TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2019
Số 509

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách **"*Tài liệu chuyên Toán*"** lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lí thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lí thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lí thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, . . . trên khắp cả nước, như : GS. *Đoàn Quỳnh*, GS.TS. *Văn Như Cương*, PGS. TS. *Nguyễn Đăng Phất*, PGS.TSKH *Vũ Đình Hòa*, GS.TSKH *Hà Huy Khoái*, TS. *Nguyễn Minh Hà*, GS.TSKH *Đặng Hùng Thắng*, PGS.TS. *Nguyễn Vũ Lương*, ThS. *Đỗ Thanh Sơn*, TS. *Trần Nam Dũng*, TS. *Lê Bá Khánh Trình*, ThS. *Nguyễn Trọng Tuấn*,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.

Địa chỉ liên hệ: - Phòng kinh doanh CTCP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội
Địa chỉ: Tầng 4, Tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 35121977, số máy lẻ 120 - Fax: (024) 35123278
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÓ BẬC LỚN HƠN 2

VŨ HỮU CHÍN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Một số phương trình có bậc lớn hơn hai đưa được về dạng phương trình bậc hai. Dựa vào tính chất nghiệm của phương trình bậc hai chúng ta có thể giải được một số bài toán về nghiệm của phương trình có bậc lớn hơn hai.

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

Bài 1.1. *Chứng minh số*

$$x_0=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3.\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

là một nghiệm của phương trình

$$x^4-16x^2+32=0.$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}, b=\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Ta có: $a^2+b^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}; ab=\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Vì $x_0=a-b$ nên

$$x_0^2=a^2+b^2-2ab=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 8-x_0^2=2\sqrt{2+\sqrt{3}}+2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \text{ (ĐK: } 8\le x_0^2\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(8-x_0^2\right)^2=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(2\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^2+8\sqrt{3(4-3)}$$

$\Leftrightarrow x_0^4-16x_0^2+32=0$. Vậy x_0 là nghiệm của PT: $x^4-16x^2+32=0$.

Nhận xét. Thay giá trị x_0 trực tiếp vào vế trái PT đã cho để giải bài toán thì phức tạp, cho nên ta biến đổi giá trị x_0 một cách hợp lý để giải bài toán.

Bài 1.2. *Cho phương trình:* $x^4-6x^2+4=0$. *Chứng minh phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt. Tính giá trị của biểu thức* $P=x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6$ *(với* x_1,x_2,x_3,x_4 *là các nghiệm của phương trình).*

Lời giải. Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$, PT đã cho trở thành: $t^2-6t+4=0$ (1).

PT(1) có: $\begin{cases}\Delta'=(-3)^2-4>0\\ t_1+t_2=6>0\\ t_1t_2=4>0\end{cases}$.

Do đó PT(1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Suy ra PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt: $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$. Suy ra:

$$P=x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6=2\left(t_1^3+t_2^3\right)$$

$$=2\left(t_1+t_2\right)^3-6t_1t_2\left(t_1+t_2\right)=288.$$

Nhận xét. Đặt ẩn phụ đưa PT đã cho về PT bậc hai và sử dụng tính chất nghiệm của PT bậc hai để tính giá trị của biểu thức *P*.

Bài 1.3. *Cho phương trình:* $x^4+2mx^2+4=0$. *Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm* x_1,x_2,x_3,x_4 *thỏa mãn*

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=32.$$

Lời giải. Ký hiệu PT: $x^4+2mx^2+4=0$ (1).

Đặt $x^2=t\ge 0$, PT(1) trở thành:

$$t^2+2mt+4=0 \quad (2).$$

PT(1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(2) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1,t_2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-4>0\\ t_1+t_2=-2m>0\\ t_1t_2=4>0\end{cases}\Leftrightarrow m<-2.$$

Khi đó PT(1) có 4 nghiệm: $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}; x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$.

Ta có: $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=2\left(t_1^2+t_2^2\right)$

$$=2(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=8m^2-16.$$

Từ giả thiết $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=32$ suy ra $8m^2-16=32\Rightarrow m=-\sqrt{6}$ (vì $m<-2$).

Nhận xét. Dạng bài toán tìm giá trị của tham số biết hệ thức chứa nghiệm của PT bậc bốn.

Bài 1.4. *Cho phương trình ẩn x:*

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0.$$

Biết rằng trong các nghiệm của phương trình có hai nghiệm tích là –32. Hãy xác định k.

Lời giải. Gọi x_1,x_2,x_3,x_4 là 4 nghiệm của PT

đã cho và giả sử $x_1.x_2=-32$.

Suy ra: $x_3.x_4=\dfrac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2}=\dfrac{-1984}{-32}=62$. Từ đó tồn tại 2 số p, q sao cho:

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$=(x^2-px-32)(x^2-qx+62)$$
$$=x^4-(p+q)x^3+(62+pq-32)x^2+(-62p+32q)x-1984.$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có: $\begin{cases}p+q=18\\-62p+32q=200\\k=62+pq-32\end{cases}$.

Hai PT đầu của hệ trên cho ta $p=4$, $q=14$. Suy ra $k=62+4.14-32=86$.

Nhận xét. Ta đã dùng kết quả: Nếu phương trình bậc bốn $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ có bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 thì $x_1x_2x_3x_4=d$.

Bài 1.5. *Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ (x là ẩn số) có nghiệm thì $a^2+(b-2)^2>3$.*

Lời giải. Giả sử x_0 là nghiệm của PT đã cho, ta có: $x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+ax_0+1=0$ (1).

Dễ thấy $x_0\neq 0$, chia cả hai vế của (1) cho x_0^2 ta được: $x_0^2+ax_0+b+\dfrac{a}{x_0}+\dfrac{1}{x_0^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)^2+a\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+b-2=0\quad(2).$$

Đặt $y_0=x_0+\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow y_0^2\geq 4$ (3).

Khi đó (2) trở thành: $y_0^2+ay_0+b-2=0$.

Suy ra: $-y_0^2=ay_0+(b-2)$

$$\Rightarrow y_0^4=\left[ay_0+(b-2)\right]^2\leq\left[a^2+(b-2)^2\right](y_0^2+1)$$
$$\Rightarrow y_0^4-1<\left[a^2+(b-2)^2\right](y_0^2+1)$$
$$\Leftrightarrow y_0^2-1<a^2+(b-2)^2.$$

Kết hợp với (3) suy ra:

$$4-1\leq y_0^2-1<a^2+(b-2)^2\Rightarrow a^2+(b-2)^2>3.$$

Nhận xét. Dạng phương trình đối xứng. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta chứng minh được bài toán.

Bài 1.6. *Cho phương trình ẩn x:*

$$(x+1)^4-(m-1)(x+1)^2-m^2+m-1=0\quad(*).$$

a) *Chứng minh phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.*

b) *Tìm m để cho $|x_1|+|x_2|=2$.*

Lời giải. a) Đặt $(x+1)^2=y\geq 0$. Ta có PT:

$$y^2-(m-1)y-m^2+m-1=0.$$

Ta có hệ số $a=1$, $b=-(m-1)$,

$$c=-m^2+m-1=-\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0.$$

Vì $ac<0$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt trái dấu: $y_2<0<y_1$. Với $y_1>0$, từ $(x+1)^2=y_1>0$ $\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{y_1}$. Vậy PT đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Xét $x_1=-1+\sqrt{y_1}>x_2=-1-\sqrt{y_1}$. Ta có:

$$|x_1|+|x_2|=2\Leftrightarrow\left|-1+\sqrt{y_1}\right|+\left|-1-\sqrt{y_1}\right|=2\quad(1).$$

Ta có BĐT: $|A|\geq A$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A\geq 0$.

Do đó: $\left|-1+\sqrt{y_1}\right|+\left|-1-\sqrt{y_1}\right|=\left|1-\sqrt{y_1}\right|+\left|1+\sqrt{y_1}\right|$

$$\geq 1-\sqrt{y_1}+1+\sqrt{y_1}=2\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $1-\sqrt{y_1}\geq 0\Leftrightarrow y_1\leq 1$ (3).

Giải PT bậc hai ẩn y ta có:

$$y_1=\frac{m-1+\sqrt{5m^2-6m+5}}{2}\leq 1\Leftrightarrow\sqrt{5m^2-6m+5}\leq 3-m$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-m\geq 0\\5m^2-6m+5\leq 9-6m+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 3\\-1\leq m\leq 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1.$$

Nhận xét. Kết hợp quan hệ giữa nghiệm của PT bậc 2 và PT bậc 4, vận dụng tính chất giá trị tuyệt đối để giải bài toán.

Bài 1.7. *Cho phương trình ẩn x:*

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2=m\quad(*)$$

a) *Giải phương trình với m = 15.*

b) *Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.*

Lời giải. a) Ta có: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2=\dfrac{(x+1)^2+x^2}{x^2.(x+1)^2}=$

$$=\frac{1}{x^2(x+1)^2}+\frac{2x(x+1)}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2(x+1)^2}+\frac{2}{x(x+1)}.$$

ĐK: $x\neq 0, x\neq -1$. Đặt $t=\frac{1}{x(x+1)}$. PT đã cho có dạng: $t^2+2t-m=0$ (1).

Khi m = 15 thì (1) $\Leftrightarrow t^2+2t-15=0$. PT có nghiệm $t_1=-5; t_2=3$.

- Với $t=-5$ ta có: $\frac{1}{x(x+1)}=-5\Leftrightarrow 5x^2+5x+1=0$.

PT có nghiệm $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$.

- Với $t=3$ ta có: $\frac{1}{x(x+1)}=3\Leftrightarrow 3x^2+3x-1=0$.

PT có nghiệm $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$.

b) PT(*) có 4 nghiệm phân biệt thì PT: $t^2+2t-m=0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1+m>0\Leftrightarrow m>-1$.

Gọi t_1, t_2 là nghiệm của PT(1), khi đó:

$$\frac{1}{x(x+1)}=t_1 \ (2);\ \frac{1}{x(x+1)}=t_2 \ (3).$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow t_1x^2+t_1x-1=0$, PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=t_1^2+4t_1>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1>0\\ t_1<-4\end{array}\right.$.

Tương tự: (3) $\Leftrightarrow t_2x^2+t_2x-1=0$, PT có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_2>0\\ t_2<-4\end{array}\right.$.

Vậy PT $t^2+2t-m=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn: $t_1<t_2<-4$ hoặc $0<t_1<t_2$ hoặc $t_1<-4<0<t_2$.

Theo hệ thức Viète: $t_1+t_2=-2$, không thỏa mãn $t_1<t_2<-4$ hoặc $0<t_1<t_2$.

Do đó: $t_1<-4<0<t_2$. Ta có:

$$-1-\sqrt{m+1}<-1+\sqrt{m+1}, \text{ suy ra:}$$

$$\begin{cases}-1-\sqrt{1+m}<-4\\ -1+\sqrt{m+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>8\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m>8.$$

Nhận xét. Ta đã đặt ẩn phụ để đưa PT đã cho về PT bậc hai và từ tính chất nghiệm của PT bậc hai, suy ra điều kiện để PT đã cho có 4 nghiệm.

Bài 1.8. *Cho phương trình ẩn x:*

$$x+3\left(m-3x^2\right)^2=m.$$

a) *Giải phương trình với* $m=2$.

b) *Tìm m để phương trình có nghiệm.*

Lời giải. Ký hiệu: $x+3\left(m-3x^2\right)^2=m$ (1).

Đặt $m-3x^2=y$, ta có hệ: $\begin{cases}m-3x^2=y & (2)\\ x+3y^2=m & (3)\end{cases}$ (*).

Cộng (2) với (3) suy ra: $x-y+3y^2-3x^2=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[1-3(x+y)\right]=0$.

• Xét $x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

• Xét $1-3(x+y)=0\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}-x$.

a) Với $m=2$, thay vào (2) ta có: $2-3x^2=y$.

- Với $x=y$, suy ra: $2-3x^2=x$

$$\Leftrightarrow 3x^2+x-2=0\Leftrightarrow x_1=-1; x_2=\frac{2}{3}.$$

- Với $y=\frac{1}{3}-x$, suy ra: $2-3x^2=\frac{1}{3}-x$

$\Leftrightarrow 9x^2-3x-5=0$. PT có nghiệm $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{6}$.

Vậy với $m=2$, PT có nghiệm:

$$x_1=-1; x_2=\frac{2}{3}; x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{6}.$$

b) - Với $y=x$, thay vào PT(2) ta có:

$$m-3x^2=x\Leftrightarrow 3x^2+x-m=0 \quad (4).$$

PT(4) có nghiệm khi $\Delta\geq 0$

$$\Leftrightarrow 1+12m\geq 0\Leftrightarrow m\geq\frac{-1}{12} \quad (5).$$

- Với $y=\frac{1}{3}-x$, thay vào PT(2) ta có:

$$m-3x^2=\frac{1}{3}-x\Leftrightarrow 9x^2-3x+1-3m=0 \quad (6).$$

PT(6) có nghiệm khi $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow (-3)^2-4.9.(1-3m)\geq 0 \Leftrightarrow m\geq\frac{1}{4}$ (7).

Kết hợp (5) với (7), PT(1) có nghiệm khi $m\geq\frac{-1}{12}$.

Nhận xét. Đưa PT đã cho về HPT dạng đối xứng. Từ đó tìm điều kiện để PT bậc bốn có nghiệm.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Bài 2.1. *Cho $a,b>0$. Biết rằng phương trình ẩn x: $x^3-x^2+3ax-b=0$ có ba nghiệm (không nhất thiết phân biệt), chứng minh $\frac{a^3}{b^3}+27b\ge 28$.*

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là nghiệm của PT. Theo hệ thức Viète cho PT bậc 3 ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1>0 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3a>0. \\ x_1x_2x_3=b>0 \end{cases}$$

Giả sử $x_1<0$, từ $x_1x_2x_3>0$ suy ra $x_2x_3<0$.

Từ $x_1(x_2+x_3)+x_2x_3>0 \Rightarrow x_1(x_2+x_3)>0$, mà $x_1<0$, suy ra: $x_2+x_3<0$. Do đó $x_1+x_2+x_3<0$, vô lí. Vậy $x_1>0$.

Chứng minh tương tự có: $x_2>0$, $x_3>0$. Ta có:

$1=x_1+x_2+x_3\ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \Rightarrow 1\ge 3\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow 1\ge 27b$;

$3a=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\ge 3\sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}$

$$\Rightarrow a\ge \sqrt[3]{b^2} \Leftrightarrow a^3\ge b^2 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}\ge \frac{1}{b} \quad (1).$$

Ta chứng minh: $\frac{1}{b}\ge 28-27b \Leftrightarrow 27b^2-28b+1\ge 0$

$\Leftrightarrow (27b-1)(b-1)\ge 0$ (luôn đúng, vì $1\ge 27b$).

Do đó $\frac{1}{b}\ge 28-27b$ (2). Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{a^3}{b^3}\ge \frac{1}{b}\ge 28-27b \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}\ge 28-27b \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}+27b\ge 28.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$b=\frac{1}{27}; a^3=b^2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{9}; b=\frac{1}{27}.$$

Nhận xét. Mọi phương trình bậc ba đều đưa được về dạng $x^3+ax^2+bx+c=0$. Nếu phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 (không nhất thiết phân biệt), ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b, \\ x_1x_2x_3=-c \end{cases}$$

đây chính là hệ thức Viète của phương trình bậc 3.

Bài 2.2. *Cho biết phương trình ẩn x: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\ne 0)$ có 3 nghiệm dương x_1, x_2, x_3. Chứng minh*

$$x_1^7+x_2^7+x_3^7\ge \frac{-b^3c^2}{81.a^5}.$$

Lời giải. Ta có PT: $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$. Suy ra: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}$.

Do đó: $\frac{-b^3c^2}{81.a^5}=\frac{1}{81}.\left(-\frac{b}{a}\right)^3.\left(\frac{c}{a}\right)^2=$

$$=\frac{1}{81}.(x_1+x_2+x_3)^3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2.$$

Khi đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$$x_1^7+x_2^7+x_3^7\ge \frac{1}{81}.(x_1+x_2+x_3)^3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2 \quad (1).$$

Dễ thấy: $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\le \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2$.

Vì $x_1, x_2, x_3>0$ nên:

$$\frac{1}{81}.(x_1+x_2+x_3)^3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2 \le \frac{1}{729}(x_1+x_2+x_3)^7 \quad (2).$$

Ta sẽ chứng minh:

$$x_1^7+x_2^7+x_3^7\ge \frac{1}{729}(x_1+x_2+x_3)^7 \quad (3).$$

Thật vậy, áp dụng liên tiếp BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^7+x_2^7+x_3^7)\ge (x_1^4+x_2^4+x_3^4)^2$$

$$=\frac{1}{9}.\left[(1^2+1^2+1^2)(x_1^4+x_2^4+x_3^4)\right]^2\ge \frac{1}{9}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^4$$

$$=\frac{1}{729}\left[(1^2+1^2+1^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]^4$$

$$\ge \frac{1}{729}(x_1+x_2+x_3)^8 \Rightarrow x_1^7+x_2^7+x_3^7\ge \frac{1}{729}(x_1+x_2+x_3)^7.$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét. Dựa vào hệ thức Viète của phương trình bậc ba, ta đưa BĐT cần chứng minh về BĐT chỉ còn theo các nghiệm x_1, x_2, x_3. Áp dụng BĐT Bunyakovsky để hoàn thành chứng minh.

Bài 2.3. *Tìm tất cả các số nguyên dương $p>1$ sao cho phương trình ẩn x sau có nghiệm duy nhất: $x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0$.*

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$x^3+(p-1)x^2+x^2+(p-1)x+\frac{x}{p-1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+p-1)\left(x^2+x+\frac{1}{p-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+p-1=0 & \\ x^2+x+\frac{1}{p-1}=0 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-p+1 & (2) \\ x^2+x+\frac{1}{p-1}=0 & (3) \end{array}\right..$$

Để PT(1) có nghiệm duy nhất ta có các trường hợp sau:

• Trường hợp PT(3) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta=1-4.\frac{1}{p-1}<0 \Leftrightarrow p<5$. Mà $p>1$, p là số nguyên dương nên $p\in\{2;3;4\}$.

Với $p=2;\ p=3;\ p=4$ thì (2) có các nghiệm lần lượt là: $x=-1;-2;-3$.

• Trường hợp PT(3) có nghiệm kép $x=1-p, p>1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ (1-p)^2+1-p+\frac{1}{p-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4.\frac{1}{p-1}=0 \\ (1-p)^2+1-p+\frac{1}{p-1}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=5 \\ (1-p)^2+1-p+\frac{1}{p-1}=0\ (*) \end{cases}.$$

Với $p=5$, thay vào PT(*) không thỏa mãn. Khi đó không tìm được p.

Vậy các giá trị tìm là $p\in\{2;3;4\}$.

Nhận xét. Ta đưa PT bậc 3 đã cho về tích của một PT bậc nhất và một PT bậc hai. Từ đó tìm được giá trị của tham số để PT có nghiệm duy nhất.

Bài 2.4. *Cho phương trình ẩn x:*

$$\frac{x^6-1}{x^3}-(2a+1).\frac{x^2-1}{x}+2a-3=0\quad (*).$$

1) *Giải phương trình* (*) khi $a=1$.

2) *Tìm a để phương trình* (*) *có nhiều hơn* 2 *nghiệm dương phân biệt.*

Lời giải. 1) ĐK: $x\neq 0$. Đặt

$$t=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}\Rightarrow \frac{x^6-1}{x^3}=x^3-\frac{1}{x^3}=t^3+3t.$$

Khi đó PT(*) có dạng:

$$t^3+3t-(2a+1)t+2a-3=0$$

$$\Leftrightarrow t^3+(2-2a)t+2a-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3-2a)=0\quad (2).$$

1) Khi $a=1$, PT(2) có dạng:

$(t-1)(t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow t=1$ (vì $t^2+t+1>0$).

Với $t=1$, ta có:

$$\frac{x^2-1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

2) PT(2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & (3) \\ t^2+t+3-2a=0 & (4) \end{array}\right.$.

• Với $t=1$, (*) có nghiệm dương $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

• Giả sử t_1 là một nghiệm của (4), khi đó PT $\frac{x^2-1}{x}=t_1 \Leftrightarrow x^2-t_1x-1=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

Vì vậy để PT(*) có nhiều hơn 2 nghiệm dương phân biệt thì PT(4) phải có hai nghiệm phân biệt $t\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=8a-11>0 \\ 1^2+1+3-2a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\frac{11}{8} \\ a\neq\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy PT(*) có nhiều hơn 2 nghiệm dương phân biệt khi: $a>\frac{11}{8}; a\neq\frac{5}{2}$.

Nhận xét. Ta đã đặt ẩn phù hợp để đưa PT đã cho về PT bậc ba, sau đó đưa về tích của PT bậc nhất và PT bậc hai. Xét quan hệ nghiệm của hai PT, từ đó tìm được giá trị tham số để PT có nhiều hơn 2 nghiệm dương phân biệt.

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC LỚN HƠN 4

Bài 3.1. *Tìm giá trị của tham số a để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt*

$$(2x^2-4x+a+5)(x^2-2x+a)(|x-1|-a-1)=0\quad (1).$$

Lời giải. PT(1) tương đương với

$$\left[2(x-1)^2+a+3\right].\left[(x-1)^2+a-1\right](|x-1|-a-1)=0.$$

Đặt $t=|x-1|, t\geq 0$, ta có PT:

$$(2t^2+a+3)(t^2+a-1)(t-a-1)=0\quad (2).$$

Gọi t_0 là nghiệm của (2).

Nếu $t_0>0$ thì PT: $|x-1|=t_0$ có 2 nghiệm phân biệt $x=1\pm t_0$. Do đó PT(2) có k nghiệm dương thì PT(1) có $2k$ nghiệm. Vậy để PT(1) có 3

nghiệm thì một trong các nghiệm của PT(2) phải bằng 0. Suy ra $t=0 \Leftrightarrow x=1$.

Thay $x=1$ vào PT(1) có:

$$(a+3)(a-1)(-a-1)=0 \Leftrightarrow a \in \{-3;1;-1\}.$$

Với $a=-1$, thay vào PT(1) ta được ba nghiệm $x \in \{1;1 \pm \sqrt{2}\}$. Với $a=1$, thay vào PT(1) ta được ba nghiệm $x \in \{\pm 1;3\}$. Với $a=-3$, thay vào PT(1) ta được ba nghiệm $x \in \{\pm 1;3\}$.

Vậy $a \in \{\pm 1;-3\}$ là các giá trị cần tìm.

Nhận xét. PT đã cho có bậc lớn hơn 4 là tích của các PT bậc hai và bậc nhất. Ta đã dựa vào tính chất số chẵn, số lẻ nghiệm của PT để giải bài toán.

Bài 3.2. *Cho a,b,c khác 0 thỏa mãn: $ac+bc+3ab \le 0$. Chứng minh rằng phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm*

$$(ax^2+bx+c)(bx^2+cx+a)(cx^2+ax+b)=0 \quad (*).$$

Lời giải. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \ (1) \\ bx^2+cx+a=0 \ (2). \\ cx^2+ax+b=0 \ (3) \end{array}\right.$

Ta có: $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=b^2-4ac+c^2-4ab+a^2-4bc$

$=(a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab)-2ac-2bc-6ab$

$=(a+b-c)^2-2(ac+bc+3ab)$.

Do $ac+bc+3ab \le 0$ nên $-2(ac+bc+3ab) \ge 0$.

Suy ra $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \ge 0$, vì thế ít nhất một trong ba số $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ phải có một số không âm.

Nghĩa là ít nhất một trong ba PT (1), (2), (3) có nghiệm. Do đó PT đã cho có nghiệm.

Nhận xét. PT đã cho có bậc lớn hơn 4 là tích của các PT bậc hai. PT đã cho có nghiệm khi một trong các PT bậc hai có nghiệm. Để làm điều này, thông thường ta xét tổng hoặc tích các giá trị Δ_i.

Bài 3.3. *Tìm $a,b \in \mathbb{Q}$, biết $x=1+\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình: $x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0$. Khi đó hãy tìm các nghiệm còn lại.*

Lời giải. Ta có: $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$;

$(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}$; $(1+\sqrt{2})^5=41+29\sqrt{2}$.

Do $x=1+\sqrt{2}$ là nghiệm của PT đã cho nên

$41+29\sqrt{2}+a(7+5\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})+5(1+\sqrt{2})+2=0$

$\Leftrightarrow (34+5a+2b)\sqrt{2}=-(48+7a+3b)$.

Nếu $34+5a+2b \ne 0 \Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{-(48+7a+3b)}{34+5a+2b}$, vô lý vì $a,b \in \mathbb{Q}$.

Suy ra $\begin{cases} 34+5a+2b=0 \\ 48+7a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-2 \end{cases}$.

Ta có PT: $x^5-6x^3-2x^2+5x+2=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+2)(x^2-2x-1)=0$.

Vậy PT có các nghiệm $x \in \{\pm 1;-2;1 \pm \sqrt{2}\}$.

Nhận xét. Dựa vào PT có nghiệm vô tỉ và *a, b* là các số hữu tỉ để tìm được các giá trị *a, b*.

Bài 3.4. *Cho phương trình ẩn x: $x^5-209x+a=0$, có hai nghiệm dương khác 1 mà hai nghiệm đó có tích bằng 1. Tìm hai nghiệm đó và a.*

Lời giải. Gọi hai nghiệm đó là k và $\dfrac{1}{k}$ $(k>0)$, thay vào PT ta được:

$$\begin{cases} k^5-209k+a=0 \\ \dfrac{1}{k^5}-\dfrac{209}{k}+a=0 \end{cases} \Rightarrow \left(k-\frac{1}{k}\right)\left(k^4+k^2+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}-208\right)=0.$$

Do $k \ne 1 \Rightarrow k-\dfrac{1}{k} \ne 0 \Rightarrow k^4+k^2+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^4}-208=0$.

Đặt $y=k^2+\dfrac{1}{k^2}>2$, ta có PT:

$$y^2+y-210=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y_1=14 & \text{(chọn)} \\ y_2=-15 & \text{(loại)} \end{array}\right..$$

Với $y=14 \Rightarrow k^2+\dfrac{1}{k^2}=14 \Leftrightarrow k^4-14k^2+1=0$

$\Rightarrow k^2=7 \pm \sqrt{48}=(2 \pm \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow k=2 \pm \sqrt{3}$ $(k>0)$.

Suy ra PT có nghiệm: $x=2 \pm \sqrt{3}$. Thay $x=2+\sqrt{3}$ vào PT đã cho, ta có:

$$(2+\sqrt{3})^5-209(2+\sqrt{3})+a=0 \Rightarrow a=56.$$

Nhận xét. Từ PT bậc 5 có tích hai nghiệm dương bằng 1 nên PT có hai nghiệm là k và $\dfrac{1}{k}$ $(k>0)$. Từ đó ta tìm được giá trị k và tìm được giá trị tham số a.

Bài 3.5. *Cho phương trình ẩn x:* $x^2-3x+1=0$ *có nghiệm* $x=a$. *Hãy tìm một giá trị của* $b\in\mathbb{Z}$ *để phương trình:* $x^{16}-bx^8+1=0$ *có nghiệm* $x=a$.

Lời giải. Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của PT $x^2-3x+1=0$. Theo hệ thức Viète ta có:

$$x_1+x_2=3;\ x_1x_2=1$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2.1=7.$$

Giả sử $x_1=a\neq 0\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{a}$. Ta cần tìm một giá trị $b\in\mathbb{Z}$ sao cho: $a^{16}-ba^8+1=0\Leftrightarrow b=a^8+\dfrac{1}{a^8}$.

Do đó: $b=x_1^8+x_2^8=\left(x_1^4+x_2^4\right)^2-2\left(x_1x_2\right)^4$

$$=\left[\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2\right]^2-2$$

$$=(49-2)^2-2=2207.$$

Thử lại: $a^{16}-2207a^8+1=0$ nên $x=a$ là nghiệm của PT: $x^{16}-2207x^8+1=0$.

Vậy một giá trị $b\in\mathbb{Z}$ cần tìm là $b=2207$.

Nhận xét. PT bậc 2 có tích hai nghiệm bằng 1, nên ta giả sử hai nghiệm đó là a và $\dfrac{1}{a}$ $(a\neq 0)$. Dựa vào hệ thức Viète ta tìm được giá trị của tham số b.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm: $x^4+mx^3+x^2+mx+1=0$.

2. Giải phương trình ẩn x: $4x^4-11x^2+9x+m=0$, biết rằng tồn tại 2 nghiệm x_1,x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1+x_2=-1,\ x_1>x_2$.

3. Cho biết $a^2+b^2=\dfrac{16}{9}$, hãy giải phương trình ẩn x: $x^4+ax^3+bx^2+2ax+4=0$.

4. Cho phương trình ẩn x: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ thỏa mãn điều kiện $x_4-x_3=x_3-x_2=x_2-x_1$.

5. Cho phương trình ẩn x: $ax^3-x^2+bx-1=0\ (a\neq 0)$ có ba nghiệm thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{b}{a^2}(1-2ab)$.

6. Tìm $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình ẩn x:

$$x^3+(m+1)x^2-(2m-1)x-\left(2m^2+m+4\right)=0$$

có nghiệm nguyên.

7. Cho $\sqrt{n}$ là nghiệm của phương trình ẩn x: $x^3+ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$, n là số tự nhiên không chính phương. Tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

8. Tìm m để mọi nghiệm của phương trình ẩn x: $x^3-2mx^2+(m^2+1)x-m=0$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.

9. Chứng minh nếu phương trình ẩn x: $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1x_2\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$.

10. Giải phương trình sau với n là số nguyên dương đã cho:

$$\left(16x^{4n}+1\right)\left(y^{4n}+1\right)\left(z^{4n}+1\right)=32x^{2n}y^{2n}z^{2n}.$$

11. Cho phương trình ẩn x:

$$x^4+2x^2+2ax+(a+1)^2=0\ (1).$$

Tìm giá trị của a để nghiệm của phương trình đó:

a) Đạt giá trị nhỏ nhất; b) Đạt giá trị lớn nhất

12. Cho phương trình ẩn x:

$$x^3+ax^2+bx+1=0,\ a,b\in\mathbb{Q}.$$

a) Tìm a, b biết phương trình đã cho có nghiệm $x=2+\sqrt{5}$.

b) Với a, b tìm được ở câu a), gọi x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm của phương trình, với mọi $n\in\mathbb{N}$, đặt $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$. Tính S_1,S_2,S_3 và chứng minh $S_n\in\mathbb{Z}$.

c) Tìm số dư trong phép chia S_{2022} cho 4.

13. Cho phương trình ẩn x:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0\ \ (1),$$

trong đó hệ số $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ chỉ nhận một trong ba giá trị: 0, hoặc 1, hoặc – 1 và $a_0\neq 0$. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $|x_0|<2$.

MỘT BỔ ĐỀ SỐ HỌC HAY VÀ ỨNG DỤNG

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài viết này đề cập đến một tính chất hay và đẹp đẽ của số học cùng với ứng dụng của nó trong việc giải các bài toán chia hết cấp trung học cơ sở. Nội dung của nó được phát biểu dưới dạng bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho a là số nguyên, p là số nguyên dương và h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn* $a^h \equiv 1 \pmod p$. *Khi đó nếu n là số nguyên dương thỏa mãn* $a^n \equiv 1 \pmod p$ *thì n chia hết cho h.*

Chứng minh. Ta biểu diễn

$$n = kh + r,\ 0 \le r < h.$$

Khi đó $a^n = a^{kh+r} = \left(a^h\right)^k.a^r \equiv a^r \pmod p$

$\Rightarrow a^r \equiv 1 \pmod p$ (*).

Nếu $r > 0$ thì từ (*) dẫn đến mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của *h*. Vậy $r = 0$, tức là *n* chia hết cho *h*.

Nhận xét. Rõ ràng chiều ngược lại là hiển nhiên, tức là nếu $n \vdots h$ thì ta có $a^n \equiv 1 \pmod p$.

Sau đây là một số ví dụ áp dụng bổ đề trên.

Thí dụ 1. *Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1 thỏa mãn* $3^n - 1 \vdots n$. *Chứng minh rằng n chẵn.*

Phân tích. Để chứng minh một số *n* là chẵn ta chỉ cần chứng minh ước nguyên tố *p* nhỏ nhất của *n* là 2. Khi đưa thêm số nguyên tố *p* vào đây coi như ta có thêm một quan hệ đồng dư $3^n \equiv 1 \pmod p$, cùng với việc áp dụng bổ đề và kết hợp thêm định lý Fermat nhỏ ta sẽ có thêm nhiều suy luận cho *p* và *n*. Cụ thể lời giải bài toán như sau:

Gọi *p* là ước nguyên tố nhỏ nhất của *n*. Ta có $3^n \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p \ne 3$. Gọi *h* là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $3^h \equiv 1 \pmod p$ (1).

Theo định lý Fermat nhỏ ta được $3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Do đó theo bổ đề ta được $n \vdots h$ và $p-1 \vdots h$.

Nếu $h > 1$ thì gọi *q* là ước nguyên tố của *h*, suy ra $h \ge q$ và $n \vdots q$. Mà $p - 1 \ge h \Rightarrow p > h \ge q$, mâu thuẫn với *p* là ước nguyên tố nhỏ nhất của *n*. Vậy $h = 1$, từ đó theo (1) ta được $p = 2$. Do đó *n* chẵn (đpcm).

Chú ý. Khi áp dụng bổ đề, để có sự tồn tại của *h* nhỏ nhất thỏa mãn $a^h \equiv 1 \pmod p$ thì trước đó ta phải chỉ ra tồn tại *n* sao cho $a^n \equiv 1 \pmod p$. Ngoài ra khi áp dụng bổ đề trên ta cũng thường sử dụng thêm định lý Fermat nhỏ để tạo thêm một quan hệ đồng dư.

Thí dụ 2. *Cho p là số nguyên tố. Gọi q là ước nguyên tố bất kì của* $2^p - 1$. *Chứng minh rằng* $q - 1$ *chia hết cho p.*

Lời giải. Gọi *h* là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $2^h \equiv 1 \pmod q$, theo bổ đề thì $p \vdots h$. Dễ thấy $h \ne 1$ suy ra $h = p$. Theo định lý Fermat nhỏ ta có $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q \Rightarrow q - 1 \vdots h$. Vậy $q - 1 \vdots p$ (đpcm).

Nhận xét. Từ kết quả bài toán ta suy ra mỗi ước nguyên tố của $2^p - 1$ đều lớn hơn p.

Bài toán tiếp theo là một tổng quát của Thí dụ 2.

Thí dụ 3. *Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên với* $1 < a \le p-1$. *Đặt* $A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k$. *Gọi q là một ước nguyên tố bất kì của A. Chứng minh rằng q − 1 chia hết cho p.*

Lời giải. Ta có $A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k = \frac{a^p - 1}{a-1}$, suy ra $a^p \equiv 1 \pmod{q}$ và $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $a^h \equiv 1 \pmod{q}$, theo bổ đề thì $p \vdots h$ và $q-1 \vdots h$.

Nếu $h = 1$ thì $a \equiv 1 \pmod{q}$, khi đó $A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k \equiv p \pmod{q}$, suy ra $p \vdots q \Rightarrow p = q$.

Khi đó $a-1 \vdots p$, mâu thuẫn với $1 < a \le p-1$. Vậy $h = p$ và ta có đpcm.

Thí dụ 4. *Cho a là số tự nhiên, n là số nguyên lớn hơn 1 thỏa mãn* $a^n + 1 \vdots n^2$.

a) *Chứng minh rằng n lẻ.*

b) *Chứng minh rằng* $a+1$ *không là lũy thừa của 2.*

Lời giải. a) Nếu n chẵn thì a^n là số chính phương, suy ra:

$$a^n \equiv 0,1 \pmod{4} \Rightarrow a^n + 1 \equiv 1,2 \pmod{4}.$$

Mặt khác $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$, từ đó dẫn đến điều mâu thuẫn.

b) Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, vì n lẻ nên p lẻ. Ta có

$$a^n \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow (-a)^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $(-a)^h \equiv 1 \pmod{p}$. Ta có ngay $n \vdots h$ và $p-1 \vdots h$.

Tương tự như trên ta được $h = 1$. Suy ra $a+1 \vdots p$. Vậy $a+1$ có ước nguyên tố lẻ, tức là $a+1$ không thể là lũy thừa của 2 (đpcm).

Thí dụ 5. *Cho* a, b *là hai số tự nhiên sao cho* $a+b$ *không có ước nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng với mọi số n lẻ lớn hơn 1 thì* $a^n + b^n$ *không chia hết cho* n.

Lời giải. Giả sử tồn tại n lẻ, $n > 1$ thỏa mãn $a^n + b^n \vdots n$.

Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Khi đó p lẻ và $a^n \equiv -b^n \pmod{p}$, suy ra $a^n \equiv (-b)^n \pmod{p}$ (1).

Nếu $a \vdots p$ thì $b \vdots p$, suy ra $a+b \vdots p$, trái giả thiết, do đó $(a,p) = (b,p) = 1$.

Theo định lý Fermat nhỏ ta được:

$$a^{p-1} \equiv (-b)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^h \equiv (-b)^h \pmod{p}$. Khi đó dễ thấy $n \vdots h$ và $p-1 \vdots h$. Từ đó suy ra $h < p$, kết hợp với p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n ta được $h = 1$. Do đó $a+b \vdots p$, mâu thuẫn.

Thí dụ 6. (AIME 2001). *Có bao nhiêu số nguyên dương n là bội của 1001 có thể biểu diễn dưới dạng* $10^j - 10^i$; $0 \le i < j \le 99$.

Lời giải. Ta có $n = 10^j - 10^i = 10^i(10^{j-i} - 1)$ và 1001=7.11.13 là số nguyên tố cùng nhau với 10^i. Vậy (i, j) thoả mãn

$$10^{j-i} \vdots 1001 \Leftrightarrow 10^{j-i} \equiv 1 \pmod{1001}.$$

Ta có:

$$10^3 \equiv -1 \pmod{1001} \Rightarrow 10^6 \equiv 1 \pmod{1001}.$$

Cũng dễ thấy $h=6$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $10^h \equiv 1 \pmod{1001}$, từ đó $j-i \vdots 6$.

Vậy số các số n cần tìm thực bằng số các bộ (i,j) thoả mãn phương trình $j-i=6m$ (1) với $0 \le i < j \le 99; m \in \mathbb{N}^*$. Ta thấy ngay $1 \le m \le 16$ và với mỗi $m=1,2,3,...,16$ sẽ có $100-6m$ giá trị của i (và j). Vậy số nghiệm của phương trình (1) là $94+88+82+...+4=784$.

Do đó có 784 số n thoả mãn đề bài.

Thí dụ 7. *Cho p là số nguyên tố lẻ và q,r là những số nguyên tố sao cho $q^r+1 \vdots p$. Chứng minh rằng hoặc $p-1 \vdots 2r$ hoặc $q^2-1 \vdots p$.*

Lời giải. Từ $q^r+1 \vdots p$ suy ra $q^r \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod p$ và $q^{2r} \equiv 1 \pmod p$. Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $q^h \equiv 1 \pmod p$. Khi đó $2r \vdots h$ nhưng $r \not\vdots h$.

Do r nguyên tố nên chỉ có thể xảy ra khi $h=2$ hoặc $h=2r$.

Nếu $h=2r$ thì từ $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ suy ra $p-1 \vdots 2r$.

Nếu $h=2$ thì $q^2 \equiv 1 \pmod p$ nên $q^2-1 \vdots p$ (đpcm).

Thí dụ 8. *Cho a,n là các số nguyên dương, $a>1$ và p là một ước nguyên tố lẻ của $a^{2^n}+1$. Chứng minh rằng $(p-1) \vdots 2^{n+1}$.*

Lời giải. Từ $a^{2^n} \equiv -1 \pmod p$, ta có $a^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$. Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $a^h \equiv 1 \pmod p$ thì $2^{n+1} \vdots h$. Nhưng $a^{2^n} \equiv -1 \pmod p$ nên suy ra $h=2^{n+1}$.

Rõ ràng $(a,p)=1$ nên $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, suy ra $(p-1) \vdots 2^{n+1}$ (đpcm).

Nhận xét. Trong trường hợp đặc biệt $a=2$ thì $F_n=2^{2^n}+1$ là số Fermat thứ n. Như vậy nếu p là một ước nguyên tố của số Fermat F_n thì $(p-1) \vdots 2^{n+1}$.

Bài toán trên có thể tổng quát như sau: *Cho hai số a,b nguyên, nguyên tố cùng nhau. Gọi p là một ước nguyên tố lẻ của $a^{2^n}+b^{2^n}$ (n là số nguyên dương nào đó). Chứng minh rằng $(p-1) \vdots 2^{n+1}$.*

BÀI TẬP

1. Cho n nguyên với $n \ge 2$. Chứng minh rằng 2^n-1 không chia hết cho n.

2. Cho n nguyên, $n>1$ thỏa mãn $3^n-1 \vdots n^3$. Chứng minh rằng n chẵn và n không chia hết cho 4.

3 (*China 2009*). Tìm tất cả các số nguyên tố p,q sao cho $5^p+5^q \vdots pq$.

4. Tìm tất cả các số nguyên tố p,q sao cho $(5^p-2^p)(5^q-2^q) \vdots pq$.

5 (*USA TST 2003*). Tìm tất cả các bộ số nguyên tố (p,q,r) sao cho $q^r+1 \vdots p$, $r^p+1 \vdots q$ và $p^q+1 \vdots r$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI

Năm học 2019 - 2020

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán

Bài I. 1) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}$. Phương trình trở thành: $t^2-(x+5)t+2x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x+3 \end{array}\right.$.

Giải PT $\sqrt{x^2+x+2}=2$ tìm được $x=1; x=-2$.

Giải PT $\sqrt{x^2+x+2}=x+3$ tìm được $x=-\frac{7}{5}$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{1;-2;-\frac{7}{5}\right\}$.

2) Kí hiệu lại HPT $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 & (1) \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 & (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow (y-x)^2=(3x-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=3x-1 \\ x-y=3x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4x-1 \\ y=-2x+1 \end{array}\right.$

TH1: $y=4x-1$, thế vào PT(2):

$$(4x-1)^2=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-8x+1=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-8x^2+7x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Giải ra được ba nghiệm: $(0;-1);(1;3);(7;27)$.

TH2: $y=-2x+1$, thế vào PT(2):

$$(-2x+1)^2=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=x^3+8x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Giải ra được ba nghiệm: $(0;1);(-1;3);(-3;7)$.

Vậy HPT có tập nghiệm là:

$S=\{(0;-1);(0;1);(1;3);(-1;3);(7;27);(-3;7)\}$.

Bài II. 1) $p^4+2019q^4=p^4-q^4+2020q^4$;

$p^4-q^4=(p^2+q^2)(p^2-q^2)$

$=(p^2+q^2)(p-q)(p+q)$.

Vì p,q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên p,q là các số lẻ $\Rightarrow (p-q)(p+q)\vdots 4$ (1).

Vì p,q là hai số nguyên tố lớn hơn 5 nên p,q là các số không chia hết cho 5.

Từ đó $p^2\equiv 1;\ 4 \pmod 5$ và $q^2\equiv 1;\ 4 \pmod 5$

$\Rightarrow p^4\equiv 1 \pmod 5$ và $q^4\equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow p^4-q^4\vdots 5$ (2).

Vì 4 và 5 nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra $p^4+2019q^4\vdots 20$.

2) a) Ta có: $bc=\frac{1}{4}(c+b)^2-\frac{1}{4}(c-b)^2$

và $ad=\frac{1}{4}(a+d)^2-\frac{1}{4}(d-a)^2$.

Mặt khác: $\frac{1}{4}(c-b)^2<\frac{1}{4}(d-a)^2$ và $ad=bc$

suy ra: $\frac{1}{4}(a+d)^2>\frac{1}{4}(b+c)^2 \Rightarrow a+d>b+c$.

b) Ta có: $0<\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$

$\Rightarrow d+a\le 1+2\sqrt{ad}=1+2\sqrt{bc}\le 1+b+c$.

Có $a+d>b+c$ suy ra $b+c<a+d\le b+c+1$, mà a,b,c,d là các số nguyên nên $a+d=b+c+1$, do đó $b=c$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1$.

Có $\sqrt{d}-\sqrt{a}=1 \Rightarrow d=a+1+2\sqrt{a}$ mà a,d là các số nguyên nên a là số chính phương.

Bài III. 1) Ta có:

$$\frac{1}{yz+y+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}+y+1}=\frac{x}{xy+x+1}$$

$$\frac{1}{zx+z+1}=\frac{xyz}{zx+z+xyz}=\frac{xy}{xy+x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1.$$

2) Ta có:

$$\frac{P^2}{3} \le \frac{1}{2x^2+y^2+3} + \frac{1}{2y^2+z^2+3} + \frac{1}{2z^2+x^2+3};$$

$$2x^2+y^2+3 = x^2+y^2+x^2+1+2 \ge 2xy+2x+2$$

$$\Rightarrow 2x^2+y^2+3 \ge 2(xy+x+1).$$

Tương tự: $2y^2+z^2+3 \ge 2(yz+y+1)$;

$2z^2+x^2+3 \ge 2(zx+z+1)$. Suy ra:

$$\frac{P^2}{3} \le \frac{1}{2x^2+y^2+3} + \frac{1}{2y^2+z^2+3} + \frac{1}{2z^2+x^2+3}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}\right) \ (*).$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow xyz \ge 1.$$

Vì $xyz \ge 1$ và $x > 0$ nên $yz \ge \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{yz+y+1} \le \frac{1}{\frac{1}{x}+y+1} \Rightarrow \frac{1}{yz+y+1} \le \frac{x}{xy+x+1} \ (1)$$

Ta có: $\frac{1}{zx+z+1} \le \frac{xyz}{zx+z+xyz}$

$\Leftrightarrow (xyz-1)(xz+z) \ge 0$ (luôn đúng).

Suy ra: $\frac{1}{zx+z+1} \le \frac{xy}{xy+x+1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}$$

$$\le \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xy+x+1} = 1 \ (**)$$

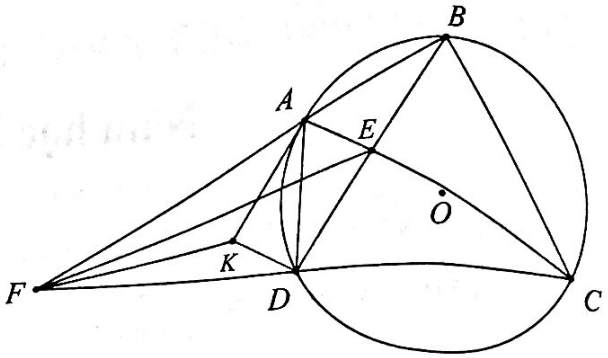
Từ (*) và (**) suy ra: $P^2 \le \frac{3}{2} \Rightarrow P \le \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bài IV. 1) Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên

$\Delta FAD \backsim \Delta FCB$, $\Delta EAD \backsim \Delta EBC$.

$$\Rightarrow \frac{DK}{EB} = \frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BC} = \frac{FD}{FB}.$$

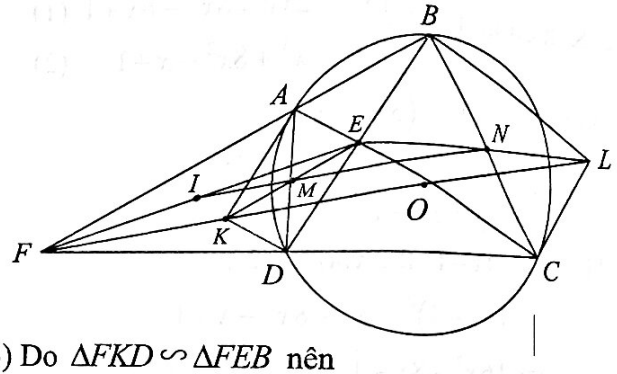
Do $DK \parallel EA$ nên $\widehat{KDF} = \widehat{ACF} = \widehat{DBA} = \widehat{EBF}$ suy ra $\Delta FKD \backsim \Delta FEB$ (c.g.c).



2) Gọi I là trung điểm EF. Gọi L là điểm đối xứng với E qua N. Chứng minh tương tự ý 1), ta có: $\Delta FLC \backsim \Delta FEA \Rightarrow \widehat{CFL} = \widehat{CFK}$ $(= \widehat{BFE})$

$\Rightarrow F, K, L$ thẳng hàng $\Rightarrow I, M, N$ thẳng hàng

$\Rightarrow MN$ đi qua trung điểm của đoạn EF.



3) Do $\Delta FKD \backsim \Delta FEB$ nên

$$\frac{FK}{FE} = \frac{KD}{EB} = \frac{AE}{EB} \ (1).$$

Chứng minh tương tự:

$\Delta FLC \backsim \Delta FEA$ nên $\frac{FE}{FL} = \frac{AE}{CL} = \frac{AE}{EB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{FK}{FE} = \frac{FE}{FL}$.

Từ đó $\Delta FKE \backsim \Delta FEL$ và dẫn tới

$$\widehat{FEK} = \widehat{FLE} = \widehat{MNE}.$$

Suy ra EF tiếp xúc với đường tròn (MEN).

Bài V. 1) Có thể có nhiều tập A thỏa mãn điều kiện đề bài.

Xét tập A gồm 40 phần tử còn lại của S sau khi loại đi 10 phần tử: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 của S.

Ta sẽ chứng minh tập A ở trên thỏa mãn đề bài.

Giả sử có bộ số nguyên $(x; y; z)$ với $x; y; z \in A$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$.

Vì $x; y; z \in A$ nên $x; y; z$ đều không chia hết cho 5 và $x^2; y^2; z^2 \equiv 1; 4 \pmod 5$ (*).

Mặt khác $x^2 + y^2 = z^2$ nên

$$z^2 \equiv 1+1; 1+4; 4+4; 4+1 \pmod 5,$$

mâu thuẫn với (*) nên điều giả sử là sai.

Do đó tập A với 40 phần tử vừa tìm là thỏa mãn đề bài.

2) Có ít nhất một tập A có 41 phần tử thỏa mãn. Thật vậy, khi bổ sung 5 phần tử 10, 15, 25, 40 và 45 vào tập A, ta thấy có tất cả 9 bộ số tạo thành bộ độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông là: $(6; 8; 10)$, $(10; 24; 26)$, $(9;12;15)$, $(8;15;17)$, $(15;36;39)$, $(7;24;25)$, $(24;32;40)$, $(9; 40; 41)$ và $(27;36;45)$.

Như vậy ta chỉ cần loại đi 4 phần tử 8, 9, 24, 36 thì tập A có 41 phần tử còn lại thỏa mãn đề bài.

Chú ý. Các bộ số Pythagoras (x,y,z) với $x,y,z \le 50$:

+ Ứng với số 5: $(3;4;5),(5;12;13)$.

+ Ứng với số 10: $(6;8;10),(10;24;26)$.

+ Ứng với số 15: $(9;12;15),(8;15;17),(15;36;39),(15;20;25)$.

+ Ứng với số 20: $(15;20;25),(12;16;20);(20;21;29)$.

+ Ứng với số 25: $(15;20;25),(7;24;25)$.

+ Ứng với số 30: $(18;24;30),(30;40;50),(16;30;34)$.

+ Ứng với số 35: $(21;28;35),(12;35;37)$.

+ Ứng với số 40: $(30;40;50),(24;32;40),(9;40;41)$.

+ Ứng với số 45: $(27;36;45)$.

+ Ứng với số 50: $(30;40;50),(14;48;50)$.

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Tin

Bài I. 1) Đặt $t = \sqrt{x^2+5}$. PT trở thành:

$$t^2 - (x+3)t + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = x+1 \end{array}\right..$$

PT $\sqrt{x^2+5} = 2$ vô nghiệm.

Giải PT: $\sqrt{x^2+5} = x+1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S = \{2\}$.

2) Kí hiệu lại HPT $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 1 & (1) \\ (x+y)(x^2+y^2) = 1 & (2) \end{cases}$.

Từ (2) ta có $x \ne -y$. Chia (1) cho (2) được:

$$\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = 1.$$

$\Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $y = 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy HPT có tập nghiệm là $S = \{(0;1);(1;0)\}$.

Bài II. 1) Ta có: $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 2xy + 6xy + 3y^2 + 2x + y = -2$

$\Leftrightarrow 2x(2x+y) + 3y(2x+y) + (2x+y) = -2$

$\Leftrightarrow (2x+y)(2x+3y+1) = -2.$

TH1: $\begin{cases} 2x+y = 1 \\ 2x+3y+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -2 \end{cases}$ (loại).

TH2: $\begin{cases} 2x+y = -1 \\ 2x+3y+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

TH3: $\begin{cases} 2x+y = -2 \\ 2x+3y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ (loại).

TH4: $\begin{cases} 2x+y = 2 \\ 2x+3y+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là:

$(-1;1)$ và $(2;-2)$.

2) $3a^2 + a = 4b^2 - b \Leftrightarrow 3a^2 - 3b^2 + a + b = b^2$

$\Leftrightarrow (a+b)(3a-3b+1) = b^2$.

Gọi ƯCLN$(a+b; 3a-3b+1) = d$, suy ra:

$$\begin{cases} a+b \vdots d \\ 3a-3b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d.$$

Mà $a+b \vdots d \Rightarrow a \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a+b$ và $3a-3b+1$ nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow a+b$ là số chính phương.

Bài III. 1) Ta có:

$$\frac{1}{yz+y+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}+y+1}=\frac{x}{xy+x+1};$$

$$\frac{1}{zx+z+1}=\frac{xyz}{zx+z+xyz}=\frac{xy}{xy+x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1.$$

2) Ta có: $\frac{P^2}{3}\le\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$ (*).

Vì $xyz\ge 1$ và $x>0$ nên $yz\ge\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow\frac{1}{yz+y+1}\le\frac{1}{\frac{1}{x}+y+1}\Rightarrow\frac{1}{yz+y+1}\le\frac{x}{xy+x+1}\ (1).$$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{zx+z+1}\le\frac{xyz}{zx+z+xyz}\Leftrightarrow(xyz-1)(xz+z)\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{zx+z+1}\le\frac{xy}{x+1+xy}\ (2).$$

Từ (1), (2) ta có:

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}$$

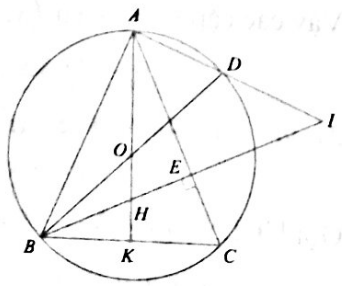
$$\le\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1\ (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra: $P^2\le 3\Rightarrow P\le\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy max $P=\sqrt{3}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Bài IV. 1) Ta có:



$\widehat{AHI}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Mặt khác:

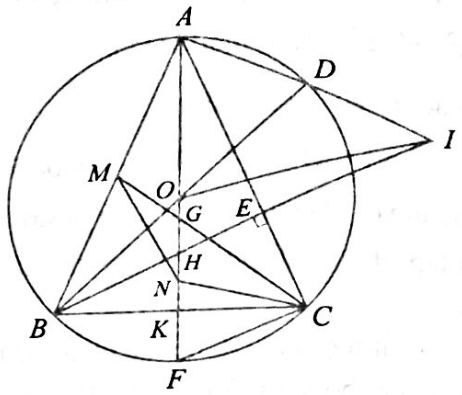
$\widehat{ADO}=\widehat{ACB}$

$\Rightarrow\widehat{AHI}=\widehat{ADO}$

$\Rightarrow\Delta BOH\backsim\Delta BID\ (g.g)\Rightarrow\frac{BO}{BI}=\frac{BH}{BD}$

$\Rightarrow BH.BI=BO.BD=2R^2$.

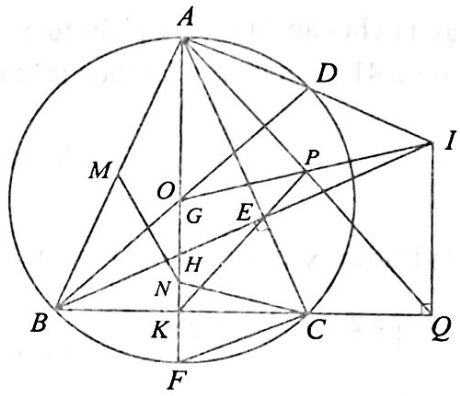
2)



AH cắt CM tại G. Kẻ đường kính AF. Gọi K là trung điểm của $BC\Rightarrow AC^2=AK.AF\Rightarrow$ $AM.AC=AG.AN\Rightarrow\Delta AMN\backsim\Delta AGC$ (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{ANM}=\widehat{ACG}\Rightarrow$ tứ giác $AMNC$ nội tiếp.

3)



Gọi Q là hình chiếu vuông góc của I trên BC $\Rightarrow IQ//AO$ (1). Tứ giác $ABQI$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{IAQ}=\widehat{IBQ}\Rightarrow\widehat{BAQ}=\widehat{ABQ}\Rightarrow\Delta ABQ$ cân tại $Q\Rightarrow QO//AI$ (cùng vuông góc AB) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AOQI$ là hình bình hành.

Gọi P là trung điểm chung của AQ và OI. Ta có: $\widehat{AKP}=\widehat{KAP}$ (vì $AP=KP$) (3);

$\widehat{AKE}=\widehat{ACH}$ (vì tứ giác $CEHK$ nội tiếp)

$=\widehat{ABH}=\widehat{KAP}$ (vì $\widehat{BAQ}=\widehat{ABQ};\widehat{BAO}=\widehat{CBE}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AKE}=\widehat{AKP}$, do đó K,E,P thẳng hàng. Vậy đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI. ☞

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY, TỈNH NINH BÌNH, NĂM HỌC 2019 - 2020

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán.

Thời gian làm bài: 150 phút.

Câu 1 (*2 điểm*). 1) Với $x>0$, xét hai biểu thức

$$A=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ và } B=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+9}{x+3\sqrt{x}}.$$

Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B}>\frac{5}{3}$.

2) Rút gọn biểu thức

$$C=\frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}}-1}{3-\sqrt{2}}.$$

Câu 2 (*2 điểm*). 1) Giải phương trình

$$x^2+7x+14=3\sqrt{(2x+5)(x^2+3x+4)}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2+2y+1}+\dfrac{y^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{8}{9}\\ 5xy-4x-4y=4\end{cases}.$$

Câu 3 (*2 điểm*). 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-xy+y^2=x+y+3$.

2) Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4 (*3 điểm*). Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC cố định, không đi qua tâm O. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H, gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh $AH=2.OI$.

2) Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn thì H di chuyển trên một cung tròn cố định, hãy chỉ ra tâm và bán kính của cung tròn đó.

3) Khi $BC=R\sqrt{3}$, chứng minh

$$AM.NH+HM.NA=OI.BC.$$

Câu 5 (*1 điểm*). 1) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số nguyên, $n\ge 2$. Biết $P(1).P(2)=2019$, chứng minh rằng phương trình $P(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

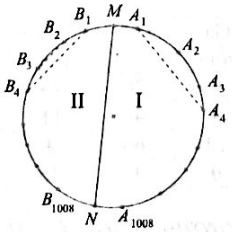
2) Trong hình tròn có diện tích bằng $1009cm^2$ lấy 2019 điểm phân biệt bất kì sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 2019 điểm đó luôn tìm được ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $1cm^2$.

NGUYỄN TRƯỜNG SƠN

(*GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình*) **Giới thiệu**

****

☞ **Bài V.** *An* đi trước luôn thắng với chiến thuật như sau:

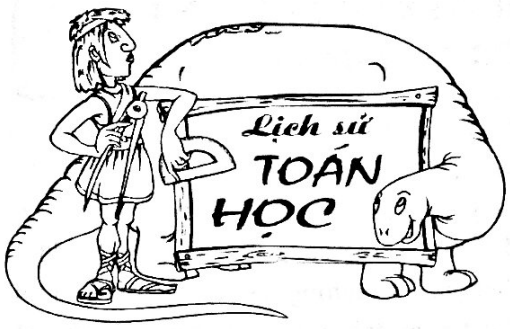


An đi trước, nối dây cung MN sao cho dây cung MN chia 2018 điểm trên đường tròn thành hai phần (phần I, phần II) mỗi phần có 1008 điểm. *An* quy ước đặt tên và đánh thứ tự các điểm còn lại như hình vẽ.

Đến lượt *Bình* nối dây cung bất kì ở một trong hai phần trên (vì dây cung không được cắt dây cung MN), giả sử *Bình* nối dây cung B_iB_j (hoặc A_iA_j). Đến lượt *An* sẽ nối dây A_iA_j (hoặc B_iB_j). Khi đó *Bình* nối được một dây thỏa mãn thì *An* sẽ nối được dây tương ứng nên *An* không vẽ được khi và chỉ khi *Bình* không vẽ được.

Điều này chứng tỏ *An* không thua. Vì số điểm là hữu hạn nên thuật toán dừng, tức là sau hữu hạn lần chơi thì *Bình* không vẽ được dây nào thỏa mãn điều kiện đề bài nên *Bình* là người thua cuộc.

DƯƠNG TÚ (*Hà Nội*) **Giới thiệu**



VỀ XUẤT XỨ VÀ CÁC PHIÊN BẢN CỦA BÀI TOÁN TRĂM TRÂU TRĂM CỎ

ĐOÀN THỊ LỆ (*National Tsing-Hua University, Taiwan*)
TẠ DUY PHƯỢNG (*Viện Toán học*)
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN ÁNH TUYẾT (*Thạc sĩ Hán Nôm*)

1. Dẫn nhập

Bài toán "*Trăm trâu trăm cỏ, trâu đứng ăn năm, trâu nằm ăn ba, Lụ khụ trâu già, Ba con một bó. Hỏi bao nhiêu trâu đứng, trâu nằm và trâu già?*" là bài toán khá quen thuộc và thường được ghi chú trong các sách là *Bài toán cổ* hay *Toán dân gian*. Cũng còn có một số phiên bản khác, thí dụ: "..., *Tung tăng nghé hoa, ba con một bó*, ...", "..., *Còn lại nghé hoa, ba con một bó*, ...", hay (xem [1], trang 89): "*Một trăm con trâu, Một trăm bó cỏ, Trâu đứng ăn năm, Trâu nằm ăn ba, Ba con trâu già, Chỉ ăn một bó. Tính xem trong đó, Mỗi loại mấy trâu?*"

Sự đa dạng trong phát biểu bài toán này gợi ý các tác giả đi tìm hiểu xuất xứ và các phiên bản của bài toán *Trăm trâu trăm cỏ*.

2. Bài toán *Trăm trâu trăm cỏ* trên thế giới

Gốc của bài toán *Trăm trâu trăm cỏ* được các nhà nghiên cứu lịch sử toán gọi là bài toán *Một trăm con gà*, được tìm thấy trong 張丘建算經 (*Trương Khâu Kiến toán kinh* - Zhang Qiujian suanjing - Mathematical Treatise of Zhang Qiujian) của nhà toán học Trung Quốc 張丘建 (Trương Khâu Kiến - Zhang Qiujian) được viết vào khoảng cuối thế kỉ V, xem [4].

Bài toán 100 *con gà* được phát biểu như sau.

Bài 1 (Trương Khâu Kiến Toán kinh, cuối thế kỉ V, Bài toán 38, Quyển 3, xem [8], trang 397 và [4], trang 308). *Có* 100 *quan mua được* 100 *con gà. Gà trống giá* 5 *quan, gà mái giá* 3 *quan và ba con gà con giá* 1 *quan.*

Hỏi mua được bao nhiêu gà các loại?

***Cách giải* 1** (*Đưa về hệ hai phương trình hai ẩn phụ thuộc ẩn thứ ba*). Dưới ngôn ngữ hiện đại, đây là dạng toán giải *hệ phương trình nghiệm nguyên*. Gọi x, y, z tương ứng là số gà trống, gà mái và gà con (x, y, z là các số nguyên, không âm). Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \end{cases}.$$

Biểu diễn y và z theo x ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=100-x \\ 3y+\dfrac{z}{3}=100-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=100-x \\ 9y+z=300-15x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=25-\dfrac{7}{4}x=25-x-\dfrac{3}{4}x \\ z=75+\dfrac{3}{4}x \end{cases}.$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên

$$x=4t, y=25-7t, z=75+3t, t\in\mathbb{Z}.$$

Vì $0\le x, y, z\le 100$ nên đáp số được cho trong bảng dưới đây.

Gà trống	Giá	Gà mái	Giá	Gà con	Giá	Tổng gà	Tổng giá
4	20	**18**	54	**78**	26	**100**	100
8	40	**11**	33	**81**	27	**100**	100
12	60	**4**	12	**84**	28	**100**	100
0	0	**25**	75	**75**	25	**100**	100

Trương Khâu Kiến đã tìm ra tất cả các nghiệm, trừ nghiệm cuối cùng, vì Ông quan niệm *gà phải có thật* (nghiệm phải là số nguyên dương).

***Cách giải* 2** (*Phương pháp thế*).

Rút $z=100-x-y$ từ phương trình đầu và thay vào phương trình sau, ta được $7x+4y=100$.

Do đó $y = 25 - \frac{7}{4}x$. Vì y và x nguyên nên x phải là bội của 4 và $x = 4t, y = 25 - 7t$, $z = 100 - (25 - 7t) - 4t = 75 + 3t$ với $t = 0,1,2,3$.

Đáp số được cho trong bảng trên.

Bài toán 100 *con gà* dẫn đến giải hệ phương trình vô định (tìm nghiệm nguyên của phương trình với các hệ số nguyên) dạng:

$$\begin{cases} x + y + z = N \\ ax + by + \frac{z}{c} = N \end{cases}$$

với a,b,c và N là các số nguyên dương. Bài toán 100 *con gà* có rất nhiều phiên bản trong các sách toán khác trên thế giới (Trung Quốc, Ấn Độ, Ai Cập, châu Âu,..., xem [3]-[8]), với *gà trống, gà mái, gà con* được thay bằng *các loại chim, các loại động vật* hoặc *người*. Bài viết liệt kê một số bài toán dạng 100 *con gà* trong các sách toán cổ. Vì hệ phương trình vô định đã có quy tắc giải (xem Bài 1, hay [1], [2]), nên dưới đây không trình bày lời giải, mà chỉ có đáp số.

Bài 2 (Chân Loan-Zhen Luan, 甄鸞, 535 – 566, Trung Quốc, [8]). $a = 5, b = 4, c = 4, N = 100$.

Giải. Ta có $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 4y + \frac{z}{4} = 100 \end{cases}$.

Đáp số: $(x,y,z) = (0,20,80)$; $(15,1,84)$.

Zhen Luan chỉ cho một đáp số: $(15,1,84)$.

Bài 3 (Zhen Luan, [8]).

$$a = 4, b = 3, c = 3, N = 100.$$

Giải. Ta có $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 4x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \end{cases}$.

Đáp số: $(0, 25, 75)$; $(8, 14, 78)$; $(16, 3, 81)$.

Zhen Luan thiếu đáp số: $x = 0, y = 25, z = 75$.

Alcuin (khoảng 735-804), người Pháp gốc Anh, được các nhà viết lịch sử toán coi là nhà toán học châu Âu đầu tiên viết về bài toán 100 *con gà* (trong cuốn sách *Propositiones Alcuini Doctoris Caroli Magni Imeratoris Ad Acuendos Juvenes* - Propositions for Sharpening Youths).

Bài 4 (Alcuin, [3], Bài số 5). *Một người mua nói: Tôi muốn mua 100 con lợn với 100 denarius* (tiền cổ La Mã) *sao cho lợn đực với giá 10 denarius, lợn cái giá 5 denarius và hai con lợn con giá 1 denarius. Hỏi mua được bao nhiêu lợn đực, lợn cái và lợn con sao cho không thừa không thiếu cả lợn lẫn tiền?*

Giải. Gọi x, y, z là số lợn đực, lợn cái và lợn con. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 5y + \frac{z}{2} = 100 \end{cases}.$$

Đáp số: $x = 1, y = 9, z = 90$.

Bài 5a (Alcuin, [3], Bài số 33). *Một ông chủ chia 30 đấu ngũ cốc cho 30 đầy tớ như sau: Đàn ông được 3 đấu, phụ nữ được 2 đấu và trẻ em được nửa đấu. Hỏi có bao nhiêu đàn ông, phụ nữ và trẻ em?*

Bài 5b (Fibonacci, khoảng 1170-1250, nhà toán học Italia, *Liber Abaci* (in năm 1202)-Book of Calculations-Sách về tính toán, Chương 11 [7], trang 256). *Một người mua 30 con chim, gồm gà gô, bồ câu và chim sẻ. Ông ta mua gà gô với giá 3 denarius, bồ câu với giá 2 dinarius và 2 chim sẻ giá 1 dinarius, tức là 1 chim sẻ giá* $\frac{1}{2}$ *dinarius. Tính xem ông ta mua bao nhiêu chim mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z là số đàn ông, phụ nữ, và trẻ con (tương ứng, số gà gô, bồ câu và chim sẻ). Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + 2y + \frac{z}{2} = 30 \end{cases}.$$

Đáp số: $(0,10,20)$; $(3,5,22)$; $(6,0,24)$.

Alcuin chỉ cho một đáp số $x = 3, y = 5, z = 22$.

Bài 5c (Alcuin, [3], Bài số 34). *Đầu bài như Bài 5a với một sai khác là* $N = 100$.

Giải. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + \dfrac{z}{2} = 100 \end{cases}.$$

Đáp số: $(2, 30, 68); (5, 25, 70); (8, 20, 72); (11, 15, 74); (14, 10, 76); (17, 5, 78); (20, 0, 80)$.

Alcuin chỉ cho một đáp số:

$$x = 11,\ y = 15,\ z = 74.$$

Bài 5d (Alcuin, [3], Bài số 32). *Đầu bài như Bài 5a với một sai khác là* $N = 20$.

Giải. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + \dfrac{z}{2} = 20 \end{cases}.$$

Đáp số: $x = 1, y = 5, z = 14$.

Bài 6a (Alcuin, [3], Bài số 47). *Một giám mục chia 12 ổ bánh mì cho 12 tăng lữ. Ông ta quy định rằng mỗi linh mục được nhận 2 ổ bánh, mỗi trợ tế một nửa ổ, còn mỗi giám sinh* $\frac{1}{4}$ *ổ. Hãy cho biết số linh mục, số trợ tế và số giám sinh.*

Bài 6b (Fibonacci, [7], trang 257). *Một người định dùng 12 denarius mua 12 con chim, gồm gà gô, bồ câu và chim sẻ. Gà gô giá 2 denarius, 2 bồ câu giá 1 dinarius và 4 chim sẻ giá 1 dinarius. Tính xem ông ta mua bao nhiêu chim mỗi loại.*

Giải. Gọi x, y, z là linh mục, trợ tế và giám sinh (gà gô, bồ câu và chim sẻ). Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 12 \end{cases}.$$

Đáp số: $(4, 8, 0)$; $(5, 1, 6)$. *Alcuin* và *Fibonacci* chỉ cho một đáp số $x = 5, y = 1, z = 6$.

Bài 7 (Alcuin, [3], Bài số 38). *Một người muốn mua 100 con vật khác nhau bằng 100 đồng tiền vàng. Ông ấy trả 3 đồng vàng cho một con ngựa, 1 đồng vàng cho một con bò và 1 đồng vàng cho 24 con cừu. Hỏi có bao nhiêu ngựa, bò và cừu?*

Giải. Gọi x, y, z là số ngựa, bò và cừu. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + y + \dfrac{z}{24} = 100 \end{cases}.$$

Đáp số: $(0, 100, 0)$; $(23, 29, 48)$.

Alcuin chỉ cho một đáp số $x = 23, y = 29, z = 48$.

Bài 8a (Alcuin, [3], Bài số 39). *Một người muốn mua 100 con vật bằng 100 đồng tiền. Ông ấy lệnh cho người phục vụ trả 5 đồng cho một con lạc đà, 1 đồng cho một con lừa và 1 đồng cho 20 con cừu. Hỏi có bao nhiêu lạc đà, lừa và cừu?*

Bài 8b (Abū Kāmil, khoảng 850-930, nhà toán học Ai Cập, [5]; [6], trang 199). *Có 100 đồng tiền để mua 100 con vịt, gà và chim sẻ. Vịt giá 5 đồng, một con gà giá 1 đồng và 20 chim sẻ giá 1 đồng. Hỏi bạn mua được bao nhiêu con mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z là lạc đà, lừa và cừu (vịt, gà, chim sẻ). Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + y + \dfrac{z}{20} = 100 \end{cases}.$$

Đáp số (*Abū Kāmil*): $(0, 100, 0)$; $(19, 1, 80)$.

Alcuin chỉ cho một đáp số $x = 19, y = 1, z = 80$.

Các bài toán trên đều dẫn đến giải (tìm nghiệm nguyên) hệ hai phương trình ba ẩn với các hệ số nguyên. Từ đây, bằng phép đưa về hệ hai phương trình bậc nhất hoặc bằng phương pháp thế (xem lời giải Bài 1), ta đưa về giải phương trình bậc nhất hai ẩn (phương trình

Diophantus). Nghiệm phụ thuộc vào một tham số nguyên. Nghiệm của phương trình Diophantus bậc nhất n ẩn sẽ chứa $n-1$ tham số tự do (xem [2], trang 72). Các ví dụ và bài tập dưới đây là hệ hai phương trình với bốn (năm) ẩn dẫn đến phương trình bậc nhất ba (bốn) ẩn, nghiệm phụ thuộc vào hai (ba) tham số, là những bài trong các sách toán cổ trên thế giới, nhưng còn ít gặp trong sách toán Việt Nam.

Bài 9 (Śrīdharacārya, khoảng 850-950, nhà toán học Ấn Độ). *Có 100 đồng tiền để mua 100 con bồ câu, sếu, thiên nga và công. Chim bồ câu giá 3 rupi cho 5 con, 7 con sếu giá 5 rupi, 9 thiên nga giá 7 rupi và 3 con công giá 9 rupi. Hỏi mua được bao nhiêu con mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z, u là số bồ câu, sếu, thiên nga và công. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+u=100 \\ \frac{3}{5}x+\frac{5}{7}y+\frac{7}{9}z+3u=100 \end{cases}.$$

Thế $x=100-y-z-u$ (1) vào phương trình thứ hai ta được:

$$\frac{3}{5}(100-y-z-u)+\frac{5}{7}y+\frac{7}{9}z+3u=100$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{35}y+\frac{8}{45}z+\frac{12}{5}u=40$$

$$\Leftrightarrow 9y+189u+14z=3150$$

$$\Leftrightarrow y=-21u-z-\frac{5}{9}z+350.$$

Vì y, u, z nguyên nên $z=9k$, k nguyên.

Suy ra $y=350-14k-21u$. Từ phương trình (1) ta có: $x=100-u-y-z$

$$=100-(350-14k-21u)-9k-u$$

$$=5k+20u-250.$$

Vì $0\le x, y, z, u\le 100$ nên

$$\begin{cases} 0\le u\le 100; \quad 0\le z=9k\le 100; \\ 0\le x=5k+20u-250\le 100; \\ 0\le y=350-14k-21u\le 100 \end{cases}$$

Từ đây ta đi đến 26 đáp số:

u	13	14	15	16	13	14	15	16	12
x	10	30	50	70	15	35	55	75	0
y	77	56	35	14	63	42	21	0	70
z	0	0	0	0	9	9	9	9	18
u	13	14	15	12	13	14	12	13	14
x	20	40	60	5	25	45	10	30	50
y	49	28	7	56	35	14	42	21	0
z	18	18	18	27	27	27	36	36	36
u	12	13	11	12	11	12	11	10	
x	15	35	0	20	5	25	10	0	
y	28	7	35	14	21	0	7	0	
z	45	45	54	54	63	63	72	90	

Bài 10 (Fibonacci, [7], trang 257). *Một con gà gô giá 3 denarius, một con chim bồ câu giá 2 denarius, chim cu đất giá $\frac{1}{2}$ denarius và chim sẻ giá $\frac{1}{4}$ denarius. Tôi sẽ dùng 30 denarius để mua 30 con chim. Hỏi bao nhiêu chim mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z, u là số gà gô, bồ câu, chim cu đất và chim sẻ. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+u=30; \\ 3x+2y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}u=30. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+u=30 & (1) \\ 12x+8y+2z+u=120 & (2) \end{cases}.$$

Trừ (2) cho (1) ta được:

$11x+7y+z=90 \Leftrightarrow z=90-11x-7y.$ (3)

Từ điều kiện $0\le x, y, z, u\le 30$ và các phương trình (3), (1) ta được 26 nghiệm cho trong bảng sau:

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	10	11	12	9	10	11	7	8	9
z	20	13	6	16	9	2	19	12	5
u	0	6	12	4	10	16	2	8	14
x	3	3	3	3	4	4	4	5	5
y	5	6	7	8	4	5	6	3	4
z	22	15	8	1	18	11	4	14	7
u	0	6	12	18	4	10	16	8	14
x	5	6	6	6	6	7	7	8	
y	5	0	1	2	3	0	1	0	
z	0	24	17	10	3	13	6	2	
u	20	0	6	12	18	10	16	20	

Fibonacci chỉ tìm ra hai nghiệm:

$$x_1=7,\ y_1=1,\ z_1=6,\ u_1=16;$$
$$x_2=4,\ y_2=6,\ z_2=4,\ u_2=16.$$

Bài 11 (Abū Kāmil, [5]; [6], trang 201). *Dùng 100 đồng tiền để mua 100 con chim gồm bốn loại: ngỗng giá 4 đồng một con, gà giá 1 đồng một con, bồ câu giá 1 đồng hai con và 1 đồng mua được 10 con chim sáo đá. Hỏi mua được bao nhiêu con mỗi loại?*

Giải. Gọi x, y, z, u tương ứng là số ngỗng, gà, bồ câu và chim sáo đá. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x+y+z+u=100 & (1) \\ 4x+y+\dfrac{z}{2}+\dfrac{u}{10}=100 & (2) \end{cases}.$$

Trừ (2) cho (1) ta được $x=\dfrac{z}{6}+\dfrac{3u}{10}$.

TH1: Nếu $z=6k$ thì $x=k+\dfrac{3u}{10}$.

Vậy $u=10n$. Khi ấy $x=k+3n$.

Do $0\le z,u\le 100$ nên $0\le k\le 16$ và $0\le n\le 10$.

TH2: $z=6k+1$ thì $x=k+\dfrac{1}{6}+\dfrac{3u}{10}=k+\dfrac{5+9u}{30}$ không nguyên với mọi u.

TH3: $z=6k+2$ thì

$$x=k+\frac{1}{3}+\frac{3u}{10}=k+\frac{10+9u}{30}$$

không nguyên với mọi u.

TH4: Nếu $z=6k+3$ thì khi $u=10n+5$ thì $x=k+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3u}{10}=k+\dfrac{5+3u}{10}$ nguyên.

TH5: $z=6k+4$ thì

$$x=k+\frac{2}{3}+\frac{3u}{10}=k+\frac{20+9u}{30}$$

không nguyên với mọi u.

TH6: $z=6k+5$ thì

$$x=k+\frac{5}{6}+\frac{3u}{10}=k+\frac{25+9u}{30}$$

không nguyên với mọi u.

Vậy x nguyên chỉ khi $z=6k, u=10n$ hoặc $z=6k+3, u=10n+5$.

Cho k,n là các số nguyên dương thay đổi độc lập, thỏa mãn điều kiện $0\le x,y,z,u\le 100$ ta được tất cả 98 nghiệm.

BÀI TẬP

Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau (xem [6], trang 201-203):

1) $x+y+z=100=3x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{20}z.$

2) $x+y+z=100=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y+2z.$

Đáp số: 6 nghiệm.

3) $x+y+z+t=100=2x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}z+t.$

Đáp số: $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{2}{3}z$, y là bội của 2 và z là bội của 3. Bài toán có 304 nghiệm.

4) $x+y+z+t+u=100=2x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{4}t+u.$

Đáp số: $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{2}{3}z-\dfrac{3}{4}t$, y là bội của 2, z là bội của 3, t là bội của 4. Bài toán có 2676 nghiệm.

TÀI LIỆU DẪN

[1] Vũ Hữu Bình, *Phương trình nghiệm nguyên và kinh nghiệm giải*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2011.

[2] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy (Tuyển chọn-Biên soạn), *Bài giảng số học*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010 (Tái bản lần thứ năm).

[3] Alcuin of York's, *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (English: Problems to Sharpen the Young).

[4] Jean–Claude Marzloff, *History of Chinese Mathematics, Springer–Verlag*, Berlin, 2007.

[5] Abū Kāmil, *The Book of Birds*, xem https://pavlopoulos.wordpress.com/2016/09/11/masterpiece-conquest-the-100-birds-problem-and-arno-schmidt/

[6] Roshdi Rashed, *Abū Kāmil, Algèbre et analyse diophantienne*: Édition, traduction et commentaire, Germany, 2012.

[7] L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*, Springer–Verlag, New York, 2002.

[8] A. Volkov, *On the origins of the* Toan phap dai thanh (Great Compendium of Mathematical Methods). In: Yvonne Dold-Samplonius, Joseph W. Dauben, Menso Folkerts, and Benno van Dallen (eds.), *From China to Paris: 2000 years Transmission of mathematical ideas*, Stuttgart, 2002, pp. 369-410.

(Còn nữa)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/509 (Lớp 6). So sánh hai số sau

$$A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{2018}{5^{2018}};\quad B=\frac{2018}{2019}.$$

ĐÀO CHÍ THANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/509 (Lớp 7). Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBC}=30^0$, $\widehat{PBA}=8^0$ và $\widehat{PAB}=\widehat{PAC}=22^0$. Tính số đo $\widehat{APC}$.

TẠ MINH HIẾU

(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/509. Giải phương trình

$$\frac{1}{5x^2-x+3}+\frac{1}{5x^2+x+7}+\frac{1}{5x^2+3x+13}+\frac{1}{5x^2+5x+21}=\frac{4}{x^2+6x+5}\text{ với } x>0.$$

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T4/509. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh AD và CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MD+DN=a$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng BN và AD. Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng BM và CD. Chứng minh: $ME^2-NE^2+NF^2-MF^2=2a^2$.

HUỲNH QUANG LÂU

(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T5/509. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{ab}}+\frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)}.$$

CAO VĂN DŨNG *(Hà Nội)*

CÁC LỚP THPT

Bài T6/509. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{abcd}{8}+2\ge\sqrt{(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}+\sqrt{(b+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}.$$

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T7/509. Giải hệ phương trình ba ẩn số thực x, y, z:

$$\begin{cases}x^3+2y^3=2x^2+z^2\\2x^3+3x^2=3y^3+2z^2+7\\x^3+x^2+y^2+2xy=2xz+2yz+2\end{cases}.$$

THỌ ĐẲNG

(Phòng GD-ĐT Ninh Phước, Ninh Thuận)

Bài T8/509. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); BO, CO cắt đường cao AD của tam giác lần lượt tại E, F. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn (ACF), (ABE). K, H lần lượt thuộc AB, AC sao cho $JK \parallel AO \parallel IH$. Giả sử IJ cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng giao điểm của MH, NK thuộc đường trung bình đối diện góc A của tam giác ABC.

LƯU CÔNG ĐÔNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/509. Giải phương trình

$$8^x+27^{\frac{1}{x}}+2^{x+1}.3^{\frac{x+1}{x}}+2^x.3^{\frac{2x+1}{x}}=125.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/509. Ta kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, $\{x\}=x-[x]$. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\left\{\frac{2^{2n+1}+n^2+n+2}{2^{n+1}+2}\right\}$. Có bao nhiêu số hạng của dãy số (u_n) thỏa mãn $\frac{2526.2^{n-99}}{2^n+1}\le u_n\le\frac{23}{65}$.

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

Bài T11/509. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\frac{f(n)f(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

NGUYỄN TÀI CHUNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T12/509. Cho tam giác ABC có $AB+AC=2BC$. Gọi I_α là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Đường tròn (A, AI_α) cắt BC tại E, F sao cho E thuộc tia CB, F thuộc tia BC. Đường tròn (EBI_α) cắt AB tại M, đường tròn (FCI_α) cắt AC tại N. Chứng minh rằng $BCNM$ là tứ giác nội tiếp, đồng thời là tứ giác ngoại tiếp.

NGUYỄN VĂN LINH *(Hà Nội)*

Bài L1 (Cơ). Cho một nguồn âm điểm phát âm đẳng hướng với công suất không đổi ra môi trường không hấp thụ âm. Một người cầm một máy đo mức cường độ âm đứng tại A cách nguồn âm một khoảng d thì đo được mức cường độ âm là 50 dB. Người đó lần lượt di chuyển theo hai hướng khác nhau Ax và Ay. Khi đi theo hướng Ax, mức cường độ âm lớn nhất người đó đo được là 57 dB. Khi đi theo hướng Ay, mức cường độ âm lớn nhất mà người ấy đo được là 62 dB. Góc xAy có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2 (Điện). Tại một điểm M có một máy phát điện xoay chiều một pha có công suất phát điện và điện áp hiệu dụng ở hai cực của máy phát đều không đổi. Coi hệ số ma sát của mạch luôn bằng 1. Hiệu suất của quá trình truyền tải này là H. Muốn tăng hiệu suất của quá trình truyền tải lên đến 97,5% nên trước khi truyền tải người ta nối hai cực của máy phát điện với cuộn sơ cấp của một máy biến áp lí tưởng và cuộn thứ cấp được nối với dây tải. Nhưng trong quá trình nối, do bị nhầm giữa cuộn sơ cấp và cuộn thứ cấp nên hiệu suất của quá trình truyền tải chỉ là 60%. Giá trị của H và tỉ số vòng dây của cuộn sơ cấp và thứ cấp của máy biến áp bằng bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/509 (For 6th grade). Compare the following numbers

$$A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots+\frac{2018}{5^{2018}};\quad B=\frac{2018}{2019}.$$

Problem T2/509 (For 7th grade). Suppose that P is a point inside a triangle ABC so that $\widehat{PBC}=30^0$, $\widehat{PBA}=8^0$ and $\widehat{PAB}=\widehat{PAC}=22^0$. Find the value of the angle $\widehat{APC}$.

Problem T3/509. Find positive solutions of the equation

$$\frac{1}{5x^2-x+3}+\frac{1}{5x^2+x+7}+\frac{1}{5x^2+3x+13}+\frac{1}{5x^2+5x+21}=\frac{4}{x^2+6x+5}.$$

Problem T4/509. Given a square $ABCD$ with the length of a side a. On the sides AD and CD respectively choose two points M, N so that $MD+DN=a$. Let E be the intersection of two lines BN and AD. Let F be the intersection of two lines BM and CD. Show that

$$ME^2-NE^2+NF^2-MF^2=2a^2.$$

Problem T5/509. Given positive numbers a, b, c. Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{ab}}+\frac{9\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}{4(a+b+c)}.$$

FOR HIGH SCHOOL

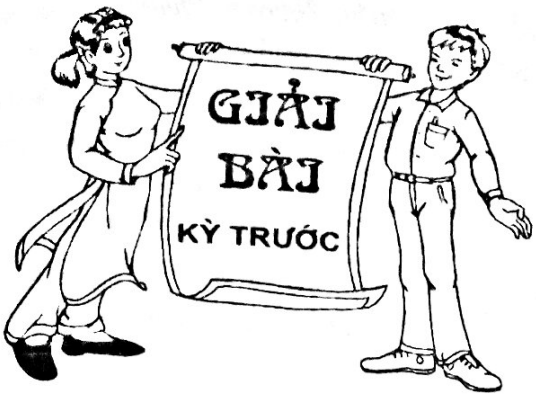
Problem T6/509. Let a, b, c, d be positive numbers such that $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}=1$. Show that

$$\frac{abcd}{8}+2\ge\sqrt{(a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}+\sqrt{(b+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}.$$

Problem T7/509. Find real solutions of the following system of equations

$$\begin{cases} x^3+2y^3=2x^2+z^2 \\ 2x^3+3x^2=3y^3+2z^2+7 \\ x^3+x^2+y^2+2xy=2xz+2yz+2 \end{cases}.$$

(Xem tiếp trang 37)



Bài T1/505. *Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho 2a là số chính pkương và 3a là số lập phương.*

Lời giải. Theo giả thiết $2a = b^2$ (1) và $3a = c^3$ (2) với b, c là các số nguyên dương.

Từ (1) suy ra b^2 chia hết cho 2, mà 2 là số nguyên tố nên b chia hết cho 2. Đặt $b = 2d$, thay vào (1) được $2a = 4d^2$, hay là $a = 2d^2$ (3). Từ (2) suy ra c^3 chia hết cho 3, mà 3 là số nguyên tố nên c chia hết cho 3. Đặt $c = 3e$, thay vào (2) được $3a = 27e^3$, hay là $a = 9e^3$ (4). Từ (3) và (4) có $a = 2d^2 = 9e^3$ (5) với d, e là các số nguyên dương. Do 2 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (5) thì e^3 chia hết cho 2, suy ra e chia hết cho 2. Đặt $e = 2k$, thay vào (5) được $a = 2d^2 = 72k^3$ với k là số nguyên dương. Từ đó $d^2 = 36k^3 = 6^2k^3$. Điều này xảy ra với số k nhỏ nhất là $k = 1$, $d = 6$ và $a = 72$. Lúc đó $2a = 144 = 12^2$ và $3a = 216 = 6^3$. Vậy số nguyên dương a nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là $a = 72$. ❐

➢***Nhận xét.*** Một số bạn rút ra kết luận $a = 72$ mà không chỉ ra $2a = 12^2$ và $3a = 6^3$. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Nghệ An**: *Lê Văn Quang Hiếu, Nguyễn Hằng Nga*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/505. *Tìm các chữ số a, b, c, d khác 0 và từng đôi một khác nhau sao cho số tự nhiên* $\overline{abcda1}$ *(chữ số tận cùng là 1) thỏa mãn* $\overline{abcda1} - 4n = n^2$, *trong đó n là số nguyên dương.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên** và bạn *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**). Ta có:

$\overline{abcda1} - 4n = n^2 \Leftrightarrow \overline{abcda1} + 4 = n^2 + 4n + 4$

$\Leftrightarrow \overline{abcda5} = (n+2)^2$. Do đó $\overline{abcda5}$ là số chính phương có chữ số tận cùng là 5 nên $\overline{abcda5}$ có hai chữ số tận cùng là 25 và $n + 2$ có chữ số tận cùng là 5. Suy ra: $a = 2 \Rightarrow \overline{2bcd25} = (n+2)^2$

$$\Rightarrow 213425 \le (n+2)^2 \le 298725$$

$$\Rightarrow 465 \le n+2 \le 545$$

$$\Rightarrow n+2 \in \{465; 475; ...; 545\}.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $n + 2 = 525$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $\overline{abcda5} = 525^2 = 275625$.

Vậy $a = 2, b = 7, c = 5, d = 6$. ❐

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn đều biết cách đưa $\overline{abcda5} = (n+2)^2$ để suy ra $a = 2$ và $n + 2$ có chữ số tận cùng là 5. Từ đó giới hạn $n + 2$ và tìm ra a, b, c, d. Bạn *Hà Lê Quỳnh Anh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** không để ý giả thiết a, b, c, d khác 0 nên ngoài kết quả đúng, còn cho kết quả sai. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Phú Thọ** : *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Dương Trọng Nguyên, Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, *Lê Hồ Trọng Tín*, 7A8, THCS Kế Sách, Kế Sách.

NGUYỄN HIỆP

Bài T3/505. *Tìm tất cả các đa thức P(x) bậc n với các hệ số nguyên không âm không lớn hơn 8 và P(9) = 32078.*

Lời giải. Xét đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

với $a_k \in \mathbb{N}, k = \overline{0,n}, a_k \le 8, a_n \ne 0$.

Cách 1. Ta có

$$P(9)=a_n.9^n+a_{n-1}.9^{n-1}+...+a_1.9+a_0\ge 9^n;$$

mà $P(9)=32078<9^5$, nên $9^n<9^5\Rightarrow n<5$ mà n là số tự nhiên nên $n\le 4$. Vậy $P(x)$ là đa thức có bậc không quá 4 và có dạng

$$P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$(a_k\in\mathbb{N},\ a_k\le 8, k=0;1,2,3,4)$.

Ta có: $P(9)=a_4.9^4+a_3.9^3+a_2.9^2+a_1.9+a_0$

$$=9(a_4.9^3+a_3.9^2+a_2.9+a_1)+a_0=32078$$

nên a_0 là số dư trong phép chia 32078 cho 9, tức là $a_0=2$. Suy ra:

$$a_4.9^3+a_3.9^2+a_2.9+a_1=3564$$

$$\Leftrightarrow 9(a_4.9^2+a_3.9+a_2)+a_1=3564$$

nên a_1 là số dư trong phép chia 3564 cho 9, tức là $a_1=0$. Suy ra:

$$a_4.9^2+a_3.9+a_2=396\Leftrightarrow 9(a_4.9+a_3)+a_2=396$$

nên a_2 là số dư trong phép chia 396 cho 9, tức là $a_2=0$. Suy ra $a_4.9+a_3=44$ nên $a_3=8$ và $a_4=4$.

Vậy đa thức $P(x)=4x^4+8x^3+2$.

Cách 2. Vì $P(9)=32078$ nên

$$a_n.9^n+a_{n-1}.9^{n-1}+...+a_1.9+a_0=32078$$

với $a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$ là các số tự nhiên không lớn hơn 8. Do đó $a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$ chính là các chữ số của số 32078 được viết trong hệ cơ số 9. Ta có

32078 : 9 = 3564 dư 2; 3564 : 9 = 396 dư 0;

396 : 9 = 44 dư 0; 44 : 9 = 4 dư 8

nên $32098=\overline{48002}_{(9)}$.

Vậy $a_0=2$, $a_1=a_2=0$, $a_3=8$, $a_4=4$, $a_k=0$ với $k\ge 5$.

Từ đó ta tìm được đa thức $P(x)=4x^4+8x^3+2$. ❐

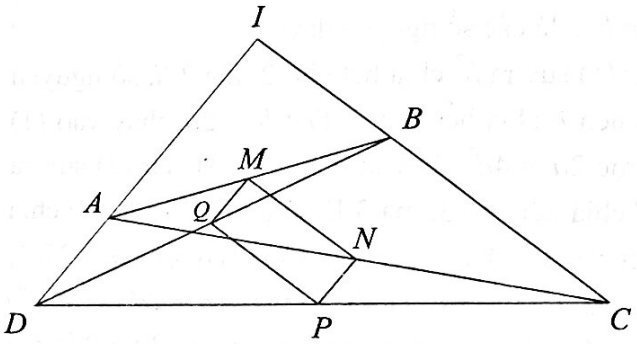
➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn gửi bài đều cho kết quả đúng và theo một trong hai cách trên. Nhiều bạn lập luận còn dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Trần Thị Yến Khanh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, *Lê Hồ Trọng Tín*, 7A8, THCS Kế Sách, H. Kế Sách; **Nghệ An**: *Đặng Hữu Khanh*, 8A, *Nguyễn Hoàng Huy*, *Nguyễn Quốc Hiếu*, *Nguyễn Phương Uyên*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/505. *Cho tứ giác lồi ABCD. Trung điểm bốn đoạn thẳng AB, AC, CD, DB thứ tự là M, N, P, Q. Độ dài bốn cạnh AB, BC, CD, DA thứ tự là a, b, c, d. Diện tích của tứ giác MNPQ là S. Giả sử hai cạnh đối AD và BC vuông góc với nhau. Chứng minh*

$$\frac{(c-a)^2-(b-d)^2}{8}\le S\le\frac{(b+d)^2-(c-a)^2}{8}.$$

Lời giải. (Theo bạn *Lê Hồ Trọng Tín*, 7A8, THCS Kế Sách, **Sóc Trăng**).



Theo tính chất đường trung bình, ta có:

$$MN\,//=PQ\left(//=\frac{1}{2}BC\right).$$

Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành. Hơn nữa, từ $MN\,//\,BC$, $MQ\,//\,AD$ và $BC\perp AD$, suy ra $MN\perp MQ$. Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật, nên

$$S=MN.MQ=\frac{1}{4}BC.AD=\frac{1}{4}bd.$$

Điều phải chứng minh tương đương với

$$(a-c)^2-(b-d)^2\le 2bd\le(b+d)^2-(c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2-(b^2+d^2)\le 0\le(b^2+d^2)-(a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2\le b^2+d^2.$$

Mặt khác, theo tính chất hình chữ nhật ta có:

$$b^2+d^2=4(MN^2+MQ^2)=4MP^2 \quad (1).$$

Giả sử AD cắt BC tại I, theo giả thiết $\hat{I}=90^0$, suy ra $2IM=AB=a$, $2IP=CD=c$, do đó:

$$|a-c|=2|IM-IP| \quad (2).$$

Từ (1) và (2), điều phải chứng minh tương đương với $|IM-IP|\le MP$ (đúng theo BĐT tam giác).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn IP, khi đó $ABCD$ là hình thang và $AD \perp BC$. ❐

➢***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Tín*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường; **Nghệ An:** *Đặng Hữu Khanh*, 8A, *Nguyễn Phương Uyên*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/505. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=x^5+y^5+z^5+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}+\frac{10}{xyz}$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho 5 số dương, ta có: $x^5+1+1+1+1 \ge 5\sqrt[5]{x^5.1.1.1.1}$

$$\Rightarrow x^5 \ge 5x-4.$$

Tương tự: $y^5 \ge 5y-4$; $z^5 \ge 5z-4$.

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta có

$$x^5+y^5+z^5 \ge 5(x+y+z)-12.$$

Vì $x+y+z=3$ nên $x^5+y^5+z^5 \ge 3$ (1).

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y} \ge 2;\quad \frac{y+z}{2}+\frac{2}{y+z} \ge 2;$$

$$\frac{z+x}{2}+\frac{2}{z+x} \ge 2.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và lưu ý $x+y+z=3$, ta có:

$$x+y+z+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \ge 6,$$

suy ra $\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \ge 3$ (2).

Dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương, ta có: $3=x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le 1$

$\Rightarrow \frac{10}{xyz} \ge 10$ (3).

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3), ta được:

$$P=x^5+y^5+z^5+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}+\frac{10}{xyz} \ge 16.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P=16$, giá trị đó đạt được khi $x=y=z=1$. ❐

➢***Nhận xét.*** Sử dụng phân tích: x^5-5x+4

$$=(x-1)^2(x^3+2x^2+3x+4) \ge 0\ \forall x>0,$$

ta cũng suy ra $x^5 \ge 5x-4$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Có thể chứng minh được rằng nếu x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$ và $n \ge 2, n \in \mathbb{Z}$ thì $x^n+y^n+z^n \ge 3$. Các bạn thử đề xuất và chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp tổng quát nếu x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=a$ (a là số dương bất kỳ cho trước).

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Thanh Hóa**: *Lê Minh Huy*, 8E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Phú Thọ**: *Trần Thị Yến Khanh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Thành Nam, Đặng Hữu Khanh*, 8A, *Hoàng Thị Kim Oanh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, *Lê Hồ Trọng Tín*, 7A8, THCS Kế Sách, Kế Sách, H. Kế Sách; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/505. *Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình*

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=x^2-2 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $\left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{array}\right.$ (*).

Đặt: $a = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$;

$b = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x - (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

Khi đó: $\begin{cases} a + b = x^2 - 2 \\ a^3 + b^3 = x^3 - 3x \\ ab = 1 \end{cases}$. Ta lại có

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$$

nên $(x^2-2)^3 - 3(x^2-2) = x^3 - 3x$

$$\Leftrightarrow x^6 - 6x^4 - x^3 + 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)(x^3 - 3x + 1) = 0. \quad (2)$$

TH1: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$: không thỏa mãn ĐK(*).

TH2: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: thỏa mãn ĐK(*).

TH3: $x^3 - 3x + 1 = 0$ (3).

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t + 1$. Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy: $f(t) \le -1, \forall t \le -2$; $f(t) \ge 3, \forall t \le 2$. Do đó (3) không có nghiệm $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x = 2$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Không lập bảng biến thiên, để chứng minh PT(3) không có nghiệm thỏa mãn ĐK(*), ta có thể lập luận như sau:

Xét $x \ge 2$, suy ra: $x^3 - 3x + 1 \ge 4x - 3x + 1 \ge 3$;

Xét $x \le -2$, suy ra: $x^3 - 3x + 1 \le 4x - 3x + 1 \le -1$.

Do đó (3) không có nghiệm $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

2) Đa số các bạn làm như cách giải trên. Một số bạn đưa ra những cách đặt ẩn phụ khác nhưng biến đổi còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Trần Sơn Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Duy Long*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn, *Nguyễn Tiến Đạt*, 11A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Kim Anh*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm*, *Nguyễn Huỳnh Như Anh*, *Trương Gia Bảo*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, H. Kế Sách. **Quảng Ngãi:** *Phạm Công Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa – Vũng Tàu. **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/505. *Cho phương trình*

$$\frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 12x - 1 = 0. \quad (1)$$

a) *Chứng minh* (1) *luôn có 5 nghiệm phân biệt.*

b) *Giả sử* x_i $(i = \overline{1,5})$ *là các nghiệm của* (1).

Tính tổng $S = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{x_i - 1}{x_i^5 + 6x_i^4 - 3}$.

Lời giải. (Của bạn *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre**).

a) Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 12x - 1.$$

Ta có: $f(-8)f(-7) < 0, f(-2)f(-1) < 0, f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$, $f(2)f(3) < 0$.

Do $f(x)$ là hàm liên tục và là đa thức bậc 5 nên (1) có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc vào 5 khoảng (–8; –7), (–2; –1), (0; 1), (1; 2), (2; 3).

b) Gọi 5 nghiệm đó là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Khi đó:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5).$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\big[(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\big].$$

Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{1}{x - x_i}$. (2)

Do x_i là nghiệm của (1) nên

$$x_i^5+6x_i^4-3=3x_i(5x_i^2+7x_i-12)$$

$$\Leftrightarrow x_i^5+6x_i^4-3=15x_i(x_i-1)\left(x_i+\frac{12}{5}\right).$$

Do đó $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i-1}{x_i^5+6x_i^4-3}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{15x_i\left(x_i+\frac{12}{5}\right)}$

$$=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_i+\frac{12}{5}}\right)=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{-\frac{12}{5}-x_i}-\frac{1}{-x_i}\right)\ (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra $S=\frac{1}{36}\left(\frac{f'\left(-\frac{12}{5}\right)}{f\left(-\frac{12}{5}\right)}-\frac{f'(0)}{f(0)}\right)$

với $f'(x)=\frac{5}{3}x^4+8x^3-15x^2-14x+12$. Từ đó

$$S=\frac{1}{36}\left(\frac{\frac{-12012}{125}}{\frac{121291}{3125}}-\frac{12}{-1}\right)=\frac{96266}{363873}.\ \square$$

➢***Nhận xét.*** 1) Kết quả 2) có thể phát biểu tổng quát như sau: *Nếu đa thức $f(x)$ có n nghiệm $x_1,x_2,...,x_n$ thì* $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a}=-\frac{f'(a)}{f(a)}$.

2) Một số bạn giải câu b) bằng cách dùng định lý Viète cũng cho ra kết quả trên. Ngoài bạn *Huy*, các bạn sau đây cũng có bài giải tốt: **Vĩnh Long:** *Trương Gia Bảo*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/505. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức sau*

$$\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right)\ge\frac{125}{64}.$$

Lời giải. Lưu ý rằng

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1.$$

Đặt $x=2\sin\frac{A}{2}, y=2\sin\frac{B}{2}, z=2\sin\frac{C}{2}$ thì

$$x,y,z>0 \text{ và } x^2+y^2+z^2+xyz=4.$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$(4+x^2)(4+y^2)(4+z^2)\ge 125$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2y^2z^2\ge 61$$

$$\Leftrightarrow 16(4-xyz)+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2y^2z^2\ge 61$$

$$\Leftrightarrow 3+4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2y^2z^2\ge 16xyz$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{xyz}+4\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+xyz\ge 16.\ (*)$$

Dễ thấy: $xyz+\frac{1}{xyz}\ge 2$. Ta chứng minh

$$\frac{2}{xyz}+4\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\ge 14\ (1).$$

Thật vậy, do

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}\ge\frac{3}{4}$$

nên $x^2+y^2+z^2\ge 3$. Từ $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ suy ra $xyz\le 1\Rightarrow\frac{2}{xyz}\ge 2$ (2).

Mặt khác $\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)^2$

$$=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2(x^2+y^2+z^2)$$

$$\ge(x^2+y^2+z^2)+2(x^2+y^2+z^2)=3(x^2+y^2+z^2)\ge 9$$

suy ra $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 3$ (3).

Từ (2) và (3) ta thấy (1) được chứng minh và do đó BĐT(*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Số bài gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đăng Khoa*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hưng Yên**: *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An**: *Nguyễn Trung Kiên*, 11A1, THPT Huỳnh Thúc Kháng, TP. Vinh.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/505. *Cho các số thực dương a, b, c và* $-2 < k < 2$. *Chứng minh rằng*

$$27(a^2+kab+b^2)(b^2+kbc+c^2)(c^2+kca+a^2) \geq (k+2)^3(ab+bc+ca)^3.$$

Lời giải. Ta có: $4(a^2+kab+b^2)$

$= (k+2)(a^2+2ab+b^2)+(2-k)(a^2-2ab+b^2)$

$= (k+2)(a+b)^2+(2-k)(a-b)^2$

$\geq (k+2)(a+b)^2$ (do $|k|<2$).

Do đó: $a^2+kab+b^2 \geq \frac{k+2}{4}(a+b)^2$.

Tương tự: $b^2+kbc+c^2 \geq \frac{k+2}{4}(b+c)^2$,

$c^2+kca+a^2 \geq \frac{k+2}{4}(c+a)^2$.

Suy ra: $(a^2+kab+b^2)(b^2+kbc+c^2)(c^2+kca+a^2)$

$$\geq \frac{(k+2)^3}{64}\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2. (1)$$

Mặt khác, từ hằng đẳng thức

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

và các hệ quả của BĐT Cauchy:

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}=8abc$;

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}+2(ab+bc+ca)$

$\geq 3(ab+bc+ca)$, ta có:

$\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca)$.

Suy ra

$$\frac{\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2}{64} \geq \frac{1}{81}\cdot 3(ab+bc+ca)^3$$

$$=\frac{1}{27}(ab+bc+ca)^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta nhận được:

$$27(a^2+kab+b^2)(b^2+kbc+c^2)(c^2+kca+a^2) \geq (k+2)^3(ab+bc+ca)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

➢***Nhận xét.*** BĐT(2) là quen thuộc với nhiều bạn học sinh. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Nguyễn Đăng Khoa*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hưng Yên**: *Phạm Văn Thông*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Hà Nội**: *Đỗ Xuân Trang*, 10A2 Toán, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Huỳnh Như Anh*, *Trương Gia Bảo*, *Lê Minh Tâm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Sóc Trăng**: *Lâm Khánh Hòa*, 10A2 Toán, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng, **Nghệ An**: *Nguyễn Trung Kiên*, 11A1, THPT Huỳnh Thúc Kháng, TP. Vinh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

T10/505. *Có một người sử dụng bản đồ trên điện thoại di động để đi từ một điểm A đến một điểm B. Anh ta đã đến được điểm B sau một số lần cứ đi một đoạn thẳng lại phải chỉnh lại hướng bằng cách quay một góc nhọn theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng tổng các góc phải điều chỉnh này bằng* $\alpha < 180^0$. *Chứng minh rằng độ dài đoạn đường anh ta đã đi không vượt quá* $\frac{AB}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

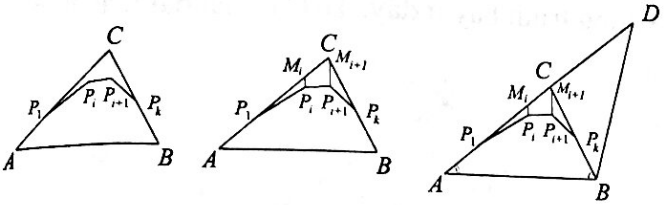
Lời giải. Giả sử có tất cả k lần quay tại các điểm $P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_k$ với các góc tương ứng tại điểm P_i

là α_i, với $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = \alpha$. Vì $\alpha_i < 90^0$ và $\alpha < 180^0$ cho nên đa giác $AP_1 \ldots P_i \ldots P_k B$ là đa giác lồi. Tổng các góc trong của đa giác này là $k.180^0$, cho nên:

$$\hat{A} + (180^\circ - \alpha_1) + \cdots + (180^\circ - \alpha_k) + \hat{B} = k.180^0$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \alpha < 180^0.$$

Suy ra AP_1 và BP_k cắt nhau tại C về phía P_1 và P_k như hình vẽ.



Ký hiệu M_i và N_i tương ứng là giao điểm của đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng P_iP_{i+1} tại P_i và P_{i+1} với đường gấp khúc ACB $(i = 1, 2, \ldots, k)$, thì ta có $P_iP_{i+1} \le M_iN_i \le$ độ dài M_i tới N_i dọc theo hai cạnh AC và CB. Trên tia AC lấy đoạn $CD = CB$. Do đó, nếu gọi tổng độ dài đường đi là ℓ thì $\ell \le AC + CB = AD$.

Vì $\hat{D} = \dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{180^0 - \alpha}{2} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$. Từ đó, ta có đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB là $2R = \dfrac{AB}{\sin\hat{D}} = \dfrac{AB}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \ge AD \ge \ell$. ❐

Nhận xét. Chỉ có một bạn giải bài này, cách giải tương tự như trên: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng* Khoa, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/505. *Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi*

$$a_1 = 2020 \text{ và } a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, n = 1, 2, \ldots$$

a) *Chứng minh rằng*

$$2n < a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2n + 2018, n = 2, 3, \ldots$$

b) *Tìm số thực a lớn nhất thỏa mãn điều kiện*

$$\sqrt{x^2 + a_1^2} + \sqrt{x^2 + a_2^2} + \ldots + \sqrt{x^2 + a_n^2}$$
$$\ge n\sqrt{x^2 + a^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). a) Từ giả thiết $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{a_n}, n = 1, 2, \ldots$ thì $a_n > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh

$a_{2k+1} > 2$ và $a_{2k+2} < 2$ ứng với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, $a_1 > 2$ và $a_2 = 1 + \dfrac{2}{2020} < 2$.

Ta giả thiết quy nạp, $a_{2k+1} > 2$ và $a_{2k+2} < 2$. Khi đó: $a_{2k+3} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k+2}} > 1 + \dfrac{2}{2} = 2$

và $a_{2k+4} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k+3}} < 1 + \dfrac{2}{2} = 2$, điều phải chứng minh. Mặt khác, ta có:

$$(a_{2k+1} - 1)(a_{2k+1} - 2) > 0 \Leftrightarrow a_{2k+1} + 1 + \frac{2}{a_{2k+1}} > 4$$

$$\Leftrightarrow a_{2k+1} + a_{2k+2} > 4.$$

Tương tự: $(a_{2k+2} - 1)(a_{2k+2} - 2) < 0$

$$\Leftrightarrow a_{2k+2} + 1 + \frac{2}{a_{2k+2}} < 4 \Leftrightarrow a_{2k+2} + a_{2k+3} < 4$$

Suy ra:

- Với n lẻ, ta có: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n$$
$$> \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{(n-1)/2} + 2 = 2n$$

và $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{n-1} + a_n)$$
$$\le 2020 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{(n-1)/2} = 2n + 2018.$$

- Với n chẵn, ta có: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{n-1} + a_n)$$
$$> \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n/2} = 2n$$

và $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n$$
$$< 2020 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{(n-2)/2} + 2 = 2n + 2018.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Từ định lý kẹp, suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=2.$$

Với $x=0$ thì (1) có dạng

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n|a|,$$

suy ra $a\le\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Chuyển qua giới hạn, ta thu được $a\le 2$.

Ta chứng minh BĐT(1) đúng với $a=2$.

Thật vậy, theo BĐT Mincovsky thì

$$\sqrt{x^2+a_1^2}+\sqrt{x^2+a_2^2}+\ldots+\sqrt{x^2+a_n^2}$$

$$\ge\sqrt{(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n})^2+(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}$$

$$>\sqrt{n^2x^2+4n^2}=n\sqrt{x^2+2^2}.$$

Vậy $a=2$ là số thực lớn nhất để (1) đúng. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, *Đỗ Xuân Trọng*, 10A2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/505. *Cho tam giác ABC không cân tại A. Điểm M thuộc đoạn BC. I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. N, P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AM, AB, AC và đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2. J_1, J_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APN, AQN. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AI_1I_2, AJ_1J_2, MI_1I_2$ thuộc BC.*

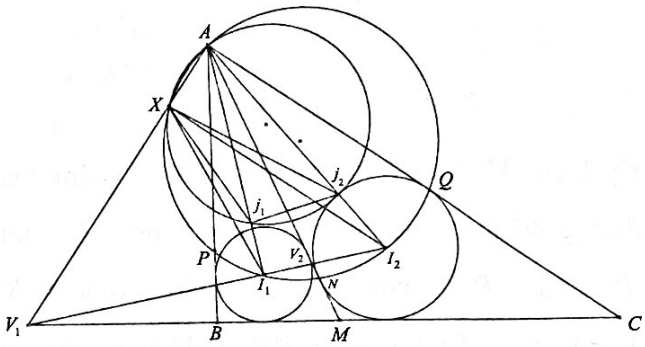
Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. M là giao điểm thứ hai của AI và (O). Khi đó*

$$MB=MC=MI.$$

Bổ đề 2. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B và các đường thẳng m, n cùng đi qua B. M_1, M_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2) và m. N_1, N_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của n và (O_1), (O_2). Khi đó các tam giác AM_1M_2, AN_1N_2 đồng dạng (cùng hướng).*

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây. Trở lại giải bài toán trên.



Gọi X là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AI_1I_2, AJ_1J_2; V_1, V_2 theo thứ tự là giao điểm của I_1I_2 và các đường thẳng AX, AM.

Áp dụng bổ đề 1 cho các tam giác APN, AQN và đường tròn (AI_1I_2), ta có: $J_1I_1=NI_1$, $J_2I_2=NI_2$.

Theo bổ đề 2, các tam giác XI_1J_1 và XI_2J_2 đồng dạng (cùng hướng). Vậy

$$\frac{XI_1}{XI_2}=\frac{J_1I_1}{J_2I_2}=\frac{NI_1}{NI_2}.$$

Điều đó có nghĩa là tứ giác XI_1NI_2 điều hòa.

Do đó $(V_1V_2I_1I_2)=A(XNI_1I_2)=-1$.

Từ đó, chú ý rằng V_2 là tâm vị tự trong của (I_1), (I_2), suy ra V_1 là tâm vị tự ngoài của (I_1), (I_2).

Kết hợp với BC là tiếp tuyến chung ngoài của (I_1), (I_2), suy ra BC đi qua V_1.

Từ đó, chú ý rằng V_1 chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn (MI_1I_2), (AI_1I_2), (AJ_1J_2), suy ra điều phải chứng minh. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này không quá khó nhưng chỉ có hai bạn tham gia giải: *Trần Hoàng Minh*, 10T, THPT chuyên Thái Nguyên, TP. Thái Nguyên, **Thái Nguyên**; *Nguyễn Đăng Khoa*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ.**

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/505. *Ba điểm O, A, B cùng nằm trên một nửa đường thẳng xuất phát từ O. Tại O đặt một nguồn điểm phát sóng âm đẳng hướng ra không gian, môi trường không hấp thụ âm. Mức cường độ âm tại A là* 60 dB, *tại B là* 40 dB. *Xác định mức cường độ âm tại điểm M trong đoạn AB có* $MB = 2MA$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases} I_A = \dfrac{P}{4\pi R_A^2} \Leftrightarrow R_A = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{I_A}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_A}} \\ I_B = \dfrac{P}{4\pi R_B^2} \Leftrightarrow R_B = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{I_B}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_B}} \\ I_M = \dfrac{P}{4\pi R_M^2} \Leftrightarrow R_M = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{I_M}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_M}} \end{cases}$$

$$MB = 2MA \Leftrightarrow R_B - R_M = 2(R_M - R_A)$$

$$\Leftrightarrow 3R_M = 2R_A + R_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{I_M}} = \frac{2}{\sqrt{I_A}} + \frac{1}{\sqrt{I_B}} \ (*);$$

$$L_A = 10\lg\frac{I_A}{I_0} = 60$$

$$\Leftrightarrow I_A = 10^{-12}.10^6 = 10^{-6} \ (\text{W/m}^2);$$

$$L_B = 10\lg\frac{I_B}{I_0} = 40$$

$$\Leftrightarrow I_B = 10^{-12}.10^4 = 10^{-8} \ (\text{W/m}^2).$$

Từ (*) suy ra:

$$\frac{3}{\sqrt{I_M}} = \frac{2}{\sqrt{I_A}} + \frac{1}{\sqrt{I_B}} = \frac{2}{\sqrt{10^{-6}}} + \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}}$$

$$\Leftrightarrow I_M = 6,25.10^{-8} \ (\text{W/m}^2)$$

$$L_M = 10\lg\frac{I_M}{I_0} = 10\lg\frac{6,25.10^{-8}}{10^{-12}} \approx 48 \ (\text{dB}). \square$$

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng một bạn duy nhất có lời giải đúng cho bài này: *Nguyễn Thị Bích Liên*, 12A1, THPT số 3 An Nhơn, **Bình Định.**

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/505. *Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc ω (với* $5\omega^2 LC = 3$). *Khi* $R = R_0$ *thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là* $u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (V), *viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN.*

Lời giải. Theo bài ra:

$$5\omega^2 LC = 3 \Rightarrow Z_L = \frac{3}{5}Z_C \quad (1).$$

Khi công suất mạch AB cực đại thì

$$R = R_0 = Z_C - Z_L \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $Z_C = 2,5R_0; Z_L = 1,5R_0$.

Độ lệch pha giữa u_{AN} và u_R:

$$\tan\varphi_{AN} = \frac{Z_L}{R} = 1,5 \Rightarrow \varphi_{AN} = 56,3^0$$

Độ lệch pha giữa u_{MB} và u_R:

$$\tan\varphi_{MB} = \frac{-Z_C}{R} = -2,5 \Rightarrow \varphi_{MB} = -68,2^0$$

Do đó: $\varphi_{AN} = \varphi_{MB} + 124,5^0 \approx wt + 0,44\pi$.

Lại có: $U_{0AN} = U_{0MB}\dfrac{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \approx 274,6$ (V).

Biểu thức hiệu điện thế tức thời giữa 2 điểm A và N là: $u_{AN} = 274,6\cos(\omega t + 0,44\pi)$ (V). ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc vì không bạn nào có lời giải đúng cho bài này!

NGUYỄN XUÂN QUANG

BÀN VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ CEVA

TRẦN TRUNG DŨNG
(B12D48, Bộ Công an)

Định lý Ceva là một định lý vô cùng quan trọng trong hình học, đặc biệt là trong chứng minh ba đường thẳng đồng quy. Nó thường được sử dụng để chứng minh ba đường thẳng đồng quy trong trường hợp ba đường thẳng đó đi qua 3 đỉnh của một tam giác. Thông thường chúng ta thường tìm giao điểm của các đường thẳng đó với các cạnh đối diện, và tính toán các tỉ lệ mà các điểm đó chia các cạnh rồi chứng minh tích của chúng bằng 1 (đối với định lý Ceva dạng hình học), hay bằng -1 (đối với định lý Ceva dạng đại số). Tuy nhiên việc tìm các giao điểm đó cũng như tính toán các tỉ số không phải lúc nào cũng dễ chịu, khi mà hình vẽ quá phức tạp, hay khó nhìn thì việc tìm các giao điểm đó ra rồi cố gắng tính toán các tỉ số không phải là một cách hay. Bài viết này trình bày một phương pháp xử lý các tình huống như vậy, và trong nhiều ví dụ thì cách sử dụng định lý Ceva theo phương pháp này thực sự là tối ưu nhất.

I. LÝ THUYẾT CƠ SỞ

Trước hết xin phát biểu lại định lý Ceva (dạng đại số) để các bạn tiện theo dõi. Lý do bài viết chọn định lý Ceva dạng đại số là để bảo đảm tính tổng quát, đồng thời nó liên quan đến một bổ đề phía sau mà chúng ta cần sử dụng phương pháp này.

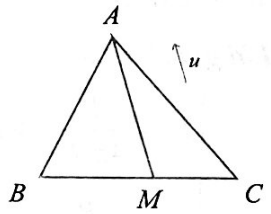
Định lý Ceva. *Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P (khác A, B, C) lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1.$$

Định lý này xin phép không chứng minh lại vì nó đã rất quen thuộc. Cái chúng ta cần quan tâm là Bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên đường thẳng BC. Xét vectơ $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AM}$ thỏa mãn $\vec{u}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$. Khi đó $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{-b}{a}$.*

Chứng minh. Dễ thấy với M nằm trên BC thì $\overrightarrow{AM}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB}-\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}$.



Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên từ đó và từ giả thiết $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AM}$, $\vec{u}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ta suy ra

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}}{-\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}} \text{ hay } \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{-b}{a}.$$

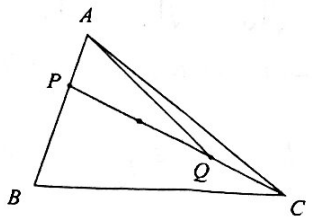
Nhận xét sau đây rất quan trọng:

Nhận xét. *Bổ đề trên cho ta một cách tính tỉ lệ điểm M chia cạnh BC mà không cần vẽ điểm M. Việc cần làm là tìm một vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ và biểu diễn nó theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.*

Mời các bạn theo dõi thí dụ sau:

Thí dụ. *Cho tam giác ABC. Điểm P nằm trên cạnh AB sao cho PB = 2PA, điểm Q nằm trên đoạn thẳng CP sao cho CP = 3CQ. Gọi M là giao điểm của AQ và BC. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.*

Lời giải. Ta sẽ tính tỉ số đề bài yêu cầu mà không cần vẽ điểm M (vì điều này là



không cần thiết khi ta đã biết Bổ đề nêu trên).

Dễ thấy: $\overrightarrow{AQ}=\frac{CQ}{CP}\overrightarrow{AP}+\frac{PQ}{PC}\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Do $\overrightarrow{AQ}//\overrightarrow{AM}$ (vì M thuộc AQ) nên theo bổ đề trên ta suy ra $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}=-6$ tức là $\frac{MB}{MC}=6$.

Ý nghĩa của thí dụ trên là: *Trong nhiều bài toán, việc vẽ các giao điểm M sẽ gây rối hình, đồng thời việc tính các tỉ số $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ khi vẽ điểm M ra cũng chưa chắc đã đơn giản hơn là việc sử dụng Bổ đề nêu trên. Do đó, tốt hơn hết là không cần vẽ điểm M ra mà hãy dùng Bổ đề (tất nhiên với điều kiện là phải biểu diễn được vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ đã chọn theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$).*

II. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Sau khi đã nắm được các kiến thức cơ sở nêu trên, chúng ta sẽ cùng nhau xem xét nội dung phương pháp mà chúng ta đã đề cập đến từ đầu.

Bài toán tổng quát. *Chứng minh các đường thẳng AM, BN, CP đồng quy.*

Định hướng giải tổng quát. Ta chọn ra trong 6 điểm A, M, B, N, C, P 3 điểm làm ba đỉnh của tam giác gốc, giả sử là A, B, C (các điểm được chọn thường chính là ba đỉnh của tam giác trong đề bài cho, hoặc là ba điểm khác cố định nào đó hợp lí, trong nhiều trường hợp phải tự tạo thêm ra các điểm để chọn chứ không chỉ lấy trong 6 điểm kia).

Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của AM, BN, CP với BC, CA, AB (ta chỉ gọi chứ không cần phải vẽ ra).

Tiến hành các biểu diễn sau:

$$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{BN}=c\overrightarrow{BC}+d\overrightarrow{BA},$$
$$\overrightarrow{CP}=e\overrightarrow{CA}+f\overrightarrow{CB}.$$

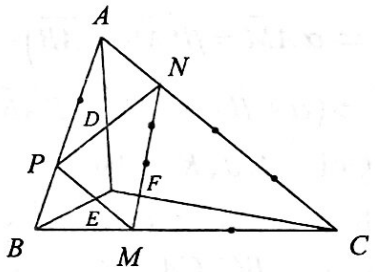
Từ đó theo Bổ đề suy ra:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{-b}{a},\ \frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{-d}{c},\ \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{-f}{e}.$$

Cuối cùng chứng minh $\frac{-b}{a}.\frac{-d}{c}.\frac{-f}{e}=-1$ là ta có điều phải chứng minh.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1. *Cho tam giác ABC có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $MC=2MB$, $NC=3NA$, $PA=2PB$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của NP, PM; F là điểm trên đoạn thẳng MN sao cho $FN=3FM$. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*



Lời giải. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của AD, BE, CF với BC, CA, AB.

Ta có:

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Từ Bổ đề ta suy ra $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=-\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{-3}{8}$. Ta có:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}.$$

Do đó $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=-1$. Ta có:

$$\overrightarrow{CF}=\frac{FM}{MN}\overrightarrow{CN}+\frac{FN}{MN}\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CN}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CM}$$
$$=\frac{1}{4}.\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{4}.\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{16}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Do đó $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{16}}=-\frac{8}{3}$. Vậy $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}.\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}.\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-1$.

Lại có AD, BE, CF không thể đôi một song song nên suy ra chúng đồng quy.

Bài 2. *Cho tam giác ABC và điểm M. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*

Lời giải. Với điểm M và tam giác ABC, dễ thấy tồn tại α, β, γ sao cho

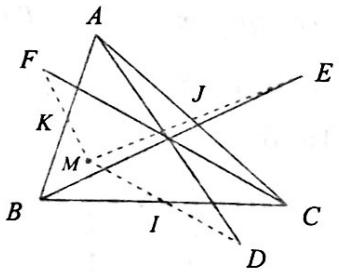
$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Suy ra: $\alpha\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AM}=\beta\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; X, Y, Z lần lượt là giao điểm của AD, BE, CF với BC, CA, AB.



Ta có: $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$

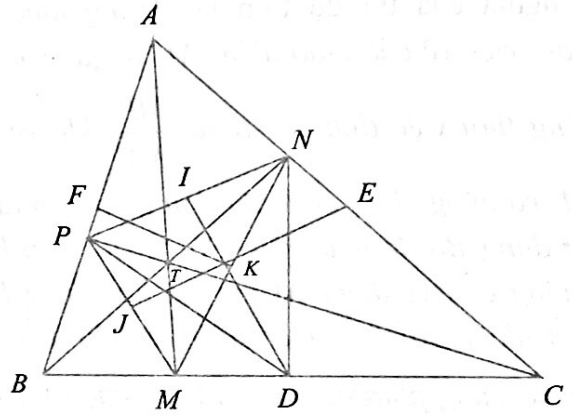
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}.$$

Từ Bổ đề suy ra: $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}$. Tương tự ta có: $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=-\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}$ và $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta}$.

Vì vậy $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}.\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}.\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-1$. Dễ thấy AD, BE, CF không đôi một song song nên theo định lý Ceva, chúng đồng quy (đpcm).

Bài 3. *Cho tam giác ABC và điểm T nằm trong tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của AT, BT, CT với các đoạn thẳng BC, CA, AB. Gọi D, E, F, I, J, K tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB, NP, PM, MN. Chứng minh rằng DI, EJ, FK đồng quy.*

Lời giải.



Ký hiệu $Ch_d\Delta\left(\vec{u}\right)$ là phép chiếu vectơ $\vec{u}$ theo phương của đường thẳng d lên đường thẳng Δ.

Do T nằm trong tam giác nên tồn tại $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho $\vec{u}=\alpha\overrightarrow{TA}+\beta\overrightarrow{TB}+\gamma\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

$Ch_{BN}AC(\vec{u})$ cho ta $\alpha\overrightarrow{NA}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{NC}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{NA}=-\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

$Ch_{CP}AB(\vec{u})$ cho ta $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{PB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{PA}=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{ND}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$

$$=\frac{\alpha}{2(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{\alpha}{2(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}-\frac{\gamma}{2(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{\alpha-\gamma}{2(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}-\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Do đó: $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DN}$

$$=\frac{\beta-\alpha}{4(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{\gamma-\alpha}{4(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{-\alpha}{2(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}+\frac{-\alpha}{2(\alpha+\gamma)}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{-\alpha}{2(\alpha+\beta)}\left(-2\overrightarrow{DE}\right)+\frac{-\alpha}{2(\alpha+\gamma)}\left(-2\overrightarrow{DF}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{DE}+\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{DF}.$$

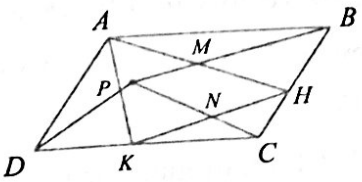
Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của DI, EJ, FK với EF, FD, DE. Ta có:

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}.$$

Tương tự: $\frac{\overline{YF}}{\overline{YD}}=-\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}$ và $\frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}}=-\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta}$.

Nhân theo vế ba đẳng thức này lại, kết hợp với định lý Ceva và nhận xét rằng DI, EJ, FK không thể đôi một song song ta thu được đpcm.

Bài 4. *Cho hình bình hành ABCD. Lấy hai điểm H, K bất kỳ lần lượt thuộc các cạnh BC, CD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, HK, KA. Chứng minh rằng BM, CN, DP đồng quy.*



Lời giải. Chọn B, C, D là ba đỉnh của tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của BM, CN, DP với CD, DB, BC.

Ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)+\frac{1}{2}\frac{BH}{BC}\overrightarrow{BC}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\frac{BH}{BC}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\frac{CH}{BC}\overrightarrow{BC}.$$

Từ đó theo Bổ đề suy ra: $\frac{\overline{XC}}{\overline{XD}}=\frac{BC}{CH}$.

Ta có: $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\frac{CH}{CB}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\frac{CK}{CD}\overrightarrow{CD}.$

Suy ra $\frac{\overline{YD}}{\overline{YB}}=-\frac{CH}{CB}.\frac{CD}{CK}$. Ta có:

$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\frac{DK}{DC}\overrightarrow{DC}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\frac{DK}{DC}\overrightarrow{DC}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\frac{CK}{DC}\overrightarrow{DC}.$$

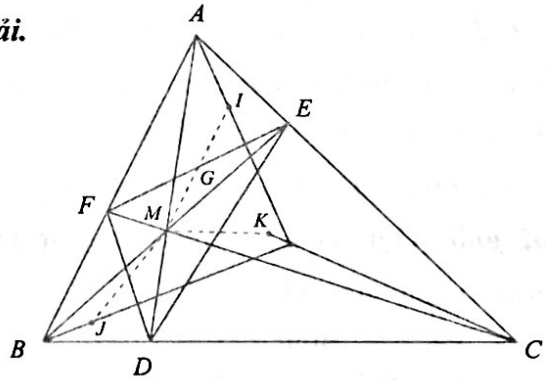
Suy ra $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}=\frac{CK}{CD}$. Do đó

$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XD}}.\frac{\overline{YD}}{\overline{YB}}.\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}=\frac{BC}{CH}\left(-\frac{CH}{CB}.\frac{CD}{CK}\right).\frac{CK}{CD}=-1.$$

Theo định lý Ceva với nhận xét rằng BM, CN, DP không thể đôi một song song ta thu được đpcm.

Bài 5. *Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi I, J, K lần lượt là điểm đối xứng với M qua trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng AI, BJ, CK đồng quy.*

Lời giải.



Với điểm M nằm trong tam giác ABC, dễ thấy tồn tại $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho

$$\vec{u}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

$Ch_{BE}AC(\vec{u})$ cho ta $\alpha\overrightarrow{EA}+\gamma\overrightarrow{EC}=\vec{0}$, suy ra:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AC}.$$

$Ch_{CF}AB(\vec{u})$ cho ta $\alpha\overrightarrow{FA}+\beta\overrightarrow{FB}=\vec{0}$, suy ra:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Cũng từ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ suy ra:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA}=-\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}.$$

Gọi X,Y,Z lần lượt là giao điểm của AI,BJ,CK với BC,CA,AB.

Gọi G là trung điểm của EF. Ta có:

$$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AC}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}-\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{\gamma\beta}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AC}+\frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}\overrightarrow{AB}.$$

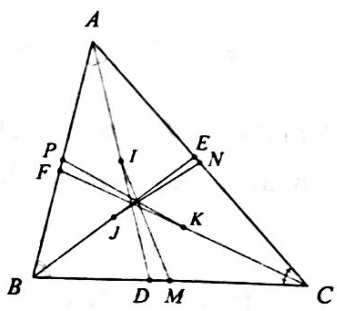
Theo Bổ đề suy ra $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}$.

Tương tự ta có: $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=-\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}$ và $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta}$.

Nhân theo vế ba đẳng thức trên lại, sử dụng định lý Ceva và nhận xét rằng AI,BJ,CK không thể đôi một song song, ta thu được đpcm.

Bài 6. *Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB; I,J,K lần lượt là trung điểm của các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A,B,C của tam giác. Chứng minh rằng MI,NJ,PK đồng quy.*

Lời giải. Gọi D,E,F theo thứ tự là chân đường phân giác vẽ từ các đỉnh A,B,C; X,Y,Z theo thứ tự là giao điểm của MI, NJ, PK với NP,PM,MN. Đặt $BC=a, CA=b$, $AB=c$, dễ thấy: $\frac{BD}{BC}=\frac{c}{b+c}$.



Với M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AD ta có:

$$\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$=\frac{c}{2(b+c)}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$=\frac{c}{2(b+c)}\overrightarrow{BA}+\frac{c}{2(b+c)}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$=\frac{c}{2(b+c)}\overrightarrow{BA}+\frac{b}{2(b+c)}\overrightarrow{CA}$$

$$=\frac{c}{2(b+c)}\left(2\overrightarrow{MN}\right)+\frac{b}{2(b+c)}\left(2\overrightarrow{MP}\right)$$

$$=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{MN}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{MP}.$$

Từ Bổ đề suy ra $\frac{\overline{XN}}{\overline{XP}}=\frac{-b}{c}$.

Tương tự ta có: $\frac{\overline{YP}}{\overline{YM}}=\frac{-c}{a}$, $\frac{\overline{ZM}}{\overline{ZN}}=\frac{-a}{b}$.

Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Như vậy, qua 6 bài toán điển hình, bài viết đã giúp bạn đọc hiểu và áp dụng được phương pháp sử dụng định lý Ceva rất hay này vào việc giải các bài toán chứng minh đồng quy hay và khó. Có nhiều bài toán trong các bài trên nếu giải bằng các cách khác sẽ khá phức tạp. Để sử dụng tốt phương pháp này, các bạn cần nắm tốt các công thức biến đổi vectơ, phép chiếu vectơ cũng như một số kiến thức khác về mối liên hệ giữa vectơ với vị trí và sự tồn tại của một điểm so với một tam giác hay đoạn thẳng, ...

IV. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB,AC theo thứ tự tại C'',B'. Đường thẳng qua M song song với CA cắt BC,BA theo thứ tự tại A'',C'. Đường thẳng qua M ☞

song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại B'', A'. Dựng các hình bình hành $MA'A'''A''$, $MB'B'''B''$, $MC'C'''C''$. Chứng minh rằng AA''', BB''', CC''' đồng quy.

2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các đoạn thẳng AI, BI, CI theo thứ tự cắt (I) tại M, N, P. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng MD, NE, PF đồng quy.

3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại X, Y, Z. Đặt $M = BY \cap XZ$, $N = CZ \cap XY$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của MY, NZ. Chứng minh rằng AI, YF, ZE đồng quy.

4. Cho tam giác ABC và điểm T nằm trong tam giác. AT, BT, CT cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. M, N, P lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. MT, NT, PT lần lượt cắt BC, CA, AB tại I, J, K. Chứng minh rằng AI, BJ, CK đồng quy.

5. Chứng minh rằng các đường đối trung của một tam giác đồng quy tại một điểm gọi là điểm *Lemoine* của tam giác đó. (Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác là đường thẳng đối xứng với đường phân giác tại đỉnh đó qua đường trung tuyến qua đỉnh đó của tam giác).

PROBLEMS ... (*Tiếp theo trang 22*)

Problem T8/509. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). Assume that BO and CO intersect the altitude AD of the triangle respectively at E and F. Let I and J respectively be the centers of the circles (ACF) and (ABE). Two points K, H are on AB, AC respectively so that $JK \parallel AO \parallel IH$. Suppose that IJ intersects AB and AC at M and N. Show that the intersection between MH and NK is on the midsegment, which is opposite to the vertex A, of the triangle ABC.

Problem T9/509. Solve the equation

$$8^x + 27^{\frac{1}{x}} + 2^{x+1}.3^{\frac{x+1}{x}} + 2^x.3^{\frac{2x+1}{x}} = 125.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/509. Let $[x]$ be the maximal integer which does not exceed x, and let $\{x\} = x - [x]$. Consider the sequence (u_n) with $u_n = \left\{\dfrac{2^{2n+1} + n^2 + n + 2}{2^{n+1} + 2}\right\}$. Find the number of terms of the sequence (u_n) satisfying

$$\frac{2526.2^{n-99}}{2^n + 1} \le u_n \le \frac{23}{65}.$$

Problem T11/509. Find all functions $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so that

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \frac{f(n)f(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Problem T12/509. Given a triangle ABC with $AB + AC = 2BC$. Let I_α be the center of the excircle corresponding to the angle A. The circle (A, AI_α) intersects BC at E and F with E is on the ray CB and F is on the ray BC. The circle (EBI_α) meets AB at M and the circle (FCI_α) meets AC at N. Show that $BCNM$ is both a cyclic and tangential quadrilateral.

Translate by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science Vietnam National University, Hanoi*)

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2018-2019

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lí năm học 2018-2019 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2018 đến tháng 8 năm 2019. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lí cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài sôi nổi. **Giải Xuất sắc** về môn Toán thuộc về 3 bạn: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội**, *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài, **Bình Phước**. **Giải Nhất** môn Vật lí thuộc về bạn: *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2019-2020. Sau đây là danh sách **90** bạn đoạt giải Toán và **7** bạn đoạt giải Vật lí năm học 2018-2019.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (3 giải)

1. *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội.**
2. *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**
3. *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài, **Bình Phước.**

☆ Giải Nhất (6 giải)

1. *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
2. *Đoàn Phú Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên**.
3. *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa.**
4. *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.**
5. *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**
6. *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, **Bến Tre.**

☆ Giải Nhì (12 giải)

1. *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa, **Hà Nội.**
2. *Đặng Hữu Khanh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
3. *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát, Phù Cát, **Bình Định.**
4. *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre.**
5. *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên.**
6. *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình.**
7. *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng.**
8. *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ.**
9. *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**
10. *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
11. *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình.**
12. *Phan Quí Lộc*, 12 T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

☆ Giải Ba (21 giải)

1. *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
2. *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

3. *Hoàng Bảo Minh Châu*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

4. *Bùi Văn Quyến*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**

5. *Phạm Đình Tâm*, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

6. *Võ Thị Hồng Thu*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

7. *Lê Anh Dũng*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

8. *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội.**

9. *Nguyễn Văn Chung*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

10. *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**

11. *Nguyễn Trần Phương Mai*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

12. *Võ Minh Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng.**

13. *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.**

14. *Chu Thị Thanh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.**

15. *Nguyễn Thanh Lâm*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**

16. *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

17. *Nguyễn Văn Thành Nam*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

18. *Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình.**

19. *Trương Công Đức*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế.**

20. *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. TP. Cao Lãnh, Đồng Tháp.

21. *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**

☆ **Giải Khuyến khích (48 giải)**

1. *Chu Ngọc Chiến*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**

2. *Nguyễn Quang Vinh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

3. *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

4. *Lê Văn Mạnh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

5. *Phạm Văn Quyền*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

6. *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An.**

7. *Phan Phước Minh*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

8. *Lê Thị Thu Sương*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế.**

9. *Nguyễn Nhật Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

10. *Huỳnh Tấn Phúc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. Cao Lãnh, Đồng Tháp.

11. *Dương Hải Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa, **Đồng Nai.**

12. *Võ Hoàng Phúc Khang*, 10T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

13. *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.**

14. *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

15. *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh.**

16. *Nguyễn Công Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

17. *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

18. *Nguyễn Tiến Đạt*, 10A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

19. *Thái Huyền Trang*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

20. *Dương Trọng Nguyên*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

21. *Nguyễn Công Phúc*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

22. *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật

Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

23. *Nguyễn Phương Uyên,* 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

24. *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà, **Quảng Trị.**

25. *Nguyễn Đức Toàn*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**

26. *Hoàng Minh Quyết*, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, **Gia Lai.**

27. *Lê Minh Tâm*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

28. *Trương Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

29. *Trần Đoàn Minh Tuệ*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.**

30. *Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

31. *Nguyễn Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**

32. *Nguyễn Tất Đạt,* 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh.**

33. *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong, **Bắc Ninh.**

34. *Ngô Bảo An*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội.**

35. *Nguyễn Đức Minh*, 7B, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội.**

35. *Nguyễn Đức Minh*, 7B, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội.**

36. *Vũ Minh Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

37. *Lê Thị Minh Thùy*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

38. *Nguyễn Đức Phát*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

39. *Phạm Bá Hoàng,* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

40. *Đoàn Thị Kim Anh*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

41. *Võ Thị Hải Yến*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

42. *Trịnh Phương Thảo*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

43. *Nguyễn Nhật Trung*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

44. *Phạm Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**

45. *Nguyễn Hoàng Hưng*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

46. *Nguyễn Bá Chinh*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Cát Khánh, Phù Cát, **Bình Định.**

47. *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp.**

48. *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành, **Trà Vinh.**

MÔN VẬT LÍ

☆ Giải Nhất (1 giải)

Lê Như Minh, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

☆ Giải Nhì (2 giải)

1. *Phan Nhật Tiến,* 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

2. *Hà Phương Hoàng Mai,* 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

☆ Giải Ba (4 giải)

1. *Lê Ngọc Minh Nhật*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

2. *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội.**

3. *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

4. *Trần Huy Quý*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lí nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại* (024) 35121607 *để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

HỘI THẢO

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM VỚI NHIỆM VỤ ĐỔI MỚI CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA GIÁO DỤC PHỔ THÔNG

Chủ tịch HĐTV NXBGD Việt Nam ***Nguyễn Đức Thái*** *phát biểu tại Hội thảo.* (Ảnh: *Bá Hải*)

Các đại biểu tham quan gian hàng sách của NXBGD Việt Nam (Ảnh: *Hiền Thương*)

Hội thảo *Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam với nhiệm vụ đổi mới chương trình và sách giáo khoa giáo dục phổ thông* được tổ chức tại TP.Hà Nội, TP.Hồ Chí Minh và tỉnh Kiên Giang với sự tham gia của các chuyên gia trong nước và quốc tế về chương trình, sách giáo khoa (SGK); một số Tổng Chủ biên, Chủ biên đại diện cho các bộ SGK của Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN). Hội thảo có sự tham dự của đại diện các thầy cô giáo, các nhà quản lý giáo dục, cơ quan quản lý nhà nước tại các tỉnh, thành trên toàn quốc.

Tại Hội thảo, các chuyên gia đã trình bày các tham luận: "*Sách giáo khoa theo định hướng phát triển năng lực: nhìn từ kinh nghiệm quốc tế*", "*Từ chương trình giáo dục phổ thông 2018 đến sách giáo khoa mới của NXBGDVN*"; cùng một số tham luận về định hướng, mục tiêu và phương pháp biên soạn một số cuốn SGK lớp 1 được NXBGDVN tổ chức thực hiện theo chương trình giáo dục phổ thông mới. Các cuốn SGK do NXBGDVN biên soạn đã cụ thể hoá mục tiêu giáo dục trọng tâm là chuyển từ chú trọng truyền thụ kiến thức sang giúp học sinh hình thành, phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực.

Phát biểu tại Hội thảo, TS. *Phạm Văn Cường* - Giám đốc Sở GD&ĐT Phú Yên cho biết: "Qua phần trình bày của các chuyên gia về 4 bộ SGK của NXBGDVN cho thấy, sách của NXBGDVN đáp ứng tốt về kiến thức, cấu trúc, nội dung và đặc biệt định hướng được phương pháp dạy học sao cho phát triển được năng lực phẩm chất của học sinh".

Bên cạnh SGK, NXBGDVN sẽ cung cấp đồng bộ sách giáo viên, sách bổ trợ nhằm hỗ trợ giáo viên và học sinh trong quá trình giảng dạy và học tập. Sách giáo khoa điện tử, các thiết kế dạy học điện tử, tài liệu hỗ trợ giảng dạy, tài nguyên số cũng sẽ được NXBGDVN tập trung sản xuất đồng bộ nhằm hỗ trợ tốt nhất hoạt động dạy và học phù hợp với chương trình và sách giáo khoa mới.

Đồng thời, NXBGDVN sẽ tổ chức tập huấn, đào tạo đội ngũ giáo viên thuộc các Sở GD&ĐT sử dụng SGK để triển khai chương trình giáo dục phổ thông mới một cách sát hợp và hiệu quả, dưới hình thức hội thảo chuyên đề và đào tạo trực tuyến. Đây cũng là mong muốn được đại diện các Sở GD&ĐT bày tỏ tại Hội thảo.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 50

Problem. *Given $M(1; 2)$ on the coordinates plane. Find the coordinates of two points P and Q on the (O, OM) (O is the origin) such that PQM is an equilateral triangle.*

Solution. We will use the following facts of complex numbers operations to solve this exercise. For two complex numbers z and w we have:

$|zw| = |z|.|w|$,

$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$,

$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$ $(w \neq 0)$.

Let z be the complex number which corresponding to M: $z = 1 + 2i$.

To use the above facts, we need to find a complex number w with modulus 1 and argument $\frac{2\pi}{3}$ and then the points corresponding to zw and $\frac{z}{w}$ will satisfy the requirement. It is not difficult to compute $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Then $zw = (1+2i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$= -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

and $\frac{z}{w} = (1+2i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$= -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

Therefore

$$P\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ and } Q\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

TỪ VỰNG

equilateral triangle	:	*tam giác đều*
complex numbers	:	*số phức*
modulus	:	*môđun*
argument	:	*ácgumen*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 47

Bài toán. *Khi biểu diễn và sắp xếp dữ liệu ta thường sử dụng mô hình thân và lá. Ví dụ bảng bên chỉ ra dãy dữ liệu* 88; 89; 93; 94; 94; …; 155; 155; 156. *Tìm khoảng thay đổi và trung vị của dãy dữ liệu.*

Thân	*Lá*
8	8 9
9	3 4 4 5 6 6 7
10	3 3 4 6 7 8
11	1 2 2 3 3 7 7 8 9
12	0 0 4 5 5 5 7 7
13	2 4 5 6 8 9 9
14	2 3 8
15	5 5 6

Lời giải. Khoảng thay đổi của dãy dữ liệu là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Vì vậy trong trường hợp này khoảng thay đổi là 156 – 88 = 68. Số các mục trong bảng này là 45 (ta có thể đếm theo từng hàng, chẳng hạn hàng thứ nhất có 2 mục, hàng thứ hai có 7 mục,…). Do đó trung vị của dãy dữ liệu chính là mục thứ 23 và nó là 118.

Nhận xét. Kỳ này Tòa soạn Tạp chí TH&TT chỉ nhận được một bài dịch tốt của bạn *Phạm Ngô Triệu Hoàng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**.

HỒ HẢI (Hà Nội)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 30. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=3 & (1)\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{6} & (2)\end{cases}$$

Cách 1. ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}$. Ta có

$$(2)\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y=6$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-y^2}=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=3-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0\\ x^2-y^2=(3-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x=\dfrac{9+y^2}{6}\end{cases}.$$

Đặt $t=y^2$, từ $x\le 3\Rightarrow 0\le t\le 9$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(9+t)^2}{36}+t}-\sqrt{\frac{(9+t)^2}{36}-t}=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{t^2+54t+81}-\sqrt{t^2-18t+81}=18$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{t^2+54t+81}=18+\sqrt{t^2-18t+81}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{t^2+54t+81}=18+9-t\Leftrightarrow t^2+54t+81=t^2-54t+729$$

$\Leftrightarrow t=6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{6}\\ y=-\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$. Vậy HPT có 2 nghiệm $(x;y)$: $\left(\dfrac{5}{2};\sqrt{6}\right)$ và $\left(\dfrac{5}{2};-\sqrt{6}\right)$.

Cách 2. ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -y\\ x\ge y\end{cases}\Rightarrow x\ge 0$.

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn HPT nên ta có $x>0$. Khi đó

$$\text{HPT}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{3}{x} & (3)\\ \sqrt{1+\dfrac{y}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{y}{x}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{x}} & (4)\end{cases}.$$

Đặt $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow -1\le t\le 1$. Từ HPT trên ta có:

$$\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)^2=1+\sqrt{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+t^2}=1+2\sqrt{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+t^2=1+4\sqrt{1-t^2}+4(1-t^2)\Leftrightarrow 4\sqrt{1-t^2}=5t^2-4$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2\ge\dfrac{4}{5}\\ 25t^4-24t^2=0\end{cases}\Leftrightarrow t^2=\frac{24}{25}\Leftrightarrow t=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Với $\dfrac{y}{x}=t=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, thay vào (3) ta có $x=\dfrac{5}{2}$.

Vậy HPT có 2 nghiệm.

Cách 3. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+y}\\ b=\sqrt{x-y}\end{cases}, a\ge 0, b\ge 0$. Ta có

$$\begin{cases}a=\sqrt{x+y}\\ b=\sqrt{x-y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a^2\\ x-y=b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2+b^2}{2}\\ y=\dfrac{a^2-b^2}{2}\end{cases},$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{a^4+b^4}{2}=\frac{1}{2}\left[(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2\right],$$

$\sqrt{x^2-y^2}=ab$. Khi đó, ta có HPT:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}-ab=3\\ a+b=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(ab)^2-12ab+18}-ab=3 & (3)\\ a+b=\sqrt{6}\end{cases}.$$

Ta có: $(3)\Leftrightarrow\sqrt{(ab)^2-12ab+18}=ab+3$

$$\Leftrightarrow (ab)^2-12ab+18=(ab)^2+6ab+9$$

$$\Leftrightarrow 18ab=9\Leftrightarrow ab=\frac{1}{2}.$$

Từ $a+b=\sqrt{6}$ và $ab=\dfrac{1}{2}$, suy ra a, b là các nghiệm của PT:

$$t^2-\sqrt{6}t+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow t=\frac{2+\sqrt{6}}{2},\ t=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}.$$

Với $a=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}, b=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}$.

Với $a=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}, b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=-\sqrt{6}\end{cases}$.

Vậy HPT có 2 nghiệm.

Cách 4. ĐK: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$. Ta có:

$(2)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-y^2}=3$ (3),

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2-y^2}+3\Leftrightarrow 2y^2=9+6\sqrt{x^2-y^2}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $x=\dfrac{27-2y^2}{6}$. Thay vào (2) ta được: $\sqrt{\dfrac{27-2y^2}{6}+y}+\sqrt{\dfrac{27-2y^2}{6}-y}=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{27+6y-2y^2}+\sqrt{27-6y-2y^2}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{27+6y-2y^2}=6-\sqrt{27-6y-2y^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-\sqrt{27-6y-2y^2}\ge 0 \\ 27+6y-2y^2=36-12\sqrt{27-6y-2y^2}+27-6y-2y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 36\ge 27-6y-2y^2 \\ \sqrt{27-6y-2y^2}=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+6y+9\ge 0 \\ \sqrt{27-6y-2y^2}=3-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-y\ge 0 \\ 27-6y-2y^2=(3-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3 \\ y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}$.

Với $y=\pm\sqrt{6}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Vậy HPT có 2 nghiệm như trên.

Cách 5. ĐK: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -y \\ x\ge y \end{cases} \Rightarrow x\ge 0$.

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn (2), $y = 0$ không thỏa mãn (1), suy ra HPT không có nghiệm x, y thỏa mãn $x.y = 0$. Do đó, ta xét:

$$\begin{cases} x\ne 0 \\ y\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\ne 0.$$

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\dfrac{2y}{\sqrt{6}}$, đến đây kết hợp với (2) ta có: $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\dfrac{2y}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=\dfrac{\sqrt{6}+\dfrac{2y}{\sqrt{6}}}{2} \\ \sqrt{x-y}=\dfrac{\sqrt{6}-\dfrac{2y}{\sqrt{6}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2-y^2}=\frac{9-y^2}{6} \text{ (3).}$$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3+\sqrt{x^2-y^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2y^2-9}{6}$ (4).

Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{9-y^2}{6}=\frac{2y^2-9}{6}\Leftrightarrow y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}.$$

Thay $y^2=6$ vào (3) ta được:

$$\sqrt{x^2-6}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\text{ (do } x\ge 0).$$

Thế $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ vào HPT đã cho kiểm tra, ta thấy đều thỏa mãn. Vậy HPT có 2 nghiệm.

Nhận xét. Cách 5 giải đến

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=\dfrac{\sqrt{6}+\dfrac{2y}{\sqrt{6}}}{2} \\ \sqrt{x-y}=\dfrac{\sqrt{6}-\dfrac{2y}{\sqrt{6}}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x^2-y^2}=\frac{9-y^2}{3},$$

rồi từ $(1)\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2y^2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2y^2}{3}-3$. Từ 2 kết quả trên, ta có $\dfrac{9-y^2}{3}=\dfrac{2y^2}{3}-3\Leftrightarrow y^2=6$.

Cách 6. ĐK: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$. Ta có:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3+\sqrt{x^2-y^2}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2y^2-9}{6}$ (3),

$(2)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-y^2}=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=3-x$ (4).

Ta lại có: $(2)\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=\sqrt{6}-\sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6}-\sqrt{x-y}\ge 0 \\ x+y=6-2\sqrt{6}\sqrt{x-y}+x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y}\le\sqrt{6} \\ y=3-\sqrt{6}.\sqrt{x-y} \end{cases}$ (5).

Từ (3) và (4), suy ra $x=\dfrac{27-2y^2}{6}$, thay vào (5) ta

được $y=3-\sqrt{6}\sqrt{\frac{27-2y^2}{6}}-y \Leftrightarrow \sqrt{27-6y-2y^2}=3-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3-y\ge 0\\ 27-6y-2y^2=(3-y)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\le 3\\ y^2=6\end{cases} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}.$$

Với $y=\pm\sqrt{6}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$. Thế $x=\frac{5}{2}, y=\sqrt{6}$ và $x=\frac{5}{2}, y=-\sqrt{6}$ vào HPT đã cho ta thấy đều thỏa mãn. Vậy HPT có 2 nghiệm.

Cách 7. ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}$. Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-y^2}=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=3-x \quad (3).$$

Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2+y^2}=6-x\Rightarrow y^2=36-12x \quad (4).$$

Từ $(3)\Rightarrow x^2-y^2=(3-x)^2\Leftrightarrow y^2=6x-9$ (5).

Từ (4) và (5) ta có:

$$36-12x=6x-9\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\Rightarrow y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}.$$

Thế $x=\frac{5}{2}, y=\sqrt{6}$ và $x=\frac{5}{2}, y=-\sqrt{6}$ vào HPT đã cho ta thấy đều thỏa mãn. Vậy HPT có 2 nghiệm.

Cách 8. ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}$. Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=3\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^2-y^2}=9\\ \sqrt{x^2-y^2}=3-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2\sqrt{x^2+y^2}.(3-x)=9 \quad (3)\\ \sqrt{x^2-y^2}=3-x\end{cases}.$$

Ta lại có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3+\sqrt{x^2-y^2}=6-x.$

Khi đó:

$$(3)\Leftrightarrow 2x^2-2(6-x)(3-x)=9\Leftrightarrow 18x=45\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Với $x=\frac{5}{2}$, ta có:

$$\sqrt{x^2-y^2}=3-x\Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}-y^2}=3-\frac{5}{2}\Leftrightarrow y^2=6\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{6}.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm.

Cách 9. ĐK: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -y\\ x\ge y\end{cases}\Rightarrow x\ge 0.$

Đặt $t=\sqrt{x^2-y^2}, t\ge 0\Rightarrow x^2=y^2+t^2$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2y^2+t^2}=3+t\Leftrightarrow 2y^2+t^2=(3+t)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{6t+9}{2}\Rightarrow x^2=\frac{2t^2+6t+9}{2}.$$ Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-y^2}=6\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{2t^2+6t+9}{2}}+2t=6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2t^2+6t+9}{2}}=3-t\Leftrightarrow \begin{cases}3-t\ge 0\\ \frac{2t^2+6t+9}{2}=(3-t)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t\le 3\\ 2t^2+6t+9=2(t^2-6t+9)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t\le 3\\ 18t=9\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Với $t=\frac{1}{2}$, ta có:

$$\begin{cases}y^2=\frac{6t+9}{2}=6\\ x^2=\frac{2t^2+6t+9}{2}=\frac{25}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=\pm\sqrt{6}\\ x=\frac{5}{2}\end{cases} \text{(do } x\ge 0).$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm.

NGUYỄN ANH VŨ

(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định*)

➢***Nhận xét.*** Ngoài 9 cách giải của *Nguyễn Anh Vũ*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số lời giải đúng của các bạn: *Hoàng Minh Dũng*, Tổ 5A, Tổ dân phố 2, phường Đồng Sơn, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**; *Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, H. Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Trần Quốc Hội*, GV THCS Tự Lập, H. Mê Linh, **Hà Nội**.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 30 dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.12.2019.

BÀI TOÁN 32. *Giải phương trình*

$$x^2-4x-8+4\sqrt{2x+5}=0.$$

PHẠM DUY KHÁNH

(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 507, T9.2019.

BÀI 38 (π in sky, issue 20, 2017). *Tìm hai chữ số tận cùng của số*

$$2^{2016}+2^{2017}.$$

Lời giải. Cách 1. Ta viết số đã cho dưới dạng:

$$2^{2016}+2^{2017}=2^{2016}(1+2)=3.2^{2016}=3.2^{16}.2^{2000}$$
$$=3.2^{16}.(2^{20})^{100}.$$

Hai chữ số cuối của số $2^{16}=2^8.2^8$ là 36;

Hai chữ số cuối của số $2^{20}=(1024)^2$ là 76. Nếu một số có hai chữ số tận cùng là 76 thì lũy thừa với số mũ nguyên dương tùy ý của số đó cũng có hai chữ số tận cùng là 76. Vậy hai chữ số tận cùng của số

$(2^{20})^{100}$ là 76.

Từ hai chữ số tận cùng của số 3.2^{16} là 08 và hai chữ số tận cùng của số $(2^{20})^{100}$ là 76 suy ra hai chữ số tận cùng của số $2^{2016}+2^{2017}$ là 08.

Cách 2. Ta có: $2^{10}=1024\equiv(-1)\pmod{25}$

$\Rightarrow(2^{10})^{201}\equiv(-1)^{201}\pmod{25}\equiv-1\pmod{25}$ (1).

Lại có: $2^4=16\equiv-9\pmod{25}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $2^{2014}\equiv 9\pmod{25}$

$\Rightarrow 2^{2016}=2^2.2^{2014}=2^2.(25k+9)=100k+36\ (k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow 2^{2016}\equiv 36\pmod{100}$ (3)

$\Rightarrow 2^{2017}=2.2^{2016}\equiv 72\pmod{100}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$$2^{2016}+2^{2017}\equiv 36+72\equiv 08\pmod{100}.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số $2^{2016}+2^{2017}$ là 08.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài này. Những cách giải của các bạn đưa ra tương tự như hai cách trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Lệ*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Nghệ An:** *Nguyễn Phương Linh, Vương Viết Lượng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lưu Ngân Hà*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Hoàng Minh* Dũng, Tổ 5A, Tổ dân phố 2, phường Đồng Sơn, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Nguyễn Phương Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.12.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 40. *Cho lục giác lồi ABCDEF sao cho AB = BC, CD = DE, EF = FA. Chứng minh rằng*

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra.

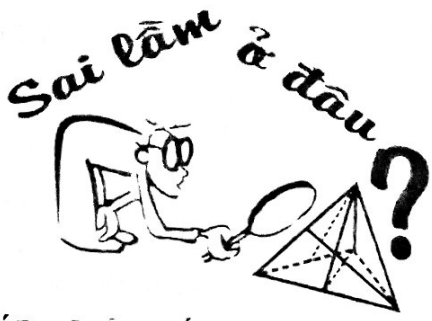
HOÀNG CHI (*Hà Nội*)

Math Jokes

A math professor, a native Texan, was asked by one a his student:

"*What is mathematics good for?*".

He replied: "*This question make me sick. If you show someone the Grand Canyon for the first time, and he asks you: 'What's it good for ?' what would you do? Well, you'd kick that guy off the cliff!*"



GIẢI ĐÁP: MỘT CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC!

(*Đề đăng trên TH&TT số* 505, *tháng* 7 *năm* 2019)

Phân tích. Từ $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge x+y+z$, suy ra:

$$\frac{xy}{z}\sqrt{zx}+\frac{yz}{x}\sqrt{xy}+\frac{zx}{y}\sqrt{yz}\ge x\sqrt{zx}+y\sqrt{xy}+z\sqrt{yz}$$

là sai, ví dụ: $1+4+6>5+3+2$ nhưng

$$1.7+4.8+6.3<5.7+3.8+2.3.$$

Lời giải đúng. Ta có:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)\ge xy(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y}+y^2\ge x^2+xy.$$

Tương tự: $\frac{y^3}{z}+z^2\ge y^2+yz;$

$$\frac{z^3}{x}+x^2\ge z^2+zx.$$

Do đó: $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\ge xy+yz+zx$ (1).

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$(x\sqrt{zx}+y\sqrt{xy}+z\sqrt{yz})^2=$$

$$=\left(x\sqrt{\frac{zx}{yz}}.\sqrt{yz}+y\sqrt{\frac{xy}{zx}}.\sqrt{zx}+z\sqrt{\frac{yz}{xy}}.\sqrt{xy}\right)^2$$

$$\le\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\right)(yz+zx+xy)$$

$$\overset{\text{do (1)}}{\le}\left(\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\right)^2.$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài toán.

KIHIVI

ĐƯỜNG TIỆM CẬN!

Trong giờ học ở lớp 12A về đường tiệm cận, Thầy giáo đưa bài toán.

Bài toán. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số* $y=\frac{mx^3-2}{x^3-3x+2}$ *có hai đường tiệm cận đứng.*

Sau một hồi suy nghĩ, bạn *Ngọc Anh* giơ tay lên bảng làm.

Đây là lời giải của bạn *Ngọc Anh*:

Ta thấy số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{mx^3-2}{x^3-3x+2}$ là số các số x_0 là nghiệm của phương trình $x^3-3x+2=0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $mx^3-2=0$. Ta có:

$$x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi 1 và -2 không là nghiệm của phương trình $mx^3-2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m.1^3-2\ne0\\m.(-2)^3-2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-2\ne0\\-8m-2\ne0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne2\\m\ne-\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Vậy với $m\ne2$ và $m\ne-\frac{1}{4}$ đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng.

Bạn có nhận xét gì về lời giải của bạn Ngọc Anh? Lời giải của bạn thế nào ?

THÂN VĂN DỰ

(*GV THPT Lạng Giang số* 1, *Yên Mỹ, Lạng Giang, Bắc Giang*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 509 (11.2019)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

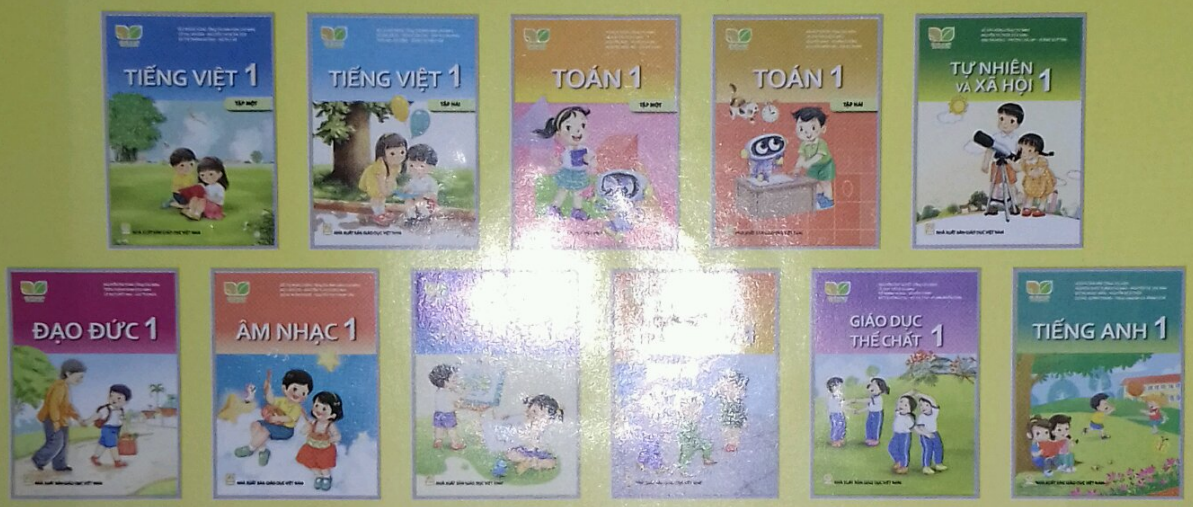
TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN HIỆP
Trị sự, phát hành: LÊ NGUYÊN NGỌC, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: LÊ NGUYÊN NGỌC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG



DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1, tập một
4. Toán 1, tập hai
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Đạo đức 1
7. Âm nhạc 1
8. Mĩ thuật 1
9. Hoạt động trải nghiệm 1
10. Giáo dục thể chất 1
11. Tiếng Anh 1

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
5. Đạo đức 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Tiếng Anh 1 - SGV

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng