương trình '*25.000 bộ sách giáo khoa tiếp bước học sinh có hoàn cảnh khó khăn đến trường*' với mục đích trao tặng những bộ SGK đến tay học sinh là con gia đình thương binh - liệt sĩ, học sinh có hoàn cảnh đặc biệt khó khăn.

Ông Nguyễn Đức Thái, Chủ tịch Hội đồng thành viên NXB Giáo dục Việt Nam tặng quà cho học sinh tại Y Tý – Lào Cai trong lễ khai giảng năm học 2020 – 2021. Ảnh: Bạch Kim

Năm 2020, để góp phần đảm bảo cho các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn có đủ SGK khi bước vào năm học mới, NXBGDVN đã triển khai chương trình tặng SGK với tiêu đề **Cùng đón em vào lớp 1**. Chương trình triển khai ở các địa bàn có điều kiện kinh tế khó khăn thuộc các vùng miền trên cả nước như: Miền Bắc, Trung, Nam và Đồng bằng sông Cửu Long. Tổng số gần 20.000 cuốn SGK và đồ dùng học tập, trị giá trên 500 triệu đồng. Đồng hành với chương trình **Cùng đón em vào lớp 1** của NXB Giáo dục Việt Nam có sự hỗ trợ tích cực, chung tay của các Sở GD&ĐT địa phương, cùng rất nhiều các thầy cô giáo để tinh thần nhân văn tiếp tục được lan toả trong cộng đồng.

Tổng Giám đốc Hoàng Lê Bách trao tặng 223 bộ SGK lớp 1 cho học sinh huyện Mèo Vạc, tỉnh Hà Giang. Ảnh: Công Duy

Từ cuối tháng 8, nhiều đoàn công tác do lãnh đạo NXBGDVN làm trưởng đoàn đã đến các vùng ở miền núi xa xôi, những nơi điều kiện kinh tế còn khó khăn để trao tặng SGK, đồ dùng học tập cho các em học sinh. Chủ tịch Hội đồng thành viên Nguyễn Đức Thái trao tặng quà cho học sinh tại Lào Cai; Tổng Giám đốc Hoàng Lê Bách đến trao tặng SGK, đồ dùng học tập cho học sinh tại hai tỉnh Nghệ An và Hà Giang; Phó Tổng Giám đốc Lê Hoàng Hải cùng đoàn công tác của NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh đến trao quà cho học sinh ở vùng cao nguyên Lâm Đồng, Đắk Lắk; Phó Tổng Giám đốc Nguyễn Chí Bính cùng đoàn công tác của NXB Giáo dục tại Cần Thơ đến trao tặng quà cho học sinh tại Hậu Giang và Cần Thơ...

Chúng tôi sẽ nhớ lắm những ánh mắt nhút nhát của em nhỏ vùng cao, nhớ những con đường quanh co nhưng đầy nắng ở Mèo Vạc hay Xín Mần (Hà Giang), sẽ nhớ cảm giác được đi xe trên đỉnh đèo mây tràn vào buổi sáng ở Kỳ Sơn (Nghệ An), Y Tý (Lào Cai), nhớ bầu trời xanh ngắt và nắng gió ở Đắk Lắk... Trên mỗi cung đường chúng tôi đi qua ấy còn vương lại biết bao tình cảm ấm áp, nụ cười hạnh phúc của các em nhỏ tại những ngôi trường mà chúng tôi đã đến. Nếu như cuốn sách giáo khoa hay cuốn vở trắng tinh có thể mang đến cho các em học sinh thêm hy vọng và tự tin vào cuộc sống, thì cán bộ, công nhân viên NXBGDVN nguyện đồng hành cùng các em trên những con đường màu xanh ấy.

Tác giả: **Hiền Thương**

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT10M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng