TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2020
Số 513

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học Nhật Bản
Gorô Shimura
(1930 - 2019)

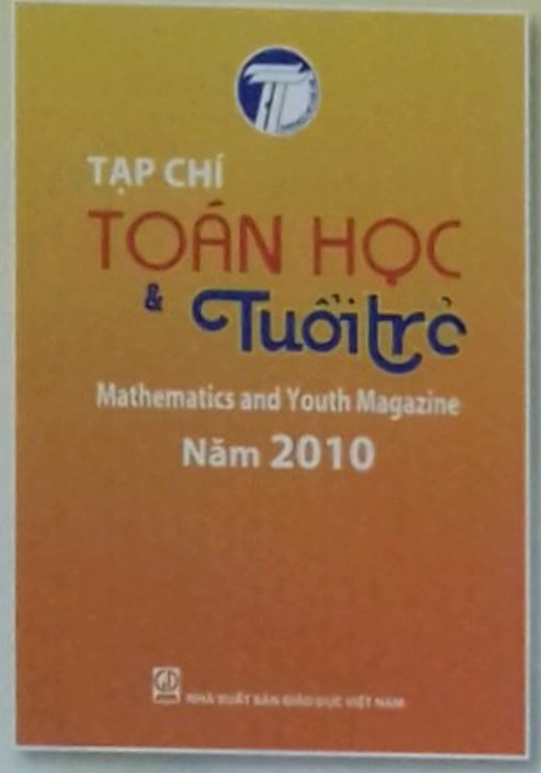
Cảnh đẹp Hamamatsu (Nhật Bản)

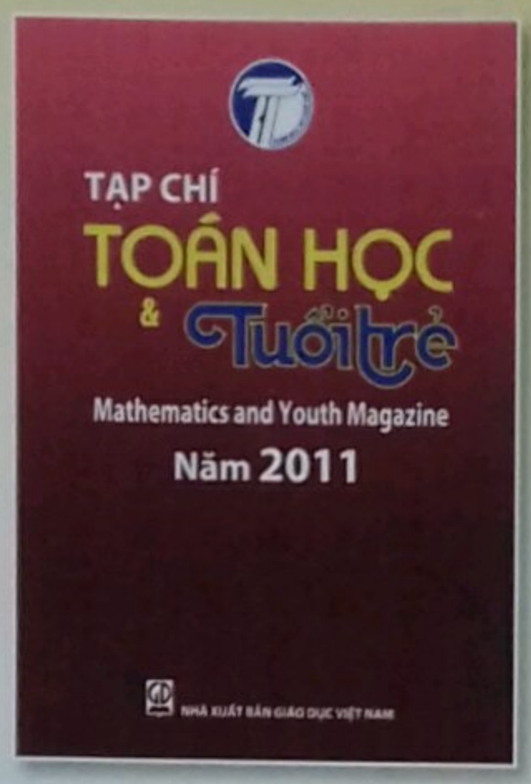
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

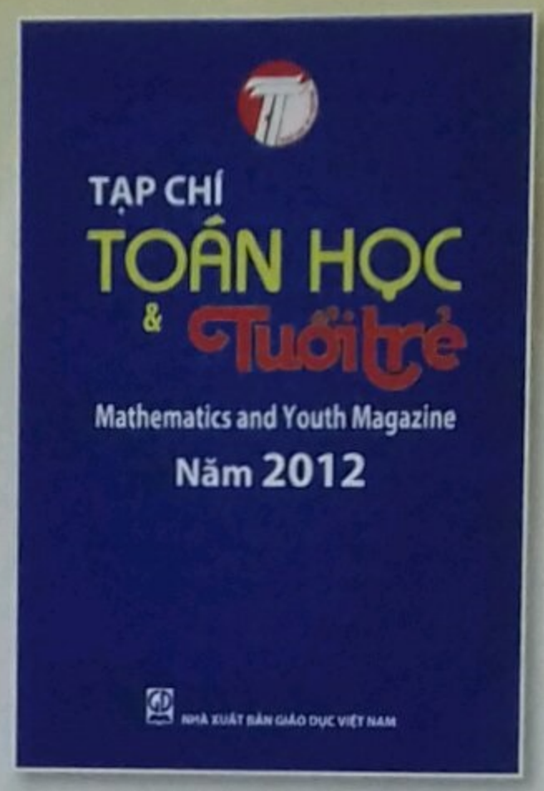
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

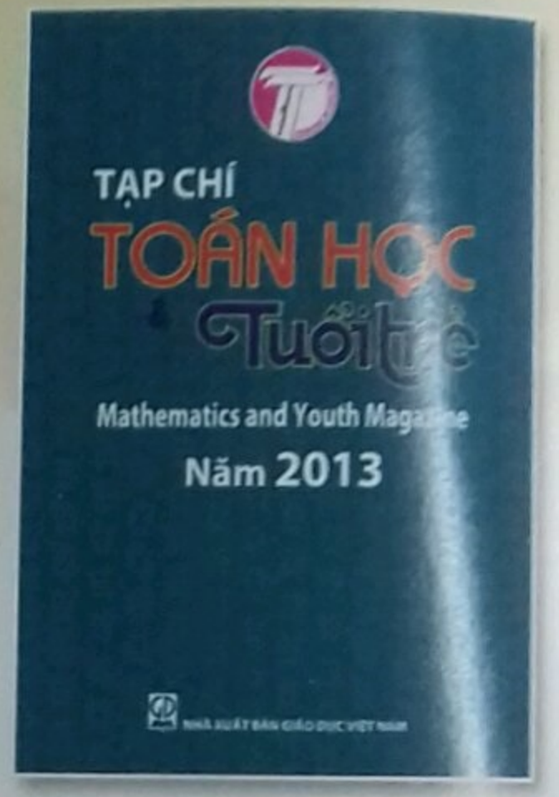
Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

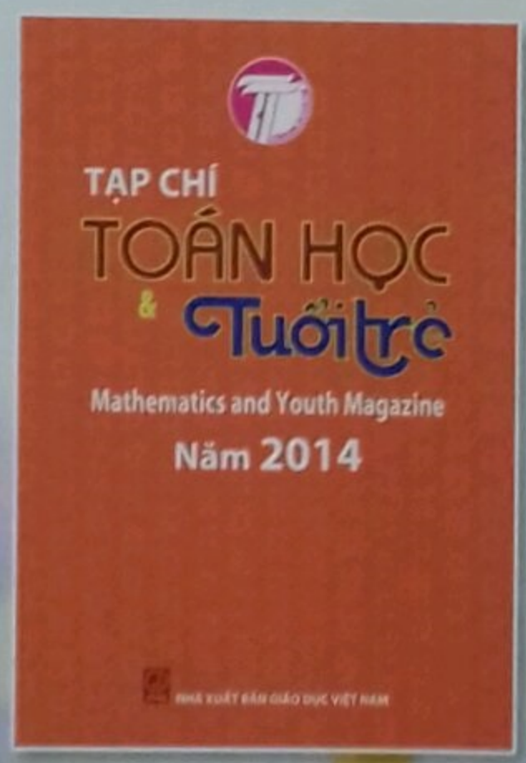


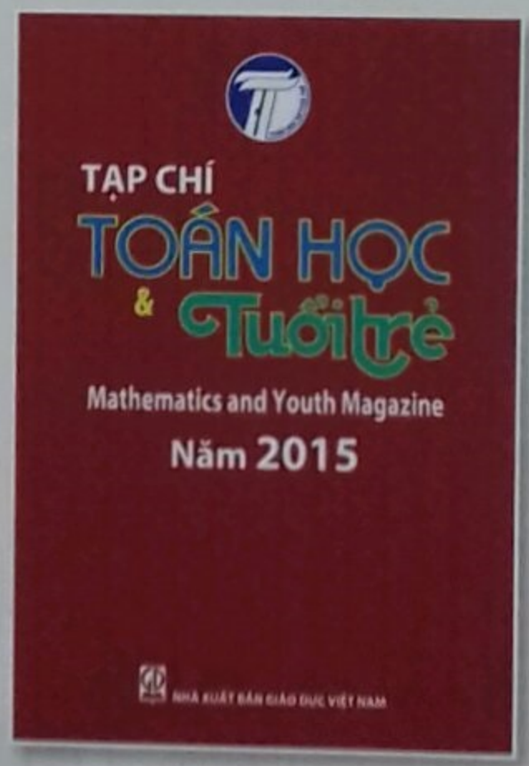


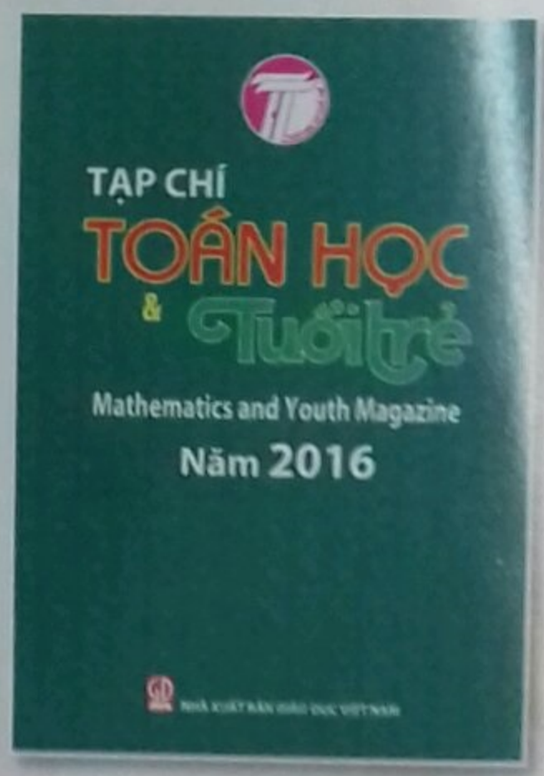


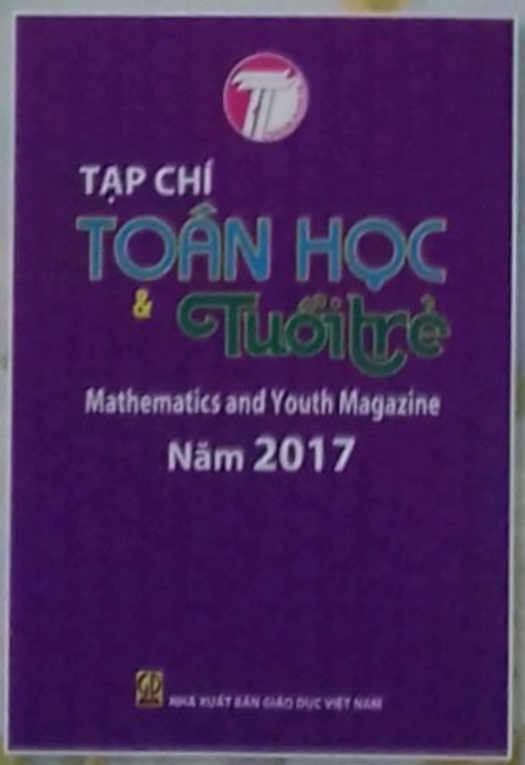


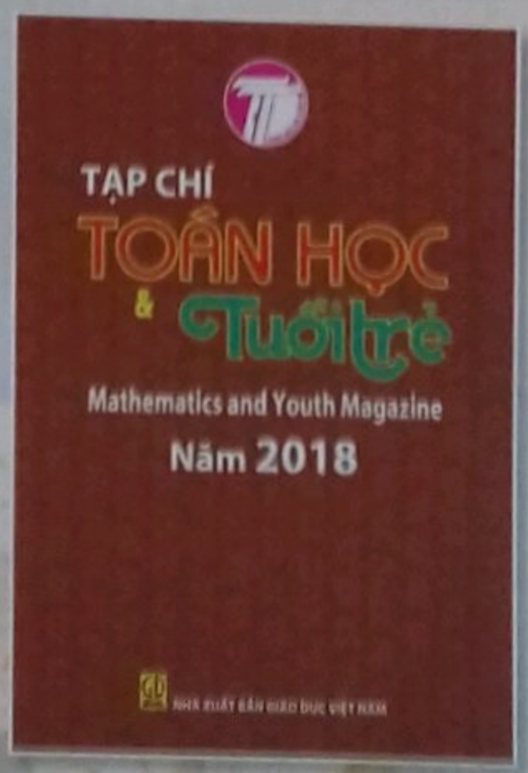
Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

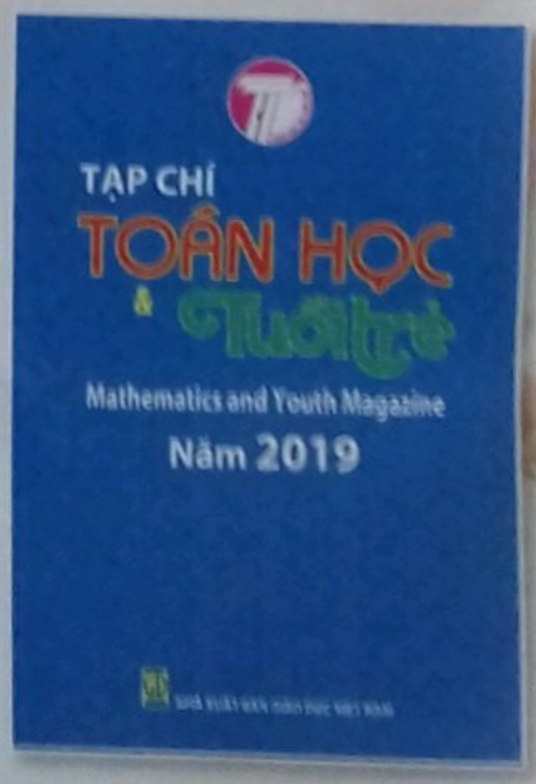












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

● Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 ● Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

SỬ DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

1. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Với $0^0 < a < 90^0$ thì:

- $0 < \sin a < 1,\ 0 < \cos a < 1.$
- $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a};\ \cot a = \dfrac{\cos a}{\sin a};\ \tan a.\cot a = 1.$
- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$
- $\sin a = \cos\left(90^0 - a\right);\ \sin 60^0 = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2};\ \sin 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin a.\cos a \le \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{2} = \dfrac{1}{2}.$

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài toán 1. *Cho $0 < x,\ y < 1$. Chứng minh rằng: $x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Vì $0 < x,\ y < 1$ nên có thể đặt $x = \sin a,\ y = \sin b$ (với $0 < a, b < 90^0$). Từ đó

$$P = x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$
$$= \sin a + \sin b + \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}.P = 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a + 2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin b + \sin a.(\sqrt{3}\cos b) + \sin b.(\sqrt{3}.\cos a)$$
$$\le \left(\frac{3}{4} + \sin^2 a\right) + \left(\frac{3}{4} + \sin^2 b\right) + \frac{1}{2}\left(\sin^2 a + 3\cos^2 b\right) + \frac{1}{2}\left(\sin^2 b + 3\cos^2 a\right)$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) + \frac{3}{2}\left(\sin^2 b + \cos^2 b\right)$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow P \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = \sin b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin a = \sqrt{3}\cos b \\ \sin b = \sqrt{3}\cos a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 60^0 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 2. *Cho $0 < x < 2$ và $0 \le y \le 3$ thỏa mãn $\sqrt{\sqrt{3}.x} + \sqrt{y(3-y)} = x$ (*). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 6\sqrt{4-x^2} + 3x^2 + 4y - \dfrac{2}{3}y^2$.*

Lời giải. Từ $0 < x < 2$, ta có thể đặt $x = 2\sin a$ (với $0 < a < 90^0$). Từ đó

$$A = 6\sqrt{4\left(1-\sin^2 a\right)} + 12\sin^2 a + 4y - \frac{2}{3}y^2$$
$$= 12\cos a + 12\left(1-\cos^2 a\right) - \frac{2}{3}(y-3)^2 + 6$$
$$= -12\left(\cos^2 a - \cos a + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3}(y-3)^2 + 21$$
$$= -12\left(\cos a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}(y-3)^2 + 21 \le 21.$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a = \dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60^0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sin 60^0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3 \end{cases}$$ thỏa mãn điều kiện của x, y và (*).

Vậy giá trị lớn nhất của A là 21 tại $x = \sqrt{3},\ y = 3$.

Bài toán 3. *Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}} \ge \sqrt{2}$.*

Lời giải. Từ $x, y > 0$ và $x + y = 1$, ta có thể đặt $\sin^2 a = x, \cos^2 a = y$ (với $0 < a < 90^0$). Khi đó:

$$S = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{\sin^2 a}{\cos a} + \frac{\cos^2 a}{\sin a}$$

$$= \frac{1-\cos^2 a}{\cos a} + \frac{1-\sin^2 a}{\sin a} = \left(\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a}\right) - (\sin a + \cos a).$$

Ta có: $\sin a + \cos a \le \sqrt{2\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)} = \sqrt{2}$;

$$(\sin a + \cos a)\left(\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a}\right) \ge 4$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a} \ge \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Do đó:

$S \ge 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \sin a = \cos a \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Bài toán 4. *Cho* $\sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} = 1$ $(0 < x, y < 1)$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $A = x^2\sqrt{x} + xy\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) + y^2\sqrt{y}$.

Lời giải. Ta có:

$$1 = \left(\sqrt{x}.\sqrt{1-y} + \sqrt{y}.\sqrt{1-x}\right)^2 \le (x+y)(1-y+1-x)$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 \le 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \le 0$$

$$\Rightarrow x + y = 1.$$

Đặt $\sin^2 a = x, \cos^2 a = y$ (với $0 < a < 90^0$). Khi đó $A = \sin^5 a + \sin^2 a.\cos^2 a(\sin a + \cos a) + \cos^5 a$

$$= \sin^3 a\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) + \cos^3 a\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)$$

$$= \sin^3 a + \cos^3 a.$$

Ta có: $\sin a + \cos a \le \sqrt{2\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)} = \sqrt{2}$;

$$\sin a.\cos a \le \frac{1}{2}\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 a.\cos^2 a \le \sin a.\cos a;$$

$$1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 = \sin^4 a + 2\sin^2 a.\cos^2 a + \cos^4 a$$

$$\le \sin^4 a + \sin a.\cos a + \cos^4 a$$

$$= \sin^4 a + \sin a.\cos a\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) + \cos^4 a$$

$$= \sin^3 a(\sin a + \cos a) + \cos^3 a(\sin a + \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)\left(\sin^3 a + \cos^3 a\right)$$

$$\Rightarrow A = \sin^3 a + \cos^3 a \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin a = \cos a \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài toán 5. *Cho* $0 < x, y < 1$ *và* $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} \le 1.$$

Lời giải. Ta có:

$$1 = \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le \left(x^2+y^2\right)\left(1-y^2+1-x^2\right)$$

$$= 2\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2 \Rightarrow \left(x^2+y^2-1\right)^2 \le 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

Đặt $x = \sin a$, $y = \cos a$ (với $0 < a < 90^0$). Khi đó:

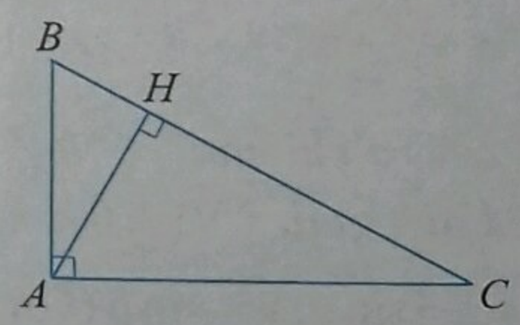
$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} = \sin a.\cos a + \cos a.\sin a$$

$$= 2\sin a.\cos a \le \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin a = \cos a \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$X = \frac{BC}{BA} + \frac{CA}{CH} + \frac{BC}{AH}.$$



Lời giải. Ta có:

$$X = \frac{BC}{BA} + \frac{AC}{CH} + \frac{AC}{AH}.\frac{BC}{AC}$$

$$= \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\sin C}.\frac{1}{\cos C} = \frac{\cos C + \sin C + 1}{\sin C.\cos C}.$$

$$2\sin C.\cos C = (\sin C + \cos C)^2 - \left(\sin^2 C + \cos^2 C\right)$$

$$= (\sin C + \cos C)^2 - 1$$

$$= (\sin C + \cos C + 1)(\sin C + \cos C - 1).$$

Do đó: $X = \frac{\sin C + \cos C + 1}{\sin C.\cos C} = \frac{2}{\sin C + \cos C - 1}$.

$$(\sin C + \cos C)^2 \le 2\left(\sin^2 C + \cos^2 C\right) = 2$$

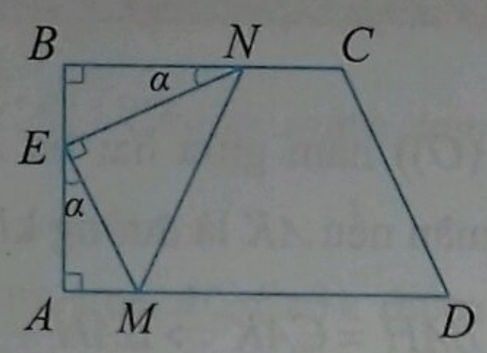
$$\Rightarrow 0 < \sin C + \cos C \le \sqrt{2}$$

$\Rightarrow X \ge \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$. Đẳng thức xảy ra khi

$\Leftrightarrow \sin C = \cos C \Leftrightarrow \widehat{C} = 45^0 \Leftrightarrow AB = AC$. Vậy

giá trị nhỏ nhất của X là $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ khi tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài toán 7: *Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, E là điểm cố định trên cạnh AB ($E \neq A$, $E \neq B$), M và N lần lượt thay đổi trên tia AD và BC sao cho $\widehat{MEN} = 90^0$. Tìm vị trí của điểm M trên AD và điểm N trên BC sao cho diện tích tam giác MEN nhỏ nhất.*



Lời giải. Đặt

$$\widehat{MEA} = \widehat{ENB} = \alpha$$

(do cùng phụ với $\widehat{NEB}$).

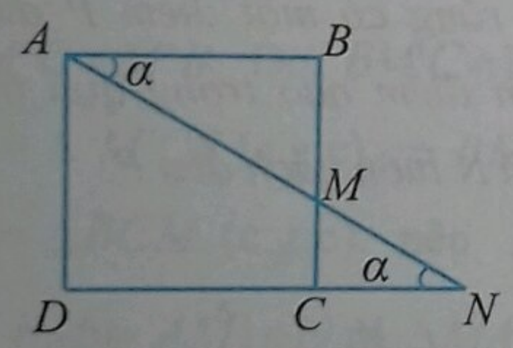
$$S_{MEN} = \frac{1}{2}EM.EN = \frac{1}{2}.\frac{EA}{\cos\alpha}.\frac{EB}{\sin\alpha} \geq \frac{EA.EB}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$= EA.EB$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0 \Leftrightarrow AM = AE$ và $BN = BE$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{MEN} bằng $EA.EB$ khi $AM = AE$ và $BN = BE$.

Bài toán 8: *Cho hình vuông ABCD cạnh a, điểm M di động trên tia BC ($M \neq B$). Hai tia AM và DC cắt nhau tại N. Xác định vị trí của điểm M để AM.AN nhỏ nhất.*

Lời giải.



Đặt $\widehat{BAM} = \widehat{AND} = \alpha$ ($AB \,//\, DC$). Khi đó:

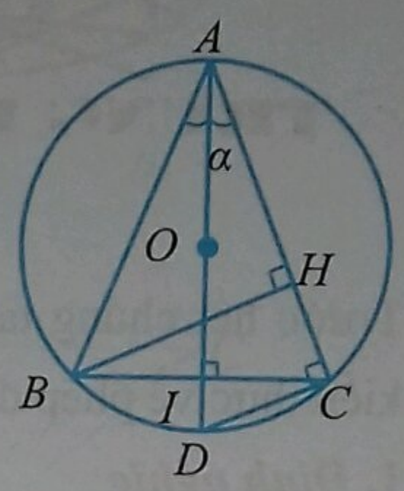
$$AM.AN = \frac{AB}{\cos\alpha}.\frac{AD}{\sin\alpha} \geq \frac{a^2}{\frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} = 2a^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$ $\Leftrightarrow M \equiv N \equiv C$. Vậy $AM.AN$ nhỏ nhất bằng $2a^2$ khi $M \equiv C$.

Bài toán 9: *Xét tam giác ABC cân tại A thay đổi, nội tiếp đường tròn (O;R) cho trước. Kẻ $BH \perp AC$ tại H. Chứng minh rằng $BH \leq \frac{8R\sqrt{3}}{9}$. Khi nào đẳng thức xảy ra?*

Lời giải. Kẻ đường kính AD thì do $AB = AC$ nên $AD \perp BC$ tại I, $IB = IC$ và $\widehat{IAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \alpha$,

$$BH = BC.\sin\widehat{BCH} = 2IC.\cos\alpha$$
$$= 2.AC.\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$= 2.AD.\cos\alpha.\sin\alpha.\cos\alpha$$
$$= 4R.\cos^2\alpha.\sin\alpha.$$



Mặt khác

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$
$$= \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos^2\alpha$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sin^2\alpha.\cos^4\alpha}$$

$\Rightarrow \sin\alpha.\cos^2\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, từ đó $BH \leq \frac{8R\sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ hay $\tan\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh rằng $8\left(x^4 + y^4\right) + \frac{1}{xy} \geq 5$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng:

a) $\frac{3AB + 4AC}{BC} \leq 5$; b) $\frac{AB^4 + AC^4}{AB.AC.BC^2} \geq 1$;

c) $\left(\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{AB^2}\right)^2 + \left(\frac{AC^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$;

d) $\frac{AB^8 + AC^8}{BC^8} + \frac{BC^{16}}{AB^8.AC^8} - \frac{AB^8.AC^8}{BC^{16}} \geq \frac{65567}{256}$.

3. Cho biết, kiến thức được mở rộng với $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$ thì $0 \leq \sin\alpha \leq 1$, $0 \leq \cos\alpha \leq 1$, $0 \sin 0^0 = \cos 90^0 = 0$, $\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $A = 4x + y^2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ với $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ và $2\sqrt{1-x} + \sqrt{4-2} + \sqrt{x} = y$.

4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^0$, $AB = c$, $AC = b$, đường cao AH. Chứng minh rằng $b.HB + c.HC \leq \sqrt{3}.bc$.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI TOÁN HÌNH HỌC BẰNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

VŨ ĐÌNH HOÀNG
(*Hà Nội*)

Trước hết chúng ta hãy nhắc lại (vắn tắt) một số kiến thức về phép đối xứng trục trong mặt phẳng.

1. *Định nghĩa*

Trên mặt phẳng cho đường thẳng Δ và điểm M. Phép biến hình biến điểm M thành điểm M' thỏa mãn:

- Nếu $M \notin \Delta$ thì d là đường trung trực của MM'.
- Nếu $M \in \Delta$ thì $M' \equiv M$,

gọi là phép đối xứng trục Δ, ký hiệu D_Δ.

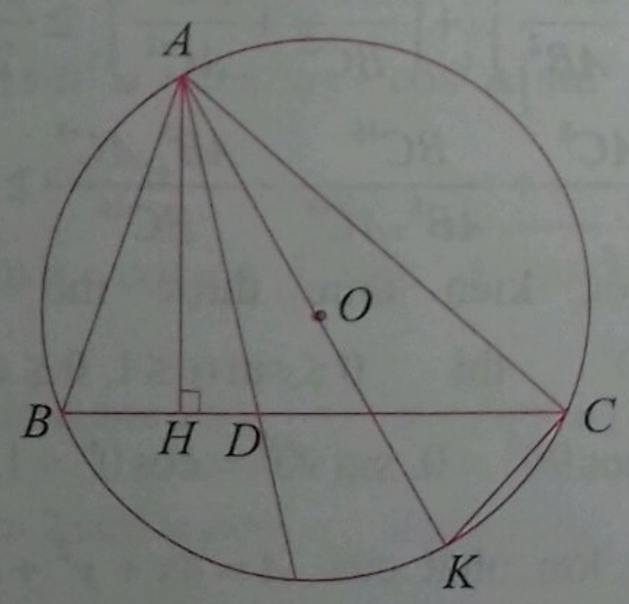
2. *Tính chất*

- Phép đối xứng trục có đầy đủ các tính chất của phép dời hình.

3. *Ứng dụng*

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH, đường phân giác AD. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc* $\widehat{HAO}$.

Lời giải.



Hình 1

a) *Xét góc B nhọn*: Ta cần chứng minh rằng: $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (1). Xét phép đối xứng trục AD (h.1). Dễ thấy tia AB biến thành tia AC, tia AH nằm giữa hai tia AB và AD biến thành tia AK ($K \in (O)$) nằm giữa hai tia AC và AD. (1) được thỏa mãn nếu AK là đường kính (O). Thật vậy,

$$\widehat{BAH} = \widehat{CAK} \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABH} = \widehat{CAK} + \widehat{AKC} = 90^0$$

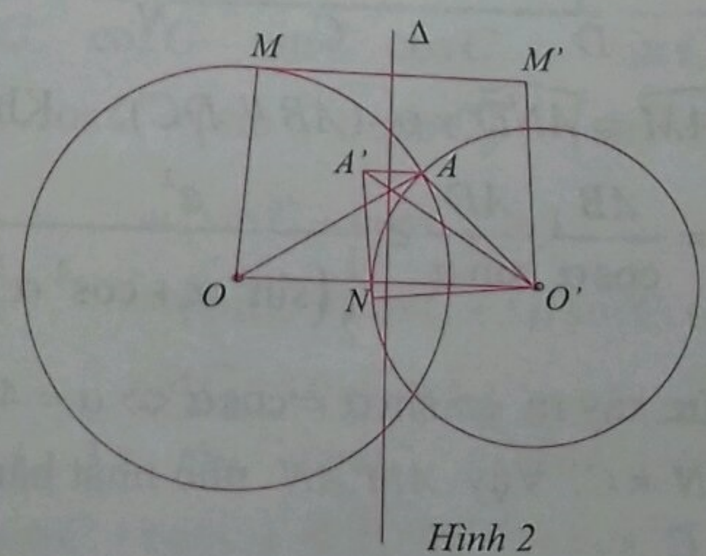
(vì $\widehat{ABH} = \widehat{AKC}$) suy ra $\widehat{ACK} = 90^0 \Rightarrow AK$ là đường kính của đường tròn (O) (đpcm).

b) *Xét góc B tù*: Ta làm tương tự.

Bài toán sau xin được viết lại theo ngôn ngữ thông thường.

Bài toán 2 (IMO 1979). *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A là một trong các giao điểm của chúng. Hai điểm M, N chuyển động lần lượt trên (O) và (O'), xuất phát từ A cùng một lúc theo cùng một chiều và mỗi điểm có vận tốc không đổi. Sau một vòng M và N trở về A cùng một lúc. Chứng minh rằng có một điểm P duy nhất sao cho dù ở thời điểm nào trong quá trình chuyển động thì M và N luôn cách đều P.*

Lời giải.



Hình 2

Gọi Δ là đường trung trực của đoạn thẳng OO' (h.2). Qua phép đối xứng trục Δ, điểm O, A, M lần lượt biến thành các điểm O', A', M' tương ứng nên $\widehat{MOA} = \widehat{M'O'A'} = \widehat{AO'N}$ và $OA = O'A'$, $OM = O'M'$

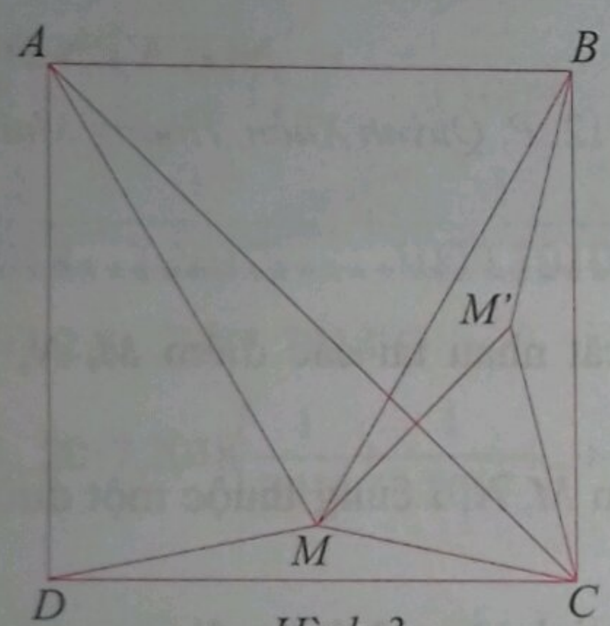
$\Rightarrow \Delta O'A'N = \Delta O'AM'$ (c.g.c)

$\Rightarrow A'N = AM' = A'M$ tức là A' luôn cách đều M và N hay A' chính là điểm P.

Nhận xét. Nhờ sử dụng đường trung trực Δ của đoạn thẳng OO' làm trục đối xứng ta dễ dàng tìm được điểm P.

Bài toán 3. *Trong hình vuông ABCD lấy điểm M sao cho $\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = 15^0$. Chứng minh tam giác MAB là tam giác đều.*

Lời giải. Xét phép đối xứng trục AC (h.3), điểm D biến thành điểm B, điểm M biến thành điểm M'. ΔMCD biến thành tam giác $M'CB$ $\Rightarrow \widehat{MCM'} = 60^0 \Rightarrow \Delta CMM'$ là tam giác đều



Hình 3

$\Rightarrow M'M = M'C = M'B$. Do $\widehat{BM'C} = 150^0 = \widehat{BM'M}$ $\Rightarrow \Delta M'MB = \Delta M'CB$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = BC$. Lại có $\Delta ADM = \Delta BCM$ (c.g.c) nên $AM = BM$. Do đó $AB = BM = AM$, suy ra ΔMAB đều.

Bài toán 4. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi độ dài các cạnh là: AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \le \frac{1}{2}(ac+bd) \quad (1)$$

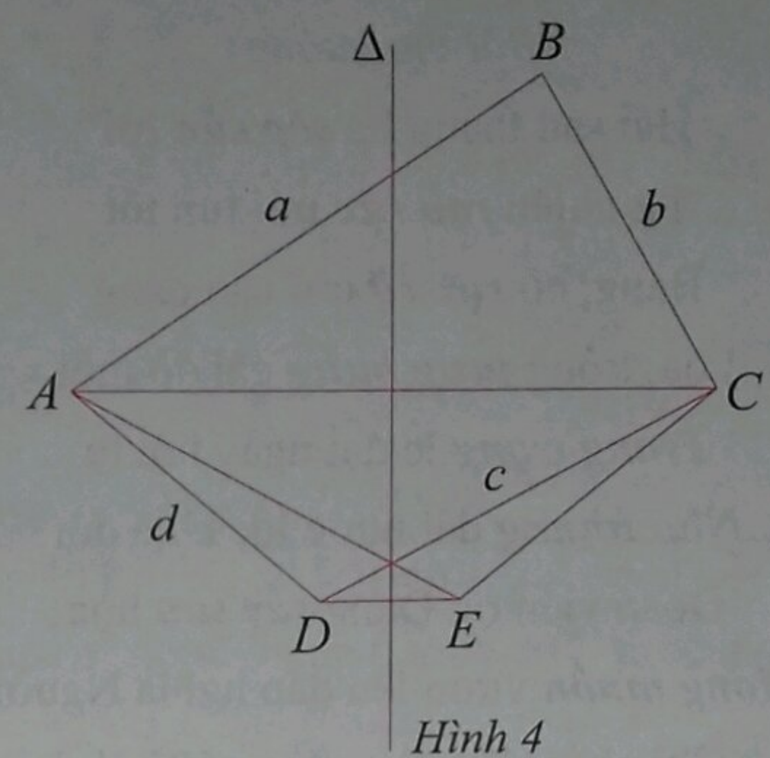
$$\left(p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\right).$$

Lời giải. Ta đã biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn thì có diện tích là:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

với $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ac+bd)$ (2).



Hình 4

Gọi Δ là đường trung trực của đường chéo AC (h.4). Xét phép đối xứng trục Δ, điểm A, D lần lượt biến thành các điểm C và E, suy ra:

$$AE = CD,$$
$$AD = CE,$$
$$S_{ADC} = S_{AEC}$$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABCE}$. Dễ thấy:

$ac + bd = AB.CD + BC.AD$

$= AB.AE + BC.CE \ge 2(S_{ABE} + S_{CBE}) = 2S_{ABCD}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$\widehat{BAE} = \widehat{BCE} = 90^0 \Leftrightarrow BE$ là đường kính của (O) khi đó $\widehat{BDE} = 90^0 \Rightarrow BD \perp AC$ (vì $AC \parallel DE$) (h.4). Như vậy (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} = 20^0$). Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM = BC. Tính số đo góc $\widehat{ABM}$.*

Lời giải.

Gọi Δ là đường trung trực của cạnh AB (h.5). Xét phép đối xứng trục Δ, điểm A biến thành điểm B, điểm M biến thành điểm N. Khi đó:

$\widehat{MBA} = \widehat{NAB}$, $MA = NB = BC$ và

$\widehat{MAB} = \widehat{NBA} = 20^0 \Rightarrow \widehat{NBC} = 60^0 \Rightarrow \Delta NBC$ là tam giác đều $\Rightarrow NB = NC$.

Kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh

***HAI SÁU THÁNG BA* (26/3)**

(*Bài thơ xướng*)

Hai sáu tháng ba ***sắp sửa*** rồi
Tự nhiên ***rạo rực*** trái tim tôi
Băng, cờ ***rực rỡ*** trai cao dáng
Loa, trống ***tưng bừng*** gái đỏ môi
Trang trọng lễ đại ngày hội tụ
Nhớ nhung đất nước lúc chia đôi
Đoàn viên ơn Đảng ***say sưa*** học
Mong muốn vươn lên đáp nghĩa Người
(Ghi chú: Câu nào cũng có từ láy)

NGUYỄN HỮU DỰ

(*xóm* 3, *Quỳnh Liên, T.X Hoàng Mai, Nghệ An*)

XUÂN CANH TÝ 2020

(Họa bài ***Tâm tình với chuột và ngẫm về nghề nhà giáo*** của tác giả *Đào Tam* đăng ở số 511, T1.2020)

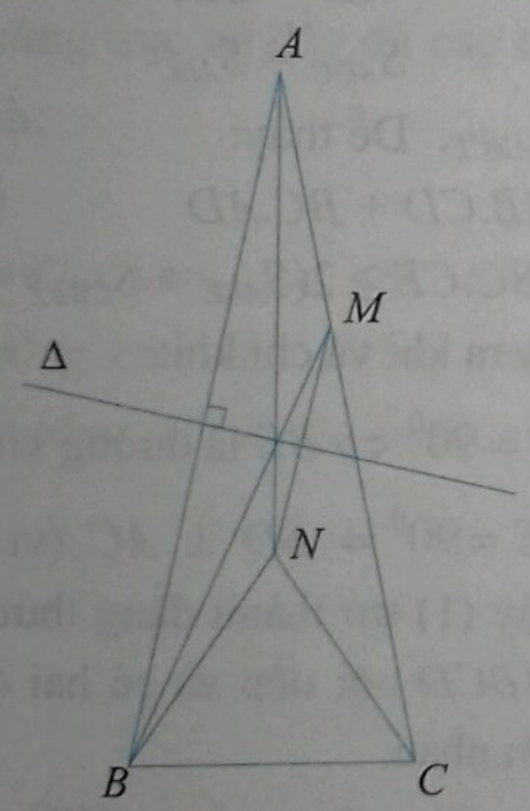
NĂM CHUỘT NGHĨ VỀ NGHỀ DẠY HỌC

Ai bảo rằng ta: Chuột cuối sào!
Yêu nghề dạy học dạ không nao
Tài năng vun sới tình thêm trọng
Trí tuệ gieo trồng nghĩa vút cao
Phấn trắng: đạo hàm soi ánh nguyệt
Bảng đen: ma trận sáng ngời ngời
Vươn tầm thế giới ngành Sư phạm
Dang rộng vòng tay đón bạn vào.

NGUYỄN DUY NAM

(*Tổ* 1, *khối* 12, *P. Quỳnh Xuân, Hoàng Mai, Nghệ An*)

****



Hình 5

Vậy AN là trung trực của BC, suy ra AN là phân giác trong góc A, tức là $\widehat{NAB} = \widehat{MBA} = 10^0$.

Phép đối xứng trục còn áp dụng để giải bài toán quỹ tích, dựng hình,…Xin hẹn gặp lại ở bài viết khác. Sau đây là một số bài tập để các bạn luyện tập thêm:

Bài 1. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ cùng nội tiếp đường tròn tâm O bằng nhau nhưng ngược hướng. Các cặp cạnh tương ứng của hai tam giác cắt nhau tại các điểm M, N, I. Chứng minh:

a) Các điểm M, N, I cùng thuộc một đường thẳng gọi là Δ.

b) Chứng minh rằng Δ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S.$$

Bài 3. a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}\,S.$$

Bài 4. Chứng minh rằng nếu một ngũ giác có hai trục đối xứng thì ngũ giác đó là ngũ giác đều. Tổng quát đa giác $2n+1$ cạnh có hai trục đối xứng thì đa giác đó là đa giác đều.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} = 20^0\right)$. Điểm D trên cạnh AC, điểm E trên cạnh AB sao cho $\widehat{CBD} = 50^0$ và $\widehat{BCE} = 60^0$. Tính số đo góc $\widehat{CED}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học 2018 - 2019

Câu 1. ĐK: $x\ge 0, x\ne 1$. Khi đó:

$$P=\frac{2x+4\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$$

$$=\frac{2x+4\sqrt{x}+6+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+3(\sqrt{x}-1)-2(x+2\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

Câu 2. Đặt: $C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}$

$$=\left(1+\frac{1}{2018}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2017}\right)+...+\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{1010}\right)$$

$$=2019\left(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2.2017}+...+\frac{1}{1009.1010}\right).$$

Khi đó: $A=1.2.3...2017.2018.C$

$$=2019.1.2.3...2017.2018\left(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2.2017}+...+\frac{1}{1009.1010}\right)$$

Vì

$$1.2.3...2017.2018\left(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2.2017}+...+\frac{1}{1009.1010}\right)$$

là một số nguyên nên $A\,\vdots\,2019$.

Câu 3. ĐK để đường thẳng d cắt Ox, Oy tạo thành một tam giác là $m\ne 0$ và $m\ne 1$. Gọi

$$d\cap Ox=A\Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m};0\right), d\cap Oy=B\Rightarrow B(0;m-1).$$

Diện tích ΔOAB bằng 2 nên ta có:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB\Leftrightarrow\frac{1}{2}|m-1|\left|\frac{m-1}{m}\right|=2\Leftrightarrow(m-1)^2=4|m|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-2m+1=4m, m>0\\ m^2-2m+1=-4m, m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3+2\sqrt{2}\\ m=3-2\sqrt{2}.\\ m=-1\end{array}\right.$$

Câu 4. Từ giả thiết ta có:

$(ab+bc+ca)2019(a+b+c)=2019abc$

$\Leftrightarrow(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc=0$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\ b+c=0.\\ c+a=0\end{array}\right.$$

Nếu $a+b=0$ thì $b=-a$, $c=\frac{1}{2019}$. Do đó

$$A=a^{2019}+(-a)^{2019}+\left(\frac{1}{2019}\right)^{2019}=\frac{1}{2019^{2019}}.$$

Với trường hợp $b+c=0, c+a=0$ ta cũng tính được $A=\frac{1}{2019^{2019}}$. Vậy $A=\frac{1}{2019^{2019}}$.

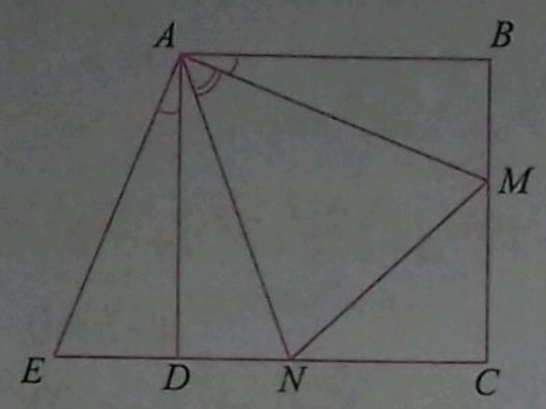
Câu 5. +) Với $y=0$, hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}x^2+2x=0\\ (x^2+2x)(x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$. Hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(-2;0)$.

+) Với $y\ne 0$, hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}\frac{x^2+2x}{y}+x+y-3=2\\ \frac{x^2+2x}{y}.(x+y-3)=-3\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=\frac{x^2+2x}{y}\\ v=x+y-3\end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases}u+v=2\\ uv=-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}\\ \begin{cases}u=-1\\ v=3\end{cases}\end{array}\right.$

Với $\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}$ ta được $\begin{cases}\frac{x^2+2x}{y}=3\\ x+y-3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6\\ y=8\end{cases}\end{array}\right.$.

Với $\begin{cases}u=-1\\ v=3\end{cases}$ ta được $\begin{cases}\frac{x^2+2x}{y}=-1\\ x+y-3=3\end{cases}$ (hệ này vô nghiệm). Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $(0;0),(-2;0),(1;1),(-6;8)$.

Câu 6.



- Với $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$ thì không tồn tại ΔCMN thỏa mãn điều kiện đề bài.
- Với $M \neq B$ và $M \neq C$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$. Từ $\Delta BAM = \Delta DAE$ (c.g.c) suy ra $AM = AE$ và $\widehat{BAM} = \widehat{DAE}$. Ta có $\widehat{BAM} + \widehat{DAM} = 90^0$

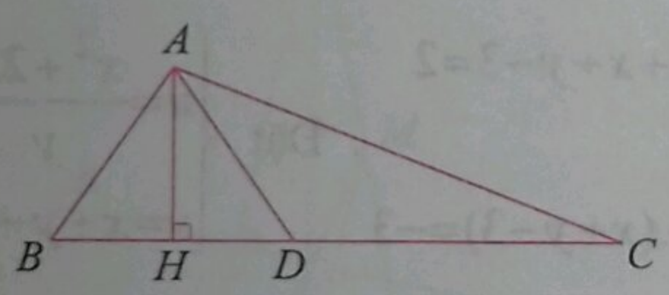
$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{DAM} = 90^0$ hay $\widehat{EAM} = 90^0$. Theo đề bài, $CM + CN + MN = 2a$ mà

$CM + CN + MB + ND = 2a$ nên $MN = MB + ND$ hay $MN = DE + ND = EN$. Từ đó

$$\Delta MAN = \Delta EAN (\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{EAN} = \frac{\widehat{EAM}}{2} = 45^0.$$

Vậy góc $\widehat{MAN}$ có số đo không đổi.

Câu 7. Vì $\widehat{BAC} > 90^0$, nên H nằm giữa B và C. Ta có:



$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} (\text{cm}).$$

Trên tia HC lấy điểm D sao cho $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$. ΔABD là tam giác cân đỉnh A, H là trung điểm của BD, $BD = 2BH = 6\text{cm}$. Từ $\widehat{CAH} = 3\widehat{BAH}$ và $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$ suy ra AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$. Từ đó ta có: $\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Đặt

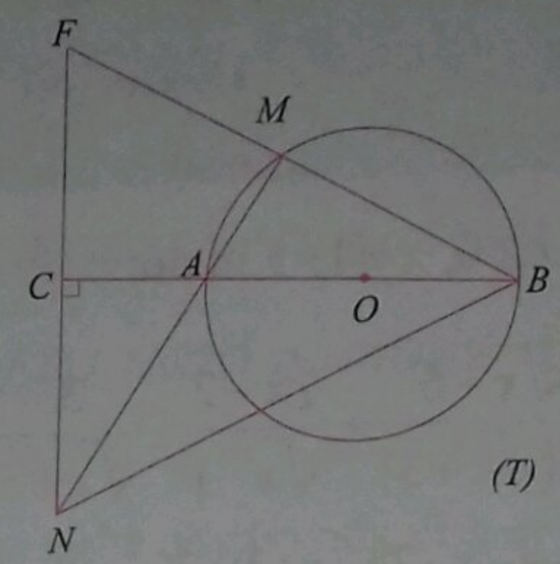
$DC = x$ (cm), $x > 0$. Suy ra $AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}$ (cm).

$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Leftrightarrow 36 + (3+x)^2 = \frac{5x^2}{4}$$

$\Leftrightarrow x = 30$ (do $x > 0$).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2}.6.(6+30) = 108 (\text{cm}^2).$$

Câu 8.



Ta có C nằm trong đoạn NF và $\widehat{CNA} = \widehat{CBF}$ nên ΔCAN đồng dạng với ΔCBF. Suy ra $\frac{CN}{CB} = \frac{CA}{CF} \Rightarrow CN.CF = BC.AC = 3R^2$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$NF = CN + CF \geq 2\sqrt{CN.CF} = 2R\sqrt{3}$ không đổi. Do đó NF có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi $CN = CF$ hay C là trung điểm của NF. Do $BA = \frac{2}{3}BC$, suy ra A là trọng tâm của ΔBNF.

Câu 9. Ta sẽ chứng minh $\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} \leq 4b - a$. Thật vậy, ta có: $\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} \leq 4b - a$

$$\Leftrightarrow 19b^3 - a^3 \leq 4ab^2 + 20b^3 - a^2b - 5ab^2$$

$$\Leftrightarrow b^3 - ab^2 - a^2b + a^3 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

(luôn đúng với $\forall a, b > 0$). Tương tự, ta có: $\frac{19c^3 - b^3}{bc + 5c^2} \leq 4c - b$, $\frac{19a^3 - c^3}{ca + 5a^2} \leq 4a - c$. Từ đó ta có:

$$\frac{19b^3 - a^3}{ab + 5b^2} + \frac{19c^3 - b^3}{bc + 5c^2} + \frac{19a^3 - c^3}{ca + 5a^2} \leq 3(a + b + c).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Vậy, ta được điều cần chứng minh.

Câu 10. Trên đường tròn (C) ta kẻ đường kính S_1S_2 tùy ý. Khi đó $S_1S_2 = 2$. Ta có:

$$S_1M_1 + S_2M_1 \geq S_1S_2 = 2.$$
$$S_1M_2 + S_2M_2 \geq S_1S_2 = 2.$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \geq S_1S_2 = 2.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2019 – 2020

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, chuyên Tin)

Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu 1. *(2 điểm)*

a) Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{x^4-2x^3+3x^2-38x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

khi $x=2+\sqrt{3}$.

b) Cho hai hàm số $y=x^2$, $y=(m-1)x-1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là $(P),d$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ sao cho: $y_1^3-y_2^3=18\left(x_1^3-x_2^3\right)$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2+2xy+4=2x+5y \\ 5x^2+7y-18=\sqrt{x^4+4}. \end{cases}$$

b) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}.$$

Câu 3. *(1,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2+y^2+1\right)\left(x+xy+y\right)=30$.

b) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Câu 4. *(3 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, các đường cao AD,BE,CF đồng quy tại điểm H $(D\in BC,E\in CA,F\in AB)$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$. Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{EC}$ của (O) lấy điểm I khác E sao cho $IC>IE$. Hai đường thẳng ID,CE cắt nhau tại N, hai đường thẳng IC,EF cắt nhau tại M.

a) Chứng minh $NI.ND=NE.NC$.

b) Chứng minh hai đường thẳng MN,CH vuông góc với nhau.

c) Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại điểm K khác H. Đường thẳng KN cắt đường tròn (O) tại điểm G khác K. Hai đường thẳng MN,BC cắt nhau tại T. Chứng minh ba điểm H,T,G thẳng hàng.

Câu 5. *(1 điểm)*

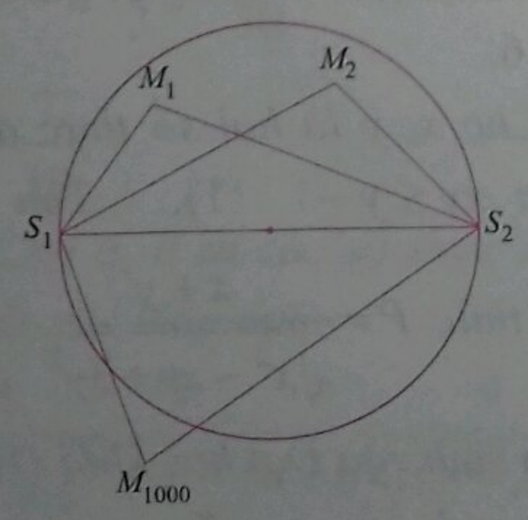
Cho 2020 cái kẹo vào 1010 chiếc hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 cái kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 cái kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm thấy một số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010 cái.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh) ***Giới thiệu***

****

☞



Suy ra:

$$(S_1M_1+S_1M_2+...+S_1M_{1000})$$
$$+(S_2M_1+S_2M_2+...+S_2M_{1000})\geq 2000\ (*)$$

Từ (*) và theo nguyên lý Dirichlet chứng tỏ trong hai tổng $S_1M_1+S_1M_2+...+S_1M_{1000}$ và $S_2M_1+S_2M_2+...+S_2M_{1000}$ sẽ có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000. Giả sử $S_1M_1+S_1M_2+...+S_1M_{1000}\geq 1000$. Khi đó ta chọn $S\equiv S_1$. Ta được điều phải chứng minh.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***Giới thiệu***

CHUẨN BỊ CHO KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

ĐI TÌM LỜI GIẢI CHO BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Tìm cực trị của biểu thức là dạng toán khó trong đề thi đại học, song nó có điểm chung là đều quy về việc tìm cực trị của biểu thức một biến. Vậy việc quy về biểu thức một biến được thực hiện như thế nào. Trong phạm vi bài viết này xin trao đổi cùng các bạn cách làm đó.

Bài toán 1. *Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.*

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối B năm 2008)

Phân tích. Nếu thay $1=x^2+y^2$ vào P thì tử và mẫu của P là các đa thức cùng bậc 2, hơn nữa theo giả thiết $x^2+y^2=1$ suy ra ít nhất một trong hai biến có giá trị khác 0. Giả sử $y\neq 0$ ta chia cả tử và mẫu của P cho y^2 rồi đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Khi đó P là một biểu thức mà tử và mẫu là các đa thức bậc hai biến t. Do đó ta có thể sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hoặc dùng công cụ đạo hàm để tìm cực trị của P.

Lời giải. Ta có:

$P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}=\dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$. Vì $x^2+y^2=1$ nên nếu $y=0$ thì $x^2=1$

$\Rightarrow P=2x^2=2$.

Xét $y\neq 0$, chia cả tử và mẫu của P cho y^2 ta được $P=\dfrac{2\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+6\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)+3}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta có $P=\dfrac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3}$

$\Leftrightarrow (P-2)t^2+2(P-6)t+3P=0$ (1).

– Với $P=2$, phương trình (1) có nghiệm $t=\dfrac{3}{4}$.

– Với $P\neq 2$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=-2P^2-6P+36\geq 0\Leftrightarrow -6\leq P\leq 3$.

$P=3$ khi $x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

hoặc $x=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

$P=-6$ khi $x=\dfrac{3}{\sqrt{13}}, y=-\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

hoặc $x=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, y=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3, giá trị nhỏ nhất của P bằng -6.

Bài toán 2. *Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy\leq y-1$ (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\dfrac{x-2y}{6(x+y)}$*

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối D năm 2013)

Phân tích. Ta thấy tử và mẫu của các biểu thức trong P là các biểu thức đồng bậc nên ta chia cả tử và mẫu của mỗi biểu thức cho x hoặc y sau đó

đặt $t=\frac{x}{y}$ ta được một biểu thức chỉ có một biến t. Sau đó ta đi tìm điều kiện xác định của t. Để xuất hiện $\frac{x}{y}$ ta chia cả hai vế của (1) cho y^2 sau đó ta đi đánh giá vế phải của (1).

Lời giải. Do $x>0, y>0, xy\le y-1$ nên

$$0<\frac{x}{y}\le\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$ suy ra $0<t\le\frac{1}{4}$. Khi đó $P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$, với $0<t\le\frac{1}{4}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $0<t\le\frac{1}{4}$. Ta có $f'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}$.

Với $0<t\le\frac{1}{4}$ ta có: $t^2-t+3=t(t-1)+3<3$; $7-3t>6$ và $t+1>1$. Do đó

$$\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}>\frac{7-3t}{6\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và}$$

$-\frac{1}{2(t+1)^2}>-\frac{1}{2}$. Suy ra $f'(t)>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}>0$.

Vậy $P=f(t)\le f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$. Khi $x=\frac{1}{2}$ và $y=2$, ta có $P=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

Bài toán 3. *Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối B năm 2013).

Phân tích. Ta thấy mẫu thứ hai là biểu thức bậc hai nên ta đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$. Khi đó ta đánh giá mẫu thứ hai nhỏ hơn hoặc bằng $k(a^2+b^2+c^2)$. Vì $a^2+b^2+c^2$ là đa thức đối xứng ba biến a, b, c nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Do vậy ta sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$.

Khi đó xuất hiện biểu thức $\frac{(a+b)(a+b+4c)}{2}$, đánh giá: $\frac{(a+b)(a+b+4c)}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2}$ $\le 2(a^2+b^2+c^2)$ sau đó đặt $t=a^2+b^2+c^2$. Khi đó P trở thành một biểu thức một biến t. Ta áp dụng công cụ đạo hàm để giải bài toán.

Lời giải. Ta có: $\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le\frac{a+b+4c}{2}$

$$\Rightarrow (a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le\frac{(a+b)(a+b+4c)}{2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2}\le 2(a^2+b^2+c^2).$$

Từ đó $P\le\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$, với $t>2$.

Suy ra $P\le\frac{4}{t}-\frac{9}{2(t^2-4)}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{t}-\frac{9}{2(t^2-4)}$, với $t>2$. Ta có:

$$f'(t)=-\frac{4}{t^2}+\frac{9t}{(t^2-4)^2}=\frac{-(t-4)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}.$$

Với $t>2$ ta có:

$4t^3+7t^2-4t-16=4(t^3-4)+t(7t-4)>0$. Do đó $f(t)=0\Leftrightarrow t=4$. Bảng biến thiên

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta được $P \le \frac{5}{8}$, khi $a=b=c=2$ ta có $P=\frac{5}{8}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{8}$.

Bài toán 4. *Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn* $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$ (1). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối B năm 2011)

Phân tích. Ta dễ dàng đưa P về một biểu thức mà trong nó chỉ có lũy thừa của $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Nếu đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Ta sẽ chuyển được P về đa thức biến t. Vấn đề đặt ra là phải tìm được miền xác định của t. Muốn vậy ta phải chia cả hai vế của (1) cho ab để vế trái của (1) xuất hiện $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Khi đó vế phải bằng $a+\frac{2}{a}+b+\frac{2}{b}$. Ta áp dụng bất đẳng thức $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ để vế phải xuất hiện $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ vì

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}.$$

Lời giải. Theo giả thiết ta có $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$. Từ đây suy ra:

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(ab+2)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=a+\frac{2}{b}+b+\frac{2}{a}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)+\left(b+\frac{2}{a}\right)\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ta suy ra: $2t+1\ge 2\sqrt{2}\sqrt{t+2}$

$\Rightarrow 4t^2-4t-15\ge 0 \Rightarrow t\ge \frac{5}{2}$. Suy ra

$$P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)$$
$$=4t^3-9t^2-12t+18=f(t)$$

$f'(t)=12t^2-18t-12, f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$ hoặc $t=2 \Rightarrow \min f(t)=-\frac{23}{4}$ khi $t=\frac{5}{2}$. Vậy min P $=-\frac{23}{4}$ khi $a=1$ và $b=2$ hoặc $a=2$ và $b=1$.

Bài toán 5. *Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn* $[1;4]$ *và* $x\ge y;\ x\ge z$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối A năm 2011)

Phân tích. Ta thấy tử và mẫu các phân thức của P là các đa thức đồng bậc nên ta chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho biến trên tử của phân thức đó ta được: $P=\frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}$. Nếu đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}};\ a=\frac{z}{y};\ b=\frac{x}{z}$, thì $P=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$.

Ta phải đánh giá $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ lớn hơn hoặc bằng

một biểu thức của biến t. Mặt khác ta thấy $ab = t^2$. Vì $ab = \frac{x}{y} \geq 1$ nên ta nhớ tới bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} = \frac{2}{1+t}$. Đến đây bài toán đã có lời giải.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1),$$

với a, b là các số dương và $ab \geq 1$. Thậy vậy:

$$(1) \Leftrightarrow (a+b+2)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \geq a+b+2ab$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

BĐT này luôn đúng với a, b là các số dương và $ab \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Áp dụng (1) với x và y thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y$

ta có: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$ (1).

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, t \in [1;2]$, khi đó

$$P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$, $t \in [1;2]$; có

$$f'(t) = \frac{-2[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$$

$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = \sqrt{xy} \end{cases}$, chẳng hạn: $x = 4, y = 1$ và $z = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

Bài toán 6. *Cho hai số thực x,y thỏa mãn điều kiện $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}.$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối D năm 2014)

Phân tích. Đặt $t = x + y$. Ta đánh giá mẫu thứ nhất và mẫu thứ hai nhỏ hơn hoặc bằng các biểu thức của $x + y$. Muốn vậy ta sử dụng điều kiện ban đầu của x và y thuộc đoạn $[1;2]$. Do $1 \leq x \leq 2$; nên $(x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \leq 3x$.

Tương tự có $y^2 + 2 \leq 3y$. Suy ra

$$P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3x+3y+3} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$= \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}.$$

Lời giải. Do $1 \leq x \leq 2$, nên $(x-1)(x-2) \leq 0$

$\Rightarrow x^2 + 2 \leq 3x$. Tương tự có $y^2 + 2 \leq 3y$. Suy ra

$$P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3x+3y+3} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$= \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}.$$

Đặt $t = x + y \Rightarrow 2 \leq t \leq 4$. Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)} \text{ với } 2 \leq t \leq 4.$$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}$, suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Mà $f(2)=\frac{11}{12}; f(3)=\frac{7}{8}; f(4)=\frac{53}{60}$ nên $f(t)\ge f(3)=\frac{7}{8}$. Do đó $P\ge\frac{7}{8}$. Khi $x=1, y=2$, thì $P=\frac{7}{8}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{7}{8}$.

Bài toán 7. *Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^5+y^5+z^5$.*

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối B năm 2012)

Phân tích. Ta phải dồn về một biến x. Vì y^5+z^5 là đa thức đối xứng với hai biến y, z nên y^5+z^5 viết được dưới dạng $y+z; yz$ do đó ta phải tính được $y+z, yz$ theo x. Từ điều kiện $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x$. Vì

$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz$,

nên $yz=x^2-\frac{1}{2}$. Sau đó thay $y+z=-x$; $yz=x^2-\frac{1}{2}$ vào P thì P là đa thức của một biến x. Bây giờ để tìm điều kiện xác định của x, ta dựa vào bất đẳng thức: $x^2-\frac{1}{2}=yz\le\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{1-x^2}{2}$.

Lời giải.

Vì $x+y+z=0\Rightarrow y+z=-x$; $x^2+y^2+z^2=1$;

$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz$;

nên $yz=x^2-\frac{1}{2}$. Mặt khác

$yz\le\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{1-x^2}{2}$. Suy ra: $x^2-\frac{1}{2}\le\frac{1-x^2}{2}$

do đó: $-\frac{\sqrt{6}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{6}}{3}$. Khi đó

$P=x^5+(y^3+z^3)(y^2+z^2)-y^2z^2(y+z)$

$=x^5+(1-x^2)\left[(y^2+z^2)(y+z)-yz(y+z)\right]+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2x$

$=x^5+(1-x^2)[-x(1-x^2)+x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)]+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2x$

$=\frac{5}{4}(2x^3-x)$.

Xét hàm số $f(x)=2x^3-x$ trên $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

$\Rightarrow f'(x)=6x^2-1; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Ta có

$f(-\frac{\sqrt{6}}{3})=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$

Do đó $f(x)\le\frac{\sqrt{6}}{9}\Rightarrow P\le\frac{5\sqrt{6}}{36}, \forall x\in\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

Khi $x=\frac{\sqrt{6}}{3}, y=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ thì dấu bằng xảy ra.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Bài toán 8. *Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}.$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối A năm 2014)

Phân tích. Đặt $t=x+y+z$. Nếu thay $1=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ thì tử phân thức thứ ba là đa thức bậc hai nên ta đánh giá nó lớn hơn hoặc bằng một biểu thức của $(x+y+z)^2$. Ta đi chứng minh

$$\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}\le\frac{x+y+z}{x+y+z+1}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}\le\frac{x}{x+y+z+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+yz+x+1\ge x(x+y+z+1)$$

$$\Leftrightarrow yz+1\ge x(y+z)$$

$\Leftrightarrow 2yz+2 \geq 2x(y+z)$

$\Leftrightarrow x^2+(y+z)^2 \geq 2x(y+z)$ (luôn đúng).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y+z$.

Lời giải. Ta có:

$$2+2yz = x^2+y^2+z^2+2yz$$
$$= x^2+(y+z)^2 \geq 2x(y+z).$$

$\Rightarrow 1+yz \geq x(y+z)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y+z \Rightarrow x^2+yz+x+1 \geq x(x+y+z+1)$.

Mặt khác $2(1+yz)=x^2+(y+z)^2 \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1+yz}{9} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{36}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y+z$. Do đó

$$P \leq \frac{x^2}{x(x+y+z+1)}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{(x+y+z)^2}{36}$$
$$=\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{(x+y+z)^2}{36}.$$

Đặt $t=x+y+z \Rightarrow t \geq 0$, $t^2=(x+y+z)^2$

$$\leq 3(x^2+y^2+z^2)=6$$

$\Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{6}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{t^2}{36}$ với $0 \leq t \leq \sqrt{6}$. Ta có

$$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{t}{18}=-\frac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2},$$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$. Ta có $f(0)=0; f(2)=\dfrac{5}{9}$ và $f(\sqrt{6})=\dfrac{31}{30}-\dfrac{\sqrt{6}}{5}$, nên $f(t) \leq \dfrac{5}{9}$, với $0 \leq t \leq \sqrt{6}$. Do đó $P \leq \dfrac{5}{9}$. Vậy giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{5}{9}$ khi $x=y=1, z=0$.

Bài toán 9. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện* $(a+c)(b+c)=4c^2$ (1). *Tìm các giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối A năm 2013)

Phân tích. Vì cả ba mẫu của P đều có biến c, hơn nữa tử và mẫu của các biểu thức của P là các biểu thức cùng bậc, nên ta chia cả tử và mẫu của phân thức thứ nhất và phân thức thứ hai cho c^3 và chia cả tử và mẫu của biểu thức thứ ba cho c. Nếu đặt $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{b}{a}$, thì $P=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$.

P là biểu thức đối xứng với hai biến x, y nên ta dồn P thành biểu thức một biến. Do đó biến đổi P làm xuất hiện $x+y$ và xy. Vì $\dfrac{x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{y^3}{(x+3)^3}$ (2) có dạng A^3+B^3 nên ta biến đổi (2) dựa vào hằng đẳng thức $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$ hoặc đánh giá $A^3+B^3 \geq \dfrac{(A+B)^3}{4}$. Khi đó nếu đặt $t=x+y$ thì phải tính được xy theo $x+y$. Muốn vậy chia cả hai vế của (1) cho c^2 rồi đặt $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{b}{a}$ thì được $(1+x)(1+y)=4 \Rightarrow xy+x+y=3$

$\Rightarrow xy=3-x-y$.

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{a}{c}; y=\dfrac{c}{b}$ Khi đó

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Với mọi $u>0; v>0$ ta có:

$$u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)$$
$$\geq (u+v)^3-\frac{3}{4}(u+v)^3=\frac{(u+v)^3}{4},$$

do đó: $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8\left(\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3}\right)^3$

$$=8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3x+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3.$$

Từ (1) ta có: $xy=3-x-y$, thay vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3}-\frac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3$$

$$=(x+y-1)^3.$$

$$P\ge(x+y-1)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}$$

$$=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}.$$

Đặt $t=x+y$ suy ra $t>0$ và

$P\ge(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$. Ta có:

$3=x+y+xy\le(x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}=t+\frac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6)\ge 0$. Do đó $t\ge 2$. Xét hàm số $f(t)=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$, với $t\ge 2$. Ta có $f'(t)=3(t-1)^2-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$. Với mọi $t\ge 2$, ta có: $3(t-1)^2\ge 3$ và

$$\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}=\sqrt{1+\frac{7}{(t+1)^2-7}}\le\sqrt{1+\frac{7}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

nên $f'(t)\ge 3-\frac{3\sqrt{2}}{2}>0$.

Suy ra $f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$. Do đó $P\ge 1-\sqrt{2}$. Khi $a=b=c$, thì $P=1-\sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng $1-\sqrt{2}$.

Bài toán 10. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}.$$

(Thi tuyển sinh vào Đại học khối A năm 2013)

Phân tích. Ta dự đoán $\min P=3$ khi $x=y=z=0$. Nếu đặt $t=x^2+y^2+z^2$, đánh giá $3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}$ lớn hơn hoặc bằng một biểu thức của $x^2+y^2+z^2$ thì ta khó có thể chứng minh được $P\ge 3$ (điều này dành cho bạn đọc). Do đó ta đặt $a=|x-y|, b=|y-z|, c=|z-x|$. Sau đó đánh giá $P\ge A$ với A là tổng của ba biểu thức biến a, b, c. Muốn vậy ta đánh giá $\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$ nhỏ hơn hoặc bằng biểu thức của $a+b+c$

$$\Leftrightarrow a+b+c\ge k\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge k^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge m(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow ab+ac\ge na^2\Leftrightarrow b+c\ge na.$$

Điều này luôn đúng với $n=1$.

Lời giải. Từ $x+y+z=0\Rightarrow(x+y+z)^2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$. Do đó

$$6(x^2+y^2+z^2)=2(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2).$$

Vậy nếu đặt $a=|x-y|, b=|y-z|, c=|z-x|$, thì $a, b, c\ge 0$ và $a+b\ge c; b+c\ge a; c+a\ge b$. Ta có:

$P=3^a+3^b+3^c-\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. Vì $b+c\ge a$ nên $a(b+c)\ge a^2$. Tương tự có $b(c+a)\ge b^2$, $c(a+b)\ge c^2$. Cộng ba bất đẳng thức trên ta được: $2(ab+bc+ca)\ge a^2+b^2+c^2$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2\ge 2(a^2+b^2+c^2).$$

Suy ra $a+b+c\ge\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$, do đó:

$$P\ge 3^a+3^b+3^c-(a+b+c)$$

$$=(3^a-a)+(3^b-b)+(3^c-c).$$

Xét hàm số $f(x)=3^x-x$ với $x\ge 0$.

Ta có: $f'(x)=3^x\ln 3-1>0$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=1$

Suy ra $P\ge 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$. Vậy $\min P=3$.

ĐỊNH LÝ FERMAT LỚN VÀ ỨNG DỤNG

HOÀNG NGỰ HUẤN
(Đại học Mỏ - Địa chất, Hà Nội)

1. Mở đầu

Có một định lý đã thách đố những trí tuệ vĩ đại nhất của loài người trong 350 năm - *định lý cuối cùng của Fermat* (*Fermat's last theorem*) – đã được *Giáo sư Andrew Wiles* chứng minh xong vào năm 1994. Vào năm 2016, ông đã đến Na Uy nhận giải thưởng giải Abel với số tiền thưởng 700000 USD [1].

Sinh thời *Pierre de Fermat* là người rất đam mê vẻ đẹp của các con số. Để hiểu thêm về *Fermat*, bạn hãy hỏi "*cụ*" Google, đánh từ khóa *Fermat, "cụ" cho ngay hơn một triệu* kết quả.

Dù hết lòng yêu các con số, chắc *Fermat* cũng khó hình dung được sự kì diệu này, tuy bản thân ông là cả một sự kì diệu đến khó tin.

Trong lịch sử toán học của nhân loại, không tìm thấy định lí nào có nhiều điều kì lạ và độc đáo như định lí này.

2. Tác giả định lý là nhà toán học nghiệp dư

Luật sư *Pierre de Fermat* (1601 – 1665), sinh ra trong một gia đình thương nhân giàu có của thành phố Toulouse, miền Tây Nam nước Pháp. Năm 30 tuổi ông được bầu làm Ủy viên Công tố của thành phố. 17 năm cuối đời ông giữ một vị trí quan trọng: Ủy viên Hội đồng Tư vấn của nghị viện thành phố. *Fermat* quá bận rộn với những công việc vừa phức tạp vừa quan trọng. Nhà toán học *Degby*, trong một bức thư có kể về *Fermat*: "*Ông ta bận bịu suốt ngày với các vụ trọng án. Gần đây, ông ta đã tuyên một bản án gây nhiều chấn động: đó là bản án kết tội một mục sư lạm dụng quyền lực, phải thiêu trên dàn lửa*".


Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

Là một nhà toán học nghiệp dư, *Fermat* rất say mê các công trình toán học của người Hy Lạp cổ. Ông đã để lại dấu ấn quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học: Giải tích, Xác suất, Lý thuyết số,… Ông được gọi là "Hoàng tử của những người nghiệp dư".

3. Định lí có nội dung rất dễ hiểu

Trong toán học, để hiểu được một định lý nào đó, người đọc cần phải có một trình độ toán học tương ứng. Các học sinh lớp 7 hiểu được về định lý Pythagore. Để hiểu được định lý Kronecker-Capelli về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính, người học phải là những sinh viên đang học chương trình toán cao cấp ở các trường đại học,… Đó là chưa nói đến việc chứng minh định lý. Trong các giáo trình toán ở bậc đại học vẫn thỉnh thoảng bắt gặp một định lý mà phần chứng minh chỉ ghi vắn tắt: chúng ta thừa nhận định lý này.

Vậy mà một trong những định lý vĩ đại nhất trong lịch sử toán lại có nội dung dễ hiểu ngay cả với một học sinh lớp 6. Có thể phát biểu cho học sinh lớp 6 định lí lớn Fermat như sau: *Không tìm được bộ ba số nguyên x, y, z nào thỏa mãn đẳng thức:* $x^n + y^n = z^n$ *với bất kỳ số tự nhiên n nào với* $n>2$.

Nội dung của định lý dễ hiểu như vậy nhưng để hiểu được cách chứng minh nó, bạn phải nằm trong số một phần một nghìn các nhà toán học!

4. Sự xuất hiện của định lí bắt đầu từ một ghi chú bên lề một cuốn sách

Đó là cuốn *Số học* (*Arithmetica*) của nhà toán học Hy Lạp *Diophantus*, thế kỷ III trước Công nguyên. Về cuộc đời của *Diophantus*, chúng ta biết được khá rõ ràng dựa vào một đoạn văn nổi tiếng sau: "*Đây là ngôi mộ chôn cất thi hài của Diophantus, những điều sau đây sẽ cho mọi người biết về cuộc đời của ông. Một phần sáu cuộc đời là tuổi ấu thơ hạnh phúc. Sau một phần mười hai tiếp theo của cuộc đời, trên cằm ông bắt đầu mọc lơ thơ những sợi ria. Trải qua một phần bảy cuộc đời nữa thì ông lấy vợ. Sau đó là năm năm đầy hạnh phúc và ông có một đứa con trai. Cậu lớn lên bằng nửa tuổi của cha mình thì định mệnh lạnh lùng đã cướp cậu đi. Ông đã quên dần nỗi đau trong suốt bốn năm còn lại của cuộc đời mình*". Một học sinh lớp 8 cũng có thể giải được bài toán này, *Diophantus* thọ 84 tuổi.

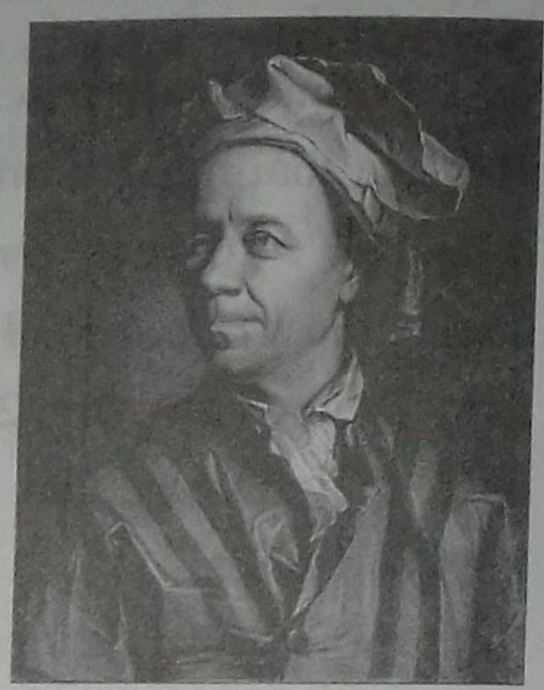
Năm 1621 cuốn *Số học* được dịch ra tiếng La tinh, trong đó có hơn 100 bài toán có lời giải chi tiết. *Fermat* thích thú đọc cuốn sách này. Việc nghiên cứu các bài toán gợi ý cho *Fermat* suy nghĩ và giải các bài toán khác có liên quan nhưng sâu sắc hơn. Vào khoảng năm 1630, *Fermat* viết bên lề cuốn sách mấy dòng chữ La tinh: "*Không thể phân tích một lập phương thành tổng của hai lập phương, một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, hay tổng quát, bất kì một lũy thừa khác 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm thấy được một chứng minh thật tuyệt diệu cho nhận xét này, nhưng rất tiếc lề sách không đủ rộng để ghi ra đây*".

Hơn ba mươi năm sau, khi *Fermat* đã qua đời, cuốn Số học của *Diophantus* cùng với những ghi chú của *Fermat* được xuất bản. Chỉ đến lúc đó, định lý *Fermat* mới được biết đến.

5. Định lí cuốn hút một số lượng đông đảo các nhà toán học chuyên và không chuyên tham gia tìm kiếm lời giải

Định lí cuối cùng của *Fermat* như một nàng tiên cá đầy quyến rũ trong toán học, nàng nhử các thiên tài đến gần, chỉ cốt làm tan tành niềm hy vọng của họ. Bất kỳ nhà toán học nào lỡ "dính líu" đến định lí này đều có nguy cơ tiêu phí sự nghiệp của họ. Tuy vậy, cũng như những nhà leo núi tìm kiếm những miền đất chưa có dấu chân người, các bài toán chưa giải được luôn luôn mời gọi các nhà toán học. Cho đến đầu thế kỉ XX, những bước tiến trong việc tìm kiếm lời giải cho *định lý lớn Fermat* vẫn hết sức ít ỏi.

Nhà Toán học vĩ đại người Thụy Sĩ *Leonhard Euler* (1707 – 1783) đã chứng minh *định lý lớn Fermat* cho trường hợp $n = 3$ và $n = 4$.



Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Năm 1828, Nhà Toán học Đức *Dirichlet* (1805-1859) chứng minh định lý cho trường hợp $n = 5$.

Vào năm 1840, Nhà Toán học Pháp *Gabriel Lamé* chứng minh định lý cho trường hợp $n = 7$. Vậy, 200 năm sau *Fermat*, định lí mới được chứng minh với $n = 3$, 4, 5 và 7.

Định lý quá khó và nhà nghiên cứu lịch sử toán học *E.T. Bell* trong cuốn sách "*Bài toán cuối cùng*" đã phải thốt lên rằng: "*Có lẽ nền văn minh của chúng ta cáo chung trước khi các nhà toán học tìm ra lời giải cho bài toán.*"

Tuy vậy, năm 1908, *định lý lớn Fermat* đột ngột gây được sự chú ý trở lại nhờ công của một nhà công nghiệp và tiến sĩ toán người Đức tên *là Paul Wolfshehl*. Do gặp phải một chuyện bất hạnh trong đời sống riêng, ông quyết định sẽ tự sát vào lúc nửa đêm. Trong khi chờ đợi, ông tình cờ đọc một chứng minh của *Kummer* liên quan đến *định lí lớn Fermat*. Chìm đắm trong sự suy tư, ông vượt qua giờ phút định mệnh lúc nào không biết. Sự đam mê toán học đã hồi sinh cuộc đời ông. Ông quyết định dành gần hết gia sản của mình lập nên *giải thưởng Wolfshehl* dành tặng cho người nào tìm ra lời giải của *định lý Fermat*. Trị giá giải thưởng là 100000 Mác tương đương 1,75 triệu USD, lớn hơn giải Nobel.

Khi giải thưởng được thông báo, các bài dự thi ùn ùn đổ về Đại học Gottingen. Ngay trong năm treo giải, có 621 " *lời giải*" được đệ trình và mấy năm sau thì số thư từ chất cao đến 3m. Tất cả đều sai.

6. Ý kiến của ông Vua Toán học về Định lý lớn Fermat

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nhà Toán học vĩ đại người Đức, người đương thời gọi ông là ông vua toán học bởi những đóng góp quan trọng của ông trong nhiều lĩnh vực: Lý thuyết số, Hình học vi phân, Giải tích, Xác suất,…

Gauss đã viết thư cho một người bạn nói rõ quan điểm của ông về *định lý Fermat*: "*Tôi phải thú nhận rằng định lý này là một mệnh đề biệt lập gây rất ít hứng thú cho tôi bởi vì tôi có thể đưa ra vô vàn mệnh đề như thế, những mệnh đề mà người ta không thể chứng minh hoặc bác bỏ*".

Friedrich Gauss
(1777-1855)

Vậy chỉ duy nhất ông Vua Toán học *Gauss* thản nhiên đứng ngoài cuộc trong đám đông các nhà toán học hăm hở dấn thân vào một con đường đầy cám dỗ. Phải chăng *Gauss* tiên đoán được rằng, với trình độ toán học của thời đại ông, việc chứng minh định lý này là không thể!

7. Con gà đẻ trứng vàng của toán học hiện đại

Đây thực sự là điều kì diệu. Lời giải bài toán không đạt được nhưng lại xuất hiện những ngành toán học mới. Người đời đã ca tụng: *định lí lớn Fermat* là "*con gà đẻ trứng vàng của toán học hiện đại*". Những lí thuyết toán học mới ra đời nhờ việc các nhà toán học "giải không ra" bài toán Fermat lớn.

8. Phút thứ 89

Một trận bóng đá gay cấn diễn ra 90 phút, vẫn có những phút 89. Bốn chục năm trong chặng đường gần 350 năm có thể coi là phút 89 được chăng?

8.1. Một giả thuyết vượt thời đại

Vào những thập niên 50 của thế kỉ XX, hai nhà toán học trẻ người Nhật Bản đã đưa ra một giả thuyết, sau này mang tên họ: *giả thuyết Taniyama-Shimura*. Giả thuyết nói về mối quan hệ giữa mọi đường cong elliptic và các dạng modular. Các đường cong elliptic có phương trình dạng:

Goro Shimura
(1930 – 2019)

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ với

a, b, c là những số nguyên. Các đường cong elliptic cuốn hút các nhà lý thuyết số vì chúng có thể trả lời nhiều câu hỏi về phương trình và nghiệm của phương trình.

Các dạng modular thuộc nhóm những đối tượng lạ lùng và tuyệt vời nhất của toán học. "Ông tổ" của các dạng modular là nhà toán học kiệt xuất người Pháp *Henri Poincaré* (1854 -1912). Các dạng modular tồn tại trong một không gian kỳ lạ, nơi hình học phi Euclid ngự trị. Rất khó hình dung về các dạng modular, ngay cả *Poincaré* thời gian đầu cũng không dám tin chắc chúng tồn tại.

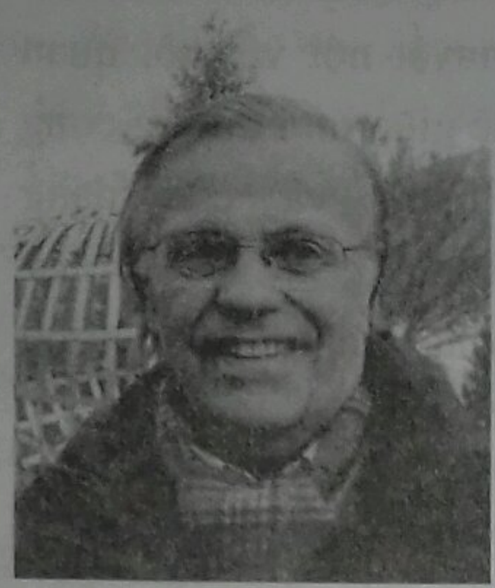
Về vai trò của *giả thuyết Taniyama-Shimura*, Giáo sư *Mazur*, Trường Đại học Havard nói: "*Lần đầu tiên được đề xuất, giả thuyết này không được các nhà toán học chú ý vì nó quá lạ lùng. Một mặt, bạn có thế giới của elliptic, mặt khác bạn có thế giới của modular. Cả hai lĩnh vực của toán học đều đã được nghiên cứu rất mạnh mẽ, nhưng tách rời nhau. Các nhà toán học nghiên cứu các phương trình elliptic không mấy am hiểu về các dạng modular và ngược lại. Thế*

Taniyama
(1927 – 1958)

rồi giả thuyết Taniyama - Shimura ra đời cho rằng có một cầu nối giữa hai thế giới xa lạ ấy".

8.2. Giả thuyết của Gerhard Frey

Sâu trong rừng Đen nước Đức có trung tâm Oberwlfach, hàng năm trung tâm này tài trợ và tổ chức khoảng 50 Hội nghị Quốc tế về các chủ đề toán học khác nhau. Trong hội nghị tổ chức vào mùa Thu năm 1984, nhà Toán học *Gerhard Frey* đã có bài thuyết trình quan trọng. Trong bài thuyết trình của mình, ông đã đưa ra một nhận xét còn mơ hồ. Bản in rônêô các công thức toán học mà ông phân phát khắp hội nghị hình như có hàm ý rằng: *Nếu giả thuyết Shimura-Taniyma quả thật là đúng thì định lý Fermat sẽ được chứng minh.*



Gerhard Frey
(*Sinh năm* 1944)

8.3. Định lý của Ken Ribet

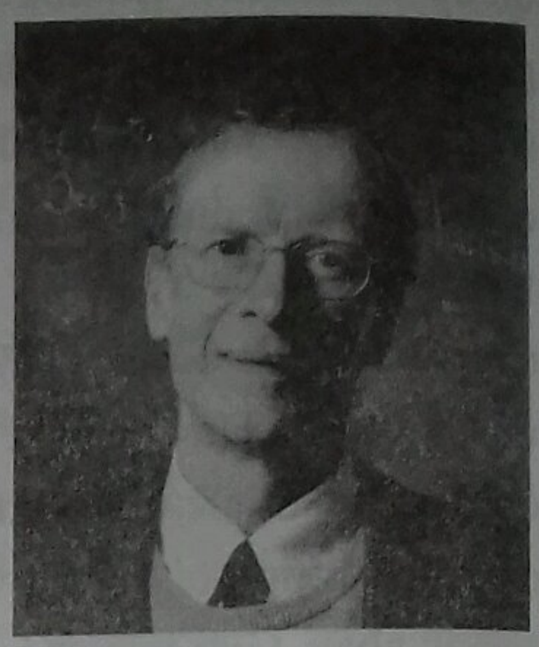
Khi *Ken Ribet*, Giáo sư toán thuộc Trường Đại học Tổng hợp California, lần đầu nghe nói về nhận xét của *Frey* đã cho đó là một lời nói đùa. Nhưng trong quá trình nghiên cứu, "lời nói đùa" của *Frey* đã khiến ông bỏ ra một năm trời để chứng minh. Vậy, vấn đề còn lại của *định lý Fermat* là chứng minh được giả thuyết *Shimura-Taniyma*!

Ken Ribet
(*Sinh năm* 1948)

8.4. Giấc mơ lớn của một cậu bé 10 tuổi

Cậu bé có tên *Andrew Wiles*, trong thư viện thành phố Milton, cậu tình cờ đọc được một cuốn sách, cuốn " *Bài toán cuối cùng*" của *E.T. Bell*. Cậu như bị thôi miên bởi những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học, ở đó có bài toán của *Fermat*. Cậu mơ ước một ngày nào đó sẽ giải được định lý hóc búa này, sẽ khiến cả thế giới kinh ngạc.

Lớn lên, cậu trở thành một sinh viên xuất sắc của Trường Đại học Tổng hợp Cambridge và cũng tại trường này, anh bảo vệ thành công Luận án Tiến sĩ với các công trình nghiên cứu về các đường cong elliptic. Sau đó, anh chuyển sang Mỹ, làm Giáo sư toán tại Trường Đại học Tổng hợp Princeton, ở đó, giấc mơ thời thơ ấu vẫn rực cháy trong anh.



Andrew Wiles
(*Sinh năm* 1953)

8.5. Những năm ẩn cư trên gác xép

Sau phát minh của *Ken Ribet*, *Andrew Wiles* quyết định tự giam mình trên căn gác xép áp mái, tìm cách chứng minh *định lý Fermat*. Sau này ông kể lại kinh nghiệm làm toán của mình:

"*Giống như việc đi vào một lâu đài tối om. Bạn bước vào phòng thứ nhất, trong đó tối đen như mực. bạn bước đi loạng choạng, va đập vào đồ đạc trong phòng. Dần dần, bạn cũng biết được vị trí của từng thứ một. Và cuối cùng, sau khoảng sáu tháng bạn lần ra công tắc đèn rồi bật lên. Ngay lập tức, mọi thứ được sáng tỏ và bạn thấy rõ mình đang ở đâu. Thế rồi bạn bước vào một phòng tiếp theo, ở đó lại tối đen như mực…*".

Tháng 6 năm 1993, tại Trường Đại học Tổng hợp Cambridge, Giáo sư *Andrew Wiles* đã có 3 buổi thuyết trình trong một hội thảo về lí thuyết số. Cuối buổi thuyết trình thứ ba, sau khi viết xong những dòng chứng minh cuối cùng của một giả thuyết toán học phức tạp và khó hiểu, *giả thuyết Shimura- Taniama*. Giáo sư *Wiles* nói một câu giản dị: "*Tôi nghĩ rằng mình vừa chứng minh xong định lí Fermat.*"

Chứng minh đó là một công trình dài 200 trang. Việc chứng minh đó ngốn mất 7 năm trời bền bỉ làm việc. Chứng minh của *Wiles* là một chuỗi dài những suy diễn khổng lồ được xây dựng hết sức phức tạp từ hàng trăm những tính toán toán học

gắn kết với nhau bằng hàng ngàn những kết nối lôgic.

8.6. Có một khe hở

Sau buổi thuyết trình, bài báo của *Wiles* được gửi cho 6 chuyên gia hàng đầu về lý thuyết số đọc phản biện. Cần phải dò lại các chứng minh, các kí hiệu, từng dòng một.

Một "khe hở trong chứng minh" của *Wiles* được Nhà Toán học *Nick Katz*, người đang làm việc tại Viện Nghiên cứu Khoa học Cao cấp Paris phát hiện. Nếu không lấp được khe hở này, mọi việc lại trở về vạch xuất phát.

Thêm một năm làm việc cật lực làm việc, cuối cùng *Wiles* đã hoàn thành hoàn hảo chứng minh kiệt xuất của mình bằng hai bài báo dài 130 trang được tạp chí *Annals of Mathematics* công bố tháng 5 năm 1995.

Nhân loại cần hơn 350 năm, cá nhân *Andrew Wiles* cần một cuộc "lưu đày" 8 năm trên gác xép cho một chứng minh mà *Fermat* vì lề sách quá hẹp đã không ghi ra được. Trong chứng minh của mình, *Wiles* đã thực sự thu thập tất cả những đột phá trong lí thuyết số của thế kỷ XX và tạo ra những kỹ thuật hoàn toàn mới mẻ. Nhà Toán học *Ken Ribet* đánh giá chứng minh của *Wiles* là một "tổng hợp hoàn hảo của toán học hiện đại và một khát vọng cho tương lai."

9. Fermat có thực sự chứng minh được định lý của mình?

Quay lại với dòng ghi chú của *Fermat* rằng: *tôi đã tìm ra được cách chứng minh thực sự tuyệt vời định lí này*. Có thể thấy rõ ràng rằng các công cụ toán học của nhân loại cho đến thời đại của *Fermat* không cho phép ông thực hiện chứng minh tuyệt vời của mình.

Cũng có người lạc quan nói rằng: có thể *Fermat* thực sự đã tìm ra một lời giải vô cùng độc đáo!

Trên thực tế, *Fermat* đã từng có những nhận định sai. Sự sai lầm của ông cũng hết sức thú vị. *Fermat* đưa ra mệnh đề: *Các số* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *được gọi là các số Fermat- luôn luôn là một số nguyên tố*. Mệnh đề trên đúng với $n = 1, 2, 3, 4$. Gần 100 năm sau, *Euler* đã phát hiện mệnh đề của *Fermat* sai, rất bất ngờ, F_5 không phải là một số nguyên tố, nó có ước 641. Các số *Fermat* có nhiều tính chất thú vị trong toán học. Sự thú vị đầu tiên là sau F_4 người ta vẫn chưa tìm ra được số nguyên tố *Fermat* nào khác. Phân tích F_n thành nhân tử cũng là một câu chuyện vừa lịch sử vừa thời sự của toán học. Có hẳn một trang web theo dõi "câu chuyện" này.

Có thực sự *Fermat* đã tìm được cách chứng minh cho định lý của mình không, chỉ duy nhất một người biết được, đó là bản thân *Fermat*!

10. Ứng dụng của định lý lớn Fermat

Bài toán. *Chứng minh rằng* $\sqrt[3]{2}$ *là một số vô tỷ.*

Lời giải. Giả sử số đã cho là hữu tỷ, khi đó nó có biểu diễn như sau

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}.$$

Trong đó: p, q là các số tự nhiên, nguyên tố cùng nhau. Biến đổi đẳng thức trên thành

$$p^3 = 2q^3 = q^3 + q^3.$$

Theo kết quả của *định lý lớn Fermat*, phương trình cuối không có nghiệm nguyên. Vậy điều giả sử của chúng ta là sai. Tức là $\sqrt[3]{2}$ là số vô tỷ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Simon Sigh, *Định lý cuối cùng của Fermat*, (Phạm Văn Thiều, Phạm Việt Hưng dịch), NXB Trẻ, 2005.

[2] Amir D.Aczel, *Câu chuyện hấp dẫn về bài toán Fermat*, (Trần Văn Nhung, Đỗ Trung Hậu, Nguyễn Kim Chi dịch), NXB Giáo dục, 2001.

[3] http://wwwhistory.mcs.stand.ac.uk/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html

[4] Nguyễn Duy Thuận, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Sư phạm, 2004.

[5] Nguyễn Hữu Hoan, *Lý thuyết số*, NXB Đại học Sư phạm, 2003.

[6] Kenneth H. Rosen, *Elementary Number Theory and its applications*, AT&T, 1993.

[7] http://time.com/4263916/andrew-wiles-abel-prize-fermat-theorem/

CÁC LỚP THCS

Bài T1/513 (Lớp 6). Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p+q^2+r^3=200$.

TRẦN VĂN LÂM
(Xóm Tiến bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, TX. Phổ Yên, Thái Nguyên)

Bài T2/513 (Lớp 7). Cho số thực

$$P=\frac{2^2+1}{2^2+3.2+4}+\frac{3^2+1}{3^2+3.3+4}+...+\frac{98^2+1}{98^2+3.98+4}$$

(tích 97 phân số). Chứng minh $\frac{6}{10^6}<P<\frac{1}{83325}$.

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T3/513. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c+d-3=ab\\a+b+c+d-3=cd\end{cases}$.

TRẦN MẠNH CƯỜNG
(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T4/513. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = AD$, $CB = CD$ và $\widehat{ABC}=90^0$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $R\ge r\sqrt{2}$.

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T5/513. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/513. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{bc^2+1}}+\sqrt{\frac{bc}{ca^2+1}}+\sqrt{\frac{ca}{ab^2+1}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

PHẠM BẮC PHÚ
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T7/513. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}x\notin(-\pi;\pi)\\ \sin y-\sin x=\dfrac{2xy(\pi+x)}{\pi^2+x^2}\\ y^3+\pi^3=x^3-3\pi xy\end{cases}$.

PHẠM HẢI ĐĂNG
(Kim Đường, Ứng Hòa, Hà Nội)

Bài T8/513. Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn không trùng với O. Đường thẳng Δ di động luôn đi qua P và không đi qua O cắt (O) tại E, F. Tiếp tuyến tại E, F của (O) cắt nhau tại T. Gọi S là giao điểm của đoạn thẳng TP với (O). Gọi ω là đường tròn qua S, T đồng thời tiếp xúc với (O). Chứng minh rằng đường tròn ω luôn đi qua một điểm cố định khi Δ di động.

LÊ VIẾT ÂN
(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài T9/513. Cho các số thực x, y, z sao cho $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{1}{4e^{2x}-2e^x+1}+\frac{1}{4e^{2y}-2e^y+1}+\frac{1}{4e^{2z}-2e^z+1}.$$

TRẦN ĐÌNH QUẾ
(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/513. Cho ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ được xác định như sau: $a_0=2, b_0=9, c_0=2020$ và

$$\begin{cases}a_n=-\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}\\ b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{4}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}\\ c_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}-\frac{1}{4}c_{n-1}\end{cases},\forall n=1,2,...$$

Tìm các giới hạn $\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n$. Hãy tổng quát hóa bài toán.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/513. Cho h là số nguyên dương sao cho $2^h+1=p$ là một số nguyên tố. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho 2^k-1 chia hết cho p.

LÊ QUANG KHANH
(GV THPT Trần Quang Diệu, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T12/513. (D) và (O) là hai đường tròn tiếp xúc với nhau tại X. Nếu tiếp xúc trong thì (D) nằm trong (O). A là một điểm của (D) khác X sao cho tiếp tuyến với (D) tại A cắt (O) tại hai điểm phân biệt hoặc trùng nhau. B là một trong các giao điểm đó. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và đường tròn (B, BA) là một tiếp tuyến của (D).

TRẦN VIỆT HÙNG
(Xã Tân Phú, huyện Châu Thành, Sóc Trăng)

Bài L1/513. Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là $L_A = 50$ dB, tại B là $L_B = 30$ dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà $CB = 2CA$. Tính mức cường độ âm tại C.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/513. Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng với khe Y-âng, khoảng cách giữa hai khe bằng 2 mm, khoảng cách hai khe tới màn bằng 2 m. Chiếu ánh sáng trắng có bước sóng nằm trong khoảng từ 0,39 μm đến 0,76 μm. Khoảng cách gần nhất từ nơi có hai vân màu đơn sắc khác nhau trùng nhau đến vân sáng trung tâm ở trên màn là?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/513 (For 6th grade). Find prime numbers p, q, r satisfying $p+q^2+r^3=200$.

Problem T2/513 (For 7th grade). Consider the number

$$P=\frac{2^2+1}{2^2+3.2+4}+\frac{3^2+1}{3^2+3.3+4}+...+\frac{98^2+1}{98^2+3.98+4}$$

(including 97 terms). Show that $\frac{6}{10^6}<P<\frac{1}{83325}$.

Problem T3/513. Find all positive integers a, b, c, d satisfying $\begin{cases} a+b+c+d-3=ab \\ a+b+c+d-3=cd \end{cases}$.

Problem T4/513. Given a quadrilateral $ABCD$ with $AB = AD$, $CB = CD$ and $\widehat{ABC}=90^0$. Let R and r be the circumradius and inradius of $ABCD$ respectively. Prove that $R\geq r\sqrt{2}$.

Problem T5/513. Given positive numbers x, y, z satisfying $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2020$. Find the minimum value of the expression

$$T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/513. Suppose that a, b, c are positive numbers and $abc = 1$. Show that

$$\sqrt{\frac{ab}{bc^2+1}}+\sqrt{\frac{bc}{ca^2+1}}+\sqrt{\frac{ca}{ab^2+1}}\leq\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

Problem T7/513. Find the real solutions of the system of equations

$$\begin{cases} x\notin(-\pi;\pi) \\ \sin y-\sin x=\dfrac{2xy(\pi+x)}{\pi^2+x^2} \\ y^3+\pi^3=x^3-3\pi xy \end{cases}.$$

Problem T8/513. Given a circle (O) and a point P inside the circle and is different from O. A moving line Δ passing through P but not O intersects (O) at E and F. The tangents at E, F to the circle (O) meet at T. Let S be the intersection between the line segment TP and (O). Let ω be the circle which passes through S, T and is tangent to (O). Show that the circle ω always passing through a fixed point when Δ varies.

(Xem tiếp trang 32)

Bài T1/509 (Lớp 6). *So sánh hai số sau*

$$A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{2018}{5^{2018}};\quad B=\frac{2018}{2019}.$$

Lời giải. Từ $\frac{4}{5^n}=\frac{5-1}{5^n}=\frac{1}{5^{n-1}}-\frac{1}{5^n}$ có hệ thức $\frac{4}{5^n}=\frac{1}{5^{n-1}}-\frac{1}{5^n}$ (1) và $\frac{4n}{5^n}=\frac{n}{5^{n-1}}-\frac{n}{5^n}$ (2).

Sử dụng hệ thức (2) khi cho n lần lượt lấy 2018 giá trị từ 1, 2, 3,… đến 2018 ta được

$$4A=4\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{2017}{5^{2017}}+\frac{2018}{5^{2018}}\right)$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4.2}{5^2}+\frac{4.3}{5^3}+\ldots+\frac{4.2017}{5^{2017}}+\frac{4.2018}{5^{2018}}$$

$$=\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5^2}\right)+\left(\frac{3}{5^2}-\frac{3}{5^3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{2017}{5^{2016}}-\frac{2017}{5^{2017}}\right)+\left(\frac{2018}{5^{2017}}-\frac{2018}{5^{2018}}\right)$$

$$=1+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{5^2}-\frac{2}{5^2}\right)+\left(\frac{4}{5^3}-\frac{3}{5^3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{2018}{5^{2017}}-\frac{2017}{5^{2017}}\right)-\frac{2018}{5^{2018}}$$

$$=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^{2017}}-\frac{2018}{5^{2018}}$$

$$=1+C-\frac{2018}{5^{2018}}<1+C \qquad (3)$$

trong đó: $C=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^{2017}}$.

Tương tự trên, sử dụng hệ thức (1) khi cho n lần lượt lấy 2017 giá trị từ 1, 2, 3,… đến 2017 ta được: $4C=4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^{2016}}+\frac{1}{5^{2017}}\right)$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\ldots+\frac{4}{5^{2016}}+\frac{4}{5^{2017}}$$

$$=\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{5^{2015}}-\frac{1}{5^{2016}}\right)+\left(\frac{1}{5^{2016}}-\frac{1}{5^{2017}}\right)$$

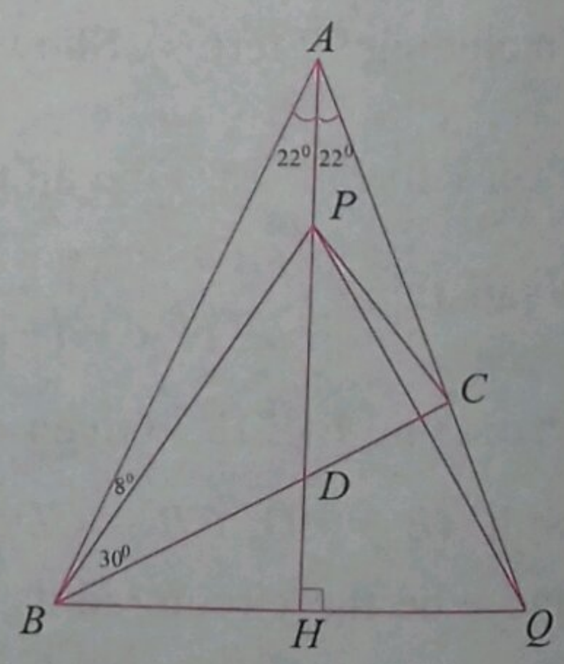
$$=1-\frac{1}{5^{2017}}<1 \quad (4).$$

Từ (3) và (4) có $16A<4+4C<5$, suy ra $A<\frac{5}{16}$ mà $\frac{5}{16}<\frac{15}{16}=1-\frac{1}{16}<1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}$ nên $A<B$.

Nhận xét. Với số nguyên dương n, có thể xét bài toán trên với việc so sánh $3A$ và B. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Lê Thị Bảo Ngọc*, 6A1, *Nguyễn Minh Huy*, *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Lê Tiến Hợp*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu, *Thái Minh Quân*, *Nguyễn Văn Việt*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng:** *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/509 (Lớp 7). *Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho* $\widehat{PBC}=30^0$, $\widehat{PBA}=8^0$ *và* $\widehat{PAB}=\widehat{PAC}=22^0$. *Tính số đo của* $\widehat{APC}$.



Lời giải.

(Của bạn *Nguyễn Quỳnh Chi*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**).

Vẽ $\triangle ABQ$ cân tại A, đường cao AH và gọi D là giao điểm của AH và BC. Vì $\widehat{BPH}$ là góc ngoài của tam giác $\triangle APB$ nên $\widehat{BPH}=22^0+8^0=30^0$. Xét $\triangle BPD$ ta có: $\widehat{BPD}=\widehat{PBD}=30^0\Rightarrow\widehat{BDP}=180^0-2.30^0=120^0$. Vì $\triangle ABQ$ cân tại A và $\widehat{BAQ}=44^0$ nên

$$\widehat{ABQ}=\widehat{AQB}=\frac{180^0-44^0}{2}=68^0\Rightarrow\widehat{DBQ}=30^0$$

$\Rightarrow \widehat{PBQ} = 60^0$. Xét $\triangle BPQ$ có PH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle BPQ$ là tam giác cân, lại có $\widehat{PBQ} = 60^0 \Rightarrow \triangle BPQ$ là tam giác đều $\Rightarrow BP = PQ$. Xét $\triangle BPC$ và $\triangle BQC$ có:

$BP = BQ$; $\widehat{PBC} = \widehat{QBC}$; BC chung

$\Rightarrow \triangle BPC = \triangle BQC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{BQC} = 68^0$.

$\Rightarrow \widehat{APC} = 360^0 - \widehat{APB} - \widehat{BPC}$

$= 360^0 - 150^0 - 68^0 = 142^0$.

Vậy $\widehat{APC} = 142^0$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Chi*, một số bạn nắm được cách làm của bài tuy nhiên tính góc còn nhầm lẫn. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Hà Trang, Vũ Minh Đức, Đỗ Ngọc Tiến, Nguyễn Thị Huyền Trang*, 7A3, *Trần Đức Duy, Triệu Tuấn Anh, Bùi Phương Thảo, Nguyễn Hoài Phương, Đào Quang Huy, Bùi Thị Hồng Huệ, Trần Thị Thanh Thảo*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An**: *Nguyễn Đức Thành*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Đinh Ngọc Bảo Lâm, Nguyễn Hữu Trí, Đặng Quốc Anh Kiệt*, 7B, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà.

NGUYỄN THỊ THÙY LINH

Bài T3/509. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{5x^2-x+3}+\frac{1}{5x^2+x+7}+\frac{1}{5x^2+3x+13}+\frac{1}{5x^2+5x+21}=\frac{4}{x^2+6x+5} \text{ với } x>0.$$

Lời giải. Nhận thấy, với $x > 0$ thì

$5x^2 - x + 3 = (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 3x + 2)$

$= (2x - 1)^2 + (x+1)(x+2) \geq (x + 1)(x + 2) > 0$

$5x^2 + x + 7 = (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 5x + 6)$

$= (2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 3) \geq (x + 2)(x + 3) > 0$

$5x^2 + 3x + 13 = (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 7x + 12)$

$= (2x - 1)^2 + (x + 3)(x + 4) \geq (x + 3)(x + 4) > 0$

$5x^2 + 5x + 21 = (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 9x + 20)$

$= (2x - 1)^2 + (x + 4)(x + 5) \geq (x + 4)(x + 5) > 0$

Do đó PT (1) luôn xác định với mọi $x > 0$. Từ đó

Áp dụng BĐT: Nếu $a \geq b > 0$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, ta có

$$\frac{1}{5x^2-x+3}+\frac{1}{5x^2+x+7}+\frac{1}{5x^2+3x+13}+\frac{1}{5x^2+5x+21}$$

$$\leq \frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{(x+1)(x+5)}=\frac{4}{x^2+6x+5}.$$

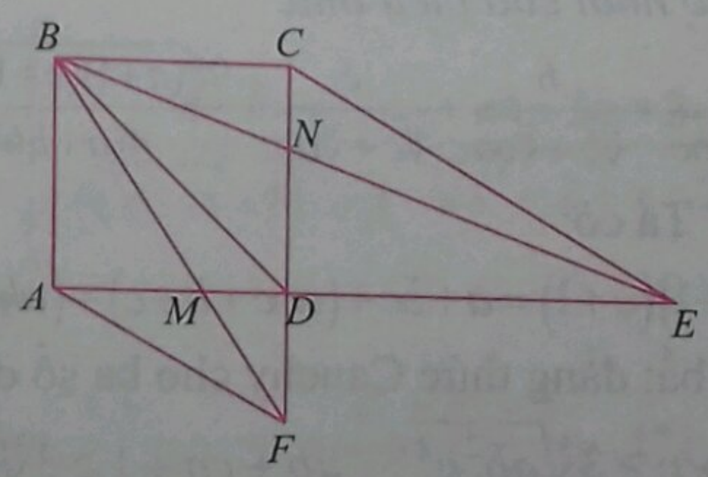
Do đó VT(1) $\leq$ VP(1), đẳng thức xảy ra khi $(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thoả mãn $x > 0$). Vậy nghiệm của phương trình (1) với $x > 0$ là $x = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều tìm ra kết quả và cách làm tương tự như trên. Tuy nhiên, nhiều bạn không quan tâm gì đến điều kiện $x > 0$, mà cho luôn rằng $a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ (!), thực ra chỉ suy ra được khi $ab > 0$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ**: *Trần Thị Yến Thanh*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, TTr. Cam Lộ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/509. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên các cạnh AD và CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho MD + DN = a. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng BN và AD. Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng BM và CD. Chứng minh:* $ME^2 - NE^2 + NF^2 - MF^2 = 2a^2$.

Lời giải.



Sử dụng định lí Pythagoras cho các tam giác vuông DNE và DMF ta có

$ME^2 - NE^2 + NF^2 - MF^2$

$= (MD + DE)^2 + (ND + DF)^2 - NE^2 - MF^2$

$= 2MD.\,DE + 2ND.\,DF - (NE^2 - ND^2)$
$- (MF^2 - DF^2) + DE^2 + MD^2$
$= 2MD.\,DE + 2\,ND.\,DF$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $MD = NC$ và $AM = DN$. Vậy

$2\,MD.\,DE = 2\,CN.\,DE = 4.\,S_{\Delta CNE}$,

$2\,ND.\,DF = 2\,AM.\,DF = 4.\,S_{\Delta AMF}$. Lại có

$S_{\Delta CNE} = S_{\Delta BND}$ (tính chất hình thang $BCED$);

$S_{\Delta AMF} = S_{\Delta BMD}$ (tính chất hình thang $BAFD$);

$S_{\Delta BND} = S_{\Delta BMA}$ (vì $DN = AM$);

$S_{\Delta BMD} = S_{\Delta BNC}$ (vì $DM = CN$). Từ đó suy ra

$4.\,S_{\Delta CNE} = 4.\,S_{\Delta BND} = 2(S_{\Delta BND} + S_{\Delta BMA})$;

$4.\,S_{\Delta AMF} = 4.\,S_{\Delta BMD} = 2(S_{\Delta BMD} + S_{\Delta BNC})$.

Do đó $ME^2 - NE^2 + NF^2 - MF^2$

$= 2MD.\,DE + 2\,ND.\,DF$

$= 4.\,S_{\Delta CNE} + 4.\,S_{\Delta AMF}$

$= 2(S_{\Delta BND} + S_{\Delta BMA} + S_{\Delta BMD} + S_{\Delta BNC})$

$= 2\,S_{ABCD} = 2a^2$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Đào Quang Huy, Triệu Quang Chiến, Nguyễn Trung Đức Dũng, Hà Quang Tùng, Triệu Tuấn Anh, Bùi Phương Thảo, Nguyễn Quỳnh Chi, Nguyễn Hoài Phương, Bùi Thị Hồng Huệ*, 8A3; *Vũ Minh Đức*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Thanh Hằng, Nguyễn Văn Thành Nam, Hoàng Thị Kim Oanh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang; *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hải Yến Nhi*, 8A2, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, TTr. Cam Lộ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/509. *Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{ca}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{ab}} + \frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)}.$$

Lời giải. Ta có:

$$(a+1)(b+1)(c+1) = a+bc+(abc+b+c)+(ab+ca+1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$abc+b+c \ge 3\sqrt[3]{ab^2c^2}$; $\quad ab+ca+1 \ge 3\sqrt[3]{a^2bc}$.

Suy ra

$$(a+1)(b+1)(c+1) \ge a+bc+3\sqrt[3]{ab^2c^2}+3\sqrt[3]{a^2bc}$$

$= \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc}\right)^3$. Do đó

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc} \le \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \qquad (1)$$

hay $$\frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc}} \ge \frac{a}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} \qquad (2)$$

Tương tự:

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{ca}} \ge \frac{b}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} \qquad (3)$$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{c}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} \qquad (4)$$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức (2), (3), (4) ta được:

$$P \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} + \frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta được

$$P \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} + \frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)} \ge$$

$$2\sqrt{\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}} \cdot \frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)}} = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\min P = 3$, giá trị đó đạt được khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là chứng minh bất đẳng thức (1), từ đó suy ra các BĐT (2), (3), (4). Bất đẳng thức tổng quát của (1) là: Với các số thực dương a, b, c, x, y, z ta có

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz} \le \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

Chứng minh bất đẳng thức này như sau: Ta có:

$$(a+x)(b+y)(c+z) = abc+xyz+(abz+bcx+cay)$$
$$+(ayz+bzx+cxy).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mỗi bộ ba số dương $(abz+bcx+cay)$ và $(ayz+bzx+cxy)$; suy ra kết quả. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = x = y = z$. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Phú Thọ**: *Triệu Quang Chiến, Nguyễn Quỳnh Chi, Nguyễn Hoài Phương, Bùi Thị Hồng Huệ, Triệu Tuấn Anh, Bùi Phương Thảo, Đào Quang Huy, Nguyễn Trung Đức Dũng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS

Văn lang, TP. Việt Trì; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Tĩnh**: *Trần Huy Đức*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/509. *Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{abcd}{8}+2\geq\sqrt{(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}+\sqrt{(b+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ở đề bài, nhân hai vế với $abcd$ ta có:

$abcd = cd + da + ab + bc = (a+c)(b+d)$. Biến đổi và ba lần dùng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta nhận được:

$$\sqrt{(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}+\sqrt{(b+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}=\frac{a+c}{\sqrt{ac}}+\frac{b+d}{\sqrt{bd}}$$

$$=\frac{(a+c)\sqrt{bd}+(b+d)\sqrt{ac}}{\sqrt{abcd}}$$

$$\leq\frac{(a+c).\frac{1}{2}(b+d)+(b+d).\frac{1}{2}(a+c)}{\sqrt{abcd}}=\frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}$$

$$=\frac{abcd}{\sqrt{abcd}}=\sqrt{abcd}=2\sqrt{\frac{abcd}{8}.2}\leq\frac{abcd}{8}+2.$$ Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=c,\ b=d,\ abcd=(a+c)(b+d)=16 \Leftrightarrow c=a,$

$b=d=\frac{4}{a}$ (a là số thực dương tùy ý).

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức dạng cơ bản, đơn giản. Đề bài không hỏi khi nào thì có đẳng thức thì các bạn có thể không trả lời vấn đề đó, nhưng nếu trả lời sai thì bị trừ điểm (với các bài toán cực trị thì các bạn phải chỉ ra có đẳng thức). Các bạn học sinh sau có lời giải đúng và đúng trong cả vấn đề khi nào có đẳng thức: **Hưng Yên**: *Nguyễn Việt An*, *Nguyễn Phúc Vinh*, *Nguyễn Phương Hà*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Nội**: *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Phan Thành Tín*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*; 11T1; THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Tiền Giang**: *Trần Hoài An*, 10T, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/509. *Giải hệ phương trình ba ẩn số thực x, y, z:*

$$\begin{cases} x^3+2y^3=2x^2+z^2 & (1)\\ 2x^3+3x^2=3y^3+2z^2+7 & (2)\\ x^3+x^2+y^2+2xy=2xz+2yz+2 & (3)\end{cases}$$

Lời giải. Lấy (2) – 2×(1), ta được:

$$x^2-y^3=1\ (4).$$

Thay (4) vào (1) ta được: $x^3-z^2=2$ (5).

Ta có: (3) $\Leftrightarrow x^3-z^2+(x+y-z)^2=2$, nên từ (5) suy ra: $x+y-z=0$ (6).

Như vậy hệ đã cho được viết gọn lại dưới dạng (4), (5), (6). Từ (5) suy ra: $x^3=z^2+2\geq 2$ nên $x\geq\sqrt[3]{2}$, đồng thời $z=\pm\sqrt{x^3-2}$. Mặt khác từ (4) suy ra $y^3=x^2-1>0$ (do $x\geq\sqrt[3]{2}$) nên ta cũng có $y>0$ và $y=\sqrt[3]{x^2-1}$.

Từ (6) có: $z=x+y>0\Rightarrow z=\sqrt{x^3-2}$. Khi đó:

$$(6)\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt{x^3-2}=0\quad (6')$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt[3]{x^2-1}-2)-\left[\sqrt{x^3-2}-(x+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-1-8}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}-\frac{x^3-2-(x+2)^2}{\sqrt{x^3-2}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-9}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1}+1\right)^2+3}-\frac{x^3-x^2-4x-6}{\sqrt{x^3-2}+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left[\frac{x+3}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1}+1\right)^2+3}-\frac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^3-2}+x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\\ \dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1}+1\right)^2+3}=\dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^3-2}+x+2}\quad (*)\end{array}\right.$$

Ta sẽ chứng minh PT(*) vô nghiệm bằng cách chứng tỏ VT(*) < 1 < VP(*) với mọi $x\geq\sqrt[3]{2}$.

Thật vậy:

• $\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{(x^2-1)+1}\right)^2+3}<1 \Leftrightarrow x<\left(\sqrt[3]{(x^2-1)+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1<\sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1<x^2-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+3)>0$: đúng với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$.

• $\dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^3-2}+x+2}>1 \Leftrightarrow x^2+x>\sqrt{x^3-2}$

$\Leftrightarrow x^4+2x^3+x^2>x^3-2 \Leftrightarrow x^4+x^3+x^2+2>0$: đúng với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$. Từ đó suy ra hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (3; 2; 5)$.

Nhận xét. 1) Sau khi tìm được (4), (5), (6), có thể giải tiếp hệ bằng cách đưa về PT vô tỷ như giải PT(6') ở trên. Tuy nhiên ta có thể giải hệ bằng cách đưa về PT đa thức như sau: Từ (4), (5), (6) suy ra x, y, z dương và $x^2+2xy+y^2=z^2=x^3-2$

$\Leftrightarrow y^3+1+y^2+2=x(x^2-2y)$

$\Rightarrow (y^3+y^2+3)^2=(y^3+1)(y^3-2y+1)^2$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^8+2y^7+2y^5+6y^4+3y^3+3y^2+4y+4)=0$

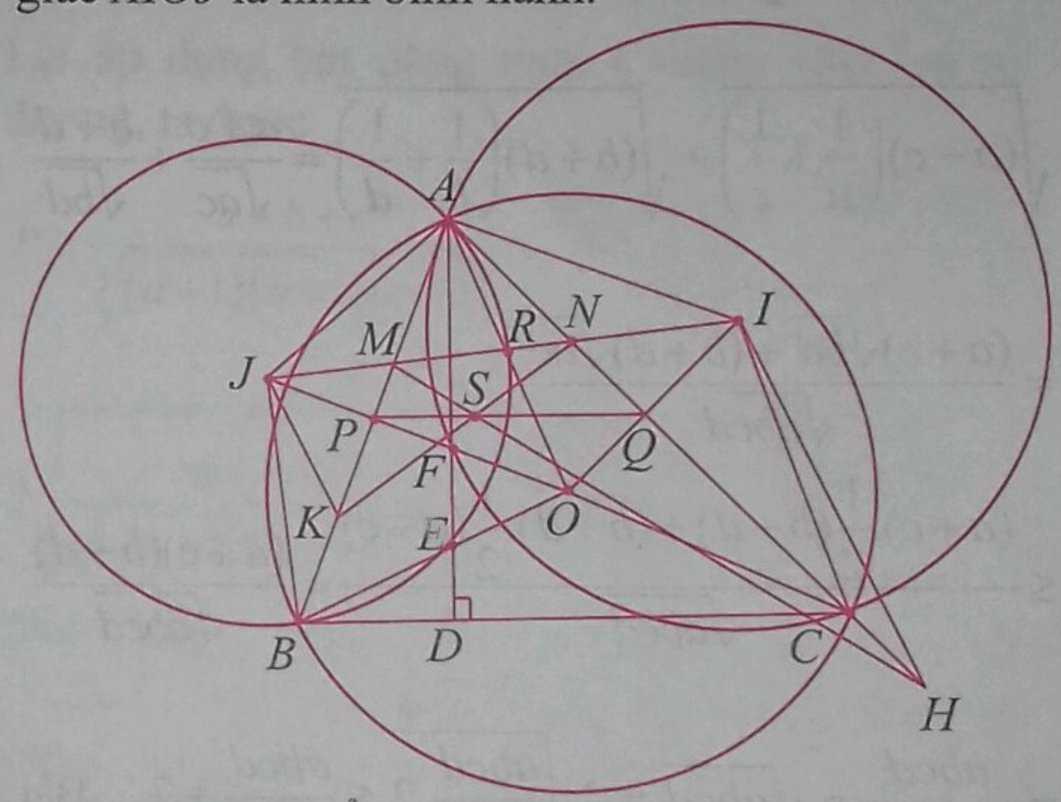
$\Leftrightarrow y=2$ (do $y>0$). Suy ra $x=3$, $z=5$. Thử lại thấy $(x; y; z) = (3; 2; 5)$ là nghiệm của hệ đã cho.

2) Đa số các bạn giải bài này như cách đã trình bày trên. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn, chặt chẽ: **Vĩnh Phúc:** *Phạm Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Phan Thế Anh*, 11 Toán, THPT Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Huy Đức*, *Nguyễn Thái Dương*, *Phan Thành Tín*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Tiền Giang:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Long An:** *Phạm Minh Anh*, *Phạm Đăng Khôi*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/509. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), BO, CO cắt đường cao AD của tam giác lần lượt tại E, F. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn (ACF), (ABE). K, H lần lượt thuộc AB, AC sao cho JK // AO // IH. Giả sử IJ cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng giao điểm của MH, NK thuộc đường trung bình đối diện góc A của tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi S là giao điểm của MH và NK; P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó ba điểm I, O, Q thẳng hàng; ba điểm J, P, O thẳng hàng. Ta có: $\widehat{BAF}=\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=\widehat{ACF}$, suy ra BA là tiếp tuyến của đường tròn (I), dẫn đến $AB \perp AI$. Vì $OP \perp AB$ nên $OJ \perp AB$ $\Rightarrow OJ \,//\, AI$. Tương tự ta có: $OI \,//\, AJ$, suy ra tứ giác $AIOJ$ là hình bình hành.



Gọi R là giao điểm của OA và IJ thì $RA = RO$. Từ đó để ý rằng $AO \,//\, IH$ ta thấy $(IH, IN, IQ, IA) = -1 \Rightarrow (HNQA) = -1$. Tương tự ta có: $(KMPA) = -1$. Do đó $(AMPK) = (AHQN) = -1$, dẫn tới MH, PQ, KN đồng quy (tại S) hay S thuộc PQ. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Đây là một bài toán vận dụng tính chất của hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Trần Ánh Dương*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong, *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đức Hiệp*, *Nguyễn Thái Dương*, *Lê Văn Danh*, *Nguyễn Thị Hà Chi*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc*

Như Bình, Nguyễn Thị Mỹ Ngọc, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

HỒ QUANG VINH

T9/509. *Giải phương trình:*

$$8^x+27^{\frac{1}{x}}+2^{x+1}.3^{\frac{x+1}{x}}+2^x.3^{\frac{2x+1}{x}}=125.$$

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**). Miền xác định của phương trình là $x\neq 0$. Biến đổi tương đương, từ phương trình ban đầu ta có: $(2^x)^3+(3^{\frac{1}{x}})^3+15.2^x.3^{\frac{1}{x}}-125=0.$

Đặt $2^x=a>0$, $3^{\frac{1}{x}}=b>0$, ta thu được

$$a^3+b^3+15ab-125=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+15ab-125=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-5)(a^2-ab+b^2+5a+5b+25)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b-5)[(a-b)^2+(a+5)^2+(b+5)^2]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=5 \\ a=b=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow a+b=5 \text{ (do } a,b>0).$$ Ta có: $2^x+3^{\frac{1}{x}}=5$. Dễ dàng thấy $x_1=1, x_2=\log_2 3$ là hai nghiệm của phương trình này. Bây giờ ta chứng minh đây là hai nghiệm duy nhất của nó. Thật vậy, xét hàm số $f(x)=2^x+3^{\frac{1}{x}}-5$ trên miền $(0+\infty)$ (vì $x<0$ thì $2^x+3^{\frac{1}{x}}<2^0+3^0=2<5$).

Ta có: $f'(x)=2^x\ln 2-\frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}\ln 3$

$$f''(x)=2^x(\ln 2)^2+\frac{2\ln 3}{x^3}.3^{\frac{1}{x}}+\frac{(\ln 3)^2}{x^4}.3^{\frac{1}{x}}>0.$$

Cho nên $f(x)=2^x+3^{\frac{1}{x}}-5=0$ có không quá 2 nghiệm dương. Vậy $x_1=1, x_2=\log_2 3$ là hai nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải thiếu nghiệm $x=\log_2 3$. Ngoài bạn *Trang* các bạn sau đây tìm ra đầy đủ nghiệm của phương trình: **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T10/509. *Ta kí hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x,* $\{x\}=x-[x]$. *Cho dãy số* (u_n) *với* $u_n=\left\{\frac{2^{2n+1}+n^2+n+2}{2^{n+1}+2}\right\}$. *Có bao nhiêu số hạng của dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $\frac{2526.2^{n-99}}{2^n+1}\leq u_n\leq\frac{23}{65}$.

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** và *Đỗ Xuân Trọng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**). Ta có

$$u_n=\left\{\frac{2^{2n+1}+n^2+n+2}{2^{n+1}+2}\right\}=\left\{2^n-1+\frac{n^2+n+4}{2^{n+1}+2}\right\}$$

$$=\left\{\frac{n^2+n+4}{2^{n+1}+2}\right\}.$$

Với $n=1$, $u_1=0$; $n=2$, $u_2=0$ (không thỏa mãn đề bài). Với $n\geq 3$ dễ chứng minh bằng quy nạp rằng: $2^{n+1}\geq n^2+n+4$, thành thử

$$0<\frac{n^2+n+4}{2^{n+1}+2}<1.$$

Do đó $u_n=\frac{n^2+n+4}{2^{n+1}+2}$ $(n\geq 3)$. Ta có:

$$\frac{2526.2^{n-99}}{2^n+1}\leq u_n\leq\frac{23}{65}$$

$$\Leftrightarrow 1263.2^{n-97}\leq n^2+n+4\leq\frac{46\left(2^n+1\right)}{65}\ (*).$$ Ta dễ ràng chứng minh bằng quy nạp khẳng định 1) và 2) sau:

1) Với $n\geq 7$ thì $\frac{46.2^n}{65}>n^2+n+4$

2) Với $n\geq 101$ thì $1263.2^{n-97}\geq n^2+n+4$.

Lại có:

3) Bằng cách thử ta có $n^2+n+4>\frac{46\left(2^n+1\right)}{65}$ với $n<6$ và $n^2+n+4=\frac{46\left(2^n+1\right)}{65}$ với $n=6$.

4) Vì $2^{11} > 1263$ nên khi $n \le 86$ thì

$1263 < 2^{11} \le 2^{97-n}\left(n^2+n+4\right)$

$\Leftrightarrow 1263.2^{n-97} < n^2+n+4$. Với $87 \le n \le 100$ bằng cách thử trực tiếp ta có $1263.2^{n-97} \le n^2+n+4$. Từ 1), 2), 3), 4) ta suy ra BĐT (*). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $6 \le n \le 100$. Do vậy có 95 số thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. Ngoài hai bạn *Hiệp* và *Trọng* chỉ có thêm bạn *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An** và bạn *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị** gửi bài và có lời giải đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/509. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn*

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\frac{f(n)f(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^* \quad (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Đặt $f(1)=a\ne 0$. Khi đó từ (1) suy ra

$f(1)=\dfrac{f(1)f(2)}{2}$ nên $f(2)=2$ và

$$f(1)+f(2)+...+f(n)+f(n+1)=\frac{f(n+1)f(n+2)}{2},$$
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$f(n+1)=\frac{f(n+1)f(n+2)}{2}-\frac{f(n)f(n+1)}{2}$$

$\Leftrightarrow f(n+2)-(n+2)=f(n)-n, \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad (2).$

Vậy $g(n):=f(n)-n$ là dãy tuần hoàn chu kì 2, kết hợp điều kiện $f(2)=2$, ta thu được:

$f(2k+1)=2k+1+f(1)+2=2k+3+a,$

$f(2k+2)=f(2)+2k=2k+2, \ k\in\mathbb{N}.$

Kết hợp với điều kiện $f(x)\ne 0$, suy ra $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-2,-4,-6,...\}$. Vậy các hàm số cần tìm là: $f(n)=\begin{cases} n, & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ n-1+a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \end{cases}$

trong đó $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-2,-4,-6,...\}$.

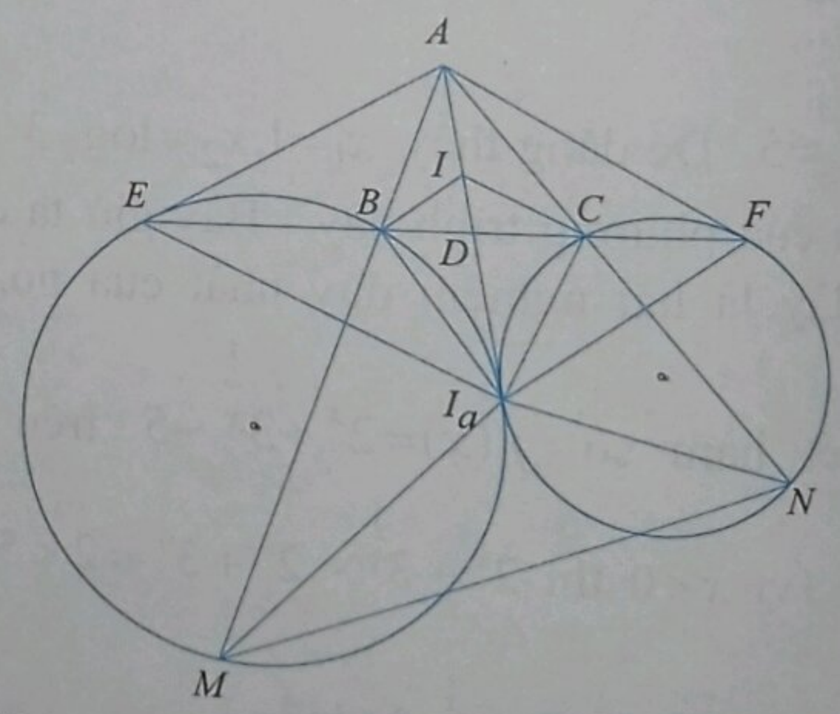
Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm nên có nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên, rất nhiều bạn đã không chú ý đến điều kiện $f(x)\ne 0$ khi $x\in\mathbb{N}^*$ nên hàm số nhận được không thỏa mãn điều kiện của bài ra ứng với $a\in\{0,-2,-4,-6,...\}$.

Các bạn sau có lời giải đúng: **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11T, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Hà Nội**: *Đỗ Xuân Trọng* 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội ; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, *Lê Đức Hạnh*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc**: *Trần Ánh Dương*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/509. *Cho ΔABC có $AB + AC = 2BC$. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Đường tròn (A, AI_a) cắt BC lần lượt tại E, F sao cho E thuộc tia CB, F thuộc tia BC. Đường tròn (EBI_a) cắt AB tại M, đường tròn (FCI_a) cắt AC tại N. Chứng minh rằng BCNM là tứ giác nội tiếp, đồng thời là tứ giác ngoại tiếp.*

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC; D là giao điểm của AI và BC. Dễ thấy

$$\frac{BA}{BD}=\frac{IA}{ID}=\frac{CA}{CD}=\frac{BA+CA}{BD+CD}=\frac{BA+CA}{BC}=2.$$

Từ đó, chú ý rằng BI, BI_a theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABD}$, suy ra $\dfrac{I_aA}{I_aD}=\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{IA}{ID}=2$. Kết hợp với $AI_a=AE$, theo định lí sin, suy ra

$$\frac{\sin\widehat{ADE}}{\sin\widehat{AED}}=\frac{AE}{AD}=\frac{I_aA}{I_aA-I_aD}=\frac{2}{2-1}=2$$

$$=\frac{BA}{BD}=\frac{\sin\widehat{BDA}}{\sin\widehat{BAD}}.$$

Kết hợp với $\widehat{ADE}=\widehat{BDA}$;

$\widehat{AED}+\widehat{BAD}<\widehat{ABD}+\widehat{BAD}<180°$, suy ra $\widehat{AED}=\widehat{BAD}$. Do đó DA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔABE. Kết hợp với

$$\frac{AD}{I_aD}=\frac{I_aA-I_aD}{I_aD}=\frac{2-1}{1}=1,\text{ suy ra}$$

$DI_a^2=DA^2=DB.DE$. Do đó $AI_a\equiv DI_a$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔEBI_a. Tương tự AI_a tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔFCI_a.

Vậy $\overline{AB}.\overline{AM}=AI_a^2=\overline{AC}.\overline{AN}$. Điều đó có nghĩa là tứ giác $BCNM$ nội tiếp (1).

Từ (1), chú ý rằng tứ giác $BICI_a$ nội tiếp và CI là phân giác của góc $\widehat{ABC}$, suy ra

$$\widehat{BMN}=\widehat{ACB}=2\widehat{ICB}=2\widehat{II_aB}=2\widehat{BMI_a}.$$

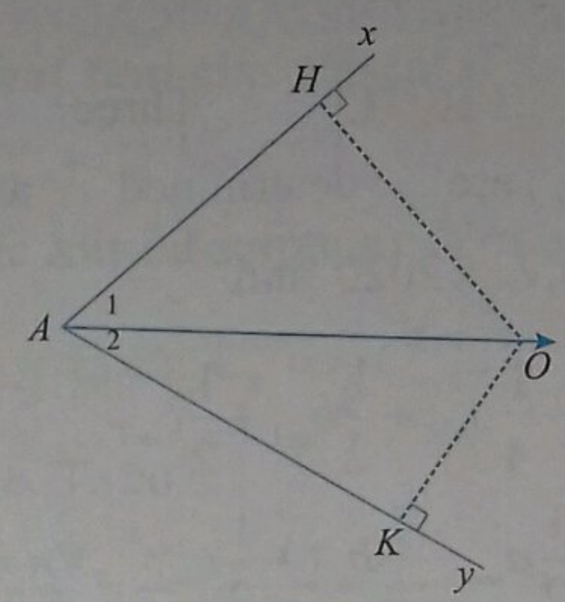
Nói cách khác MI_a là phân giác của góc $\widehat{BMN}$. Từ đó, chú ý rằng BI_a, CI_a theo thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{MBC},\widehat{NCB}$ suy ra tứ giác $BCNM$ ngoại tiếp (2). Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. Bài toán này tương đối dễ, khá nhiều bạn tham gia giải: **Bắc Ninh**: *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; *Nguyễn Tất Đạt*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thái Dương*, *Lê Văn Danh*, *Ngô Văn Thông*, *Đào Xuân Quang Minh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Ngọc Hùng*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/509. *Cho một nguồn âm điểm phát âm đẳng hướng với công suất không đổi ra môi trường không hấp thụ âm. Một người cầm một máy đo mức cường độ âm đứng tại A cách nguồn âm một khoảng d thì đo được mức cường độ âm là 50 dB. Người đó lần lượt di chuyển theo hai hướng khác nhau Ax và Ay. Khi đi theo hướng Ax, mức cường độ âm lớn nhất người đó đo được là 57 dB. Khi đi theo hướng Ay, mức cường độ âm lớn nhất mà người ấy đo được là 62 dB. Góc xAy có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?*

Lời giải.



Ta có mức cường độ âm:

$$L=10\lg\frac{I}{I_0}=10\lg\frac{\mathscr{P}}{4\pi R^2I_0}\Rightarrow L_{\max}\Leftrightarrow R_{\min}$$

Gọi H và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống Ax, Ay. Do đó:

Mức cường độ âm lớn nhất người đó đo được khi đi theo hướng Ax là tại H. Mức cường độ âm lớn nhất người đó đo được khi đi theo hướng Ay là tại K. Ta có:

$$\begin{cases}L_A=10\lg\dfrac{\mathscr{P}}{4\pi(OA)^2I_0}=50\\ L_H=10\lg\dfrac{\mathscr{P}}{4\pi(OH)^2I_0}=57\\ L_K=10\lg\dfrac{\mathscr{P}}{4\pi(OK)^2I_0}=62\end{cases}$$

$$L_H-L_A=10\lg\frac{OA^2}{OH^2}=7\Rightarrow OA=2,2387.OH.$$

$$L_K-L_A=10\lg\frac{OA^2}{OK^2}=12\Rightarrow OA=3,981.OK.$$

$$\sin A_1=\frac{OH}{OA}=\frac{1}{2,2387}\Rightarrow A_1=26^0 31'.$$

$$\sin A_2=\frac{OK}{OA}=\frac{1}{3,981}\Rightarrow A_2=14^0 32'.$$

$$\max\widehat{xAy}=\widehat{A_1}+\widehat{A_2}\approx 41^0.$$

PROBLEMS... (*Tiếp theo trang* 23)

Problem T9/513. Given real numbers x, y, z satisfying $x+y+z=0$. Find the minimum value of the expression

$$S=\frac{1}{4e^{2x}-2e^{x}+1}+\frac{1}{4e^{2y}-2e^{y}+1}+\frac{1}{4e^{2z}-2e^{z}+1}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/513. Three sequences $(a_n), (b_n), (c_n)$ are determined as follows $a_0=2, b_0=9, c_0=2020$ and

$$\begin{cases} a_n=-\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1} \\ b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{4}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1} \quad ,\forall n=1,2,... \\ c_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}-\frac{1}{4}c_{n-1} \end{cases}$$

Find the limits $\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n$. Can you generalize this problem?

Problem T11/513. Let h be a positive integer so that $p:=2^h+1$ is a prime number. Find the smallest positive integer k so that 2^k-1 is divisible by p.

Problem T12/513. Suppose that (D) and (O) are two circles which tangent to each other at X. In the case of internally tangent then (D) is inside (O). Let A be a point on (D) which is different from X so that the tangent to (D) at A intersects (O). Let B be any point of that intersection. Show that the radical line of (O) and the circle (B, BA) is a tangent line to (D).

(*Translated by* NGUYEN PHU HOANG LAN)

(*College of Science – Vietnam National University, Ha Noi*)

****

☞ ***Nhận xét*:** Chúc mừng một bạn duy nhất có lời có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế**: *Hoàng Bảo Minh Châu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/509. *Tại một điểm M có một máy phát điện xoay chiều một pha có công suất phát điện và điện áp hiệu dụng ở hai cực của máy phát đều không đổi. Coi hệ số ma sát của mạch luôn bằng 1. Hiệu suất của quá trình truyền tải này là H. Muốn tăng hiệu suất của quá trình truyền tải lên đến 97,5 % nên trước khi truyền tải người ta nối hai cực của máy phát điện với cuộn sơ cấp của một máy biến áp lý tưởng và cuộn thứ cấp được nối với dây tải. Nhưng trong quá trình nối do bị nhầm giữa cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp nên hiệu suất của quá trình truyền tải chỉ là 60%. Giá trị của H và tỉ số vòng dây của cuộn sơ cấp và thứ cấp của máy biến áp là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi công suất truyền tải là P, hiệu điện thế phát là U. Công suất hao phí:

$$\mathcal{P}_{hp}=I^2R=\frac{\mathcal{P}^2}{U^2}R \quad (1)$$

Hiệu suất truyền tải: $H=\dfrac{\mathcal{P}-\mathcal{P}_{hp}}{\mathcal{P}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(1-H)\sim\dfrac{1}{U^2}$ (3)

Từ giả thiết ta có:

Khi nối đúng: $(1-0,975)\sim\dfrac{1}{\left(\frac{1}{k}U\right)^2}$ (4).

Khi nối nhầm: $(1-0,6)\sim\dfrac{1}{(kU)^2}$ (5). Từ (4) và (5) ta dễ dàng tìm được: $k^4=\dfrac{1}{16}$, hay $k=0,5$.

Lại có: $\dfrac{1-H}{1-0,6}=k^2$ nên ta tìm được $H=90\%$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Hùng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

HỆ SỐ TỔ HỢP TRONG CÁC ĐỊNH LÝ VÀ BÀI TOÁN SỐ HỌC OLYMPIC

VĂN PHÚ QUỐC
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Quảng Nam)

Trong đề thi VMO 2017- ngày thứ hai đã xuất hiện một bài toán số học liên quan đến hệ số tổ hợp gây nhiều khó khăn cho các thí sinh dự thi như sau:

Chứng minh rằng:

a) $\sum_{k=1}^{1008} kC_{2017}^{k} \equiv 0 \pmod{2017^2}$

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^{k} \equiv 3\left(2^{2016}-1\right) \pmod{2017^2}$.

Khi bắt tay vào việc tìm tòi lời giải, chúng tôi nhận thấy đây là một dạng toán số học-tổ hợp thú vị và bất ngờ. Các định lí và bài toán liên quan đến hệ số tổ hợp thì vô cùng phong phú và đa dạng, trong phạm vi một bài báo ngắn, chúng tôi chỉ cô đọng lại trong một số vấn đề đặc sắc, mới mẻ nhất. Hơn nữa, chúng tôi cũng có mong muốn giới thiệu đến bạn đọc các bài toán điển hình trong các Kì thi Olympic Quốc gia, Quốc tế.

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa. Số tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k hoặc $\binom{n}{k}$ là số cách chọn k phần tử từ một tập có n phần tử. Nói cách khác, C_n^k bằng số tập con gồm k phần tử của một tập có n phần tử.

Công thức: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$

với $0 \le k \le n$.

Quy ước: $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

$C_n^k = 0$ với $k > n$.

2. Tính chất

2.1. Tính chất đối xứng (symmetry):

$\forall n,k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \le k \le n$ ta có: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2.2. Tính chất tam giác Pascal (Pascal's triangle property): $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

2.3. Quy tắc hút (absorption): Với $n,k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 < k \le n$ ta có: $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

Chứng minh. Ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}.\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

2.4. Công thức lùi cơ số: Với $n,k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \le k < n$ ta có: $C_n^k = \dfrac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}$.

Chứng minh. Ta có:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{n-k}.\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}.$$

2.5. Tính đơn điệu (monotonicity):

$$C_n^0 < C_n^1 < ... < C_n^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1} = C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} > ... > C_n^n.$$

2.6. Công thức tính tổng của các hệ số nhị thức (sum of binomial coefficients):

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

2.7. Công thức tính tổng xen kẽ (alternating sum): $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

2.7. Đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's equality): $\forall n,m,r \in \mathbb{N}$ ta có: $\sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{n+m}^r$.

Chứng minh. Ta có:

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_n^k C_m^j x^{j+k} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k.$$

So sánh hệ số của x^r ở hai vế của đẳng thức này ta thu được:

$$\sum_{j+k=r} C_n^k C_m^j = C_{n+m}^r \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{n+m}^r.$$

2.12. Đẳng thức Vandermonde mở rộng

Cho $n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbb{N}$ và $k = k_1 + k_2 + ... + k_r$. Khi đó:

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_r=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} ... C_{n_r}^{k_r} = C_{n_1+n_2+...+n_r}^{k}.$$

3. Định lí

3.1. Định lí 1. *Nếu p là một số nguyên tố thì $p \mid C_p^k$ với mọi $k = 1, 2, ..., p-1$.*

Chứng minh. Ta có:

$$C_p^k = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}.$$

Do p là số nguyên tố và $k = 1, 2, ..., p-1$ nên $\gcd(p, k!) = 1$.

Mà C_p^k nguyên nên $k! \mid (p-1)(p-2)...(p-k+1)$ hay $\frac{(p-1)...(p-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}$. Vậy $p \mid C_p^k$.

3.2. Định lí 2 (Định lí Lucas). *Cho p là một số nguyên tố và n là một số nguyên sao cho*

$$n = \overline{n_m n_{m-1} ... n_0}_p = n_0 + n_1 p + ... + n_m p^m.$$

Cho i là một số nguyên dương nhỏ hơn n. Nếu $i = i_0 + i_1 p + ... + i_m p^m$ với $0 \le i_0, i_1, ..., i_m \le p-1$ thì $C_n^i \equiv \prod_{j=0}^{n} C_{n_j}^{i_j} \pmod p$, ở đây $C_0^0 = 1$ và $C_{n_j}^{i_j} = 0$ nếu $n_j < i_j$.

Để chứng minh định lý ta cần bổ sung một vài kĩ thuật. Cho p là một số nguyên tố, cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức hệ số nguyên. Ta nói $f(x)$ đồng dư với $g(x)$ theo mod$p$ và viết $f(x) \equiv g(x) \pmod p$ nếu tất cả các hệ số của đa thức $f(x) - g(x)$ chia hết cho p. Từ các tính chất trên ta dễ dàng suy ra:

a) $f(x) \equiv f(x) \pmod p$.

b) Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod p$ thì

$$g(x) \equiv f(x) \pmod p.$$

c) Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod p$ và $g(x) \equiv h(x) \pmod p$ thì $f(x) \equiv h(x) \pmod p$;

d) Nếu $f(x) \equiv g(x) \pmod p$ và

$$f_1(x) \equiv g_1(x) \pmod p$$

thì $f(x) \pm f_1(x) \equiv g(x) \pm g_1(x) \pmod p$

và $f(x) f_1(x) \equiv g(x) g_1(x) \pmod p$.

Chứng minh. Theo định lí 1 ta có

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$$

và $(1+x)^{p^2} = ((1+x)^p)^p \equiv (1+x^p)^p \equiv 1 + x^{p^2} \pmod p$.

Vì vậy, bằng quy nạp ta được:

$$(1+x)^{p^r} \equiv 1 + x^{p^r} \pmod p$$

với mọi số nguyên dương r.

Ta có: $(1+x)^n = (1+x)^{n_0 + n_1 p + ... + n_m p^m}$

$$= (1+x)^{n_0} ((1+x)^p)^{n_1} ... ((1+x)^{p^m})^{n_m}$$

$$\equiv (1+x)^{n_0} (1+x^p)^{n_1} ... (1+x^{p^m})^{n_m} \pmod p.$$

Hệ số của x^i trong khai triển của $(1+x)^n$ là C_n^i. Mặt khác, vì $i = i_0 + i_1 p + ... + i_m p^m$ nên hệ số của x^i là hệ số của $x^{i_0} (x^p)^{i_1} ... (x^{p^m})^{i_m}$ và bằng $C_{n_0}^{i_0} C_{n_1}^{i_1} ... C_{n_m}^{i_m}$. Do đó $C_n^i \equiv C_{n_0}^{i_0} C_{n_1}^{i_1} ... C_{n_m}^{i_m} \pmod p$.

3.3. Định lí 3 (Định lí Kummer)

Cho n và i là các số mũ nguyên dương với $i \le n$ và p là một số nguyên tố. Khi đó p^t là ước của C_n^i nếu và chỉ nếu t nhỏ hơn hoặc bằng số lần nhớ khi cộng $(n-i)$ và i trong hệ cơ số p.

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng công thức

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1} \qquad (1)$$

ở đây $v_p(n)$ là kí hiệu số mũ tự nhiên m lớn nhất của p sao cho $p^m \mid n$ và $S_p(n)$ là tổng các chữ số của n trong hệ cơ số p.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng số nguyên dương không âm lớn nhất t sao cho $p^t \mid C_n^i$ là bằng chính xác số lần nhớ khi cộng $(n-i)$ và i trong hệ cơ số p. Đặt

$$n! = \overline{a_m a_{n-1} ... a_0}_p, i! = \overline{b_k b_{k-1} ... b_0}_p, (n-i)! = \overline{c_l c_{l-1} ... c_0}_p.$$

Vì $1 \le i \le n$ nên $k, l \le m$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $k \le l$. Gọi a, b, c và t' là những số nguyên sao cho $p^a \| n!, p^b \| i!, p^c \| (n-i)!$ và $p^{t'} \| C_n^i$. Khi đó $t' = a - b - c$.

Từ công thức (1) ta có

$$a = \frac{n - (a_m + a_{m-1} + ... + a_0)}{p-1},$$

$$b = \frac{i - (b_k + b_{k-1} + ... + b_0)}{p-1},$$

$$c = \frac{(n-i) - (c_l + c_{l-1} + ... + c_0)}{p-1}.$$

Như vậy

$$t' = \frac{-(a_m + ... + a_0) + (b_k + ... + b_0) + (c_l + ... + c_0)}{p-1} \quad (2).$$

Mặt khác, nếu cộng $n-i$ và i trong hệ cơ số p ta có:

$$\begin{array}{r} b_k\ b_{k-1}\ ...\ b_1\ b_0 \\ c_l\ c_{l-1}\ ...\ c_k\ c_{k-1}\ ...\ c_1\ c_0 \\ \hline a_m\ a_{m-1}\ ...\ a_l\ a_{l-1}\ ...\ a_k\ a_{k-1} ...\ a_1\ a_0 \end{array}$$

Khi đó ta có hoặc $b_0 + c_0 = a_0$ (không có nhớ) hoặc $b_0 + c_0 = a_0 + p$ (nhớ 1). Nói chung, ta có

$$b_0 + c_0 = a_0 + \alpha_1 p,$$
$$b_1 + c_1 + \alpha_1 = a_1 + \alpha_2 p,$$
$$b_2 + c_2 + \alpha_2 = a_2 + \alpha_3 p,$$
$$.....$$
$$b_m + c_m + \alpha_m = a_m,$$

ở đây α_i là số lần nhớ trong chữ số thứ $i-1$ từ phải (chỉ lưu ý rằng $b_j = 0$ với $j > k$ và $c_j = 0$ với $j > l$). Cộng vế theo vế các phương trình trên lại với nhau ta được

$$(b_0 + ... + b_k) + (c_0 + ... + c_l) = (a_0 + ... + a_m) + (p-1)(\alpha_1 + ... + \alpha_m).$$

Vậy phương trình (2) trở thành $t' = \alpha_1 + ... + \alpha_m$.

3.4. Định lí 4 (Định lí Wolstenholme)

Cho p là một số nguyên tố. Khi đó

$$C_{2p}^p \equiv 2 (\bmod p^2).$$

***Chứng minh* 1.** Sử dụng đẳng thức Vandermonde, ta có:

$$C_{2p}^p = C_p^0 C_p^p + C_p^1 C_p^{p-1} + ... + C_p^p C_p^0.$$

Do $C_p^k \vdots p, \forall k = \overline{1, p-1}$ nên

$$C_p^i C_p^{p-i} \vdots p^2, \forall i = \overline{1, p-1}.$$

Vậy $C_{2p}^p \equiv 2 (\bmod p^2)$.

Chứng minh 2.

- Xét $p = 2$ ta có $C_4^2 = 6 \equiv 2 (\bmod 4)$ (luôn đúng).
- Xét các số nguyên tố $p > 2$. Ta có:

$$C_{2p}^p = 2C_{2p-1}^{p-1}.$$

Để ý rằng $(2p-k)(p+k) \equiv k(p-k) (\bmod p^2)$, $\forall k = 1, 2, ..., \frac{p-1}{2}$ ($p-1$ là số chẵn).

Khi đó $(2p-1)(2p-2)...(p+1)$

$$= [(2p-1)(p+1)][(2p-2)(p+2)] \times$$
$$... \times \left[\left(2p - \frac{p-1}{2}\right)\left(p + \frac{p-1}{2}\right)\right]$$
$$\equiv [1.(p-1)][2.(p-2)]...\left(\frac{p+1}{2}.\frac{p+2}{2}\right) \equiv (p-1)! (\bmod p^2).$$

Cuối cùng ta được: $C_{2p}^p = 2C_{2p-1}^{p-1} \equiv 2 (\bmod p^2)$.

3.5. Định lí 5 (Định lí RUF) (Root of Unity Filter)

Cho số nguyên dương n. Gọi ε là nghiệm phức khác 1 bất kì của phương trình $x^n = 1$. Xét hàm đa thức $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$.

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{in} = \frac{1}{n}(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + ... + f(\varepsilon^{n-1})).$$

Lưu ý rằng định lí RUF không phản ánh trực tiếp tính chất số học của hệ số nhị thức C_n^k nhưng rất có ý nghĩa trong việc kết hợp với lý thuyết hàm sinh để giải quyết các bài toán số học.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THI OLYMPIC

DẠNG 1. Tính chia hết của biểu thức tổ hợp

Bài toán 1.1. [Hungarian MO 2001]. *Cho m và n là các số nguyên. Chứng minh rằng m là một ước của* $n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k$.

Lời giải. Ta có thể viết lại biểu thức đã cho như sau:

$$n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k = n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})$$

$$= n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{n-1}^k + n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{n-1}^k - n\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k C_{n-1}^k$$

$$= n(-1)^{m-1}C_{n-1}^{m-1} = m(-1)^{m-1}C_n^m.$$

Vậy $m \mid n\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^k$.

Bài toán 1.2. [Chinese MO 1998]. *Xác định tất cả các số nguyên dương* $n \ge 3$ *sao cho* 2^{2000} *chia hết cho* $1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$.

Lời giải. Vì 2 là số nguyên tố nên $1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 2^k$ với k nguyên dương và $k \le 2000$. Ta có:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}.$$

Khi đó: $(n+1)(n^2 - n + 6) = 3.2^{k+1}$.

Đặt $m = n+1$, thì $m \ge 4$ và $m(m^2 - 3m + 8) = 3.2^{k+1}$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $m = 2^s$. Từ $m \ge 4, s \ge 2$ ta có:

$$2^{2s} - 3.2^s + 8 = m^2 - 3m + 8 = 3.2^t$$

với mọi số nguyên dương $t \le k+1$. Nếu $s \ge 4$ thì $8 - 3.2^t \vdots 16$. Suy ra: $2^t = 8 \Rightarrow m^2 - 3m + 8 = 24 \Rightarrow m(m-3) = 16$ (điều này không thể xảy ra).

Như vậy hoặc $s = 3, m = 8, t = 4, n = 7$ hoặc $s = 2, m = 4, t = 2, n = 3$.

- Nếu $m = 3.2^u$. Từ $m \ge 4$ và $u \ge 1$ ta có $9.2^{2u} - 9.2^u + 8 = m^2 - 3m + 8 = 2^v$ với mọi số nguyên dương $v \le k+1$. Dễ dàng kiểm tra được rằng không có nghiệm nào của v khi $u = 1;\ 2$.

Nếu $u \ge 4$ ta có: $8 - 2^v \vdots 16$, suy ra $v = 3$ và $m(m-3) = 0$, điều này không thể xảy ra. Vì vậy $u = 3, m = 3.2^3 = 24, v = 9, n = 23$.

Tóm lại, $n = 3; 7; 23$.

Bài toán 1.3. [Gặp gỡ Toán học 2014]

Cho $p \ge 5$ *là số nguyên tố và* $m, k \in \mathbb{Z}^+$. *Chứng minh rằng* $p^{k+2} \mid C_{mp^k-1}^{p-1} - 1$.

Lời giải. Để giải quyết tốt bài toán này chúng ta cần sử dụng những kiến thức hỗ trợ sau:

Định lí Lagrange (về đa thức đồng dư)

Cho $P(x)$ *là một đa thức hệ số nguyên bậc* n *và các hệ số của* $P(x)$ *không đồng thời chia hết cho* p. *Khi đó phương trình đồng dư* $P(x) \equiv 0 \pmod p$ *có* $\min\{n, p\}$ *nghiệm.*

Bổ đề. *Nếu phương trình* $P(x) \equiv 0 \pmod p$ *có nhiều nghiệm hơn bậc của* $P(x)$ *thì tất cả các hệ số của* $P(x)$ *đều chia hết cho p.*

Quay trở lại bài toán: Xét đa thức

$$P(x) = (x-1)(x-2)...[x-(p-1)] - [x^{p-1} + (p-1)!].$$

Đa thức $P(x)$ có thể được viết lại như sau:

$$P(x) = S_1 x^{p-2} + ... + S_{p-2}x.$$

Tập nghiệm của đa thức $P(x)$ gồm $p-1$ phần tử: $\{1; 2; ...; p-1\}$ mà $\deg P = p-2$ cho nên $S_i \vdots p, \forall i = \overline{1, p-2}$.

Mặt khác, ta có:

$$P(p) = -p^{p-1} \Rightarrow p^3 \mid P(p) \Rightarrow p^3 \mid pS_{p-2}$$

hay $p^2 \mid S_{p-2}$. Để ý rằng

$$C_{mp^k-1}^{p-1} = \frac{(mp^k-1)(mp^k-2)...(mp^k-(p-1))}{(p-1)!}$$ và

$\gcd((p-1)!, p) = 1$ nên bài toán quy về việc chứng minh $p^{k+2} \mid (C_{mp^k-1}^{p-1} - 1)(p-1)!$.

Suy ra

$$p^{k+2} \mid (mp^k - 1)...[mp^k - (p-1)] - (p-1)!$$

$$\Leftrightarrow p^{k+2} \mid P(mp^k) + (mp^k)^{p-1}$$

$$\Leftrightarrow p^{k+2} \mid S_1(mp^k)^{p-2} + ... + S_{p-2}mp^k + (mp^k)^{p-1} \ (*).$$

Kết quả (*) hoàn toàn đúng do $p^2 \mid S_{p-2}$ và $p \mid S_i, \forall i = \overline{1, p-3}$.

Bài toán 1.4. [Romanian IMO Team Selection Test 2004]. *Chứng minh rằng nếu n, m là những số nguyên và m là số lẻ thì* $\frac{1}{3^m n}\sum_{k=0}^{m} C_{3m}^{3k}(3n-1)^k$ *là số nguyên.*

Lời giải. Đặt số phức $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$. Khi đó:

$$3\sum_{k=0}^{m} C_{3m}^{3k}(3n-1)^k =$$

$$(1+\sqrt[3]{3n-1})^{3m} + (1+\omega\sqrt[3]{3n-1})^{3m} + (1+\omega^2\sqrt[3]{3n-1})^{3m} \quad (1).$$

Vế phải của (1) là tổng của các lũy thừa $3m$ của các nghiệm x_1, x_2, x_3 trong đa thức

$$P(X) = (X-1)^3 - (3n-1) = X^3 - 3X^2 + 3X - 3n.$$

Đặt $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Khi đó $s_0 = s_1 = s_2 = 3$ và $s_{k+3} = 3s_{k+2} - 3s_{k+1} + 3ns_k$ (2). Bằng quy nạp ta suy ra mỗi s_k là một số nguyên chia hết cho $3^{\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + 1}$. Tiếp tục áp dụng (2) ta thu được:

$$s_{k+7} = 63ns_{k+2} - 9(n^2 - 3n - 3)s_{k+1} + 27n(2n+1)s_k.$$

Do $s_3 = 9n$ nên theo quy nạp ta được s_{6k+3} chia hết cho $3^{2k+2}, \forall k \in \mathbb{N}$ và từ (1) ta đi đến điều cần chứng minh.

DẠNG 2. QUAN HỆ ĐỒNG DƯ GIỮA CÁC HỆ SỐ TỔ HỢP

Bài toán 2.1 ([Putnam 1996]). *Cho số nguyên tố* $p \geq 5$ *và* $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=0}^{k} C_p^i \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\sum_{i=0}^{k} C_p^i \equiv 1 \pmod{p^2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{i} C_{p-1}^{i-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} C_{p-1}^{i-1} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Do $p \geq 5$ là số nguyên tố nên p có dạng $6m \pm 1$.

• Xét $p = 6m-1, k = 4m-1$ ta có

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^{4m-1} \frac{1}{i} - 2\sum_{j=1}^{2m-1} \frac{1}{2j} = \sum_{i=1}^{4m-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{1}{j} = \sum_{i=2m}^{4m-1} \frac{1}{i}.$$

Lại có:

$$2\sum_{i=2m}^{4m-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2m}\left(\frac{1}{2m-1+i} + \frac{1}{4m-i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} \frac{6m-1}{(2m-1+i)(4m-i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} \frac{p}{(2m-1+i)(4m-i)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì $\gcd(p, (2m-1+i)(4m-i)) = 1, \forall i = \overline{1, 2m}$ nên

$$\sum_{i=2m}^{4m-1} \frac{1}{i} \equiv 0 \pmod{p}.$$

• Xét $p = 6m+1, k = 4m$ ta có

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^{4m} \frac{1}{i} - 2\sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{2j} = \sum_{i=1}^{4m} \frac{1}{i} - \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j} = \sum_{i=2m+1}^{4m} \frac{1}{i}.$$

Lại có: $2\sum_{i=2m+1}^{4m} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2m}\left(\frac{1}{2m+i} + \frac{1}{4m+1-i}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{2m} \frac{6m+1}{(2m+i)(4m+1-i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} \frac{p}{(2m+i)(4m+1-i)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì $\gcd(p, (2m+i)(4m+1-i)) = 1, \forall i = \overline{1, 2m}$ nên

$$\sum_{i=2m+1}^{4m} \frac{1}{i} \equiv 0 \pmod{p}..$$

Bài toán 2.2 [Putnam 1991]. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

Lời giải. Sử dụng đẳng thức Vandermonde ta có

$$\sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j = \sum_{j\geq 0} C_p^j \sum_{h\geq 0} C_j^h C_p^{p-h}$$

$$= \sum_{h\geq 0} C_p^{p-h} \frac{p!}{h!(p-h)!} \sum_{j\geq 0} \frac{(p-h)!}{(p-j)!(j-h)!}$$

$$= \sum_{h\geq 0} (C_p^h)^2 2^{p-h} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$$

(do số nguyên tố p là ước của C_p^h với $0 < h < p$).

Bài toán 2.3 (Thi chọn đội tuyển VMO 2012, tỉnh Nghệ An). *Cho $p > 3$ là số nguyên tố và tập hợp $M = \{1;2;...;p\}$. Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $1 \leq k \leq p$ ta đặt $E_k = \{A \subset M : |A| = k\}$ và $x_k = \sum_{A\in E_k} (\min A + \max A)$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k C_p^k \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Lời giải. Giả sử $A = \{a_1;a_2;...;a_k\} \in E_k$. Khi ấy $B = \{p+1-a_1;...;p+1-a_k\} \in E_k$.

- Nếu $a_1 = \min A$ thì $p+1-a_1 = \max B$.

- Nếu $a_k = \max A$ thì $p+1-a_k = \min B$.

Bây giờ, ta có:

$$2x_k = \sum_{A\in E_k} (a_1 + a_k + p + 1 + p + 1 - a_k - a_1)$$

$$= \sum_{A\in E_k} 2(p+1) = 2(p+1)C_p^k$$

hay $x_k = (p+1)C_p^k$. Ta sẽ chứng minh

$$(p+1)\sum_{k=1}^{p-1} (C_p^k)^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$$

hay $\sum_{k=1}^{p-1} (C_p^k)^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$ (1).

Thật vậy, $C_p^k \vdots p \Rightarrow \frac{1}{p} C_p^k = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Đặt $\alpha_k = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$, suy ra:

$$k!\alpha_k = (p-1)(p-2)...(p-k+1)$$

$$\equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}.$$

$$\Rightarrow k\alpha_k \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p}.$$

Lại đặt: $\beta_k = \frac{(p-1)!}{k} \Rightarrow k\beta_k = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow \alpha_k \equiv (-1)^k \beta_k \pmod{p}.$$

Ta có mệnh đề: "$\forall k \in \{1;2;...;p-1\}$, $\exists$ duy nhất $j \in \{1;2;...;p-1\}$ sao cho $jk \equiv 1 \pmod{p}$".

Khi đó: $\sum_{k=1}^{p-1} \beta_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \beta_k^2 (kj)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (\beta_k k)^2 j^2$

$$\equiv \sum_{j=1}^{p-1} j^2 \equiv \frac{(p-1)(2p-1)p}{6} \pmod{p}.$$

Mặt khác, do $p > 3$ nên $p-1 \vdots 2$ và $(p-1)(2p-1) = 2p^2 + 1 - 3p \equiv 2.1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

Suy ra: $(p-1)(2p-1) \vdots 6$. Cuối cùng ta đi đến

$$\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \beta_k^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vậy ta hoàn tất việc chứng minh

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k C_p^k \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Bài 2.4. [VMO 2017]. *Chứng minh rằng:*

a) $\sum_{k=1}^{1008} kC_{2017}^k \equiv 0 \pmod{2017^2}$;

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv 3\left(2^{2016} - 1\right) \pmod{2017^2}$..

Lời giải. a) Ta có:

$$\sum_{k=1}^{1008} kC_{2017}^k \equiv \sum_{k=1}^{1008} \frac{k.2017!}{k!(2017-k)!}$$

$$\equiv 2017 \sum_{k=1}^{1008} \frac{2016!}{(k-1)!(2017-k)!}$$

$$\equiv 2017 \sum_{k=0}^{1007} \frac{2016!}{k!(2016-k)!} \equiv 2017 \sum_{k=0}^{1007} C_{2016}^k$$

$$\equiv \frac{2017}{2}\left(\sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k - C_{2016}^{1008}\right)$$

$$\equiv \frac{2017}{2}(2^{2016} - C_{2016}^{1008}) \pmod{2017^2}.$$

Do 2017 là số nguyên tố nên áp dụng định lí

Fermat nhỏ ta có $2^{2016} \equiv 1 \pmod{2017}$.

Mặt khác, ta có:

$$C_{2016}^{1008} - 1 = \frac{1009.1010...2016 - 1008!}{1008!}$$

$$= \frac{(2017-1)(2017-2)...(2017-1008) - 1008!}{1008!}.$$

Tử số chia hết cho 2017 và $\gcd(1008!, 2017) = 1$ nên $C_{2016}^{1008} \equiv 1 \equiv 2^{2016} \pmod{2017}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{1008} kC_{2017}^{k} \equiv 0 \pmod{2017^2}.$$

b) Ký hiệu $\frac{x}{y} \equiv \frac{z}{t} \pmod{m}$ với $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0, t \neq 0$ và $m \in \mathbb{Z}, m > 1$ nếu dạng tối giản của phân số $\frac{xt - zy}{yt}$ chia hết cho m.

Nhận xét: Với mọi số nguyên tố p thì

$$C_p^k \equiv (-1)^{k-1} \frac{p}{k} \pmod{p^2}.$$

Thật vậy, ta có

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k}.\frac{(p-k+1)(p-k+2)...(p-1)}{(k-1)!}$$

Suy ra: $C_p^k - (-1)^{k-1}\frac{p}{k}$

$$= \frac{p}{k}.\frac{(p-k+1)(p-k+2)...(p-1) - (-1)^{k-1}(k-1)!}{(k-1)!}.$$

Để ý rằng thừa số thứ hai trong tích này chia hết cho p^2 cho nên khẳng định trên được chứng minh.

Đến đây, ta có $\frac{1}{p}C_p^k \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p^2}$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv \sum_{k=1}^{504} (-1)^k (-1)^{k-1} \frac{2017}{k}$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{504} (-1)^{2k-1} \frac{2017}{k} \equiv -2017 \sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \pmod{2017^2}.$$

Bài toán quy về

$$-2017 \sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}$$

hay $$-\sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \equiv \frac{3(2^{2016}-1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Đặt $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + ... - \frac{1}{2n} = S_{2n} - S_n.$$

Ta có: $$S_{504} = S_{1008} - \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= S_{2016} - \sum_{k=1}^{2016} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Do $$S_{2016} = \sum_{k=1}^{1008} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2017-k} \right) \equiv 0 \pmod{2017}$$

nên ta cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^{2016} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \frac{3(2^{2016}-1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Sử dụng nhận xét trên một lần nữa, ta đưa quan hệ đồng dư trên về

$$\frac{1}{2017}\left(\sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \sum_{k=1}^{1008} C_{2017}^k \right) \equiv \frac{3(2^{2016}-1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Điều này là đúng bởi vì

$$\sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \sum_{k=1}^{1008} C_{2017}^k \equiv \sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k$$

$$\equiv \frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k - 2 \right) \equiv \frac{3(2^{2017}-2)}{2}$$

$$\equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017}.$$

DẠNG 3. VẬN DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ SỐ HỌC VỀ HỆ SỐ TỔ HỢP

Bài toán 3.1. [Vietnam TST 2010]. *Đặt S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của $(1+x)^n$. Chứng minh rằng $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3.*

Lời giải. Áp dụng đẳng thức Vandermonde ta có:

$$S_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(C_{2n}^k)^2=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^kC_{2n}^{2n-k}=C_{4n}^{2n}.$$

Biểu diễn $4n=\sum_{i=1}^{m}b_i3^i$ và do $4n>2n$ nên ta có biểu diễn $2n=\sum_{i=1}^{m}a_i3^i$ với $a_i,b_i\in\{0;1;2\}$.

Áp dụng định lí Lucas ta có:

$$S_{2n}+1=C_{4n}^{2n}+1\equiv\prod_{i=0}^{m}C_{b_i}^{a_i}+1\pmod 3..$$

- Trường hợp $a_i\in\{0;1\}$, với mọi $0\le i\le m$, khi đó $b_i=2$ nếu $a_i=1$ và $b_i=0$ nếu $a_i=0$. Đặt chỉ số i thỏa mãn $a_i=1$ là $2k$ (do $2n$ là số chẵn nên số chỉ số thỏa mãn $a_i=1$ phải là số chẵn).

Ta có:

$$S_{2n}+1=C_{4n}^{2n}+1\equiv\prod_{i=0}^{m}C_{b_i}^{a_i}+1\equiv 2^{2k}+1\equiv 2\pmod 3.$$

- Trường hợp $\exists j: a_j=2$. Xét j nhỏ nhất thỏa mãn $a_j=2$ thì khi đó $b_j=1$ và $C_{b_j}^{a_j}=C_1^2=0$, có nghĩa là $S_{2n}+1\equiv 0+1\equiv 1\pmod 3$.

Tóm lại, $S_{2n}+1\not\vdots\, 3$.

Bài toán 3.2. [Belarussian MO 1999]. *Xác định tất cả các số nguyên dương $n\ge 2$ sao cho C_{n-k}^k là số chẵn với $k=1,2,...,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.*

Lời giải. Giả sử rằng $p=2, a=2^s-1$ và $a_{s-1}=a_{s-2}=...=a_0=1$. Với bất kì $0\le b\le 2^s-1$, mỗi số hạng $C_{a_i}^{b_i}$ trong phương trình trên bằng 1. Do đó $C_a^b\equiv 1\pmod 2$. Điều này dẫn đến $n+1$ là một lũy thừa của 2. Nếu không thì, đặt $s=\lfloor\log_2 n\rfloor$ và

$$k=n-(2^s-1)=n-\frac{2^{s+1}-1}{2}\le n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}.$$

Khi đó $C_{n-k}^k=C_{2^s-1}^k$ là lẻ, một điều vô lí.

Ngược lại, giả sử $n=2^s-1$ với mọi số nguyên dương s. Với $k=1,2,...,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, có ít nhất chữ số 0 trong biểu diễn nhị phân của $a=n-k$ (tất nhiên, không kể chữ số 0 đứng đầu). Bất cứ khi nào có một chữ số 0 trong biểu diễn nhị phân của $n-k$, có một chữ số 1 tương ứng của $b=k$ thì $C_{a_i}^{b_i}$ bằng 0. Do đó, theo định lí Lucas thì C_{n-k}^k chẵn.

Vậy $n=2^s-1$ với mọi số nguyên $s\ge 2$.

Bài toán 3.3. [Hungarian-Israel Mathematical Competition 1999]. *Chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định sau: Với bất kì số nguyên $k\ge 2$, tồn tại một số nguyên $n\ge 2$ sao cho hệ số tổ hợp C_n^i chia hết cho k với mọi $i=1,2,...,n-1$.*

Lời giải. Khẳng định trên là sai. Để chứng minh điều này, lấy $k=4$ và giả sử ngược lại rằng tồn tại một số nguyên dương $n>1$ sao cho C_n^i chia hết cho 4 với mọi $i=1,2,...,n-1$. Khi đó:

$$0\equiv\sum_{i=1}^{n-1}C_n^i=2^n-2\equiv -2\pmod 4,$$ mâu thuẫn.

DẠNG 4. VẬN DỤNG ĐỊNH LÍ RUF VÀ HÀM SINH

Bài toán 4.1. [VMF 2013]. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$ ta có $\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}C_{n-k}^1\vdots 4^{n-1}$.*

Lời giải. Ta có:

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}C_{n-k}^1=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-(n-1-k))}(n-(n-1-k))=\sum_{i=1}^{n}C_{2n+1}^{2i}i.$$

Sử dụng công thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ ta có:

$$2S=\sum_{i=1}^{n}C_{2n}^{2i}.$$

Xét hàm sinh $f(x)=(1+x)^{2n}$. Áp dụng định lí RUF ta được: $A=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))=\frac{1}{2}.2^{2n}=4^n$.

Suy ra: $S=(2n+1)\frac{A}{2}=(2n+1)4^{n-1}\vdots 4^{n-1}$.

Bài toán 4.2. [IMO 1974]. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì* $\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}\not\vdots\, 5$.

Lời giải. Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2(n-k)+1}2^{3k}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3(n-k)}.$$

Do $16\equiv 1(\text{mod}\,5)$ nên $2^{3(n-i)}\equiv\frac{1}{2^{n-i}}=\frac{2^i}{2^n}(\text{mod}\,5)$.

Suy ra: $2^n\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}\equiv S_{2n+1}(\text{mod}\,5)$ với $S_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^i$. Cần tính $S_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^i$.

Xét hàm sinh $f(x)=(1+x\sqrt{2})^{2n+1}=\sum_{i=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{i}2^i$.

Áp dụng định lí RUF ta có:

$$S_{2n+1}=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))=\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{2n+1}+(1-\sqrt{2})^{2n+1}).$$

Để ý rằng S_{2n+1} là công thức tổng quát của dãy số $\{x_n\}$ cho bởi công thức $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$.

Do $x_0=1,x_1=1$ nên $x_n\not\vdots\, 5$.

Bài toán 4.3. [Mongolia TST 2011]. *Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_p^kC_{p+k}^k\equiv -1\ (\text{mod}\ p^3).$$

Lời giải. Xét hàm sinh: $f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_p^kC_{p+k}^kx^p$.

Ta có: $f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_p^kC_{p+k}^kx^p$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_p^kx^{p-k}\sum_{p=0}^{\infty}C_{p+k}^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_p^kx^{p-k}\frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

$$=\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\sum_{k=0}^{\infty}C_p^k\left(\frac{-1}{x}\right)^k=-\frac{1}{1-x}=-1-x-x^2-...$$

Vậy $\sum_{k=0}^{p}(-1)^kC_p^kC_{p+k}^k\equiv -1(\text{mod}\,p^3)$.

DẠNG 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Bài toán 5.1. [VMF 2013]. *Cho các số nguyên không âm I, j, k thỏa mãn* $i+j\le n$. *Chứng minh rằng* $2^{n-i-j}\mid\sum_{p=0}^{n}C_n^pC_p^iC_p^j$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $i\ge j$.

Ta có: $C_n^pC_p^iC_p^j=C_i^nC_{n-i}^{n-p}C_p^j$.

Đặt $A_j=\sum_{p=0}^{n}C_n^iC_{n-i}^{n-p}C_p^j$. Xét biểu thức

$$F(x)=\sum_{j=0}^{n}A_jx^j=\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}C_n^iC_{n-i}^{n-p}C_p^jx^j$$

$$=C_n^i\sum_{p=0}^{n}C_{n-i}^{n-p}\sum_{j=0}^{n}C_p^jx^j=C_n^i\sum_{p=0}^{n}C_{n-i}^{n-p}(1+x)^p$$

$$=C_n^i(1+x)^n\sum_{p=0}^{n}C_{n-i}^{n-p}\frac{1}{(1+x)^{n-p}}$$

$$=C_n^i(1+x)^n\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{n-i}=C_n^i(1+x)^i(2+x)^{n-i}.$$

Vậy $F(x)=C_n^i(1+x)^i(2+x)^{n-i}$ và A_j chính là hệ số của x^j trong khai triển của $F(x)$. Để ý rằng hệ số của các đơn thức của x có bậc bé hơn j trong khai triển $(2+x)^{n-i}$ đều chia hết cho 2^{n-i-j}. Vậy ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 5.2. [IMO Shortlist 2011]. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Với số nguyên a bất kì ta đặt*

$$S_a=\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+...+\frac{a^p}{p-1}.$$

Gọi m, n là hai số nguyên thỏa mãn $S_3+S_4-3S_2=\frac{m}{n}$. Chứng minh $p\mid m$.

Lời giải. Sử dụng tính chất

$$\frac{(-1)^{k-1}}{k}\equiv\frac{1}{k}(-1)^{k-1}\equiv\frac{1}{k}C_{p-1}^{k-1}=\frac{1}{p}C_p^k \pmod p$$

ta có: $S_a=-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-a)^k(-1)^{k-1}}{k}\equiv\frac{-1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}(-a)^kC_p^k$

$$\equiv\frac{-1}{p}\left(-1-(-a)^p+\sum_{k=0}^{p}(-a)^kC_p^k\right)\pmod p$$

Đến đây ta có: $S_a\equiv\frac{(a-1)^p-a^p+1}{p}\pmod p$.

Thế vào điều cần chứng minh ta được

$$S_3+S_4-3S_2\equiv\frac{(2^p-3^p+1)+(3^p-4^p+1)-3(1-2^p+1)}{p}$$

$$\equiv\frac{4.2^p-4^p-4}{p}\equiv-\frac{(2^p-2)^2}{p}\pmod p.$$

Áp dụng định lí Fermat nhỏ, do $p\mid 2^p-2$ cho nên $p\mid-\frac{(2^p-2)^2}{p}$. Suy ra điều phải chứng minh.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. [IMO Shortlist 2008]. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $C_{2^n-1}^0, C_{2^n-1}^1,\dots,C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$, là một hoán vị của $\{1,3,5,\dots,2^n-1\}\pmod{2^n}$.

2. [Bulgarian MO 2011]. Hỏi có tồn tại hay không các số tự nhiên $k,n,1\le k\le n-2$ sao cho $(C_n^k)^2+(C_n^{k+1})^2=(C_n^{k+2})^4$?

3. [USA TST 2000]. Viết $\frac{x_n}{y_n}=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\dots+\frac{2^n}{n}$ với $\gcd(x_n,y_n)=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\dots+\frac{2^n}{n}\right)\frac{n}{2^n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{C_{n-1}^i}.$$

4. [Polish Second Round 2001]. Cho các số nguyên $k,n>1$ thỏa mãn $p=2k-1$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $p\mid C_n^2-C_k^2$ thì $p^2\mid C_n^2-C_k^2$.

5. [Czech-Slovak Match 1999]. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\ge 3$ thì $2^{n-1}\le lcm(1,2,\dots,n)$.

6. [South Africa 1998]. Chứng minh rằng

$$\gcd(C_n^1,C_n^2,\dots,C_n^{n-1}),$$

bằng một số nguyên tố nếu n là lũy thừa của số nguyên tố đó và bằng 1 trong các trường hợp còn lại.

7. [USA MO]. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng $C_n^p\equiv\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\pmod p$.

8. [Australia MO]. Tìm giá trị k tự nhiên nhỏ nhất sao cho $\forall n\ge m:\frac{k}{m+n+1}C_{2n}^{n+m}\in\mathbb{N}$.

9. [HSG tỉnh Đăk Lăk 2011-2012]. Cho m là số nguyên dương thỏa mãn $0<m<2011$. Chứng minh rằng $\frac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là một số nguyên.

10. [Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ T7/245]. Cho $m,n,p\in\mathbb{N}$ thỏa mãn

$p\le m+n$ và $a=\max\{0;p-m\};b=\min\{p,n\}$.

Chứng minh rằng

$$(m+n-b)!\,p!\sum_{i=a}^{b}C_n^iC_m^{p-i}\mid(m+n-a)!.$$

11. [Trường Đông Toán học miền Nam 2012-2013]. Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{p}C_p^iC_{p+i}^i\equiv 2^p\pmod{p^2}.$$

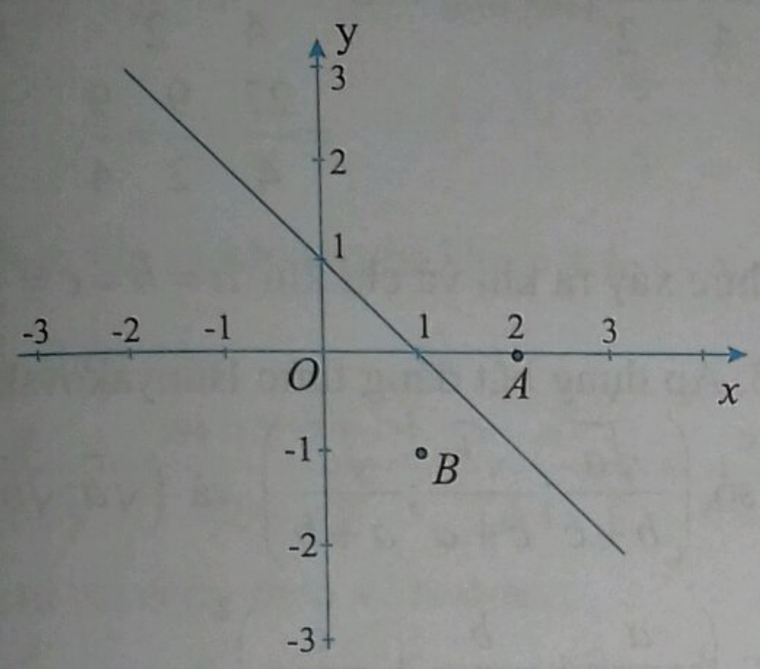
12. [Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ T8/419]. Tìm tất cả các số nguyên dương n,k thỏa mãn điều kiện $C_{3n}^n=3^n.n^k$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 54

Problem. *Find the locus of the points representing the complex numbers z satisfying* $|z-1+i| = |z-2|$.

Solution. We know that $|z - 1 + i| = |z - (1 - i)|$ is the distance from the point representing z to the point representing $1 - i$ which is $(1;-1)$.



Similarly $|z - 2|$ is the distance from the point representing z to the point representing 2 which is $(2; 0)$. So the locus of the points representing the complex numbers z satisfying $|z - 1 + i| = |z - 2|$ is the perpendicular bisector to the line segment connecting $(1;-1)$ and $(2; 0)$.

(Can you write the equation of that line ?).

TỪ VỰNG

locus : *qũy tích*

represent : *biểu diễn*

perpendicular bisector : *đường trung trực*

line segment : *đoạn thẳng*

(*Translated by* NGUYEN PHU HOANG LAN)

(*College of Science – Vietnam National University, Ha Noi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 51

Bài toán. *Số người và khoảng thời gian kết thúc cuộc chạy thi của từng người được thống kê trong bảng sau:*

Thời gian (phút)	*Tần số*
(0; 15]	10
(15; 17]	12
(17; 19]	20
(19; 21]	5
(21; 23]	3

Hãy ước lượng độ lệch chuẩn của khoảng thời gian kết thúc cuộc chạy thi đó?

Lời giải. Chúng ta sử dụng điểm chính giữa để biểu diễn khoảng thời gian kết thúc cuộc chạy thi thực: $c_1 = 7,5; c_2 = 16; ...; c_5 = 22$. Sử dụng công thức xấp xỉ, ta có:

$$\bar{x} \approx \frac{n_1c_1 + ... + n_5c_5}{n_1 + ... + n_5} = \frac{10 \times 7,5 + ... + 3 \times 22}{50} = 15,86.$$

Từ đó độ lệch chuẩn của khoảng thời gian kết thúc cuộc chạy thi là:

$$sd \approx \sqrt{\frac{n_1(c_1 - 15,68)^2 + ... + n_5(c_5 - 15,68)^2}{n_1 + ... + n_5}} \approx 4,45.$$

Nhận xét. Không có bạn nào gửi bản dịch cho bài số 51 này.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 34. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

Lời giải.

Bổ đề. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2};\ \forall a,b,c>0$

(bất đẳng thức Nesbitt).

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca;\ \forall a,b,c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Trở lại bài toán:

Đặt $P=\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}$.

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{9a}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a}{(b+c)^2}.\frac{9a}{4}}=3.\frac{a}{b+c}$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P+\frac{9}{4}(a+b+c)\ge 3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$\Rightarrow P+\frac{9}{4}\ge 3.\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow P\ge\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{27a(b+c)}{8}+\frac{27a(b+c)}{8}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{(b+c)^2}.\frac{27a(b+c)}{8}.\frac{27a(b+c)}{8}}=\frac{27}{4}a$$

$$\Rightarrow\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{27}{4}a(b+c)\ge\frac{27}{4}a.$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P+\frac{27}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{27}{4}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{27}{4}-\frac{27}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{27}{4}-\frac{27}{2}.\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$=\frac{27}{4}-\frac{9}{2}=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c};\frac{\sqrt{b}}{c+a};\frac{\sqrt{c}}{a+b}\right)$ và $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ ta được: $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2$

$$\le\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)(a+b+c)$$

$\Rightarrow P\ge\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 4. Biến đổi $\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}=\frac{2a^2}{2a(1-a)(1-a)}$

$$\ge\frac{2a^2}{\left(\frac{2a+1-a+1-a}{3}\right)^3}=\frac{27}{4}a^2.$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P\ge\frac{27}{4}.\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{27}{4}.\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 5. Biến đổi

$$\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{1}{a}=\frac{a^2-(b+c)^2}{a(b+c)^2}=\frac{2a-1}{a(1-a)^2}$$

$$=\frac{2(2a-1)}{2a(1-a)(1-a)}\geq\frac{2(2a-1)}{\left(\frac{2a+1-a+1-a}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{27}{4}.(2a-1).$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{27}{4}.\left[2(a+b+c)-3\right]=\frac{-27}{4}$$

$$\Rightarrow P\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{27}{4}\geq\frac{9}{a+b+c}-\frac{27}{4}$$

$$=9-\frac{27}{4}=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 6. Biến đổi

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2}=\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{a}{b+c}.$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$\geq\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{3}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$\geq\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 7. Ta có bất đẳng thức phụ:

$$\frac{a}{(1-a)^2}\geq\frac{3}{4}+\frac{3}{2}(3a-1),\ \text{với } 0<a<1.$$

Chứng minh: $\frac{a}{(1-a)^2}\geq\frac{3}{4}+\frac{3}{2}(3a-1)$

$$\Leftrightarrow 4a-3(1-a)^2-6(3a-1)(1-a)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2+10a-3-6(3a-1)(1-a)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)(3-a)-6(3a-1)(1-a)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)\left[-6a^2+11a-3\right]\geq 0$$

$\Leftrightarrow (3a-1)^2(3-2a)\geq 0$ (đúng với mọi $0<a<1$). Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{3}$. Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}\geq\frac{3}{4}+\frac{3}{2}(3a-1).$$

Tương tự rồi cộng theo vế ta được:

$$P\geq\frac{9}{4}+\frac{3}{2}(3a+3b+3c-3)=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(*GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định*)

Nhận xét. Để chứng minh bất đẳng thức ở đề bài chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến hoặc sử dụng bất đẳng thức hoán vị. Ngoài 7 cách giải của bạn *Đoàn Cát Nhơn*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải từ các bạn: *La Đại Cương*, GV THPT Cam Lộ, Cam Lộ, *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**; *Nguyễn Minh Ngọc*, 10 Toán 1, *Hoàng Bảo Minh Châu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**: *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 36** dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2020.

BÀI TOÁN 36. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. Biết* $AB=BC=a,\ AD=2a, SA=a\sqrt{3}$ *và* $SA\perp(ABCD)$. *Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SA. Tính thể tích khối tứ diện MNCD theo a.*

(*Nhóm HTS (Happy to Succeed), 12 Toán, THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định*)

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 509, T1.2020.

BÀI 42 (Pi in the sky, issue 10, 2007). *Gọi A là tập hợp khác rỗng các số nguyên dương sao cho nếu $a \in A$ thì $4a \in A$ và $\left[\sqrt{a}\right] \in A$ (ở đây $[a]$ là kí hiệu số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a). Chứng minh A là tập hợp tất cả các số nguyên dương.*

Lời giải. (i) Đầu tiên ta chứng minh rằng $1 \in A$.

Xét $a \in A$. Khi đó ta có:

$$\left[a^{1/2}\right] \in A, \left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right] \in A, \ldots, \underbrace{\left[\ldots\left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{n \text{ dấu ngoặc}} \in A, \ldots$$

Cũng vậy, các BĐT sau là đúng:

$$1 \le \left[a^{1/2}\right] \le a^{1/2},\ 1 \le \left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right] \le a^{\frac{1}{2^2}}, \ldots,$$

$$1 \le \underbrace{\left[\ldots\left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{n \text{ dấu ngoặc}} \le a^{\frac{1}{2^n}}, \ldots$$

Mặt khác luôn tồn tại số nguyên dương k đủ lớn để $a^{\frac{1}{2^k}} \le 1{,}5$. Vì vậy:

$$1 \le \underbrace{\left[\ldots\left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{k \text{ dấu ngoặc}} \le a^{\frac{1}{2^k}} \le 1{,}5.$$

Và do đó: $\underbrace{\left[\ldots\left[\left[a^{1/2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{k \text{ dấu ngoặc}} = 1.$

(ii) bây giờ ta chứng minh $2^n \in A, \forall n = 1, 2, \ldots$

Thậy vậy, do $1 \in A$ nên $2^2 \in A, 2^4 \in A, 2^6 \in A, \ldots,$ $2^{2n} \in A, \ldots$. Do đó $\sqrt{2^{2n}} = 2^n \in A, \forall n = 1, 2, \ldots$

(iii) Bây giờ ta xét một số nguyên dương m tùy ý và ta sẽ chứng minh $m \in A$. Đủ để chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $m^{2^k} \in A$. Với mỗi số nguyên dương k, có số nguyên dương p_k sao cho $2^{p_k} < m^{2^k} < 2^{p_k+1}$ (ta có thể lấy $p_k = m = \left[\log_2 m^{2^k}\right]$). Với k đủ lớn ta có BĐT:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2^k} \ge 1 + \frac{1}{m}2^k > 4.$$

Do đó: $2^{p_k} < m^{2^k} < 2^{p_k+1} < 2^{p_k+2} < (m+1)^{2^k}$ (*).

Bây giờ xét k là số nguyên dương thỏa mãn (*). Từ $2^{2(p_k+1)+1} \in A$, ta có:

$$\left[\sqrt{2^{2(p_k+1)+1}}\right] = \left[2^{(p_k+1)}\sqrt{2}\right] \in A.$$

Vì vậy: $\underbrace{\left[\ldots\left[\left[2^{(p_k+1)}\sqrt{2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{(k+1) \text{ dấu ngoặc}} \in A$. Mặt khác, từ (*) ta có: $m^{2^k} < 2^{p_k+1} \le \left[2^{(p_k+1)}\sqrt{2}\right] < (m+1)^{2^k}$.

Và vì vậy: $m \le \underbrace{\left[\ldots\left[\left[2^{(p_k+1)}\sqrt{2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{(k+1) \text{ dấu ngoặc}} \le m+1.$

Điều này chứng tỏ

$$m = \underbrace{\left[\ldots\left[\left[2^{(p_k+1)}\sqrt{2}\right]^{1/2}\right]^{1/2}\ldots\right]}_{(k+1) \text{ dấu ngoặc}} \in A.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.4.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI 44. *Xác định hằng số thực C nhỏ nhất có thể sao cho bất đẳng thức*

$$\left|x^3 + y^3 + z^3 + 1\right| \le C\left|x^5 + y^5 + z^5 + 1\right|$$

luôn đúng với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = -1$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: ĐƯỜNG TIỆM CẬN!

(*Đề đăng trên TH&TT số* 509, *tháng* 11 *năm* 2019)

Phân tích sai lầm. Bạn *Ngọc Anh* đã sai khi khẳng định số đường tiệm cận đứng (TCĐ) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^3-2}{x^3-3x+2}$ là số các số x_0 là nghiệm của $x^3-3x+2=0$ nhưng không là nghiệm của $mx^3-2=0$.

Lời giải đúng. Ta có: $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1;\ x=-2$.

1 và -2 không là nghiệm của PT $mx^3-2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.1^3-2\neq 0 \\ m.(-2)^3-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ -8m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m\neq -\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

- Với $m\neq 2$ và $m\neq -\dfrac{1}{4}$ đồ thị hàm số có hai đường TCĐ là $x=1$ và $x=-2$.

- Với $m=2$ ta có $y=\dfrac{2x^3-2}{x^3-3x+2}$.

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^3-2}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=+\infty;\ \lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=-\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to -2^+} y=\lim_{x\to -2^+}\frac{2x^3-2}{x^3-3x+2}=-\infty,\ \lim_{x\to -2^-} y=+\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=-2$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

Suy ra $m=2$ đồ thị hàm số có hai đường TCĐ là $x=1,\ x=-2$.

- Với $m=-\dfrac{1}{4}$ ta có $y=\dfrac{-\frac{1}{4}x^3-2}{x^3-3x+2}$.

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{4}x^3-2}{x^3-3x+2}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{4}x^3-2}{x^3-3x+2}=-\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to -2^+} y=\lim_{x\to -2^+}\frac{-\frac{1}{4}x^3-2}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-\frac{1}{4}(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2^+}\frac{-\frac{1}{4}(x^2-2x+4)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{3};\ \lim_{x\to -2^-} y=-\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=-2$ không là TCĐ của đồ thị hàm số. Suy ra với $m=-\dfrac{1}{4}$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường TCĐ $\Leftrightarrow m\neq -\dfrac{1}{4}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài toán.

KIHIVI

LỜI GIẢI RÕ RÀNG !

Trong giờ ôn tập môn toán tại lớp 12 A1, thầy giáo đưa ra bài toán sau:

Bài toán. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1,-2,3)$, $B(4;0;-1)$, $C(2,1,4)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $-x+2y+z+2=0$. Tìm số điểm D thuộc mặt phẳng (P) sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang đáy CD.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số

Sau một lúc suy nghĩ, bạn *Phương* xung phong lên bảng làm. Sau đây là bài làm của bạn *Phương*:

$ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AB // CD \Rightarrow$ đường thẳng CD đi qua $C(2;1;4)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(3;2;-4)$ làm VTCP nên có PT: $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+2t \\ z=4-4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Do $D\in CD$ nên:

$D(2+3t;1+2t;4-4t)$; Vì $D\in(P)$ nên:

$$-(2+3t)+2(1+2t)+(4-4t)+2=0 \Leftrightarrow t=2$$

$\Rightarrow D(8;5;-4)$. Vậy có một điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án **B.**

Ở dưới lớp, các bạn đều vỗ tay đồng ý trước lời giải rõ ràng và dễ hiểu của bạn *Phương*.

Còn theo bạn lời giải trên đã đúng chưa? Nếu sai thì bạn sẽ giải bài toán trên như thế nào?

THÂN VĂN DỰ

(*GV THPT Lạng Giang số 1, Yên Mỹ, Lạng Giang, Bắc Giang*)

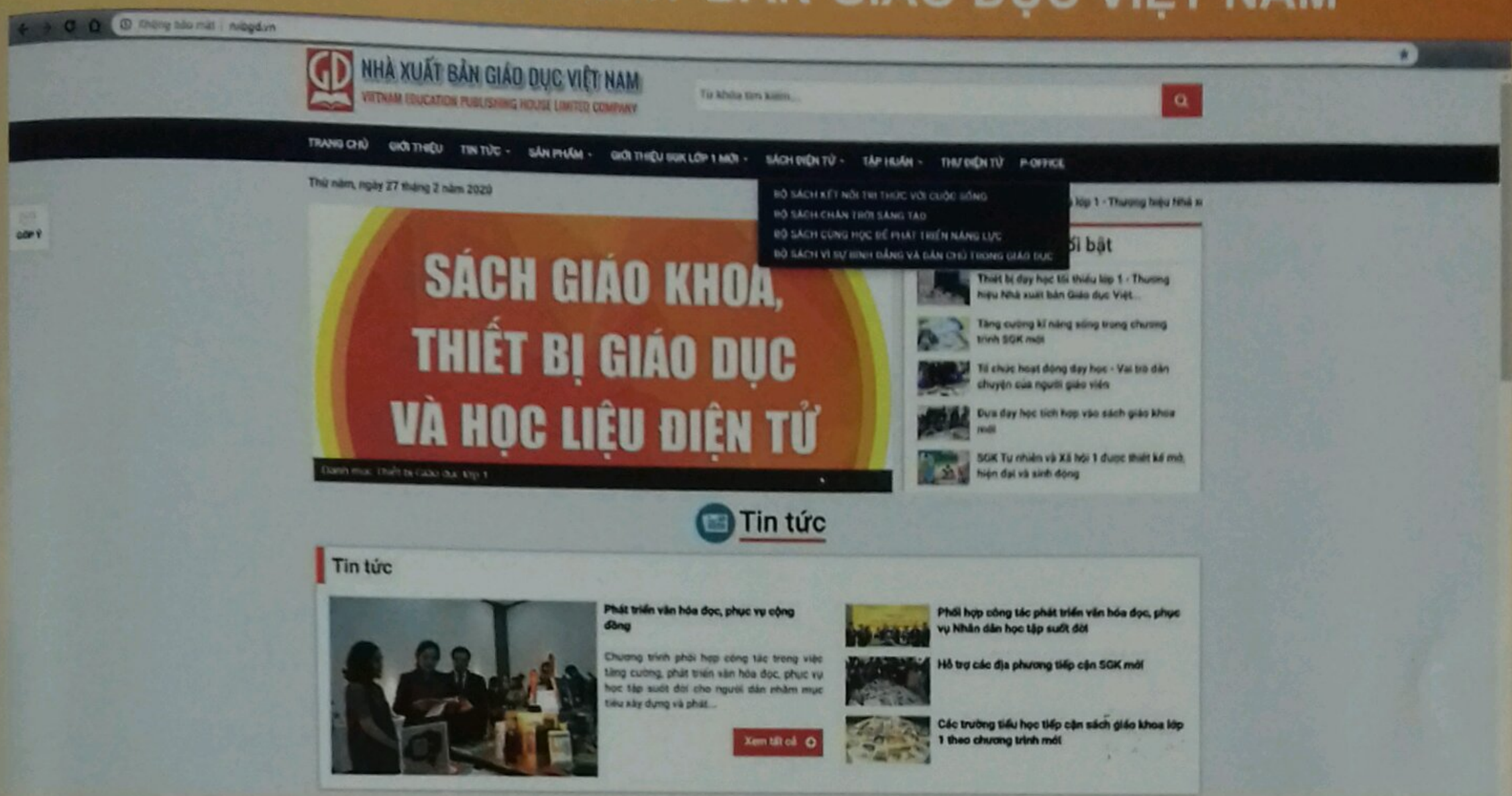
Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 513 (3.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, THÙY LINH
Trị sự, phát hành: THÙY LINH, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: THÙY LINH

RA MẮT PHIÊN BẢN ĐIỆN TỬ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 1 THEO CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG 2018 CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



Để giúp giáo viên, cán bộ quản lý tại các cơ sở giáo dục có thể triển khai kịp thời Thông tư số 01/2020/TT-BGDĐT ngày 30/01/2020 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã đưa phiên bản điện tử các bộ sách giáo khoa lớp 1 theo chương trình giáo dục phổ thông 2018 do NXBGDVN tổ chức.

Bạn đọc có thể truy cập sách điện tử của 4 bộ sách *Kết nối tri thức với cuộc sống, Chân trời sáng tạo, Cùng học để phát triển năng lực* và *Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục* theo 2 cách như sau:

- Truy cập địa chỉ *nxbgd.vn/sachdientu* và chọn 1 trong 4 bộ sách để đọc sách điện tử của bộ sách tương ứng;

- Truy cập website *nxbgd.vn*, mở menu *SÁCH ĐIỆN TỬ* và chọn 1 trong 4 bộ sách để đọc sách điện tử của bộ sách tương ứng.

Tại đây, giáo viên, học sinh có thể nghiên cứu phiên bản điện tử của tất cả các cuốn SGK đồng thời được cung cấp thêm những thông tin hữu ích, các câu hỏi và trả lời các vấn đề xung quanh nội dung của từng cuốn sách. Ngoài ra, để giáo viên có điều kiện tìm hiểu, tiếp cận sâu hơn với các bộ SGK, NXBGDVN đã đăng tải các tài liệu (định dạng power point) giới thiệu SGK, sách giáo viên, cùng với đó là các video tiết dạy minh họa của các môn học tại địa chỉ: *http://nxbgd.vn/taphuan*. Với các câu hỏi cần giải đáp và góp ý liên quan đến SGK mới của NXBGDVN, giáo viên có thể gửi e-mail theo địa chỉ: *hoidapsgk@nxbgd.vn*.

Ngoài phiên bản điện tử, đến thời điểm này, NXBGDVN đã triển khai cung ứng 50.000 bộ SGK thuộc 4 bộ sách tới các cơ sở giáo dục tại 63 tỉnh thành trong cả nước phục vụ nhiệm vụ lựa chọn SGK lớp 1 triển khai từ năm học 2020-2021.

*Thông tin thêm về nền tảng **Hành trang số** và **Tập huấn***

Nền tảng sách điện tử của NXBGDVN với tên gọi *Hành trang số* được xây dựng với những tính năng sau: (1) Cung cấp phiên bản sách điện tử với những công cụ trải nghiệm sách online và hỗ trợ tích cực việc dạy và học, qua đó phát huy toàn diện tiềm năng của các bộ SGK; (2) Cung cấp kho học liệu và bài tập bổ trợ phục vụ việc tự học của học sinh và soạn giáo án, bài giảng của giáo viên; (3) Cung cấp mô hình lớp học trực tuyến phục vụ việc quản trị lớp học, khai thác tối ưu những thế mạnh của việc áp dụng công nghệ thông tin trong đổi mới phương pháp dạy học, quản trị lớp học và đánh giá năng lực học sinh.

Song hành cùng nền tảng sách điện tử *Hành trang số*, nền tảng *Tập huấn* của NXBGDVN được xây dựng với mục tiêu tập huấn giáo viên dạy học theo SGK mới theo Chương trình GDPT 2018. Nền tảng *Tập huấn* cung cấp những tài liệu hỗ trợ bộ SGK mới như: tài liệu giới thiệu bộ sách, tài liệu giới thiệu chi tiết môn học, bài giảng tham khảo,... nhằm giúp nhà trường và giáo viên tiếp cận tư liệu, kiến thức hỗ trợ việc xây dựng giáo án và bài giảng. Nền tảng *Tập huấn* cũng được xây dựng những chức năng như kiểm tra tập huấn, nhằm hỗ trợ các cấp quản lý triển khai việc kiểm tra mức độ hoàn thiện khóa tập huấn của giáo viên trong địa phương theo cách thức hệ thống và tập trung qua công cụ thống kê tập huấn.

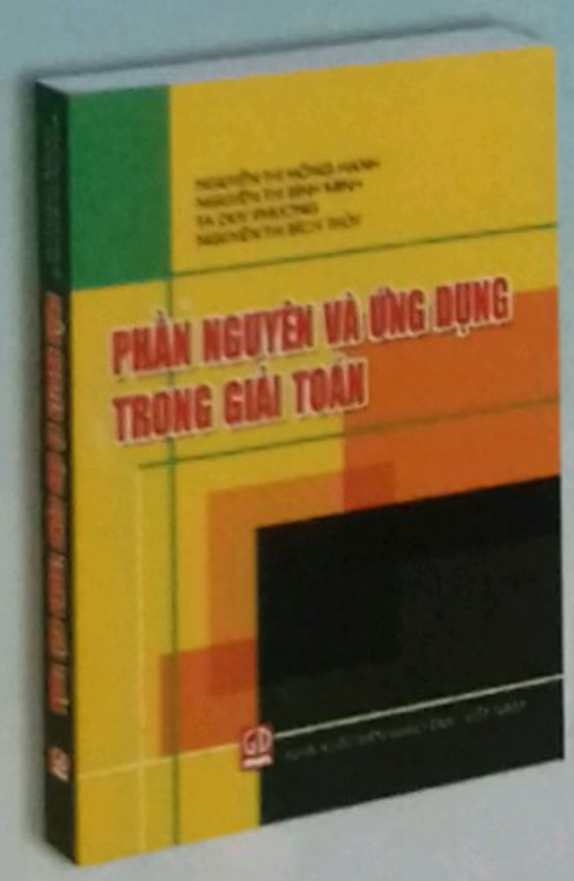
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

Tác giả: **Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy**

Sách dày 303 trang, khổ 16 × 24cm, giá bìa 105.000 đồng.



Phần nguyên [*x*] *của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.* Do tính độc đáo không giống ai của hàm phần nguyên, thí dụ, hàm phần nguyên khá đơn giản: là hàm hằng từng khúc, nhưng cũng khá phức tạp: không liên tục tại các điểm nguyên với bước nhảy bằng 1, do đó khó sử dụng công cụ giải tích, vì vậy các bài tập về phần nguyên thường là khó.

Ngoài lí thuyết được trình bày chi tiết, bắt đầu từ Trung học Cơ sở, sách có nhiều bài toán thi học sinh giỏi cấp huyện, tỉnh, Quốc gia và Quốc tế liên quan đến phần nguyên.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp **những kiến thức cơ bản về phần nguyên**: Hàm phần nguyên và đồ thị hàm phần nguyên.

Chương 2 trình bày các bài toán **số học** liên quan đến **phần nguyên**: Toán chia hết, ứng dụng nhị thức Newton trong giải toán với phần nguyên,…

Chương 3 trình bày các dạng toán liên quan đến **phần nguyên trong đại số**: Tính giá trị của biểu thức chứa phần nguyên, chứng minh hệ thức chứa phần nguyên và đặc biệt, phân loại chi tiết và khá đầy đủ về các dạng phương trình chứa phần nguyên.

Chương 4 là các bài toán về **phần nguyên trong toán Giải tích**: Dãy số, chuỗi số, giới hạn của biểu thức có phần nguyên.

Chương 5 sơ lược trình bày một số vấn đề liên quan đến phần nguyên: phần nguyên và hệ đếm cơ số khác 10, phần nguyên và phương trình hàm, phần nguyên trong lí thuyết hàm thực.

Những kiến thức và bài tập trong sách là cơ sở để giải nhiều bài toán thi học sinh giỏi khác chưa được đưa vào sách. Ngoài ra, cuốn sách có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán và các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ

Địa chỉ: 73 Lò Đúc, Hai Bà Trưng, Hà Nội

● Điện thoại: 024.39724715 - 0983605756

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT3M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng