



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

**7** 2020  
Số 517

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

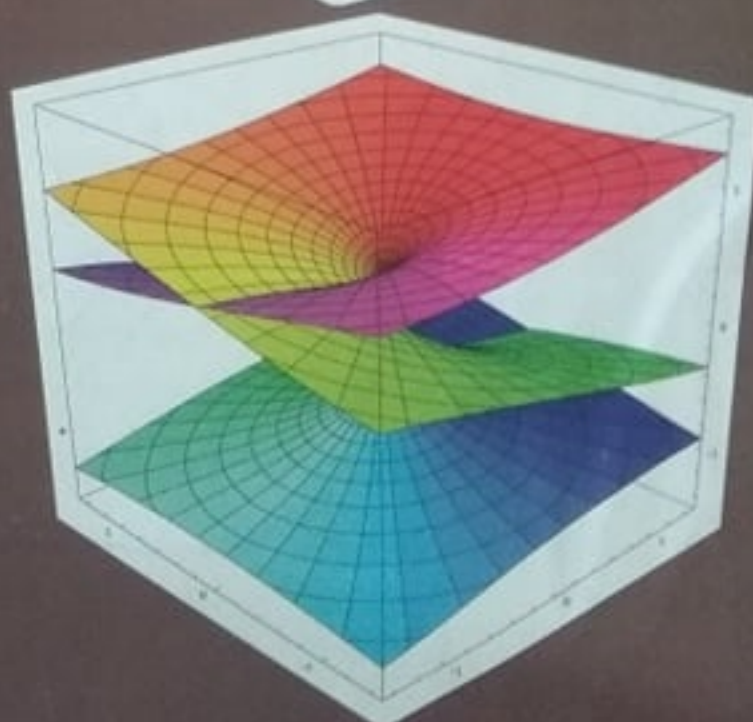
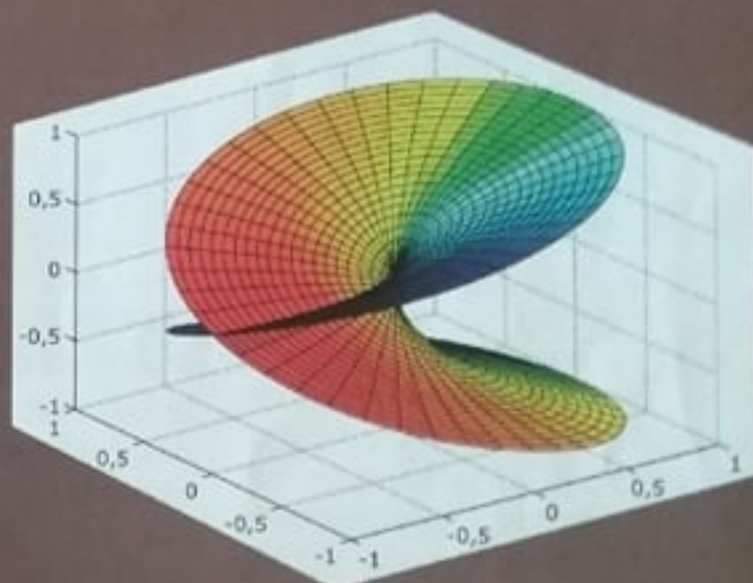
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Nhà toán học Bernhard Riemann (1826-1866)





## TRUNG HỌC CƠ SỞ

# CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU CHỈNH HỆ SỐ

BÙI VĂN NGỌC

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn)

Trong chứng minh bất đẳng thức (BĐT), ta thường gặp trường hợp ở đó các biến có vai trò như nhau hoặc BĐT không thay đổi nếu ta hoán vị vòng quanh các biến và đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Bài viết này giới thiệu một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh các BĐT loại đó thông qua một số bài toán sau.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d$  là các số dương thỏa mãn:

$a+b+c+d=4$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2 \quad (1).$$

**Phân tích.** Dấu "=" xảy ra ở (1) khi  $a=b=c=d=1$ . Ta sẽ tìm 2 số  $m, n$  sao cho:

$$\frac{1}{x^2+1} \geq mx+n \text{ với } x>0. \quad (2)$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi  $x=1$ , cho nên

$$m+n=\frac{1}{2} \Leftrightarrow n=\frac{1}{2}-m. \text{ Khi đó:}$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 \geq (mx + \frac{1}{2} - m)(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2mx^3 + (1-2m)x^2 + 2mx - 2m - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[2mx^2 + x + 2m + 1] \leq 0. \quad (3)$$

Để bất đẳng thức (3) đúng với  $x>0$  thì (3) phải có dạng:  $(x-1)^2(\alpha x + \beta) \leq 0$ , tức là

$2mx^2 + x + 2m + 1$  cần có thêm 1 nghiệm nữa là 1

$$\Rightarrow 2m+1+2m+1=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}, n=1.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2}x+1, \forall x>0. \quad (4)$$

$$\text{Thật vậy } (4) \Leftrightarrow 1 \geq \left(-\frac{1}{2}x+1\right)(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (-x+2)(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 x \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x>0).$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x=1$ .

Áp dụng bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{1}{a^2+1} \geq -\frac{1}{2}a+1; \quad \frac{1}{b^2+1} \geq -\frac{1}{2}b+1;$$

$$\frac{1}{c^2+1} \geq -\frac{1}{2}c+1; \quad \frac{1}{d^2+1} \geq -\frac{1}{2}d+1.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq -\frac{1}{2}(a+b+c+d)+4=2.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=c=d=1$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > \frac{1}{3}$  và  $a+b+c=3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a^2-3a+1} + \frac{1}{3b^2-3b+1} + \frac{1}{3c^2-3c+1} \geq 3 \quad (1).$$

**Phân tích.** Dấu "=" xảy ra ở (1) khi  $a=b=c=1$ . Ta sẽ tìm 2 số  $m, n$  sao cho:

$$\frac{1}{3x^2-3x+1} \geq mx+n \text{ với } x>\frac{1}{3}. \quad (2)$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi  $x=1$ . Cho nên  $m+n=1 \Leftrightarrow n=1-m$ . Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 1 \geq (mx+1-m)(3x^2-3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3mx^3 - (6m-3)x^2 + (4m-3)x - m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[3mx^2 + (3-3m)x + m] \leq 0. \quad (3)$$

Để bất đẳng thức (3) đúng với  $x > \frac{1}{3}$  thì (3) phải có dạng  $(x-1)^2(\alpha x + \beta) \leq 0$ , tức là  $3mx^2 + (3-3m)x + m$  cần có thêm 1 nghiệm nữa là 1  $\Rightarrow 3m+3-3m+m=0 \Rightarrow m=-3, n=4$ .

**Lời giải.** Ta chứng minh:

$$\frac{1}{3x^2-3x+1} \geq -3x+4, \forall x > \frac{1}{3} \quad (4)$$

Thật vậy (4)  $\Leftrightarrow 1 \geq (-3x+4)(3x^2-3x+1)$

$$\Leftrightarrow -9x^3 + 21x^2 - 15x + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-4x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x-1) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x > \frac{1}{3} \text{)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x=1$ .

Áp dụng bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{1}{3a^2-3a+1} \geq -3a+4; \quad \frac{1}{3b^2-3b+1} \geq -3b+4;$$

$$\frac{1}{3c^2-3c+1} \geq -3c+4.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{3a^2-3a+1} + \frac{1}{3b^2-3b+1} + \frac{1}{3c^2-3c+1} \geq -3(a+b+c)+12=3.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=c=1$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a+b+c=6$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq 1 \quad (1).$$

**Phân tích.** Dấu "=" xảy ra ở (1) khi  $a=b=c=2$ . Ta sẽ tìm 2 số  $m, n$  sao cho:

$$\frac{1}{x^2-x+1} \geq mx+n \text{ với } x > 0. \quad (2)$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi  $x=2$ . Cho nên

$$2m+n=\frac{1}{3} \Leftrightarrow n=\frac{1}{3}-2m. \text{ Khi đó:}$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 \geq (3mx+1-6m)(x^2-x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3mx^3 + (1-9m)x^2 + (9m-1)x - 6m - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3mx^2 + (1-3m)x + 1+3m) \leq 0 \quad (3).$$

Để bất đẳng thức (3) đúng với  $x > 0$  thì (3) phải có dạng  $(x-2)^2(\alpha x + \beta) \leq 0$ , tức là  $3mx^2 + (1-3m)x + 1+3m$  cần có thêm 1 nghiệm nữa là 2  $\Rightarrow 12m+2-6m+1+3m=0$

$$\Rightarrow m=-\frac{1}{3}, n=1.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh:

$$\frac{1}{x^2-x+1} \geq -\frac{1}{3}x+1, \forall x > 0. \quad (4)$$

Thật vậy: (4)  $\Leftrightarrow 3 \geq (-x+3)(x^2-x+1)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 x \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x > 0 \text{)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x=2$ .

Áp dụng bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{1}{a^2-a+1} \geq -\frac{1}{3}a+1; \quad \frac{1}{b^2-b+1} \geq -\frac{1}{3}b+1;$$

$$\frac{1}{c^2-c+1} \geq -\frac{1}{3}c+1.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq -\frac{1}{3}(a+b+c)+3=1.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=c=2$ .

**Bài 4.** Cho  $a, b, c > 2$  và  $a+b+c=9$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2-4a+5} + \frac{1}{b^2-4b+5} + \frac{1}{c^2-4c+5} \geq \frac{3}{2} \quad (1).$$

**Phân tích.** Dấu "=" xảy ra ở (1) khi  $a=b=c=3$ . Ta sẽ tìm 2 số  $m, n$  sao cho:

$$\frac{1}{x^2-4x+5} \geq mx+n \text{ với } x > 2. \quad (2)$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi  $x=3$ . Cho nên

$$3m+n=\frac{1}{2} \Leftrightarrow n=\frac{1}{2}-3m. \text{ Khi đó:}$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 \geq (mx+\frac{1}{2}-3m)(x^2-4x+5)$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (2mx+1-6m)(x^2-4x+5)$$

$$\Leftrightarrow 2mx^3 + (1-14m)x^2 + (34m-4)x - 30m + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)[2mx^2 + (1-8m)x + 10m-1] \leq 0 \quad (3).$$

Để bất đẳng thức (3) đúng với  $x > 2$  thì (3) phải có dạng  $(x-3)^2(\alpha x + \beta) \leq 0$ , tức là  $2mx^2 + (1-8m)x + 10m-1$  cần có thêm 1 nghiệm nữa là 3  $\Rightarrow 18m + 3 - 24m + 10m - 1 = 0$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}, n = 2.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 5} \geq -\frac{1}{2}x + 2, \forall x > 2. \quad (4)$$

Thật vậy: (4)  $\Leftrightarrow 2 \geq (4-x)(x^2 - 4x + 5)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 21x - 18 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x-2) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x > 2 \text{)},$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x=3$ .

Áp dụng bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{1}{a^2 - 4a + 5} \geq -\frac{1}{2}a + 2; \quad \frac{1}{b^2 - 4b + 5} \geq -\frac{1}{2}b + 2;$$

$$\frac{1}{c^2 - 4c + 5} \geq -\frac{1}{2}c + 2.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - 4a + 5} + \frac{1}{b^2 - 4b + 5} + \frac{1}{c^2 - 4c + 5} \\ \geq -\frac{1}{2}(a+b+c) + 6 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu = xảy ra khi  $a=b=c=2$ .

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 1$  và  $a+b+c=6$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 - a + 1} + \frac{b}{b^2 - b + 1} + \frac{c}{c^2 - c + 1} \geq 2 \quad (1).$$

**Phân tích.** Dấu "=" xảy ra ở (1) khi  $a=b=c=2$ . Ta sẽ tìm 2 số  $m, n$  sao cho:

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} \geq mx + n \text{ với } x > 1. \quad (2)$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi  $x=2$ . Cho nên

$$2m + n = \frac{2}{3} \Leftrightarrow n = \frac{2}{3} - 2m. \text{ Khi đó:}$$

$$(2) \Leftrightarrow x \geq (mx + \frac{2}{3} - 2m)(x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq (3mx + 2 - 6m)(x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3mx^3 + (2-9m)x^2 + (9m-5)x - 6m + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[3mx^2 + (2-3m)x + 3m-1] \leq 0$$

Để bất đẳng thức (3) đúng với  $x > 1$  thì (3) phải có dạng  $(x-2)^2(\alpha x + \beta) \leq 0$ , tức là  $3mx^2 + (2-3m)x + 3m-1$  cần có thêm 1 nghiệm nữa là 2  $\Rightarrow 12m + 4 - 6m + 3m - 1 = 0$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{3}, n = \frac{4}{3}.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh:

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} \geq \frac{4-x}{3}, \forall x > 1. \quad (4)$$

Thật vậy: (4)  $\Leftrightarrow 3x \geq (4-x)(x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-1) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x > 1 \text{)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x=2$ .

Áp dụng bất đẳng thức (4) ta có:

$$\frac{a}{a^2 - a + 1} \geq \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}; \quad \frac{b}{b^2 - b + 1} \geq \frac{1}{3}b + \frac{4}{3};$$

$$\frac{c}{c^2 - c + 1} \geq \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{a^2 - a + 1} + \frac{b}{b^2 - b + 1} + \frac{c}{c^2 - c + 1} \geq -\frac{1}{3}(a+b+c) + 4 = 2.$$

Dấu = xảy ra khi  $a=b=c=2$ .

## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > \frac{4}{3}$  và  $a+b+c=6$ . Chứng

minh rằng:  $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \geq \frac{6}{5}$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a+b+c=3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+1} + \frac{1}{2b^2+1} + \frac{1}{2c^2+1} \geq 1.$$

**Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a+b+c=3$ . Chứng

minh rằng:  $\frac{1}{3a^2+1} + \frac{1}{3b^2+1} + \frac{1}{3c^2+1} \geq \frac{3}{4}$ .



## TRUNG HỌC CƠ SỞ

# GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN THÔNG QUA MIỀN GIÁ TRỊ

PHAN TIẾN DŨNG

(GV THCS Phúc Đồng, Hương Khê, Hà Tĩnh)

Để giải phương trình nghiệm nguyên có rất nhiều phương pháp, tuy nhiên nếu biết tìm miền giá trị của các biến trong phương trình thì chúng ta sẽ giải được một số phương trình nghiệm nguyên một cách đơn giản.

**Bài toán 1.** Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \quad (1).$$

**Lời giải.** Ta có:  $\Delta_x = y^2 - 4y^2 = -3y^2$ .

Để tồn tại  $x$  thì  $\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 0$  (vì  $-3 < 0$ )  $\Leftrightarrow y = 0$ . Với  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Vậy nghiệm nguyên của phương trình là  $(x; y) = (0; 0)$ .

**Bài toán 2.** Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0 \quad (2).$$

**Lời giải.** Ta có:

$$\Delta'_x = y^2 - 3y^2 + 2 = 2 - 2y^2 = 2(1 - y^2).$$

Để tồn tại  $x$  thì  $\Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow 2(1 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1$ .

Vì  $y$  nguyên suy ra  $y \in \{-1; 0; 1\}$ .

- Với  $y = -1$  thì (2)  $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

- Với  $y = 0$  thì (2)  $\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2} \text{ (không thỏa mãn)}.$$

- Với  $y = 1$  thì (2)  $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(-1; -1); (1; 1)\}.$$

**Bài toán 3.** Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + (3-2y)x + 2y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (3)$$

**Lời giải.** Ta có:  $\Delta_x = (3-2y)^2 - 4(2y^2 - 3y + 2)$

$$= 9 - 12y + 4y^2 - 8y^2 + 12y - 8$$

$$= -4y^2 + 1.$$

Để tồn tại  $x$  thì  $\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow -4y^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Với  $y = 0$  thì (3)  $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(-1; 0); (-2; 0)\}.$$

**Bài toán 4.** Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + y - 2 = 0 \quad (4).$$

**Lời giải.** Ta có:  $x^2 + 2y^2 + 2xy + y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 2 = 0.$$

$$\Delta'_x = y^2 - (2y^2 + y - 2) = y^2 - 2y^2 - y + 2$$

$$= -y^2 - y + 2.$$

Để tồn tại  $x$  thì  $\Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow -y^2 - y + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} - \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1 \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

- Với  $y = -2$  thì (4)  $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Với  $y = -1$  thì (4)  $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{2} \\ x-1=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$$

- Với  $y = 0$  thì (4)  $\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2} \text{ (không thỏa mãn).}$$

- Với  $y = 1$  thì (4)  $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình (4) là

$$(x; y) \in \{(2; -2); (-1; 1)\}.$$

#### Bài toán 5. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 2 = 0 \quad (5).$$

Lời giải. Ta có:  $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x(3y-1) + 2y^2 - y + 2 = 0.$$

$$\Delta_x = (3y-1)^2 - 4(2y^2 - y + 2)$$

$$= 9y^2 - 6y + 1 - 8y^2 + 4y - 8 = y^2 - 2y - 7.$$

Để tồn tại  $x$  nguyên thì  $\Delta_x \geq 0$  và  $\Delta_x$  là số chính phương.

$$\text{Đặt } \Delta_x = y^2 - 2y - 7 = k^2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = k^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow (y+k-1)(y-k-1) = 8 \text{ (với } k \in \mathbb{N}).$$

Ta thấy  $y+k-1 \geq y-k-1$  nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} y+k-1=8 \\ y-k-1=1 \end{cases} \Rightarrow 2y=11 \Rightarrow y=\frac{11}{2} : \text{ loại.}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y+k-1=4 \\ y-k-1=2 \end{cases} \Rightarrow 2y=8 \Rightarrow y=4, \text{ ta có:}$$

$$(5) \Leftrightarrow x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ hoặc } x = -6.$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} y+k-1=-1 \\ y-k-1=-8 \end{cases} \Rightarrow 2y=-7 \Rightarrow y=-\frac{7}{2} : \text{ loại.}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} y+k-1=-2 \\ y-k-1=-4 \end{cases} \Rightarrow 2y=-4 \Rightarrow y=-2, \text{ ta có:}$$

$$(5) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 4.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(-5; 4); (-6; 4); (3; -2); (4; -2)\}.$$

#### Bài toán 6. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \quad (6).$$

Lời giải.

Vì  $x^2 + x + 1 \neq 0$  với mọi  $x$ , nên phương trình (6) tương đương với phương trình:

$$y(x^2 + x + 1) = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0 \quad (6.1).$$

Với  $y = 1$  thì (6.1)  $\Leftrightarrow x = 0$ .

Với  $y \neq 1$  thì (6.1) là phương trình bậc 2 có:

$$\Delta_x = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 = -3y^2 + 10y - 3.$$

Để tồn tại  $x$  nguyên thì

$$\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq 3 \\ y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow y \in \{2; 3\}.$$

Với  $y = 2$  thì (6.1) trở thành:

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} : \text{ loại.}$$

Với  $y = 3$  thì (6.1) trở thành:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(0; 1); (-1; 3)\}.$$

#### BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y.$$

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - xy + 3y^2 = x + y.$$

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2 - xy - y^2 + 2x - y = 0.$$

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}.$$

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ,  
HẢI PHÒNG, NĂM HỌC 2019 - 2020**

**Bài 1. a)** Ta có:

$$P = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x+3}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

Do đó:

$$P \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Vậy  $0 \leq x \leq 4$  thỏa mãn bài toán.

b) PT đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4.$$

Áp dụng hệ thức Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{4(16 + 2m)}{m} = 4(m + 2) \quad (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Kết hợp với điều kiện  $m > -4$ ;  $m \neq 0$  ta được  $m = 4$  thỏa mãn bài toán.

**Bài 2. a)** ĐK:  $x \geq 1$  hoặc  $x \leq -\frac{3}{2}$ .

$$PT \Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = (2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x+2=\sqrt{2x^2+x-3} \end{cases}$$

$$\bullet 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn ĐK),}$$

$$\bullet x+2=\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2+x-3 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-3x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK),}$$

Vậy PT có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}.$$

b) ĐK:  $y \geq 0$ .

Lấy phương trình thứ nhất trừ đi ba lần phương trình thứ hai, ta có:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8 - 12\sqrt{y} + 6y - y\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (2-\sqrt{y})^3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 2-\sqrt{y}.$$

Thế  $\sqrt{y} = 3-x$  vào PT thứ nhất của hệ ta được:

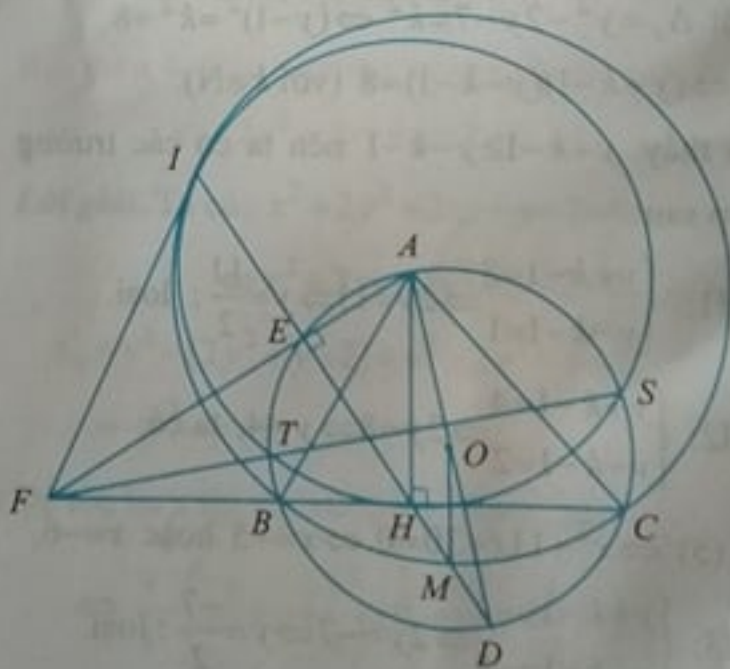
$$x^3 + (3-x)^3 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

HPT có hai nghiệm: (1;4), (2;1) (thỏa mãn ĐK).

**Bài 3.**

a) Ta có:  $OM \parallel AH$  (tính chất đường trung bình).



Mà  $AH \perp BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow OM$  là đường trung trực đoạn thẳng  $BC$ .

$$b) \text{ Từ } \triangle FTB \sim \triangle FCS (g.g) \Rightarrow \frac{FT}{FC} = \frac{FB}{FS}$$

$$\Rightarrow FB \cdot FC = FT \cdot FS \quad (1).$$

$FH$  là tiếp tuyến của đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AH \Rightarrow FT.FS = FH^2$  (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow FB.FC = FH^2$ .

Gọi  $E'$  là giao điểm của  $FA$  với (O)

$\Rightarrow FE'.FA = FH^2 \Rightarrow \triangle FE'H \sim \triangle FHA$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FE'H} = \widehat{FHA} = 90^\circ \Rightarrow HE' \perp AF$ . Mà

$DE' \perp AF$  nên  $E', H, D$  thẳng hàng  $\Rightarrow E = E'$ .

c) Gọi  $I$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $E$ .

Ta có  $AF$  là trung trực của đoạn thẳng  $HI$  nên  $FH = FI$  và  $AH = AI$ , nghĩa là  $I$  thuộc đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AH$ .

$\triangle AFI = \triangle AFH$  (c.c.c)  $\Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{AHF} = 90^\circ$

$\Rightarrow FI$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AH$  tại  $I$  (2).

$\triangle HBE \sim \triangle HDC$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{HB}{HD} = \frac{HE}{HC}$

$\Rightarrow HB.HC = HD.HE = 2HM \cdot \frac{1}{2}HI = HM.HI$

$\Rightarrow \triangle HBI \sim \triangle HMC$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{HMC}$

$\Rightarrow$  tứ giác  $IBMC$  nội tiếp.

Lại có  $FI^2 = FB.FC$  (cùng bằng  $FH^2$ )  $\Rightarrow FI$  tiếp xúc với đường tròn ( $IBMC$ ) tại  $I$ .

Kết hợp với (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 4.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x^3}{x^2+z^2} = x - \frac{xz^2}{x^2+z^2} \geq x - \frac{xz^2}{2xz} = x - \frac{z}{2}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^3}{y^2+z^2} \geq y - \frac{z}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } P \geq x + y - z + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}.$$

$$\text{Theo giả thiết } z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

$$\Rightarrow P \geq x + y + \frac{4}{x + y} \geq 4.$$

Vậy  $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Bài 5. a)**

$$p^2q + p : p^2 + q$$

$$\Rightarrow q(p^2 + q) - (p^2q + p) = q^2 - p : p^2 + q.$$

$$pq^2 + q : q^2 - p$$

$$\Rightarrow (pq^2 + q) - p(q^2 - p) = p^2 + q : q^2 - p.$$

•  $q^2 - p = -(p^2 + q) \Leftrightarrow q^2 + q + p^2 - p = 0$ : phương trình này vô nghiệm.

$$\bullet q^2 - p = p^2 + q \Leftrightarrow (q + p)(q - p - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow q - p - 1 = 0 \Leftrightarrow q = p + 1.$$

Mà  $p, q$  là hai số nguyên tố nên  $p = 2, q = 3$  (thỏa mãn bài toán).

$$\text{b) Đặt } z = \frac{xy}{x+y+1} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + 1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right) \quad (1).$$

Với mỗi tập các số dương  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  tùy ý, xét biểu thức

$$P(x_1; x_2; \dots; x_n) = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right).$$

Từ (1) suy ra mỗi lần xóa đi 2 số bất kì  $x, y$  rồi

viết lên bảng số  $\frac{xy}{x+y+1}$  các số còn lại trên

bảng giữ nguyên thì giá trị biểu thức  $P$  của các số trên bảng không đổi.

Gọi số cuối cùng là  $a$ , suy ra:

$$P(a) = P\left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}\right)$$

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN**  
**NĂM HỌC 2018 – 2019** (Thời gian làm bài: 150 phút)

**Câu 1** (2 điểm). Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

**Câu 2** (4 điểm).

a) Giải phương trình:

$$(\sqrt{x+2}+1)(4-x)=2(x+1).$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y=\frac{2}{x}-1 \\ x^2-\frac{4}{x^2}+1=4y(x-y) \end{cases}$$

**Câu 3** (4 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d_1: y = (m^2 - 5m)x + 2m$  ( $m$  là tham số) và đường thẳng  $d_2: y = -6x + m + 3$ . Tìm các giá trị của  $m$  để hai đường thẳng đã cho song song với nhau.

b) Một robot chuyển động từ  $A$  đến  $B$  theo cách sau: đi được 5m dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 10m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 15m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy, robot đi từ  $A$  đến  $B$  kể cả nghỉ hết 551 giây. Tính quãng đường robot chuyển động từ  $A$  đến  $B$ . Biết rằng khi đi, robot chuyển động với vận tốc 2,5m/giây.

**Câu 4** (4 điểm). Cho ba điểm cố định  $A, B, C$  thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua hai điểm  $B$  và  $C$ . Vẽ các tiếp

tuyến  $AD$  và  $AE$  với đường tròn  $(O)$ ,  $D$  và  $E$  là các tiếp điểm.

a) Chứng minh  $AD = \sqrt{AB \cdot AC}$ . Từ đó suy ra  $D$  thuộc một đường tròn cố định.

b) Gọi  $MN$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  vuông góc với  $BC$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AM$  với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh ba đường thẳng  $AB, DE, NK$  đồng quy tại một điểm.

**Câu 5** (4 điểm).

a) Cho tam giác  $ABC$  có góc  $A$  tù, chứng minh:

$$\sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$$

b) Trên mặt phẳng có 25 điểm phân biệt, biết rằng trong 3 điểm bất kì đã cho bao giờ cũng tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong 25 điểm nói trên.

**Câu 6** (2 điểm). Cho  $a, b, c$  là các số thực dương

$$\text{thỏa mãn } \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2018} \right)^2 \leq 2019a^2b^2c^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}.$$

**NGUYỄN THANH GIANG**

(GV THPT chuyên Hưng Yên) *Giới thiệu*

\*\*\*\*\*  
**HƯỚNG DẪN GIẢI ...**

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + 1 = \left( \frac{1}{1} + 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{2018}} + 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{2019}} + 1 \right)$$

$$= 2020! \Rightarrow a = \frac{1}{2020! - 1}.$$

**ĐOÀN THÁI SƠN**

(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng) *Giới thiệu*



## SỬ DỤNG CÔNG THỨC THỂ TÍCH KHỐI CHÓP TAM GIÁC ĐỀU ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN VĂN NHỎ

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài viết giới thiệu với các bạn học sinh sắp thi THPT một số công thức bổ sung về thể tích khối chóp tam giác đều, và một số ứng dụng để giải toán tự luận và giải toán trắc nghiệm về hình học không gian.

### 1. Một số công thức bổ sung tính thể tích khối chóp đều

Xét khối chóp tam giác đều. Khi đó, nếu khối chóp đó có:

1) Cạnh đáy  $a$ , cạnh bên  $b$  thì thể tích:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12} \quad (1)$$

2) Cạnh đáy  $a$ , cạnh bên hợp với đáy một góc  $\alpha$  thì thể tích:

$$V = \frac{a^3 \tan \alpha}{12} \quad (2)$$

3) Cạnh đáy  $a$ , mặt bên hợp với đáy một góc  $\beta$  thì thể tích:

$$V = \frac{a^3 \tan \beta}{24} \quad (3)$$

4) Cạnh đáy  $a$ , một mặt bên có diện tích  $S$  thì thể tích:

$$V = \frac{a \sqrt{48S^2 - a^4}}{24} \quad (4)$$

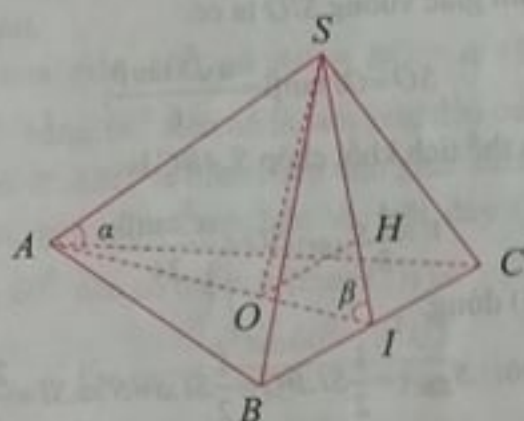
5) Cạnh đáy  $a$ , chu vi của một mặt bên là  $m$  thì thể tích:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3(m-a)^2 - 4a^2}}{24} \quad (5)$$

6) Cạnh đáy  $a$ , khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt bên là  $d$  thì thể tích:

$$V = \frac{a^3 d \sqrt{3}}{12 \sqrt{a^2 - 12d^2}} \quad (6)$$

**Chứng minh.** Xét khối chóp tam giác đều  $S.ABC$ :



Gọi  $O, I$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và trung điểm của  $BC$ . Khi đó  $SO$  là đường cao của khối chóp.

1) Xét tam giác vuông  $SAO$  có:

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}$$

Diện tích tam giác đều  $ABC$  bằng  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  nên thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$$

Vậy (1) đúng.

2) Ta có góc giữa cạnh bên  $SA$  và mặt phẳng đáy ( $ABC$ ) là góc  $\widehat{SAO} = \alpha$ , ta có:

$$SO = OA \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3} \tan \alpha}{3}$$

nên thể tích khối chóp  $S.ABC$ :

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3 \tan \alpha}{12}$$

Suy ra (2) đúng.

3) Ta có  $SI$  và  $AI$  đều vuông góc với  $BC$  nên góc giữa  $mp(SBC)$  và  $mp(ABC)$  là góc  $\widehat{SIA}$ , vậy ta có góc  $\widehat{SIA} = \beta$ .

Xét tam giác đều  $ABC$  có  $OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

Xét tam giác vuông  $SIO$  ta có:

$$SO = OI \tan \beta = \frac{a\sqrt{3} \tan \beta}{6}$$

Suy ra thể tích khối chóp  $S.ABC$  là:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3 \tan \beta}{24}$$

Vậy (3) đúng.

4) Ta có:  $S_{SBC} = \frac{1}{2} SI \cdot BC = \frac{1}{2} SI \cdot a = S \Rightarrow SI = \frac{2S}{a}$ .

Xét tam giác  $SIO$  có:

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{2S}{a}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{48S^2 - a^4}}{2a\sqrt{3}}$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{48S^2 - a^4}}{2a\sqrt{3}}$$

$$= \frac{a\sqrt{48S^2 - a^4}}{24}$$

Vậy (4) đúng.

5) Gọi  $x$  độ dài của một cạnh bên, xét tam giác  $SBC$  có:  $x + x + a = m \Rightarrow x = \frac{m-a}{2}$ . Theo công thức (1) ta được:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3 \left(\frac{m-a}{2}\right)^2 - a^2}}{12} = \frac{a^2 \sqrt{3(m-a)^2 - 4a^2}}{24}$$

Vậy (5) đúng.

6) Kẻ  $OH \perp SI$  ( $H \in SI$ ) thì khoảng cách từ  $O$  đến  $mp(SBC)$  bằng  $OH$  nên ta có  $OH = d$ .

Xét tam giác vuông  $SOI$ , ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{d^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{d^2} - \frac{12}{a^2} = \frac{a^2 - 12d^2}{(ad)^2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{ad}{\sqrt{a^2 - 12d^2}}$$

Sử dụng công thức thể tích khối chóp ta có:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ad}{\sqrt{a^2 - 12d^2}}$$

$$= \frac{a^3 d \sqrt{3}}{12 \sqrt{a^2 - 12d^2}}$$

Vậy (6) đúng.

**Nhận xét.** Khối tứ diện đều cạnh  $a$  là khối chóp đều tam giác có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng  $a$  nên theo (1), nó có thể tích là:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \quad (7).$$

## 2. Ứng dụng

**Thí dụ 1.** Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ , diện tích một mặt bên bằng  $\frac{5\sqrt{3}a^2}{12}$ . Thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng:

A.  $\frac{\sqrt{6}}{24}a^3$     B.  $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$     C.  $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$     D.  $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

**Hướng dẫn.** Áp dụng công thức (4) ta có:

$$V = \frac{a \sqrt{48 \left(\frac{5\sqrt{3}a^2}{12}\right)^2 - a^4}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12} a^3 \Rightarrow \text{chọn B.}$$

**Thí dụ 2.** Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ , khoảng cách từ trọng tâm

tam giác  $ABC$  đến mặt bên  $(SAB)$  bằng  $\frac{a}{4}$ . Thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng:

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{24}a^3$  B.  $\frac{\sqrt{3}}{16}a^3$  C.  $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$  D.  $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ .

**Hướng dẫn.** Theo công thức (6) ta có:

$$V = \frac{a^3 \frac{a}{4} \sqrt{3}}{12 \sqrt{a^2 - 12 \left(\frac{a}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{24} a^3 \Rightarrow \text{chọn A.}$$

**Thí dụ 3.** Tính thể tích  $V$  của khối tứ diện đều có diện tích toàn phần bằng  $4\sqrt{3}$ .

- A.  $V = \frac{\sqrt{3}}{24}$  B.  $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  C.  $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$  D.  $V = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Hướng dẫn.** Gọi cạnh của tứ diện là  $x$  ( $x > 0$ ), diện tích toàn phần của nó là:

$$S_{tp} = 4 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x^2 \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 2.$$

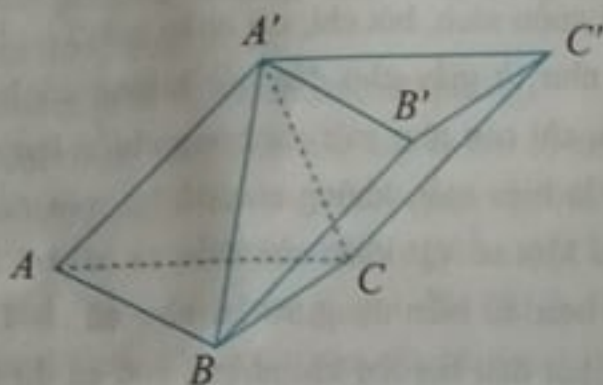
Theo (7) thể tích của khối tứ diện là:

$$V = \frac{2^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{chọn B.}$$

**Thí dụ 4.** Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là một tam giác đều cạnh  $a$ , và có:  $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối lăng trụ.

**Hướng dẫn.**

$A'.ABC$  là hình chóp tam giác đều, có cạnh đáy  $a$ , cạnh bên  $a\sqrt{3}$  nên theo (1) có thể tích là:



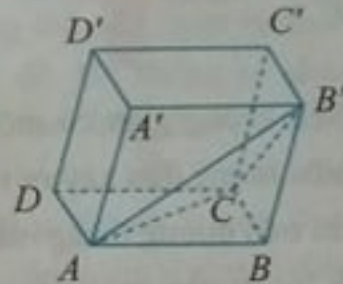
$$V_{A'.ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3} (a\sqrt{3})^2 - a^2}{12} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

Thể tích hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng

$$3V_{A'.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

**Thí dụ 5.** Cho khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là một hình thoi cạnh  $a$ , có góc

$\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Các đường thẳng  $B'A, B'B, B'C$  đều tạo với đáy  $(ABCD)$  một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối hộp.



**Lời giải.**

• Vì tam giác  $ABC$  có  $AB = BC = a$  và góc  $\widehat{ABC}$  bằng  $60^\circ$  nên nó là tam giác đều cạnh  $a$ . Ta có  $B'.ABC$  là hình chóp tam giác đều cạnh đáy  $a$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$  nên có thể tích (theo (2)) là:

$$V_{B'.ABC} = \frac{a^3 \tan 60^\circ}{12} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

• Thể tích  $V$  của khối hộp bằng:

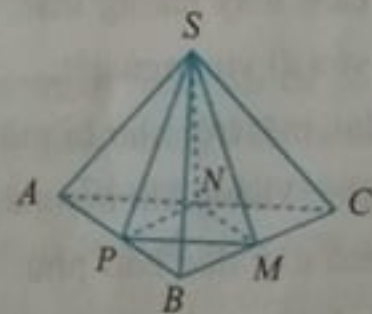
$$V = 6V_{B'.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

**Thí dụ 6.** Cho khối chóp đều  $S.ABC$  có cạnh đáy  $a$ , cạnh bên hợp với đáy một góc  $45^\circ$ , gọi  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ . Tính thể tích của khối chóp  $S.MNP$ .

**Hướng dẫn.**

Ta có:

$$V_{S.MNP} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3 \tan 45^\circ}{12} = \frac{a^3}{48}.$$



## BÀI TẬP

1. Tính thể tích khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  trong các trường hợp sau: (Xem tiếp trang 14)



# NEU KHONG GIAN CO 4 CHIEU !

PHAN THANH QUANG (TP Hồ Chí Minh)  
(Theo Sciences et Vie Junior số 7/2015)

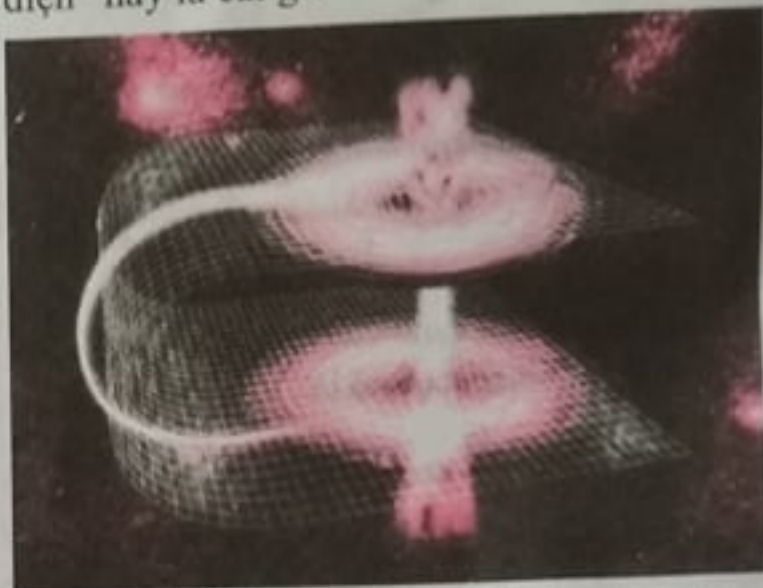
Nếu không gian có một chiều, mọi hoạt động, hiện tượng đều xảy ra trên một đường thẳng và chỉ trên đường thẳng mà thôi, nghĩa là chỉ đi tới, đi lui, y như một con tàu trên đường sắt chạy thẳng.

Nếu không gian có 2 chiều, mọi hoạt động, hiện tượng đều xảy ra trên một mặt phẳng và chỉ trên mặt phẳng mà thôi. Không thấy chim bay, bướm lượn, không thấy máy bay; quả bóng chỉ chạy trên sân, không có bóng bóng để thủ môn bay lên bắt bóng và cầu thủ đội đầu! Không gian ba chiều là không gian ta sống hiện nay. Mọi hoạt động đều có thể diễn ra trên mặt phẳng (người đi, tàu chạy, ...) và trên cao (chim bay, phi cơ bay, tên lửa bay, ...).

Nếu không gian có 4 chiều thì cái gì xảy ra? Một sự rối loạn trong nhận thức, hoạt động, ...

Bạn hãy tưởng tượng: bạn đang nằm trên giường, say mê đọc một cuốn truyện đến hồi gay cấn, bỗng có một sự rung lắc và bạn cảm thấy chóng mặt, lâng lâng, như đôi khi vừa đi vừa ngủ gật, ... Và lúc đó trời tối sầm lại, mặt trời như bị một đám mây to đen bao phủ, không khí bỗng đục lại như màn sương mù dày đặc bao phủ. Không phải chỉ thấy ánh sáng yếu đi như khi chiều tà sắp hoàng hôn. Sau khi kiểm tra, bạn thấy không có gì thay đổi, màn hình smartphone cũng như thế thôi. Thế thì cái gì đã xảy ra? Toàn thể

vũ trụ bắt đầu vào trạng thái “tiết kiệm điện” hay là cái gì?



Một biến đổi toàn diện, “vĩ đại”, chưa từng tưởng tượng được: bạn bắt đầu bị bật ra khỏi giường, bút mực trên bàn bay lên lửng lơ trong không gian ! OK, điều đó giải thích cái cảm giác như sắp bị ngã. Nguyên nhân là do trọng lực bị hoàn toàn mất đi. Và cơn mê sảng tiếp tục nặng thêm. Bây giờ bạn chắc rằng các đồ vật đã thay đổi hình dạng một cách kỳ quặc và xem kia, chúng như “sổ lồng”, bay lửng lơ xung quanh bạn, ...

Vài cuốn sách, bút chì, cái chặn giấy, ... bẹp dí lại như tờ giấy cho đến nỗi không còn bề dày nữa, chỉ còn như một cái bóng chiếu lên và ... thế là biến mất, không còn để lại một dấu vết nào. Một số vật khác còn diễn ra cái trò “điên rồ” hơn, tự biến dạng trở lại như cũ ... Thế là bạn bắt đầu hét lên khi những con cá đỏ trong bể cá của bạn vẫn bơi lội, nghịch ngợm bình thường, khi mà bên ngoài có sự “lộn xộn”. Bạn

cảm thấy yên tâm một chút cho đến khi một không gian ba chiều quen thuộc vẫn tồn tại: có bên trái, có bên phải, có xa, có gần, có trên cao, có dưới thấp.

Một không gian mới ra đời: không gian bốn chiều. Thế giới bị bung ra và quần áo của bạn cũng như thế. Trong phút chốc những quả cầu nhỏ méo mó như bị bóp nát đó, không phải là bánh nứa. Và chất lỏng màu maron (màu nâu đỏ) đó .... đúng là sữa sô-cô-la! Trong một thoáng nhận thức nhanh như chớp đó bạn hiểu rằng các thức ăn điểm tâm đang muốn biểu lộ rằng chúng đang được tiêu hóa trong dạ dày của bạn. Một cách lộ liễu nó đã tìm cách thoát ra khỏi bụng của bạn không phải bằng con đường quen thuộc lâu nay.

Thế là bạn bắt đầu run. Khi quan sát quần áo rách nát của mình, bạn tìm ngay ra lời giải thích: cái quần của bạn đang bị xé rách nát thảm hại không thương tiếc, giống như là cái áo của bạn. Người ta nói rằng các sợi dệt nên vải của quần áo không có cách nào để liên kết với nhau.... STOP! Trước khi kết luận bạn muốn tìm hiểu sự thật. Đồng ý! Bạn hãy lắng nghe đây: các điều lạ khác thường xảy ra là do không gian bạn đang sống không phải là không gian ba chiều nữa, một chiều thứ tư đang được thêm vào số không gian bạn đang hiện hữu. Đầu óc tư duy của bạn lâu nay đã quen với không gian ba chiều 3D chiều ngang, chiều dọc, chiều cao rồi. Bây giờ chuyển qua không gian bốn chiều bạn mất phương hướng, lúng túng trong nhận thức, tư duy, hành động.

Nếu không gian là hai chiều (mặt phẳng)

Để "cảm nhận" được điều lạ xảy ra khi số chiều của không gian bị bớt một thầy giáo người Anh tên là *Edwin Abbott* năm 1884 nghĩ ra một kịch bản khá gây ấn tượng gọi là "kịch bản Flottland" mà nội dung tóm tắt như sau: Hãy tưởng tượng một vũ trụ chỉ có hai chiều, một không gian giống như một tờ giấy rộng mênh

mông, không có giới hạn về mọi phía. Vạn vật đều "bẹp dẹt" mỏng tanh như tờ giấy, có thể ví như tranh hoạt hình, nói tóm lại không có chiều dày. Vạn vật trong không gian đó chỉ có thể di chuyển bằng cách đi tới, đi lui, đi qua trái, đi qua phải, hoặc phối hợp các hướng đi (Đông - Tây - Nam - Bắc), không thể nào thoát ra khỏi tờ giấy không có bề dày đó. Họ không có khái niệm về chiều sâu, chiều cao, trên, dưới, ... Thế thì cái gì sẽ xảy ra khi bỗng nhiên họ đi vào không gian 3 chiều (chiều ngang, chiều dọc, chiều cao)? Điều mà họ cảm nhận y như là điều mà ta cảm nhận khi từ không gian 3 chiều đi vào không gian 4 chiều.

Để bắt đầu, người ta hiểu rõ khi đi dạo ở bên trên không gian phẳng bình thường của họ, các "người phẳng" có thể ngắm nhìn lần đầu tiên cuộc sống bên trong của một hình vuông, vốn bình thường cũng không thể vào được đối với họ như bên trong của một cái hộp hình lập phương đóng kín đối với chúng ta.

Để hiểu rõ khái niệm "chiều của không gian" ta hãy tưởng tượng: Sống trong không gian một chiều, tức là đường thẳng, người ta chỉ biết cái gì đằng trước đằng sau họ, Chẳng khác nào người ngồi trên xe lửa bị kín chạy thẳng.

Sống trong không gian hai chiều, như ngồi trong ô tô có trần, có thể nhìn ra xung quanh, bên trái bên phải, nhưng không thể nhìn xuống, nhìn lên được.

Sống trong không gian ba chiều như ngồi trên đỉnh núi, có thể nhìn trước sau, bên trái bên phải (xung quanh) và nhìn được cả trên trời dưới đất.

Ta hãy trở lại với "tâm trạng" các con cá đò trong bình nước. Không phải chúng thay hình đổi dạng đâu (bằng chứng là chúng vẫn sống bình thường), mà chính là bạn đã nhìn chúng bằng một cách nhìn khác. Và điều đó cũng giải thích cuộc đi chơi không hợp thời của bữa điểm tâm của bạn: nó chỉ cần tự mình di chuyển "độ nghiêng lệch" để đi vòng quanh các vách của dạ

dây của bạn y như cách du lịch trên mặt phẳng cho phép ra khỏi một hình vuông mà không đụng đến các bờ của nó.

Những vật có thể đi bất cứ đâu mà nó muốn.

Cũng nhờ được tự do đi vòng quanh khi đi qua chiều thứ tư mà tất cả các thứ vãi đều phân ra được (không còn liên kết với nhau để thành tấm vải), ... Như các nhà Toán học đã chứng minh trong những năm 1940, trong không gian 4 chiều (4D) tất cả các nút thắt bị sổ ra!

Về việc độ sáng của đèn giám lâm không gian tối sầm lại và sự yếu đi của trọng lực thì lời giải thích đơn giản là những tia xuất phát từ một nguồn (ánh sáng cũng như trọng lực) được hòa với nhau nhiều hơn trong không gian 3 chiều. Chúng đến với bạn rõ ràng yếu hơn. Có một vấn đề lớn, rất lớn. Trước hết các nhà Toán học đã chứng minh rằng với một trọng lực yếu như vậy, không có một cơ may nào có những quỹ đạo đều giữ chúng ở khoảng cách đến mặt trời không đổi. Vì vậy, chỉ trong một thời gian ngắn

thời, Trái đất sẽ rất lạnh, hoặc rất nóng.

Hơn nữa bạn sẽ không thể nào giữ được thức ăn trong cơ thể của bạn. Nói tóm lại: ở lại sống trong không gian 4D sẽ rất là khó khăn. Vậy thì phải chấm dứt cuộc thí nghiệm quái gở đó và trở về ngay không gian ba chiều quen thuộc của chúng ta! Đúng như vậy! Trừ khi.... có thể bạn đã nghe nói rằng một số thuyết nào đó về Vật lý nói trước rằng trong thực tế không gian không phải ba chiều hay bốn chiều mà có đến....đúng 9 chiều !!! Nhưng bạn yên tâm đi, các thuyết đó cũng giả sử rằng chúng ta không thể đi dạo chơi như trong cuộc phiêu lưu "đáng sợ" mà chúng ta vừa tưởng tượng ra.

Mà dù có 9 chiều ... thì đến đâu hay đó! Con người sẽ biết thích nghi với hoàn cảnh mới, chắc chắn như vậy.

Nhà Toán học Đức *Georges Cantor* nói về một học trò xuất sắc của mình đã bỏ Toán học để làm thơ: "*Anh ta không đủ sức tưởng tượng để làm Toán, chỉ đủ sức tưởng tượng để làm thơ*"!

### **SỬ DỤNG CÔNG THỨC ...** (Tiếp theo trang 11)

- Cạnh đáy là 1, cạnh bên là 3.
  - Cạnh đáy là  $a$ , cạnh bên hợp với đáy một góc  $45^\circ$ .
  - Cạnh đáy là  $2a$ , mặt bên hợp với đáy một góc  $60^\circ$ .
  - Cạnh đáy là  $a\sqrt{3}$ , diện tích của một mặt bên là  $10a^2$ .
  - Cạnh đáy  $a$ , khoảng cách từ tâm của đáy đến một mặt bên bằng  $\frac{a}{10}$ .
  - Cạnh đáy 12, chu vi của một mặt bên 30.
2. Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 6. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác:  $ABC$ ,

$SBC$ ,  $SCA$  và  $SAB$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $MNPQ$ .

3. Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $\alpha$ , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng  $\beta$ . Chứng minh  $\tan\beta = 2\tan\alpha$ .

4. Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt thuộc các cạnh  $SA, SB$  và  $SC$  sao cho:  $SA=2MA, NS=NB, PS=3PC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.MNP$ .

5. Cho khối chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy là 1, góc giữa mặt bên và mặt đáy là  $45^\circ$ . Gọi  $M, N$  lần lượt thuộc cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho:  $MA=MB, NA=3NC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.MBCN$ .



## SỬ DỤNG GEOGEBRA ĐỂ PHÂN TÍCH SỐ DẠNG $10...01$ RA THỪA SỐ NGUYÊN TỐ

NGUYỄN THỊ HỒNG HẠNH (GP THPT Quang Trung, Thành phố Hồ Chí Minh)  
 ĐOÀN KHÁNH (GP THPT Trần Đại Nghĩa, Chương Mỹ, Hà Nội)  
 BÙI THỊ HẰNG MƠ (GP THPT Lê Lợi, Quận Ngô Quyền, Hải Phòng)  
 TẠ DUY PHƯƠNG (Phụ huynh học sinh)

**1. Dẫn nhập.** Trong *Toán học và Tuổi trẻ* số 28 (tháng 1-1967, trang 15), cố Giáo sư Lại Đức Thịnh đã viết: “Số nguyên tố dạng  $100...001$  gồm bao nhiêu chữ số 0, là một bài toán chưa giải được”. Theo tìm hiểu của chúng tôi, hơn 50 năm nay chưa có phản hồi nào trên *Toán học và Tuổi trẻ* về câu hỏi này, có lẽ cũng vì không ai đủ sức (bằng tay) để phân tích các số dạng  $10...01$  với  $n$  (đủ lớn) số 0, ra thừa số nguyên tố.

Bài viết này trình bày cách sử dụng *GeoGebra* như một công cụ thí nghiệm trong phân tích số  $10...01$  ra thừa số nguyên tố, và góp phần trả lời câu hỏi trên, trừ một trường hợp cuối cùng.

**2. Giới thiệu về *GeoGebra*.** *GeoGebra* là một công cụ hữu ích trong dạy và học theo chương trình và sách giáo khoa mới. Bạn đọc có thể tìm hiểu cài đặt và sử dụng *GeoGebra* theo [1].

**3. Sử dụng *GeoGebra* trong phân tích số tự nhiên ra thừa số nguyên tố.** Một số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính nó được gọi là số nguyên tố. Với những số lớn, thuật toán Euclid (và các thuật toán khác) ở thời điểm hiện nay chưa thể cho kết quả trong thời gian thực (thời gian đủ ngắn). Vì vậy, việc phân tích một số ra thừa số nguyên tố vẫn còn là bài toán rất khó, ngay cả với hệ thống máy tính song song cỡ lớn và các phần mềm chuyên dụng. Mặt khác, với phần mềm thương mại *Maple*

hoặc phần mềm free (lấy tự do trên mạng) *GeoGebra*, có thể phân tích được số tự nhiên bất kì với khoảng 30 chữ số chỉ trong vài giây. Để phân tích một số ra thừa số nguyên tố nhờ *GeoGebra*, ta mở *GeoGebra*, chọn CAS (Computer Algebra System-hệ tính toán đại số). Sau đó chỉ cần khai báo duy nhất một lệnh phân tích một số nguyên ra thừa số **iFactor()**, với số cần phân tích được khai báo trong ngoặc, thí dụ, số dạng  $10...01$ , máy sẽ cho ra ngay kết quả như trong Bảng 1.

**Bảng 1:** Phân tích các số dạng  $10^{n+1} + 1$  với  $n = 2, \dots, 49$  chữ số 0 ra thừa số nguyên tố.

| GeoGebra Classic 5                                                                                                                                                                             |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| File Edit View Options Tools Window Help                                                                                                                                                       |                              |
| <div> <div> <div>=</div> <div>≈</div> <div>✓</div> <div>15</div> <div>3.5</div> <div>(( ))</div> <div>√</div> <div>x=</div> <div>x=</div> <div>f</div> <div>⌈</div> <div>⌊</div> </div> </div> |                              |
| 1                                                                                                                                                                                              | iFactor(1001)                |
|                                                                                                                                                                                                | = 7 · 11 · 13                |
| 2                                                                                                                                                                                              | iFactor(10001)               |
|                                                                                                                                                                                                | = 73 · 137                   |
| 3                                                                                                                                                                                              | iFactor(100001)              |
|                                                                                                                                                                                                | = 11 · 9091                  |
| 4                                                                                                                                                                                              | iFactor(1000001)             |
|                                                                                                                                                                                                | = 101 · 9901                 |
| 5                                                                                                                                                                                              | iFactor(10 <sup>7</sup> +1)  |
|                                                                                                                                                                                                | = 11 · 999991                |
| 6                                                                                                                                                                                              | iFactor(10 <sup>8</sup> +1)  |
|                                                                                                                                                                                                | = 17 · 5882353               |
| 7                                                                                                                                                                                              | iFactor(10 <sup>9</sup> +1)  |
|                                                                                                                                                                                                | = 7 · 11 · 13 · 19 · 52579   |
| 8                                                                                                                                                                                              | iFactor(10 <sup>10</sup> +1) |
|                                                                                                                                                                                                | = 101 · 3541 · 27961         |

|    |                                                                                                                |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | $\text{IFactor}(10^{11}+1)$<br>→ $11^2 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779$                                         |
| 10 | $\text{IFactor}(10^{12}+1)$<br>→ $73 \cdot 137 \cdot 99990001$                                                 |
| 11 | $\text{IFactor}(10^{13}+1)$<br>→ $11 \cdot 859 \cdot 1058313049$                                               |
| 12 | $\text{IFactor}(10^{14}+1)$<br>→ $29 \cdot 101 \cdot 281 \cdot 121499449$                                      |
| 13 | $\text{IFactor}(10^{15}+1)$<br>→ $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 2161 \cdot 9091$               |
| 14 | $\text{IFactor}(10^{16}+1)$<br>→ $353 \cdot 449 \cdot 641 \cdot 1409 \cdot 69857$                              |
| 15 | $\text{IFactor}(10^{17}+1)$<br>→ $11 \cdot 103 \cdot 4013 \cdot 21993833369$                                   |
| 16 | $\text{IFactor}(10^{18}+1)$<br>→ $101 \cdot 9901 \cdot 999999000001$                                           |
| 17 | $\text{IFactor}(10^{19}+1)$<br>→ $11 \cdot 909090909090909091$                                                 |
| 18 | $\text{IFactor}(10^{20}+1)$<br>→ $73 \cdot 137 \cdot 1676321 \cdot 5964848081$                                 |
| 19 | $\text{IFactor}(10^{21}+1)$<br>→ $7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 127 \cdot 2689 \cdot 459691 \cdot 909091$        |
| 20 | $\text{IFactor}(10^{22}+1)$<br>→ $89 \cdot 101 \cdot 1052788969 \cdot 1056689261$                              |
| 21 | $\text{IFactor}(10^{23}+1)$<br>→ $11 \cdot 47 \cdot 139 \cdot 2531 \cdot 549797184491917$                      |
| 22 | $\text{IFactor}(10^{24}+1)$<br>→ $17 \cdot 5882353 \cdot 9999999900000001$                                     |
| 23 | $\text{IFactor}(10^{25}+1)$<br>→ $11 \cdot 251 \cdot 5051 \cdot 9091 \cdot 78875943472201$                     |
| 24 | $\text{IFactor}(10^{26}+1)$<br>→ $101 \cdot 521 \cdot 1900381976777332243781$                                  |
| 25 | $\text{IFactor}(10^{27}+1)$<br>→ $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579 \cdot 70541929 \cdot 14175966169$   |
| 26 | $\text{IFactor}(10^{28}+1)$<br>→ $73 \cdot 137 \cdot 7841 \cdot 127522001020150503761$                         |
| 27 | $\text{IFactor}(10^{29}+1)$<br>→ $11 \cdot 59 \cdot 154083204930662557781201849$                               |
| 28 | $\text{IFactor}(10^{30}+1)$<br>→ $61 \cdot 101 \cdot 3541 \cdot 9901 \cdot 27961 \cdot 4188901 \cdot 39526741$ |

|    |                                                                                                                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 29 | $\text{IFactor}(10^{31}+1)$<br>→ $11 \cdot 909090909090909090909090909091$                                                                                          |
| 30 | $\text{IFactor}(10^{32}+1)$<br>→ $19841 \cdot 976193 \cdot 6187457 \cdot 834427406578561$                                                                           |
| 31 | $\text{IFactor}(10^{33}+1)$<br>→ $7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779 \cdot 599144041 \cdot 183411838171$                                          |
| 32 | $\text{IFactor}(10^{34}+1)$<br>→ $101 \cdot 28559389 \cdot 1491383821 \cdot 2324557465671829$                                                                       |
| 33 | $\text{IFactor}(10^{35}+1)$<br>→ $11 \cdot 9091 \cdot 909091 \cdot 4147571 \cdot 265212793249617641$                                                                |
| 34 | $\text{IFactor}(10^{36}+1)$<br>→ $73 \cdot 137 \cdot 3169 \cdot 98641 \cdot 99990001 \cdot 3199044596370769$                                                        |
| 35 | $\text{IFactor}(10^{37}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 36 | $\text{IFactor}(10^{38}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 37 | $\text{IFactor}(10^{39}+1)$<br>→ $7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 157 \cdot 859 \cdot 6197 \cdot 214451 \cdot 1058313049 \cdot 388847808493$                            |
| 38 | $\text{IFactor}(10^{40}+1)$<br>→ $17 \cdot 5878721 \cdot 5882353 \cdot 18721061186644717488359681$                                                                  |
| 39 | $\text{IFactor}(10^{41}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 40 | $\text{IFactor}(10^{42}+1)$<br>→ $29 \cdot 181 \cdot 281 \cdot 9901 \cdot 226548 \cdot 121499449 \cdot 445818223328348849$                                          |
| 41 | $\text{IFactor}(10^{43}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 42 | $\text{IFactor}(10^{44}+1)$<br>→ $73 \cdot 137 \cdot 817 \cdot 16785834846813967584927082654482188953$                                                              |
| 43 | $\text{IFactor}(10^{45}+1)$<br>→ $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 2181 \cdot 9881 \cdot 29611 \cdot 52579 \cdot 3762091 \cdot 8885495884481$ |
| 44 | $\text{IFactor}(10^{46}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 45 | $\text{IFactor}(10^{47}+1)$<br>→ 7                                                                                                                                  |
| 46 | $\text{IFactor}(10^{48}+1)$<br>→ $97 \cdot 353 \cdot 449 \cdot 841 \cdot 1409 \cdot 98857 \cdot 286298 \cdot 84554181249 \cdot 75118313082913$                      |
| 47 | $\text{IFactor}(10^{49}+1)$<br>→ $11 \cdot 187 \cdot 909091 \cdot 5476141624345532994918781726395838835533$                                                         |
| 48 | $\text{IFactor}(10^{50}+1)$<br>→ $101 \cdot 3541 \cdot 27961 \cdot 80181 \cdot 7839801 \cdot 14183673319201 \cdot 1480588011354901$                                 |

Quan sát Bảng 1, ta rút ra qui luật sau:

**Khẳng định 1.** Các số dạng  $N_n = 100...001$  với  $n = 2k$  chữ số 0 chia hết cho 11.

**Nhận xét 1.** Với  $k = 0$  thì 11 là số nguyên tố.

**Chứng minh 1.** Làm phép nhân trực tiếp ta được (với  $k - 1$  cặp số 90):

$$\underbrace{100...001}_{2k} = 9090...9091 \times 11.$$

**Chứng minh 2.** Ta có:

$$\begin{aligned} \underbrace{100\dots001}_{2k} &= 10^{2k+1} + 1 \\ &= (10+1)(10^{2k} - 10^{2k-1} + 10^{2k-2} - \dots + 1) \\ &= 11 \cdot (10^{2k} - 10^{2k-1} + 10^{2k-2} - \dots + 1). \end{aligned}$$

Như vậy, câu hỏi của cô Giáo sư Lại Đức Thịnh đã được trả lời một nửa.

Có thể thấy rõ hơn trong Phụ lục 1 dưới đây.

**Phụ lục 1:**

$$\begin{aligned} 1001 &= 10^3 + 1 = 11 \times 91; \\ 100001 &= 10^5 + 1 = 11 \times 9091; \\ 10000001 &= 10^7 + 1 = 11 \times 909091; \\ 1000000001 &= 10^9 + 1 = 11 \times 90909091; \\ 100000000001 &= 10^{11} + 1 = 11 \times 9090909091; \\ 10000000000001 &= 10^{13} + 1 = 11 \times 909090909091; \\ 10^{15} + 1 &= 11 \times 90909090909091; \\ 10^{17} + 1 &= 11 \times 9090909090909091; \\ 10^{19} + 1 &= 11 \times 909090909090909091; \\ 10^{21} + 1 &= 11 \times 90909090909090909091; \\ 10^{23} + 1 &= 11 \times 9090909090909090909091; \\ 10^{25} + 1 &= 11 \times 909090909090909090909091; \\ 10^{27} + 1 &= 11 \times 90909090909090909090909091; \\ 10^{29} + 1 &= 11 \times 9090909090909090909090909091; \\ 10^{31} + 1 &= 11 \times 909090909090909090909090909091; \\ 10^{33} + 1 &= 11 \times 90909090909090909090909090909091; \\ 10^{35} + 1 &= 11 \times 9090909090909090909090909090909091; \\ 10^{37} + 1 &= 11 \times \\ &\quad \times 909090909090909090909090909090909091; \\ 10^{39} + 1 &= 11 \times \\ &\quad \times 90909090909090909090909090909090909091; \\ 10^{41} + 1 &= 11 \times \\ &\quad \times 9090909090909090909090909090909090909091. \end{aligned}$$

**Áp dụng.** Mặc dù với  $n$  đủ lớn, thí dụ, với  $n = 36, 40, 42, 46, 50$ , *GeoGebra* không thể phân tích được các số đó ra thừa số (*GeoGebra* cho dấu ?, xem Bảng 1). Nhưng ta vẫn khẳng định

được nó chia hết cho 11. Ta có thể kiểm tra điều này nhờ *GeoGebra* bằng phép chia (sử dụng lệnh chia: /) như sau.

|   |                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------|
| 1 | $(10^{32}+1)/11$<br>= 909090909090909090909090909091         |
| 2 | $(10^{41}+1)/11$<br>= 90909090909090909090909090909091       |
| 3 | $(10^{43}+1)/11$<br>= 9090909090909090909090909090909091     |
| 4 | $(10^{47}+1)/11$<br>= 909090909090909090909090909090909091   |
| 5 | $(10^{51}+1)/11$<br>= 90909090909090909090909090909090909091 |

Vậy chỉ còn chưa biết các số dạng  $N_{2k+1}$  có là số nguyên tố hay không.

Quan sát Bảng 1 ta đi đến

**Khẳng định 2.** Các số dạng  $N_n = 10\dots01$  với  $n = 4k + 1$  chữ số 0 chia hết cho 101.

**Nhận xét 2.** Với  $k = 0$  thì 101 là số nguyên tố.

**Chứng minh 1.** Phép nhân trực tiếp cho

$$\underbrace{100\dots001}_{4k+1} = 99009900\dots99009901 \times 101$$

với  $k-1$  bộ bốn 9900 và một bộ 9901 ở cuối.

**Chứng minh 2.** Ta có

$$\begin{aligned} \underbrace{100\dots001}_{4k+1} &= 10^{4k+2} + 1 \\ &= (10^2 + 1)(10^{4k} - 10^{4k-2} + 10^{4k-4} - \dots - 10^2 + 1) \\ &= 101 \times 99009900\dots99009901. \end{aligned}$$

Các số lẻ  $n = 2k + 1$  chỉ có thể là  $n = 4k_1 + 1$  (khi  $k = 2k_1$ ), hoặc  $n = 4k_1 + 3$  ( $k = 2k_1 + 1$ ). Ta đã thấy rằng, nếu  $n = 4k_1 + 1$  thì  $N_n$  chia hết cho 101. Vậy câu hỏi của Giáo sư Lại Đức Thịnh đã được trả lời thêm một phần tư (tổng cộng đã bằng 3/4). Chỉ còn các số dạng  $n = 4k_1 + 3$ . Có thể thấy rõ hơn trong Phụ lục 2 dưới đây.

**Phụ lục 2:**

$$10^6 + 1 = 101 \times 9901;$$

$$10^{10} + 1 = 101 \times 99009901;$$

$$10^{14} + 1 = 101 \times 990099009901;$$

$$10^{18} + 1 = 101 \times 9900990099009901;$$

$$10^{22} + 1 = 101 \times 99009900990099009901;$$

$$10^{26} + 1 = 101 \times 990099009900990099009901;$$

$$10^{30} + 1 = 101 \times 9900990099009900990099009901;$$

$$10^{34} + 1 = 101 \times$$

$$\times 99009900990099009900990099009901;$$

$$10^{42} + 1 = 101 \times$$

$$\times 9900990099009900990099009900990099009901;$$

$$10^{50} + 1 = 101 \times$$

$$\times 99009900990099009900990099009900990099009901.$$

**Áp dụng.** Mặc dù *Geogebra* không phân tích được  $N_{37}, N_{45}$  ra thừa số (xem Bảng 1), nhưng

$n = 37 = 4 \times 9 + 1$  và  $n = 45 = 4 \times 11 + 1$  nên ta

khẳng định  $N_{37}, N_{45}$  chia hết cho 101. Ta có

|    |                                            |
|----|--------------------------------------------|
| 14 | $(10^{38} + 1) / 101$                      |
|    | - 990099009900990099009900990099009901     |
| 15 | $(10^{46} + 1) / 101$                      |
|    | - 9900990099009900990099009900990099009901 |

Quan sát tiếp Bảng 1, ta thấy nếu  $n = 8k + 3$  thì  $N_n$  chia hết cho  $10001 = 73 \times 137$ . Ta có

**Khẳng định 3.** Các số dạng  $N_n \approx 100...001$  với  $n = 8k + 3$  chữ số 0 chia hết cho 10001.

**Nhận xét 3.** Với  $k = 0$  thì  $10001 = 73 \times 137$  là hợp số.

**Chứng minh 1.** Phép nhân trực tiếp cho

$$\begin{array}{r} 100...001 \\ \hline 8k+3 \\ \hline \end{array} = 9999000099990000...9999000099990001 \times 10001.$$

**Chứng minh 2.** Ta có

$$\begin{array}{r} 100...001 \\ \hline 8k+3 \\ \hline \end{array} = 10^{8k+3} + 1 =$$

$$= (10^4 + 1)(10^{8k} - 10^{8k-4} + 10^{8k-8} - \dots - 10^4 + 1)$$

$$= 10001 \times 9999000099990000...9999000099990001.$$

Các số lẻ  $n = 4k + 3$  chỉ có thể là  $n = 8k_1 + 3$ , (khi  $k = 2k_1$ ) hoặc  $n = 8k_1 + 7$  (khi  $k = 2k_1 + 1$ )

Vậy chỉ còn trường hợp  $n = 8k_1 + 7$  là chưa có câu trả lời, nói cách khác, câu hỏi của Giáo sư Lại Đức Thịnh đã được trả lời thêm một phần tám (tổng cộng bằng 7/8.)

Có thể thấy rõ hơn trong Phụ lục 3 dưới đây.

**Phụ lục 3:**

$$10^{12} + 1 = 10001 \times 99990001;$$

$$10^{20} + 1 = 10001 \times 9999000099990001;$$

$$10^{28} + 1 = 10001 \times 999900009999000099990001;$$

$$10^{36} + 1 = 10001 \times$$

$$\times 99990000999900009999000099990001;$$

$$10^{44} + 1 = 10001 \times$$

$$\times 9999000099990000999900009999000099990001.$$

Quan sát tiếp Bảng 1, ta có thể nhận thấy nếu  $n = 16k + 7$  thì  $N_n$  chia hết cho số

$$100000001 = 17 \times 5882353. \text{ Ta có}$$

**Khẳng định 4.** Các số dạng  $N_n \approx 100...001$  với  $n = 16k + 7$  chữ số 0 chia hết cho 100000001.

**Nhận xét 4.** Với  $k = 0$  thì

$$100000001 = 17 \times 5882353 \text{ là hợp số.}$$

**Chứng minh 1.** Phép nhân trực tiếp cho

$$\begin{array}{r} 100...001 \\ \hline 16k+7 \\ \hline \end{array} = 100000001 \times 9999999900000000...9999999900000001$$

với  $k - 1$  bộ 16 số 9999999900000000 và một bộ số 9999999900000001 ở cuối.

**Chứng minh 2.** Ta có

$$\begin{aligned} \underbrace{100\dots001}_{16k+7} &= 10^{16k+6} + 1 = \\ &= (10^8 + 1)(10^{16k} - 10^{16k-8} + \dots - 10^8 + 1) \\ &= 100000001 \\ &\times 9999999900000000\dots9999999900000001 \end{aligned}$$

Có thể thấy rõ hơn trong Phụ lục 4 dưới đây.

#### Phụ lục 4:

$$\begin{aligned} 10^{24} + 1 &= 100000001 \times 9999999900000001; \\ 10^{40} + 1 &= 100000001 \times \\ &\times 99999999000000009999999900000001. \end{aligned}$$

Vì  $n = 8k + 7$  chỉ có thể là  $n = 16k_1 + 7$  (khi  $k = 2k_1$ ) hoặc  $n = 16k_1 + 15$  (khi  $k = 2k_1 + 1$ ) nên chỉ còn các số với  $n = 16k_1 + 15$  là chưa biết.

Tổng quát hóa từ bốn khẳng định trên, ta đi đến

**Định lý 1.** Các số  $N_n$ ,  $n = 2^p k + 2^{p-1} - 1$ , chia hết cho  $10\dots01$  với  $2^{p-1} - 1$  số 0, với  $p = 1, 2, \dots$

**Chứng minh 1.** Nhân trực tiếp ta được

$$\begin{aligned} \underbrace{1 \underbrace{00\dots00}_k 1}_{2^p k + 2^{p-1} - 1} &= \underbrace{10\dots01}_{2^{p-1} - 1} \\ &\times \underbrace{9\dots90\dots0\dots9\dots90\dots09\dots90\dots01}_{\substack{2^{p-1} \quad 2^{p-1} \quad \dots \quad 2^{p-1} \quad 2^{p-1} \\ k-1}} \end{aligned}$$

**Chứng minh 2.** Ta có

$$\begin{aligned} \underbrace{1 \underbrace{00\dots00}_k 1}_{2^p k + 2^{p-1} - 1} &= 10^{2^p k + 2^{p-1}} + 1 \\ &= (10^{2^{p-1}} + 1) \\ &\times (10^{2^p k} - 10^{2^p k - 2^{p-1}} + 10^{2^p k - 2 \cdot 2^{p-1}} - 10^{2^p k - 3 \cdot 2^{p-1}} + \dots + 1) \\ &= \underbrace{100\dots01}_{2^{p-1}} \times \underbrace{9\dots90\dots0\dots9\dots90\dots09\dots90\dots01}_{\substack{2^{p-1} \quad 2^{p-1} \quad \dots \quad 2^{p-1} \quad 2^{p-1} \\ k-1}} \end{aligned}$$

Từ Định lý 1, cho  $p = 1, 2, 3, 4$  ta có các Khẳng định 1, 2, 3, 4. Như vậy, ta đã khẳng định được rằng, hầu hết các số dạng  $100\dots001$  là hợp số. Cứ mỗi lần cho  $p$  thay đổi,  $p = 1, 2, \dots$ , ta lại chứng minh được một nửa số còn lại là hợp số và chỉ còn một nửa số còn lại là chưa kiểm tra được. Nhưng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 1.$$

Điều này dẫn tới dự đoán, ta đã vét sạch tất cả các số tự nhiên. Để chứng minh chặt chẽ điều này, ta phải chứng minh mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.** Mọi số tự nhiên  $n$  đều có dạng

$$n = 2^q k + 2^{q-1} - 1. \quad (1)$$

**Chứng minh.** Giả sử  $n$  chạy trên khoảng  $[2^q, 2^{q+1})$ , tức là  $2^q \leq n < 2^{q+1}$ , với  $q = 0, 1, 2, \dots$

Biểu diễn  $n = 2m - 1$  trong hệ đếm cơ số 2 ta được  $n = 2^q + a_1 2^{q-1} + \dots + a_p 2^p + a_{p-1} 2^{p-1} - 1$ , trong đó  $a_i = 0$  hoặc  $a_i = 1$  và  $a_{p-1} = 1$  là hệ số cuối cùng khác 0 trong biểu diễn cơ số 2 của  $n$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} n &= 2^q + a_1 2^{q-1} + \dots + a_p 2^p + 2^{p-1} - 1 \\ &= 2^{p-1} (2^{q-p+1} + a_1 2^{q-p} + \dots + a_p 2^{p-q+1}) + 2^{p-1} - 1 \\ &= 2^{p-1} k + 2^{p-1} - 1. \end{aligned}$$

Vì  $[1, +\infty) = \bigcup_{q=0, q \in \mathbb{N}} [2^q, 2^{q+1})$ , nên cho  $q$  lần lượt

chạy trên tập các số tự nhiên,  $q = 0, 1, 2, \dots$  thì số tự nhiên lẻ  $n$  chạy trên toàn bộ tập các số lẻ và có biểu diễn dưới dạng (1). Nhận xét rằng nếu  $n = 2k$  thì  $n$  có dạng trên với  $p = 1$ .

Mệnh đề 1 được chứng minh.

Như vậy, chỉ còn lại trường hợp: Các số dạng  $10\dots01$  với  $2^p - 1$  số 0,  $p = 2, 3, \dots$  có là số nguyên tố không?

Sau khi phân tích, bằng con đường ngắn gọn hơn, Đỗ An Khánh cũng đã đi đến Định lý 1 bằng cách chứng minh Mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 2.** Nếu  $n \neq 2^p - 1$  với  $p = 2, \dots$  thì mọi số dạng  $10\dots01$  với  $n$  số 0 là hợp số.

**Chứng minh.** Ta có  $\underbrace{100\dots001}_n = 10^{n+1} + 1$ .

**Khả năng 1.** Nếu  $n$  là chẵn ( $n = 2k$ ) thì



**Vĩ thanh 1.** Bài toán phân tích số dạng  $100\dots001$  ra thừa số nguyên tố liên quan đến bài toán sau đây: Tìm số nguyên tố  $p$  có tổng các chữ số của nó là một số nguyên tố  $q$  mà tổng các chữ số của  $q$  là 2.

**Lời giải.** Vì  $q = 2$  nên  $p$  chỉ có thể có dạng  $10\dots01$ . Nếu  $q$  là số nguyên tố khác 2 mà tổng các chữ số của nó là 2 thì nó phải có dạng  $10\dots01$ . Thí dụ: 11, 101.

Dẫn đến bài toán: Có bao nhiêu số nguyên tố dạng  $10\dots01$ ?- hiện nay có lẽ chưa có câu trả lời (xem Lại Đức Thịnh, *Toán học và Tuổi trẻ* số 28, tháng 1-1967, trang 15).

**Vĩ thanh 2.** Để tìm câu trả lời cho câu hỏi của cố Giáo sư Lại Đức Thịnh, thực ra chỉ cần chứng minh Mệnh đề 2. Tuy nhiên, trong bài báo này, chúng tôi muốn trình bày con đường đi đến lời giải, cũng khá vất vả và công phu, và phải dùng đến công cụ thí nghiệm là GeoGebra, rồi mới đi đến được chứng minh toán học. Đồng thời, qua bài viết, chúng tôi cũng muốn gợi ý bạn đọc sử dụng GeoGebra trong dạy và học toán, thậm chí trong giải quyết các giả thuyết toán học. Một câu hỏi tuy nhỏ, phát biểu đơn giản, nhưng tồn tại 50 năm (và bây giờ cũng vẫn chưa giải quyết trọn vẹn), có lẽ cũng đáng được trao đổi trên *Toán học và Tuổi trẻ*. Tất nhiên, không loại trừ khả năng đã có chứng minh hoặc phản ví dụ là có số dạng  $10^{2^p} + 1$  với  $p \neq 0$ ;  $p \neq 1$  và  $p$  đủ lớn ( $p > 12$ ), là số nguyên tố, mà chúng tôi chưa biết.

**Vĩ thanh 3.** Cuối cùng, chúng tôi nêu thêm một thí dụ chứng tỏ khả năng giải quyết vấn đề của GeoGebra trong Phân tích số tự nhiên ra thừa số nguyên tố.

**Thí dụ.** Phân tích các số sau ra thừa số nguyên tố:

$$3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 - 2;$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 - 2$$

và  $3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 - 2.$

Sử dụng GeoGebra ta được

| CAS |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| 1   | factor(3*5*7*11*13*17*19-2)<br>= 4849843             |
| 2   | factor(3*5*7*11*13*17*19*23-2)<br>= 111548433        |
| 3   | factor(3*5*7*11*13*17*19*23*29-2)<br>= 43-167-450473 |

Thí dụ này liên quan đến câu hỏi: Các số dạng  $A_n = p_1 p_2 \dots p_n - 2$  (hiệu của tích các số nguyên tố lẻ liên tiếp và 2), trong đó  $p_k$  là số nguyên tố lẻ thứ  $k$ , có là số nguyên tố với mọi  $n$ ?

Trong [2a], in lại trong [2b], cố Giáo sư Lại Đức Thịnh viết: Bằng cách thử, ta thấy rằng các số  $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  đều là số nguyên tố. Có lẽ thử với một vài giá trị nữa của  $n$ , ta sẽ tìm được một hợp số. Tuy nhiên muốn kiểm tra  $A_8$  cần làm 300 phép chia và kiểm tra  $A_9$  cần 1300 phép chia, tức là mất vài buổi làm tính.

Dùng GeoGebra, như trên ta thấy  $A_8, A_9$  là số nguyên tố, nhưng  $A_{10}$  là hợp số. Hơn nữa, với GeoGebra, chỉ mất vài phút sử dụng lệnh **iFactor** để kiểm tra, thì: trong 21 số đầu, các số  $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{11}, A_{13}, A_{16}, A_{20}$  là các số nguyên tố, các  $A_n$  còn lại là hợp số.

## TÀI LIỆU DẪN

[1] Bùi Việt Hà, *Hướng dẫn sử dụng nhanh Geogebra*, School@net.

[2a] Lại Đức Thịnh, *Nói chuyện về số nguyên tố*, Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 7-1966.

[2b] Tuyển tập 30 năm Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1997, trang 343.



## CÁC LỚP THCS

- ✓ **Bài T1/517 (Lớp 6).** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  để  $2^p + p^2$  là số nguyên tố.

PHÙNG CHÍ TỰ

(GV THCS Phương Liệt, Thanh Xuân, Hà Nội)

- ✓ **Bài T2/517 (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Điểm  $D$  nằm bên trong tam giác  $ABC$  sao cho  $\widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 30^\circ$ . Tính số đo góc  $\widehat{CAD}$ .

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

- ✓ **Bài T3/517.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} - \frac{1}{3(ab+bc+ca)}.$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

- Bài T4/517.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên cạnh  $BC$  ( $M$  không trùng với các đỉnh  $B, C$ ), đường thẳng  $AM$  cắt đường thẳng  $CD$  tại điểm  $N$  và gọi  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $DM$  và đường thẳng  $BN$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BC$  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CEN$ .

TRẦN NGỌC THẮNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

- ✓ **Bài T5/517.** Giải phương trình

$$8x^2 - 11x + 1 = (1-x)\sqrt{4x^2 - 6x + 5}.$$

ĐÀO CHÍ THANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

## CÁC LỚP THPT

- ✓ **Bài T6/517.** Cho sử  $x, y, z, t$  là các số thực sao cho  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x, y, z, t) = (x+3y)^2 + (z+3t)^2 + (x+y+z)^2 + (x+z+t)^2.$$

VŨ ĐỨC SƠN (Hà Nội)

- ✓ **Bài T7/517.** Tìm tất cả các số thực  $x$  sao cho

$$\left\{ \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x + 1} \right\} = \frac{1}{2}$$

trong đó  $\{a\}$  là kí hiệu phần lẻ của số thực  $a$ .

ĐÀO XUÂN LUYỆN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

- ✓ **Bài T8/517.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $M, N, P, Q$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên các đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh rằng  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OQ^2}.$$

NGUYỄN TIÊN TIÊN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

- ✓ **Bài T9/517.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức  $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6abc}{ab+bc+ca}.$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

- Bài T10/517.** Cho  $p$  là số nguyên tố và  $k$  là số nguyên dương. Tìm tất cả các cặp  $(p, k)$  sao cho:

$$k! = (p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2).$$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

- Bài T11/517.** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  thỏa mãn:  $f(2f(a) + f(b)) = 2a + b - 4, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$

HỒ THANH LAI

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

- Bài T12/517.** Cho tam giác  $ABC$  có  $B, C$  là hai điểm cố định thuộc đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  thay

đổi trên  $(O)$ . Ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $(C_1), (C_2), (C_3)$  lần lượt là các đường tròn đường kính  $AB, BC, CA$ .  $AH$  cắt  $(C_2)$  tại điểm  $M$  ( $M$  thuộc đoạn  $AH$ ),  $BH$  cắt  $(C_3)$  tại điểm  $N$  ( $N$  thuộc đoạn  $BH$ ),  $CH$  cắt  $(C_1)$  tại điểm  $P$  ( $P$  thuộc đoạn  $CH$ ).  $AN$  cắt  $(C_1)$  tại điểm  $S$  khác  $A$ ,  $AP$  cắt  $(C_3)$  tại điểm  $T$  khác  $A$ . Đường thẳng  $NP$  cắt  $(C_1)$  tại điểm  $X$  khác  $P$ , cắt  $(C_3)$  tại  $Y$  khác  $N$ ;  $XS$  cắt  $YT$  tại điểm  $Z$ . Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $NP$  cắt  $(C_1)$  tại  $J$ , cắt  $(C_3)$  tại  $L$ .

a) Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AN$  cắt  $(C_1)$  tại điểm  $V$ , cắt  $(C_3)$  tại điểm  $U$ . Chứng minh rằng ba điểm  $V, N, I$  thẳng hàng và ba điểm  $U, P, L$  thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $XYZ$  là điểm cố định khi  $A$  thay đổi trên  $(O)$ .

NGUYỄN NGỌC TÚ (GV THPT chuyên Hà Giang)

NGUYỄN VĂN LINH (Hà Nội)

**Bài L1/517.** Một vật dao động điều hoà với chu kỳ  $T$  và biên độ  $A = 10$  cm. Tại thời điểm  $t = t_1$  vật có li độ  $x_1 = 5$  cm và tốc độ  $v_1$ . Đến thời điểm  $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$  vật có vận tốc  $v_2 = 5\sqrt{3}$  cm/s. Xác định  $v_1$ .

VIỆT CUƠNG (Hà Nội)

**Bài L2/517.** Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần  $R = 30 \Omega$ , cuộn cảm thuần  $L$  và tụ điện  $C$ . Đặt điện áp xoay chiều  $u = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$  (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa  $R, L$  và chứa  $R, C$ . Khi đó cường độ dòng điện trong mạch

$$i_1 = 6 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right) \text{ (A)} \text{ và } i_2 = 6 \cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right) \text{ (A)}.$$

Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có  $R, L, C$  mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/517 (For 6<sup>th</sup> grade).** Find all the prime numbers  $p$  so that  $2^p + p^2$  is a prime.

**Problem T2/517 (For 7<sup>th</sup> grade).** Given an isosceles right triangle  $ABC$  with the vertex angle  $A$ . The point  $D$  inside  $ABC$  such that  $\widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 30^\circ$ . Compute the vertex angle  $\widehat{CAD}$ .

**Problem T3/517.** Given positive numbers  $a, b, c$  such that  $a + b + c = 1$ . Find the maximum value of the expression

$$P = \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} - \frac{1}{3(ab+bc+ca)}.$$

**Problem T4/517.** Suppose that  $ABCD$  is a rhombus with  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Let  $M$  be a point on the line segment  $BC$  ( $M$  is different from  $B$  and  $C$ ). The line  $AM$  meets the line  $CD$  at  $N$  and then let  $E$  be the intersection between the lines  $DM$  and  $BN$ . Show that the line  $BC$  is tangent to the circumcircle of the triangle  $CEN$ .

**Problem T5/517.** Solve the equation

$$8x^2 - 11x + 1 = (1-x)\sqrt{4x^2 - 6x + 5}.$$

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/517.** Given real numbers  $x, y, z, t$  satisfying  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 2$ . Find the maximum value of the expression

$$P(x, y, z, t) = (x+3y)^2 + (z+3t)^2 + (x+y+z)^2 + (x+z+t)^2.$$

**Problem T7/517.** Find all the real roots of the equation  $\left\{ \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x + 1} \right\} = \frac{1}{2}$

where  $\{a\}$  denotes the fractional part of the number  $a$ .

**Problem T8/517.** Given a convex quadrilateral  $ABCD$ . Two diagonals  $AC$  and  $BD$  intersect at  $O$ . Let  $M, N, P, Q$  respectively be the perpendicular projections of  $O$  on the lines  $AB, BC, CD, DA$ . Show that  $AC$  and  $BD$  are perpendicular if and only if ...

(Xem tiếp trang 40)



**Bài T1/513.** Tìm các số nguyên tố  $p, q, r$  thỏa mãn  $p + q^2 + r^3 = 200$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết  $p + q^2 + r^3 = 200$  suy ra  $r^3 < 200$ , do đó  $r \leq 5$ , mà  $r$  là số nguyên tố nên chỉ xảy ra  $r$  bằng 2, hoặc 3, hoặc 5. Xét các trường hợp sau.

- Với  $r = 5$  thì từ  $p + q^2 + r^3 = 200$  suy ra  $p + q^2 = 200 - 125 = 75$ . Tổng  $p + q^2$  là số lẻ nên phải có một số hạng là số chẵn, số nguyên tố chẵn là 2. Nếu  $p = 2$  thì  $q^2 = 73$  (loại vì số  $q$  không nguyên).

Nếu  $q = 2$  thì  $p = 71$  ( $p$  là số nguyên tố).

- Với  $r = 3$  thì từ  $p + q^2 + r^3 = 200$  suy ra  $p + q^2 = 200 - 27 = 173$ . Tổng  $p + q^2$  là số lẻ nên phải có một số hạng là số chẵn, số nguyên tố chẵn là số 2.

Nếu  $p = 2$  thì  $q^2 = 171$  (loại vì số  $q$  không nguyên).

Nếu  $q = 2$  thì  $p = 169 = 13^2$  ( $p$  là hợp số).

- Với  $r = 2$  thì từ  $p + q^2 + r^3 = 200$  suy ra  $p + q^2 = 200 - 8 = 192$ , do đó  $q^2 < 192$  nên  $q \leq 13$ . Tổng  $p + q^2$  là số chẵn nên hai số hạng đều là số lẻ.

Nếu  $q = 3$  thì  $p = 183 = 3.61$  ( $p$  là hợp số).

Nếu  $q = 5$  thì  $p = 167$  ( $p$  là số nguyên tố).

Nếu  $q = 7$  thì  $p = 143 = 11.13$  ( $p$  là hợp số).

Nếu  $q = 11$  thì  $p = 71$  ( $p$  là số nguyên tố).

Nếu  $q = 13$  thì  $p = 23$  ( $p$  là số nguyên tố).

Vậy bài toán có bốn nghiệm  $(p, q, r)$  là  $(71; 2; 5)$ ,  $(167; 5; 2)$ ,  $(71; 11; 2)$ ,  $(23; 13; 2)$ .

**Nhận xét.** Có thể giải bằng cách lập luận rằng tổng  $p + q^2 + r^3 = 200$  là số chẵn nên phải có một số hạng là số chẵn, mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Cho

một trong các số  $p, q, r$  bằng 2, thay vào  $p + q^2 + r^3 = 200$ , rồi tìm hai số còn lại.

Các bạn sau có lời giải đúng. **Thái Nguyên:** Đồng Hoàng Minh Đạo, 6A4, Trần Quang Khôi, 6A5, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** Lê Thị Bảo Ngọc, 6A1, Phùng Thu Thủy, Nguyễn Huy Hoàng Sơn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Tuấn Anh, 6T, THCS Lương Thế Vinh; **Nghệ An:** Lê Tiến Hợp, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hoàng Văn Khánh, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Đào Phương Anh, Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Thái Hoàng Anh, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Hải Triều, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đỗ Lương; Hà Tĩnh:** Đoàn Thị Minh Anh, Phan Thị Châu, Trần Hữu Nhân, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Quảng Trị:** Võ Nguyên Thắng, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đồng Hà; **Quảng Ngãi:** Võ Hữu Thanh Thảo, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng:** Lê Ngọc Xuân Thơ, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

**Bài T2/513.** Cho số thực

$$P = \frac{2^2 + 1}{2^2 + 3 \cdot 3 + 4} \cdot \frac{3^2 + 1}{3^2 + 3 \cdot 3 + 4} \cdots \frac{98^2 + 1}{98^2 + 3 \cdot 98 + 4}$$

(tích 97 phân số). Chứng minh

$$\frac{6}{10^6} < P < \frac{2}{83325}.$$

**Lời giải.** Ta có: Với  $a, b, k \in \mathbb{N}^*$  và  $a > b > k$  thì

$$\frac{b}{a} > \frac{b-k}{a-k} \quad (*).$$

Áp dụng (\*) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 3n + 4} &> \frac{(n^2 + 1) - 2}{(n^2 + 3n + 4) - 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n + 2} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n-1}{n+2} \quad (1). \end{aligned}$$

Áp dụng (1) ta được:

$$P > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{97}{100} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{98 \cdot 99 \cdot 100} > \frac{6}{10^6}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{n^2 + 1}{n^2 + 3n + 4} < \frac{n}{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (2).$$

Thật vậy:  $(2) \Leftrightarrow (n^2 + 1)(n+3) < n(n^2 + 3n + 4)$

$\Leftrightarrow n^3 + n + 3n^2 + 3 < n^3 + 3n^2 + 4n \Leftrightarrow n > 1$  (đúng với mọi  $n \geq 2$ ).

Áp dụng (2) ta có:

$$P < \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{95}{98} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{97}{100} \cdot \frac{98}{101} = \frac{2}{83325}$$

**Nhận xét.** 1) Nếu tính cụ thể tích hai thừa số đầu của  $P$  và áp dụng (2) với  $n = 4, 5, \dots, 98$  ta được kết quả "mạnh hơn":

$$\frac{2^2+1}{2^2+3 \cdot 2+4} \cdot \frac{3^2+1}{3^2+3 \cdot 3+4} = \frac{25}{154} < \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P < \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{97}{100} \cdot \frac{98}{101} = \frac{4,5}{99 \cdot 100 \cdot 101} = \frac{1}{49995}$$

2) Không nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** Ngô Uyển Nhi, 7A5, THCS Phương Liệt, Thanh Xuân; **Thanh Hóa:** Nguyễn Viết Quang Anh, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T3/513.** Tìm tất cả các số nguyên dương

$$a, b, c, d \text{ thỏa mãn } \begin{cases} a+b+c+d-3=ab \\ a+b+c+d-3=cd \end{cases}$$

**Lời giải.** Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có  $ab+cd=2(a+b+c+d)-6$ . Chuyển vế, ta có đẳng thức tương đương

$$(a-2)(b-2)+(c-2)(d-2)=2 \quad (*)$$

Nếu  $a = \min\{a, b, c, d\}$  thì từ (\*) và giả thiết  $a, b, c, d$  là các số dương nguyên, ta suy ra:

$$-1 \leq a-2 \leq 1.$$

Chỉ có 3 khả năng xảy ra:

1) Trường hợp  $a-2=-1$ . Trong trường hợp này  $a=1$ . Thay vào hai đẳng thức ban đầu, ta có hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} c+d=2 \\ b=cd \end{cases}. \text{ Đẳng thức } c+d=2$$

cho ta nghiệm nguyên dương  $(c, d) = (1, 1)$  và đẳng thức thứ hai cho ta  $b=1$ . Nghiệm của hệ phương trình  $(a, b, c, d)$  là bộ  $(1, 1, 1, 1)$ .

2) Trường hợp  $a-2=0$ . Ta có  $a=2$ , và (\*) là  $(c-2)(d-2)=2$  cho nghiệm  $(c, d)$  là các bộ

$(4, 3), (3, 4)$ . Thay vào phương trình của hệ ban đầu ta có  $2+b+7-3=2b \Rightarrow b=6$ . Nghiệm phương trình  $(a, b, c, d)$  là bộ  $(2, 6, 3, 4)$  và  $(2, 6, 4, 3)$ .

3) Trường hợp  $a-2=1$ , có  $a=3$  và (\*) cho ta  $b-2=c-2=d-2=1$  hay là  $a=b=c=d=3$ .

Đem hoán vị  $a$  với  $b$ ,  $c$  với  $d$ , cặp  $(a, b)$  cho cặp  $(c, d)$  của các nghiệm này, ta thu được tất cả 10 nghiệm cho hệ phương trình ban đầu:  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(3, 3, 3, 3)$ ,  $(2, 6, 4, 3)$ ,  $(6, 2, 4, 3)$ ,  $(2, 6, 3, 4)$ ,  $(6, 2, 3, 4)$ ,  $(3, 4, 6, 2)$ ,  $(3, 4, 2, 6)$ ,  $(4, 3, 6, 2)$ ,  $(4, 3, 2, 6)$ .

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có đáp số đúng:

**Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1 THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Thanh Hóa:** Nguyễn Viết Quang Anh, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, huyện Cam Lộ; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Phủ Thọ:** Nguyễn Đình Huy, Đỗ Việt Hiếu, 9A, THCS Trại Trần II, Yên Lập; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T4/513.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB=AD$ ,  $CB=CD$  và  $\widehat{ABC}=90^\circ$ . Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $R \geq r\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** (Theo bạn Thân Kiều Trang, 9A3, THCS An Khánh, Ninh Kiều, Cần Thơ).

**Bài toán tổng quát:** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  và ngoại tiếp đường tròn  $(I; r)$ . Chứng minh  $R \geq r\sqrt{2}$ .

Thật vậy, đặt  $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$ .

Vì tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp nên  $a+c=b+d$ .

Để chứng minh được

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b+c+d)r = (a+c)r \quad (1)$$

Lại có,  $2S_{ABC} \leq ab, 2S_{ADC} \leq cd$ , suy ra

$$2S_{ABCD} \leq ab + cd.$$

Tương tự:  $2S_{ABCD} \leq ad + bc$ , dẫn tới

$$4S_{ABCD} \leq ab + cd + ad + bc = (a+c)(b+d) = (a+c)^2 \quad (2)$$

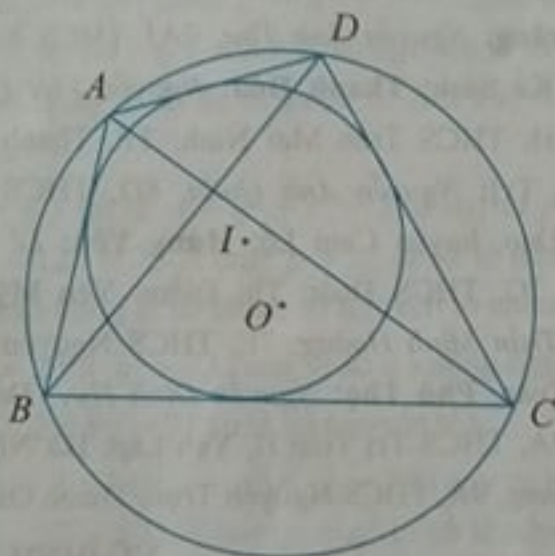
Từ (1) và (2) suy ra:

$$S_{ABCD}^2 \geq 4r^2 S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} \geq 4r^2.$$

Mặt khác,  $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} AC \cdot BD \leq 2R^2$ , do đó:

$$2R^2 \geq 4r^2 \text{ hay } R \geq r\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $ABCD$  là hình vuông.



**Nhận xét.** Ngoài bạn Trang, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt.

**Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trữ, Thanh Oai; **Nghệ An:** Phạm Văn Quyền, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Ngô Thị An Bình, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hưng Yên:** Nguyễn Gia Khánh, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/513.** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2020$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

**Lời giải.** Áp dụng BĐT  $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ , ta

$$\text{có: } T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2+y^2}, b = \sqrt{y^2+z^2}, c = \sqrt{z^2+x^2}$$

$$\Rightarrow a, b, c \text{ dương và } a+b+c = 2020.$$

$$\text{Ta có: } x^2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}; y^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2};$$

$$z^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

BĐT(1) trở thành:

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{a^2+c^2-b^2}{b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{c} + \frac{b^2+c^2-a^2}{a} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{a^2+c^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} - (a+b+c) \right)$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} - 2020 \right).$$

Áp dụng BDT Cauchy cho hai số hạng trong mỗi dấu ngoặc, ta có:

$$\frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a}$$

$$= \left( \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) + \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) + \left( \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right).$$

$$\geq 2(a+b+c) = 2 \cdot 2020.$$

$$\text{Suy ra: } T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2020 = 505\sqrt{2}.$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi

$$a=b=c = \frac{2020}{3} \Leftrightarrow x=y=z = \frac{1010\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy min } T = 505\sqrt{2} \text{ khi } x=y=z = \frac{1010\sqrt{2}}{3}.$$

**Nhận xét.** Hầu hết các bạn gửi bài giải sử dụng phép đặt  $a = \sqrt{x^2+y^2}, b = \sqrt{y^2+z^2}, c = \sqrt{z^2+x^2}$

$$\Rightarrow a, b, c \text{ dương và } a+b+c = 2020.$$

Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

và  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ , từ (2) có thể làm như

$$\begin{aligned} \text{sau: } & \frac{a^2+c^2-b^2}{b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{c} + \frac{b^2+c^2-a^2}{a} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{b} + \frac{a^2+b^2+c^2}{c} + \frac{a^2+b^2+c^2}{a} - 2(a+b+c) \\ &= (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 2.2020 \\ &\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 2.2020 \\ &\geq 3(a+b+c) - 2.2020 = 2020. \end{aligned}$$

Ngoài ra từ (2) có thể sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \quad \forall x, y, z > 0$$

để ước lượng.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

**Nghệ An:** Phạm Ngọc Trinh, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phạm Văn Quyền**, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Ngô Thị Anh Bình**, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** Lê Thị Thùy Dung, 8C, THCS TT. Triệu Sơn, Lê Thành Trung, 9D, THCS Điện Biên, Nguyễn Việt Quang Anh, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** Trần Minh Khôi, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Vĩnh Phúc:** Trần Thế Thắng, 8A, THCS Nghĩa Hưng, Vĩnh Tường; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

#### NGUYỄN ANH DŨNG

**Bài T6/513.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{bc^2+1}} + \sqrt{\frac{bc}{ca^2+1}} + \sqrt{\frac{ca}{ab^2+1}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

**Lời giải.** Trong lời giải bài toán này chúng ta sẽ dùng các bất đẳng thức (BĐT) sau:

1) Bất đẳng thức Bunyakovsky: Với các số thực  $a, b, c, x, y, z$ :

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &\geq (ax+by+cz)^2 \\ (\text{vì } (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 &= \\ &= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 \geq 0). \end{aligned}$$

2) Với các số thực dương  $x, y$  có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

(vì  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ ;  $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$ ).

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{ab}{bc^2+1}} = \sqrt{\frac{ab}{bc^2+abc}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c+a}},$$

tương tự cho hai số hạng còn lại của biểu thức ở vế trái của BĐT cần chứng minh (kí hiệu là  $P$ ) ta thu được:

$$P = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{\frac{c}{b+c}}.$$

Sử dụng các BĐT 1) và 2) ta có:

$$P^2 \leq \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}\right);$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{a}{c+a} &\leq \frac{a+c}{ca} \cdot \frac{a}{c+a} + \frac{a}{4b} \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{c} + \frac{1}{4b} + \frac{a}{4bc} = ab + \frac{ca}{4} + \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{b}{a+b} \leq bc + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4};$$

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{c}{b+c} \leq ca + \frac{bc}{4} + \frac{c^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } P^2 \leq \frac{5}{4}(ab+bc+ca) + \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{8}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\leq \frac{(a+b+c)^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } P \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

**Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức hay, có nhiều biến đổi đẹp. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** Nguyễn Xuân Tùng, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hóa:** Lê Thị Thùy Dung, 8C, THCS TT. Triệu Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Huy Đức, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Bùi Nguyễn Thanh Ngân, 10T2, Nguyễn Khánh Huy, 11T2, THPT chuyên Võ

Nguyễn Giáp; **Quảng Trị:** Nguyễn Hữu Hoàng Long, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bạc Liêu:** Đỗ Văn Dương, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Cần Thơ:** Trịnh Tuyết Nhi, Đỗ Thanh Xuân, 11A3, THPT An Khánh, Ninh Kiều, Trần Thị Kim Hoàng, Trần Thị Kim Phụng, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Ninh Kiều, Nguyễn Cao Trí, 11A3, THPT Bùi Hữu Nghĩa, Bình Thủy, TP. Cần Thơ.

### NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T7/513.** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x \notin (-\pi; \pi) & (1) \\ \sin y - \sin x = \frac{2xy(\pi + x)}{\pi^2 + x^2} & (2) \\ y^3 + \pi^3 = x^3 - 3\pi xy & (3) \end{cases} \quad (I)$$

**Lời giải.** (Theo bạn Ngô Quốc Bảo và tác giả Phạm Hải Đăng) Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow [(y + \pi)^3 - x^3] - 3\pi y(y + \pi) + 3\pi xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + \pi - x)[(y + \pi)^2 + (y + \pi)x + x^2] - 3\pi y(y + \pi - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + \pi - x)[y^2 + \pi^2 + x^2 - y\pi + x\pi + xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \pi - x = 0 & (3') \\ y^2 + \pi^2 + x^2 - y\pi + x\pi + xy = 0 & (3'') \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (3'') \Leftrightarrow \left(x + \frac{y + \pi}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y - \pi)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y + \pi}{2} = 0 \\ y = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\pi \\ y = \pi \end{cases}$$

Rõ ràng  $(x, y) = (-\pi, \pi)$  thỏa mãn (1) và (2). Vậy  $(x, y) = (-\pi, \pi)$  là nghiệm của (I).

Xét (3'):  $y + \pi - x = 0 \Leftrightarrow y = x - \pi$ .

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\text{VT}(2) = \sin y - \sin x = \sin(x - \pi) - \sin x = -2\sin x$$

$$\text{VP}(2) = \frac{2yx(\pi + x)}{\pi^2 + x^2} = \frac{-2x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2}$$

$$\text{Do đó: } (2) \Leftrightarrow \sin x - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2} = 0 \quad (2')$$

$$\text{Đặt } f(x) := \sin x - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2}. \text{ Vì } f(x) \text{ là hàm lẻ}$$

( $f(-x) = -f(x)$  với mọi  $x$ ) nên nếu  $x = \alpha$  là nghiệm của (2') thì  $x = -\alpha$  cũng là nghiệm của (2'). Do đó chỉ cần xét  $x \geq 0$ . Theo (1),  $x \notin (-\pi; \pi)$  nên  $x \leq -\pi$  hoặc  $x \geq \pi$ . Do đó chỉ cần xét  $x \geq \pi$ .

Do  $x \geq \pi$  nên  $u = \pi - x \leq 0$ . Mà  $\sin u \geq u$  với mọi  $u \leq 0$  nên ta có:  $\sin x = \sin(\pi - x) \geq \pi - x$ .

Mặt khác, với mọi  $x \geq \pi$  ta có:

$$\pi - x - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2} = (\pi - x) \left(1 - \frac{x(\pi + x)}{\pi^2 + x^2}\right) = \frac{\pi(\pi - x)^2}{\pi^2 + x^2} \geq 0.$$

Suy ra với mọi  $x \geq \pi$  ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2} = \sin(\pi - x) - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2} \\ &\geq (\pi - x) - \frac{x(\pi^2 - x^2)}{\pi^2 + x^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = \pi$ . Vậy  $y = 0$ . Do  $x = \pi$  là nghiệm nên  $x = -\pi$  (khi ấy  $y = -2\pi$ ) cũng là nghiệm. Vậy hệ (I) có ba nghiệm

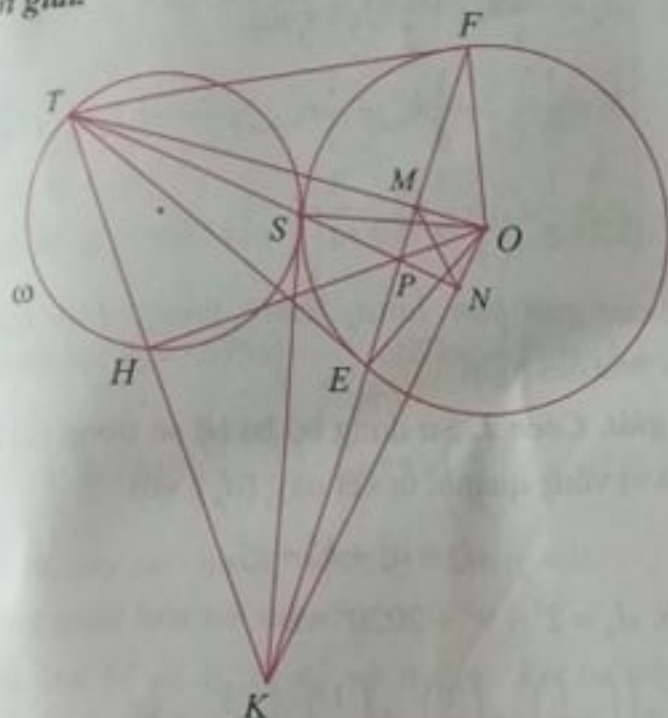
$$(-\pi; \pi), (\pi, 0), (-\pi, -2\pi).$$

**Nhận xét.** Bạn Nguyễn Xuân Tùng, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Hà Nội và bạn Ngô Quốc Bảo, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Bến Tre có lời giải tốt. Tuy nhiên, các bạn không nhận xét  $f(x)$  là hàm lẻ và phải dùng đạo hàm nên lời giải dài dòng hơn.

### TẠ DUY PHƯƠNG

**Bài T8/513.** Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn không trùng với O. Đường thẳng  $\Delta$  di động luôn đi qua P và không đi qua O cắt (O) tại E, F. Tiếp tuyến tại E, F của (O) cắt nhau tại T. Gọi S là giao điểm của đoạn thẳng TP với (O). Gọi  $\omega$  là đường tròn qua S, T đồng thời tiếp xúc với (O). Chứng minh rằng đường tròn  $\omega$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $\Delta$  di động.

Lời giải.



Gọi  $M$  là trung điểm của  $EF$ , kẻ  $ON \perp ST$  ( $N$  thuộc  $ST$ ) và gọi  $K$  là giao điểm của  $ON$  và  $EF$ . Khi đó vì  $P$  là trực tâm của tam giác  $TOK$  nên có  $OP \perp KT$  (1).

Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông  $OET$ , ta có  $OE^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OT}$ . Mặt khác

$$\overline{OM} \cdot \overline{OT} = \overline{ON} \cdot \overline{OK} \text{ và } OE = OS$$

nên  $OS^2 = \overline{ON} \cdot \overline{OK}$ . Suy ra tam giác  $SOK$  vuông tại  $S$ , từ đó  $KS$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $S$  và do vậy  $KS$  cũng tiếp xúc với đường tròn  $\omega$ . Tiếp theo gọi  $H$  là giao điểm thứ hai của  $KT$  với  $\omega$  thì do  $KS$  tiếp xúc với  $\omega$  nên  $KS^2 = \overline{KT} \cdot \overline{KH}$ . Mà theo hệ thức lượng trong tam giác vuông  $SOK$  có  $KS^2 = \overline{KN} \cdot \overline{KO} \Rightarrow \overline{KH} \cdot \overline{KT} = \overline{KN} \cdot \overline{KO}$ , dẫn đến tứ giác  $ONHT$  nội tiếp, suy ra:

$$\widehat{OHT} = \widehat{ONT} = 90^\circ \Rightarrow OH \perp TK \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm  $O, P, H$  thẳng hàng. Vì tứ giác  $MPHT$  nội tiếp, nên  $\overline{OP} \cdot \overline{OH} = \overline{OM} \cdot \overline{OT} = OE^2$  (không đổi), suy ra điểm  $H$  cố định. Do đó đường tròn  $\omega$  luôn đi qua điểm  $H$  cố định. Ta có điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Cũng có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng tính chất của phép nghịch đảo (xét phép nghịch đảo cực  $O$ , phương tích  $k = R^2$ , với  $R$  là bán kính của đường tròn  $(O)$ ) hoặc tính chất cực và

đường đối cực (xét cực – đối cực đối với đường tròn  $(O)$ ). Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

**Bắc Ninh:** Nguyễn Tất Đạt, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; **Nam Định:** Phạm Việt Hòa, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Quảng Bình:** Đặng Hoàng Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đồng Tháp:** Nguyễn Trúc Như Bình, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** Lâm Khánh Hòa, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Cần Thơ:** Phan Trung Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

### HỒ QUANG VINH

**Bài T9/513.** Cho các số thực  $x, y, z$  sao cho  $x + y + z = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{4e^{2x} - 2e^x + 1} + \frac{1}{4e^{2y} - 2e^y + 1} + \frac{1}{4e^{2z} - 2e^z + 1}$$

**Lời giải.** Đặt  $a = e^x, b = e^y, c = e^z$  (với  $a > 0, b > 0, c > 0$ ). Ta có:  $abc = e^{x+y+z} = e^0 = 1$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{4b^2 - 2b + 1} + \frac{1}{4c^2 - 2c + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{a^2}}{4 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}} + \frac{\frac{1}{b^2}}{4 - \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}} + \frac{\frac{1}{c^2}}{4 - \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}}. \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$S \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{12 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad (1)$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) &\geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 6 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì  $abc = 1$  nên  $a = \frac{1}{bc}, b = \frac{1}{ac}, c = \frac{1}{ab}$ , kết hợp

với (2) ta được:  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \\
&\geq 12 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 12 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{12 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq 1 \\
&(\text{vì } 12 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\
&= \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2 + 9 > 0).
\end{aligned}$$

Kết hợp với (1), ta có  $S \geq 1$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $S$  bằng 1, đẳng thức xảy ra khi  $x = y = z = 0$ .

**Nhận xét.** Đây là bài toán về bất đẳng thức vô tỉ có điều kiện. Ta cần đặt ẩn phụ để đưa về bất đẳng thức hữu tỉ rồi sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Có thể chứng minh  $S \geq 1$  bằng cách sử dụng hàm số như sau:

Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{4t^2 - 2t + 1} + \frac{2}{3} \ln t$  (với  $t > 0$ ), sử

dụng đạo hàm để chứng minh  $f(t) \geq f(1) = \frac{1}{3}$ . Do

$$\text{đó } S = f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

**Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; Nguyễn Đức Thọ, 10A1T, Lâm Khánh Hòa, 11A2T, THPT Nguyễn Thị Minh Khai; **Bến Tre:** Ngô Quốc Bảo, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TP. Bến Tre; **Hưng Yên:** Đặng Duy Hậu, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T10/513.** Cho ba dãy số  $(a_n), (b_n), (c_n)$  được xác định như sau;  $a_0 = 2, b_0 = 9, c_0 = 2020$  và

$$\begin{cases} a_n = -\frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{4}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} - \frac{1}{4}c_{n-1} \end{cases}, \forall n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Tìm các giới hạn  $\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n$ . Hãy tổng quát hóa bài toán.

**Lời giải. Cách 1.** Sử dụng bộ ba hệ số trong (1) là hoán vị vòng quanh, ta xét dãy  $(d_n)$  với

$$d_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2,$$

ta có:  $d_0 = 2^2 + 9^2 + 2020^2$  và

$$\begin{aligned} d_n &= \left( \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2) \\ &= \frac{9}{16} (a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2) \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (2), sử dụng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được:

$$d_n = \left(\frac{9}{16}\right)^n (2^2 + 9^2 + 2020^2), n \in \mathbb{N}^* \quad (3).$$

Vì  $\lim \left(\frac{9}{16}\right)^n = 0$  nên từ (3), ta thu được

$\lim d_n = 0$ . Từ (2) suy ra:

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = 0.$$

**Cách 2.** Từ (1) suy ra:

$$a_n + b_n + c_n = \frac{3}{4}(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}).$$

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta chứng minh

$$\text{được: } a_n + b_n + c_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n (a_0 + b_0 + c_0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 2031.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đây suy ra: } a_n &= -\frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ &= -\frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) \\ &= -\frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times 2031. \end{aligned}$$

Ta thu được dãy sai phân bậc nhất:

$$a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times 2031 \quad (4).$$

Đặt  $g_n = a_n - 677 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ . Ta có:

$$2g_n = -\frac{3}{2}g_{n-1} \Rightarrow g_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n g_0.$$

Suy ra:  $a_n = -675 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 677 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, n=1, 2, \dots$

Tương tự:  $b_n = -675 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 677 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, n=1, 2, \dots$

$$c_n = 1343 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 677 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, n=1, 2, \dots$$

Từ đó, suy ra:  $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = 0$ .

**Tổng quát hóa bài toán:**

Cho hai bộ số  $a_0, b_0, c_0$  và  $\alpha, \beta, \gamma$ . Xét ba dãy số  $(a_n), (b_n), (c_n)$  được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_n = -\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1} + \gamma c_{n-1}, n=1, 2, \dots \\ b_n = \gamma a_{n-1} - \alpha b_{n-1} + \beta c_{n-1}, n=1, 2, \dots \\ c_n = \beta a_{n-1} + \gamma b_{n-1} - \alpha c_{n-1}, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

Tìm các giới hạn  $\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n$ .

**Nhận xét.** 1) Để giải bài toán tổng quát theo cách 1,

ta cần giả thiết thêm  $\begin{cases} |\alpha + \beta + \gamma| < 1 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0. \\ \alpha\beta\gamma \neq 0 \end{cases}$

2) Để giải bài toán tổng quát theo cách 2, ta cần thêm giả thiết  $\gamma = \beta$ .

3) Một số bạn sử dụng trực tiếp phương trình sai phân bậc hai cũng nhận được kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

**Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** Nguyễn Xuân Tùng, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Bình:** Lê Quang Phúc, Đặng Hoàng Duy, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** Trần Ánh Dương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

**NGUYỄN VĂN MẠU**

**Bài T11/513.** Cho  $h$  là số nguyên dương sao cho  $2^h + 1 = p$  là một số nguyên tố. Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho  $2^k - 1$  chia hết cho  $p$ .

**Lời giải** (Theo bạn Nguyễn Trúc Như Bình, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp).

Ta có  $2^h \equiv -1 \pmod{p}$  nên  $2^{2h} \equiv 1 \pmod{p}$  (1).

Số dương  $k$  là cấp của 2  $\pmod{p}$ ,  $k = \text{ord}_p 2$ . Theo

tính chất cơ bản của cấp, từ (1) suy ra  $k \mid 2h$ . Ta có

$$2^k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Nếu  $k \leq h$  thì  $2^k - 1 < 2^h + 1 = p$  (loại). Vậy  $k > h$ .

Nếu  $k$  lẻ thì từ  $k \mid 2h$  suy ra  $k \mid h$ , dẫn đến

$$2^h \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p = 2 \text{ (loại)}.$$

Vậy  $k$  chẵn. Đặt  $k = 2t$ , với  $t \mid h$ . Ta có

$$2^k - 1 = 2^{2t} - 1 = (2^t - 1)(2^t + 1) \text{ chia hết cho } p. \text{ Do } p$$

là số nguyên tố và  $2^t - 1 < 2^h + 1 = p$  nên  $2^t + 1$  chia

hết cho  $p$ , suy ra  $2^t + 1 \geq p$ .

Mà  $2^t + 1 \leq 2^h + 1 = p \Rightarrow t = h$ . Từ đó  $k = 2h$ .

**Nhận xét.** Chỉ có 6 bạn tham gia giải bài này, trong đó 5 bạn có lời giải đúng với các cách giải khác nhau. Đó là các bạn (ngoài bạn Bình):

**Vĩnh Phúc:** Trần Ánh Dương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Phan Thành Tín, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Đặng Hoàng Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Duy Phước, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T12/513.** (D) và (O) là hai đường tròn tiếp xúc với nhau tại X. Nếu tiếp xúc trong thì (D) nằm trong (O). A là một điểm của (D) khác X sao cho tiếp tuyến với (D) tại A cắt (O) tại hai điểm phân biệt hoặc trùng nhau. B là một trong các giao điểm đó. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và đường tròn (B, BA) là một tiếp tuyến của (D).

**Lời giải.**

Gọi P là giao điểm thứ hai của XB và (D); Q là giao điểm thứ hai của AP và (B, BA);  $\Delta$  là tiếp tuyến với (D) tại P.





## MỘT VÀI KẾT QUẢ HAY VỀ GIỚI HẠN CỦA MỘT TỔNG

TRẦN MINH VŨ (GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai)

TRẦN THỊ THANH MINH (GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Gia Lai)

HUỲNH KIM LINH (GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa)

### I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nghiên cứu về dãy số và sự hội tụ của dãy số đóng một vai trò quan trọng và then chốt trong sự phát triển của hầu hết các lĩnh vực của toán học. Phương pháp giới hạn là phương pháp cơ bản mà dựa trên đó giải tích toán học được xây dựng và một trong những phép toán cơ bản của giải tích là chuyển qua giới hạn.

Như đã biết, dãy truy hồi cấp một

$$u_1 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n + f(n) \quad (n \geq 1)$$

đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả nhất định. Trong khi đó dãy truy hồi được cho bởi công thức

$$u_1 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c \quad (n \geq 1) \quad (1.1)$$

với  $a, b$  và  $c$  là các số thực cho trước thì ít được quan tâm hơn vì độ phức tạp của nó.

Bằng cách thức tương tự, chúng tôi cũng nghiên cứu sự hội tụ cho các dãy truy hồi có dạng

$$u_1 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n^{\lambda+1} + bu_n^\lambda + cu_n + d \quad (n \geq 1) \quad (1.2)$$

với  $\lambda, a, b, c$  và  $d$  là các số thực cho trước. Chúng ta có thể tìm được một số bài tập riêng lẻ tại [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Chính vì vậy sự nghiên cứu tổng quát của nó mang lại nhiều ý nghĩa cho sự phát triển của toán học.

Để minh họa cho các kết quả đạt được, chúng tôi xét một số thí dụ là các đề thi toán Olympic dành cho học sinh, sinh viên trong và ngoài nước trong những năm gần đây.

### II. KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

Trước hết chúng tôi nghiên cứu sự hội tụ của dãy truy hồi (1.1) và đạt được kết quả sau.

**Định lý 2.1.** Cho  $a, b$  là các số thực cho trước và  $(u_n)$  là dãy số được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2b)u_n + b^2, \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Dãy số trên hội tụ khi và chỉ khi  $b-1 \leq a \leq b$ .

**Chứng minh.** Trước hết ta có:

$$u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2.$$

Do đó dãy số đã cho là dãy số tăng.

**Điều kiện cần:** Giả sử dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn là  $l$ , ta có phương trình:

$$l = l + (l - b)^2 \Leftrightarrow l = b.$$

Vì vậy ta phải có dãy số tăng và bị chặn trên bởi  $b$ . Khi đó với mọi  $n$  ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq b &\Leftrightarrow u_n^2 + (1-2b)u_n + b^2 \leq b \\ &\Leftrightarrow u_n^2 + (1-2b)u_n + b^2 - b \leq 0. \end{aligned}$$

Giải bất phương trình trên với ẩn  $u_n$  ta được  $b-1 \leq u_n \leq b$ . Đặc biệt với  $b-1 \leq u_1 \leq b$  ta được  $b-1 \leq a \leq b$ .

**Điều kiện đủ:** Giả sử  $b-1 \leq a \leq b$ . Khi đó bằng quy nạp ta có thể chứng minh  $b-1 \leq u_n \leq b, \forall n (*)$ .

Với  $n=1$ , ta có  $b-1 \leq u_1 \leq b \Leftrightarrow b-1 \leq a \leq b$ , vậy  $(*)$  đúng với  $n=1$ . Giả sử  $(*)$  đúng với  $n=k (k \geq 1)$ , ta có:  $b-1 \leq u_k \leq b$ . Ta chứng minh  $(*)$  đúng với  $n=k+1$ .

Xét hàm số  $f(x) = x^2 + (1-2b)x + b^2$  với  $x \in [b-1; b]$ . Ta có:

$$f'(x) = 2x + (1-2b); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2b-1}{2} = b - \frac{1}{2}.$$

Vì  $b - \frac{1}{2} \in [b-1; b]$  nên ta có bảng biến thiên:

| $x$     | $b-1$ | $b - \frac{1}{2}$ | $b$ |
|---------|-------|-------------------|-----|
| $f'(x)$ |       | 0                 |     |
| $f(x)$  |       | $b - \frac{1}{4}$ |     |

Do đó  $b-1 \leq u_{k+1} = f(u_k) \leq b$ . Vậy (\*) đúng với  $n = k+1$ . Theo nguyên lý quy nạp ta có (\*) đúng với mọi  $n$ . Do đó dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên bởi  $b$ . Từ đó suy ra dãy số hội tụ.

**Định lý 2.2.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^2 + \beta(a+b)u_n + a(\beta b - 1), (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta > 0$
- $[\beta(a+b)-1]^2 - 4\beta a(\beta b - 1) \leq 0$
- $\alpha > \max\left\{-a; \frac{1}{\beta} - b\right\}$

thì dãy số đã cho không có giới hạn hữu hạn.

**Chứng minh.** Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \beta u_n^2 + [\beta(a+b)-1]u_n + a(\beta b - 1).$$

Vì tam thức bậc hai

$$f(x) = \beta x^2 + [\beta(a+b)-1]x + a(\beta b - 1)$$

có  $\Delta = [\beta(a+b)-1]^2 - 4\beta a(\beta b - 1) \leq 0$  nên

$f(x) \geq 0$  với mọi  $x$ . Từ đó ta kết luận dãy số  $(u_n)$  là dãy số không giảm.

Ta giả sử dãy số trên bị chặn trên, nghĩa là tồn tại  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  khi đó  $l \geq \alpha$  là nghiệm của

phương trình:

$$\beta x^2 + [\beta(a+b)-1]x + a(\beta b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \beta(a+b)x + a(\beta b) - (x+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(x+a)(x+b) - (x+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)[\beta(x+b)-1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a \text{ hoặc } x = \frac{1}{\beta} - b.$$

Điều này là mâu thuẫn vì  $\alpha > \max\left\{-a; \frac{1}{\beta} - b\right\}$ .

Ta kết luận dãy số đã cho không có giới hạn hữu hạn.

**Hệ quả 2.3.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^2 + \beta(a+b)u_n + a(\beta b - 1), (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta = \frac{1}{b-a} > 0$ .
- $[\beta(a+b)-1]^2 - 4\beta a(\beta b - 1) \leq 0$ .
- $\alpha > \max\left\{-a; \frac{1}{\beta} - b\right\}$

thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + b} = \frac{1}{a+\alpha}$ .

**Chứng minh.** Theo Định lý 2.2 ta được  $(u_n)$  là dãy số tăng và do đó  $u_n \neq -a; u_n \neq -b$ .

Với mọi  $k \geq 1$  ta có:

$$u_{k+1} = \beta u_k^2 + \beta(a+b)u_k + a(\beta b - 1)$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} + a = \beta[u_k^2 + (a+b)u_k + ab]$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} + a = \beta(u_k + a)(u_k + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(b-a)} \left( \frac{1}{u_k + a} - \frac{1}{u_k + b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1}+a} = \frac{1}{u_k+a} - \frac{1}{u_k+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_k+a} - \frac{1}{u_{k+1}+a} = \frac{1}{u_k+b}$$

Lấy tổng theo  $k$  ta được:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k+a} - \frac{1}{u_{k+1}+a} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+b}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+b} = \frac{1}{u_1+a} - \frac{1}{u_{n+1}+a}$$

Lấy giới hạn và lưu ý theo Định lý 2.2 rằng

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \text{ ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+b} = \frac{1}{a+\alpha}$$

Sau đây là một số ví dụ áp dụng Định lý 2.2.

**Thí dụ 2.4. (Đề thi viên chức Hà Nội-2014).**

Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\text{truy hồi} \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 - u_n + 4), (n \geq 1) \end{cases}$$

$$\text{Tính giới hạn } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+1}$$

**Lời giải.** Ta áp dụng Hệ quả 2.3 với  $a = -2; b = 1; \beta = \frac{1}{3}$  và  $\alpha = 3$ . Dễ dàng kiểm tra các điều kiện của Hệ quả 2.2 được thỏa mãn

$$\text{nên ta được: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+1} = \frac{1}{a+\alpha} = 1.$$

**Thí dụ 2.5. ([1]).** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Tính giới hạn } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+2}$$

**Lời giải.** Vì

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = [a(a+3)][(a+1)(a+2)]+1$$

$$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

$$= (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a)+1 = (a^2+3a+1)^2$$

nên ta được:  $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1$ .

Áp dụng Hệ quả 2.3 cho  $a = \alpha = \beta = 1; b = 2$  ta

$$\text{được: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+2} = \frac{1}{a+\alpha} = \frac{1}{2}.$$

**Thí dụ 2.6. ([4] - Dự bị).** Cho dãy số  $u_n$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Tính giới hạn } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k$$

**Lời giải.** Trước hết với mọi  $n$ , ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1} = \frac{u_n^2}{\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq 0.$$

Như vậy với mọi  $n \geq 2$ , ta có  $u_n \geq 0$ . Hơn nữa dễ dàng thấy được: nếu  $u_1 = 0$  thì  $u_n = 0, \forall n$  hoặc nếu  $u_1 = 1$  thì  $u_n = 1, \forall n$ .

Xét trường hợp  $u_1 \neq 0$  và  $u_1 \neq 1$ . Ta có:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1} - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n^2 - u_n + 1}$$

Do đó nếu  $u_1 < 1$  thì  $u_n < 1, \forall n$  hoặc nếu  $u_1 > 1$  thì

$$u_n > 1, \forall n. \text{ Ta lại có: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_n^2 - u_n + 1} \leq 1, \text{ suy ra}$$

$(u_n)$  là dãy số giảm.

Do đó, ta chia ra hai trường hợp:

a) Nếu  $u_1 > 1$  thì dãy số đã cho giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn  $l$ . Giải phương trình

$$l = \frac{l^2}{l^2 - l + 1} \Leftrightarrow l(l^2 - 2l + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l = 1 \end{cases}$$

Với nhận xét bên trên thì khi  $u_1 > 1$  thì  $u_n > 1, \forall n$  nên  $l \geq 1$ , ta được giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

b) Nếu  $u_1 < 1$  thì dãy số đã cho giảm và bị chặn dưới bởi 0, tương tự như trên ta được giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Ta tiếp tục biến đổi:

$$u_{k+1} - 1 = \frac{u_k - 1}{u_k^2 - u_k + 1} \Leftrightarrow u_k = \frac{1}{u_{k+1} - 1} - \frac{1}{u_k - 1}.$$

Ta có:  $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_1 - 1}$ . Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_1 - 1} \right).$$

Kết luận:

a) Nếu  $u_1 = 0$  thì  $\sum_{k=1}^n u_k = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = 0$ .

b) Nếu  $u_1 = 1$  thì  $\sum_{k=1}^n u_k = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$ .

c) Nếu  $u_1 > 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$ .

d) Nếu  $0 \neq u_1 < 1$  thì  $\sum_{k=1}^n u_k = -1 - \frac{1}{u_1 - 1}$ .

**Thí dụ 2.7.** ([2], trang 21). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 \in (0; 1) \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n u_k$ .

**Lời giải.** Theo Định lý 2.1 thì dãy số đã cho hội tụ, gọi  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , khi đó  $l$  là nghiệm của

$$\text{phương trình } l = l^2 - l + 1 \Leftrightarrow l = 1.$$

Ta biến đổi:  $u_{k+1} - 1 = u_k(u_k - 1) \Leftrightarrow u_k = \frac{u_{k+1} - 1}{u_k - 1}$ .

Ta được:  $\prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^n \frac{u_{k+1} - 1}{u_k - 1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_1 - 1}$ .

Do đó:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - 1}{u_1 - 1} = 0$ .

Chứng minh tương tự như Định lý 2.2 chúng tôi đạt được các kết quả khác như sau:

**Định lý 2.8.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^2 + (1 + a\beta + b\beta)u_n + ab\beta, (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta > 0$ .
- $\alpha > \max\{-a; -b\}$ .

thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(a + \alpha)}$ .

**Chứng minh.** Ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \beta u_n^2 + (a\beta + b\beta)u_n + ab\beta \\ &= \beta(u_n^2 + (a + b)u_n + ab) = \beta(u_n + a)(u_n + b) > 0. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là dãy số đã cho là dãy số tăng, rõ ràng là dãy số  $u_n$  không bị chặn trên, vì nếu ngược lại thì dãy số hội tụ. Giả sử  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , ta có  $l = -a$  hoặc  $l = -b$ , điều đó mâu thuẫn với giả thuyết  $\alpha > \max\{-a; -b\}$ .

Ta tiếp tục biến đổi:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \beta u_k^2 + (1 + a\beta + b\beta)u_k + ab\beta \\ \Leftrightarrow (u_{k+1} + a) - (u_k + a) &= \beta(u_k + a)(u_k + b) \\ \Leftrightarrow \frac{(u_{k+1} + a) - (u_k + a)}{(u_{k+1} + a)(u_k + a)} &= \beta \frac{(u_k + a)(u_k + b)}{(u_{k+1} + a)(u_k + a)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_k + a} - \frac{1}{u_{k+1} + a} &= \beta \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a}. \end{aligned}$$

Lấy tổng theo  $k$  hai vế đẳng thức trên ta được:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k + a} - \frac{1}{u_{k+1} + a} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \beta \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_1 + a} - \frac{1}{u_{n+1} + a} = \sum_{k=1}^n \beta \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a}.$$

Lấy giới hạn ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \beta \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\alpha + a} \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(\alpha + a)}.$$

**Hệ quả 2.9.** Cho dãy các số  $u_n$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^2 + (1+2a\beta)u_n + \beta a^2, (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta > 0$ .
- $\alpha > -a$ .

thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k + a}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(a+\alpha)}$ .

**Hệ quả 2.10.** Cho dãy các số  $u_n$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^2 + (1+a\beta)u_n, (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta > 0$ .
- $\alpha > \max\{-a; 0\}$ .

thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(a+\alpha)}$ .

**Thí dụ 2.11. (Olympic 30/4-1999).** Cho dãy các số  $u_n$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1999}, (n \geq 1) \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}}$ .

**Lời giải.** Áp dụng Hệ quả 2.10 với

$\alpha = 1; \beta = \frac{1}{1999}$  và  $a = 0$ , ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{\beta(a+\alpha)} = 1999.$$

**Thí dụ 2.12 ([8] Giải Tích).** Cho dãy các số  $u_n$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \frac{2017}{2018}u_n + \frac{u_n^2}{2018}, (n \geq 1) \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} - 1}$ .

**Lời giải.** Áp dụng Hệ quả 2.10 với  $\alpha = 2019; \beta = \frac{1}{2018}$  và  $a = -1$ , ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} - 1} = \frac{1}{\beta(a+\alpha)} = 1.$$

Với công thức truy hồi (1.2), hệ quả sau được suy ra từ cách chứng minh Định lý 2.8.

**Hệ quả 2.13.** Cho  $\lambda > 0$  và dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta u_n^{\lambda+1} + a\beta u_n^\lambda + (1+b\beta)u_n + ab\beta, (n \geq 1) \end{cases}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa mãn

- $\beta > 0$ .
- $\alpha > \max\left\{0; -a; \left|\frac{b}{\lambda}\right|\right\}$ .

thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(a+\alpha)}$ .

**Chứng minh.** Trước hết ta sẽ chứng minh dãy số đã cho không có giới hạn hữu hạn.

Ta có:  $u_{n+1} - u_n = \beta(u_n^{\lambda+1} + au_n^\lambda + bu_n + ab)$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + \beta(u_n^\lambda + b)(u_n + a) (**).$$

Từ (\*\*) và các điều kiện đã cho, ta có:

$$u_2 = u_1 + \beta(u_1^\lambda + b)(u_1 + a) > 0$$

và từ đó ta có  $u_2 > \max\left\{0; -a; \left|\frac{b}{\lambda}\right|\right\}$ .

Giả sử  $u_k > \max\left\{0; -a; \left|\frac{b}{\lambda}\right|\right\}$  với  $k \geq 1$ . Khi đó từ

(\*\*) ta được:  $u_{k+1} = u_k + \beta(u_k^\lambda + b)(u_k + a) > u_k$ .

Từ đó theo nguyên lý quy nạp ta kết luận dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Ta giả sử dãy số trên bị chặn trên, nghĩa là tồn tại  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  khi đó  $l \geq \alpha$  là nghiệm của phương trình:  $x = \beta x^{\lambda+1} + a\beta x^\lambda + (1+b\beta)x_n + ab\beta$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x^\lambda + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x^\lambda = -b \end{cases}$$

Điều này là mâu thuẫn vì  $u_n > u_1 = \alpha > \max\left\{0; -a; \left|b\right|^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$ . Ta kết luận dãy số

đã cho không có giới hạn hữu hạn.

Bây giờ ta sẽ đi tìm giới hạn của tổng đã cho.

Ta có:  $u_{k+1} = \beta u_k^{\lambda+1} + a\beta u_k^\lambda + (1+b\beta)u_k + ab\beta$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} - u_k = \beta(u_k^\lambda + b)(u_k + a)$$

$$\Leftrightarrow (u_{k+1} + a) - (u_k + a) = \beta(u_k + a)(u_k^\lambda + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(u_{k+1} + a) - (u_k + a)}{(u_{k+1} + a)(u_k + a)} = \beta \frac{(u_k + a)(u_k^\lambda + b)}{(u_{k+1} + a)(u_k + a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_k + a} - \frac{1}{u_{k+1} + a} = \beta \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a}$$

Lấy tổng theo  $k$  hai vế đẳng thức trên ta được:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k + a} - \frac{1}{u_{k+1} + a} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \beta \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a} \right)$$

Suy ra:  $\frac{1}{u_1 + a} - \frac{1}{u_{n+1} + a} = \sum_{k=1}^n \beta \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a}$

Lấy giới hạn ta được  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \beta \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\alpha + a}$

hay  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^\lambda + b}{u_{k+1} + a} = \frac{1}{\beta(\alpha + a)}$

**Thí dụ 2.14.** Cho dãy các số dương  $u_n$  được

xác định bởi công thức  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_n^{2013}, (n \geq 1) \end{cases}$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2012}}{u_{k+1}}$

**Lời giải.** Áp dụng Hệ quả 2.13 với  $\alpha=1; \beta=1$  và  $a=b=0$ , ta được:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2012}}{u_{k+1}} = \frac{1}{\beta(\alpha + \alpha)} = 1$ .

**Thí dụ 2.15 ([9] - Đồng Tháp đề nghị).** Cho dãy các số dương  $u_n$  được xác định bởi công

thức:  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n, (n \geq 1) \end{cases}$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2019}}{u_{k+1} + 2018}$

**Lời giải.** Áp dụng Hệ quả 2.13 với  $\alpha=1; \beta=1$  và  $a=2018; b=0$  và  $\lambda=2019$ , ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2019}}{u_{k+1} + 2018} = \frac{1}{\beta(\alpha + \alpha)} = \frac{1}{2019}$$

### III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

**Bài tập 1.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n + 2)(u_n + 4)(u_n + 6) + 16}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 5}$

**Bài tập 2.** (Putnam-1956). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn của  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 1}$

**Bài tập 3.** (Olympic 30/4-2015). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2016}{2015} \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 2}$

**Bài tập 4.** ([5] - ĐH Hùng Vương, Phú Thọ đề nghị). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công

thức truy hồi 
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 1}$ .

**Bài tập 5.** ([3] - CD Tuyên Quang đề nghị). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

truy hồi 
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2013\sqrt{2}}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}}$ .

**Bài tập 6.** ([8] - SPKT Vĩnh Long đề nghị). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

truy hồi 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2018}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}}$ .

**Bài tập 7.** (Olympic 30/4 - 1999). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} - 1}$ .

**Bài tập 8.** ([1]). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2013}{2014}u_n + \frac{u_n^2}{2014}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} - 1}$ .

**Bài tập 9.** ([7] ĐHKT Hà Nội). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = a \\ 2019u_n = 2019u_{n+1} + (u_n - 2019)^2, n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy số đã cho là dãy số đơn điệu.

b) Trong trường hợp dãy số đã cho không có giới hạn hữu hạn, hãy tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k - 2019}{u_{k+1} - 2019}$ .

c) Trong trường hợp dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn, hãy tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 2019)$ .

**Bài tập 10.** ([1]). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}$ .

**Bài tập 11.** ([1]). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}$ .

**Bài tập 12.** ([1]). Cho  $m$  là số thực lớn hơn 1 và  $a$  là số thực lớn hơn 4. Xét dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{m+1} + 3u_n + 6}{u_n^m - u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^m + 7}$ .

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OQ^2}.$$

**Problem T9/517.** Given positive numbers  $a, b, c$  such that  $a + b + c = 3$ . Find the minimum value of the expression  $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6abc}{ab+bc+ca}$ .

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/517.** Find all the pairs  $(p, k)$ , where  $p$  is a prime number and  $k$  is a positive integer, such that

$$k! = (p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2).$$

**Problem T11/517.** Find all the functions  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  satisfying

$$f(2f(a) + f(b)) = 2a + b - 4, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

**Problem T12/517.** Given a triangle  $ABC$  inscribed in a circle  $(O)$  where  $B$  and  $C$  are fixed and  $A$  can vary. Their altitudes  $AD, BE, CF$  meet at  $H$ . Let  $(C_1), (C_2), (C_3)$  be the circles with

diameters  $AB, BC, CA$  respectively. The line  $AH$  intersects  $(C_2)$  at  $M$  ( $M$  belongs to the line segment  $AH$ ),  $BH$  intersects  $(C_3)$  at  $N$  ( $N$  belongs to the line segment  $BH$ ),  $CH$  intersects  $(C_1)$  at  $P$  ( $P$  belongs to the line segment  $CH$ ).  $AN$  intersects  $(C_1)$  at  $S$  which is different from  $A$ ,  $AP$  intersects  $(C_3)$  at  $T$  which is different from  $A$ . The lines  $NP$  intersects  $(C_1)$  at  $X$  which is different from  $P$ , intersects  $(C_3)$  at  $Y$  which is different from  $N$ .  $XS$  meets  $YT$  at  $Z$ . The line passing through  $A$  and perpendicular to  $NP$  intersects  $(C_1)$  at  $J$ , and intersect  $(C_3)$  at  $L$ .

a) The circle with center  $A$  and radius  $AN$  meets  $(C_1)$  at  $V$ , meets  $(C_3)$  at  $U$ . Show that  $V, N, I$  are collinear and  $U, P, L$  collinear.

b) Show that the incenter of the triangle  $XYZ$  is a fixed point.

(Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN)

(College of Science - Vietnam National University, Ha Noi)

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Hoàng Anh, *Chuyên đề giới hạn của dãy số*, năm 2018.
- [2] Khuyết danh, *A collection of limits*, năm 2011.
- [3] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2013*, năm 2013.
- [5] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2014*, năm 2014.
- [6] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2015*, năm 2015.
- [7] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2016*, năm 2016.
- [8] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2017*, năm 2017.
- [9] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2018*, năm 2018.
- [10] Hội Toán học Việt Nam, *Kỳ yếu Olympic Sinh viên 2019*, năm 2019.

**Bài tập 13.** ([6] ĐH Hùng Vương, Phú Thọ đề nghị). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công

$$\text{thức truy hồi } \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{7}(u_n^2 - u_n + 16), n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}$ .

**Bài tập 14.** ([6] ĐHSP Huế đề nghị). Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)(u_n + 1), n \geq 1 \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{u_k}\right)$ .



## CÁC DẠNG MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ LỚN FERMAT CHO $n = 4$

TRẦN ĐỨC SƠN  
(Đồng Nai)

Như ta biết định lý lớn Fermat cho  $n = 4$  là  $a^4 = b^4 + c^4$  (\*) không có nghiệm nguyên khác 0. Trong bài này ta xét 2 dạng mở rộng của (\*), mở rộng ở đây là từ các dạng này thì ta suy ra được (\*).

**Chú ý:** Trong bài viết này nếu các biến mà không nói thêm gì thì ta ngầm hiểu đó là các biến  $\in \mathbb{N}^*$ .

Trước tiên ta có mấy bổ đề sau:

**Bổ đề 1.** Với  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$  mà  $(a, c) = (b, d) = 1$  và  $ab = cd$  thì  $a = d, b = c$ .

**Chứng minh.** Ta có  $ab : c$  mà  $(a, c) = 1 \Rightarrow b : c$ . Ta lại có  $cd : b$  mà  $(b, d) = 1 \Rightarrow c : b$ . Vậy  $b = c$  nên  $a = d$ .

**Bổ đề 2.** Với  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  mà  $(a, b) = 1$  và  $ab = c^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ ) thì  $a = p^n, b = q^n$  với  $p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$ .

**Chứng minh.** Đặt

$$c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow c^n = p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \dots p_k^{n\alpha_k}.$$

Xét thấy  $p_i^{n\alpha_i}, i = \overline{1, k}$  chỉ có thể là ước của  $a$  hoặc  $b$  (vì  $(a, b) = 1$  nên có điều phải chứng minh).

**Dạng 1. Phương trình  $a^2 = b^4 + c^4$  không có nghiệm nguyên khác 0.**

**Chứng minh.** Ta thấy các số mũ ở đây đều chẵn nên ta quy về chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên dương là đủ.

Giả sử phương trình có nghiệm. Nếu  $(b, c) = d > 1 \Rightarrow a : d^2$ , chia 2 vế cho  $d^4$  thì  $(b/d, c/d) = 1$ . Vì vậy ta có thể giả sử  $(b, c) = 1$ , và trong số các bộ nghiệm  $(a, b, c)$  ta chọn bộ nghiệm mà  $a$  nhỏ nhất. Trong hai số  $b$  và  $c$  có đúng một số chẵn vì:  $(b, c) = 1$ , mặt khác  $b, c$  không thể cùng lẻ vì lúc đó  $(a^2 - 2) : 4$  là vô lý. Giả sử  $b$  chẵn,  $c$  lẻ. Đây là phương trình dạng Pythagore nên ta có:

$$\begin{cases} b^2 = 2pqk \\ c^2 = (p^2 - q^2)k, & p, q, k \in \mathbb{N}^* \\ a = (p^2 + q^2)k \end{cases}$$

Vì  $(b, c) = 1 \Rightarrow k = 1 = (p, q)$ , mà  $pq : 2$  (do  $b^2 : 4$ ) nên ta có  $q$  chẵn,  $p$  lẻ (vì  $p$  chẵn,  $q$  lẻ mà  $c$  lẻ thì  $(p^2 - 2) = (c^2 + q^2 - 2) : 4$  là vô lý). Vậy  $p = m^2, q = 2n^2$  (bổ đề 2). Mặt khác từ  $p^2 = c^2 + q^2$  ta lại có:

$$\begin{cases} q = 2uv = 2n^2 \\ c = u^2 - v^2 \\ p = u^2 + v^2 = m^2 \end{cases}, u, v \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy  $u = r^2, v = s^2, ((u, v) = (r, s) = 1)$  (bổ đề 2)  $\Rightarrow m^2 = p = u^2 + v^2 = r^4 + s^4$  mà  $m < a$  (vô lý với cách chọn  $a$  nhỏ nhất) nên điều giả sử là sai dẫn đến vô nghiệm.

**Dạng 2. Phương trình  $a^4 = b^4 + c^4$  không có nghiệm nguyên khác 0.**

**Chứng minh.** Ta thấy các số mũ ở đây đều chẵn nên ta quy về chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên dương là đủ.

Giả sử phương trình có nghiệm. Nếu  $(a, b) = d > 1 \Rightarrow c : d^2$ , chia 2 vế cho  $d^4$  thì  $(a/d, b/d) = 1$ . Vì vậy ta có thể giả sử  $(a, b) = 1$ , và trong số các bộ nghiệm  $(a, b, c)$  ta chọn bộ nghiệm mà  $a$  nhỏ nhất. Xét các trường hợp:

i)  $a \equiv 2, b \equiv 2 \Rightarrow c \equiv 2$ . Khi đó:

$$a^4 = b^4 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}: \text{ vô lý.}$$

ii)  $a \equiv 2, b \equiv 2$ . Đây là phương trình dạng Pythagore nên ta có:

$$\begin{cases} b^2 = 2pq & (1) \\ c = p^2 - q^2 \\ a^2 = p^2 + q^2 & (2) \end{cases}, p, q \in \mathbb{N}^*.$$

Vì  $(a, b) = 1 \Rightarrow (p, q) = 1$ . Từ (1) ta có  $p = x^2, q = 2y^2$  hoặc  $p = 2x^2, q = y^2$  với  $(x, y) = 1$  (bổ đề 2). Vì  $p, q$  bình đẳng nên ta có thể coi  $p = x^2, q = 2y^2$ . Từ (2) ta có:

$$\begin{cases} p = m^2 - n^2 = x^2 \\ q = 2mn = 2y^2 \\ a = m^2 + n^2 \end{cases} \quad (3).$$

Vì  $(m, n) = 1$  từ (3) ta có  $m = u^2, n = v^2, (u, v) = 1$  (bổ đề 2). Vậy  $u^4 = m^2 = n^2 + x^2 = v^4 + x^2$ , mà  $u < a$  (vô lý với cách chọn  $a$  nhỏ nhất) nên điều giả sử là sai dẫn đến vô nghiệm.

iii)  $a \equiv 2, b \equiv 2$ . Ta có: 
$$\begin{cases} b^2 = p^2 - q^2 & (4) \\ c = 2pq \\ a^2 = p^2 + q^2 & (5) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra: 
$$\begin{cases} b = m^2 - n^2 \\ q = 2mn \\ p = m^2 + n^2 \end{cases}, m, n \in \mathbb{N}^*,$$

từ (5) suy ra: 
$$\begin{cases} p = x^2 - y^2 \\ q = 2xy \\ a = x^2 + y^2 \end{cases}, x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Ở đây  $(m, n) = (x, y) = 1$ ,

$$(m - n) = (x - y) \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = m^2 + n^2 = x^2 - y^2 \\ q = 2mn = 2xy \end{cases} \quad (6).$$

$$\text{Đặt } (m, x) = u \Rightarrow m = um_1, x = ux_1$$

$$(n, y) = v \Rightarrow n = vn_1, y = vy_1 \text{ với } u, v \in \mathbb{N}^*,$$

$$(m, n) = (x, y) = (um_1, vn_1) = (ux_1, vy_1)$$

$$= (u, v) = (m_1, n_1) = (x_1, y_1) = (m_1, x_1) = (n_1, y_1) = 1.$$

Thay vào (6) ta có:

$$\begin{cases} u^2 m_1^2 + v^2 n_1^2 = u^2 x_1^2 - v^2 y_1^2 \\ m_1 n_1 = x_1 y_1 \end{cases}$$

Theo bổ đề 1 ta có:  $m_1 = y_1, n_1 = x_1$ ,

suy ra:  $v^2(x_1^2 + y_1^2) = u^2(x_1^2 - y_1^2)$ .

+) Nếu  $(x_1 - y_1) \equiv 1 \pmod{2}$  thì

$$(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 - y_1^2) = 1 = (u^2, v^2).$$

Theo bổ đề 1 ta có:

$$\begin{cases} u^2 = x_1^2 + y_1^2 \\ v^2 = x_1^2 - y_1^2 \end{cases} \Rightarrow u^4 = v^4 + (2x_1 y_1)^2.$$

Mà  $u < a$  (vô lý với cách chọn  $a$  nhỏ nhất) nên điều giả sử là sai dẫn đến vô nghiệm.

+) Nếu  $(x_1 - y_1) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x_1, y_1$  cùng lẻ vì  $((x_1, y_1) = 1)$ . Khi đó ta có:

$$\left( \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}, \frac{x_1^2 - y_1^2}{2} \right) = 1.$$

Theo bổ đề 1 thì

$$\begin{cases} u^2 = (x_1^2 + y_1^2) / 2 \\ v^2 = (x_1^2 - y_1^2) / 2 \end{cases} \Rightarrow u^4 = v^4 + (x_1 y_1)^2$$

mà  $u < a$  (vô lý với cách chọn  $a$  nhỏ nhất) nên điều giả sử là sai dẫn đến vô nghiệm.

Tóm lại ta có được hai dạng suy rộng của định lý lớn Fermat ứng với số mũ là 4. Từ hai dạng này ta suy ra ngay với  $n = 4$  chỉ là hệ quả của chúng. Các trường hợp số mũ khác xin nhường lại cho bạn đọc.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 58

**Problem.** A particle  $P$  moves in a straight line, starting from a point  $O$ . At time  $t$  s after leaving  $O$ , the velocity of  $P$ ,  $v \text{ ms}^{-1}$ , is given by

$$v = 2t^2 - 5t + 2.$$

Find the total distance travelled by  $P$  in the first two seconds.

**Solution.** We have

$$v = 2t^2 - 5t + 2 = (2t - 1)(t - 2),$$

that means the particle changes its direction at  $t = 0.5$  and at  $t = 2$ .

Hence the total distance travelled by  $P$  in the

first two seconds is

$$\left| \int_0^{0.5} (2t^2 - 5t + 2) dt \right| + \left| \int_{0.5}^2 (2t^2 - 5t + 2) dt \right|$$

$$\text{It is } \frac{11}{24} + \frac{9}{8} = \frac{19}{12} \approx 1.58 \text{ m.}$$

### TỪ VỰNG

particle

: hạt, chất điểm

straight line

: đường thẳng

velocity

: vận tốc

total distance

: tổng khoảng cách

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

## BÀI DỊCH SỐ 55

**Bài toán.** Tìm phần dư khi chia  $3^{2020}$  cho 5.

**Lời giải.** Xét bảng sau

|       | Phần dư |       | Phần dư |
|-------|---------|-------|---------|
| 3     | 3       | $3^5$ | 3       |
| $3^2$ | 4       | $3^6$ | 4       |
| $3^3$ | 2       | $3^7$ | 2       |
| $3^4$ | 1       | $3^8$ | 1       |

Từ quy luật trên ta nhận thấy rằng khi chia  $3^4$ ,  $3^8$ ,  $3^{12}$ , ... cho 5 ta luôn nhận được phần dư là 1. Do đó phần dư khi chia  $3^{2020}$  cho 5 là 1.

**Nhận xét.** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về tòa soạn sớm: **Trần Trung Phúc**, 8A4, THCS Ngô

Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; **Đỗ Ngọc Tiến**, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; **Cao Thị Tường Vy**, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên; **Trương Thị Thu Hà**, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; **Đào Thị Khánh Nhi**, 10 Toán 1, Nguyễn Thị Mỹ Lệ, 10 Toán 2, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Lê Thị Minh Thùy, 11 Toán 1, Nguyễn Thị Minh Phúc, Hồ Ngọc Hùng, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; **Võ Hoàng Khôi Nguyên**, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Lê Đức Huy, 878/1 Phạm Hữu Lầu, Tổ 52, Khóm 5, Phường 6, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp**. **Trịnh Thị Thúy Nga**, 10A11, THPT Krông Bông, **Đắk Lắk**.

**HỒ HẢI** (Hà Nội)

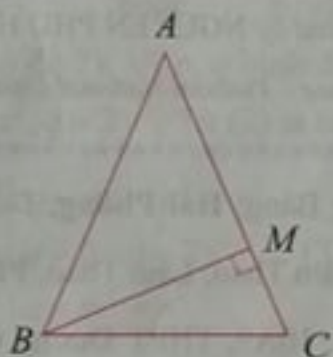


**Bài toán 38.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $AB = AC$ , kẻ  $BM$  vuông góc với  $AC$ . Chứng minh

rằng  $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$ .

**Lời giải.**

**Cách giải 1.** Biến đổi tương đương.



Ta có:  $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{AM + MC}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 2MC \cdot AC \quad (1).$$

Theo định lý Pythagore cho tam giác vuông  $BMC$  ta có:

$$BC^2 = BM^2 + CM^2 = AB^2 - AM^2 + CM^2.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow AB^2 - AM^2 + MC^2 = 2MC(MA + MC) \\ = 2AM \cdot MC + 2MC^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = AM^2 + 2AM \cdot MC + MC^2 = AC^2$$

Đẳng thức cuối luôn đúng vì  $AB = AC$  nên ta có điều phải chứng minh.

**Cách giải 2.** Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC$ ,  $H$  nằm giữa  $B$ ,  $C$ . Áp dụng tỉ số lượng giác trong các tam giác vuông  $BMC$  và  $AHC$  ta có:

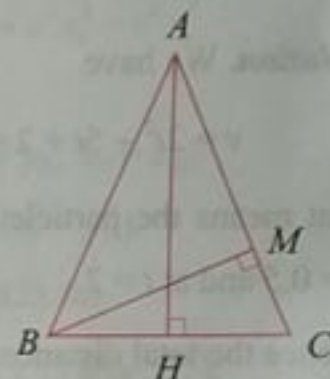
$$\cos C = \frac{MC}{BC} = \frac{HC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{MC} = \frac{2AC}{BC} \quad (\text{vì } BC = 2AH)$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{MC} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{2AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$$



(đpcm).

**Cách giải 3.** Xét hình vẽ ở cách 2.

Vì tứ giác  $AMHB$  nội tiếp nên

$$CM \cdot CA = CH \cdot CB$$

$$\Rightarrow 2CM \cdot CA = BC^2 \quad (\text{vì } CH = \frac{CB}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CM} = 2 \left( \frac{CA}{BC} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 \quad (\text{đpcm}).$$

**Cách giải 4.** (Bạn đọc tự vẽ hình) Gọi  $N$  là trung điểm của  $BC$ , ta có:

$$\triangle MNC \sim \triangle BAC \quad (\text{g.g})$$

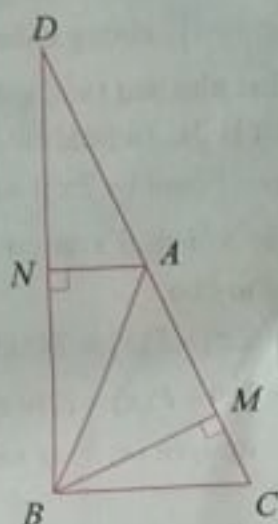
$$\Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow NC \cdot BC = MC \cdot AC$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2AB \cdot MC \quad (\text{vì } NC = \frac{BC}{2}; AC = AB)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 \quad (\text{đpcm}).$$

Cách giải 5.



Đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$ , kẻ  $AN$  vuông góc với  $BD$ .

Ta có:  $\triangle ANB \sim \triangle CMB$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AN}{CM}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CM = AN \cdot BC \quad (1).$$

Vì  $\triangle BDC$  vuông tại  $B$  có  $AB = AC$  nên

$$AD = AB = AC$$

$$\Rightarrow ND = NB \Rightarrow AN = \frac{1}{2}BC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $2AB \cdot CM = BC^2$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 \Rightarrow \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 \quad (\text{đpcm}).$$

**ĐOÀN CÁT NHƠN**

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

**Nhận xét.** Ngoài 5 cách giải nêu trên của bạn Đoàn Cát Nhơn, người giới thiệu bài toán 38, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải tốt của Đoàn Văn Trúc, GV THCS Nguyễn Bá Loan, Đức Nhuận, Mộ Đức, Trương Quang An, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi; Nguyễn Quang Huy, 10 Toán 1, Nguyễn Thị Mỹ Lệ, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

**LÊ MAI (Hà Nội)**

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 40 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2020.

**BÀI TOÁN 40.** Giải phương trình:

$$(2x+10)\sqrt{x+3}=x^2+11x+12.$$

**NGUYỄN DUY THÁI**

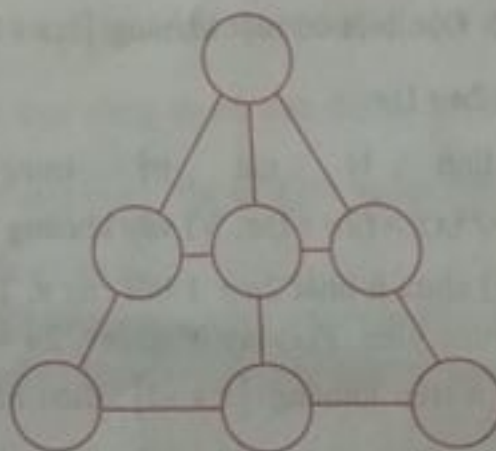
(GV THCS Đậu Liêu, TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)



**ĐÓ VUI!**

**7 SỐ CỐ TỔNG BẰNG 2828**

Bạn hãy điền 7 số nguyên liên tiếp với tổng bằng 2828 vào hình dưới đây sao cho mỗi số nằm trong một hình tròn và các tổng ba số thẳng hàng đều bằng nhau. Biết rằng số nhỏ nhất nằm bên trong tam giác.



**VÂN KHANH (Hà Nội)**



#### BÀI TOÁN 46. ( $\pi$ in the sky, issue 15, 2011).

Tìm tất cả các đa thức  $P(x)$  với hệ số thực sao cho  $\sin P(x) = P(\sin x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải.** Trước tiên ta chú ý rằng:  $P(x) = 0$  và  $P(x) = \pm x$  là các nghiệm của bài toán. Ta sẽ chứng minh ngoài các nghiệm đó bài toán không còn nghiệm nào khác.

Nếu  $P(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là một nghiệm của bài toán thì  $\sin(ax + b) = a \sin x + b$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Nếu ta lấy  $x = 0$ ,  $x = \pi$  và sau đó  $x = \frac{\pi}{2}$  thì ta suy ra  $a = \pm 1$ ,  $b = 0$ , do đó có 2 nghiệm trong các nghiệm kể trên.

Giả sử rằng đa thức  $P(x)$  là đa thức có bậc nhỏ nhất là 2 và có nghiệm. Ta sẽ đưa ra hai lập luận chứng tỏ giả sử này là không thể xảy ra.

Lập luận đầu tiên là: Do  $P(x)$  là đa thức nên nó chỉ có hữu hạn nghiệm trong khoảng  $[-1; 1]$ , giả sử có  $n$  nghiệm trong khoảng này (khoảng đóng). Khi đó trong khoảng tùy ý  $[s; s+1]$ ,  $P(\sin x)$  có nhiều nhất  $2n$  nghiệm vì trên khoảng có độ dài 1,  $\sin x$  có thể lấy mỗi giá trị nhiều nhất hai lần.

Mặt khác,  $P(x)$  có bậc nhỏ nhất là 2 nên ta có  $|P'(x)| \rightarrow \infty$  khi  $x \rightarrow \pm\infty$  (đạo hàm  $P'(x)$  có bậc nhỏ nhất là 1). Đặc biệt có một khoảng  $[s; s+1]$  trên đó  $|P'(x)| > (2n+1)\pi$ .

Theo định lý giá trị trung bình,  $|P(s+1) - P(s)| > (2n+1)\pi$ . Vì vậy khoảng giữa  $P(s)$  và  $P(s+1)$  chứa ít nhất  $2n+1$  bội của  $\pi$ . Theo định lý giá trị trung gian,  $P(x)$  lấy ít nhất  $2n+1$  giá trị là bội của  $\pi$  trên khoảng  $[s; s+1]$ , điều này khẳng định rằng  $\sin P(x)$  có ít nhất  $2n+1$  nghiệm trên khoảng này.

Từ  $P(\sin x)$  và  $\sin P(x)$  có số nghiệm khác nhau trên khoảng  $[s; s+1]$ , chúng không thể bằng nhau.

Lập luận thứ hai như sau (vẫn giả sử  $P(x)$  là đa thức có bậc nhỏ nhất là 2). Ta phải có:

$\sin(P(x+2\pi)) = P(\sin(x+2\pi)) = P(\sin x) = \sin P(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Vì vậy với mọi  $x$  ta có thể tìm số nguyên  $k(x)$  hoặc  $h(x)$  sao cho:

$$P(x+2\pi) - P(x) = 2k(x)\pi$$

hoặc  $P(x+2\pi) + P(x) = (2h(x)+1)\pi$ .

Với mỗi cặp số nguyên  $(k; h)$  ta xác định các tập hợp các số thực sau:

$$A_{(k;h)} = \{x \in \mathbb{R} : P(x+2\pi) - P(x) = 2k\pi \text{ hoặc } P(x+2\pi) + P(x) = (2h+1)\pi\}.$$

Từ  $\mathbb{R} = \bigcup_{(k;h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} A_{(k;h)}$ , ta kết luận rằng có ít nhất một

tập hợp  $A_{(k;h)}$  là vô hạn, vì nếu trái lại  $\bigcup_{(k;h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} A_{(k;h)}$

là tập đếm được trong khi tập hợp các số thực  $\mathbb{R}$  là không đếm được.

Nếu  $A_{(k;h)}$  có vô hạn phần tử thì ít nhất một trong hai phương trình  $P(x+2\pi) - P(x) = 2k(x)\pi$

hoặc  $P(x+2\pi) + P(x) = (2h(x)+1)\pi$  có vô hạn nghiệm. Điều này là không thể vì hoặc đa thức  $P(x+2\pi) - P(x)$  hoặc đa thức  $P(x+2\pi) + P(x)$  là đa thức hằng.

**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài này. Trong đó các bạn đều tìm được  $P(x) = 0$  và  $P(x) = \pm x$  là các nghiệm của bài toán. Tuy nhiên để chứng minh ngoài các nghiệm này không còn nghiệm nào khác thì lập luận của các bạn chưa thật chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: Nguyễn Thị Bảo Ngọc, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; Lê Thị Mỹ Duyên, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị, Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 31.8.2020.

#### BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI TOÁN 48.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên

$$n > 6 \text{ thì } \left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

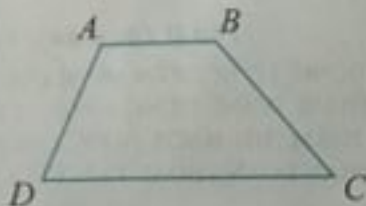
KHÁNH HỮU (Hà Nội)



## GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI RÕ RÀNG!

(Đề đăng trên TH&TT số 514, tháng 3 năm 2020)

**Phân tích sai lầm.** Bạn Phương đã mắc sai lầm khi không để ý tứ giác  $ABCD$  là hình thang thì hai vector  $\overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  phải cùng hướng.



Ta có:  $\overrightarrow{DC} = (-6; -4; 8) = -2\overrightarrow{AB}$ . Suy ra vector  $\overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng nên  $ABCD$  không là hình thang. Vậy ta chọn đáp án A.

**Lời giải đúng.** Tứ giác  $ABCD$  là hình thang  $\Rightarrow AB \parallel CD$ . Suy ra đường thẳng  $CD$  đi qua điểm  $C(2; 1; 4)$  và nhận vector  $\overrightarrow{AB} = (3; 2; -4)$  làm vector chỉ phương. Phương trình đường thẳng  $CD$  là:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$D \in CD \Rightarrow D(2 + 3t; 1 + 2t; 4 - 4t)$$

$$D \in (P) \Rightarrow -(2 + 3t) + 2(1 + 2t) + (4 - 4t) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow D(8; 5; -4)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-6; -4; 8) = -2\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra vector  $\overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng nên  $ABCD$  không là hình thang. Vậy ta chọn đáp án A.

**Nhận xét.** Chỉ có bạn Hoàng Bảo Minh Châu, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế là phát hiện được sai lầm.

KIHI VI

## TIẾP TUYẾN PHÂN BIỆT!



Trong giờ kiểm tra toán của học sinh lớp 11 Toán, có câu hỏi như sau:

**Đề bài.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - 1$  có

đồ thị  $(C)$ . Tìm trên trục tung các điểm  $M$ , sao cho qua  $M$  kẻ đến đồ thị  $(C)$  có đủ 4 tiếp tuyến phân biệt.

**Lời giải.** Giả sử  $M(0; b) \in Oy$ , suy ra phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  qua  $M$  có dạng  $y = kx + b$  ( $d$ ). Hoành độ tiếp điểm của  $(C)$  và  $(d)$

$$\text{thỏa mãn hệ: } \begin{cases} -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - 1 = kx + b \\ -\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 2x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - 1 = -\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + b$$

$$\Rightarrow b = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 \quad (1).$$

Xét hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ .

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 1$$

Ta có bảng biến thiên

|         |           |      |                  |      |           |   |
|---------|-----------|------|------------------|------|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 0    | $\frac{1}{2}$    | 1    | $\infty$  |   |
| $f'(x)$ |           | -    | 0                | +    | 0         | + |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-1$ | $-\frac{15}{16}$ | $-1$ | $+\infty$ |   |

Vậy để qua  $M$  kẻ đến  $(C)$  có 4 tiếp tuyến phân biệt thì PT(1) có 4 nghiệm phân biệt. Dựa vào BBT để

PT(1) có 4 nghiệm phân biệt thì  $-1 < b < -\frac{15}{16}$ .

Vậy trên trục tung ta có các điểm  $M(0; b) \in Oy$ .

với  $-1 < b < -\frac{15}{16}$  thì qua đó ta kẻ đến  $(C)$  có 4 tiếp tuyến phân biệt.

**Hầu hết, tất cả học sinh của lớp đều giải tương tự như trên, lời giải của các bạn có đúng không?**

NGUYỄN LÀI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)