TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2019
Số 506

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chúc mừng Đoàn học sinh Việt Nam đoạt giải cao tại Olympic Toán Quốc tế 2019 được tổ chức tại Vương quốc Anh với sự tham gia của 110 nước và vùng lãnh thổ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

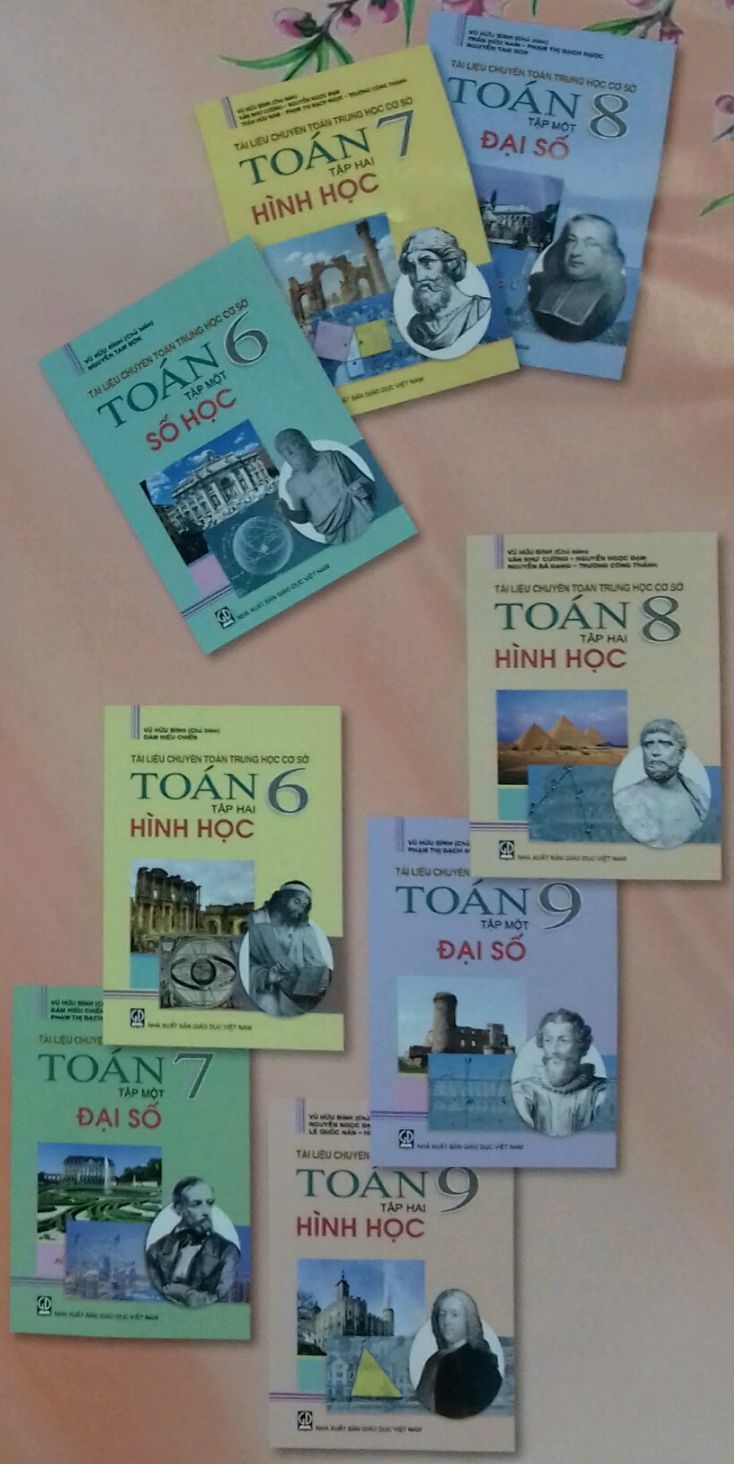
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việ Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGƯT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt N...

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG (d): y = ax + b

TRỊNH PHONG QUANG

(GV THCS Quảng Lạc, Nho Quan, Ninh Bình)

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thì

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2) Cho hai đường thẳng $(d_1): y=ax+b$ và $(d_2): y=a'x+b'$ (với $a,\ a'\neq 0$), thì $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow a.a'=-1$.

3) Tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ, A và B là giao điểm của đường thẳng $(d): y=ax+b$ với hai trục tọa độ), H là chân đường vuông góc kẻ từ O tới AB, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}.$$

4) Nếu đường thẳng (d) cắt các trục Ox và Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ $(a,b\neq 0)$ thì sau khi biến đổi, đường thẳng (d) có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

II. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=mx+1-m$ $(m\neq 0)$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.*

(Trích đề thi HSG Toán 9 Hưng Yên năm học 2015-2016)

Lời giải. Đường thẳng (d) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A\left(\frac{m-1}{m};0\right), B(0;1-m)$.

• Xét $m=1$ khi đó (d) đi qua O nên khoảng cách từ O đến (d) bằng 0.

• Xét $m\neq -1$, gọi OH là đường cao của tam giác OAB.

Ta có $OA=\left|\frac{m-1}{m}\right|, OB=|1-m|$.

Tam giác OAB vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{m^2+1}{(m-1)^2}$$

$$=1+\frac{2}{m-1}+\frac{2}{(m-1)^2}=2\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OH\leq\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=-1$. Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 2. *Cho đường thẳng $(d): y=(m-1)x+2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.*

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 TP. Hà Nội năm học 2007-2008)

Lời giải.

• Xét $m=1\Rightarrow y=2$ (1)

Khi đó khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là 2.

• Với $m\neq 1$, gọi $(d'): y=ax+b$ là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (d). $(d)\cap(d')=H$.

Vì $(d)\perp(d')$ nên $a(m-1)=-1\Rightarrow a=\frac{1}{1-m}$.

Vì $O(0;0)\in(d')\Rightarrow b=0$ nên $(d'): y=\frac{1}{1-m}x$.

Ta có $(d)\cap(d')=H$ nên hoành độ điểm H là nghiệm của phương trình:

$$(m-1)x_H+2=\frac{1}{1-m}x_H\Leftrightarrow x_H\left(m-1-\frac{1}{1-m}\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow x_H\left(\frac{(m-1)^2+1}{m-1}\right)=-2$$

$$x_H=\frac{-2(m-1)}{(m-1)^2+1}\Rightarrow y_H=\frac{2}{(m-1)^2+1}.$$

Ta có: $OH=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt{\frac{4(m-1)^2+4}{\left[(m-1)^2+1\right]^2}}$

$$=2\sqrt{\frac{(m-1)^2+1}{\left[(m-1)^2+1\right]^2}}=\frac{2}{\sqrt{(m-1)^2+1}}.$$

Vì $(m-1)^2+1\ge 1 \Rightarrow OH\le 2$, do $m\ne 1$ nên đẳng thức không xảy ra $\Rightarrow OH<2$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta thấy với $m=1$ thì khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d): $y=(m-1)x+2$ là lớn nhất.

Thí dụ 3. *Cho hàm số $y=ax+b\,(a\ne 0)$ có đồ thị (d). Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm $A(1;\,2)$, cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại đểm C có tung độ dương sao cho $OB+OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).*

(Trích đề thi HSG Toán 9 Hưng Yên năm học 2016 - 2017)

Lời giải. Vì (d) đi qua điểm $A(1;2)$ nên ta có PT của đường thẳng $(d): y=ax+2-a$.

(d) cắt trục Ox tại $B\left(\dfrac{a-2}{a};0\right)$ và cắt trục Oy tại $C(0;2-a)$. Do điểm B có hoành độ dương và điểm C có tung độ dương nên $a<0$. Khi đó ta có: $OB+OC=\dfrac{a-2}{a}+2-a=1-\dfrac{2}{a}+2-a$

$$=3+\frac{-2}{a}+(-a)\ge 3+2\sqrt{\frac{-2}{a}\cdot(-a)}=3+2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=-\sqrt{2}$. Suy ra $OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $3+2\sqrt{2}$ khi $a=-\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) có dạng $y=-\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}$.

Thí dụ 4. *Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=(2m-1)x+m+1$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?*

Lời giải. Giả sử đường thẳng (d) có phương trình $y=(2m-1)x+m+1$ đi qua điểm cố định $M(x_0;y_0)$, khi đó ta có:

$y_0=(2m-1)x_0+m+1$ thỏa mãn với mọi m

$\Leftrightarrow (2x_0+1)m-x_0-y_0+1=0$ thỏa mãn với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x_0+1=0\\-x_0-y_0+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-\dfrac{1}{2}\\y_0=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2}\right)$ là điểm cố định thuộc đường thẳng (d).

Kẻ $OH\perp(d)$ tại H, ta có khoảng cách từ O đến (d) bằng OH.

Khi (d) thay đổi và luôn đi qua điểm $M\left(-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2}\right)$ cố định ta luôn có $OH\le OM$

$$\Rightarrow OH_{\max}=OM=\sqrt{x_M^2+y_M^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$H\equiv M\Leftrightarrow OM\perp(d)$ tại M.

Đường thẳng OM có PT dạng $y=ax$ đi qua $M\left(-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra $\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}a\Rightarrow a=-3$.

$$OM\perp(d)\Leftrightarrow -3(2m-1)=-1\Leftrightarrow 2m-1=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2m=\frac{4}{3}\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}.$$

Vậy với $m=\dfrac{2}{3}$ thì khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, và giá trị lớn nhất đó bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Thí dụ 5. *Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình: $(k-2)x+(k-1)y=1$ (k là tham số). Tìm k để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.*

Lời giải.

- Với $k=1$. Phương trình đường thẳng (d) có dạng $x=-1$, khoảng cách từ gốc toạ độ đến (d) là 1.
- Với $k=2$. Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y=1$, khoảng cách từ gốc toạ độ đến (d) là 1.

Với $k\ne 1$ và $k\ne 2$. Gọi A,B lần lượt là giao điểm của (d) với Ox,Oy.

Thay $y=0$ vào phương trình ta được $x_A=\dfrac{1}{k-2}$

$\Rightarrow OA=\left|\dfrac{1}{k-2}\right|$.

Thay $x=0$ vào phương trình ta được $y_B=\frac{1}{k-1}$

$\Rightarrow OB=\left|\frac{1}{k-1}\right|$.

Rõ ràng (d) không đi qua gốc toạ độ với mọi $k\neq 1$ và $k\neq 2$.

Tam giác AOB vuông tại O, gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O tới AB, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow OH=\frac{1}{\sqrt{2k^2-6k+5}}.$$

Mặt khác, ta có: $2k^2-6k+5=2\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ (với mọi k).

Do đó: $OH\leq\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k=\frac{3}{2}$.

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) lớn nhất là $\sqrt{2}$ khi $k=\frac{3}{2}$.

Thí dụ 6. *Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d): mx+(m-1)y-2m+1=0$. Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;5)$ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.*

Lời giải. Đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $A(1;\ 1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P trên (d), khoảng cách từ A đến (d) là PH. Ta có $PH\leq PA$ nên khoảng cách lớn nhất bằng PA khi $P\equiv H\Leftrightarrow PH\perp(d)$. Gọi $y=ax+b$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(0;5)$ và $A(1;\ 1)$ khi đó $\begin{cases}a.0+b=5\\a.1+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\a=-4\end{cases}$

Từ đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(0;5)$ và $A(1;\ 1)$ là $(d'): y=-4x+5$.

Xét đường thẳng $(d): mx+(m-1)y-2m+1=0$

- Nếu $m=1$ thì $(d): x=1$ khi đó (d) và (d') không vuông góc với nhau.
- $m\neq 1$ thì $(d): y=\frac{m}{1-m}x+\frac{2m-1}{m-1}$.

Để $(d)\perp(d')$ thì $\frac{m}{1-m}(-4)=-1\Leftrightarrow m=\frac{1}{5}$.

Vậy $m=\frac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 7. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y=ax+b$ $(a\neq 0)$. Tìm a và b, biết (d) đi qua điểm $M(1;\ 2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B phân biệt sao cho $P=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Đường thẳng (d) đi qua $M(1;\ 2)$ suy ra $a+b=2$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB.

Do ΔOAB vuông tại O nên $P=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}$

P min $\Leftrightarrow OH^2$ max $\Leftrightarrow OH$ max, mà $OH\leq OM$ nên OH max $\Leftrightarrow H\equiv M$.

Suy ra (d) là đường thẳng qua M và vuông góc với OM.

Phương trình đường thẳng OM là $y=2x$.

(d) vuông góc với OM $\Leftrightarrow 2a=-1\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy với $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 8. *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1;\ 2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$.*

Lời giải.

Đặt $m=x_M$ và $n=y_N\Rightarrow m\cdot n\neq 0$ và $m\neq 1$ (*)

Đường thẳng qua ba điểm M, I, N có PT dạng:

$$y=ax+b\Rightarrow\begin{cases}0=am+b\\2=a+b\\n=b\end{cases}$$

Hệ thức liên hệ giữa m và n là: $2m+n=mn$.

Chia hai vế cho $m\cdot n\neq 0$ ta được: $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1$ (**)

$$\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)^2=\frac{1}{m^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{mn}$$

$$=5\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)^2$$

$\Rightarrow Q=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\geq\frac{1}{5}$; dấu "=" xảy ra khi $\frac{2}{m}=\frac{1}{n}$. Kết hợp (**) tìm được $m=5$, $n=2{,}5$ (thỏa mãn (*)).

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$.

Thí dụ 9. *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;\ 2)$. Một đường thẳng (d) đi qua M cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B. Viết phương trình đường thẳng (d) trong trường hợp OA + OB đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Giả sử đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + n$ $(m \neq 0, n \neq 0)$.

Giả sử $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$ $(a > 0,\ b > 0)$. Khi đó

$$\begin{cases} ma + n = 0 \\ n = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-b}{a} \\ n = b \end{cases}.$$

Vậy phương trình của (d) là

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Leftrightarrow bx + ay = ab \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ta có $OA + OB = a + b$.

Vì (d) đi qua $M(1;\ 2)$ nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$ (*).

Áp dụng BĐT $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

ta có $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b}\right) \geq \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a + b \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{2} \\ b = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy $\min(OA + OB) = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} a = 1 + \sqrt{2} \\ b = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$. Khi đó phương trình đường thẳng (d) cần tìm là

$$y = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x + 2 + \sqrt{2}.$$

Thí dụ 10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;4)$. Đường thẳng (d) qua M, (d) cắt trục hoành tại A (hoành độ của A dương), (d) cắt trục tung tại B (tung độ của B dương). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác OAB.*

Lời giải. Giả sử $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$, $a > 0$; $b > 0$.

PT đường thẳng AB: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Vì AB qua M nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} = 1 \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\dfrac{4}{ab}} \Rightarrow 1 \geq \dfrac{16}{ab}$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{2} \geq 8$; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{4}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$

Diện tích tam giác vuông OAB (vuông ở O) là

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}ab \geq 8.$$

Vậy S nhỏ nhất bằng 8 khi (d) qua $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 8)$.

Thí dụ 11. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính R (R > 0, R không đổi). Gọi A và B lần lượt là các điểm di động trên trục hoành và trục tung sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn đó. Hãy xác định tọa độ của các điểm A, B để tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải. Giả sử $A(a;0), B(0;b)$ với $a > 0, b > 0$. (*).

Khi đó $S_{OAB} = \dfrac{ab}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{R^2}$ (**) nên

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \Rightarrow a^2b^2 = R^2(a^2 + b^2) \geq 2R^2ab$$

$\Rightarrow S_{OAB} = \dfrac{ab}{2} \geq R^2$ (không đổi) (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$).

Kết hợp với (*) và (**) ta thấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = R\sqrt{2}$. Do tính đối xứng ta được 4 cặp điểm: $(\pm R\sqrt{2}; 0), (0; \pm R\sqrt{2})$ cần tìm.

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = (m-3)x - m + 5, (m \neq 3)$. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) có giá trị lớn nhất.

2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d): mx + 2(2-3m)y + m - 1 = 0$. Tìm m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) có giá trị lớn nhất.

3. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$

và $(d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔIAB trong đó A và B là các điểm cố định mà (d_1) và (d_2) luôn đi qua.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI, năm học 2019 - 2020

VÒNG 1

Câu 1. 1) ĐK: $x \geq -\frac{5}{26}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{26x+5}{x^2+30}+2\sqrt{\frac{26x+5}{x^2+30}}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{26x+5}{x^2+30}+2\sqrt{\frac{26x+5}{x^2+30}}+1=4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{26x+5}{x^2+30}}+1\right)^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{26x+5}{x^2+30}}=1 \Leftrightarrow \frac{26x+5}{x^2+30}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-26x+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=25 \end{array}\right.$$

PT đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=25$.

2) Thế $x^2+y^2=2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$(x+2y)\left(x^2+y^2+3y^2+4xy\right)=27$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x+2y)^2=27 \Leftrightarrow (x+2y)^3=27$$

$$\Leftrightarrow x+2y=3.$$

Suy ra $x=3-2y$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$(3-2y)^2+y^2=2 \Leftrightarrow 5y^2-12y+7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=\frac{7}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy hệ PT có nghiệm $(x;y)\in\left\{(1;1),\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)\right\}$.

Câu 2. 1) Vì x, y nguyên nên

$x^2-x+1 \mid 3x-1$ (1)

$\Rightarrow x^2-x+1 \mid (3x-1)(3x+1)=9x^2-1$ (2)

Mặt khác $9x^2-1=9\left(x^2-x+1\right)+3(3x-1)-7$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $x^2-x+1 \mid 7$

mà $x^2-x+1>0$ nên $x^2-x+1\in\{1;\ 7\}$.

Trường hợp 1: $x^2-x+1=1$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ (\text{thỏa mãn}) \\ x=1 \ (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$$

- Với $x=0 \Rightarrow y^2=-1$ (loại).
- Với $x=1 \Rightarrow y^2+y=2$

$$\Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $x^2-x+1=7$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

- Với $x=3 \Rightarrow 7\left(y^2+3y\right)=8$ (loại).
- Với $x=-2 \Rightarrow 7\left(y^2-2y\right)=-7$

$$\Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1.$$

Vậy $(x;y)\in\{(1;\ 1),\ (1;\ -2),\ (-2;\ 1)\}$.

2) Vì $y\geq 1$ nên từ $xy+2\geq 2y$ ta có $x+\frac{2}{y}\geq 2$.

Mà $x^2+4=x^2+\frac{4}{y^2}\cdot y^2$

$$=\left(x^2+\frac{4}{y^2}\right)+\frac{4}{y^2}\left(y^2-1\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{y}\right)^2+\frac{4}{y^2}\left(y^2-1\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\cdot 4+1\cdot\left(y^2-1\right)=1+y^2,$$

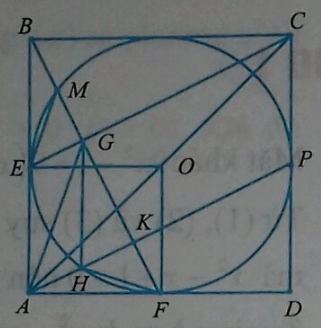
suy ra $M=\frac{x^2+4}{y^2+1}\geq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$x=\frac{2}{y}=1\Leftrightarrow x=1, y=2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Câu 3. 1) Hai tam giác ABF và BCE bằng nhau (c.g.c) dẫn tới BF vuông góc CE tại G. Do đó các điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên đường tròn đường kính EF.



2) Theo tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và 1), ta có $\widehat{EMF}=\widehat{FEA}=\widehat{FGA}$ nên $EM \parallel GA$, mà E là trung điểm AB nên M là trung điểm BG.

3) Gọi H là trực tâm tam giác GAF. AH cắt GF tại K. (O) tiếp xúc CD tại P. Tương tự 1) thì $AP\perp BF$ nên AP đi qua K. Từ đó $AK \parallel EG$, mà E là trung điểm AB, ta suy ra G là trung điểm BK. (1)

Do GH và AB cùng vuông góc với AF nên $GH \parallel AB$. (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra H là trung điểm AK. Áp dụng chứng minh tương tự 2) ta thu được H nằm trên (O).

Câu 4. Ta có

$$x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z).$$

Tương tự: $y^2+1=(y+z)(y+x)$,

$$z^2+1=(z+x)(z+y).$$

Suy ra: $A=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}$

$$=\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(y+z)(y+x)}+\frac{1}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

và $B=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$B\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}\right)=\frac{3}{2}. \quad (1)$$

Ta lại có:

$$B=\frac{x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{xy+xz}+\sqrt{y}\sqrt{yz+yx}+\sqrt{z}\sqrt{zx+zy}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$B^2=\frac{\left(\sqrt{x}\sqrt{xy+xz}+\sqrt{y}\sqrt{yz+yx}+\sqrt{z}\sqrt{zx+zy}\right)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\le\frac{(x+y+z)(xy+xz+yz+yx+zx+zy)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$B^3=B\cdot B^2\le\frac{3}{2}A\Rightarrow A\ge\frac{2}{3}B^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Hệ PT đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)(3x+y)=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8.\end{cases}$$

Từ đó suy ra $x+y\ne 0$. So sánh hai phương trình ta thu được:

$$x^2+xy+2=3x+y$$

$$\Leftrightarrow x(x+y)+2=2x+(x+y)$$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+y-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+y=2. \end{array}\right.$

- Với $x=1$, thay vào PT thứ nhất ta được:

$$3+y^2+4y=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5. \end{array}\right.$$

- Với $x+y=2 \Rightarrow y=2-x$, thay vào PT thứ nhất ta thu được:

$$3x^2+(2-x)^2+4x(2-x)=8$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+4-4x+x^2+8x-4x^2=8$$
$$\Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x;\ y)$ là $(1;1)$ và $(1;-5)$.

2) ĐK: $x^2+x \le 5$ và $-\dfrac{27}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$.

- Nếu $x^2+x>2x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{27+x^2+x} > \sqrt{27+2x} \\ \sqrt{5-(x^2+x)} < \sqrt{5-2x} \end{cases}$

suy ra $\dfrac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}} > \dfrac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}$ (loại).

- Nếu $x^2+x<2x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{27+x^2+x} < \sqrt{27+2x} \\ \sqrt{5-(x^2+x)} < \sqrt{5-2x} \end{cases}$

suy ra $\dfrac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}} < \dfrac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}$ (loại).

Do đó phương trình đã cho tương đương với $x^2+x=2x \Leftrightarrow x=0; x=1$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0; x=1$.

Câu 2. 1) Ta chứng minh bài toán phụ:

$$A=a^7-a \,\vdots\, 42 \text{ với mọi } a \in \mathbb{Z}.$$

Thật vậy ta có

$$A=a^7-a=a(a^6-1)=a(a^2-1)(a^4+a^2+1).$$

Do $a(a^2-1)=a(a+1)(a-1) \,\vdots\, 6$ vì là tích ba số nguyên liên tiếp nên $A \,\vdots\, 6$.

Ta lại có

$$A=a^7-a=a(a^6-1)=a(a^3-1)(a^3+1).$$

- Nếu $a \,\vdots\, 7 \Rightarrow A \,\vdots\, 7$.
- Nếu a không chia hết cho 7 ta có $a \equiv 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6 \pmod 7$
$\Rightarrow a^3 \equiv 1; 6 \pmod 7$.

Suy ra a^3-1 hoặc a^3+1 chia hết cho 7 nên $A \,\vdots\, 7$. Do đó $A \,\vdots\, 42=6\cdot 7$.

Áp dụng bài toán phụ ta có $a^7 \equiv a \pmod 7$ nên ta có $M=\left((27n+5)^7+10\right)^7+\left((10n+27)^7+5\right)^7$
$+\left((5n+10)^7+27\right)^7$

$\equiv (27n+5)^7+10+(10n+27)^7+5$
$+(5n+10)^7+27 \pmod{42}$

$\equiv 27n+5+10+10n+27+5+5n$
$+10+27 \pmod{42}$

$\equiv 42n+84 \equiv 0 \pmod{42}$. Suy ra M chia hết 42.

2) Ta có $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y$

$$=(x+4y)+(4x+y)+(x+4y)(4x+y),$$

$17x^2+17y^2+16xy=(x+4y)^2+(4x+y)^2$.

Từ đó đặt $a=x+4y, b=4x+y$ bài toán trở thành: *Cho $a,b>0, a+b+ab \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.*

Xét phương trình $k+k+k^2=1$ có một nghiệm dương là $k=\sqrt{2}-1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^2+k^2 \ge 2ak$$
$$b^2+k^2 \ge 2bk$$
$$k(a^2+b^2) \ge 2abk.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$(k+1)(a^2+b^2)+2k^2 \ge 2(a+b+ab)k \ge 2k$$

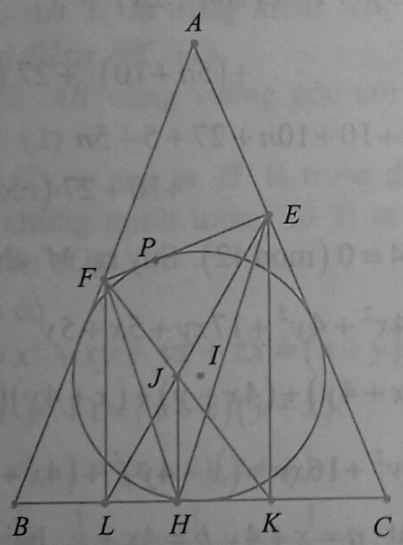
$$\Rightarrow a^2+b^2 \ge \frac{2k-2k^2}{k+1} = 2k^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=k=\sqrt{2}-1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ đạt được khi $x+4y=4x+y=\sqrt{2}-1$

$$\Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}-1}{5}.$$

Câu 3. 1) Theo định lý Thales, ta thấy $\frac{FL}{EK}=\frac{JF}{JK}=\frac{HL}{HK}$ nên hai tam giác vuông FLH và EKH đồng dạng (c.g.c). Dẫn tới HJ là phân giác của $\widehat{EHF}$.



2) Hai tam giác FBL và ECK đồng dạng (g.g)

nên $\frac{S_{FBL}}{S_{ECK}}=\frac{FB^2}{EC^2}$. (1)

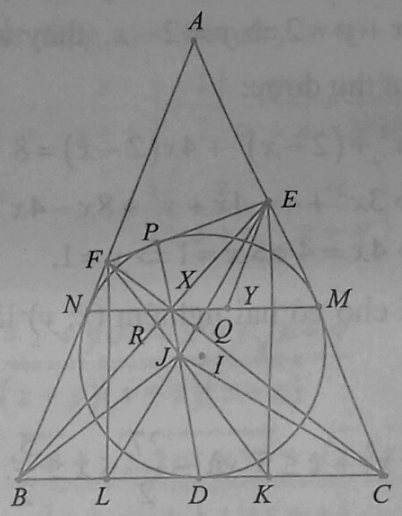
Hai tam giác JFL và JEK cũng đồng dạng (g.g) nên

$$\frac{S_{JFL}}{S_{JEK}}=\frac{FL^2}{EK^2}=\frac{FB^2}{EC^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{FB^2}{EC^2}=\frac{S_{JFL}}{S_{JEK}}=\frac{S_{FBL}}{S_{ECK}}=\frac{S_{JFL}+S_{FBL}}{S_{JEK}+S_{ECK}}=\frac{S_{BFJL}}{S_{CEJK}}=\frac{S_1}{S_2}.$$

3) Bỏ qua trường hợp đơn giản $EF \,//\, BC$. Gọi D là trung điểm BC. (I) tiếp xúc CA, AB tại M, N. BE cắt MN tại X, trên MN lấy Y sao cho $YE \,//\, AB$.



Dễ thấy tam giác EMY cân tại E nên $\frac{XB}{XE}=\frac{NB}{EM}=\frac{BD}{PE}$, từ đó PD đi qua X. Tương tự FC đi qua X và $\frac{XC}{XF}=\frac{MC}{FN}=\frac{CD}{PF}$, do $DB=DC$, ta được

$$\frac{XE}{XB}\cdot\frac{XC}{XF}=\frac{PE}{DB}\cdot\frac{DC}{PF}=\frac{PE}{PF}. \quad (3)$$

EL cắt FC tại Q, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BLE với ba điểm X, Q, C thẳng hàng ta thu được

$$\frac{XE}{XB}\cdot\frac{CB}{CL}\cdot\frac{QL}{QE}=1. \quad (4)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JKL với ba điểm F, Q, C thẳng hàng ta thu được

$$\frac{CL}{CK}\cdot\frac{FK}{FJ}\cdot\frac{QJ}{QL}=1. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra

$$\frac{XE}{XB}\cdot\frac{QJ}{QE}=\frac{FJ}{FK}\cdot\frac{CK}{CB}. \quad (6)$$

FK cắt BE tại R, chứng minh tương tự ta có

$$\frac{XF}{XC}\cdot\frac{RJ}{RF}=\frac{EJ}{EL}\cdot\frac{BL}{BC}. \qquad (7)$$

Theo định lí Thales ta lại có

$$\frac{FJ}{FK}=\frac{FL}{FL+EK},\frac{EJ}{EL}=\frac{EK}{EK+FL}$$

$$\Rightarrow\frac{FJ}{EK}\cdot\frac{FL}{EJ}=\frac{FL}{EK}=\frac{BL}{CK}. \qquad (8)$$

Từ (6), (7), (8) ta suy ra

$$\frac{QJ}{QE}\cdot\frac{RF}{RJ}=\frac{XB}{XE}\cdot\frac{XF}{XC}. \qquad (9)$$

Từ (3) và (9) suy ra $\frac{QJ}{QE}\cdot\frac{RF}{RJ}\cdot\frac{PE}{PF}=1$, theo định lý Ceva đảo thì JP, ER, FQ đồng quy, hay PJ đi qua D.

Câu 4. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học theo n cho bài toán tổng quát sau:

"*Từ tập con X gồm $2n+1$ phần tử bất kỳ của tập $M_n=\{-2n+1,\ -2n+2,\ \ldots,0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1\}$ ta có thể chọn ra 3 số phân biệt có tổng bằng 0*".

- Xét $n=1, M_1=\{-1,0,1\}$, ta có $-1+0+1=0$ (thỏa mãn).
- Giả sử kết luận đúng với $n\geq 1$, và X là tập con $2n+3$ phần tử tùy ý của tập M_{n+1}.

• Trường hợp X chứa nhiều nhất 2 số trong các số sau: $2n,\ 2n+1,\ -2n,\ -2n-1$.

Khi đó $X'=X\cap M_n$ có ít nhất $2n+1$ phần tử (có nhiều nhất 2 số trong X không thuộc M_n). Mà $X'\subset X$ suy ra theo giả thiết quy nạp có thể chọn ra 3 số có tổng bằng 0.

• Trường hợp X chứa ít nhất 3 số trong 4 số trên. Khi đó ta xét 4 trường hợp

$(a)\{2n,2n+1,-2n-1\}$

$(b)\{2n,2n+1,-2n\}$

$(c)\{-2n,-2n-1,2n+1\}$

$(d)\{-2n,-2n-1,2n\}$

Trường hợp (c) đưa về trường hợp (a), trường hợp (d) đưa về trường hợp (b), bằng cách đổi dấu tất cả các số của X.

+ Xét trường hợp (a): ta xét $2n+1$ cặp số được chia từ tập $M_{n+1}\setminus\{2n+1\}$

$\{1,2n\},\{2,2n-1\},\ldots,\{n,n+1\}$

$\{0,-2n-1\},\{-1,-2n\},\ldots,\{-n,-n-1\}$.

Vì tập $X\cap M_{n+1}\setminus\{2n+1\}$ có đúng $2n+2$ phần tử (bỏ đi phần tử $2n+1$ từ X). Theo nguyên lý Dirichlet sẽ $\exists x,y\in X$ phân biệt thuộc cùng một cặp số. Khi đó $x+y=2n+1\in X$ hoặc $x+y=-2n-1\in X$. Từ đó có bộ $\{x;y;-2n-1\}$ hoặc bộ $\{x;y;2n+1\}$ thỏa mãn.

+ Xét trường hợp (b):

- Ta giả thiết $-2n-1\notin X$ (nếu $-2n-1\in X$ ta đưa về trường hợp (a))
- Ta giả thiết $0\notin X$ (nếu $0\in X$ thì bộ $\{-2n,0,2n\}\in X$ thỏa mãn)
- Như vậy xét $X\cap M_{n+1}\setminus\{-2n-1,0,n\}$ thì tập này ít nhất $2n$ phần tử. Mà tập $M_{n+1}\setminus\{-2n-1,0,n\}$ được chia thành $2n-1$ cặp:

$\{1,2n-1\},\{2,2n-2\},\ldots,\{n-1,n+1\}$

$\{-1,-2n\},\{-2,-2n+1\},\ldots,\{-n,-n-1\}$.

Suy ra tồn tại 2 phần tử x,y của X thuộc cùng một cặp

$x+y=2n\rightarrow(x,y,-2n)$ thỏa mãn;

$x+y=-2n-1\rightarrow(x,y,2n+1)$ thỏa mãn.

Chọn $n=1010$, bài toán được chứng minh.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) ***giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2019 -2020

VÒNG 1

(Dàng cho mọi thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (2 *điểm*) 1) Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3}:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}$$

với $a\neq 1,\ a\neq -1$

2) Các số thực x, y, a thỏa mãn:

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a.$$

Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Câu 2. (2 *điểm*) Trên quãng đường AB dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn *An* đi bộ từ A đến B và bạn *Bình* đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, *An* và *Bình* gặp nhau tại C và cùng nghỉ tại C 15 phút (vận tốc của *An* trên quãng đường AC không thay đổi, vận tốc của *Bình* trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, *An* đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của *An* trên quãng đường AC là 1km/h, *Bình* đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của *Bình* trên quãng đường BC là 1km/h. Biết rằng *An* đến B sớm hơn so với *Bình* đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của *An* trên quãng đường AC là bao nhiêu?

Câu 3. (2 *điểm*) Cho các đa thức:

$$P(x)=x^2+ax+b;\ Q(x)=x^2+cx+d$$

với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực.

1) Tìm a và b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x)=0$.

2) Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3)+P(x_4)=Q(x_1)+Q(x_2)$. Chứng minh: $|x_2-x_1|=|x_4-x_3|$.

Câu 4. (3 *điểm*) Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC. Đường thẳng A_1C_1 cắt đường tròn (O) tại A' và C' (A_1 nằm giữa A' và C_1). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A' và C' cắt nhau tại B'.

1) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh: $HC_1.A_1C=A_1C_1.HB_1$.

2) Chứng minh ba điểm B, B', O thẳng hàng.

3) Khi tam giác ABC là tam giác đều. Hãy tính $A'C'$ theo R.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho các số thực x, y thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (1,5 *điểm*) Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa mãn $a^3+b^3=a^2b^2(ab-3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b-ab$.

Câu 2. (1,5 *điểm*) Cho các đa thức:

$$P(x)=m_1x^2+n_1x+k_1,$$
$$Q(x)=m_2x^2+n_2x+k_2,$$
$$R(x)=m_3x^2+n_3x+k_3$$

với m_i,n_i,k_i là các số thực và $m_i>0$, $i=1,2,3$. Giả sử phương trình $P(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt a_1,a_2, phương trình $Q(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt b_1,b_2, phương trình $R(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt c_1,c_2 thỏa mãn:

$$P(c_1)+Q(c_1)=P(c_2)+Q(c_2),$$
$$P(b_1)+R(b_1)=P(b_2)+R(b_2),$$
$$Q(a_1)+R(a_1)=Q(a_2)+R(a_2).$$

Chứng minh: $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

Câu 3. (3 *điểm*) 1) Tìm các giá trị nguyên của x, y thỏa mãn:

$$x^2y^2-4x^2y+y^3+4x^2-3y^2+1=0.$$

2) Cho ba số nguyên dương a,b,c thoả mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh abc cũng chia hết cho 14.

Câu 4. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB>AC$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A, B. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ B lên đường thẳng AO.

1) Chứng minh B, D, E, F là bốn đỉnh của một hình thang cân.

2) Chứng minh EF đi qua trung điểm của BC.

3) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO và đường tròn (O), M và N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính góc $\widehat{BMN}$.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho tập hợp X thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại 2019 tập con $A_1,A_2,\ldots,A_{2019}$ của X sao cho mỗi tập con $A_1,A_2,\ldots,A_{2019}$ có đúng 3 phần tử và hai tập A_i,A_j đều có đúng một phần tử chung với mọi $1\le i<j\le 2019$.

1) Chứng minh rằng tồn tại 4 tập hợp trong các tập hợp $A_1,A_2,\ldots,A_{2019}$ sao cho giao của 4 tập hợp này có đúng một phần tử.

2) Chứng minh rằng số phần tử của X phải lớn hơn hoặc bằng 4039.

NGUYỄN THANH HỒNG
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) ***giới thiệu***

BẤT ĐẲNG THỨC KLAMKIN VÀ ÁP DỤNG

TẠ DUY PHƯỢNG (*Viện Toán học*)
HOÀNG MINH QUÂN (*GV THPT Ngọc Tảo, Hà Nội*)
NGỤY PHAN TIẾN (*GV THPT Yên Dũng 3, Bắc Giang*)

Bất đẳng thức hình học thể hiện mối quan hệ mang tính bản chất của các yếu tố hình học, là một chuyên đề thú vị trong toán sơ cấp và thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi các cấp. Nghiên cứu, tìm tòi và phát hiện những điều mới từ các bất đẳng thức hình học luôn mang lại niềm vui cho giáo viên và học sinh trong quá trình dạy và học, đặc biệt là ở các trường chuyên.

Bài báo giới thiệu bất đẳng thức Klamkin cùng một số ứng dụng của nó, qua đó có thể thấy rằng, nhiều điều thú vị vẫn còn ẩn náu trong các đối tượng cổ điển như tam giác, đa giác, hình tròn,... cần được đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu và phát triển.

Trong bài báo này, các kí hiệu sau đây được sử dụng:

1) A, B, C là các góc của tam giác ABC.

2) a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

3) $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ABC.

4) S hay S_{ABC} là diện tích tam ABC.

5) R, r, r_a tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp cạnh a của tam ABC.

6) R_1, R_2, R_3 lần lượt là khoảng cách từ điểm P bất kì trong tam giác ABC đến các đỉnh A, B, C.

7) r_1, r_2, r_3 lần lượt là khoảng cách từ điểm P bất kì trong tam giác ABC đến các cạnh AB, BC, CA.

8) h_a, m_a tương ứng là độ dài đường cao, đường trung tuyến hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Định lí 1.1 (BĐT Klamkin, 1975, [4]). *Cho tam giác ABC tùy ý với $BC = a, CA = b, AB = c$; P là điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC, khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C lần lượt là $R_1.R_2, R_3$. Khi đó với mọi số thực x, y, z ta có*

$$(x+y+z)(xR_1^2 + yR_2^2 + zR_3^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2. \quad (1)$$

Chứng minh. Ta có: $(x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC})^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2PA^2 + y^2PB^2 + z^2PC^2 + 2(xy\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + yz\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} + zx\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}) \geq 0. \quad (*)$$

Ta lại có: $AB^2 = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})^2 = PA^2 + PB^2 - 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$.

Suy ra: $2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = PA^2 + PB^2 - c^2$.

Tương tự: $2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} = PB^2 + PC^2 - a^2$;

$2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA} = PC^2 + PA^2 - b^2$.

Thay các đẳng thức này vào (*) và thu gọn, ta được BĐT Klamkin:

$$(x+y+z)(xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(xR_1^2 + yR_2^2 + zR_3^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$ hoặc P là tâm tỉ cự của hệ điểm (A, B, C) đối với bộ số $(x; y; z)$.

ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC KLAMKIN

BĐT Klamkin có rất nhiều ứng dụng, dưới đây là một số ví dụ điển hình.

Bất đẳng thức 1. *Cho P là điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC. Khi ấy*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Chứng minh. Áp dụng BĐT(1) với $x = y = z = 1$, ta được: $3\left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) \geq a^2 + b^2 + c^2$

$$\Leftrightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P$ là trọng tâm tam giác ABC.

Bất đẳng thức 2 (BĐT Weitzenbock). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), S là diện tích của tam giác ABC. Khi ấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.*

Chứng minh. Áp dụng BĐT(1) với $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, và $P \equiv O$ ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2R^2+b^2R^2+c^2R^2) \geq b^2c^2a^2+c^2a^2b^2+a^2b^2c^2.$$

$$\Leftrightarrow R^2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\sqrt{3}abc}{R}.$$

Mặt khác ta có: $S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow \frac{abc}{R} = 4S.$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$

Bất đẳng thức 3 (BĐT Euler). *Cho tam giác ABC và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Ta có: $R \geq 2r$.*

Chứng minh. Áp dụng (1) với $x = a, y = b, z = c$ và $P \equiv O$ ta có:

$$(a+b+c)(aR^2+bR^2+cR^2) \geq bca^2+cab^2+abc^2$$

$$\Leftrightarrow R^2(a+b+c)^2 \geq abc(a+b+c) \Leftrightarrow R^2 \geq \frac{abc}{a+b+c}.$$

Ta lại có: $S = \frac{abc}{4R} = pr \Leftrightarrow abc = 4pRr = 2(a+b+c)Rr.$

Từ đó suy ra: $R^2 \geq \frac{abc}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)Rr}{a+b+c} = 2Rr$

$$\Leftrightarrow R \geq 2r.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bất đẳng thức 4. *Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Khi ấy*

$$\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)(m_a+m_b+m_c) \geq \frac{9}{4}\left(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2\right).$$

Chứng minh. Áp dụng BĐT(1) với $x = \frac{1}{m_a}; y = \frac{1}{m_b}$; $z = \frac{1}{m_c}$ và $P \equiv G$ ta có:

$$\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right)\left(\frac{GA^2}{m_a}+\frac{GB^2}{m_b}+\frac{GC^2}{m_c}\right) \geq \frac{a^2}{m_bm_c}+\frac{b^2}{m_cm_a}+\frac{c^2}{m_am_b}.$$

Do $GA = \frac{2}{3}m_a, GB = \frac{2}{3}m_b, GC = \frac{2}{3}m_c$ nên BĐT trên tương đương với

$$\frac{4}{9}\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right)(m_a+m_b+m_c) \geq \frac{a^2}{m_bm_c}+\frac{b^2}{m_cm_a}+\frac{c^2}{m_am_b}$$

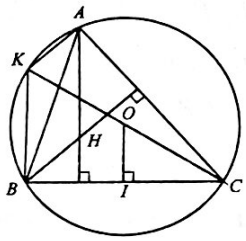
$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)(m_a+m_b+m_c) \geq m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2$$

$$\Leftrightarrow (m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)(m_a+m_b+m_c) \geq \frac{9}{4}\left(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2\right).$$

Sử dụng BĐT $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq m_am_b+m_bm_c+m_cm_a$ ta suy ra: $\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)(m_a+m_b+m_c) \geq \frac{9}{4}\left(m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2\right).$

BĐT Klamkin không chỉ được sử dụng trong chứng minh các BĐT hình học, mà còn có thể được sử dụng trong chứng minh các BĐT lượng giác. BĐT 5 dưới đây cho thấy khả năng áp dụng rộng rãi của BĐT Klamkin. Trước tiên ta chứng minh

Bổ đề 1. *Trong mọi tam giác ABC với trực tâm H, ta có $HA = 2R\cos A, HB = 2R\cos B, HC = 2R\cos C$. (**)*



Chứng minh. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, I là trung điểm của BC, tia CO cắt đường tròn (O) tại K. Ta có: $BK = 2OI$ (tính chất đường trung bình),

$$OI = OC.\cos\widehat{IOC} = R.\cos\frac{\widehat{BOC}}{2} = R.\cos A.$$

Lại có $AK \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với AC) và $AH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với BC) nên tứ giác $AHBK$ là hình bình hành, suy ra

$$HA = BK = 2OI = 2R.\cos A.$$

Chứng minh tương tự cho HB, HC.

Bất đẳng thức 5. *Với mọi tam giác ABC ta có*

$$\sin A\cos^2 A+\sin B\cos^2 B+\sin C\cos^2 C \geq \sin A\sin B\sin C.$$

Chứng minh. Áp dụng BĐT (1) với $x = a, y = b, z = c$ và $P \equiv$ trực tâm H, ta được:

$$(a+b+c)(aHA^2+bHB^2+cHC^2) \geq bca^2+cab^2+abc^2.$$

Áp dụng (**) ta có:

$$(a+b+c)(4aR^2\cos^2 A+4bR^2\cos^2 B+4cR^2\cos^2 C) \geq bca^2+cab^2+abc^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c)(a\cos^2 A+b\cos^2 B+c\cos^2 C) \geq bca^2+cab^2+abc^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2(a\cos^2 A+b\cos^2 B+c\cos^2 C)\geq abc.$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$$\sin A\cos^2 A+\sin B\cos^2 B+\sin C\cos^2 C\geq \sin A\sin B\sin C.$$

MỘT SỐ HỆ QUẢ QUAN TRỌNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC KLAMKIN

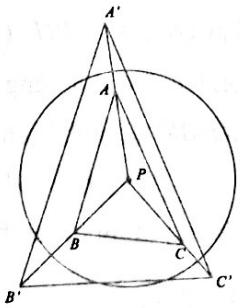
BĐT Klamkin có nhiều hệ quả thú vị và quan trọng. Trước tiên ta nhắc lại

Định nghĩa 1 (xem [2], trang 102). Phép nghịch đảo N tâm O, hệ số biến mỗi điểm A trên mặt phẳng thành điểm A' (ảnh của A) trên đường thẳng OA sao cho ta có $\overline{OA}.\overline{OA'}=k$.

Bổ đề 2 *Cho ABC là một tam giác tùy ý và P là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa tam giác ABC R_1, R_2, R_3 lần lượt là khoảng cách từ P đến các đỉnh A, B, C, còn N là phép nghịch đảo tâm P hệ số $R_1R_2R_3$. Nếu bất đẳng thức $f(a,b,c,R_1,R_2,R_3)\geq 0$ đúng, thì bất đẳng thức sau cũng đúng:*

$$f(aR_1,bR_2,cR_3,R_2R_3,R_3R_1,R_1R_2)\geq 0.$$

Chứng minh. Xét phép nghịch đảo N tâm P hệ số $R_1R_2R_3$, ta có: $N: A\to A', B\to B', C\to C'$.



Theo định nghĩa phép nghịch đảo, ta có (xem, [5], trang 293-294): $PA'=\dfrac{k}{PA}=\dfrac{R_1R_2R_3}{R_1}=R_2R_3$;

$$PB'=R_3R_1;\ PC'=R_1R_2.$$

Mặt khác (xem [7]), nếu a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC thì $a'=B'C', b'=A'C', c'=A'B'$ cũng là các cạnh của tam giác $\Delta A'B'C'$. Ta có:

$$a^2=PB^2+PC^2-2PB.PC.\cos\widehat{BPC}$$

$$=R_2^2+R_3^2-2R_2R_3\cos\widehat{BPC};$$

$$a'^2=B'C'^2=PB'^2+PC'^2-2PB'.PC'.\cos\widehat{B'PC'}$$

$$=R_2'^2+R_3'^2-2R_2'.R_3'.\cos\widehat{B'PC'}$$

$$=R_1^2R_3^2+R_1^2R_2^2-2R_1^2R_2R_3\cos\widehat{B'PC'}=R_1^2a^2=a^2PA^2$$

$$\Rightarrow B'C'=a'=aPA=aR_1.$$

Tương tự: $C'A'=b'=bPB=bR_2, A'B'=c'=cPC=cR_3$.

Vì $f(a,b,c,R_1,R_2,R_3)\geq 0$ đúng với mọi ΔABC và mọi điểm P nên áp dụng BĐT này cho $\Delta A'B'C'$ và điểm P ta được:

$$f(B'C',C'A',A'B',PA',PB',PC')\geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(aR_1,bR_2,cR_3,R_2R_3,R_3R_1,R_1R_2)\geq 0.$$

Bổ đề 2 được chứng minh.

Hệ quả 1 (*Jian Liu*, 2008, [5]) *Cho P là điểm trong mặt phẳng chứa ΔABC; x, y, z là các số thực dương tùy ý. Khi đó ta có*

$$\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}\geq\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\sqrt{yz+zx+xy}}. \qquad (2)$$

Chứng minh. • TH1: Nếu P là một trong các đỉnh của tam giác ABC, chẳng hạn $P\equiv C$ thì $CA=R_1, CB=R_2, PC=0$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{CA^2}{x}+\frac{CB^2}{y}\geq\frac{a.CA+bCB}{\sqrt{yz+zx+xy}}=\frac{2ba}{\sqrt{yz+zx+xy}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{x}+\frac{a^2}{y}\geq\frac{2ba}{\sqrt{yz+zx+xy}}.$$

Vì x,y,z là các số thực dương nên theo BĐT Cauchy, ta có: $\dfrac{b^2}{x}+\dfrac{a^2}{y}\geq\dfrac{2ba}{\sqrt{xy}}>\dfrac{2ba}{\sqrt{yz+zx+xy}}$.

Vậy với P trùng với một trong các đỉnh của ΔABC thì định lí được chứng minh. Dấu "=" không xảy ra.

• TH2: P không là một trong các đỉnh của tam giác ABC. Khi ấy bất đẳng thức Klamkin

$$(x+y+z)(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2)\geq yza^2+zxb^2+xyc^2$$

được viết lại thành

$$\left(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2\right)\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}+\right)\geq\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}.$$

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Do đó

$$\left(xR_1^2+yR_2^2+zR_3^2\right)\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x:y:z=a:b:c$ và P là tâm tỷ cự của hệ ba điểm (A, B, C) đối với bộ số (x, y, z) $\Leftrightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow P$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Thực hiện phép nghịch đảo tâm P hệ số $R_1R_2R_3$,

$$R_1\to R_2R_3, R_2\to R_3R_1, R_3\to R_1R_2,$$
$$a\to aR_1, b\to bR_2, c\to cR_3,$$

Vì (3) đúng nên theo Bổ đề 2, BĐT sau cũng đúng:

$$\left[x(R_2R_3)^2+y(R_3R_1)^2+z(R_1R_2)^2\right]\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)\ge\frac{(aR_1+bR_2+cR_3)^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(R_2R_3)^2}{yz}+\frac{(R_3R_1)^2}{zx}+\frac{(R_1R_2)^2}{xy}\ge\left(\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{x+y+z}\right)^2 \quad (4)$$

Do (4) đúng với mọi bộ số dương x, y, z nên thay x bởi $\frac{R_1^2}{x}$, y bởi $\frac{R_2^2}{y}$, z bởi $\frac{R_3^2}{z}$ trong (4) ta được:

$$yz+zx+yx\ge\left(\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}\ge\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\sqrt{yz+zx+xy}}.$$

Vậy (2) được chứng minh.

Sử dụng các BĐT (2) - (4), ta có thể chứng minh nhiều BĐT đẹp khác.

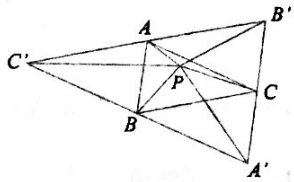
Bất đẳng thức 6. $\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}\ge\frac{4S}{\sqrt{yz+zx+xy}}$.

Chứng minh. Qua các đỉnh A, B, C kẻ lần lượt các đường thẳng l_1, l_2, l_3 song song với các cạnh BC, CA, AB. Kí hiệu

$$A'=l_2\cap l_3, B'=l_3\cap l_1, C'=l_1\cap l_2.$$

Do $ABA'C, BCB'A, CAC'B$ là các hình bình hành nên $\Delta ABC=\Delta A'BC=\Delta CB'A=\Delta BAC'$. Suy ra

$$4S_{ABC}=S_{ABC}+S_{BAC'}+S_{A'CB}+S_{CB'A}$$
$$=S_{PA'B'}+S_{PB'C'}+S_{PC'A'}$$
$$=c.\mathrm{d}(P,A'B')+b.\mathrm{d}(P,A'C')+a.\mathrm{d}(P,C'B')$$
$$\le aPA+bPB+cPC.$$



Vậy $aR_1+bR_2+cR_3\ge 4S$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P$ là trực tâm giác ABC.

Theo BĐT(2) ta có:

$$\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}\ge\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\sqrt{yz+zx+xy}}.$$

Suy ra: $\frac{R_1^2}{x}+\frac{R_2^2}{y}+\frac{R_3^2}{z}\ge\frac{4S}{\sqrt{yz+zx+xy}}$.

Bất đẳng thức 7 (*Bất đẳng thức Hayashi*).

$$\frac{R_1R_2}{ab}+\frac{R_2R_3}{bc}+\frac{R_3R_1}{ca}\ge 1.$$

Chứng minh. Từ (4), thay $x=aR_1, y=bR_2$, $z=cR_3$, ta được:

$$\frac{R_2R_3}{bc}+\frac{R_3R_1}{ca}+\frac{R_1R_2}{ab}\ge\left(\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{aR_1+bR_2+cR_3}\right)^2=1.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P$ là trực tâm giác nhọn ABC.

Bất đẳng thức 8. $\frac{aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2}{aR_1+bR_2+cR_3}\ge\sqrt{2Rr}$.

Chứng minh. Thay $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$ vào (2) ta được: $aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2\ge\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\left(aR_1+bR_2+cR_3\right)$.

Lại có: $S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}=\sqrt{\frac{abc}{2p}}=\sqrt{2Rr}$.

Từ đó ta có: $\frac{aR_1^2+bR_2^2+cR_3^2}{aR_1+bR_2+cR_3}\ge\sqrt{2Rr}$.

Bất đẳng thức 9 (*Bất đẳng thức Hayashi tổng quát*).

$$\frac{R_2R_3}{yzbc}+\frac{R_3R_1}{zxca}+\frac{R_1R_2}{xyab}\ge\left(\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{xaR_1+ybR_2+zcR_3}\right)^2.$$

Chứng minh. Thay thay x bởi $\frac{R_1}{xa}$, y bởi $\frac{R_2}{yb}$, z bởi $\frac{R_3}{zc}$ vào (2) ta được:

$$xaR_1+ybR_2+zcR_3\ge\frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\sqrt{\frac{R_2R_3}{yzbc}+\frac{R_3R_1}{zxca}+\frac{R_1R_2}{xyab}}}.$$

Chuyển vế và bình phương, ta được đpcm.

Bất đẳng thức 10.

$$(R_2R_3+R_3R_1+R_1R_2)(R_1+R_2+R_3)^2 \ge (aR_1+bR_2+cR_3)^2.$$

Chứng minh. Thay $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$ vào BĐT9, ta được đpcm.

Bất đẳng thức 11. $\frac{R_1^2}{r_a}+\frac{R_2^2}{r_b}+\frac{R_3^2}{r_c} \ge \frac{aR_1+bR_2+cR_3}{p}.$

Chứng minh. Thay $x=r_a; y=r_b; z=r_c$ vào (2) và áp dụng đồng nhất thức $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$ (xem, thí dụ, [1], Bài 3.4.4, trang 188), ta có đpcm.

Bất đẳng thức 12. $\frac{R_1^2}{h_a}+\frac{R_2^2}{h_b}+\frac{R_3^2}{h_c} \ge 4r.$

Chứng minh. Thay $x=h_a; y=h_b; z=h_c$ vào BĐT 6 và áp dụng BĐT $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a \le p^2$ (xem, thí dụ, [1], Bài 3.3.3, trang 172), ta được:

$$\frac{R_1^2}{h_a}+\frac{R_2^2}{h_b}+\frac{R_3^2}{h_c} \ge \frac{aR_1+bR_2+cR_3}{\sqrt{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a}} \ge \frac{4S}{p}=4r.$$

Hệ quả 2 (Jian Liu, 2011, [6])

$$\frac{R_2^2+R_3^2}{a^2}x^2+\frac{R_3^2+R_1^2}{b^2}y^2+\frac{R_1^2+R_2^2}{c^2}z^2 \ge \frac{2}{3}(yz+zx+xy).$$

Bất đẳng thức 13.

$$\frac{bc}{\sqrt{(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2)}}+\frac{ca}{\sqrt{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)}}+\frac{ab}{\sqrt{(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}} \le \frac{9}{2}.$$

Chứng minh. Trong Hệ quả 2, thay

$$x=\frac{a}{\sqrt{R_2^2+R_3^2}}, y=\frac{b}{\sqrt{R_3^2+R_1^2}}, z=\frac{c}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}},$$

ta được đpcm.

Từ BĐT 13 (xem [6]) suy ra bất đẳng thức 14 và bất đẳng thức 15 như sau.

Bất đẳng thức 14.

$$(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2) \ge \frac{8}{27}(abc)^2.$$

Chứng minh. Theo BĐT 13 và BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{9}{2} \ge \frac{bc}{\sqrt{(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2)}}+\frac{ca}{\sqrt{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)}}+\frac{ab}{\sqrt{(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}}.$$

Suy ra: $\frac{3}{2} \ge \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}}.$

Lập phương hai vế ta được:

$$\frac{27}{8} \ge \frac{a^2b^2c^2}{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}$$

$$\Leftrightarrow (R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2) \ge \frac{8a^2b^2c^2}{27}.$$

Bất đẳng thức 15.

$$\frac{\sqrt{R_2^2+R_3^2}}{a}+\frac{\sqrt{R_3^2+R_1^2}}{b}+\frac{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}{c} \ge \sqrt{6}.$$

Chứng minh. Ta đặt

$$x=\frac{a}{\sqrt{R_2^2+R_3^2}}, y=\frac{b}{\sqrt{R_3^2+R_1^2}}, z=\frac{c}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}.$$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx \ge \sqrt{6}xyz. \quad (1)$$

Mặt khác, theo BĐT 13

$$\frac{bc}{\sqrt{(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2)}}+\frac{ca}{\sqrt{(R_1^2+R_2^2)(R_2^2+R_3^2)}}+\frac{ab}{\sqrt{(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)}} \le \frac{9}{2}.$$

BĐT này được viết lại thành:

$$xy+yz+zx \le \frac{9}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra ta cần chứng minh

$$\sqrt{6}xyz \le \frac{9}{2} \Leftrightarrow xyz \le \frac{9}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow (xyz)^2 \le \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(abc)^2}{(R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2)} \le \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow (R_2^2+R_3^2)(R_3^2+R_1^2)(R_1^2+R_2^2) \ge \frac{8}{27}(abc)^2$$

(đây chính là BĐT 14 đã được chứng minh)

Vậy BĐT 15 được chứng minh hoàn toàn.

Bất đẳng thức 16 (*xem* [6], *Tổng quát của Bất đẳng thức 15*).

$$\frac{\sqrt{R_2^2+R_3^2}}{a}x^2+\frac{\sqrt{R_3^2+R_1^2}}{b}y^2+\frac{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}{c}z^2 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}(yz+zx+xy).$$

Chứng minh. Theo [6] ta có Bổ đề sau: *Cho* $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ *và* m *là các số thực dương. Khi đó với mọi số thực* x, y, z *nếu có bất đẳng thức*

$$p_1^m x^2+p_2^m y^2+p_3^m z^2 \geq q_1^m yz+q_2^m zx+q_3^m xy$$

thì với $0<k<m$, *ta cũng có bất đẳng thức*

$$p_1^k x^2+p_2^k y^2+p_3^k z^2 \geq q_1^k yz+q_2^k zx+q_3^k xy.$$

Từ Hệ quả 2 và áp dụng Bổ đề với $p_1=\frac{R_2^2+R_3^2}{a^2}; p_2=\frac{R_3^2+R_1^2}{b^2}; p_3=\frac{R_1^2+R_2^2}{c^2}; m=1; k=\frac{1}{2}$

và $q_1=q_2=q_3=\frac{2}{3}$ ta có:

$$\left(\frac{R_2^2+R_3^2}{a^2}\right)^{1/2}x^2+\left(\frac{R_3^2+R_1^2}{b^2}\right)^{1/2}y^2+\left(\frac{R_1^2+R_2^2}{c^2}\right)^{1/2}z^2 \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}(yz+zx+xy).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{R_2^2+R_3^2}}{a}x^2+\frac{\sqrt{R_3^2+R_1^2}}{b}y^2+\frac{\sqrt{R_1^2+R_2^2}}{c}z^2 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}(yz+zx+xy).$$

Bất đẳng thức 17.

$$\sqrt{R_2^2+R_3^2}+\sqrt{R_3^2+R_1^2}+\sqrt{R_1^2+R_2^2} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right).$$

Chứng minh. Thay $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ vào BĐT 16, ta được đpcm.

Trong [6] đã đưa ra một số giả thuyết sau.

Giả thuyết 1.

$$\sqrt{R_2^2+R_3^2}+\sqrt{R_3^2+R_1^2}+\sqrt{R_1^2+R_2^2} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}(a+b+c).$$

Giả thuyết 2.

$$\frac{(R_2+R_3)^2R_1^2}{a^4}+\frac{(R_3+R_1)^2R_2^2}{b^4}+\frac{(R_1+R_2)^2R_3^2}{c^4} \geq \frac{4}{3}.$$

Giả thuyết 3.

$$\frac{r_2^2+r_3^2}{\sin^2 A}+\frac{r_3^2+r_1^2}{\sin^2 B}+\frac{r_1^2+r_2^2}{\sin^2 C} \geq \frac{2}{9}(R_1+R_2+R_3)^2.$$

Các giả thuyết này đã được *Jian Liu* kiểm tra trên máy tính, tuy nhiên, chúng vẫn chưa được chứng minh.

Thay lời kết. BĐT Klamkin là một BĐT mới và hay, ngoài các hệ quả nêu trong bài, BĐT Klamkin còn có nhiều mở rộng và hệ quả khác. Thí dụ, mở rộng BĐT Klamkin cho hai điểm trong tam giác (xem, thí dụ, [3]. Hi vọng bạn đọc có thể tiếp tục khai thác và sáng tạo ra thêm nhiều BĐT khác nữa từ BĐT Klamkin.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân, *Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2017.

[2] Đỗ Thanh Sơn, *Phép biến hình trên mặt phẳng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006 (Tái bản lần thứ hai).

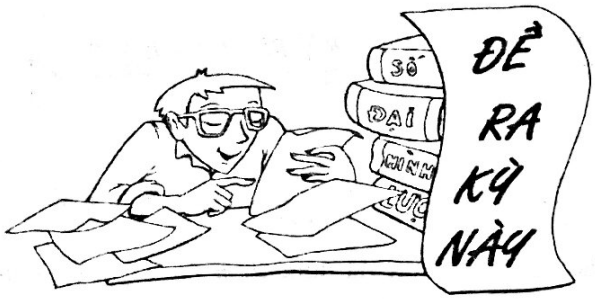
[3] Xiao-Guang Chu and Zhi-Hua Zhang (2007), *A Geometric Inequality fortwo Interior Points of the Triangle*, http://www.researchgate.net/publication/265266503 pp. 1-4.

[4] M. S. Klamkin (1975), *Geometric Inequalities via the Polar Moment of Inertia*, Mathematics Magazine, Vol. 48, No 1, pp. 44-46.

[5] Jian Liu (2008) *A Weighted Geometric Inequality and Its Applications*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol 9, Issue 2, Article 58, 9 pages.

[6] Jian Liu (2011), *A New Geometric Inequality and Its Applications*, Journal of Science and Arts, No 11 (14), pp. 5-12.

[7] Mitrinovic, D., Pecaric, J.E., Volenec, V.,*Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1989.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/506 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=6$.

TRƯƠNG QUANG AN (*Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi*)

Bài T2/506 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là điểm thuộc miền trong của góc A sao cho $HB \perp BA$, $HC \perp CA$. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $BM=\frac{1}{4}BC$. Gọi N là trung điểm AC. Tính số đo góc $\widehat{HMN}$.

NGUYỄN VĂN BẢN

(*GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, Điện Biên*)

Bài T3/506. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

$$y^3-2(x-4)y^2+(x^2-9x-1)y+3x^2+x=0.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Bài T4/506. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CF. Kẻ FH và EK cùng vuông góc với BC $(H, K \in BC)$. Kẻ HM song song với AC và KN song song với AB $(M \in AB,\ N \in AC)$. Chứng minh $EF // MN$.

LỤC BÌNH

(*GV Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị*)

Bài T5/506. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{2x+6}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2}=2.$$

LẠI QUANG THỌ

(*Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/506. Cho $a<b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^b=b^a$. Chứng minh tồn tại số thực dương c sao cho $a=\left(1+\frac{1}{c}\right)^c$, $b=\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+1}$.

TRẦN MINH HIỀN

(*GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước*)

Bài T7/506. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\tan x-\tan y=(1+\sqrt{x+y})^y-(1+\sqrt{x+y})^x\\ 3^{\sqrt{1-x}}+5^{\sqrt{1-y}}=2(1+\sqrt{9-10x+y})\end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Bài T8/506. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{(b+c)a}{m_a^2}+\frac{(c+a)b}{m_b^2}+\frac{(a+b)c}{m_c^2}\ge 8,$$

trong đó a, b, c, m_a, m_b, m_c thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T9/506. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+\sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}}+\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}$.

HOÀNG NGỌC MINH

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/506. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho 2^n+n^2+1 là số chính phương.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(*GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang*)

Bài T11/506. Cho dãy số nguyên dương $(a_n)(n=1, 2, ...)$ tăng nghiêm ngặt. Đặt

$$S_n=\frac{\sqrt{a_1}}{[a_1,a_2]}+\frac{\sqrt{a_2}}{[a_2,a_3]}+...+\frac{\sqrt{a_n}}{[a_n,a_{n+1}]},\forall n=1,2,...$$

(với hai số nguyên x, y ta kí hiệu $[x, y]$ là bội chung nhỏ nhất của x và y). Chứng minh rằng dãy số (S_n), $n=1, 2, ...$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

NGUYỄN TÀI CHUNG

(*GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/506 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=6$.

TRƯƠNG QUANG AN (*Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi*)

Bài T2/506 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là điểm thuộc miền trong của góc A sao cho $HB \perp BA$, $HC \perp CA$. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $BM=\frac{1}{4}BC$. Gọi N là trung điểm AC. Tính số đo góc $\widehat{HMN}$.

NGUYỄN VĂN BẢN

(*GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, Điện Biên*)

Bài T3/506. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện

$$y^3-2(x-4)y^2+(x^2-9x-1)y+3x^2+x=0.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Bài T4/506. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CF. Kẻ FH và EK cùng vuông góc với BC $(H, K \in BC)$. Kẻ HM song song với AC và KN song song với AB $(M \in AB, N \in AC)$. Chứng minh $EF // MN$.

LỤC BÌNH

(*GV Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị*)

Bài T5/506. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{2x+6}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2}=2.$$

LẠI QUANG THỌ

(*Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/506. Cho $a<b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^b=b^a$. Chứng minh tồn tại số thực dương c sao cho $a=\left(1+\frac{1}{c}\right)^c$, $b=\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+1}$.

TRẦN MINH HIỀN

(*GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước*)

Bài T7/506. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\tan x-\tan y=(1+\sqrt{x+y})^y-(1+\sqrt{x+y})^x\\ 3^{\sqrt{1-x}}+5^{\sqrt{1-y}}=2(1+\sqrt{9-10x+y})\end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Bài T8/506. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{(b+c)a}{m_a^2}+\frac{(c+a)b}{m_b^2}+\frac{(a+b)c}{m_c^2}\ge 8,$$

trong đó a, b, c, m_a, m_b, m_c thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T9/506. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}+\sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}}+\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}$.

HOÀNG NGỌC MINH

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/506. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho 2^n+n^2+1 là số chính phương.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(*GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang*)

Bài T11/506. Cho dãy số nguyên dương $(a_n)(n=1, 2, ...)$ tăng nghiêm ngặt. Đặt

$$S_n=\frac{\sqrt{a_1}}{[a_1,a_2]}+\frac{\sqrt{a_2}}{[a_2,a_3]}+...+\frac{\sqrt{a_n}}{[a_n,a_{n+1}]}, \forall n=1,2,...$$

(với hai số nguyên x, y ta kí hiệu $[x, y]$ là bội chung nhỏ nhất của x và y). Chứng minh rằng dãy số (S_n), $n=1, 2, ...$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

NGUYỄN TÀI CHUNG

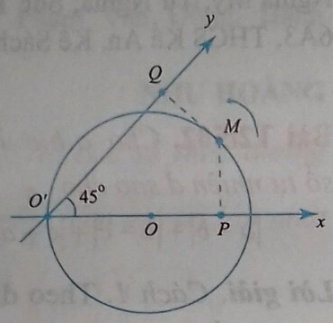
(*GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai*)

Bài T12/506. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là tâm đường tròn đi qua A, B tiếp xúc với BC và J là tâm đường tròn đi qua B, H và tiếp xúc với BC. Gọi M là trung điểm của AH, $S = EF \cap BC$. Chứng minh rằng SM chia đôi IJ.

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang, Hà Giang)

Bài L1/506. Một chất điểm M chuyển động tròn đều trên quỹ đạo tâm O và có chiều ngược kim đồng hồ. Hình chiếu của M lên trục Ox là điểm P dao động điều hòa theo phương trình: $x = 8\cos\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$ cm. Hỏi hình chiếu của M lên trục $O'y$ với trục Ox góc 45° (xem hình vẽ) là Q có phương trình chuyển động $y(t)$ như thế nào?



NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/506. Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch $i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right)$ (A) và $i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)$ (A). Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

CÁC LỚP THCS

Bài T1/506 (For 6th grade). Find all integers x, y, z which satisfy $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x = 6$.

Bài T2/506 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A. Let H be the point in the interior domain determined by the angle A such that $HB \perp BA$, $HC \perp CA$. On the line segment BC we choose M such that $BM = \frac{1}{4}BC$. Let N be the midpoint of AC. Calculate the angle $\widehat{HMN}$.

Bài T3/506. Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying

$$y^3 - 2(x-4)y^2 + (x^2 - 9x - 1)y + 3x^2 + x = 0.$$

Bài T4/506. Given an acute triangle ABC and suppose that BE and CF are the two altitudes. Draw FH and EK perpendicular to BC $(H, K \in BC)$. Draw HM parallel to AC and KN parallel to AB $(M \in AB, N \in AC)$. Show that $EF // MN$.

Bài T5/506. Solve the equation

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2x+6}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}\right)^2} = 2.$$

CÁC LỚP THPT

Bài T6/506. Given two positive numbers a and b such that $a < b$ and $a^b = b^a$. Show that there exists a positve number c such that

$$a = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^c, \quad b = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{c+1}.$$

Bài T7/506. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = (1 + \sqrt{x+y})^y - (1 + \sqrt{x+y})^x \\ 3^{\sqrt{1-x}} + 5^{\sqrt{1-y}} = 2(1 + \sqrt{9 - 10x + y}) \end{cases}.$$

Bài T8/506. Show that for any triangle ABC we always have

$$\frac{(b+c)a}{m_a^2} + \frac{(c+a)b}{m_b^2} + \frac{(a+b)c}{m_c^2} \geq 8,$$

where a, b, c, m_a, m_b, m_c respectively are the lengths of the sides BC, CA, AB and the corresponding medians.

Bài T9/506. Let a, b, c be positive numbers such that $a + b + c = 3$. Find the minimum value of the expression $M = \sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}} + \sqrt[3]{\frac{b^5}{c^4}} + \sqrt[3]{\frac{c^5}{a^4}}$.

(Xem tiếp trang 30)

Bài T1/502. *Chứng minh rằng:*

$A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{10}} - 5$ *chia hết cho 7.*

Lời giải. Chú ý rằng $10^3 + 1 = 1001 = 7.11.13$ nên 10^3 có dạng $7k - 1$ với số nguyên dương k. Với các số nguyên dương k và h thì

$$(7k-1)(7h-1) = 7(7kh - k - h) + 1$$

và $$(7k-1)(7h+1) = 7(7kh + k - h) - 1.$$

Từ đó suy ra: $(7k-1)^{2t} = 7m + 1$ và $(7k-1)^{2t+1} = 7n - 1$ với các số nguyên dương t, m, n.

Số $10^{10} = 10^{3.3+1} = 10(10^3)^3 = 10(7n-1) = 70n - 14 + 4 = 7r_1 + 4$ với các số nguyên dương n, r_1.

Số $10^{10^2} = 10^{3.33+1} = 10(10^3)^{33}$
$= 10(7k-1)^{33} = 10(7q-1)$
$= 70q - 14 + 4 = 7r_2 + 4$

với các số nguyên dương q, r_2.

Tương tự, $10^3 = 3.333 + 1$, $10^4 = 3.3333 + 1$, ... nên $10^{10^3} = 7r_3 + 4, \ldots, 10^{10^{10}} = 7r_{10} + 4$ với các số nguyên dương $r_3, \ldots, r_{10}$. Như vậy

$A = 10^{10} + 10^{10^2} + \ldots + 10^{10^{10}} - 5$
$= (7r_1 + 4) + (7r_2 + 4) + \ldots + (7r_{10} + 4) - 5$
$= 7(r_1 + r_2 + \ldots + r_{10}) + 4.10 - 5$
$= 7(r_1 + r_2 + \ldots + r_{10}) + 35$ chia hết cho 7. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Cách giải khác: Do $10^6 - 1 = 999999 = 9.111111 = 9.7.15873$ chia hết cho 7 nên chứng minh bằng quy nạp theo n được $10^{6n} - 1$ chia hết cho 7. Các số 96, 996, 9996 ,... chia hết cho 2 và cho 3 nên chia hết cho 6, do đó các số $10 = 6 + 4$, $10^2 = 96 + 4$, $10^3 = 996 + 4$, $10^4 = 9996 + 4$, ... chia cho 6 đều dư 4. Với $m = 6n + 4$ thì $10^{6n+4} - 10^4 = 10^4(10^{6n} - 1)$ chia hết cho 7, do đó $10^{6n+4} = 7h + 10^4 = 7h + 10.10^3 = 7h + 10(7k-1)$ $= 7(10k + h) - 14 + 4 = 7r + 4$ với các số nguyên dương m, n, h, k, r. Từ đó tính tổng A như trên.

2) Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Nghệ An**: *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Đinh Ngọc Bảo Lâm*, 6B, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/502. *Cho a, b, c là các số nguyên. Tìm số tự nhiên d sao cho*

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2018^d + 2019.$$

Lời giải. *Cách 1.* Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối: $|x| = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ nên $|x| + x$ chia hết cho 2, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Áp dụng điều này ta có:

$(|a-b| + |b-c| + |c-a|) =$
$= (|a-b| + a - b) + (|b-c| + b - c) + (|c-a| + c - a)$

chia hết cho 2. Do đó $2018^d + 2019$ chia hết cho 2. Vậy $2018^d + 2019$ là số chẵn. Suy ra 2018^d là số lẻ. Vậy $d = 0$.

Cách 2. Nhận xét rằng: $|a-b|$ và $a-b$; $|b-c|$ và $b-c$; $|c-a|$ và $c-a$ có cùng tính chẵn lẻ. Do đó $|a-b| + |b-c| + |c-a|$ có cùng tính chẵn lẻ với $(a-b) + (b-c) + (c-a)$. Nhưng do $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ là số chẵn nên $|a-b| + |b-c| + |c-a|$ là số chẵn. Từ đó như cách 1 tìm được $d = 0$.

Cách 3. Do vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau nên ta có thể giả sử: $a \geq b \geq c$. Khi đó: $|a-b| + |b-c| + |c-a| = a - b + b - c + a - c = 2(a-c)$ là số chẵn, do đó $2018^d + 2019$ là số chẵn. Từ đây ta cũng tìm được $d = 0$.

➢***Nhận xét.*** Khá nhiều các bạn tham gia giải bài này và cách giải của các bạn như các cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa.

Phú Thọ: *Nguyễn Trung Kiên*, 6A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Bùi Việt Hưng, Lương Việt Hoàng*, 6A1, THCS Giấy Phong Châu. **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hùng, Vương Viết Lượng*, 6A, *Tăng Thế Anh*, 6B, *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, *Kiều Đình Nam, Nguyễn Công An, Hoàng Đình Đức, Đậu Nhật Nam, Nguyễn Công Phúc*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trần Phương Mai*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Điệp Diệu Châu*, 7B, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành.

NHƯ HOÀNG

Bài T3/502. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$.*

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2+\frac{1}{4}=1$ và $P=-\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}$.

Xét $2(1-a)(1-b)=2(1+ab-a-b)$

$$=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{4}+2ab-2(a+b)+1$$

$$=(a+b-1)^2+c^2+\frac{1}{4}\ge c.$$

Suy ra: $(1-a)(1-b)\ge\frac{c}{2}>0$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a+b=1\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$. Mặt khác lại có:

$$1-c=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{4}-c=a^2+b^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge 2ab,$$

dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$. Do đó:

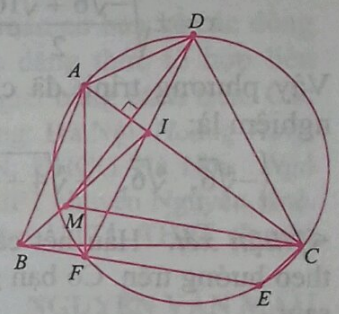
$$(1-a)(1-b)(1-c)\ge\frac{c}{2}.2ab=abc.$$

Suy ra: $P=-\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}\le -1$; $P=-1$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $\max P=-1$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Trong lời giải, một số bạn đã nhầm khi mặc nhiên coi ba số $1-\frac{1}{a},1-\frac{1}{b},1-\frac{1}{c}$ là không âm và áp dụng BĐT Cauchy với chúng mặc dù thực tế chúng có thể âm. Một số bạn khác cũng ra đúng kết quả nhưng lời giải còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai. **Nghệ An:** *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/502. *Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{ACM}$. Gọi D là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AC. Vẽ hình bình hành BMCE. Tia BM cắt cạnh AC tại I. Tia DI cắt cắt đường thẳng BE ở F. Chứng tỏ rằng các điểm A, D, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.*



Lời giải. Xét trường hợp F nằm giữa B và E. Các trường hợp khác làm tương tự.

• Ta có $\widehat{FDC}=\widehat{IMC}$ (tính chất đối xứng).

Lại có $BI \parallel EC$ nên $\widehat{IMC}=\widehat{MCE}=180^\circ-\widehat{CEB}$.

Suy ra $\widehat{FDC}+\widehat{CEF}=180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CDFE$ nội tiếp (1).

• Mặt khác,

$$\widehat{ABF}=\widehat{ABM}+\widehat{MBE}=\widehat{ACM}+\widehat{MCE}=\widehat{ACE}$$

Từ $BI \parallel CE$ và từ tính chất đối xứng ta có $\widehat{AID}=\widehat{AIM}=\widehat{ACE}=\widehat{ABF}$, nên tứ giác $ABFI$ nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{AFI}=\widehat{ABI}=\widehat{ACM}=\widehat{ACD}$, do đó tứ giác $ADCF$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2), suy ra các điểm A, D, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. ❐

⋖***Nhận xét.*** Các bạn có tên dưới đây có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 9A1, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Tr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; *Trịnh Duy Phong*, 9A, THCS Tr. Triệu Sơn; **Phú Thọ:** *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Nghệ**

An: *Trương Công Cảnh, Nguyễn Phương Uyên*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/502. *Giải phương trình*

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0.$$

Lời giải. Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình trở thành: $t^3 - 7t + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 6) - (t - \sqrt{6}) = 0$

$\Leftrightarrow t(t - \sqrt{6})(t + \sqrt{6}) - (t - \sqrt{6}) = 0$

$\Leftrightarrow (t - \sqrt{6})(t^2 + \sqrt{6}t - 1) = 0.$

Nếu $t - \sqrt{6} = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{6}$.

Nếu $t^2 + \sqrt{6}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2}$.

Vì $t = x^2 \geq 0$ nên $x^2 = \dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}$, ta được

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}} = \pm\sqrt[4]{4 - \sqrt{15}}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập hợp gồm 4 nghiệm là:

$$\left\{-\sqrt[4]{6},\ \sqrt[4]{6},\ -\sqrt[4]{4 - \sqrt{15}},\ \sqrt[4]{4 - \sqrt{15}}\right\}. \quad \square$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn đã giải bài toán theo hướng trên. Có bạn giải theo cách khác như sau:

Đặt $a = \sqrt{6} \Rightarrow 7x^2 = a^2x^2 + x^2$, phương trình trong đầu bài có thể viết thành:

$$x^6 - a^2x^2 - x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2a^2 - a - x^6 + x^2 = 0.$$

Coi đây là PT bậc hai của a, ta tính được

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 \\ a = \dfrac{1 - x^4}{x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6} = x^2 \\ \sqrt{6} = \dfrac{1 - x^4}{x^2} \end{array}\right.;$$

từ đó tìm được nghiệm của phương trình.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Nghệ An**: *Lê Hoài Sơn, Nguyễn Văn Chung, Nguyễn Phương Uyên*, 8A, Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa**: *Trịnh Duy Phong*, 9A, THCS Thị Trấn Triệu Sơn, Triệu Sơn; *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trần Phương Mai, Võ Thị Hồng Thu*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo*, 9/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/502. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^y + 1 & (1) \\ 128x^3\sqrt{4x^2 + y^2} = y^3\sqrt{64x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x > 0, y > 0$.

Cách 1. Chia hai vế của (2) cho $64x^2y^2$, ta có:

$$\frac{2x}{y^2}\sqrt{4x^2 + y^2} = \frac{y}{64x^2}\sqrt{64x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{y}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{y^2}} = \frac{y}{8x}\sqrt{1 + \frac{y^2}{64x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{y}\sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y}\right)^2} = \frac{y}{8x}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{8x}\right)^2} \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{1 + t^2}$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \sqrt{1 + t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} > 0$ với $\forall t \in (0; +\infty)$, nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nhận thấy PT(3) có dạng

$$f\left(\frac{2x}{y}\right) = f\left(\frac{y}{8x}\right) \Leftrightarrow \frac{2x}{y} = \frac{y}{8x} \Rightarrow y = 4x$$

(vì $x > 0, y > 0$). Thay $y = 4x$ vào PT(1) ta được

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{y}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^y + 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} y = \left(\frac{1}{4}\right)^y.$$

Xét hàm số $g(y) = \log_{\frac{1}{4}} y - \left(\dfrac{1}{4}\right)^y$ với $y > 0$, ta có:

$$g'(y) = \frac{1}{y\ln\frac{1}{4}} + \frac{\ln 4}{4^y} = \frac{-4^y + y.(\ln 4)^2}{y.4^y.\ln 4}.$$

Nhận thấy $g'(y) < 0$ khi $y > 0$, suy ra hàm số $g(y)$ nghịch biến với $y > 0$. Lại có $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ nên phương trình $g(y) = 0$ có nghiệm duy nhất là $y = \dfrac{1}{2}$. Từ đó tìm được $x = \dfrac{1}{8}$ (thỏa mãn ĐK). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 2. Từ PT(2) ta có:

$$(4x)^2\sqrt{(4x)^4+4.(4x)^2.y^2}=y^2\sqrt{4.(4x)^2.y^2+y^4}\quad(4)$$

+ Nếu $4x>y>0$ thì VT(4) > VP(4).

+ Nếu $0<4x<y$ thì VT(4) < VP(4).

Do đó (4) $\Leftrightarrow$ $4x=y$. Thay vào PT(1) ta được:

$$\log_{\frac{1}{4}} y=\left(\frac{1}{4}\right)^y\quad(5).$$

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ yOz, ta vẽ hai đồ thị hàm số $z=\log_{\frac{1}{4}} y$ và $z=\left(\frac{1}{4}\right)^y$, chúng cắt nhau tại một điểm với $y=\frac{1}{2}$ nên PT(5) có nghiệm $y=\frac{1}{2}$. Suy ra $x=\frac{1}{8}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$. ❐

Nhận xét. Đây là bài toán giải hệ phương trình kết hợp mũ, lôgarit và căn thức. Vì vậy ta nên sử dụng bất đẳng thức và tính chất của hàm số để đánh giá. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định**: *Trần Huy Lực*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Bình**: *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tấn Lực*, 10T1, *Vũ Công Thiện*, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/502. *Cho khai triển*

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{2018})^{2019}=$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4074342}x^{4074342}.\quad(1)$$

Chứng minh đẳng thức

$$C_{2019}^0a_{2019}-C_{2019}^1a_{2018}+C_{2019}^2a_{2017}-C_{2019}^3a_{2016}+$$
$$+\ldots+C_{2019}^{2018}a_1-C_{2019}^{2019}a_0=-2019.$$

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*). Với $x\neq 1$, từ điều kiện (1) suy ra:

$$(x-1)^{2019}(1+x+x^2+\ldots+x^{2018})^{2019}$$
$$=(x-1)^{2019}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4074342}x^{4074342})$$
$$\Leftrightarrow(x^{2019}-1)^{2019}=(x-1)^{2019}(a_{4074342}x^{4074342}+$$
$$+a_{4074341}x^{4074341}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0)\quad(2).$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$(x^{2019}-1)^{2019}=\sum_{k=0}^{2019}C_{2019}^kx^{2019k}(-1)^{2019-k}\quad(3)$$

$$(x-1)^{2019}(a_{4074342}x^{4074342}+a_{4074341}x^{4074341}+\ldots+a_1x+a_0)$$
$$=\left(\sum_{l=0}^{2019}C_{2019}^lx^l(-1)^{2019-l}\right)(a_{4074342}x^{4074342}+$$
$$+a_{4074341}x^{4074341}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0)\quad(4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

- Hệ số của x^{2019} ở (3) ứng với $k=1$ là

$$C_{2019}^1(-1)^{2018}=2019;$$

- Hệ số của x^{2019} ở (4) ứng với $l\in\{0,1,2,\ldots,2019\}$ là $C_{2019}^0(-1)^{2019}a_{2019}+C_{2019}^1(-1)^{2018}a_{2018}+C_{2019}^2(-1)^{2017}a_{2017}$

$$+\ldots+C_{2019}^{2018}(-1)^1a_1+C_{2019}^{2019}(-1)^0a_0$$
$$=-C_{2019}^0a_{2019}+C_{2019}^1a_{2018}-C_{2019}^2a_{2017}$$
$$+C_{2019}^3a_{2016}-\ldots-C_{2019}^{2018}a_1+C_{2019}^{2019}a_0$$
$$=-(C_{2019}^0a_{2019}-C_{2019}^1a_{2018}+C_{2019}^2a_{2017}$$
$$-C_{2019}^3a_{2016}+\ldots+C_{2019}^{2018}a_1-C_{2019}^{2019}a_0).$$

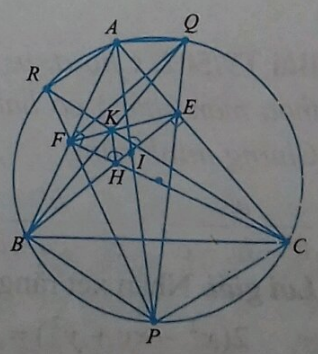
Từ (2), suy ra đpcm. ❐

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về các đồng nhất thức đa thức và các đẳng thức tổ hợp liên quan. Đa số các bạn đều giải bằng cách trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Ngô Văn Minh Thắng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/502. *Cho tam giác nhọn ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm, P là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. E là giao điểm của BH và AC, F là giao điểm của CH và AB. Q, R theo thứ tự là giao điểm thứ hai của PE, PF và (O). K là giao điểm của BQ và CR. Chứng minh rằng KH // AP.*

Lời giải. Áp dụng định lí Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix}R & A & Q\\ B & P & C\end{pmatrix}$, để ý rằng



$F=RP\cap AB$;

$E=PQ\cap AC$;

$K=BQ\cap CR$, suy ra ba điểm K, E, F thẳng hàng.

Ta có $\dfrac{KF}{KE}=\dfrac{S_{FBQ}}{S_{EBQ}}=\dfrac{S_{ABQ}.\dfrac{BF}{AB}}{S_{BPQ}.\dfrac{QE}{PQ}}$

$$=\frac{AB.AQ.\dfrac{BF}{AB}}{PB.PQ.\dfrac{QE}{PQ}}=\frac{BF}{PB}.\frac{AQ}{QE} \qquad (1)$$

(lưu ý rằng $\sin\widehat{BAQ}=\sin\widehat{BPQ}$).

Mặt khác $\Delta AQE \backsim \Delta PCE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AQ}{QE}=\dfrac{PC}{CE}$,

mà $PB=PC$ nên

$\dfrac{BF}{PB}.\dfrac{AQ}{QE}=\dfrac{BF}{CE}=\dfrac{HF}{HE}$ (do $\Delta BFH \backsim \Delta CEH$ (g.g)) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{KF}{KE}=\dfrac{HF}{HE}$.

Do đó HK là đường phân giác của góc $\widehat{FHE}$.

Gọi I là giao điểm của AP và BE, khi đó

$$\widehat{AIE}=90^o-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\widehat{KHE},$$

dẫn đến $KH // AP$ (đpcm). ❐

Nhận xét. Số bài gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Nội: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ**: *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Tất Đạt*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Duy Phước*, *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đồng Tháp**: *Huỳnh Tấn Phúc*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quanh Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Phước**: *Nguyễn Trương Gia Huy*, 11T5, THPT chuyên Bình Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/502. *Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge a+b+c.$$

Lời giải. Nhận xét rằng

$$2(x^2-xy+y^2)=x^2+(x-y)^2+y^2>0$$

nếu $x^2+y^2>0$. Do vai trò của a, b, c trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\ge 0, b>0$.

Ta có $a^3+b^3\ge c^3+a^3\ge b^3+c^3>0$ và

$$a^3(b+c)=a^3.b+c.a^3\ge a.b^3+c^3.a=a(b^3+c^3)$$

$$c^3(b+c)=c^3.a+b.c^3\le c.a^3+b^3.c=c(a^3+b^3).$$

Do đó

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-bc+b^2}-a-b-c$$

$$=\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}+\frac{b^3(c+a)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)}{a^3+b^3}-a-b-c$$

$$=\left(\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}-a\right)+\left(\frac{b^3(c+a)}{c^3+a^3}-b\right)+\left(\frac{c^3(a+b)}{a^3+b^3}-c\right)$$

$$=\frac{a^3(b+c)-a(b^3+c^3)}{b^3+c^3}+\frac{b^3(c+a)-b(c^3+a^3)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)-c(a^3+b^3)}{a^3+b^3}$$

$$\ge\frac{a^3(b+c)-a(b^3+c^3)}{c^3+a^3}+\frac{b^3(c+a)-b(c^3+a^3)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)-c(a^3+b^3)}{c^3+a^3}$$

$$=\frac{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}{c^3+a^3}-\frac{a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)}{c^3+a^3}=0.$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-bc+b^2}\ge a+b+c \quad (1)$$

Chú ý $a^3(b+c)=a(b^3+c^3)$, suy ra hoặc $a=b=c$ hoặc $a=b>0$, $c=0$. Thử lại ta thấy cả hai trường hợp trên, bất đẳng thức (1) đều trở thành đẳng thức.

Như vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a=b=c$ hoặc trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau, lớn hơn 0. ❐

Nhận xét. Lời giải trên chỉ sử dụng tính chất của phân số. Tất cả các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đều theo cách dùng bất đẳng thức cổ điển, khó khăn hơn nhiều so với cách giải trên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 10/502. *Đặt* $S_n = \sum_{k=2}^{n} k\cos\frac{\pi}{k}$. *Hãy tìm*

$$\lim \frac{S_n}{n^2}.$$

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**).

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$1 - x \le \cos x \le 1,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bất đẳng thức $\cos x \le 1$ là hiển nhiên.

Ta chứng minh $\cos x \ge 1 - x$.

Xét hàm số $f(x) = \cos x - 1 + x$.

Ta có $f'(x) = -\sin x + 1 \ge 0,\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó $f(x)$ là hàm tăng trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow \cos x \ge 1 - x$.

Do đó: $1 - \frac{\pi}{k} \le \cos\frac{\pi}{k} \le 1, \forall k \ge 2$.

Từ đó $\sum_{k=2}^{n} k\left(1 - \frac{\pi}{k}\right) \le S_n \le \sum_{k=2}^{n} k$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n-1)}{2} - (n-1)\pi < S_n < \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n-1)}{2n^2} - \frac{(n-1)\pi}{n^2} < \frac{S_n}{n^2} < \frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}.$$

Dễ thấy

$$\lim \frac{(n+2)(n-1)}{2n^2} = \lim\left[\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2} - \frac{(n-1)\pi}{n^2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Từ đó theo nguyên lý kẹp $\lim \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}$. ❐

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải đã cho kết quả đúng. Tuy nhiên, một số bạn dùng các định lí của chương trình đại học.

Các bạn giải tốt (chỉ dùng kiến thức ở phổ thông): **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên**: *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình**: *Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bến Tre**: *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP Bến Tre.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/502. *Có 100 hòn đá được xếp thành k đống. Một cách xếp được gọi là đặc biệt nếu 2 đống khác nhau thì có số đá khác nhau, nhưng nếu chia tùy ý 1 đống thành 2 đống nhỏ thì trong k + 1 đống mới có những đống có số đá bằng nhau. Tìm giá trị k lớn nhất, nhỏ nhất sao cho có cách xếp đặc biệt.*

Lời giải. (Của bạn *Đinh Đoàn Xuân Phương*, lớp 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**). Ký hiệu $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ là số đá của k đống. Ta có $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 100$. Giá trị k lớn nhất là 13. Thật vậy, dễ thấy $a_i \ge i$, cho nên

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 100 \ge 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$\Rightarrow k \le 13$. Con số $k = 13$ đạt được, vì dễ kiểm tra thấy 13 đống đá 1, 2, …, 11, 12, 22 là một cách xếp 100 hòn đá đặc biệt.

Giá trị k nhỏ nhất là 10. Thật vậy, nếu $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ là một cách xếp k đống đá đặc biệt thì với mỗi i, nếu chia a_i thành 2 đống có $a_i - t$ và t hòn đá tùy ý cho mọi $t \le \left[\frac{a_i - 1}{2}\right]$, ở đây $\left[\frac{a_i - 1}{2}\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{a_i - 1}{2}$, thì có trong một cách chia như vậy phải có một đống đá có số đá bằng đống a_j nào đó với $j < i$. Do tất cả số đá trong $\left[\frac{a_i - 1}{2}\right]$ cách chia trên đôi một khác nhau, suy ra có ít nhất $\left[\frac{a_i - 1}{2}\right]$ đống đá trong số đống đá có số lượng đá ít hơn a_i, suy ra $\left[\frac{a_i - 1}{2}\right] \le i - 1$

$\Rightarrow a_i \le 2i$. Từ đó ta có:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 100 \le 2 + 4 + \ldots + 2k = k(k+1)$$

$\Rightarrow k \ge 10$. Con số $k = 10$ đạt được vì dễ thấy cách xếp 100 hòn đá thành 10 đống 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 là một cách xếp đặc biệt. ❐

Nhận xét. Có ít bạn giải bài này, một bạn có đáp số sai. Các bạn có đáp số đúng là các bạn: **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, lớp 10T1 THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc**: *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T12/502. *Về phía ngoài tứ giác nội tiếp ABCD, dựng các hình vuông ABMN, BCPQ, CDRS, DAUV. Gọi B' là giao điểm của PQ và MN, D' là giao điểm của UV và RS. Chứng minh rằng trung điểm của B'D' thuộc BD.*

Lời giải. **Bổ đề.** *Cho tam giác ABC không vuông tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp. S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C. Vẽ ra phía ngoài ABC các hình vuông ABXY, ACZT. K là giao điểm của XY và ZT. Khi đó*

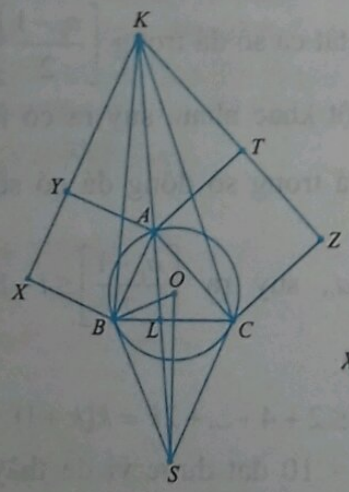
1) *A, S, K thẳng hàng.*

2) $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AK}} = -\dfrac{1}{2}\tan A.$

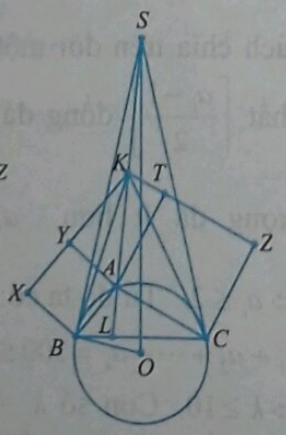
Chứng minh. 1) Gọi L là giao điểm của AK và BC (h.1, h.2). Dễ thấy

$$\frac{LB}{LC} = \frac{S(AKB)}{S(AKC)} = \frac{S(AXB)}{S(AZC)} = \frac{AB.XB}{AC.ZC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Do đó AL là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy A, S, K thẳng hàng.



(h.1)



(h.2)

2) Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1. $\widehat{A} < 90°$ (h.1). Dễ thấy

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AK}} = -\frac{AS}{AK} = -\frac{AS}{AB}.\frac{AY}{AK} = -\frac{\sin\widehat{ABS}}{\sin\widehat{ASB}}.\cos\widehat{YAK}$$

$$= -\frac{\sin(A+B)}{\sin\widehat{ASB}}.\sin\widehat{BAS} = -\sin C.\frac{\sin\widehat{BAS}}{\sin\widehat{ASB}}$$

$$= -\sin C.\frac{BS}{BA} = -\sin C.\frac{BS}{2R\sin C} = -\frac{1}{2}.\frac{BS}{BO}$$

$$= -\frac{1}{2}\tan\widehat{BOS} = -\frac{1}{2}\tan A.$$

Trường hợp 2. $\widehat{A} > 90°$ (h.2). Dễ thấy

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AK}} = \frac{AS}{AK} = \frac{AS}{AB}.\frac{AY}{AK} = \frac{\sin\widehat{ABS}}{\sin\widehat{ASB}}.\cos\widehat{YAK}$$

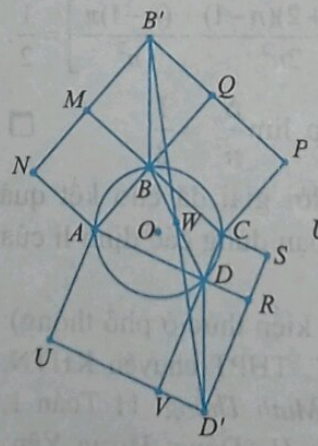
$$= \frac{\sin C}{\sin\widehat{ASB}}.\sin(180° - \widehat{BAS}) = \sin C.\frac{\sin\widehat{BAS}}{\sin\widehat{ASB}}$$

$$= \sin C.\frac{BS}{BA} = \sin C.\frac{BS}{2R\sin C} = \frac{1}{2}.\frac{BS}{BO}$$

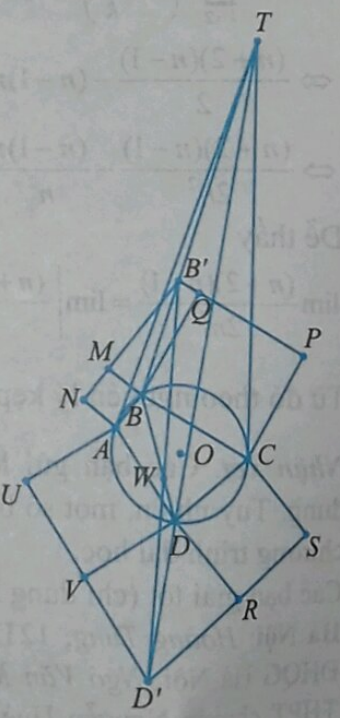
$$= \frac{1}{2}\tan\widehat{BOS} = \frac{1}{2}\tan(180° - A) = -\frac{1}{2}\tan A.$$

Trở lại giải bài toán T12 (h.3, h.4).

Gọi W là giao điểm của BD và $B'D'$. Có ba trường hợp xảy ra.



(h.3)



(h.4)

Trường hợp 1. $\widehat{B} = \widehat{D} = 90°$ (h.3).

$$Q^{90°}(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}) = Q^{90°}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{DV})$$

$$= Q^{90°}(\overrightarrow{BM}) + Q^{90°}(\overrightarrow{BQ}) + Q^{90°}(\overrightarrow{DR}) + Q^{90°}(\overrightarrow{DV})$$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

Do đó W là trung điểm chung của BD và $B'B'$. Vậy trung điểm của $B'D'$ thuộc BD.

Trường hợp 2. $\widehat{B} > 90°; \widehat{D} < 90°$ (h.4). Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại A và C. Theo bổ đề trên, $B \in TB'$; $D \in TD'$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $TB'D'$, theo bổ đề trên, ta có

$$1 = \frac{\overline{WB'}}{\overline{WD'}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{DT}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{B'T}} = \frac{\overline{WB'}}{\overline{WD'}} \cdot \left(-\frac{2}{\tan D}\right) \cdot \left(-\frac{\tan B}{2}\right)$$

$$= \frac{\overline{WB'}}{\overline{WD'}} \cdot \frac{\tan B}{\tan(180° - B)} = -\frac{\overline{WB'}}{\overline{WD'}}.$$

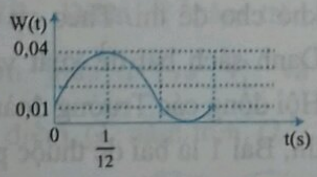
Do đó W là trung điểm chung của BD và $B'B'$. Vậy trung điểm của $B'D'$ thuộc BD.

Trường hợp 3. $\widehat{B} < 90°$; $\widehat{D} > 90°$. Tương tự trường hợp 2.

Nhận xét. Bài toán này khó, chỉ có hai bạn tham gia giải: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Kì*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/502. *Một con lắc lò xo gồm vật nặng có khối lượng m = 200g dao động điều hòa. Chọn gốc tọa độ O tại vị trí cân bằng. Sự phụ thuộc của thế năng của con lắc theo thời gian được cho như trên đồ thị. Lấy $\pi^2 = 10$. Biên độ dao động của con lắc bằng bao nhiêu?*



Hướng dẫn giải. Tại $t = 0$: $W_t = \frac{kx^2}{2} = 0{,}01$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{0.02}{k}}$. Tại $t = \frac{1}{12}$s: $W_t = \frac{kA^2}{2} = 0{,}04$

$\Rightarrow A = \pm\sqrt{\frac{0.08}{k}}$. Ta có: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\frac{0{,}02}{k}}}{\sqrt{\frac{0{,}08}{k}}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$. Từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{12}$s góc quét được :

$\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Delta t = \alpha.\frac{T}{2\pi} = \frac{\pi}{3}.\frac{T}{2\pi} = \frac{T}{6} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow T = 0{,}5$ s $\Rightarrow \omega = 4\pi$ (rad/s)

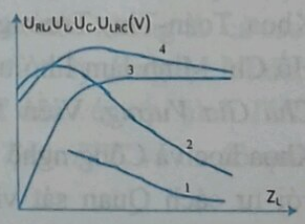
$\Rightarrow k = m\omega^2 = 0{,}2(4\pi)^2 = 32$ N

$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{0{,}08}{32}} = 0{,}05$ m $= 5$ cm.

Nhận xét. Chúc mừng ba bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Đỗ Ngọc Ánh*, lớp 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Hoàng Bảo Minh Châu*, lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Ngô Văn Minh Thắng*, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/502. *Đặt điện áp xoay chiều ổn định vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp theo thứ tự gồm cuộn cảm thuần L có cảm kháng Z_L thay đổi được, điện trở R và tụ điện C. Hình bên là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện áp hiệu dụng trên L, trên C, trên đoạn chứa RL và trên đoạn chứa RC theo Z_L. Đường biểu diễn sự phụ thuộc điện áp hiệu dụng trên đoạn chứa RL theo Z_L là đường nào?*



Lời giải. Khi $Z_L = 0$ chỉ có $U_L = 0$ và U_{RC} lớn nhất nên đường số (3) là biểu diễn U_L còn đường số (2) biểu diễn U_{RC}

Khi Z_L tăng đường U_{RL} có cực đại nên đường số (4) là đường biểu diễn U_{RL}.

NGUYỄN XUÂN QUANG

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 60 NĂM 2019

LÊ ANH VINH
(Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam)

I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 60 năm 2019 (IMO 2019) được tổ chức từ ngày 11/7 đến ngày 22/7/2018, tại thành phố Bath, Vương quốc Anh. Dự thi IMO 2019 có 621 học sinh, trong đó có 65 học sinh nữ, thuộc 112 Quốc gia và Vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Vương Tùng Dương* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**), *Nguyễn Khả Nhật Long* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia **Hà Nội**), *Nguyễn Nguyễn* (HS lớp 12, Trường THPT Năng khiếu, Đại học Quốc gia Thành phố **Hồ Chí Minh**), *Nguyễn Thuận Hưng* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**), *Vũ Đức Vinh* (HS lớp 11, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**) và *Phan Minh Đức* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**). Đoàn do thầy *Lê Anh Vinh*, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Bộ GD&ĐT làm Trưởng đoàn và thầy *Lê Bá Khánh Trình*, Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh làm Phó trưởng đoàn; thầy *Nguyễn Chu Gia Vượng*, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên C (Quan sát viên đi cùng học sinh) có: thầy *Quách Văn Giang*, trường THPT Hà Nội – Amsterdam, Hà Nội, thầy *Ngô Sỹ Thuỷ*, Hiệu trưởng trường THPT chuyên Phan Bội Châu, thầy *Hồ Sỹ Hùng*, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, thầy *Lê Đức Thịnh*, trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, thầy *Phạm Văn Quốc*, Phó Hiệu trưởng trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường ĐHKHTN, Đại học Quốc gia Hà Nội, thầy *Trần Nam Dũng*, Phó Hiệu trưởng Trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, thầy *Lê Xuân Đại*, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc. Lễ Khai mạc IMO 2019 đã được tổ chức vào hồi 15h30 ngày 15/07/2019, và lễ Bế mạc IMO 2019 đã được tổ chức vào hồi 15h00 ngày 21/7/2019 tại trường đại học Bath.

II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2019 tiếp tục được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như các kì IMO gần đây (IMO 2013 – IMO 2018). Cụ thể, từ các bài toán thuộc danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm đề thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình; từ đó, Hội đồng xây dựng các tổ hợp 4 bài toán gồm 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình và có đầy đủ cả 4 phân môn, rồi biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong Danh sách bài đề xuất và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, Bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Đại số, Bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Hình học, Bài 3 là bài khó thuộc phân môn Tổ hợp, Bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Số học, Bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Tổ hợp và Bài 6 là bài khó thuộc phân môn Hình học. Đề thi năm nay khá đặc biệt

khi cả 4 bài ở mức độ Trung bình và Khó đều nằm trong hai phân môn Hình học và Tổ hợp. Các bài toán trong đề thi IMO 2019 được đề xuất tương ứng bởi Nam Phi, Ukraine, Croatia, El Salvador, Hoa Kỳ, Ấn Độ.

Sau khi thống nhất đề, đáp án và biểu điểm, các trưởng đoàn sẽ dịch đề thi ra tiếng nước mình cho thí sinh làm bài. Theo thông lê khi dịch, các trưởng đoán sẽ bám sát bản gốc tiếng Anh, tuy nhiên tên người được nhắc đến trong đề bài thì người dịch được phép thay đổi cho phù hợp với văn hóa của từng quốc gia. Để bày tỏ tấm lòng tri ân GS. *Hoàng Tụy*, một trong những người đã đặt nền móng cho hệ thống chuyên toán và phong trào IMO của Việt Nam, thầy trưởng đoàn đã đề nghị đưa tên thầy *Tụy* vào trong bản dịch Bài 5 trong ngày thứ 2 của đề thi. Một điều rất vui là bài toán này nằm trong lĩnh vực Tổ hợp, không phải là sở trường của đội tuyển Việt Nam, nhưng cả 6 em đều đã được điểm tuyệt đối, góp phần không nhỏ cho thành tích chung của cả đoàn.

Dưới đây là phương án tiếng Việt của **Đề thi IMO 2019**:

Ngày thứ nhất (16/7/2019)

(Thời gian: 4h30', mỗi bài tính tối đa 7 điểm)

Bài 1. Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(2a)+2f(b)=f(f(a+b))$$

với mọi số nguyên a, b.

Bài 2. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1 tương ứng nằm trên các cạnh BC, AC; các điểm P, Q tương ứng nằm trên các đoạn thẳng AA_1, BB_1 sao cho PQ song song với AB. Điểm P_1 nằm trên PB_1 sao cho B_1 nằm giữa P và P_1 và $\widehat{PP_1C}=\widehat{BAC}$. Tương tự, điểm Q_1 nằm trên QA_1 sao cho A_1 nằm giữa Q và Q_1 và $\widehat{CQ_1Q}=\widehat{CBA}$. Chứng minh rằng các điểm P, Q, P_1, Q_1 cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 3. Một mạng xã hội có 2019 người dùng với một số cặp trong đó là bạn bè. Biết rằng nếu người dùng A là bạn của người dùng B thì người dùng B cũng là bạn của người dùng A. Những sự kiện như sau có thể xảy ra:

Ba người dùng A, B, C, trong đó A là bạn với cả B và C nhưng B và C không là bạn của nhau, sẽ thay đổi trạng thái bạn bè của họ sao cho B và C trở thành bạn bè của nhau nhưng A không còn là bạn với B và cũng không còn là bạn với C. Các trạng thái bạn bè khác không thay đổi.

Ban đầu, có 1010 người dùng mà mỗi người có đúng 1009 người bạn và 1009 người dùng mà mỗi người có đúng 1010 người bạn. Chứng minh rằng có thể xảy ra một chuỗi các sự kiện như trên mà sau đó mỗi người dùng là bạn với không quá một người dùng khác.

Ngày thứ hai (17/7/2019)

(Thời gian: 4h30', mỗi bài tính tối đa 7 điểm)

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên (k, n) í hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$k!=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\ldots(2^n-2^{n-1}).$$

Bài 5. Ngân hàng thành phố Bath phát hành các đồng tiền xu với một mặt được in chữ H và một mặt được in chữ T. Thầy *Tụy* có n đồng xu được xếp thành một hàng từ trái qua phải. Thầy *Tụy* thực hiện liên tiếp các bước biến đổi sau: nếu có đúng $k > 0$ đồng xu với mặt ngửa là H, thầy sẽ lật đồng xu thứ k kể từ bên trái; nếu không tất cả các đồng xu có mặt ngửa là T và thầy dừng lại. Ví dụ, nếu $n = 3$ thì quá trình bắt đầu với cấu hình THT sẽ là: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, và do đó quá trình dừng lại sau ba bước.

a) Chứng minh rằng, với cấu hình ban đầu, quá trình sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước.

b) Với mỗi cấu hình C ban đầu của các đồng xu, gọi $L(C)$ là số bước biến đổi mà thầy *Tụy* thực hiện cho đến khi quá trình dừng lại. Ví dụ, $L(THT) = 3$ và $L(TTT) = 0$. Hãy tính giá trị trung bình của $L(C)$ trên tổng số 2^n cấu hình ban đầu có thể của các đồng xu.

Bài 6. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp ω của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tương ứng tại các điểm D, E và F. Đường thẳng qua D vuông góc với EF cắt ω tại R. Đường thẳng AR cắt lại ω tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE cắt lại đường tròn ngoại tiếp của tam giác PBF tại Q. Chứng minh rằng các đường thẳng DI và PQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với AI.

III. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2019, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ **31** đến **42** điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ **24** đến **30** điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ **17** đến **23** điểm.

Theo đó, tại IMO 2019 có 302 học sinh được trao Huy chương; gồm: 52 học sinh được trao HCV, trong đó có 6 học sinh đạt điểm tuyệt đối 42/42; 94 học sinh được trao HCB và 156 học sinh được trao HCĐ. Cả 6 thí sinh của Đoàn Việt Nam đều đã hoàn thành tốt bài thi của mình và đạt được kết quả cao, trong đó 2 em được trao HCV, 4 em được trao HCB. Kết quả chi tiết của các học sinh Đoàn Việt Nam như bảng dưới.

Với tổng điểm 177, Đoàn Việt Nam đứng thứ 07 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2019. Danh sách mười đoàn xếp hạng cao nhất tại kì thi IMO 2018: Mỹ, Trung Quốc (227 điểm), Hàn Quốc (226 điểm), Triều Tiên (187 điểm), Thái Lan (185 điểm), Nga (179 điểm), Việt Nam (177 điểm), Singapore (174 điểm), Serbia (171 điểm), Ba Lan (168 điểm).

Stt	Họ và Tên	Điểm thi							HC
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	*Nguyễn Nguyễn*	7	6	1	6	7	7	**34**	**Vàng**
2	*Nguyễn Thuận Hưng*	6	6	0	6	7	7	**32**	**Bạc**
3	*Vũ Đức Vinh*	6	7	1	7	7	0	**28**	**Bạc**
4	*Phan Minh Đức*	7	6	1	7	7	0	**28**	**Bạc**
5	*Vương Tùng Dương*	6	6	1	7	7	1	**28**	**Bạc**
6	*Nguyễn Khả Nhật Long*	7	0	6	7	7	0	**27**	**Bạc**

PROBLEMS... *(Tiếp theo trang 19)*

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/506. Find all natural numbers n so that $2^n + n^2 + 1$ is a perfect square.

Bài T11/506. Given a strictly increasing sequence of positive integers $(a_n)(n = 1, 2, ...)$. Let

$$S_n = \frac{\sqrt{a_1}}{[a_1, a_2]} + \frac{\sqrt{a_2}}{[a_2, a_3]} + ... + \frac{\sqrt{a_n}}{[a_n, a_{n+1}]}, \forall n = 1, 2, ...$$

(for positive integers x, y we denote $[x, y]$ the least common multiple (l.c.m.) of x and y). Show that the sequence (S_n), $n = 1, 2, ...$ has the finite limit when $n \to +\infty$.

Bài T12/506. Given an acute triangle ABC ($AB < AC$). Two altitudes BE and CF intersect at H. Let I be the center of the circle which passes through A, B and is tangent to BC and J the center of the circle which passes through B, H and is tangent to BC. Let M be the midpoint of AH, and $S = EF \cap BC$. Show that SM bisects IJ.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

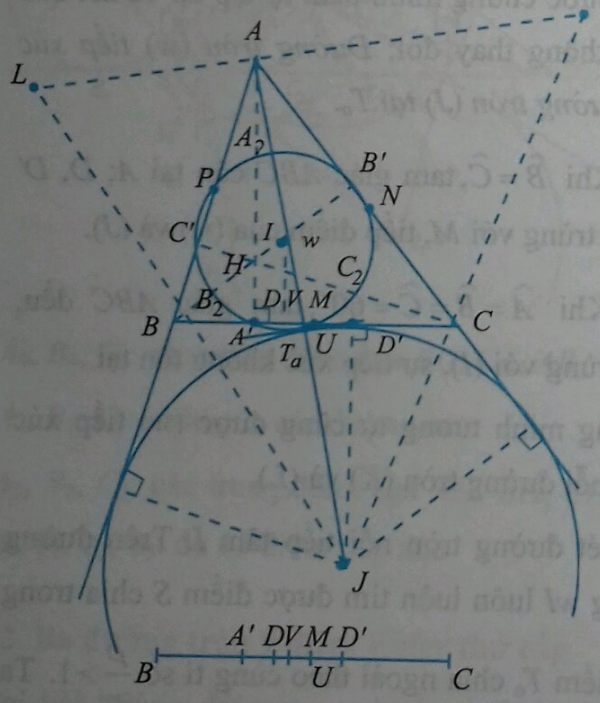
MỘT CÁCH CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ FEUERBACH

LÊ QUANG CHIÊU (*Hà Nội*)

§1. Định lí Feuerbach. *Đường tròn chín điểm Euler của một tam giác không đều tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và với mỗi một trong các đường tròn bàng tiếp với tam giác.*

Những chứng minh trước đây đều không thuộc chương trình THPT. Xét thấy "phổ thông hóa" thêm một định lí là giúp bạn đọc thêm công cụ để làm toán. Chúng tôi đề nghị cách này, tuy không mới về kiến thức nhưng mới về cách tiếp cận vấn đề.

Chứng minh.



Cho một tam giác ABC, ($BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$).

Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB; AA', BB', CC' là các đường cao; w, I, J, K và L lần lượt là tâm của các đường tròn: chín điểm Euler (xin viết tắt là 9E), đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B và C; ρ và r là các bán kính của các đường tròn 9E và đường tròn nội tiếp tam giác (h.1).

1) *Xét đường tròn có tâm là J.*

1a) Trường hợp $\widehat{B} > \widehat{C}$. Gọi D và D' là các tiếp điểm của các đường tròn (I) và (J) với BC, ta có $BD = CD' = \rho - b$ nên $MD = MD'$. Kẻ đường phân giác trong AK của $\widehat{BAC}$, khi đó $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} < 1$ (theo tính chất đường phân giác) nên $KB < KC \Leftrightarrow 2KB < KB + KC$

$\Leftrightarrow 2KB < BC \Leftrightarrow 2KB < 2MB \Leftrightarrow KB < MB$ tức là K thuộc đoạn MB.

Lại có AA' song song với ID (do cùng vuông góc với BC): $\frac{KA'}{KD} = \frac{AA'}{ID} > 2 \Rightarrow KA' > 2KD$

$\Rightarrow MA' > KA' > KD \Rightarrow D$ thuộc đoạn MA' tức là D thuộc miền trong của 9E. Mà M là trung điểm của DD', đường tròn 9E đi qua M và A' nên D' thuộc miền ngoài của 9E. Và A', M và D' được hoàn toàn xác định.

Lấy V là điểm chia trong đoạn MA', ta được $\frac{VA'}{VM} = \frac{D'A'}{DM} = k$ $(k > 1)$. Do đó

$$\frac{VA'}{VM} = \frac{k}{1};\ \frac{VA' + VM}{VM} = \frac{k+1}{1};\ VM = \frac{MA'}{k+1} \quad (1)$$

$$\frac{D'A'}{D'M}=\frac{k}{1};\ \frac{D'A'-D'M}{D'M}=\frac{k-1}{1};\ D'M=\frac{MA'}{k-1}\ (2)$$

So sánh các hệ thức (1) và (2) $\Rightarrow D'M > VM$.

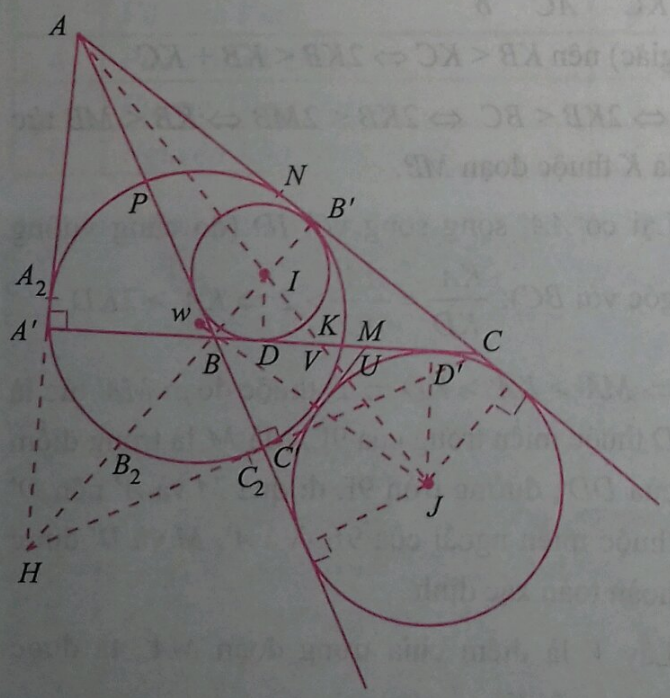
Do đó $2\,D'M > D'M + VM \Leftrightarrow 2D'M > D'V$.

Lấy U là trung điểm của $D'V$: $2D'U > 2D'U$

$\Leftrightarrow D'M > D'U$ nên U cũng nằm ngoài 9E.

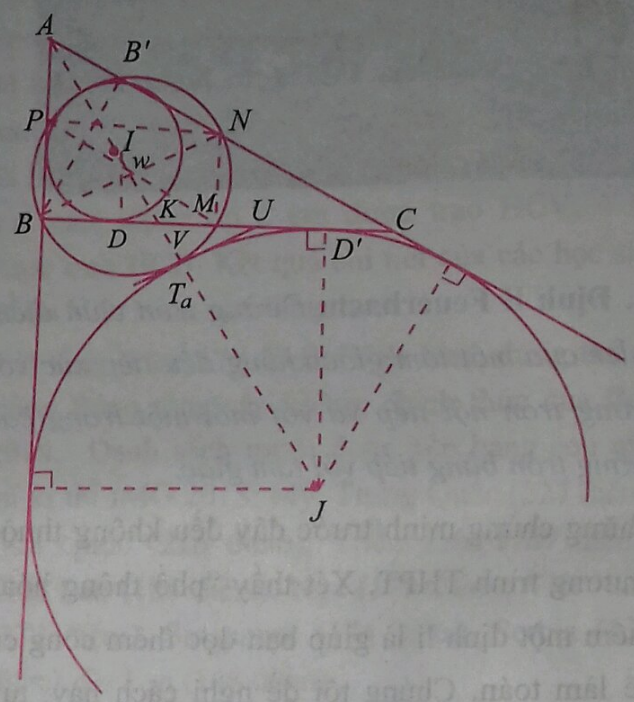
Qua U dựng tiếp tuyến UT_a với (J) ta được $UT_a = UD'$ (hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ U với (J)). Theo cách dựng ta có $(A'MVD')$ là hàng điểm điều hòa nên $\overline{UV}^2 = UA'.UM = \overline{UD'}^2$. Hệ thức kép này chứng tỏ $\mathcal{P}_{U/(J)} = \mathcal{P}_{V/(w)}$ và UT_a là tiếp tuyến chung của (J) và (w). Tức là (J) và (w) tiếp xúc ngoài với nhau tại T_a.

1b) $\widehat{B} > 90^\circ$, H và các điểm A_2, B_2, C_2 là những trung điểm của HA, HB, HC nằm ngoài tam giác ABC (h2).



Các bước chứng minh tuần tự được lặp lại và kết quả là đường tròn (w) tiếp xúc với đường tròn (J) tại T_a.

1c) $\widehat{B} = 90^\circ$, H, A' và C' trùng với B,



A_2, B_2 và C_2 lần lượt trùng với P, B và M. Đường tròn 9E "thu về" đường tròn 5 điểm Euler $(BMNB'P)$.

Các bước chứng minh tuần tự lặp lại và kết quả vẫn không thay đổi: *Đường tròn (w) tiếp xúc với đường tròn (J) tại T_a.*

1d) Khi $\widehat{B} = \widehat{C}$, tam giác ABC cân tại A; D, D' và T_a trùng với M, tiếp điểm của (w) và (J).

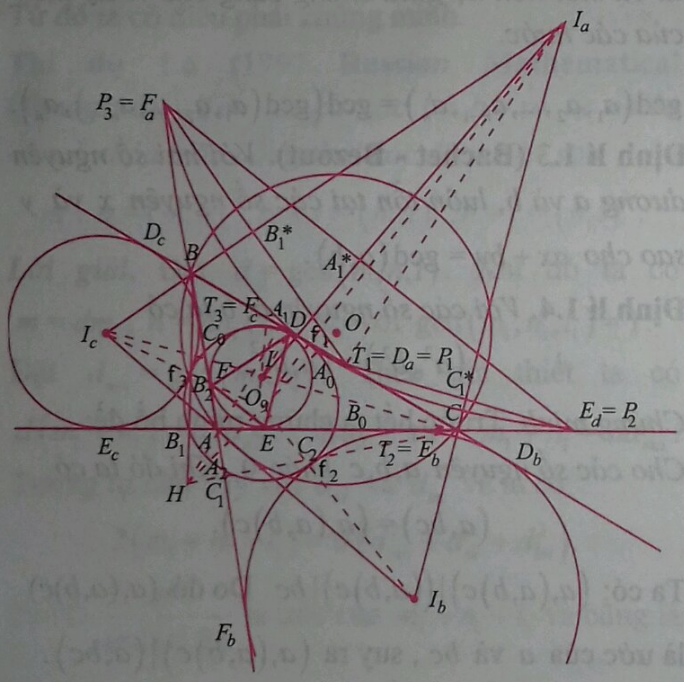
1e) Khi $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$, tam giác ABC đều, (w) trùng với (I), sự tiếp xúc không tồn tại.

Chứng minh tương tự cũng được (w) tiếp xúc với mỗi đường tròn (K) và (L).

2) Xét đường tròn nội tiếp tâm I. Trên đường thẳng wI luôn luôn tìm được điểm S chia trong và điểm T_o chia ngoài theo cùng tỉ số $\frac{\rho}{r} > 1$. Ta thấy ngay T_o là điểm tiếp xúc trong của đường tròn 9E và đường tròn nội tiếp tâm I.

Bài toán đã được chứng minh xong.

3) ***Nhận xét.*** Các nhà toán học thường áp dụng phép nghịch đảo hoặc toán giải tích để chứng minh định lí Feuerbach. Năm 1979 cố giáo sư người Nga П.С. Modenov dùng công cụ số phức; chúng tôi xin giới thiệu hình vẽ dưới đây trong bài chứng minh của cố giáo sư rất công phu và khá chính xác, giúp bạn đọc đếm đủ 13 tiếp điểm tại đường tròn chín điểm Euler! (Ví dụ 32 trang 180 cuốn "*Những bài toán về hình học*" do Nhà xuất bản Khoa học Mát-xcơ-va phát hành năm 1979).



A_0, B_0, C_0: các trung điểm của BC, CA, AB

A_1, B_1, C_1: chân của các đường cao.

A_2, B_2, C_2: các trung điểm của AH, BH, CH và

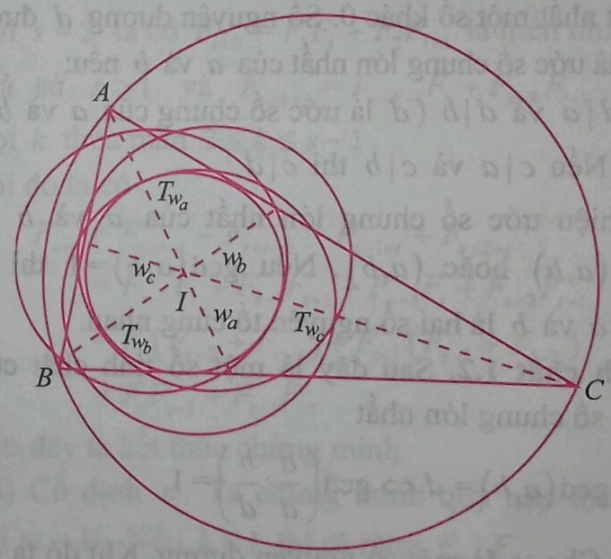
ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3: đủ 13 điểm tiếp xúc.

§2. Ba đường tròn 9 điểm Euler thứ cấp

Tại bài "*Phép đối xứng nghịch và đường tròn Euler*" đã đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 487 (1-2018), chúng ta đã nghiên cứu đầy đủ. Nay để tiện theo dõi cho một số bạn đọc chưa có số báo kể trên, chúng tôi xin tóm tắt như sau:

- Mỗi tam giác ABC sở hữu một đường tròn 9E có tâm w, trung điểm của OH có bán kính $\rho = \dfrac{R}{2}$.
- Mỗi đường tròn 9E lại sở hữu ba đường tròn thứ cấp có cùng bán kính $\rho = \dfrac{R}{2}$ có các tâm là w_a, w_b và w_c thuộc các đường phân giác AI, BI và CI. Từ đó suy ra: Ba đường tròn thứ cấp của đường tròn chín điểm Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp với tam giác.

Chứng minh.



Thậy vậy, trên các đường phân giác trong AI, BI và CI, lấy những điểm T_{w_a}, T_{w_b} và T_{w_c} chia ngoài các đoạn w_aI, w_bI và w_cI theo tỉ số $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{R}{2r}$ ta thấy đó là ba điểm tiếp xúc trong của ba đường tròn thứ cấp Euler với đường tròn nội tiếp (I) (theo kết quả tại §1, 2).

Sự khích lệ tự nhiên đến với chúng ta khi được đóng góp thêm cùng *Feuerbach* đưa con số 13 tiếp điểm lên thành 16.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ƯỚC SỐ CHUNG LỚN NHẤT, BỘI SỐ CHUNG NHỎ NHẤT VÀ LIÊN HỆ GIỮA CHÚNG

PHẠM THỊ THU HIỀN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Các khái niệm ước số chung lớn nhất (gcd) *và bội số chung nhỏ nhất* (lcm) *là những khái niệm cơ bản của số học. Cách đây khoảng* 2000 *năm, con người đã biết đến thuật toán Euclid nổi tiếng và có lẽ là thuật toán cổ nhất của toán học để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên* a *và* b *với* $b \neq 0$. *Với mục đích tìm hiểu sâu hơn sự vận dụng của hai khái niệm này, bài viết tập trung trình bày một số tính chất của ước số chung lớn nhất, bội số chung nhỏ nhất và mối liên hệ giữa chúng cùng các ví dụ điển hình được chọn lọc từ các cuộc thi chọn học sinh giỏi của các nước.*

1. ƯỚC SỐ CHUNG LỚN NHẤT

Định nghĩa 1.1. Cho hai số nguyên a và b trong đó ít nhất một số khác 0. Số nguyên dương d được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b nếu:

(i) $d \mid a$ và $d \mid b$ (d là ước số chung của a và b)

(ii) Nếu $c \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid d$.

Kí hiệu ước số chung lớn nhất của a và b là $\gcd(a,b)$ hoặc (a,b). Nếu $\gcd(a,b)=1$ thì ta nói a và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2. Sau đây là một số tính chất của ước số chung lớn nhất

(i) $\gcd(a,b)=d \Leftrightarrow \gcd\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)=1.$

(ii) Cho c là một số nguyên dương. Khi đó ta có $\gcd(ca,cb)=c.\gcd(a,b)$.

(iii) $\gcd(a,b)=1$ và $b \mid ac$ thì $b \mid c$.

(iv) Nếu $\gcd(a,b)=1$ và $\gcd(a,c)=1$ thì $\gcd(a,bc)=1$.

(v) Nếu $a=bq+r$ thì $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$.

(vi) Nếu $a=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ và $b=p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$ với $\alpha_i,\beta_i \in N, \alpha_i+\beta_i \geq 1$, $i=1,2,...,k$, thì $\gcd(a,b)=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}.p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}}...p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}$.

Khái niệm ước số chung lớn nhất được mở rộng tự nhiên cho trường hợp có hơn hai số theo cách như sau:

$$\gcd(a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n)=\gcd(\gcd(a_1,a_2,...,a_{n-1}),a_n).$$

Định lí 1.3 (Bachet - Bezout). *Với hai số nguyên dương a và b, luôn tồn tại các số nguyên* x *và* y *sao cho* $ax+by=\gcd(a,b)$.

Định lí 1.4. *Với các số nguyên a, b ta có*

$$(a^2,b^2)=(a,b)^2.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Cho các số nguyên a,b,c *khác* 0. *Khi đó ta có*

$$(a,bc)=(a,(a,b)c).$$

Ta có: $(a,(a,b)c) \mid ((a,b)c) \mid bc$. Do đó $(a,(a,b)c)$ là ước của a và bc, suy ra $(a,(a,b)c) \mid (a,bc)$.

Mặt khác, (a,bc) là ước của a và bc nên nó là ước của ac và bc. Vì vậy $(a,bc) \mid (ac,bc)=c(a,b)$. Ta có (a,bc) là ước của a và $c(a,b)$ nên $(a,bc) \mid (a,(a,b)c)$.

Vậy $(a,bc)=(a,(a,b)c)$.

Giả sử m,n là hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $(m,n)=1$. Áp dụng bổ đề vừa chứng minh ta có

$$(m^2,n^2)=(m^2,(m^2,n)n)=(m^2,(n,(m,n)m)n).$$

Vì $(m,n)=1$ nên $(m^2,(n,(m,n)m)n)=(m^2,n)$.

Lại áp dụng bổ đề ta có: $(m^2,n)=(n,(m,n)m)=1$.

Suy ra $\left(m^2,n^2\right)=1$. Ta có theo tính chất 1.2.(i)

$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$, suy ra $\left(\frac{a^2}{(a,b)^2},\frac{b^2}{(a,b)^2}\right)=1$.

Từ đó theo tính chất 1.2.(ii) ta có $\left(a^2,b^2\right)=(a,b)^2$.

Thí dụ 1.5 *Cho hai số nguyên a, b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng*

$(a+b,a^2-ab+b^2)=1$ *hoặc* $(a+b,a^2-ab+b^2)=3$.

Lời giải. Giả sử $d=\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)$. Ta có

$$d\mid(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab.$$

Do đó $d\mid 3b(a+b)-3ab=3b^2$. Tương tự $d\mid 3a^2$.

Do đó $d\mid\left(3a^2,3b^2\right)=3\left(a^2,b^2\right)=3(a,b)^2=3$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 1.6 (1997 Russian Mathematical Olympiad). *Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên m,n,l thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

$$m+n=(m,n)^2,\ m+l=(m,l)^2,\ n+l=(n,l)^2.$$

Lời giải. Đặt $d=\gcd(m,n,l)$. Khi đó ta có $m=dm_1$, $n=dn_1$, $l=dl_1$ với $\gcd(m_1,n_1,l_1)=1$.

Đặt $d_{mn}=\gcd(m_1,n_1)$. Theo giả thiết ta có $d(m_1+n_1)=d^2d_{mn}^2$. Suy ra $m_1+n_1=dd_{mn}^2$.

Tương tự như vậy với d_{nl} và d_{lm} và ta có:

$$2(m_1+n_1+l_1)=d\left(d_{mn}^2+d_{nl}^2+d_{lm}^2\right).$$

Ta có $\frac{d}{\gcd(d,2)}$ là ước của $m_1+n_1+l_1$ và cũng là ước của m_1+n_1 nên $\frac{d}{\gcd(d,2)}$ là ước của l_1.

Tương tự ta có nó cũng là ước của m_1 và n_1. Vì $\gcd(m_1,n_1,l_1)=1$ nên $\frac{d}{\gcd(d,2)}=1$, và do đó $d\le 2$. Mặt khác d_{mn}, d_{nl}, d_{lm} đôi một nguyên tố cùng nhau, suy ra:

$$l_1=l_2d_{lm}d_{ln},\ m_1=m_2d_{lm}d_{mn},\ n_1=n_2d_{nm}d_{nl}$$

và ta có: $m_2d_{lm}+n_2d_{ln}=dd_{mn}$. Không mất tổng quát giả sử $d_{mn}=\min\{d_{mn},d_{lm},d_{ln}\}$, ta có:

$$2d_{mn}\ge dd_{mn}=m_2d_{lm}+n_2d_{ln}\ge d_{lm}+d_{ln}\ge 2d_{mn}.$$

Từ bất đẳng thức trên suy ra $d=2$, $m_2=n_2=1$ và $d_{mn}=d_{lm}=d_{ln}$ mà các số này nguyên tố cùng nhau nên chúng bằng 1. Từ đó suy ra $m_1=n_1=1$ và từ $l_1+m_1=dd_{lm}^2$ có $l_1=1$. Vậy $m=n=l=2$.

Thí dụ 1.7 *Cho dãy số Fibonacci* $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, *với* $n\ge 1$. *Chứng minh rằng*

(i) $\gcd(F_{n+1},F_n)=1$,

(ii) *Nếu s, t là các số nguyên* $s\ge 2, t\ge 1$ *thì* $F_{s+t}=F_{s-1}F_t+F_sF_{t+1}$

(iii) *Nếu* $n\mid m$ *thì* $F_n\mid F_m$,

(iv) $\gcd(F_m,F_n)=F_{\gcd(m,n)}$.

Lời giải. (i) Đặt $d=(F_n,F_{n+1})$. Ta có $d\mid F_n$ và $d\mid F_{n+1}$ nên $d\mid F_{n+1}-F_n=F_{n-1}$. Do đó $d\mid F_n-F_{n-1}=F_{n-2}$. Tiếp tục quá trình như vậy ta suy ra $d\mid F_1=1$. Vì vậy ta có $d=1$.

(ii) Ta cố định t và chứng minh quy nạp theo s.

Với $s=2$ ta có $F_{t+2}=F_1F_t+F_2F_{t+1}$ là hiển nhiên.

Giả sử $s>1$ và $F_{s-k+t}=F_{s-k-1}F_t+F_{s-k}F_{t+1}$ với mọi k thỏa mãn $2\le k\le s-1$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}F_{s+t}&=F_{s+t-1}+F_{s+t-2}=F_{s-1+t}+F_{s-2+t}\\&=F_{s-2}F_t+F_{s-1}F_{t+1}+F_{s-3}F_t+F_{s-2}F_{t+1}\\&=F_t\left(F_{s-2}+F_{s-3}\right)+F_{t+1}\left(F_{s-1}+F_{s-2}\right)\\&=F_tF_{s-1}+F_{t+1}F_s.\end{aligned}$$

Đến đây ta kết thúc chứng minh.

(iii) Cố định n. Ta chứng minh quy nạp theo k với $m=kn$. Nếu $k=1$ thì rõ ràng $F_n\mid F_n$.

Giả sử $F_n\mid F_{kn}$. Ta đi chứng minh $F_n\mid F_{(k+1)n}$. Thật vậy, đặt $s=n$, $t=kn$ và thay vào đẳng thức (ii) ta có: $F_{(k+1)n}=F_{n+kn}=F_{n-1}F_{kn}+F_nF_{kn+1}$.

Từ đó suy ra $F_n\mid F_{(k+1)n}$.

(iv) Đặt $d=(F_n,F_m)$ và $a=(m,n)$. Ta đi chứng minh $d\mid F_a$ và $F_a\mid d$. Thật vậy, vì $a\mid m$ và $a\mid n$ nên $F_a\mid F_m$, $F_a\mid F_n$ suy ra $F_a\mid d$.

Nếu $d=1$ thì hiển nhiên $d\mid F_a$. Trong trường hợp $d>1$. Theo định lí Bezout, tồn tại hai số nguyên x,y sao cho $xm+yn=a$. Hiển nhiên

không thể xảy ra trường hợp cả x và y là nguyên âm. Vì $a|m$, $a|n$ nên $a \le m$, $a \le n$. x, y cũng không thể cùng là các số nguyên dương vì nếu như vậy thì $a = xm + yn \ge m + n$, mâu thuẫn. Do đó, x và y trái dấu nhau, không mất tổng quát ta giả sử $x \le 0$, $y > 0$. Ta có :

$$F_{yn} = F_{a-xm} = F_{a-1}F_{-xm} + F_a F_{-xm+1}.$$

Ta có $n|ny$, $m|(-xm)$, do đó $F_n | F_{yn}$, $F_m | F_{-xm}$. Từ đó suy ra $d|F_{yn}$ và $d|F_{-xm}$. Vì thế $d|F_a F_{-xm+1}$. Dễ thấy $d|F_m|F_{-xm}$.

Nếu $(d, F_{-xm+1}) = k > 1$ thì $k|F_{-xm+1}$ và $k|F_{-xm}$. Mà hai số Fibonacci liên tiếp nguyên tố cùng nhau. Ta có mâu thuẫn. Từ đó $(d, F_{-xm+1}) = 1$, suy ra $d|F_a$. Đến đây ta hoàn thành chứng minh.

Thí dụ 1.8 *Chứng minh rằng không tồn tại số Fibonacci lẻ nào chia hết cho 17.*

Lời giải. Đặt $d = (17, F_n)$, hiển nhiên d là số nguyên dương lẻ. Ta có $(17, F_n) = (34, F_n) = (F_9, F_n) = F_{(9,n)} = F_1, F_3$ hoặc F_9. Điều đó có nghĩa $d = 1, 2$ hoặc 34. Vì d lẻ nên ta có $d = 1$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 1.9. *Cho $f(x)$ là một đa thức với các hệ số nguyên. Kí hiệu $a_0 = 0$, $a_n = f(a_{n-1})$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh rằng $(a_m, a_n) = |a_{(m,n)}|$. Khi $f(x) = \sum_{i=2}^{9} x^i + 2$, hãy tìm (a_{2016}, a_{2014}).*

Lời giải. Đẳng thức $(a_m, a_n) = |a_{(m,n)}|$ (1.1)

hiển nhiên đúng khi $m = 0$ hoặc $n = 0$. Bây giờ ta xét $m, n > 0$. Để chứng minh đẳng thức (1.1) trước hết ta chứng minh tính chất $a_{nq} \vdots a_n$ (1.2)

đúng với mọi $n, q \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh tính chất (1.2) bằng quy nạp theo q. Hiển nhiên (1.2) đúng khi $q = 1$. Giả sử (1.2) đúng với $q - 1$ tức là ta có $a_{n(q-1)} \vdots a_n$. Ta cần chứng minh $a_{nq} \vdots a_n$.

Với mỗi số nguyên dương k ta đặt

$$f_k(x) = f\left(f\left(\ldots\left(f(x)\right)\ldots\right)\right), \ k \text{ lần } f.$$

Ta có: $a_{nq} - a_n = f_n\left(a_{n(q-1)}\right) - f_n(0) \vdots a_{n(q-1)}$.

Kết hợp với giả thiết quy nạp, ta có (1.2) đúng với q. Bây giờ để chứng minh (1.1), tương tự như thuật toán Euclid, ta chỉ ra rằng, nếu $m = nq + r$ thì $(a_m, a_n) = (a_n, a_r)$ (1.3). Thật vậy ta có

$$a_m - a_r = f_r\left(a_{nq}\right) - f_r(0) \vdots a_{nq}.$$

Kết hợp với tính chất (1.2) ta có: $a_m - a_r \vdots a_n$. Từ đó ta có đẳng thức (1.3) đúng.

Khi $f(x) = \sum_{i=2}^{9} x^i + 2$ ta có: $(a_{2016}, a_{2014}) = a_2 = 1022$.

2. BỘI SỐ CHUNG NHỎ NHẤT

Định nghĩa 2.1. Cho hai số nguyên a và b khác 0. Số nguyên dương k được gọi là bội số chung nhỏ nhất của a và b nếu:

(i) $a|k$, $b|k$ (k là bội số chung của a và b),

(ii) Nếu $a|t$ và $b|t$ thì $k|t$.

Kí hiệu bội số chung nhỏ nhất của a và b là $\operatorname{lcm}(a,b)$ hoặc $[a,b]$.

Tính chất 2.2. Sau đây là một số tính chất của bội số chung nhỏ nhất

(i) Nếu $\operatorname{lcm}(a,b) = k$ thì $\gcd\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right) = 1$.

(ii) $t.\operatorname{lcm}(a,b) = \operatorname{lcm}(ta, tb)$.

(iii) Nếu $d|a$, $d|b$ và $d > 0$ thì

$$\operatorname{lcm}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{\operatorname{lcm}(a,b)}{d}.$$

(iv) Nếu $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ và $b = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$ với $\alpha_i, \beta_i \in N, \alpha_i + \beta_i \ge 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, thì

$$\operatorname{lcm}(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}.p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}}\ldots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Khái niệm bội số chung nhỏ nhất được mở rộng tự nhiên cho trường hợp có hơn hai số theo cách như sau:

$$\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \operatorname{lcm}\left(\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\right).$$

Thí dụ 2.3. *Chứng minh rằng*

$$\operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, 200) = \operatorname{lcm}(101, 102, \ldots, 200).$$

Lời giải. Ta đi chứng minh bài toán tổng quát: *Với mọi số nguyên dương n ta có*

$$\operatorname{lcm}(1,2,...,2n) = \operatorname{lcm}(n+1,n+2,...,2n).$$

Đặt

$A = \operatorname{lcm}(1,2,...,2n), B = \operatorname{lcm}(n+1,n+2,...,2n).$

Hiển nhiên ta có $A \vdots B$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $B \vdots A$. Ta sẽ chứng minh $B \vdots k$ với mọi $k = 1,2,...,2n$. Nếu $k \in \{n+1,n+2,...,2n\}$ thì hiển nhiên $B \vdots k$. Nếu $k \in \{1,2,...,n\}$ thì trong k số nguyên dương liên tiếp $n+1,n+2,...,n+k$ có một số chia hết cho k. Giả sử đó là a. Ta có:

$$n+1 \le a \le n+k \le 2n,$$

do đó $B \vdots k$. Tóm lại, với mọi $k \in \{1,2,...,2n\}$ ta có $B \vdots k$. Vì vậy $B \vdots A$. Vậy $A = B$.

Thí dụ 2.4. *Hỏi có bao nhiêu bộ ba số nguyên dương (a,b,c) thỏa mãn* $\operatorname{lcm}(a,b) = 1000$, $\operatorname{lcm}(b,c) = 2000$, $\operatorname{lcm}(c,a) = 2000$.

Lời giải. Ta thấy cả hai số 1000 và 2000 đều có dạng 2^m5^n nên các số a,b,c đều phải có dạng này. Đặt $a = 2^{m_1}5^{n_1}$, $b = 2^{m_2}5^{n_2}$, $c = 2^{m_3}5^{n_3}$, trong đó m_i, n_i là các số nguyên không âm với $i = 1,2,3$. Từ giả thiết ta có:

$\max\{m_1,m_2\} = 3, \max\{m_2,m_3\} = 4, \max\{m_3,m_1\} = 4$ (2.1)

và $\max\{n_1,n_2\} = 3, \max\{n_2,n_3\} = 3, \max\{n_3,n_1\} = 3$ (2.2).

Từ (2.1) ta có $m_3 = 4$, hai số m_1, m_2 có một số bằng 3 và một số nhận một trong các giá trị $0,1,2,3$. Có 7 bộ (m_1,m_2,m_3) thỏa mãn đó là $(0,3,4)$, $(1,3,4)$, $(2,3,4)$, $(3,0,4)$, $(3,1,4)$, $(3,2,4)$ và $(3,3,4)$. Từ (2.2) ta có hai trong ba số n_1,n_2,n_3 bằng 3 và số còn lại nhận một trong các giá trị $0,1,2,3$. Ta có 10 bộ (n_1,n_2,n_3) thỏa mãn đó là $(3,3,0)$, $(3,3,1)$, $(3,3,2)$, $(3,0,3)$, $(3,1,3)$, $(3,2,3)$, $(0,3,3)$, $(1,3,3)$, $(2,3,3)$ và $(3,3,3)$. Như vậy ta có tất cả $7.10 = 70$ bộ số thỏa mãn đề bài.

Thí dụ 2.5 (AMM E2686) *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng*

$$(n+1)\operatorname{lcm}\left(C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n\right) = \operatorname{lcm}(1,2,...,n+1).$$

Lời giải. Trước hết ta nhắc lại định lí: *Giả sử n là số nguyên dương. Khi đó lũy thừa của số nguyên tố p xuất hiện trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $n!$ là*

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Giả sử p là một số nguyên tố, $p \le n+1$ và α (tương ứng β) là số mũ lớn nhất của p ở vế trái (tương ứng vế phải) của đẳng thức cần chứng minh. Chọn số r thỏa mãn $p^r \le n+1 < p^{r+1}$. Rõ ràng $\beta = r$.

Ta cần chứng minh rằng, nếu $p^r \le m < p^{r+1}$ thì $p^{r+1} \quad C_m^k$ với $0 \le k \le m$ (*).

Thật vậy, lũy thừa của p xuất hiện trong sự phân tích ra thừa số nguyên tố của C_m^k là

$$\gamma = \sum_{s=1}^{r}\left(\left\lfloor \frac{m}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-k}{p^s} \right\rfloor\right).$$

Mỗi hạng tử trong tổng trên bằng 0 hoặc 1, ta có $\gamma \le r$, do đó (*) đúng.

Với $0 \le k \le n$, đặt

$$a_k = (n+1)C_n^k = (n-k+1)C_{n+1}^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Từ (*) ta có p^{r+1} không là ước của các số nguyên $C_n^k, C_{n+1}^k, C_{n+1}^{k+1}$. Vì vậy p^{r+1} là ước của a_k khi và chỉ khi p là ước của cả ba số $n+1, n-k+1, k+1$. Từ đó suy ra

$$p \mid \left[(n+1)-(n-k+1)-(k+1)\right] = -1,$$

mâu thuẫn. Vì vậy $p^{r+1} \nmid a_k$. Mặt khác với $k = p^r - 1$ ta có $k \le n$ nên $a_k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}$ chia hết cho p^r. Vậy $\beta = r = \alpha$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 2.6 (1951 Russian Mathematics Olympiad). *Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ nhỏ hơn 1000 và $\operatorname{lcm}(a_i, a_j) > 1000$ với mọi i, j, $i \ne j$. Chứng minh rằng* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < 2.$

Lời giải. Nếu $\frac{1000}{m+1} < a \le \frac{1000}{m}$ thì có m bội số của a là $a, 2a, ..., ma$ không vượt quá 1000. Giả sử k_1 là số các a_i nằm trong khoảng $\left(\frac{1000}{2}, 1000\right]$, k_2 là số các a_i nằm trong khoảng $\left(\frac{1000}{3}, \frac{1000}{2}\right]$,...Như vậy ta có $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots$ các số nguyên, không lớn hơn 1000, là bội của ít nhất một số a_i nào đó. Vì các bội này là phân biệt (vì $\text{lcm}(a_i, a_j) > 1000$) nên ta có

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots < 1000 \Rightarrow 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \cdots$$
$$< (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots) + (k_1 + k_2 + k_3 + \cdots)$$
$$< 1000 + n < 2000.$$

Do đó: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \le k_1 \frac{2}{1000} + k_2 \frac{3}{1000} + k_3 \frac{4}{1000} + \cdots$

$$= \frac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \cdots}{1000} < 2.$$

3. LIÊN HỆ GIỮA ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

Định lí 3.1 *Cho m, n là hai số nguyên dương. Khi đó ta có:* $mn = \gcd(m,n).\text{lcm}(m,n)$.

Chứng minh. Giả sử $m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ và $n = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$ với $\alpha_i, \beta_i \in N, \alpha_i + \beta_i \ge 1$, $i = 1, 2, ..., k$. Khi đó ta có

$$\gcd(m,n) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}.p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}}...p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

$$\text{lcm}(m,n) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}.p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}}...p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Ta có: $\gcd(m,n).\text{lcm}(m,n)$

$$= p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}+\max\{\alpha_1,\beta_1\}}...p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}+\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$
$$= p_1^{\alpha_1+\beta_1}...p_k^{\alpha_k+\beta_k} = mn.$$

Nhận xét 3.2. Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \ge 3$ thì đẳng thức

$$a_1a_2...a_n = \gcd(a_1, a_2, ..., a_n).\text{lcm}(a_1, a_2, ..., a_n)$$

nói chung là không đúng. Chẳng hạn

$$\gcd(3,3,3).\text{lcm}(3,3,3) = 3.3 = 9 < 3.3.3 = 27.$$

Thí dụ 3.3. *Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $\text{lcm}(m,n) + \gcd(m,n) = m + n$. Chứng minh rằng một trong hai số đó chia hết cho số còn lại.*

Lời giải. *Cách 1.* Đặt $d = \gcd(m,n)$. Khi đó ta có $m = ad, n = bd$ với $\gcd(a,b) = 1$ và

$$\text{lcm}(m,n) = \frac{mn}{\gcd(m,n)} = abd.$$

Theo bài ra ta có phương trình $abd + d = ad + bd$ hay $ab - a - b + 1 = 0$. Từ đó ta có $(a-1)(b-1) = 0$, suy ra $a = 1$ hoặc $b = 1$. Như vậy ta có $m = d$, $n = bd = bm$ hoặc $n = d$, $m = an$.

Cách 2. Ta có $\text{lcm}(m,n).\gcd(m,n) = m.n$, suy ra $\text{lcm}(m,n)$ và $\gcd(m,n)$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - (m+n)x + mn = 0$. Dễ thấy hai nghiệm của phương trình là m và n. Do đó

$$\{\text{lcm}(m,n), \gcd(m,n)\} = \{m,n\}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 3.4 (St. Petersburg 2001). *Cho m, n là các số nguyên dương, $m > n$. Chứng minh rằng*

$$\text{lcm}(m,n) + \text{lcm}(m+1, n+1) > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}.$$

Lời giải. Đặt $m = n + k$. Khi đó ta có

$$\text{lcm}(m,n) + \text{lcm}(m+1, n+1)$$
$$= \frac{mn}{\gcd(m,n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{\gcd(m+1, n+1)}$$
$$> \frac{mn}{\gcd(n+k, n)} + \frac{mn}{\gcd(m+1, n+1)}$$
$$= \frac{mn}{\gcd(k,n)} + \frac{mn}{\gcd(n+k+1, n+1)}$$
$$= \frac{mn}{\gcd(k,n)} + \frac{mn}{\gcd(k, n+1)}.$$

Dễ thấy $\gcd(k,n)$ và $\gcd(k+1,n)$ không thể có chung ước số nguyên tố nào vì nếu p là một ước số nguyên tố chung của chúng thì $p \mid n$ và $p \mid n+1$, điều này là vô lí. Mặt khác $\gcd(k,n) \mid k$ và $\gcd(k, n+1) \mid k$ nên ta có

$$\gcd(k,n).\gcd(k+1,n) \le k.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\operatorname{lcm}(m,n)+\operatorname{lcm}(m+1,n+1)>\frac{mn}{\gcd(k,n)}+\frac{mn}{\gcd(k,n+1)}$$

$$\geq 2mn\sqrt{\frac{1}{\gcd(k,n).\gcd(k,n+1)}}\geq 2mn\sqrt{\frac{1}{k}}=\frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$$

Thí dụ 3.5. *Cho a, b, c là các số nguyên khác không. Chứng minh rằng*

(i) $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$

(ii) $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$.

Lời giải. (i) Ta có

$$(a,b,c)\left(\frac{b}{(a,b)},\frac{c}{(a,c)}\right)=\left(\frac{b}{(a,b)}(a,b,c),\frac{c}{(a,c)}(a,b,c)\right)$$

$$=\left(\frac{b}{(a,b)}((a,b),(b,c)),\frac{c}{(a,c)}((a,c),(b,c))\right)$$

$$=\left(\left(b,\frac{b(b,c)}{(a,b)}\right),\left(c,\frac{c(b,c)}{(a,c)}\right)\right)=\left(\left(b,\frac{b(b,c)}{(a,b)}\right),c,\frac{c(b,c)}{(a,c)}\right)$$

$$=\left(\left(b,\frac{b(b,c)}{(a,b)},c\right),\frac{c(b,c)}{(a,c)}\right)=\left(\left((b,c),\frac{b(b,c)}{(a,b)}\right),\frac{c(b,c)}{(a,c)}\right)$$

$$=\left((b,c),\frac{b(b,c)}{(a,b)},\frac{c(b,c)}{(a,c)}\right)=(b,c)\left(1,\frac{b}{(a,b)},\frac{c}{(a,c)}\right)=(b,c).$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{(b,c)}{(a,b,c)}=\left(\dfrac{b}{(a,b)},\dfrac{c}{(a,c)}\right)$.

Ta có: $(a,b,c)=(a,(b,c))=\dfrac{a.(b,c)}{[a,(b,c)]}$

và $\dfrac{b}{(a,b)}=\dfrac{[a,b]}{a};\dfrac{c}{(a,c)}=\dfrac{[a,c]}{a}$ nên ta được

$$\frac{[a,(b,c)]}{a}=\left(\frac{[a,b]}{a},\frac{[a,c]}{a}\right)=\frac{1}{a}([a,b],[a,c]).$$

Vậy $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$.

(ii) Từ (i) ta suy ra $\dfrac{a.(b,c)}{(a,b,c)}=\dfrac{[a,b].[a,c]}{[a,b,c]}$

$$\Leftrightarrow\frac{abc}{(a,b,c)[b,c]}=\frac{a^2bc}{(a,b)(a,c)[a,b,c]}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(a,b,c)[b,c]}=\frac{a}{(a,b)(a,c)[a,b,c]}$$

$$\Leftrightarrow a[b,c](a,b,c)=(a,b)(a,c)[a,b,c]$$

$$\Leftrightarrow\frac{a[b,c]}{[a,b,c]}=\frac{(a,b)(a,c)}{(a,b,c)}\Leftrightarrow(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)].$$

Thí dụ 3.6. *Cho ba số nguyên dương m, n và p. Chứng minh rằng*

(i) $[m,n,p]=\dfrac{mnp(m,n,p)}{(m,n)(n,p)(p,m)}$.

(ii) $[m,n,p]=\dfrac{(m,n,p)[m,n][n,p][p,m]}{mnp}$..

Lời giải. (i) *Cách 1.* Suy ra từ thí dụ 3.5 và định lí 3.1.

Cách 2. Đặt $d=(m,n,p)$. Khi đó $m=dx$, $n=dy$, $p=dz$ với $(x,y,z)=1$. Ta có:

$$[m,n,p]=[dx,dy,dz]=d[x,y,z],$$

$$\frac{mnp(m,n,p)}{(m,n)(n,p)(p,m)}=\frac{dx.dy.dz.d}{d(x,y).d(y,z).d(z,x)}$$

$$=\frac{dxyz}{(x,y).(y,z).(z,x)}.$$

Do vậy. điều phải chứng minh tương đương với $[x,y,z]=\dfrac{xyz}{(x,y).(y,z).(z,x)}$ trong đó $(x,y,z)=1$.

Ta có: $[x,y,z]=[[x,y],z]=\dfrac{[x,y].z}{([x,y],z)}$

$$=\frac{\frac{xy}{(x,y)}.z}{([x,y],z)}=\frac{xyz}{(x,y).([x,y],z)}.\quad(3.1)$$

Từ đó đẳng thức (3.1) tương đương với

$$([x,y],z)=(x,z).(y,z),\quad(3.2)$$

với điều kiện $(x,y,z)=1$. Đặt $q=(x,y)$. Ta có $x=qx_1, y=qy_1$, trong đó $(x_1,y_1)=1$. Hơn nữa do $(x,y,z)=1$ nên ta có $(q,z)=1$. Do vậy đẳng thức (3.2) tương đương

$$(x_1y_1,z)=(x_1,z).(y_1,z).\quad(3.3)$$

Thật vậy, giả sử $k=(x_1y_1,z)$. Khi đó $k\mid(x_1y_1)$ và $k\mid z$ mà $(x_1,y_1)=1$ nên $k\mid x_1$ hoặc $k\mid y_1$. Suy ra $k\mid(x_1,z)$ hoặc $k\mid(y_1,z)$. Do đó $k\mid(x_1,z).(y_1,z)$. Ngược lại nếu $l=(x_1,z)$ thì $l\mid x_1$ và $l\mid z$, suy ra $l\mid x_1y_1$ nên $l\mid(x_1y_1,z)$.

Tương tự $(y_1,z)\mid(x_1y_1,z)$. Do đó (3.3) được chứng minh. Từ đó (i) được chứng minh hoàn toàn.

(ii) Suy ra từ (i) bằng cách sử dụng định lí 3.1.

Thí dụ 3.7 (USAMO 1972). *Cho các số nguyên a, b và c. Chứng minh rằng*

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

Lời giải. *Cách 1.* Áp dụng thí dụ 3.6 ta có:

$$[a,b,c]=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}=\frac{(a,b,c)[a,b][b,c][c,a]}{abc}.$$

Do đó

$$[a,b,c]^2=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}.\frac{(a,b,c)[a,b][b,c][c,a]}{abc}$$

$$=\frac{(a,b,c)^2[a,b][b,c][c,a]}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Giả sử $a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$, $b=p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$, $c=p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$, ở đó $p_1,p_2,...,p_n$ là các số nguyên tố phân biệt, và $\alpha_1,...,\alpha_n$, $\beta_1,...,\beta_n$, $\gamma_1,...,\gamma_n$ là các số nguyên không âm. Khi đó ta có

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i^{2\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}}}{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\max\{\beta_i,\gamma_i\}}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\max\{\gamma_i,\alpha_i\}}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p_i^{2\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\alpha_i,\beta_i\}-\max\{\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\gamma_i,\alpha_i\}}$$

và $$\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i^{2\min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}}}{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\prod_{i=1}^{n}p_i^{\min\{\gamma_i,\alpha_i\}}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p_i^{2\min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\alpha_i,\beta_i\}-\min\{\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\gamma_i,\alpha_i\}}.$$

Ta cần chứng minh với các số nguyên không âm α,β,γ bất kì thì

$$2\max\{\alpha,\beta,\gamma\}-\max\{\alpha,\beta\}-\max\{\beta,\gamma\}-\max\{\gamma,\alpha\}$$
$$=2\min\{\alpha,\beta,\gamma\}-\min\{\alpha,\beta\}-\min\{\beta,\gamma\}-\min\{\gamma,\alpha\}. \quad (3.4)$$

Thật vậy, do tính đối xứng, không mất tổng quát ta giả sử $\alpha\le\beta\le\gamma$. Khi đó ta có (3.4) tương đương với $2\gamma-\beta-\gamma-\gamma=2\alpha-\alpha-\beta-\alpha$ (3.5).

Đẳng thức (3.5) hiển nhiên đúng. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chú ý. Ta thấy phương pháp này có thể dùng để chứng minh được các thí dụ 3.5, thí dụ 3.6 theo cách tương tự.

Nhận xét 3.8. Từ ví dụ trên ta có $\frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$ và $\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2}$ là các số nguyên bằng nhau.

4. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

4.1. Chứng minh rằng $(a,b)^n=(a^n,b^n)$ với mọi số tự nhiên n.

4.2. Cho các số nguyên a,b,c khác không. Chứng minh rằng

$$([a,b],[b,c],[c,a])=[(a,b),(b,c),(c,a)].$$

4.3 (1997 Canadian Mathematical Olympiad). Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) với $x\le y$ thỏa mãn $\gcd(x,y)=5!$ và $\mathrm{lcm}(x,y)=50!$.

4.4 (1995 Russian Mathematical Olympiad). Dãy các số tự nhiên $a_1,a_2,...$ thỏa mãn điều kiện $\gcd(a_i,a_j)=\gcd(i,j)$ với mọi $i\ne j$. Chứng minh rằng $a_i=i$ với mọi i.

4.5 (AIME 1985). Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_n=100+n^2$, $n=1,2,...$ Với mỗi n, đặt $d_n=(a_n,a_{n+1})$. Tìm $\max_{n\ge1}d_n$.

4.6. Cho $a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\mathrm{lcm}(a_0,a_1)}+\frac{1}{\mathrm{lcm}(a_1,a_2)}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{lcm}(a_{n-1},a_n)}\le1-\frac{1}{2^n}.$$

4.7 (Putnam 1980). Hỏi có bao nhiêu bộ 4 số (a,b,c,d) thỏa mãn

$$3^r7^s=[a,b,c]=[b,c,d]=[c,d,a]=[d,a,b].$$

BẠN CÓ BIẾT ?

GIẢI MÃ CÁCH NÓI DÂN GIAN 50/50 HAY "5 ĂN, 5 THUA" VÀ NGUYÊN TẮC 25

NGUYỄN THƯỜNG LẠNG

(Viện Thương mại và Kinh tế Quốc tế, Trường ĐHKTQD Hà Nội)

Trong dân gian thường có cách nói về sự đánh đổi của 2 sự kiện là 50/50 hay 5 năm, 5 thua nghĩa là có thể thắng hoặc có thể thua và khả năng thắng hay thua trong một trò chơi hay trong một vụ làm ăn là ngang nhau. Bản chất của hai cách diễn đạt này là như nhau. Đây là sự đánh đổi "ngặt"đòi hỏi các bên phải tập trung cao nhất nguồn lực và sự cố gắng tối đa để thành công ít nhất là để bảo vệ lợi ích của mình để không bị rơi vào bên còn lại. Đây là mối quan hệ đơn giản nghĩa là chỉ có hai bên tham gia giao dịch, mua bán, tương tác với nhau và bên nào cũng muốn giành được phần hơn. Sự giằng co đạt đến đỉnh điểm với phương án tối ưu được các bên chấp thuận là 50/50 nếu không muốn thương vụ đổ vỡ, thậm chí đổ vỡ quan hệ.

Sự đánh đổi này xuất phát từ quan niệm một bên đạt được lợi ích một nửa trong cố gắng tối đa. Nếu thắng cũng chỉ có khả năng thắng một nửa và bên kia sẽ thắng một nửa. Còn nếu thua hay bị lỗ cũng chỉ chịu thiệt một nửa. Sự an ủi ở đây là không chỉ mình bị lỗ mà cả hai đều chịu lỗ ngang nhau. Cả hai bên sẽ có cùng sự chia sẻ đồng đều nhau về lợi ích thu được hay thua thiệt, rủi ro.

Vấn đề đặt ra là vì sao 50/50 là sự phân bổ khả năng thành công tối ưu mà khi đề cập đến sự gay go trong đàm phán 2 bên được đưa ra mà không phải là tỷ lệ 40/60 hay 20/80…?

Để trả lời câu hỏi này có thể xuất phát từ mối quan hệ đơn giản- một người mua và một người bán. Nguyên tắc mua bán hay rộng hơn là trò chơi giằng co lợi ích là bên nào cũng muốn phần hơn. Xét cụ thể trong quan hệ mua- bán, người mua muốn mua rẻ còn người bán muốn bán đắt để lợi ích của mỗi bên không chỉ được bảo toàn mà còn tăng thêm. Phần lợi ích tranh giành giữa các bên là chênh lệch giữa giá mua vào và giá bán ra. Giá mua vào thường được người mua đặt ở mức thấp nhất có thể, còn giá bán ra thường do người bán đặt ra ở mức cao nhất có thể. Khoảng lợi ích để hai bên có thể mặc cả, co kéo nhằm thu lợi ích nằm trong khoảng giữa mức giá mua và bán. Giả sử khoảng chênh lệch có giá trị là 1 và đó là tổng lợi ích của cả hai bên cần được phân chia. Nếu giá trị này rơi vào bên nào hoàn toàn thì bên đó được hưởng toàn bộ (1) và bên còn lại không có lợi ích nào (0).

Để bên này có thể thuyết phục bên kia cũng như thể hiện thái độ hợp tác, người bán có thể giảm giá từng bước và người mua có thể nâng giá phải trả để hai điểm này tiếp cận gần nhau nhằm đạt được sự thống nhất. Khi cả hai bên không đạt được sự nhất trí thì giao kèo thất bại. Vấn đề là không bên nào chịu thất bại và cả hai bên đều muốn có lợi hay cùng thắng cho nên phải cân nhắc, lựa chọn.

Giả định là bên bán giảm dần phần lợi ích và bên mua cũng làm tương tự để sự hợp tác có kết quả. Để đơn giản, phần lợi ích của cả hai bên cùng giảm tương ứng với nhau hay có tính chất tương hỗ. Bên bán giảm từ 1 xuống còn 0,75 và bên mua cũng trả thêm cho người bán 0,25 phần chênh lệch. Các con số 0,75 và 0,25 có thể được hiểu là giá trị kỳ vọng của mỗi bên phản ánh lợi ích thực sự của mỗi bên. Theo nguyên lý toán xác suất, giá trị kỳ vọng là tích của giá trị của biến cố với xác suất xảy ra biến cố. Nói cách khác xác suất xảy ra các biến cố này tương ứng với các giá trị kỳ vọng là 0,75 và 0,25. Nếu cả người mua và người bán tiếp tục điều chỉnh

phân giảm lợi ích của mình thì khả năng đạt được sự thống nhất ngày càng cao (bảng 1).

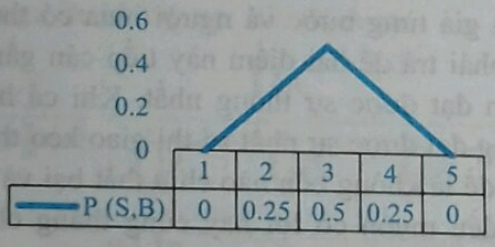
Bảng 1: Lợi ích, giá trị kỳ vọng và xác suất giao kèo thành công

Lợi ích bán (S)	*Lợi ích mua (B)*	*E(S)*	*E(B)*	*P(S)*	*P(B)*	*P(S,B)*
	0	1	0	100%	0%	0%
0,75	0,25	0,75	0,25	75%	25%	18,75%
0,5	0,5	0,50	0,5	50%	50%	25%
0,25	0,75	0,25	0,75	25%	75%	18,75%
0	1	0	100	0%	100%	0%

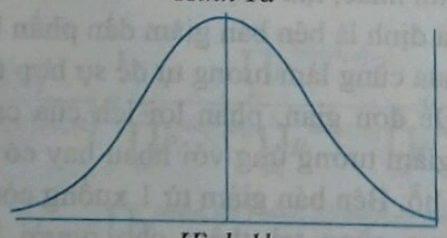
Nguồn: Tác giả (2019).

Điểm lưu ý ở đây là: Giá trị kỳ vọng = Giá trị × Xác suất xảy ra sự kiện. Giá trị ở đây là 1. Các giá trị kỳ vọng là các mức được các bên đưa ra để bên kia xem xét. Nếu vẽ mô phỏng bằng đồ thị thì có thể thấy phân bố xác suất các khả năng đạt được sự nhất trí để cả hai bên cùng thắng (hình 1a) có dạng giống phân phối chuẩn (hình 1b).

Hình 1: Mô phỏng phân phối xác suất để cả hai bên đạt được nhất trí



Hình 1a



Hình 1b

Nếu theo quy luật phân bố xác suất, khả năng xảy ra sự kiện (cả hai bên đạt được sự nhất trí) cao nhất trong các giao kèo 2 bên khi giá trị kỳ vọng đạt được một nửa, xác xuất thành công của mỗi bên đều là 50% hay 50/50 hoặc cách nói dân gian là "5 ăn, 5 thua". Thực chất đây là trường hợp đạt được một nửa lợi ích và mất đi một nửa lợi ích so với tổng thể lợi ích có thể đạt được chứ không phải bị mất hoàn toàn. Các bên vẫn có lợi ích từ giao kèo. Xác suất để cả hai bên đạt được sự thống nhất trong điều kiện phân phối công bằng khả năng xảy ra sự thỏa thuận là 25% (dòng số thứ 3, cột *P (S, B)*, bảng 1).

Như vậy, cách nói dân gian 50/50 hay "5 ăn, 5 thua" phản ánh giá trị kỳ vọng bằng nhau (có thể giải thích bản chất của câu nói này từ bài toán số học cơ bản là *nếu tổng của hai số không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau*) khi phân chia lợi ích trong các giao kèo hay thỏa thuận hai bên mà không bên nào vượt quá lợi ích có thể đạt được tối đa nhằm thu được nhiều hơn bên còn lại. Nguyên tắc 25 là nguyên tắc phản ánh xác xuất cao nhất để một giao kèo thành công với phân bổ lợi ích 50/50 là 25%. Ngoài mức lợi ích giao kèo ngang nhau này, các giao kèo còn lại có lợi ích phân bố không ngang nhau và xác suất thấp hơn cho đến khả năng xảy ra giao kèo bằng 0. Có 5 trường hợp xảy ra tương ứng với xác suất 0%, 18,25% và 25% và các trường hợp đối xứng nhau qua tỷ lệ 25%. Nói cách khác, nguyên tắc 25 là xác suất để cả hai bên cùng đạt được giao kèo thành công dao động trong khoảng 0 đến 25%. Con số 25 được sử dụng để chỉ ngưỡng cao nhất của một giao kèo hay trò chơi để cả hai bên đều thu lợi ích tối đa.

Danh mục tài liệu tham khảo

1. Cách nói cửa miệng trong các giao kèo hai bên phổ biến của người dân Bắc Bộ Việt Nam là "5 ăn, 5 thua".
2. Cao Hào Thi, Phân phối xác suất rời rạc, truy cập lần cuối cùng ngày 28 tháng 2 năm 2019, từ: https://fsppm.fuv.edu.vn/cache/MPP04-521-L03V-2012-02-09-09225658.pdf.
3. Chương trình đài truyền hình Việt Nam "Ai là triệu phú?" hay sử dụng cụm từ 50/50 để bỏ đi một nửa các câu trả lời không đúng trong 4 phương án lựa chọn như là cách thức động viên người chơi huy động hết khả năng và sự thuận lợi để đạt đến mục tiêu.
4. Investopedia, Expected Value, truy cập lần cuối cùng ngày 28 tháng 4 từ: https://www.investopedia.com/terms/e/expected-value.asp.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 47

Problem. *When organizing and representing data we can use stem-and-leaf model. For example*

Stem	*Leaf*
8	8 9
9	3 4 4 5 6 6 7
10	3 3 4 6 7 8
11	1 2 2 3 3 7 7 8 9
12	0 0 4 5 5 5 7 7
13	2 4 5 6 8 9 9
14	2 3 8
15	5 5 6

the table shows the data 88; 89; 93; 94; 94;...; 155; 155; 156. Find the range and the median of the data.

Solution. The range is the difference between the maximum and the minimum. Thus in this case the range is 156 – 88 = 68.

The number of items is 45 (we can count line by line, e.g. the first line has 2 items, the second has 7 ones,...). Therefore the median is the 23rd item and it is 118.

TỪ VỰNG

organize : *sắp xếp*

represent : *biểu diễn*

stem : *thân (cây)*

leaf : *lá*

range : *khoảng thay đổi*

median : *trung vị*

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Mức lương của 9 người trong một công ty con được chọn ngẫu nhiên là:* 9, 12, 14, 15, 200, 9, 17, 16, 119 (*triệu đồng*).
Hãy chọn một số đo theo xu hướng trung tâm thích hợp (số trung bình, số xuất hiện nhiều lần nhất, trung vị) để tóm tắt các mức lương này. Nêu lý do vì sao những số đo còn lại là không phù hợp.

Lời giải. Ta sắp xếp dãy dữ liệu lại như sau:
9, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 200.

Số lần xuất hiện nhiều lần nhất là 9. *Trung vị là* 14. *Số trung bình* là:
(9 + 9 + 11 + 12 +14 +15 +16 + 17 +200) : 9 = 33,7 (làm tròn đến một chữ số thập phân).

chúng ta nên chọn *trung vị* để tóm tắt mức lương của 9 người trên. Ta không nên chọn *giá trị trung bình* vì có phần tử ngoại lai là 200, giá trị này lớn hơn nhiều so với các giá trị còn lại và điều đó sẽ làm cho thông tin bị sai lệch. Ta cũng không nên chọn *số xuất hiện nhiều lần nhất* là 9 vì nó chỉ xuất hiện thêm một lần, hơn nữa so sánh với các giá trị còn lại của dãy dữ liệu thì nó có giá trị thấp nhất.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về toà soạn sớm: *Nguyễn Xuân Thành Đạt*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

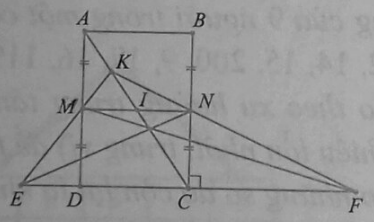
NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 27. *Cho hình chữ nhật ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$.*

ĐỊNH HƯỚNG 1. Vận dụng tính chất tia phân giác của hai góc kề bù.

Cách 1. Gọi F là giao điểm của KN và DC, I là giao điểm của AC và MN thì $IM = IN$.

Ta có: $MN \parallel CD$ nên tứ giác $EMNF$ là hình thang có hai cạnh bên EM và FN đồng quy tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EF.



Hình 1

Trong ΔENF có NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔENF cân tại N, suy ra NC là tia phân giác của $\widehat{ENF}$ mà $NC \perp MN$ (do $NM \perp BC$, $MN \parallel AB$) $\Rightarrow NM$ là tia phân giác góc ngoài tại N của ΔENF

Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$.

ĐỊNH HƯỚNG 2. Vận dụng định lí đảo của định lí về tính chất đường phân giác trong tam giác.

Cách 2. (h. 1). Gọi F là giao điểm của KN và DC, I là giao điểm của AC và MN thì $IM = IN$.

Ta có: $MN \parallel CD$ nên tứ giác $EMNF$ là hình thang có hai cạnh bên EM và FN cắt nhau tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EF.

Theo bổ đề hình thang, ta có KC, FM, EN đồng quy.

Áp dụng định lí Ceva vào ΔKFE, ta có:

$$\frac{KN}{NF}.\frac{FC}{CE}.\frac{EM}{MK} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{KN}{NF}.\frac{EM}{MK} = 1 \text{ (do } CF = CE).$$

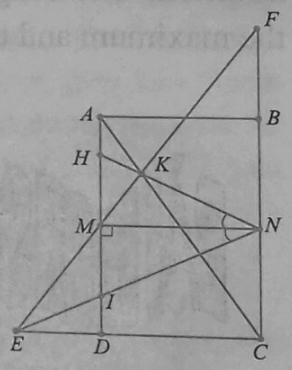
Mặt khác, tam giác NFE có NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến, nên NC cũng là đường trung trực của EF.

Vậy $NF = NE \Rightarrow \dfrac{KN}{NE}.\dfrac{EM}{MK} = 1 \Rightarrow \dfrac{KN}{NE} = \dfrac{MK}{ME}$.

Từ đó NM là đường phân giác của $\widehat{KNE}$.

ĐỊNH HƯỚNG 3. Chứng minh NM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến của một tam giác.

Cách 3. (h. 2) Gọi I là giao điểm của EN và AD, H là giao điểm của NK và AD, F là giao điểm của EM và CB.



Hình 2

Do $AD \parallel BC$, nên:

$$\frac{IM}{ID} = \frac{NF}{NC}, \quad \frac{HM}{HA} = \frac{NF}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{MH}{HA}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{MD} = \frac{HM}{MA}$$

Vì $MA = MD$ nên $MI = MH$.

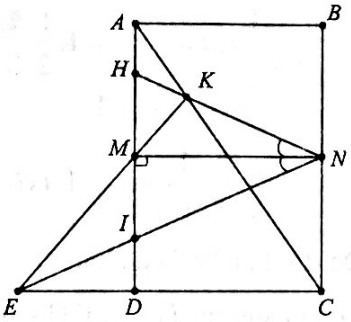
Ta có: $MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AD$ (do $AB \perp AD$), hay $MN \perp HI$.

Tam giác NHI có NM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên NM cũng là đường phân giác của ΔNHI.

Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$.

Cách 4. (h.3)

Gọi I là giao điểm của EN và AD, H là giao điểm của NK và AD.



Hình 3

Áp dụng *định lí Menelaus* vào tam giác NHI với cát tuyến KME, ta có:

$$\frac{EI}{EN}.\frac{KN}{KH}.\frac{MH}{MI}=1\ (*)$$

Do $DI // CN$ nên $\frac{EI}{EN}=\frac{DI}{CN}, \frac{KN}{KH}=\frac{CN}{AH}$

$\Rightarrow \frac{EI}{EN}.\frac{KN}{KH}=\frac{DI}{CN}.\frac{CN}{AH}=\frac{DI}{AH}.$

Từ (*) suy ra: $\frac{DI}{AH}.\frac{HM}{MI}=1 \Rightarrow \frac{HM}{MI}=\frac{AH}{DI}$

$\Rightarrow \frac{HM}{AH}=\frac{MI}{DI} \Rightarrow \frac{HM}{AM}=\frac{MI}{MD}$

$\Rightarrow HM = MI$ (vì $AM = MD$).

Ta có: $MN // AB$

$\Rightarrow MN \perp AD$ (do $AB \perp AD$), hay $MN \perp HI$. Tam giác NHI có NM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến, nên NM cũng là đường phân giác. Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$.

ĐỊNH HƯỚNG 4. Chứng minh hai góc $\widehat{KNM}$ và $\widehat{MNE}$ cùng bằng một góc thứ ba.

Cách 5. (h.4)

Ta có M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC, nên $MN // AB$.

Gọi I là giao điểm AC với MN thì $MI // CE$, suy ra

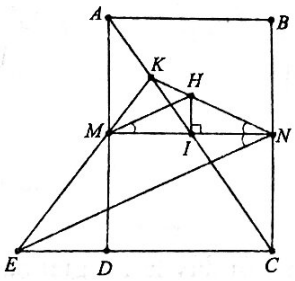
$$\frac{KM}{ME}=\frac{KI}{IC} \qquad (1)$$

Từ I kẻ đường thẳng song song với CN cắt KN tại H thì có $\frac{KH}{HN}=\frac{KI}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{KM}{ME}=\frac{KH}{HN}$$

$\Rightarrow MH // EN$ (Định lí Thales đảo)



Hình 4

$\Rightarrow \widehat{HMN}=\widehat{MNE}$ (so le trong).

Lại có ΔHMN cân tại H,

nên $\widehat{HMN}=\widehat{HNM}$

$\Rightarrow \widehat{HNM}=\widehat{MNE}$.

Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$.

ĐẬU CÔNG NHO

(*GV. THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

Nhận xét. Ngoài 5 cách giải của bạn *Đậu Công Nho*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* còn nhận được một số cách giải tương tự của các bạn: *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, tỉnh **Điện Biên**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 29 dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2019.

BÀI TOÁN 29. *Cho khối chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD của khối chóp lần lượt tại A', B', C', D' khác với S. Chứng minh rằng* $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

LÊ THẾ THÔNG

(*GV THPT Lê Quảng Chí, Kỳ Anh, Hà Tĩnh*)

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 504, T6.2019.

Bài 35 (IMO 2012). *Cho* $a_2, a_3, ..., a_n$ *là* $n-1$ *số thực dương thỏa mãn* $a_2a_3...a_n = 1$. *Chứng minh rằng:* $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$.

Lời giải. Từ bất đẳng thức Cauchy cho 2 số, 3 số, 4 số ,..., n số thực dương ta có:

$$1+a_2 \ge 2\sqrt{1.a_2} = 2\sqrt{a_2} \Rightarrow (1+a_2)^2 \ge \left(2\sqrt{a_2}\right)^2 = 2^2.a_2$$

$$1+a_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3 \ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.a_3} \Rightarrow (1+a_3)^3 \ge 3^3.\frac{1}{2^2}.a_3$$

$$1+a_4 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a_4 \ge 4.\sqrt[4]{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}a_3} \Rightarrow (1+a_4)^4 \ge 4^4.\frac{1}{3^3}.a_4$$

.....

$$1+a_n = \underbrace{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+...+\frac{1}{n-1}}_{n-1}+a_n$$

$$\ge n.\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{n-1}.\frac{1}{n-1}....\frac{1}{n-1}}_{n-1}.a_n} \Rightarrow (1+a_n)^n \ge n^n.\frac{1}{(n-1)^{n-1}}.a_n$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức cùng chiều:

$$\Rightarrow (1+a_2)^2(1+a_3)^3(1+a_4)^4...(1+a_n)^n$$
$$\ge 2^2.a_2.3^3.\frac{1}{2^2}.a_3.4^4.\frac{1}{3^3}.a_4....n^n.\frac{1}{(n-1)^{n-1}}.a_n$$

$$\Leftrightarrow (1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n$$
$$\ge \frac{2^2.3^3.4^4....n^n}{2^2.3^3....(n-1)^{n-1}}.a_2a_3...a_n = n^n.1 = n^n$$

(do $a_2a_3...a_n = 1$)

$$\Rightarrow (1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n \ge n^n \qquad (1)$$

Dấu '=' xảy ra khi

$$\begin{cases} a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, ..., a_n = \frac{1}{n-1} \\ a_2a_3...a_n = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2a_3a_4...a_n = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}...\frac{1}{n-1} \\ a_2a_3...a_n = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2.3...(n-1)} = 1 \text{ (vô lý).}$$

Do đó dấu "=" của bất đẳng thức (1) không xảy ra.

Từ (1) suy ra: $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$ và ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. 1) Dùng phương pháp hàm số ta có thể chứng minh bài toán này như sau:

Với mỗi $k \ge 2$, xét hàm số $f_k(x) = \frac{(x+1)^k}{x}$ trên khoảng (0; +∞). Ta có: $f_k'(x) = \frac{(x+1)^{k-1}[(k-1)x-1]}{x^2}$.

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{1}{k-1}$. Suy ra:

$$\frac{(x+1)^k}{x} = f_k(x) \ge f_k\left(\frac{1}{k-1}\right) = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Do vậy: $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n$

$$\ge a_2.\frac{2^2}{1}.a_3.\frac{3^3}{2^2}.a_4.\frac{4^4}{3^3}...a_n\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow (1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n \ge n^n.$$

Dấu "=" không xảy ra nên ta có đpcm.

2) Có hai bạn làm đúng bài này, đó là các bạn: *Phan Trung Kiên*, 9A3, THCS Lê Quang Cường, TP. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Đính chính: Trong số 505 (T7.2019), mục *Du lịch thế giới qua các bài toán hay*, có đăng lời giải thứ hai cho bài 34 của bạn *T.Q.An*, tuy nhiên lời giải này không thật chính xác. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2019.

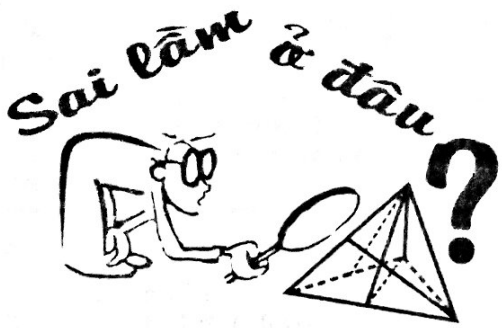
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 37. *Cho* $\begin{cases} a_i > 0, b_i > 0, \forall i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

NGÔ VĂN THÁI

(*GV THPT Phạm Quang Thẩm, Vũ Thư, Thái Bình*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI NÀO ĐÚNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 502, tháng 4 năm 2019)

Phân tích sai lầm. Việc suy ra $z=(|z|-4)+i|z|$ là phương trình hệ quả của cả hai phương trình ở đề bài. Do đó nếu tìm được ra z thì phải thử lại các điều kiện của bài toán có thỏa mãn hay không. Cả hai lời giải đã quên không thử lại (và nếu thử lại sẽ thấy hệ phương trình trên vô nghiệm nên $|z|$ không tồn tại).

Lời giải đúng. Đặt $z=a+ib\ (a,b\in\mathbb{R})$. Từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases}2a=4\\3a=\sqrt{a^2+b^2}\\b=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất suy ra $a = 2$. Từ hai phương trình cuối suy ra $b = 3a = 6$. Tuy nhiên với cặp số $(a, b) = (2, 6)$ không thỏa mãn phương trình $b=\sqrt{a^2+b^2}$. Vậy hệ vô nghiệm, do đó không tồn tại z thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

GÓC NHỎ NHẤT !

Trong giờ ôn thi THPTQG tại lớp 12 Anh, thầy giáo có nêu bài toán sau:

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d:

$\begin{cases}x=1+t\\y=-3-2t\\z=1-t\end{cases}$ và mp$(P): -2x+y+2z+2=0$.

(Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $a-b=1$ **B.** $a.b=2$

C. $a+b=2$ **D.** Không tồn tại a, b.

Sau vài phút suy nghĩ, bạn *Trà My* xung phong lên bảng giải, sau đây là lời giải của bạn *Trà My*:

Ta có VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(-2;1;2)$ và VTCP của d là $\vec{u}=(1;-2;-1)$. Ta có $d\subset(Q)\Rightarrow$ $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{n_Q}=0\Leftrightarrow a-2b+1=0\Leftrightarrow a=2b-1$.

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q), ta có:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|-2a+b-2|}{3.\sqrt{a^2+b^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{5b^2-4b+2}}.$$

Ta có $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của φ là 0

$$\Rightarrow\cos\varphi=1\Leftrightarrow\frac{|b|}{\sqrt{5b^2-4b+2}}=1\Leftrightarrow 4b^2-4b+2=0,$$

PT này vô nghiệm nên không tồn tại a, b. Chọn **D**.

Trà My giải xong, cả lớp đang xôn xao, *Bân Bân* giơ tay: *Thưa thầy em giải cũng ra đáp án **D**, nhưng cách làm khác với bạn.* Thầy giáo cho phép *Bân Bân* lên bảng trình bày lời giải của mình. Sau đây là lời giải của *Bân Bân*:

Ta có VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(-2;1;2)$ và VTCP của d là $\vec{u}=(1;-2;-1)$. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q), ta có $0^0\le\varphi\le 90^0\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của φ là 0^0. Mà $\varphi=0^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(Q)\equiv(P)\\(Q)//(P)\end{array}\right.$, điều này không xảy ra, vì $\vec{u}$, $\overrightarrow{n_P}$ không vuông góc với nhau nên d cắt (P) tại một điểm, ta lại có $d\subset(Q)$ nên (Q) không song song và không trùng với (P). Vậy không tồn tại mp(Q), nên không tồn tại a, b. Chọn đáp án **D**.

Lúc đầu chỉ có *Trà My* giải và chọn **D**, bây giờ có thêm *Bân Bân* giải và cũng chọn **D**, cả lớp 12 Anh tin đáp án là **D**. ***Còn lời giải của bạn thì thế nào?***

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 506 (8.2019)
Tòa soạn : 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: *Đoàn Việt Nam tại Kỳ thi IMO 2019. Từ trái qua phải: Em Nguyễn Khả Nhất Long, em Phan Minh Đức, em Nguyễn Nguyễn, thầy Nguyễn Chu Gia Vượng, thầy Lê Bá Khánh Trình, em Nguyễn Thuận Hưng, em Vũ Đức Vinh, em Vương Tùng Dương.*

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

THÁNG PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC PHỤC VỤ KHAI GIẢNG NĂM HỌC MỚI

(Từ ngày 20/7/2019 – 05/9/2019)

Trong tháng phát hành sách giáo dục phục vụ năm học 2019 – 2020, NXB Giáo dục Việt Nam đã chỉ đạo các đơn vị thành viên, các đối tác chuẩn bị đầy đủ, đồng bộ sách giáo khoa (SGK) và các sản phẩm giáo dục đáp ứng nhu cầu của khách hàng.

• Danh sách các cửa hàng trong hệ thống của NXB Giáo dục Việt Nam đăng ký đảm bảo cung ứng đầy đủ SGK được đăng tải trên website NXBGDVN tại địa chỉ *www.nxbgd.vn*

• Hệ thống cửa hàng bán lẻ mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời triển khai các chương trình ưu đãi, khuyến mại.

• Đường dây nóng giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK tiếp tục được duy trì qua số điện thoại: 0377 333 545. Thời gian trực: từ 8h00 đến 22h00 (từ ngày 22/4 đến ngày 15/9/2019, kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ).

Để tránh mua phải sách giả, sách in lậu, giáo viên, phụ huynh và học sinh hãy tìm mua sách tại các cửa hàng thuộc hệ thống phân phối chính thức của NXBGDVN, các công ty Sách - Thiết bị trường học địa phương, không mua sách từ các nguồn trôi nổi trên thị trường.

Một số hình ảnh cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam

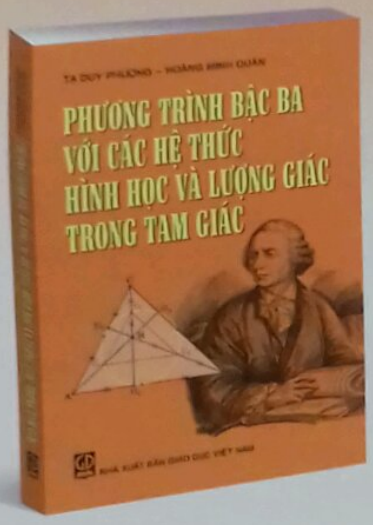
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT08M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng