TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2019 Số 504

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Tượng đài nhà toán học Stefan Banach ở Kraków (Ba Lan)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

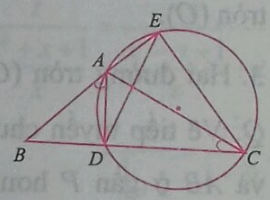
Để chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn, ta thường sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$. Chứng minh rằng BA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔACD.*

Lời giải. Giả sử BA và đường tròn (ACD) có hai điểm chung là A và E. B, A, E thẳng hàng.

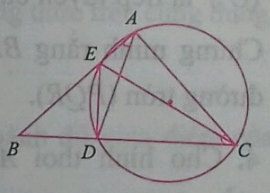
• Nếu A nằm giữa B và E thì $\widehat{BAD} > \widehat{AED}$, mà $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$), nên $\widehat{BAD} > \widehat{ACD}$, trái với giả thiết.



• Nếu E nằm giữa A và B thì $\widehat{BCA} > \widehat{BCE}$ mà

$$\widehat{BCE} = \widehat{BAD}$$

nên $\widehat{BCA} > \widehat{BAD}$, trái với giả thiết.



Vậy BA và đường tròn (ACD) chỉ có một điểm chung nên BA là tiếp tuyến của đường tròn (ACD).

Cách 2. Chứng minh khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có $AB = 13$cm, $BC = 14$cm, $CA = 15$cm. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính 12cm.*

Lời giải. Kẻ $AH \perp BC$ thì

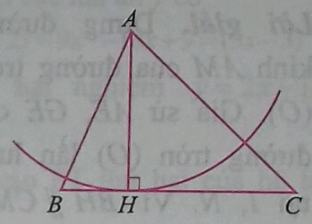
$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 (= AH^2).$$

Suy ra $13^2 - BH^2 = 15^2 - (14 - BH)^2$

$\Rightarrow BH = (13^2 + 14^2 - 15^2) : 28 = 5$

$\Rightarrow AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

$\Rightarrow AH = 12 = R.$



Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; 12\text{cm})$.

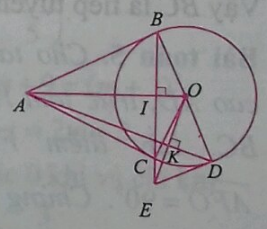
Cách 3. Chứng minh đường thẳng vuông góc với bán kính tại một điểm trên đường tròn

Bài toán 3. *Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm), kẻ đường kính BD. Đường thẳng qua O và vuông góc với AD cắt BC tại E. Chứng minh rằng ED là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Lời giải. Gọi $I = OA \cap BC$, $K = OE \cap AD$ thì

$\Delta OIE \backsim \Delta OKA$ (g.g)

$\Rightarrow OI.OA = OK.OE.$



Mặt khác

$$OD^2 = OB^2 = OI.OA,$$

nên $OD^2 = OK.OE.$

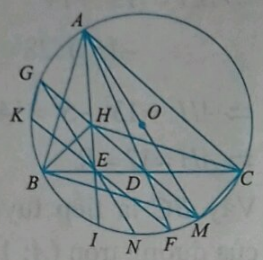
Từ đó $\Delta ODE \backsim \Delta OKD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OKD} = 90^0$ hay $ED \perp OD$.

Vậy ED là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Cách 4. Sử dụng tính chất: DA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABC khi D, B, C thẳng hàng và $\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$ hoặc $DA^2 = DB.DC$.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), AE là đường cao, H là trực tâm, D là trung điểm của BC, AD cắt đường tròn (O) tại F ($F \neq A$). Tia DH cắt đường tròn (O) tại G. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔGKE. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội năm học 2017 - 2018).*



Lời giải. Dựng đường kính AM của đường tròn (O). Giả sử AE, GE cắt đường tròn (O) lần lượt tại I, N. Vì $BH \parallel CM$, $CH \parallel BM$ nên $BHCM$ là hình bình hành, suy ra ba điểm H, D, M thẳng hàng. Từ đó $\widehat{AGD} = 90^0 = \widehat{AED} \Rightarrow$ tứ giác $AGED$ nội tiếp suy ra

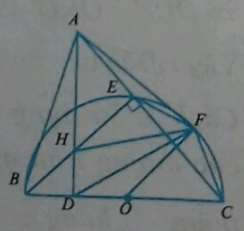
$$\widehat{EAD} = \widehat{EGD} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{IF} = \text{sđ}\overset{\frown}{NM} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{IN} = \text{sđ}\overset{\frown}{FM} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\widehat{ABC} = \widehat{AMC} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{MAC} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{BI} = \text{sđ}\overset{\frown}{CM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{BN} = \text{sđ}\overset{\frown}{CF} \Rightarrow \widehat{EGK} = \widehat{BEK}$. Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn (GKE).

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, trực tâm H. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm F sao cho $OF = OC$ và $\widehat{AFO} = 90^0$. Chứng minh rằng AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDHF.*



Lời giải. Từ $OF = OC = OB$ và $\widehat{AFO} = 90^0$ suy ra AF là tiếp tuyến của đường tròn (O) đường kính BC. Gọi E là giao điểm của AC và (O). Do $\widehat{BEC} = 90^0$ nên ba điểm B, H, E thẳng hàng. Vì $\Delta AEH \backsim \Delta ADC$ (g.g) nên

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD \quad (1)$$

Vì $\Delta AEF \backsim \Delta AFC$ (g.g) nên

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AF^2 = AH.AD$. Do đó AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDHF.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho ΔABC có $AB = 12\text{cm}, AC = 16\text{cm}, BC = 20\text{cm}$. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm A, bán kính 9,6 cm.

2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC ($AB < BC$). Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt BC tại I, OI cắt DB tại F. Chứng minh FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P, Q. Vẽ tiếp tuyến chung AB, $A \in (O)$, $B \in (O')$ và AB ở gần P hơn Q. Vẽ dây cung PC của (O') là tiếp tuyến của (O). Tia AP cắt BC tại R. Chứng minh rằng BP và BR là tiếp tuyến của đường tròn (PQR).

4. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60^0$. Lấy điểm E trên tia BA, điểm F trên tia BC sao cho E, D, F thẳng hàng. Gọi $I = CE \cap AF$. Chứng minh rằng CA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (AIE) và (CIF).

5. Từ điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến CA, CB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Lấy điểm E trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ ($EA \neq EB$). F là điểm đối xứng của A qua CE. Chứng minh rằng CE là tiếp tuyến của đường tròn (BEF).

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ, năm học 2018 - 2019

Câu 1. a) ĐKXĐ: $x \ge 0, x \ne 16$. Ta có

$$P(x) = \frac{5x - 12\sqrt{x} - 32}{x - 16} = \frac{(5\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$= \frac{5\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+4} = 5 - \frac{12}{\sqrt{x}+4}.$$

Với số nguyên x, $P(x)$ là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}+4$ là ước nguyên dương của 12, tức là

$\sqrt{x}+4 = 4$ hoặc $\sqrt{x}+4 = 6$ hoặc $\sqrt{x}+4 = 12$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$ hoặc $x = 64$.

Ta có $\begin{cases} P(0) = 2 \\ Q(0) = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} P(4) = 3 \\ Q(4) = 9 \end{cases}$, $\begin{cases} P(64) = 4 \\ Q(64) = 75 \end{cases}$.

Kết luận $x_0 = 4$.

b) Ta có

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Với $x \ne 0$ thì

$$A = \frac{x}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{t}{\frac{x^2+x+1}{x}} = \frac{t}{\frac{x^2-x+1}{x} + 2}$$

$$= \frac{t}{\frac{1}{t} + 2} = \frac{t^2}{1+2t}.$$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ nên công thức trên cũng đúng.

Vậy $A = \dfrac{t^2}{1+2t}$.

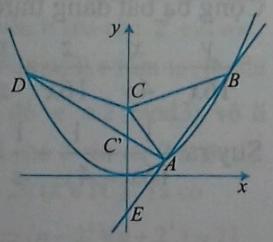
Câu 2. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $\dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{11}{8}x - \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, x = 4.$$

Các giao điểm của (P) và (d) là

$$A\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{16}\right), B(4;4).$$

Gọi D là điểm đối xứng của B qua trục tung. Ta có $D(-4;4)$.



Với điểm C tùy ý trên trục tung ta có

$CA + CB = CA + CD \ge AD$.

Suy ra $CA + CB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi A, C, D thẳng hàng.

Khi đó C là giao điểm của đường thẳng AD và trục tung. Phương trình đường thẳng AD là $y = -\dfrac{5}{8}x + \dfrac{3}{2}$. Vậy $C\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

b) PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn y có

$\Delta = (x+1)^2 - 4(-2x^2 + 5x - 2) = 9x^2 - 18x + 9 = (3x-3)^2$.

Phương trình này có hai nghiệm $y = 2x - 1$, $y = -x + 2$.

• Với $y = 2x - 1$ thay vào PT thứ hai của hệ ta được

$x^2 + (2x-1)^2 + x + 2x - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{4}{5}.$$

Với $x = 1$ thì $y = 1$, với $x = -\dfrac{4}{5}$ thì $y = -\dfrac{13}{5}$.

• Với $y = -x + 2$ thay vào PT thứ hai của hệ ta được $x^2 + (-x+2)^2 + x - x + 2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là:

$$(1;1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right).$$

Câu 3. a) Ta có $\Delta' = m^2 + 6m + 9 = (m+3)^2$.

PT có hai nghiệm là $x = -3, x = 2m + 3$.

Hai nghiệm phân biệt và khác 0 khi và chỉ khi

$$m \ne -3, m \ne -\frac{3}{2}.$$

Trường hợp 1: $x_1 = -3, x_2 = 2m + 3$. Khi đó

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{2x_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{-3} + \frac{1}{2(2m+3)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$$

(thỏa mãn ĐK).

Trường hợp 2: $x_1 = 2m + 3, x_2 = -3$. Khi đó

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{2x_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2m+3} + \frac{1}{-6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

(thỏa mãn ĐK).

b) Đặt $a=\sqrt[3]{3x^2-x+1}$, $b=-\sqrt[3]{3x^2-7x+2}$, $c=-\sqrt[3]{6x-3}$. Suy ra $a^3+b^3+c^3=2$.

PT đã cho trở thành $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$.

Ta có $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=0$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

• Nếu $a+b=0$ thì

$$\sqrt[3]{3x^2-x+1}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}.$$

• Nếu $c+b=0$ thì

$$\sqrt[3]{3x^2-7x+2}=-\sqrt[3]{6x-3}\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}.$$

• Nếu $a+c=0$ thì

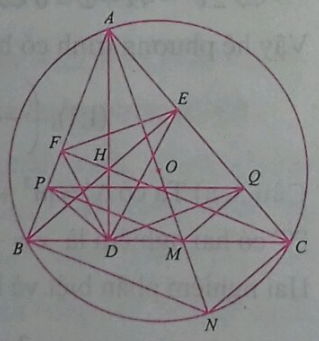
$$\sqrt[3]{3x^2-x+1}=\sqrt[3]{6x-3}\Leftrightarrow 3x^2-7x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=1, x=\frac{4}{3}.$$

Câu 4. a) Tứ giác $BDHF$ có $\widehat{D}+\widehat{F}=180^0$ nên nội tiếp. Suy ra $\widehat{FDH}=\widehat{FBH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FH}$).

Tứ giác $CDHE$ có $\widehat{D}+\widehat{E}=180^0$ nên nội tiếp. Suy ra $\widehat{HDE}=\widehat{HCE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{HE}$).

Tứ giác $BCEF$ có E và F cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên nội tiếp. Suy ra $\widehat{EBF}=\widehat{ECF}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EF}$). Do đó $\widehat{FDH}=\widehat{HDE}$ hay DH là phân giác của góc $\widehat{EDF}$.



Chứng minh tương tự EH là phân giác của góc $\widehat{DEF}$, FH là phân giác của góc $\widehat{DFE}$. H là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác DEF nên là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác này.

b) Vẽ đường kính AN của đường tròn (O). Ta có AN qua M và $\widehat{ABN}=\widehat{ACN}=90^0$.

Mà $\widehat{ANC}=\widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$). Suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{NAC}$.

Hai tam giác vuông AFH và AQM có $\widehat{FAH}=\widehat{MAQ}$ nên đồng dạng $\Rightarrow \frac{HF}{MQ}=\frac{AH}{AM}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{HE}{MP}=\frac{AH}{AM}$.

Do đó $\frac{HF}{MQ}=\frac{HE}{MP}\Leftrightarrow HE.MQ=HF.MP$.

c) Tứ giác $APDM$ có P và D cùng nhìn AM dưới góc vuông nên nội tiếp. Suy ra $\widehat{PAD}=\widehat{PMD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{PD}$). Do đó ΔMBP và ΔABD đồng dạng, suy ra

$$\frac{MB}{AB}=\frac{PB}{DB}\Leftrightarrow MB.DB=AB.PB.$$

Chứng minh tương tự có $MC.DC=AC.QC$.

Chia hai đẳng thức theo vế ta được

$$\frac{MB}{MC}.\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.\frac{PB}{QC}. \quad (1)$$

Mà $BN \parallel PM$ (cùng vuông góc với AB) nên

$$\frac{PB}{AB}=\frac{MN}{AN}.$$

Tương tự $\frac{QC}{AC}=\frac{MN}{AN}$. Suy ra $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ hay

$$\frac{PB}{QC}=\frac{AB}{AC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{MB}{MC}.\frac{DB}{DC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Câu 5. a) Ta có

$$\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}=(x+y+z)\left(\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}+\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}+\frac{21}{16}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{16x}.\frac{x}{4y}}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}\ge 2\sqrt{\frac{z}{16x}.\frac{x}{z}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\ge 2\sqrt{\frac{z}{4y}.\frac{y}{z}}=1.$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta được

$$\frac{y}{16x}+\frac{x}{4y}+\frac{z}{16x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{4y}+\frac{y}{z}\ge\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{7}{4}.$$

Suy ra $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\ge\frac{7}{4}+\frac{21}{16}=\frac{49}{16}$.

☞

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BÌNH PHƯỚC
NĂM HỌC 2018 – 2019

Câu 1 (*5 điểm*). 1) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\frac{x+8}{\left(3-\sqrt{x-1}\right)\left(3+\sqrt{x-1}\right)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-1-3\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right).$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi

$$x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-(\sqrt{5}+1)\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|.$$

2) Cho x,y là các số thực thỏa mãn: $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=2x^4+x^3(2y-1)+y^3(2x-1)+2y^4.$$

Câu 2 (*5 điểm*). 1) Giải phương trình:

$$\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{2x-3}.$$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy-2x+y=6\\(x+1)^2+(y-2)^2=8\end{cases}$.

3) Cho hàm số $(P): y=x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $(d): y=2x+m-1$ cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1.y_2-x_1.x_2=12$.

Câu 3 (*5 điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), D là một điểm trên cạnh AB, $(D\neq A,B)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CA. Đường thẳng MN cắt (O) tại hai điểm P, Q (P, Q lần lượt thuộc cung CB và CA). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt CB tại I $(I\neq B)$. Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $PK.QC=QB.PD$.

c) Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G $(G\neq P)$. Đường thẳng IG cắt BA tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên BA thì $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu 4 (*2 điểm*). Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=a, AD=b$. Trên các cạnh AD,AB,BC,CD lần lượt lấy các điểm E,F,G,H sao cho luôn tạo thành tứ giác $EFGH$. Gọi c là chu vi của tứ giác $EFGH$. Chứng minh $c\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Câu 5 (*3 điểm*). 1) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $4y^4+6y^2-1=x$.

2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

MAI VĨNH PHÚ

(*GV Trường THCS - THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước*) ***giới thiệu***

☞ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{7}, y=\frac{2}{7}, z=\frac{4}{7}$.

b) Ta có $x+y+xy=1\Leftrightarrow(x+1)(y+1)=2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+x=1\\1+y=2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}1+x=-1\\1+y=-2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}1+x=2\\1+y=1\end{cases}$$

$$\text{hoặc }\begin{cases}1+x=-2\\1+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=0,y=1\text{ hoặc }x=-2,y=-3$$

hoặc $x=1,y=0$ hoặc $x=-3,y=-2$.

Trường hợp 1: $x=0,y=1$. Khi đó

$$A=(2^{z+1}+42)(x^2+y^2+1+x^2y^2)=4(2^z+21).$$

A là số chính phương khi và chỉ khi 2^z+21 là số chính phương. Nghĩa là tồn tại số tự nhiên n sao cho $2^z+21=n^2$. Ta có $2\equiv-1\,(\text{mod}3)\Rightarrow 2^z\equiv(-1)^z\,(\text{mod}3)$. Nếu z lẻ thì $2^z\equiv-1\,(\text{mod}3)\equiv 2\,(\text{mod}3)$. Khi đó $n^2\equiv 2\,(\text{mod}3)$ vô lí (vì một số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1). Từ đó suy ra z là số chẵn. Đặt $z=2k\,(k\in\mathbb{N}^*)$. Ta có

$$n^2=21+2^{2k}\Leftrightarrow n^2-(2^k)^2=21\Leftrightarrow(n-2^k)(n+2^k)=21.$$

Vì $21=1.21=3.7$ và $n-2^k<n+2^k$ nên ta có hai trường hợp sau:

1) $\begin{cases}n-2^k=1\\n+2^k=21\end{cases}\Rightarrow 2^k=10$ không có giá trị nào của k thỏa mãn trường hợp này.

2) $\begin{cases}n-2^k=3\\n+2^k=7\end{cases}\Rightarrow 2^k=2\Rightarrow k=1\Rightarrow z=2.$

Lúc này $A=100=10^2$.

Trường hợp 2: $x=1,y=0$. Giải tương tự ta được $z=2, A=100=10^2$.

Trường hợp 3: $x=-2,y=-3$. Giải tương tự ta được $z=2, A=2500=50^2$.

Trường hợp 4: $x=-3,y=-2$. Giải tương tự ta được $z=2, A=2500=50^2$.

Vậy $x=-2, y=-3, z=2$ hoặc $x=-3, y=-2, z=2$.

NGUYỄN TẤN TƯỜNG

(*Phó Phòng phổ thông, Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế*) ***giới thiệu***

16th HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION, VIETNAM 2019

INDIVIDUAL CONTEST - SENIOR SECTION

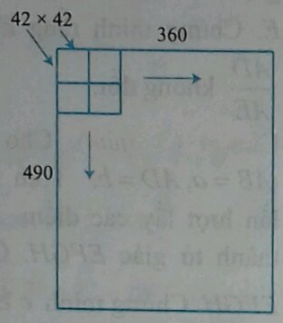
GROUP A

NGUYỄN VĂN MẬU
NGUYỄN MINH TUẤN
(Hội Toán học Hà Nội) giới thiệu

SENIOR SECTION (GROUP A)
1. QUESTION

(Time limit: 120 minutes)

Problem 1. A constructor wants to cover a rectangle floor of size 360 × 490 by bricks of size 42 × 42 (the measure of sides is in centimeter). How many bricks he should use? *Note: The bricks can be cut for covering some small space, but in this case only one piece of each splitted brick may be used. See the figure.*



A. 100. **B.** 101. **C.** 108. **D.** 109. **E.** 110.

Problem 2. Let $\{a_n\}_{n\geq 0}$ be a sequence of real numbers defined as follows $a_0 = 1$, $a_{n+1}^3 = 2019a_n^3$ for every $n \geq 0$. Then, a_{2019} is equal to

A. 2019^{2018} **B.** 2019^{2019} **C.** 2019^{674}
D. 2019^{673} **E.** 2019^{675}

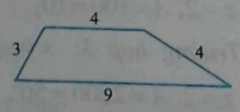
Problem 3. The sequence of three-digit numbers $\overline{a9c}$, $\overline{b6a}$, $\overline{ca1}$, $\overline{c99}$ is increasing, and

$$\overline{b6a} - \overline{a9c} = \overline{ca1} - \overline{b6a} = \overline{c99} - \overline{ca1} > 0.$$

What is the value of $a + b + c$?

A. 6. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11. **E.** 12.

Problem 4. The area of the trapezium (see the figure) equals to

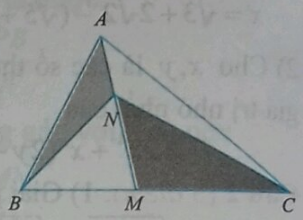


A. $\frac{39}{2}$ **B.** $\frac{78}{5}$ **C.** 15 **D.** $\frac{91}{5}$ **E.** $\frac{72}{5}$

Problem 5. Let ΔABC be given, and let $M \in BC$ with $MB \neq MC$. Suppose $N \in AM$ with

$$S(ABN) + S(CMN) = \frac{1}{2}S(ABC),$$

where $S(ABN)$, $S(CMN)$, and $S(ABC)$ are the areas of triangles ABN, CMN, and ABC respectively. The ratio $\frac{AN}{MN}$ is equal to



A. 2 **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 3. **E.** $\frac{1}{3}$.

Problem 6. Let $A = \overline{xyz}$ be given, where x, y, z are distinct digits. Suppose that A is the same as the difference between the largest and the smallest numbers among the three-digit numbers constituted by rearrangement of digits x, y, z. What is A?

Answer:.....

Problem 7. Write down two different polynomials $P_1(x)$, $P_2(x)$ with real coefficients satisfying the property $P_j(x^2 + 2019) = P_j(x)^2 + 2019$, for all $x \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$.

Answer:.....

Problem 8. Two non-zero real numbers a and b satisfy $ab = a + b$. Write down all possible values of $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

Answer:.....

Problem 9. Find all positive integers x, y, z such that

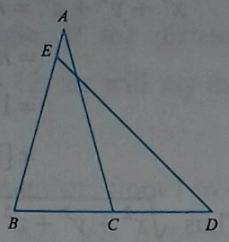
$$\begin{cases} x + y = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^3 \end{cases}.$$

Answer:.....

Problem 10. Given an isosceles triangle ABC with $AB = AC$ and $\widehat{BAC} = 30^0$. The point D is the image of B in the reflection in C. Let E be a point on AB such that

$DE = EA + AC = 20$cm.

What is the length of side AB?



Answer:.....

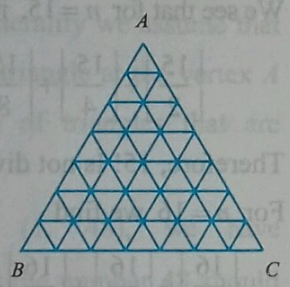
Problem 11. Let x, y be consecutive integers, and let z be the product of x and y. Prove that $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a) is an integer;

b) is an odd integer.

Problem 12. Find the smallest positive integer n such that $n!$ is divisible by $1!2!\ldots 6!$.

Problem 13. Each one of the integers $1, 2, \ldots, 49$ is assigned to one of the 49 triangles of the included grid (see the figure) so that each small triangle contains only one number. Prove that there are two triangles having a common side for which the difference of the numbers assigned to them is greater than 4.



Problem 14. Prove that if four points are arbitrarily placed either inside or on the boundary of a square of side 1, there exist at least two points for which the distance between them is not greater than 1.

Problem 15. Decide whether there exist positive real numbers $x \neq y$, such that

$$x < y^2 < x^3 < y^4 < x^5 < y^6 < \ldots$$

Justify your answer.

2. SENIOR SECTION'S ANSWERS AND SOLUTION

Problem 1. We have

$$\frac{360}{42} = 8 + \frac{24}{42};\ \frac{490}{42} = 11 + \frac{28}{42}.$$

It follows that he needs

$$8\times 11 + 8 + 11 + 1 = 108 \text{ (bricks)}$$

The answer is **C.**

Problem 2. We have $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[3]{2019}$. It follows

$$a_n = \frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_0} = \sqrt[3]{2019^n}.$$

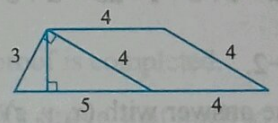
Inserting $n = 2019$ into the above identity yields

$$a_{2019} = \sqrt[3]{2019^{2019}} = 2019^{673}.$$

The answer is **D.**

Problem 3. We can see that $a < b < c$. Let $r = y - x = z - y = t - z$ the unit digit of $r = t - z = \overline{c99} - \overline{ca1}$ is equal to 8, therefore the unit digit of $z - y = \overline{ca1} - \overline{b6a}$ and $y - x = \overline{ca1} - \overline{a9c}$ should be also 8. It implies that $a = 3$ and then $c = 5$. This means $t = 599$, $z = 531$ and $r = 68$. Hence, $y = z - r = 463$ and $x = 395$. We have $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. The answer is **E.**

Problem 4. The answer is **B.**



Problem 5. One can try a special case when N is a midpoint of AM. Then the ratio is 1. In fact that ratio is always of 1. Indeed, from the identities

$$S(ABN) = \frac{x}{x+y}S(ABM);$$

$$S(CNM) = \frac{y}{x+y}S(ACM);$$

$$S(ABM) = \frac{u}{u+v}S(ABC);$$

$$S(ACM) = \frac{v}{u+v}S(ABC);$$

where the lengths $AN = x$, $NM = y$, $BM = u$, and $MC = v$. We then have

$$\frac{1}{2}S(ABC) = \frac{x}{x+y}\cdot\frac{u}{u+v}S(ABC) + \frac{y}{x+y}\cdot\frac{v}{u+v}S(ABC).$$

Equivalently,

$$(x+y)(u+v) = 2xu + 2yv, \text{ or } (x-y)(u-v) = 0.$$

Since $u \neq v$, we have $x = y$. The answer is **B.**

Problem 6. The answer with $A = 495$ gets 10 points. Let $\overline{abc}$ be the biggest number $(a > b > c)$ and $\overline{cba}$ the smallest one. Hence $\overline{xyz} = \overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-c)$, which is multiple of 99. This implies

$$A \in \{198; 297; 396; 495; 594; 693; 792; 891\}.$$

Therefore, $A = 495$.

Problem 7. For instance, $P_1(x) = x$, and $P_2(x) = x^2 + 2019$. In fact, there are infinitely many such polynomials. The jury should check the polynomials showed by contestants.

The right answer with each one of polynomials P_1, P_2 gets 5 points.

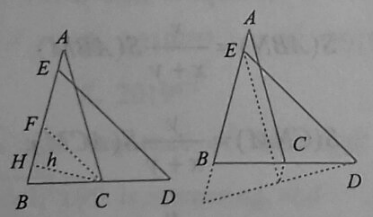
Problem 8. The answer with -2 gets 10 points. From the assumption it follows either $a = \frac{a}{b} + 1$ or $b = 1 + \frac{b}{a}$. We then have

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = a - 1 + b - 1 - ab = a + b - ab - 2 = -2.$$

The answer is -2.

Problem 9. The answer with $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ gets 10 points.

Problem 10. The answer is $10\sqrt{3}$.



Let F be the midpoint of the line segment EB. We have

$$DE = AC + AE = AB + AE = 2AE + EB$$
$$= 2AE + 2EF = 2AF.$$

Thus $FC = \frac{1}{2}DE = FA = 10\text{cm}$, i.e.triangle FAC is isosceles and $\widehat{BAC} = 30^0$. Let h be the distance from C to AB, we have $h = 5\sqrt{3}$. Therefore

$$AB = AC = 2h = 10\sqrt{3}.$$

Problem 11. Let $x = n$; $y = n+1$ and $z = n(n+1)$. We then have

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2$$
$$= n^2 + n^2 + 2n + 1 + [n(n+1)]^2$$
$$= 1 + 2n(n+1) + [n(n+1)]^2$$
$$= [1 + n(n+1)]^2.$$

Thus $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = n(n+1) + 1$.

Moreover, $n(n+1)$ is an even number, as it is the product of two consecutive. The proof is completed.

Problem 12. We can find the prime factorization of $1!2!...5!6! = 2^m.3^n.5^k$, as follows

	2!	3!	4!	5!	6!	Total
m	1	1	3	3	4	12
n	0	0	1	1	2	5
k	0	0	0	1	1	2

This implies $1!2!...6! = 2^{12}.3^5.5^2$. Then, $2^{12} \mid n!$.

We see that for $n = 15$, it yields

$$\left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{8} \right\rfloor = 7 + 3 + 1 = 11 < 12.$$

Therefore, 15! Is not divisible by 2^{12}. Hence $n \geq 16$. For $n = 16$ we find

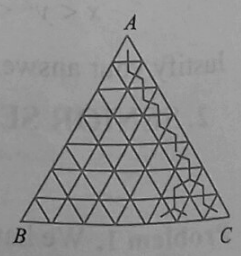
$$\left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{16} \right\rfloor = 8 + 4 + 2 + 1 = 15,$$

$$\left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{9} \right\rfloor = 5 + 1 = 6,$$

$$\left\lfloor \frac{16}{5} \right\rfloor = 3.$$

The answer is $n = 16$.

Problem 13. We can connect the center of all pairs of triangles having a common side by a red line segment. By distance between two triangles we denote the smallest number of line segments we have pass through to move from the center of one triangle to that of the other. Note that in this triangular grid, the distance between any two trian-



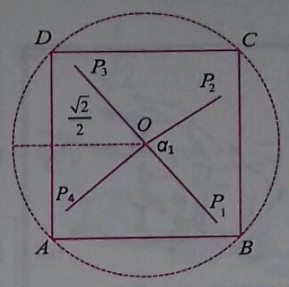
gles does not exceed 12. Moreover the distance equals to 12 when one of those triangles is adjacent to one of the vertices and the other is adjacent to the opposite side of the big triangle. If the distance between two triangles equals to 12, we will say that they are *opposite*.

Assume that one can fill all the numbers from 1 to 49 into the triangular grid such that the difference between every pair of neighboring triangles is smaller or equal to 4. We can see that if numbers a and b are assigned to two triangles whose distance equals to d then $|a-b| \le 4d$.

Consider the pair (1, 49). Since 49 − 1 = 48 = 12 × 4, the distance between the triangles containing 1 and 49 should be at least 12, therefore they are the opposite triangles. This means either 1 or 49 should be assigned to one of the corner triangles. Without lost of generality we assume that number 1 is assigned to the triangle at the vertex A and 49 is assigned to one of triangles that are adjacent to the side BC.

Now, consider the pair (1, 48), we have $48-1>4\times 11$ we see that the number 48 should be also assigned to one of the triangles adjacent to BC. We also see that the pairs (2, 48) and (2, 49) consists of numbers that should be assigned to two opposite triangles. The only triangle which is opposite to two distinct triangles on side BC is the triangle at vertex A. That means the number 2 should be also assigned to the triangle adjacent to vertex A. We have a contradiction.

Problem 14. Let O denote the center of the unit square $ABCD$. If one of the selected points is placed at O then all other the points are inside the circle $\left(O;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, which proves the conclusion.



Otherwise, let P_1 be one of the selected points. From the point O we draw a ray Ox that passes through P_1. Now, we can rotate this ray anti-clockwise until we meet one of the selected points and we denote this point by P_2. We continue the rotation to have points P_3 and P_4. Let

$$\alpha_1 = \widehat{P_1OP_2};\ \alpha_2 = \widehat{P_2OP_3};\ \alpha_3 = \widehat{P_3OP_4}\ ;\ \alpha_4 = \widehat{P_4OP_1}.$$

We have $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 360^0$, therefore one of this angles should not exceed 90^0. WLOG, we assume that $\alpha_1 \le 90^0$. We know that P_1, P_2 belong to $C\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, hence $P_1P_2^2 \le OP_1^2 + OP_2^2 \le 1$. Thus $P_1P_2 \le 1$. The proof is completed.

Problem 15. We prove that such x, y do not exist. Indeed, assume otherwise. Indeed, assume otherwise. Let $t=\frac{x}{y}$. Since x, y are different positive real numbers, then t is also positive and moreover, t is not equal to 1. By the assumption we get $t^{2k-1} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2k-1} < y$, for every positive integer k. If $t>1$, then t^{2k-1} may be arbitrarily large as k tends to infinity, so t^{2k-1} would not be bouded from above by y. Thus $t<1$. But then the assumption yields $\frac{1}{y} < \left(\frac{x}{y}\right)^{2k+1} = t^{2k+1}$.

Since for $t<1$, t^{2k+1} may be arbitrarily small as k becomes large enough, we obtain the contradiction.

PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh*)
TRẦN VĂN LÂM (*Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, TX. Phú Yên, Thái Nguyên*)

(*Tiếp theo kỳ trước*)

Kết quả 2.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng đồng biến trên miền H thỏa mãn $f(x) > g(x)$ với $\forall x \in H$, tập giá trị của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên miền H đều là các tập con của H. Khi đó $f_n(x) > g_n(x), \forall x \in H$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

Chứng minh. Do $f(x) > g(x), \forall x \in H$ nên

$$f_1(x) > g_1(x), \forall x \in H.$$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến nên ta có

$$f(x) > g(x) \Rightarrow f_2(x) = f(f(x)) > f(g(x)).$$

Mà $f(x) > g(x)$ với $\forall x \in H$ nên

$$f(g(x)) > g(g(x)) = g_2(x)$$

suy ra $f_2(x) > g_2(x), \forall x \in H$.

Bằng quy nạp có $f_n(x) > g_n(x), \forall x \in H$.

Sau đây là các thí dụ.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}.$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -2$ suy ra $6 + x > 0$.

Xét $\sqrt{2+x} > \sqrt[3]{6+x} \Leftrightarrow (\sqrt{2+x})^6 > (\sqrt[3]{6+x})^6$

$\Leftrightarrow (2+x)^3 - (6+x)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+7x+14) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Tương tự có $\sqrt{2+x} < \sqrt[3]{6+x} \Leftrightarrow x < 2$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = \sqrt{2+x}$ và $g(x) = \sqrt[3]{6+x}$ cùng đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và nửa khoảng $[-2;2)$.

Do đó phương trình đã cho trở thành:

$$f_3(x) = g_3(x). \qquad (1)$$

- Với $x > 2$ thì $f(x) > g(x) > 2$ nên theo kết quả 2 có $f_3(x) > g_3(x)$.
- Với $x \in [-2;2)$ thì $0 < f(x) < g(x) < 2$ nên theo kết quả 2 có $f_3(x) < g_3(x)$.
- Với $x = 2$ là nghiệm của PT(1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x = 2$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$18 + 9.2^{2^x} = 2.3^{3^x}. \qquad (1)$$

Lời giải. PT(1) $\Leftrightarrow 1 + 2^{2^x-1} = 3^{3^x-2}$

$$\Leftrightarrow 2^{2^x-1} - 1 = 3^{3^x-2} - 2. \qquad (2)$$

Hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến nên

$$2^x - 1 < 3^x - 2 \Leftrightarrow 2^x + 1 < 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Tương tự $2^x - 1 > 3^x - 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = 2^x - 1$ và $g(x) = 3^x - 2$ đồng biến trên từng khoảng $(1;+\infty)$ và $(-\infty;1)$.

PT(2) trở thành: $f_2(x) = g_2(x)$.

- Với $x > 1$ thì $1 < f(x) < g(x)$.

Theo kết quả 2 ta có $f_2(x) < g_2(x)$.

- Với $x < 1$ thì $1 > f(x) > g(x)$.

Theo kết quả 2 ta có $f_2(x) > g_2(x)$.

- Với $x = 1$ là nghiệm của PT(2).

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm $x = 1$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi\sin x}{3\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi\sin x}{\sqrt{8}}\right)\right)\right).$$

Lời giải. Đặt $\sin x = t \in [-1;1]$. PT đã cho trở thành: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3\sqrt{2}}\right)\right)\right)$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{8}}\sin\left(\frac{\pi t}{\sqrt{8}}\right)\right)\right). \quad (*)$$

Ta có $t=0$ là 1 nghiệm của PT(*). Nhận thấy nếu t_0 là nghiệm của PT(*) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của PT(*). Do vậy ta chỉ cần xét $t \in (0;1]$. Khi này $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}t \in \left(0;\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right]$; $\frac{\pi t}{\sqrt{8}} \in \left(0;\frac{\pi}{\sqrt{8}}\right]$; $\frac{\pi t}{6\sqrt{2}} \in \left(0;\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\right]$.

Suy ra $f(t)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{3\sqrt{2}}$ và $g(t)=\sin\frac{\pi t}{\sqrt{8}}$ đồng biến trên $(0;1]$; $h(t)=\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$ nghịch biến trên $(0;1]$; $\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0$; $\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0$.

PT(*) trở thành: $f_3(t)=g_3(t)$.

Xét $f(t)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{3\sqrt{2}} > \sin\frac{\pi t}{\sqrt{8}} = g(t)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2.\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right) > \sin\left(3.\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}} > 3\sin\frac{\pi t}{6\sqrt{2}} - 4\sin^3\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)\left[1+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)-4\cos^2\left(\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}\right]\left[\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]>0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}>0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi t}{6\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}<\frac{\pi t}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow t>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tương tự $f(t)<g(t) \Leftrightarrow t<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ thì

$$1>\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \ge f(t) > g(t) > \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Theo kết quả 2 ta có $f_3(t)>g_3(t)$.

Với $t \in \left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì $0<f(t)<g(t)<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Theo kết quả 2 ta có $f_3(t)<g_3(t)$.

Dễ thấy $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của PT(*).

Vậy $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm duy nhất của PT(*) khi xét $t \in (0;1]$. Theo các nhận xét ở trên thì PT(*) có tất cả 3 nghiệm $t=0; t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra PT đã cho có nghiệm là

$$x=k\pi; x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi; x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi; x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi.$$

BÀI TẬP

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{2x+\sqrt{x}}}=x.$
2. $\sqrt[3]{1+7\sqrt{-1+\sqrt[3]{1+7\sqrt{-1+x}}}}=x.$
3. $\dfrac{x-\sqrt{6\sqrt{6x-11}+6\sqrt{x-1}-11}}{\sqrt{\sqrt{6x-11}+\sqrt{x-1}-1}}=1.$
4. $3\sqrt{x^2+1}+\sqrt{10x^2+2-6x\sqrt{x^2+1}}=8x.$
5. $\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2x}}}=x.$
6. $\log_3\left(1+2\log_3(1+2x)\right)=x.$
7. $\log\left(1+9\sqrt{\log\left(1+9\sqrt{\log(1+9x)}\right)}\right)=x^2.$

8. $\log_3\left(1+2^{\log_3(1+2^x)}\right)=x.$

9. $\left(2^{x^3}-1\right)^3=\log_2(x+1).$

10. $\sin\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}(\sin x)\right)\right)=\sin x.$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}}}}}}}=2x-1.$

Bài tập 2. Giải phương trình:

1. $\left(3\left(3x^5-2\right)^5-2\right)^5=\dfrac{1+2\left(2\left(2x^3-1\right)^3-1\right)^3}{3}.$

2. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}}=\sqrt[5]{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}}}.$

3. $1+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{1+2^x}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{3^x}.$

4. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}+2}{3\sqrt{3x-2}-2}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2}{3\sqrt{3x-2}-2}}=1.$

5. $x^3+4x+6+4\sqrt[3]{x^3+4x+4}=3\sqrt[3]{2+3x}.$

6. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right).$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$

$=\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)\right).$

8. $1+\log_3\left(\log_3 3x\right)=\log_5\left(4+\log_5(4+x)\right).$

9. $\sqrt{1+2^{\sqrt{1+2^x}}}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)}.$

10. $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{2^x+3^x}+\left(\sqrt[5]{3}\right)^{2^x+3^x}=\left(\sqrt[5]{5}\right)^{5^x}.$

11. $\left(\sqrt{2}\right)^{(\sqrt{2})^x}=\frac{2^{2^x}}{4}-2.$

12. $2+\log_3\left(1+2^{\log_3\left(1+2^x\right)}\right)$

$=\log_2\left(3^{\log_2\left(\frac{3^x+5^x}{4}\right)}+5^{\log_2\left(\frac{3^x+5^x}{4}\right)}\right).$

Bài tập 3. Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases}\sqrt{2^{2^x}}=2(y+1)\\ 2^{2^y}=2x\end{cases}.$

2. $\begin{cases}3\sqrt{3\sqrt{3x-2}-2}-y=2\\ 2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}-y\sqrt{y}=1\end{cases}.$

3. $\begin{cases}x=2+\log_2\log_2 y\\ y=2\log_2 z\\ z=2+\log_2\log_2 x\end{cases}.$

4. $\begin{cases}x=1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{1-\sqrt{1-y}}}}}}\\ 1+y\sqrt{x}=y\end{cases}.$

Bài tập 4. Cho $f(x)=2x^2-1;\ g(x)=4x^3-3x;$

$$h(x)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}};\ k(x)=x(x-3)^2$$

Tìm số nghiệm phương trình:

1) $f_5(x)=h(x);$ 2) $g_4(x)=h(x);$

3) $f_4(x)=\dfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}{2};$ 4) $k_7(x)=0;$

5) $f_3(x)=h_3(x);$ 6) $g_3(x)=h_2(x);$

7) $h_4(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2};$ 8) $h_5(x)=h_4(x).$

Bài tập 5. Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x};\ g(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$. Giải phương trình : $f_{100}(x)=g_4(x)$.

Bài tập 6. Cho $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$. Giải các phương trình sau:

a) $\sum_{i=1}^{5}f_i(x)=0;$ b) $\prod_{k=1}^{4}f_k(x)=-\frac{1}{7}.$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

1B	2A	3B	4B	5C	6B	7A	8D	9B	10D
11D	12B	13C	14B	15D	16D	17C	18D	19A	20D
21D	22B	23C	24C	25D	26B	27D	28C	29C	30A
31A	32B	33A	34B	35B	36D	37D	38C	39C	40B
41C	42B	43B	44D	45C	46C	47B	48D	49C	50B

Câu 4. Hàm số $y=-x+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ loại đáp án **A**.

Hàm số $y=x^2-2x+5$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Rightarrow$ loại đáp án **C**. Hàm số $y=\dfrac{x-2019}{x+2019}$, có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2019\}$ $\Rightarrow$ loại đáp án **C**.

Hàm số $y=x^3$ có đạo hàm $y'=3x^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ dấu "=" xảy ra khi $x=0$ $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ đáp án **B** đúng.

Câu 6. Do $f'(x)>0,\ \forall x>0\Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó:

$$e<3\Rightarrow f(e)<f(3);\quad \pi<4\Rightarrow f(\pi)<f(4)$$

$$f(e)+f(\pi)<f(3)+f(4).\ \text{Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 7. Trong tất cả các loại hình đa diện đều loại $\{3;5\}$ có số mặt nhiều nhất. Chọn **A**.

Câu 8. Tổng số trận các đội phải đá là $8.15.2=240$ trận. Suy ra có $240-80=160$ trận không kết thúc với tỉ số hòa. Suy ra tổng điểm các đội giành được là $160.3+80.2=640$ điểm. Chọn **D**.

Câu 9. Ta có

$$F(x)=\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Từ $F(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow F(1)=\dfrac{1}{2}\ln 2+1$. Chọn **B**.

Câu 10. Ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$; y' không xác định tại $x=0$ và đổi dấu qua $x=-1, x=0, x=2$, $x=4\Rightarrow$ hàm số đã cho có 4 điểm cực trị. Chọn **D**.

Câu 11. Hàm số $y=(3x-1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi $3x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$. Chọn **D**.

Câu 13. Đặt $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=t$ với $|t|\le 1\Rightarrow$

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=t\Rightarrow\sin x-\cos x=\sqrt{2}t\Rightarrow\sin 2x=1-2t^2.$$

Theo giả thiết ta có: $2t^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{5})t+\sqrt{5}=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}>1\ (\text{loại})\end{array}\right.\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \text{Chọn } \mathbf{C}.$$

Câu 14. ĐK: $-5m^2-9+(m+2)^2+4m^2+m^2>0$

$$\Leftrightarrow m^2+4m-5>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>1\end{array}\right..\ \text{Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 16. Ta có $AC'\cap(A'B'C')=C'$. Mặt khác hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là $A'\Rightarrow$ góc giữa AC' và mp$(A'B'C')$ là $\widehat{AC'A'}$. Xét tam giác vuông $AA'C'$ có:

$$\tan\widehat{AC'A'}=\frac{AA'}{A'C'}=\frac{2a}{2a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{AC'A'}=30^0.$$

Chọn **D**.

Câu 18. Số cực trị hàm bậc bốn trùng phương có thể có là 1 hoặc 3.

Số cực trị hàm bậc ba có thể có là 0 hoặc 2. Số cực trị hàm bậc hai là 1 .

Vì số cực trị hai hàm số bằng nhau nên hàm số phải có một cực trị. Từ đó tìm được điều kiện là $\begin{cases}m=0,\ n\ne 0\\ab>0\end{cases}$. Chọn **D**.

Câu 19. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-2019$ cắt tại điểm 2 điểm phân biệt. Chọn **A**.

Câu 20. Ta có $y'=-3x^2+2ax+b$. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}y(0)=-1\\y'(2)=0\\y(2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\-3.2^2+4a+b=0\\-8+4a+2b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=0\\c=-1\end{cases}.$$

$\Rightarrow Q=2$. Chọn **D**.

Câu 21. Ta có $\int 2019^x dx=\dfrac{2019^x}{\ln 2019}+C$.

Mặt khác theo giả thiết

$$\int 2019^x dx=F(x)+C\Rightarrow F(x)=\frac{2019^x}{\ln 2019}.\ \text{Chọn } \mathbf{D}.$$

Câu 22. Từ đồ thị hàm số suy ra tung độ điểm A chính là độ dài BC. Gọi $D(d;0)\in Ox$; $C(c;0)\in Ox$

với $\pi > c > d > 0 \Rightarrow CD = c - d = \dfrac{2\pi}{3}$ (1)

Gọi $A(d;\sin d)$; $B(c;\sin c)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \sin d = \sin c = m \Rightarrow A(d;m)$; $B(c;m)$

$\Rightarrow \pi > c > d > 0 \Rightarrow c + d = \pi$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d = \dfrac{\pi}{6}$; $\sin d = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $BC = m = \dfrac{1}{2}$. Chọn **B.**

Câu 23. Xét PT hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{x-1} = mx+1. \quad (*)$$

ĐK: $x\neq 1$. PT(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ mx^2 - mx - 2 = 0 \quad (**) \end{cases}$.

Đường thẳng $y = mx+1$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C) $\Leftrightarrow$ PT (**) có 2 nghiệm phân biệt x_1x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta = m^2 + 8m > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -8 \\ m > 0 \end{array}\right. \\ -\dfrac{2}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Chọn **C.**

Câu 24. Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x+2)e^x dx = (x+2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e+1.$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow S = 5$. Chọn **C.**

Câu 25. Lăng trụ tam giác có các cạnh bên bằng nhau $\Rightarrow$ cạnh bên có độ dài bằng 9; độ dài các cạnh đáy bằng : 3;4 và 5.

Mặt khác: $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ đáy là tam giác vuông có cạnh huyền độ dài bằng 5.

Vậy thể tích khối lăng trụ đứng bằng:

$$V = \frac{1}{2}.3.4.9 = 54.$$ Chọn **D.**

Câu 27. Ta có: $\log_{45} 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 45}$.

Mặt khác: $\log_3 45 = 2 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = a - 2$.

Vậy $\log_{45} 5 = \dfrac{a-2}{a}$. Chọn **D.**

Câu 28. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;-3;1), \overrightarrow{AC} = (-2;0;-2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (-2;-6;4) \Rightarrow M(-2;-6;4)$$

Chọn **C.**

Câu 29. Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x\in(10;+\infty) \\ -5m\notin(10;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \ge -2 \end{cases}$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$. Chọn **C.**

Câu 31. PT hoành độ giao điểm:

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + ex + 2$$

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0 \quad (*)$$

Theo giả thiết PT(*) có 3 nghiệm phân biệt là $-2;-1;1$ nên

$$\begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) - 4a = 0 & (1) \\ -a + (b-d) - (c-e) - 4 = 0 & (2) \\ a + (b-d) + (c-e) - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) cộng (3) theo từng vế ta được: $b - d = 4 \Rightarrow$ đáp án **B** sai. Lấy (3) trừ (2) theo từng vế ta được: $a = -(c-e)$ Thay $a = -(c-e)$ và $b - d = 4$ vào (1) ta được $a = 2 \Rightarrow c - e = -2$ đáp án **C** sai.

Ta có: $\begin{cases} a = 2 \\ b - d = 4 \\ c - e = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = d + e + 4$. Chọn **A.**

Câu 32. $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$; $\forall x; m\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = m^2 - m + 3$.

Do đó: $m^2 - m + 3 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow S = 1$. Chọn **B.**

Câu 33. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. V_1 là thể tích khối đa diện $PDQ.BCN$ và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Khi đó: $V_1 + V_2 = V$.

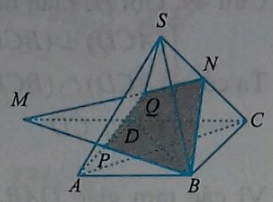
MB cắt AD tại $P \Rightarrow P$ là trung điểm của AD;
MN cắt SD tại $Q \Rightarrow Q$ là trọng tâm của ΔSMC.

Ta có $\dfrac{V_{M.PDQ}}{V_{M.BCN}} = \dfrac{MP}{MB}.\dfrac{MD}{MC}.\dfrac{MQ}{MN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Mặt khác :

$V_{M.BCN} = V_{M.PDQ} + V_1$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{5}{6}V_{M.BCN}$.



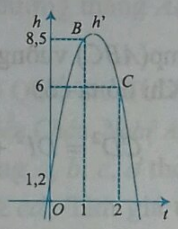
Mà $S_{\Delta MBC} = S_{ABCD}$, và

$$d(N,(ABCD)) = \frac{1}{2}d(S,(ABCD)),$$

suy ra $V_{M.BCN} = V_{N.MBC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = \dfrac{5}{12}V \\ V_2 = \dfrac{7}{12}V \end{cases} \Rightarrow V_2 : V_1 = 7:5$. Chọn **A.**

Câu 35. Tại $t = 0$ ta có $y = h = 1,2$; tại $t = 1$ ta có $y = h = 8,5$; tại $t = 2$ ta có $y = h = 6$. Chọn hệ trục Oth như hình vẽ. Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$ với $a \neq 0$.



Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h'. Theo bài ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0;1,2) \in (P)$.

Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1;8,5) \in (P)$.

Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2;6) \in (P)$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a = -4,9 \\ b = 12,2 \end{cases}$.

Vậy hàm số cần tìm có dạng:

$$h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2.$$ Chọn **B.**

Câu 38. Hình trụ có bán kính đáy $R = a$; đường sinh $l = 2a \Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rl = 4\pi a^2$. Chọn **C.**

Câu 40. Đặt $\cos x = t \Rightarrow t \in (0;1]$. Phương trình $f(\cos x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi phương trình $f(t) = m$ có đúng một nghiệm $t \in (0;1)$. Dựa vào đồ thị $f(x)$ trên nửa khoảng $(0;1)$ ta có $m \in (-2;0)$. Chọn **B.**

Câu 41. Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$.

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó gọi $A(0;m^4+3)$; $B(m;3)$; $C(-m;3)$ là ba điểm cực trị.

Vì $y_A > y_B = y_C$ nên ycbt $\Leftrightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn (C) $\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

$\Rightarrow OA$ là đường là đường kính của đường tròn (C)

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB} = 0$ (1)

Mà $\overrightarrow{AB} = (m;-m^4)$; $\overrightarrow{OB} = (m;3)$ do đó

$$(1) \Leftrightarrow m.m - 3m^4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn **C.**

Câu 42. Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là $28 + 26 + 14 - 8 - 4 - 3 + 2 = 55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100 - 55 = 45$ người. Chọn **A.**

Câu 43. Khoảng cách d_A từ điểm A đến mp(P) là

$$d(A,(P)) = \frac{26}{\sqrt{14}}.$$

Khoảng cách d_B từ điểm B đến mp(P) là $d(B,(P)) = \dfrac{13}{\sqrt{14}}$. Vậy tỉ số $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{d_A}{d_B} = 2$. Chọn **B.**

Câu 44. Gọi A là biến cố " rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, 2, 0, 1, 9".

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{13}^7$.

Số phần tử của khả năng thuận lợi: $n(A) = 1$.

Vậy xác suất của biến cố A: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{1716}$.

Chọn **D.**

Câu 45. Giả sử sau n năm người đó nhận được số tiền A_n lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu.

Gọi số tiền gửi ban đầu là A ta có:

$$A_n = A(1+0,05)^n > \frac{150}{100}A$$

$$\Leftrightarrow (1+0,05)^n > 1,5 \Leftrightarrow n > \log_{1,05}1,5 \approx 8,31.$$

Vậy sau ít nhất 9 năm người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu. Chọn **C.**

Câu 46. Ta có:

$$\ln x + \ln y \ge \ln(x^2+y) \Leftrightarrow \ln(xy) \ge \ln(x^2+y)$$

$$\Leftrightarrow xy \ge x^2+y \Leftrightarrow y(x-1) \ge x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y>0 \end{cases}.$$

Khi đó $y \ge \dfrac{x^2}{x-1}$

$$\Rightarrow P \ge x + \frac{x^2}{x-1} = 2(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3 \ge 2\sqrt{2}+3.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x-1} \\ 2(x-1) = \dfrac{1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2 \end{cases}.$$

Vậy $\min P = 2\sqrt{2}+3$. Chọn **C.**

Câu 47. Gọi x là số học sinh nhận quà giống nhau gồm áo và sữa;

y là số học sinh nhận quà giống nhau gồm áo và cặp;

z là số học sinh nhận quà giống nhau gồm sữa và cặp;

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y=7 \\ x+z=9 \\ y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}.$$

Gọi A là biến cố hai em "Hải và Vũ đó nhận được suất quà giống nhau". Ta có:

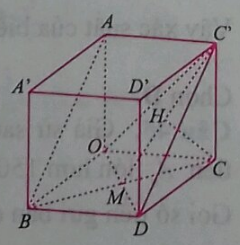
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{5}.$$ Chọn **B.**

Câu 48. *Cách* 1. Vẽ hình hộp nhận OA, OB, OC là ba cạnh cùng xuất phát từ O, như hình vẽ. Dễ thấy $AB \parallel \text{mp}(ODC')$ nên $d(AB, OM) = d(B; ODC'))$.

Từ giả thiết suy ra $OBDC$ là hình vuông nên B và C đối xứng nhau qua M

$\Rightarrow d(B,(ODC')) =$

$= d(C,(ODC')) = h.$



Do tứ diện $CC'OD$ có CC', CO, CD đôi một vuông góc nên $\Rightarrow \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{CO^2} + \dfrac{1}{CD^2}$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Cách 2. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho B, C, A lần lượt thuộc Ox, Oy, Oz. $A(0;0;a), B(2a;0;0), C(0;2a;0)$

$$\Rightarrow M(a;a;0); \overrightarrow{AB} = (2a;0;-a);$$

$$\overrightarrow{OM} = (a;a;0); \overrightarrow{BM} = (-a;a;0)$$

$$d(AB,OM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$ Chọn **D.**

Câu 49. Gọi H, I lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ BH \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp (ACD).$

Vì các tam giác DAB, CAB cân nên $\begin{cases} DI \perp AB \\ CI \perp AB \end{cases} \Rightarrow$

góc giữa mp(ABC) và mp(ABD) là $\widehat{CID}$.

Ta có $BH = AH = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$

$$\Rightarrow AI = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2a^2-2x^2}}{2}.$$

Xét ΔDIA vuông tại I ta có:

$$DI = \sqrt{AD^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2-2x^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2+2x^2}{4}}$$

mp(ABC) vuông góc với mp(ABD) $\Leftrightarrow \widehat{CID} = 90^0$.

Khi đó ta có:

$$CD^2 = DI^2 + CI^2 = 2DI^2 \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{2a^2+2x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn **C.**

Câu 50. *Cách* 1. Xét số hạng tổng quát $\dfrac{1}{k+1}C_{2018}^k$

ta có: $\dfrac{1}{k+1}C_{2018}^k = \dfrac{1}{2019}C_{2019}^{k+1}$.

Cho k chạy từ 0 đến 2018 thì ta được:

$$S = C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1 + \frac{1}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$$

$$= \frac{1}{2019}[C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + \ldots + C_{2019}^{2019}] - \frac{C_{2019}^0}{2019}$$

$$= \frac{1}{2019}2^{2019} - \frac{1}{2019} = \frac{2^{2019}-1}{2019}.$$

Cách 2. Tính

$$\int_0^1 (1+x)^{2018}dx = \int_0^1 \left(\left[C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2018}\right]\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2019}}{2019}\right|_0^1 = C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1 + \ldots + \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{2^{2019}-1}{2019}.$$ Chọn **B.**

ĐẶNG THANH HẢI

(GV THPT Triệu Quang Phục, Hưng Yên)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/504 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên n biết rằng n^5+n+1 chỉ có một ước số nguyên tố duy nhất.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(171B, *Ấp Bắc, P5, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang*)

Bài T2/504 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC và NC; K là hình chiếu của N trên cạnh BC. Chứng minh ba đường thẳng AK, BI và CM đồng quy tại một điểm.

ĐÀO QUỐC CHUNG
(*GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An*)

Bài T3/504. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b=c+d=2019$ và $ab\ge cd$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+3\sqrt[3]{b}+2}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}$.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(*GV THCS Bàn Giản, Lập Thạch, Vĩnh Phúc*)

Bài T4/504. Cho tam giác ABC, $\widehat{A}>90^0$. Lấy điểm I nằm giữa B và C sao cho BA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔACI tại D $(D\ne A)$ và CA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABI tại E $(E\ne A)$, BE cắt CD tại N. Gọi M là trung điểm của BC, MA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBNC tại F. Chứng minh rằng A, D, E, F, N cùng thuộc một đường tròn.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(*GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa*)

Bài T5/504. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+3x=y^4+y \\ x^2-y^2=2 \end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/504. Tìm tổng các bình phương tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$x^5+2018x^2+2019=x^4+2019x^3+2020x.$$

NGUYỄN ĐỄ (*Hải Phòng*)

Bài T7/504. Cho 3 số thực dương x, y, z sao cho $xyz=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{x^{k+1}(y+z)}+\frac{1}{y^{k+1}(z+x)}+\frac{1}{z^{k+1}(x+y)}\ge\frac{3}{2}\quad (k\in\mathbb{N}^*).$$

LÂM QUỐC TOÀN
(*GV THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng*)

Bài T8/504. ABC và $AB'C'$ là hai tam giác đều cùng hướng. K là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta AB'C'$. M là giao điểm của BC', CB'. Chứng minh rằng $MA=MK$.

NGUYỄN THANH DŨNG
(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn*)

Bài T9/504. Xác định hệ số của x trong khai triển đa thức của biểu thức:

$$(1+x)(1+2x)^2...(1+nx)^n.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/504. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định như sau $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{2x_n}, \forall n\ge 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $[9x_{81}]=81$ (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

NGUYỄN DUY LIÊN
(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc*)

Bài T11/504. Cho số nguyên dương $k\ge 2$ và số nguyên dương $n\ge\dfrac{k(k+1)}{2}$. Tìm số nguyên dương m lớn nhất để trong n số nguyên dương phân biệt bất kì không vượt quá m luôn tồn tại $k+1$ số phân biệt mà một số bằng tổng của k số còn lại.

HOÀNG NGỌC MINH
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T12/504. Cho tam giác ABC không vuông. Các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của AH. K là một điểm bất kì trên $B'C'$ (K khác B', C'). Đường thẳng AK cắt

MB', MC' theo thứ tự tại E, F. Gọi N là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác NBC.

LÊ VIẾT ÂN

(*Nhà* 15, *Xóm* 2, *Thôn Ngọc Anh*, *Phú Thượng*, *Phú Vang*, *Thừa Thiên Huế*)

Bài L1/504. Một vật dao động điều hoà với phương trình $x = 10\cos(2\pi t + \varphi)$ (cm). Biết rằng trong một chu kì, khoảng thời gian ngắn nhất giữa hai lần liên tiếp vật cách vị trí cân bằng một khoảng m (cm) bằng với khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp vật cách vị trí cân bằng một khoảng n (cm); đồng thời khoảng thời gian mà tốc độ không vượt quá $2\pi(m-n)$ (cm/s) là 0,5s. Tính tỉ số $\frac{n}{m}$.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/504. Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở $R = 100\ \Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L = \frac{\sqrt{3}}{\pi}(H)$. Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 400\cos^2(50\pi t + \pi)(V)$. Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch bằng

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/504 (For 6th grade). Find the natural number n given that $n^5 + n + 1$ has only one prime factor.

Problem T2/504 (For 7th grade). Given a right isosceles triangle ABC with the vertex angle A. Let M, N, I respectively be the midpoints of AB, AC and NC. Assume that K is the perpendicular projection of N on BC. Show that AK, BI and CM are concurrent.

Problem T3/504. Given positive numbers a, b, c, d such that $a+b=c+d=2019$ and $ab \ge cd$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{a + 3\sqrt[3]{b} + 2}{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}.$$

Problem T4/504. Given a triangle ABC with the angle $\widehat{A} > 90^0$. Choose a point I inside the line segment BC so that BA intersects the circumcircle ΔACI at D $(D \ne A)$ and CA intersects the circumcircle ΔABI at E $(E \ne A)$, BE intersects CD at N. Let M be the midpoint of BC, MA intersects the circumcircle ΔBNC at F. Show that A, D, E, F, N both belong to a circle.

Problem T5/504. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^4 + 3x = y^4 + y \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/504. Find the sum of the squares of all real roots of the equation

$$x^5 + 2018x^2 + 2019 = x^4 + 2019x^3 + 2020x.$$

Problem T7/504. Given 3 positive numbers x, y, z such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{1}{x^{k+1}(y+z)} + \frac{1}{y^{k+1}(z+x)} + \frac{1}{z^{k+1}(x+y)} \ge \frac{3}{2} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Problem T8/504. Given two equilateral triangles ABC and $AB'C'$ with the same orientation. Let K be the second intersection between the circumcircles of ABC and $AB'C'$. Let M be the intersection between BC' and CB'. Show that $MA = MK$.

Problem T9/504. Determine the coefficient of x in the polynomial expansion of

$$(1+x)(1+2x)^2 \ldots (1+nx)^n.$$

(*Xem tiếp trang* 27)

Bài T1/500. *Tìm các giá trị nguyên của x thỏa mãn* $(x-2018)^3+(x-2019)^3=2020-x$.

Lời giải. Đặt $x-2018=a$ với a là số nguyên thì $x-2019=a-1$ và $x-2020=a-2$.

Từ đó $(x-2018)^3+(x-2019)^3=2020-x$ trở thành $a-2+a^3+(a-1)^3=0$, hay là

$$a-1+a^3-1+(a-1)^3=0 \quad (*)$$

Xét ba trường hợp sau.

1) Nếu $a>1$ thì $a-1>0, a^3-1>0$ và $(a-1)^3>0$, suy ra $a-1+a^3-1+(a-1)^3>0$, không thỏa mãn (*).

2) Nếu $a<1$ thì $a-1<0, a^3-1<0$ và $(a-1)^3<0$, suy ra $a-1+a^3-1+(a-1)^3<0$, không thỏa mãn (*).

3) Nếu $a=1$ thì $a-1+a^3-1+(a-1)^3=0$, thỏa mãn (*). Lúc đó $x-2018=a=1$.

Số $x=2019$ là số duy nhất thỏa mãn đề bài. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Cách giải trực tiếp là xét ba trường hợp: $x=2019, x\ge 2020, x\le 2018$ và so sánh hai vế của hệ thức ở đề bài tương tự như trên.

2) Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Tạ Minh Dũng, Phạm Minh Châu, Tạ Đức Quý, Nguyễn Anh Dũng*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thanh Hóa**: *Trương Ngọc Thu Trang*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Trần Phương Mai, Phạm Ngọc Trinh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; *Nguyễn Hằng Nga*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Minh Nhật*, 6B, THCS Xuân Lộc, Can Lộc; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trần Phương Mai*, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/500. *Xét 2019 số tự nhiên dạng* $x_n=2^{2^n}+1; n=1,2,...,2019$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+...+\frac{2^{2018}}{x_{2019}}<\frac{1}{3}.$$

Lời giải. Đặt $y_n=2^{2^n}-1; n=1,2,...,2019$.

Với mỗi $n=1,2,...,2019$ ta có:

$$\frac{1}{y_n}-\frac{2}{y_{n+1}}=\frac{1}{2^{2^n}-1}-\frac{2}{2^{2^{n+1}}-1}=\frac{(2^{2^n})^2-2.2^{2^n}+1}{(2^{2^n}-1)(2^{2^{n+1}}-1)}$$

$$=\frac{(2^{2^n}-1)^2}{(2^{2^n}-1)(2^{2^{n+1}}-1)}=\frac{2^{2^n}-1}{(2^{2^n})^2-1}=\frac{1}{2^{2^n}+1}=\frac{1}{x_n}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{y_1}-\frac{2}{y_2};\ \frac{2}{x_2}=\frac{2}{y_2}-\frac{2^2}{y_3};...\frac{2^{2018}}{x_{2019}}=\frac{2^{2018}}{y_{2019}}-\frac{2^{2019}}{y_{2020}}.$$

Vậy $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+...+\frac{2^{2018}}{x_{2019}}=\frac{1}{y_1}-\frac{2^{2019}}{y_{2019}}<\frac{1}{y_1}=\frac{1}{3}.$

➢***Nhận xét.*** Xin chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: **Quảng Ngãi:** *Cao Nguyễn Quỳnh Hương*, 6C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Anh*, 7C1, THCS Academy, Q. Thanh Xuân; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/500. *Cho* $0<x<y\le z\le 2$ *và* $3x+2y+z=9$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=3x^2+2y^2+z^2.$$

Lời giải. Cách 1. Từ giả thiết $0<x<y\le z\le 2$ và $3x+2y+z=9$ suy ra

$$3x=9-2y-z\ge 9-2.2-2=3\Rightarrow x\ge 1.$$

Do đó $1\le x<y\le z\le 2$. Từ đó ta có

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)\le 0\\(y-1)(y-2)\le 0\\(z-1)(z-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 3x-2\\y^2\le 3y-2\\z^2\le 3z-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2\le 9x-6\ (1)\\2y^2\le 6y-4\ (2)\\z^2\le 3z-2\quad (3)\end{cases}$$

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta có

$$A=3x^2+2y^2+z^2\le 9x-6+6y-4+3z-2$$
$$=3(3x+2y+z)-12=3.\,9-12=15.$$

Do đó $A\le 15$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}1\le x<y\le z\le 2\\3x+2y+z=9\\(x-1)(x-2)=0\\(y-1)(y-2)=0\\(z-1)(z-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=2\end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 15.

Cách 2. Ta có $0<x<y\le z\le 2$ và $3x+2y+z=9$ suy ra

$$3x^2+x(2y+z)=9x;\ \ 2y(y-x)\le 4(y-x);$$

$z(z-x)\le 2(z-x)$ (các đẳng thức đồng thời xảy ra khi $y=z=2$). Từ đó

$$3x^2+x(2y+z)+2y(y-x)+z(z-x)$$
$$\le 9x+4(y-x)+2(z-x)$$

nên $A=3x^2+2y^2+z^2\le 3x+4y+2z$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$A^2\le(\sqrt{3}.\sqrt{3}x+2\sqrt{2}.\sqrt{2}y+2z)^2$$
$$\le[(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2+2^2](3x^2+2y^2+z^2)=15A.$$

Do đó $A\le 15$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1,\ y=z=2$.

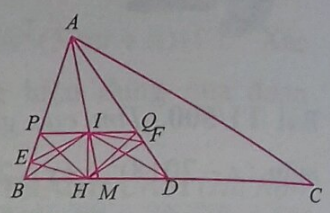
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 15. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức ba biến thỏa mãn điều kiện cho trước với các hệ số không đối xứng, đòi hỏi phải biến đổi một cách khéo léo, nên có ít bạn tham gia gửi bài. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An**: *Đặng Hữu Khánh, Nguyễn Văn Thành Nam*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị**: *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP Đông Hà; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/500. *Cho tam giác ABC có $AB<BC$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CD=AB$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại I. Từ I kẻ IH vuông góc với cạnh BC tại H. Từ H kẻ HE vuông góc với AB tại E và kẻ HF vuông góc với AD tại F. Chứng minh $\widehat{AEI}=\widehat{AFI}$.*

Lời giải. Gọi M là giao điểm của AI và BC. Áp dụng tính chất đường phân giác và định lý Thales ta có



$$\frac{BM}{BA}=\frac{IM}{IA}=\frac{DM}{DC}.$$

Kết hợp với giả thiết $DC=AB$, suy ra M là trung điểm của BD. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AD lần lượt tại P, Q. Ta có $HI\perp PQ$.

Theo hệ quả của định lí Thales, $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{IP}{IQ}=1$ nên I là trung điểm của PQ.

Suy ra ΔPHQ cân tại H, ta có $\widehat{PHI}=\widehat{QHI}$ (1)

Vì $\widehat{HIQ}=\widehat{HFQ}=90^\circ$ nên tứ giác $HFQI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AFI}=\widehat{QHI}$ (2)

Tương tự, $\widehat{HIP}=\widehat{HEP}=90^0$ nên tứ giác $HEPI$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AEI}=\widehat{PHI}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{AEI}=\widehat{AFI}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn có lời giải tốt, đó là bạn *Nguyễn Văn Chung* và bạn *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/500. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}xy(x+y)-x(y-1)-\dfrac{3}{8}(y^2+1)=0\\xy^2+x-y=0\end{cases}.$$

Lời giải. Hệ phương trình có thể viết thành:

$$\begin{cases}x(y^2+1)+x^2y-xy-\dfrac{3}{8}(y^2+1)=0 & (1)\\x(y^2+1)=y & (2)\end{cases}$$

Từ (2) có $x=0\Leftrightarrow y=0$, không thỏa mãn (1).

Do đó $x\ne 0;\ y\ne 0$. Từ $(2)\Rightarrow y^2+1=\dfrac{y}{x}$. Thay vào (1), ta được

$y+x^2y-xy-\frac{3y}{8x}=0 \Leftrightarrow y(8x^3-8x^2+8x-3)=0$

$\Leftrightarrow 8x^3-8x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x^2-2x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (phương trình $4x^2-2x+3=0$ vô nghiệm). Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (2), ta được

$$\frac{1}{2}(y^2+1)=y \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1.$$

Thử lại, ta thấy $x=\frac{1}{2}$; $y=1$ thỏa mãn các phương trình trong hệ. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};1\right)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn đều giải bài toán theo hướng trên. Nghĩa là sử dụng phương pháp thế để được một phương trình bậc ba của x, từ đó suy ra kết quả bài toán. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Chung, Nguyễn Văn Thành Nam, Đặng Hữu Khánh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ**: *Trần Minh Khôi*, 8C, THCS Văn Lang, TP Việt Trì; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Quảng Trị**: *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Trần Thị Yến Khanh*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/500. *Tìm nghiệm $x\in[-1;0]$ của phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}=2$.*

Lời giải. (Dựa trên ý tưởng của nhiều bạn). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{1.(x+1)}\le\frac{(x+1)+1}{2},$$

$$\sqrt[3]{x^2+1}=\sqrt[3]{(x^2+1).1.1}\le\frac{(x^2+1)+1+1}{3}.$$

Cộng theo vế, ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}\le\frac{x(x+1)}{3}+\frac{x}{6}+2.$$

Do $x\in[-1,0]$, cho nên $\frac{x(x+1)}{3}+\frac{x}{6}+2\le 2$ với đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=0$. Như vậy, phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}=2$ chỉ có nghiệm duy nhất $x=0$. ❐

➢***Nhận xét.*** Tất cả các bạn gửi lời giải đều giải đúng bài toán này, đó là các bạn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Kiên Văn*, 10A, THPT Yên Phong 2; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Bình Định:** *Nguyễn Bá Chính*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Cát Khánh, Phù Cát; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 10A1, TP. Cần Thơ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Nai**: *Dương Hải Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP .Biên Hòa; **Đồng Tháp:** *Phạm Ngọc Thùy Dương, Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nam:** *Ngô Việt Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội**: *Nguyễn Trần Tính, Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Hoàng Tùng*, 12T THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Trịnh Hoàng Anh*, 10T1 THPT chuyên Hà Tĩnh; **Long An:** *Võ Hoàng Phúc Khang*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Chung, Trương Công Cảnh*, 8A, *Lê Hải Phong*, 9B, THCS Lý Nhật Quang Đô Lương; **Phú Thọ:** *Hà Minh Nhật*, 9A3, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Phú Yên:** *Đỗ Lai Tín Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị :** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu, Nguyễn Duy Phước*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Trương Gia Bảo, Lê Minh Tâm, Phan Lương Quốc Trung Tín*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/500. *Giải phương trình*

$$(2+\sqrt{3})^{|\sin x|}+\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^{|\cos x|}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

Lời giải. Để cho gọn ta đặt $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. Ta có

$$a^2=\frac{2+6+2\sqrt{12}}{4}=2+\sqrt{3},\ 1<2+\sqrt{3}<4\Rightarrow 1<a<2.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$a^{2|\sin x|}+a^{|\cos x|}=1+a.$$

Giả sử x là một nghiệm của phương trình. Nhận xét: $1+a=a^{2|\sin x|}+a^{|\cos x|}\ge a^{2.\sin^2 x}+a^{\cos^2 x}$

(do $a>1$, $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$)

$=a^{2t}+a^{1-t}$ (trong đó kí hiệu $t=\sin^2 x$, $0\le t\le 1$)

$\Rightarrow a^t+a^{t+1}\ge a^{3t}+a\Rightarrow 0\ge a^{3t}-a^t-a^{t+1}+a$

$=a^t(a^t-1)(a^t+1)-a(a^t-1)=(a^t-1)(a^{2t}+a^t-a)$

$\Rightarrow 0\ge a^t-1$ (do $a^{2t}+a^t\ge 1+1=2>a$) $\Rightarrow t=0$

(vì $t\ge 0$, $a>1$) $\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Thử lại các số trên là nghiệm của phương trình. Vậy tất cả các nghiệm của phương trình là $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là phương trình có yếu tố lượng giác không quá khó nhưng hay. Thực chất đây là bài toán có đẳng thức xảy ra trong một bất đẳng thức. Các bạn học sinh tham gia và có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Đinh Hoài Anh*, 11A, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG, Hà Nội; ***Bình Định:*** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT Số 2 Phù Cát, *Nguyễn Bá Chinh*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Phù Cát.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/500. *Cho tam giác ABC với độ dài các đường cao là h_a,h_b,h_c; a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\ge 2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{2}{C}\right)$$

Lời giải. Gọi R, S theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, diện tích của tam giác ABC. Từ định lý hàm số sin, định lý hàm số côsin và công thức Héron ta có

$$2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=\frac{\sin A}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin B}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{\sin C}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{a}{R(1+\cos A)}+\frac{b}{R(1+\cos B)}+\frac{c}{R(1+\cos C)}$$

$$=\frac{2abc}{R[(b+c)^2-a^2]}+\frac{2abc}{R[(a+c)^2-b^2]}+\frac{2abc}{R[(a+b)^2-c^2]}$$

$$=\frac{1}{2S}\left[\frac{16S^2}{(b+c-a)(b+c+a)}+\frac{16S^2}{(a+c-b)(a+c+b)}+\frac{16S^2}{(a+b-c)(a+b+c)}\right]$$

$$=\frac{1}{2S}\left[(a+b-c)(a+c-b)+(b+c-a)(b+a-c)+(c+a-b)(c+b-a)\right]$$

$$=\frac{1}{2S}\left[a^2+b^2+c^2-(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)^2\right]$$

$$\le\frac{a^2}{2S}+\frac{b^2}{2S}+\frac{c^2}{2S}=\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay ΔABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Kiên Vân*, 10A, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hà Nam:** *Phan Thế Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát, Bình Định; **Long An:** *Nguyễn Phước Thịnh*, *Võ Hoàng Phúc Khang*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 12A2 Toán, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/500. *Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn: $3n=2S^3(n)+7S^2(n)+16$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n.*

Lời giải. (Dựa trên ý của bạn *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

Trước hết dễ thấy $n\equiv S(n)\pmod 9$ (1); và $n\ge 10^{k-1}$ (2); $S(n)\le 9k$ (3) ở đó k là số các chữ số của n, $n=\overline{a_1...a_k}$.

Ta có $3n=2S^3(n)+7S^2(n)+16$ (4)

$$\Rightarrow 3S(n) \equiv 2S^3(n) + 7S^2(n) + 16 \pmod 9$$
$$\Rightarrow 2S^3(n) - 2S^2(n) - 3S(n) - 2 \equiv 0 \pmod 9$$
$$\Rightarrow [S(n)-2][2S^2(n) + 2S(n) + 1] \equiv 0 \pmod 9.$$

Ta có $2S^2(n) + 2S(n) + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$ (bằng cách thử $S(n) \equiv 0, S(n) \equiv 1, S(n) \equiv 2 \pmod 3$). Do đó $S(n) \equiv 2 \pmod 9$. Từ (2) và (3) ta có

$$3.10^{k-1} \le 2(9k)^3 + 7(9k)^2 + 16$$
$$\le 2.9^3.k^3 + 7.9^2.k^3 + 16k^3 = 2041k^3$$
$$\Rightarrow \frac{10^{k-1}}{k^3} \le \frac{2041}{3}. \qquad (5)$$

Đặt $\varphi_k = \frac{10^{k-1}}{k^3}$ $(k \ge 1)$. Dễ thấy φ_k là dãy tăng.

Thật vậy:

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} = \frac{10k^3}{(k+1)^3} = \frac{k^3 + 3k^3 + 3k^3 + 3k^3}{(k+1)^3}$$
$$> \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{(k+1)^3} = 1.$$

Mà $\varphi_7 = \frac{10^6}{7^3} > \frac{2041}{3}$, nên $\varphi_k > \frac{2041}{3}$ với $k \ge 7$.

Từ (5) suy ra $k \le 6 \Rightarrow S(n) \le 9k \le 54$, mà $S(n) \equiv 2 \pmod 9$ nên

$$S(n) \in \{2, 11, 20, 29, 38, 47\}.$$

Với $S(n) = 2 \Rightarrow 3n = 2.2^3 + 7.2^2 + 16 = 60 \Rightarrow n = 20$ và $S(20) = 2$. Vậy $n = 20$ thỏa mãn đề bài.

Với $S(n) = 11 \Rightarrow 3n = 2.11^3 + 7.11^2 + 16 \Rightarrow n = 1175$. $S(n) = 14$ loại.

Tương tự với $S(n) \in \{20, 29, 38, 47\}$ ta đều không có n thỏa mãn. Vậy $n = 20$ là giá trị duy nhất cần tìm. □

➢***Nhận xét.*** Bài này có 6 bạn tham gia giải, các lời giải cho đáp số đúng nhưng lập luận còn nhiều chỗ chưa chặt chẽ hoặc thiếu sót. Ngoài bạn *Lân*, chỉ có bạn *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội có lời giải chính xác. Tuy nhiên lời giải khá dài (3 trang giấy đánh máy).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/500. *Cho $0 < \lambda < 1$ và 2019 số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ sao cho $\sum_{i=1}^{2019} x_i = 2019$. Chứng minh rằng:* $673 \le \sum_{i=1}^{2019} f\left(\frac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda}\right) \le \sum_{i=1}^{2019} f(x_i)$, *với* $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{2019}$. Khi đó:

$$\frac{2019 - \lambda x_{2019}}{2019 - \lambda} \ge \frac{2019 - \lambda x_{2018}}{2019 - \lambda} \ge \ldots \ge \frac{2019 - \lambda x_1}{2019 - \lambda}.$$

Dễ thấy: $\sum_{i=1}^{2019} \frac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda} = 2019 = \sum_{i=1}^{2019} x_i$.

Hơn nữa, ta chứng minh được $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ là hàm lồi. Vậy nên:

• Áp dụng BĐT Jensen, ta được:

$$\sum_{i=1}^{2019} f\left(\frac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda}\right) \ge 2019 f\left(\frac{\sum_{i=1}^{2019} \frac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda}}{2019}\right) = 2019 f(1) = 673.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2019} = 1$.

• Vì $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ là hàm lồi nên:

$$f(x) - f(y) \ge (x - y) f'(y), \ \forall x, y > 0.$$

Thật vậy:

- Nếu $x > y > 0$, thì theo định lý Lagrange ta có:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\alpha) \ge f'(y) \quad (\text{với } \alpha \in (y; x))$$

- Nếu $0 < x < y$, thì theo định lý Lagrange ta có:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\alpha) \le f'(y) \quad (\text{với } \alpha \in (y; x)).$$

Tính chất trên được chứng minh (*tính chất trên đúng với mọi hàm lồi bất kỳ*).

Ta đặt: $y_i = \frac{2019 - \lambda x_{2020-i}}{2019 - \lambda}; \forall i = 1, 2, \ldots, 2019$. Áp dụng tính chất trên kết hợp với phép nhóm Abel, ta có: $\sum_{i=1}^{2019} f(x_i) - \sum_{i=1}^{2019} f\left(\frac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{2019} [f(x_i) - f(y_i)] \ge \sum_{i=1}^{2019} (x_i - y_i) f'(y_i)$$
$$= (x_1 - y_1)[f'(y_1) - f'(y_2)] + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)[f'(y_2) - f'(y_3)]$$

$$+\ldots+(x_1+x_2+\ldots+x_{2018}-y_1-y_2-\ldots-y_{2018})[f'(y_{2018})-f'(y_{2019})]$$

$$+(x_1+x_2+\ldots+x_{2019}-y_1-y_2-\ldots-y_{2019})f'(y_{2019}).$$

Hiển nhiên, $f'(y_i)-f'(y_{i+1})\geq 0$ và

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{2019}-y_1-y_2-\ldots-y_{2019})f'(y_{2019})=0.$$

Như vậy, bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng:

$$\sum_{i=1}^{k}x_i\geq\sum_{i=1}^{k}y_i;\forall k=1,2,\ldots,2018,$$

tức là: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}x_i\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{2019-\lambda x_{2020-i}}{2019-\lambda}$

$$\Leftrightarrow(2019-\lambda)\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda x_{2020-i}\geq 2019k\quad(*)$$

$\forall k=1,2,\ldots,2018.$

Ta có: $\displaystyle(2019-\lambda)\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda x_{2020-i}=$

$$(2019-k)\lambda x_1+\lambda\sum_{i=1}^{k}x_{2020-i}+(2019-\lambda)\sum_{i=1}^{k}x_i-(2019-k)\lambda x_1$$

$$=\lambda\left[(2019-k)x_1+\sum_{i=1}^{k}x_{2020-i}\right]+(2019-\lambda)\sum_{i=2}^{k}x_i$$

$$+(2019-\lambda-2019\lambda+k\lambda)x_1$$

$$\geq\lambda\sum_{i=1}^{2019}x_i+(2019-\lambda)\sum_{i=2}^{k}x_i+(2019-\lambda-2019\lambda+k\lambda)x_1\ (1).$$

Mặt khác, vì

$$2018\sum_{i=2}^{k}x_i-(k-1)\sum_{i=2}^{2019}x_i=(2019-k)\sum_{i=2}^{k}x_i-(k-1)\sum_{i=k+1}^{2019}x_i$$

$$\geq(2019-k)(k-1)x_k-(k-1)\sum_{i=k+1}^{2019}x_i$$

$$\geq(k-1)\left[(2019-k)x_k-(2019-k)x_{k+1}\right]$$

$$=(k-1)(2019-k)(x_k-x_{k+1})\geq 0$$

nên $\displaystyle\sum_{i=2}^{k}x_i\geq\frac{k-1}{2018}\sum_{i=2}^{2019}x_i;\forall k=1,2,\ldots,2018$.

Thay vào (1) ta được:

$$(2019-\lambda)\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda x_{2020-i}$$

$$\geq\lambda\sum_{i=1}^{2019}x_i+(2019-\lambda)\sum_{i=2}^{k}x_i+(2019-\lambda-2019\lambda+k\lambda)x_1$$

$$\geq\lambda\sum_{i=1}^{2019}x_i+\frac{(2019-\lambda)(k-1)}{2018}\sum_{i=2}^{2019}x_i+(2019-\lambda-2019\lambda+k\lambda)x_1$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{2019}x_i+\frac{(2019-\lambda)(k-1)}{2018}\sum_{i=1}^{2019}x_i+\frac{2019(2019-k)(1-\lambda)}{2018}x_1$$

$$\geq\lambda\sum_{i=1}^{2019}x_i+\frac{(2019-\lambda)(k-1)}{2018}\sum_{i=1}^{2019}x_i+\frac{(2019-k)(1-\lambda)}{2018}\sum_{i=1}^{2019}x_i$$

$$=\left[\lambda+\frac{(2019-\lambda)(k-1)}{2018}+\frac{(2019-k)(1-\lambda)}{2018}\right]\sum_{i=1}^{2019}x_i=2019k$$

Vậy BĐT(*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_{2019}=1$. Bài toán được giải quyết. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) • Hàm f là hàm lồi trên I thì

$$f(x)-f(y)\geq(x-y)f'(y);\forall x,y\in I.$$

(Cách chứng minh như trong bài giải).

• Hàm $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ có thể thay bằng một hàm lồi tùy ý trên miền số thực dương.

• Bài toán là một kiểu làm chặt cho BĐT Jensen. BĐT Jensen phát biểu:

$$\sum_{i=1}^{2019}f(x_i)\geq 2019f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2019}}{2019}\right)=673.$$

• Bài toán có thể tổng quát cho n biến và có tổng bằng một hằng số dương bất kỳ, điều đó cũng suy ra ta có thể cụ thể hóa bài toán cho trường hợp 3 biến với λ là một số nào đó. Hiển nhiên, khi đó sẽ khó làm được các phương pháp thông thường thậm chí là BĐT Jensen. Chẳng hạn, ta chọn $\lambda=\dfrac{1}{2}$ với ba biến có tổng bằng 3 ta có bài toán sau:

Với $x,y,z>0:x+y+z=3$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}$$

$$\geq 25\left(\frac{1}{x^2-17x+91}+\frac{1}{y^2-17y+91}+\frac{1}{z^2-17z+91}\right).$$

2) Chỉ có một bạn giải được bài này, đó là bạn: *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát, **Bình Định**.

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/500. *Cho các dãy số* (x_n), (y_n) *được xác định bởi*

$$\begin{cases}x_{n+1}=\sqrt{1-y_n^2}\\ y_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}\sqrt{9-5x_n^2},\ n\in\mathbb{N}^*.\\ x_1\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right],\ y_1\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{cases}$$

Chứng minh rằng các dãy số (x_n), (y_n) hội tụ và tìm $\lim x_n$, $\lim y_n$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Vì $y_1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ và $x_2 = \sqrt{1-y_1^2}$ nên $x_2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Ta xét hai dãy (x_{2k+1}) và (x_{2k}) với $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ và

$$x_{2k+1} = \sqrt{1-y_{2k}^2} = \sqrt{1-\frac{9-5x_{2k-1}^2}{21}}$$
$$= \sqrt{\frac{12+5x_{2k-1}^2}{21}}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Ta chứng minh $x_{2k+1} \le \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, giả sử khẳng định đúng tới x_{2k-1} tức là $x_{2k-1} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

$$x_{2k+1} = \sqrt{\frac{12+5x_{2k-1}^2}{21}} \le \sqrt{\frac{12+5\cdot\frac{3}{4}}{21}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tiếp theo, ta chứng minh (x_{2k+1}) là dãy tăng. Thật vậy, ta có:

$$x_{2k-1} \le x_{2k+1} \Leftrightarrow x_{2k-1} \le \sqrt{\frac{12+5x_{2k-1}^2}{21}} \Leftrightarrow x_{2k-1} \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dãy x_{2k+1} tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn L với $0 < L \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. Chuyển qua giới hạn hệ thức $x_{2k+1} = \sqrt{\frac{12+5x_{2k-1}^2}{21}}$ ta được $L = \sqrt{\frac{12+5L^2}{21}}$ $\Leftrightarrow L = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tương tự, dãy (x_{2k}) với $x_2 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ và

$$x_{2k+2} = \sqrt{1-y_{2k+1}^2} = \sqrt{1-\frac{9-5x_{2k}^2}{21}} = \sqrt{\frac{12+5x_{2k}^2}{21}}, k \in \mathbb{N}^*$$

cũng hội tụ về $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mặt khác, theo giả thiết thì $y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{21}}\sqrt{9-5x_n^2}$.

Chuyển qua giới hạn ta thu được $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Ta cũng có thể dễ dàng mô tả trực tiếp dưới dạng tường minh của các dãy đã cho bằng phương trình hàm trên tập tự nhiên. Thật vậy, từ giả thiết suy ra $x_{n+2}^2 = \frac{4}{7} + \frac{5}{21}x_n^2$ nên $x_n^2 = \left(\frac{5}{21}\right)^{\frac{n}{2}} u_n + \frac{3}{4}$ với dãy (u_n) tuần hoàn chu kỳ 2. Chuyển qua giới hạn, ta thu được giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cần tìm.

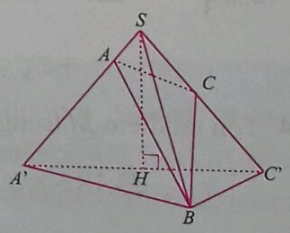
Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 12T, THPT chuyên Thăng Long.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/500. *Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = 60^0, \widehat{BSC} = 90^0, \widehat{CSA} = 120^0; SA = 2, SB = 9, SC = 4$. Gọi X là tập các giá trị của d sao cho tồn tại điểm M trong không gian mà khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB), (ABC) có giá trị lần lượt là $\sqrt{3}d, \frac{d}{2}, d, d$. Tìm số phần tử của X và giá trị lớn nhất mà d có thể nhận được.*

Lời giải. Trên các tia SA, SC theo thứ tự lấy các điểm A', C' sao cho $SA' = SC' = SB = 9$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(A'BC')$. Vì $SA' = SC' = SB$ nên $HA' = HB = HC'$ (1).



Dễ thấy

$BC' = 9\sqrt{2}; C'A' = 9\sqrt{3}; A'B = 9.$

Do đó, theo định lí Pythagoras, tam giác $A'BC'$ vuông tại B. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trung điểm của $A'C'$.

Dễ thấy $S_{A'BC'} = \frac{81}{2}\sqrt{2}; SH = \frac{9}{2}$.

Do đó $V_{SA'BC'} = \frac{243}{4}\sqrt{2}$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}V_{SA'BC'} = 6\sqrt{2}$.

Dễ thấy

$$S_{SBC}=18; S_{SCA}=2\sqrt{3}; S_{SAB}=\frac{9}{2}\sqrt{3}.$$

Dễ thấy $BC=\sqrt{97}; CA=2\sqrt{7}; AB=\sqrt{67}$.

Xét ΔABC có:

$$\cos A=\frac{-1}{2\sqrt{469}}\Rightarrow \sin^2 A=\frac{1875}{1876}$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{1875}}{\sqrt{1876}}=\frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{469}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.2\sqrt{469}.\frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{469}}=\frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Với mỗi điểm M trong không gian ta định nghĩa số $\varepsilon_{(M,A)}$ như sau:

• $\varepsilon_{(M,A)}=1$ nếu M và A cùng nằm về một phía của mặt phẳng (SBC);

• $\varepsilon_{(M,A)}=-1$ nếu M và A cùng nằm về hai phía của mặt phẳng (SBC).

Định nghĩa tương tự, ta có $\varepsilon_{(M,B)}, \varepsilon_{(M,C)}, \varepsilon_{(M,S)}$.

Vậy các điều kiện sau tương đương.

1. d thỏa mãn điều kiện của đề bài.

2. Tồn tại điểm M trong không gian sao cho khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB), (ABC) theo thứ tự bằng $\sqrt{d}, \frac{1}{2}d, d, d$.

3. Tồn tại điểm M trong không gian sao cho

$$\varepsilon_{(M,A)}\frac{1}{3}.\sqrt{3}d.S_{\Delta SBC}+\varepsilon_{(M,B)}\frac{1}{3}.\frac{d}{2}.S_{\Delta SCA}+\varepsilon_{(M,C)}\frac{1}{3}.d.S_{\Delta SAB}$$
$$+\varepsilon_{(M,S)}\frac{1}{3}.d.S_{\Delta ABC}=V_{SABC}.$$

4. Tồn tại điểm M trong không gian sao cho

$$\left(\varepsilon_{(M,A)}\sqrt{3}.18+\varepsilon_{(M,B)}\frac{1}{2}.2\sqrt{3}+\varepsilon_{(M,C)}.\frac{9}{2}.\sqrt{3}\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{(M,S)}\frac{25}{2}.\sqrt{3}\right)d=3.6\sqrt{2}.$$

5. Tồn tại điểm M trong không gian sao cho

$$\left(\varepsilon_{(M,A)}36+\varepsilon_{(M,B)}2+\varepsilon_{(M,C)}9+\varepsilon_{(M,S)}25\right)d=12\sqrt{6}.$$

6. Tồn tại điểm M trong không gian sao cho

$$d=\frac{12\sqrt{6}}{\varepsilon_{(M,A)}36+\varepsilon_{(M,B)}2+\varepsilon_{(M,C)}9+\varepsilon_{(M,S)}25}.$$

7. $d\in\left\{\frac{12\sqrt{6}}{4};\frac{12\sqrt{6}}{18};\frac{12\sqrt{6}}{22};\frac{12\sqrt{6}}{50};\frac{12\sqrt{6}}{54};\frac{12\sqrt{6}}{68};\frac{12\sqrt{6}}{72}\right\}$.

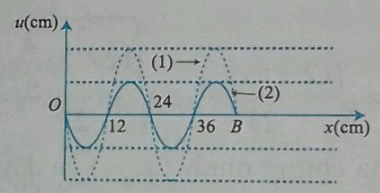
8. $d\in\left\{3\sqrt{6};\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{6\sqrt{6}}{11};\frac{6\sqrt{6}}{25};\frac{2\sqrt{6}}{9};\frac{3\sqrt{6}}{17};\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$.

Vậy có 7 giá trị của d thỏa mãn điều kiện của đề bài và $\max d=3\sqrt{6}$. ❐

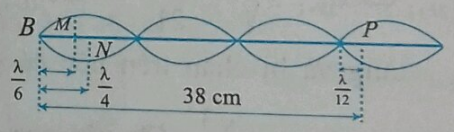
➢***Nhận xét.*** Bài toán này khó, chỉ có một bạn tham gia giải nhưng lời giải sai.

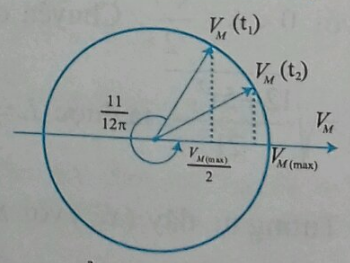
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/500. *Trên một sợi dây OB căng ngang, hai đầu cố định đang có sóng dừng với tần số f xác định. Gọi M, N và P là ba điểm trên dây có vị trí cân bằng cách B lần lượt là 4 cm, 6 cm và 38cm. Hình vẽ mô tả hình dạng sợi dây tại thời điểm* t_1 *(đường 1) và* $t_2=t_1+\frac{11}{12\pi}$ *(đường 2). Tại thời điểm* t_1*, li độ của phần tử dây ở N bằng biên độ của phần tử dây ở M và tốc độ của phần tử dây ở M là 60cm/s. Tại thời điểm* t_2*, vận tốc của phần tử dây ở P là bao nhiêu?*



Lời giải. Từ đồ thị : $\begin{cases}\lambda=24\text{ cm}\\ u_M \text{ đang tăng}\Rightarrow v_M>0\end{cases}$





Biên độ của các điểm M, N và P :

$$A_N=A\left|\sin\frac{2\pi BN}{\lambda}\right|=A\left|\sin\frac{2\pi.6}{24}\right|=A$$

$$A_M=A\left|\sin\frac{2\pi BM}{\lambda}\right|=A\left|\sin\frac{2\pi.4}{24}\right|=A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_P=A\left|\sin\frac{2\pi BP}{\lambda}\right|=A\left|\sin\frac{2\pi.38}{24}\right|=\frac{A}{2}$$

Hai điểm M, N cùng bó sóng nên cùng pha. Điểm P thuộc bó sóng thứ 4, kể từ bó sóng chứa M, suy ra P ngược pha với M.

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{u_M}{u_N} = \dfrac{A_M}{A_N} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}A}{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_M = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u_N \\ \dfrac{v_P}{v_M} = -\dfrac{v_{P(\max)}}{v_{M(\max)}} = -\dfrac{\omega A_P}{\omega A_M} = -\dfrac{A_P}{A_M} \\ \qquad = -\dfrac{\frac{A}{2}}{A\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_P = -\dfrac{v_M}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Tại thời điểm t_1:

$$u_M = \frac{\sqrt{3}}{2}u_N = A_M\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_M = \frac{v_{M(\max)}}{2} = 60$$

$\Rightarrow v_{M(\max)} = 120$ cm/s.

Tại thời điểm t_2:

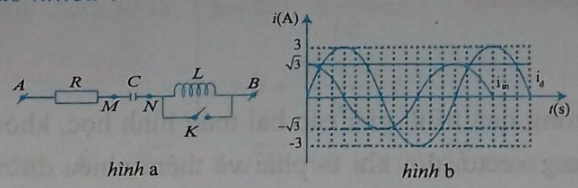
$$v_{M(t_2)} = v_{M(\max)}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

$$\Rightarrow v_{P(t_2)} = -\frac{v_M}{\sqrt{3}} = -\frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -60 \text{ cm/s}. \quad \square$$

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng bạn một bạn duy nhất đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/500. *Cho mạch điện như hình a. Điệp áp xoay chiều ổn định giữa hai đầu A và B là* $u = 100\sqrt{6}\cos(\omega + \varphi)$. *Khi K mở và K đóng, đồ thị cường độ dòng điện qua mạch theo thời gian tương ứng là* i_m *và* i_d *được biểu diễn như hình b. Điện trở các dây nối không đáng kể. Điệp áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở R khi K mở bằng là bao nhiêu ?*



hình a *hình b*

Lời giải. $U_0 = 150\sqrt{3}$(V), $I_{0d} = 3$(A) suy ra

$$Z_d = \frac{100\sqrt{6}}{2} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}. \quad (1)$$

$I_{0m} = \sqrt{3}$(A) suy ra $Z_m = 100\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + Z_C^2}$ (2)

Từ đồ thị ta thấy i_m và i_d vuông pha nhau nên:

$$-\frac{Z_C}{R}.\frac{Z_L - Z_C}{R} = -1. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được $R = 50\sqrt{2}(\Omega)$.

Do đó: $U_{Rm} = \dfrac{I_{0m}}{\sqrt{2}}.R = 50\sqrt{3}$(V). $\square$

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Hà Phương Hoàng Mai, Lê Như Minh*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS...

(*Tiếp theo trang 18*)

TOWARDS MATHEMMTICAL OLYMPIAD

Problem T10/504. Given the real sequence $\{x_n\}$ determined as follows $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Show that $[9x_{81}] = 81$ (where $[x]$ denotes the integral part of x).

Problem T11/504. Given an integer $k \geq 2$ and an integer $n \geq \dfrac{k(k+1)}{2}$. Find the maximal positive integer m so that among n arbitrary distinct positive integers which do not exceed m there always exist $k+1$ numbers of which some number is equal to the sum of the remaining ones.

Problem T12/504. Given a non-right triangle ABC. The altitudes BB' and CC' intersect at H. Let M be the midpoint of AH. Let K be an arbitrary point on $B'C'$ (K is different from B', C'). The line AK intersects MB', MC' respectively at E, F. Let N be the intersection between BE and CF. Show that K is the orthocenter of the triangle NBC.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

SỬ DỤNG VECTƠ ĐƠN VỊ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

PHẠM ĐĂNG LONG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong quá trình giải các bài toán hình học, không dùng vectơ, đôi khi ta phải vẽ thêm nhiều đường phụ hoặc phải xét nhiều trường hợp rắc rối. Trong bài báo này, chúng ta sẽ xét một số bài toán được giải ngắn gọn hơn, nhờ sử dụng vectơ đơn vị.

I. KHÁI NIỆM CƠ SỞ

Vectơ đơn vị (kí hiệu là **VTĐV**) của một vectơ khác $\vec{0}$ là vectơ có độ dài bằng 1 (đvđd). Mỗi vectơ khác $\vec{0}$ chỉ có duy nhất một VTĐV.

Dễ thấy, với mỗi vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì VTĐV $\vec{e_v}$ của nó được xác định theo công thức:

$$\vec{e_v} = \frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v}, \text{ hay } \vec{v} = |\vec{v}|.\vec{e_v}.$$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, thì với $\vec{v} = (x_v, y_v)$, ta có: $\vec{e_v} = \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}}.(x_v; y_v)$.

Thí dụ. $\vec{v} = (3;4)$ có vectơ đơn vị là $\vec{e_v} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$;

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, thì với $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, ta có:

$$\vec{e_v} = \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.(x_v, y_v, z_v).$$

Thí dụ. $\vec{v} = (3;4;-5)$ có vectơ đơn vị là

$$\vec{e_v} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}; \frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{-5}{5\sqrt{2}}\right).$$

Vectơ chỉ phương (kí hiệu là **VTCP**) của một đường thẳng d là một vectơ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d. Mỗi đường thẳng có rất nhiều VTCP.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

Bài toán 1. *Một tam giác ABC (trong mặt phẳng hay trong không gian) được cho bởi tọa độ các đỉnh.*

1) Viết phương trình tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

2) Viết phương trình tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

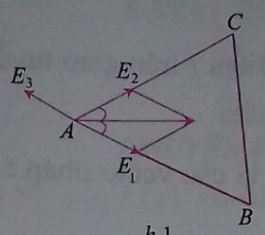
Hướng dẫn. Theo SGK Hình học 11, trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta có các phương trình các đường thẳng (AB) và (AC) của tam giác ABC là: $(AB): ax + by + c = 0$, $(AC): a'x + b'y + c' = 0$.

Sử dụng công thức viết phương trình các đường phân giác: $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b^2}}$.

Đến đây, phải tìm cách chọn ra đường nào là phân giác trong, đường nào là phân giác ngoài. SGK đưa ra cách xét vị trí của đỉnh B và C đối với một trong hai đường phân giác. Nếu B và C khác phía với nhau đối với đường phân giác đó thì đây là phân giác trong, và đường còn lại là phân giác ngoài, trái lại thì thì đường đang xét là phân giác ngoài và đường còn lại là phân giác trong. Sau đó mới quyết định lấy đường nào làm kết quả cho câu hỏi cần thiết. Đấy là chưa nói tới yêu cầu "tia phân giác".

Còn dùng khái niệm VTĐV thì ta viết được ngay. Phương trình phân giác trong (ngoài) của góc $\widehat{BAC}$ là tia qua A với VTCP là tổng (hiệu) hai VTĐV của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{AE_1} + \overrightarrow{AE_2}$ (hình vẽ). Ở đây đã áp dụng tính chất đường chéo của hình thoi.

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng tọa độ, cho biết ΔABC có $A(1; 2)$, $B(4; 6)$ và $C(6; -10)$.*



h.1

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;4)$ và VTĐV $\overrightarrow{AE_1}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$;

$\overrightarrow{AC}=(5;-12)$ và VTĐV $\overrightarrow{AE_2}=\left(\frac{5}{13};\frac{-12}{13}\right)$.

• VTCP đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ là

$$\overrightarrow{AE_1}+\overrightarrow{AE_2}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{13};\frac{-12}{13}\right)=\left(\frac{14}{65};\frac{-8}{65}\right).$$

Từ đó, phương trình phân giác trong của $\widehat{BAC}$ dạng tham số là: $\begin{cases} x=1+\frac{14}{65}t \\ y=2-\frac{8}{65}t \end{cases}$ ở đây $t\ge 0$, để thỏa mãn yêu cầu "tia".

• VTCP của phân giác ngoài là

$$\overrightarrow{AE_1}-\overrightarrow{AE_2}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{5}{13};\frac{-12}{13}\right)=\left(\frac{14}{65};\frac{112}{65}\right).$$

Phương trình tia phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ dạng tham số là: $\begin{cases} x=1+\frac{14}{65}t \\ y=2+\frac{112}{65}t \end{cases}$ ở đây $t\ge 0$, để thỏa mãn yêu cầu "tia".

Cách giải này cũng áp dụng được cho trường hợp ΔABC trong không gian ba chiều!

Thí dụ 2. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC có $A(1;2;3)$, $B(3;5;8)$ và $C(4;7;10)$.*

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;3;5)$ có độ dài là

$$c=\sqrt{38} \text{ và VTĐV } \overrightarrow{AE_1}=\left(\frac{2}{c};\frac{3}{c};\frac{5}{c}\right);$$

$\overrightarrow{AC}=(3;5;7)$ có độ dài là $b=\sqrt{83}$ và VTĐV $\overrightarrow{AE_2}=\left(\frac{3}{b};\frac{5}{b};\frac{7}{b}\right)$; VTCP đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ là

$$\overrightarrow{AE_1}+\overrightarrow{AE_2}=\left(\frac{2b+3c}{bc};\frac{3b+5c}{bc};\frac{5b+7c}{bc}\right);$$

Từ đó, phương trình tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ dạng tham số là: $\begin{cases} x=1+\frac{2b+3c}{bc}t \\ y=2+\frac{3b+5c}{bc}t \\ z=3+\frac{5b+7c}{bc}t \end{cases}$

ở đây, $b=\sqrt{83}$, $c=\sqrt{38}$ và $t\ge 0$, để thỏa mãn yêu cầu "tia".

Tương tự, phương trình tia phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ dạng tham số là: $\begin{cases} x=1+\frac{2b-3c}{bc}t \\ y=2+\frac{3b-5c}{bc}t \\ z=3+\frac{5b-7c}{bc}t \end{cases}$

ở đây, $b=\sqrt{83}$, $c=\sqrt{38}$ và $t\ge 0$, để thỏa mãn yêu cầu "tia".

Bài toán 2. *Một tam giác ABC (trong mặt phẳng hay không gian) được cho bởi các tọa độ các đỉnh.*

1) Tìm tọa độ tâm các đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

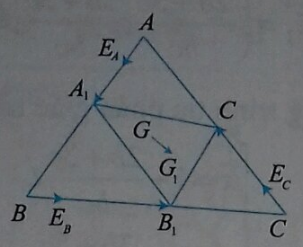
2) Tìm tọa độ tâm các đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC.

Hướng dẫn.

1) Dùng VTĐV để viết các phương trình đường phân giác trong của hai góc $\widehat{BAC}$ và góc $\widehat{CBA}$ rồi tìm giao điểm của chúng.

2) Dùng VTĐV để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ và đường phân giác ngoài góc $\widehat{CBA}$ rồi tìm giao điểm của chúng.

Bài toán 3. *Cho một tam giác ABC. Các điểm A_1, B_1 và C_1 chuyển động trên các cạnh AB, BC và CA tương ứng, sao cho độ dài của AA_1, BB_1 và CC_1 luôn bằng nhau. Tìm quỹ tích trọng tâm G_1 của tam giác $A_1B_1C_1$.*



Hướng dẫn. Gọi $\overrightarrow{AE_A}, \overrightarrow{BE_B}$ và $\overrightarrow{CE_C}$ lần lượt là các VTĐV của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{t}{3}(\overrightarrow{AE_A} + \overrightarrow{BE_B} + \overrightarrow{CE_C}),$$

ở đây t là độ dài chung của các vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ và $\overrightarrow{CC_1}$. Đặt $\vec{v} = \frac{t}{3}(\overrightarrow{AE_A} + \overrightarrow{BE_B} + \overrightarrow{CE_C})$ thì $\overrightarrow{GG_1} = t.\vec{v}$.

Khi đó:

+ Nếu $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích cần tìm là đoạn thẳng GG_2 xuất phát từ G với VTCP là $\vec{v}$, trong đó G_2 được xác định như sau: Để các điểm A_1, B_1 và C_1 chuyển động trên các cạnh AB, BC và CA tương ứng, mà không được vượt ra ngoài các cạnh tương ứng, ta phải có: $t \leq AB$, $t \leq BC$ và $t \leq CA$.

Hay phải có $0 \leq t \leq \min(AB; BC; CA)$.

Đặt $t_{\max} = \min(AB; BC; CA)$, thì G_2 xác định bởi:

$$\overrightarrow{GG_2} = t_{\max}.\vec{v}.$$

+ Nếu $\vec{v} = \vec{0}$ thì điểm $G_1 \equiv G$, quỹ tích là tập hợp có đúng một điểm G. Trường hợp này xảy ra, chẳng hạn khi tam giác ABC đều.

Bài toán 4. *Cho một n - giác $A_1A_2...A_n$. Các điểm $B_1, B_2, ..., B_n$ chuyển động trên các cạnh A_1A_2, $A_2A_3, ..., A_nA_1$ tương ứng sao cho $A_1B_1 = A_2B_2 = ... = A_nB_n$. Tìm quỹ tích trọng tâm G_1 của đa giác $B_1B_2...B_n$.*

Hướng dẫn. Cách giải là sự khái quát từ tam giác lên đa giác, rất đơn giản!

Bài toán 5. *Cho hai mặt phẳng giao nhau (α) và (β). Viết phương trình mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện tạo ra bởi các mặt phẳng đã cho.*

Hướng dẫn.

- Lấy một điểm I trên giao tuyến d của hai mặt phẳng đã cho.
- Gọi $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ pháp tuyến của (α) và (β).
- Tính các VTĐV $\vec{e_a}$ và $\vec{e_b}$ của chúng.
- Ta tính được tọa độ điểm C và D sao cho $\overrightarrow{IC} = \vec{e_a} + \vec{e_b}$ và $\overrightarrow{ID} = \vec{e_a} - \vec{e_b}$.
- Khi đó các mặt phẳng (d, C) và (d, D) là các mặt phẳng cần tìm.

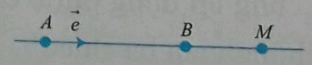
Bài toán 6. *Cho một góc tam diện tạo bởi ba tia Sa, Sb, Sc. Viết phương trình đường thẳng Sd thuộc phần trong góc tam diện sao cho với mọi điểm trên Sd luôn cách đều các mặt của góc tam diện đã cho.*

Hướng dẫn. Đường thẳng cần tìm là giao hai mặt phẳng phân giác trong của hai góc nhị diện, chẳng hạn nhị diện cạnh Sa và nhi diện cạnh Sb. Phương trình Sd là hệ hai phương trình mặt phẳng phân giác đó.

Bài toán 7. *Trên đường thẳng d cho hai điểm A và B không trùng nhau. Tìm điểm M sao cho*

$$MA.\overrightarrow{MA} = 9MB.\overrightarrow{MB}.$$

Hướng dẫn. Có thể có nhiều cách giải. Nhưng sau đây là cách giải dùng VTĐV



Gọi $\vec{e}$ là VTĐV của $\overrightarrow{BC}$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{MA} = MA.\vec{e}$, $\overrightarrow{MB} = MB.\vec{e}$

$$MA.\overrightarrow{MA} = 9MB.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow MA^2.\vec{e} = 9MB^2.\vec{e}$$
$$\Leftrightarrow MA^2 = 9MB^2.$$

Từ đây suy ra M chia AB theo tỉ số $3:1$. Nhưng do hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng chiều nên M phải là điểm chia ngoài AB theo tỉ số $3:1$.

(Xem tiếp trang 46)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài: 90 phút)

NGUYỄN VĂN QUÝ VÀ TẬP THỂ GIÁO VIÊN STRONG TEAM TOÁN VD-VDC

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1 ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ -1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)+2=0$ là

A. 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(a;3;b+2)$; $B(2-a;-1;-b)$ $(a;b\in\mathbb{R})$. Trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ là:

A. $I(1;1;1)$ **B.** $I(0;1;0)$

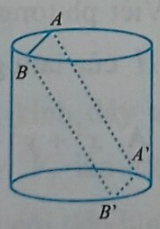
C. $I(a+1;1;b+1)$ **D.** $I(a;1;b)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng cho n điểm phân biệt, với $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$. Biết có 190 đoạn thẳng có hai đầu mút thuộc n điểm đã cho. Tìm khẳng định đúng.

A. $n\in[3;10]$ **B.** $n\in[11;15]$

C. $n\in[16;25]$ **D.** $n\in[26;30]$.

Câu 4. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}$ cm. Một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung AB, $A'B'$ (như hình vẽ). Biết rằng $AB = A'B' = 6$ cm, bán kính đáy hình trụ bằng 4 cm. Tính diện tích tứ giác $ABB'A'$.



A. $90\,\text{cm}^2$ **B.** $30\,\text{cm}^2$ **C.** $60\,\text{cm}^2$ **D.** $100\,\text{cm}^2$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;2;1)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $x-1=0$ **B.** $z+1=0$ **C.** $x+1=0$ **D.** $z-1=0$.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của phương trình $2\log_4^2 x - 5\log_5 x.\log_4 5 + 3 = 0$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	0		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có số điểm cực trị là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4.

Câu 8. Cho các số phức: $z_1 = (1+2i)+(1-2i)$, $z_2 = \dfrac{1+i}{1-i}$, $z_3 = (2+2i)^2$, $z_4 = (\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)$.

Hỏi có bao nhiêu số phức là số thuần ảo trong các số phức đã cho?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4.

Câu 9. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a - \dfrac{b\pi}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương, b và c nguyên tố cùng nhau. Giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a}{b} + 2c$ là

A. 7 **B.** 5 **C.** 9 **D.** -3.

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{\log_2 2019!} + \frac{1}{\log_3 2019!} + \ldots + \frac{1}{\log_{2019} 2019!}.$$

A. 2019 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 2018.

Câu 11. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng a. Biết $S_{\Delta ABC'} = \dfrac{a^2}{2}$. Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12. Nhóm STRONG được thành lập ngày $1/4/2018$ với ban quản trị tuần đầu gồm 5 người. Theo thống kê số thành viên trong nhóm được tăng hàng tuần xấp xỉ theo cấp số nhân với công bội $q=1,15$. Hỏi tính tới $1/4/2019$ số thành viên của nhóm gần bằng số nào sau đây nhất (với giả thiết một năm có 52 tuần)?

A. 47737 B. 8421 C. 7165 D. 6230.

Câu 13. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{2xe^{2x}+1}{x\left(e^{2x}+\ln x\right)};$$

biết $F(1)=2$ và $F(2)=\ln\left(m.e^4+n.\ln 2\right)+p$ với $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Tính $P=m^2+2n^2+3p^2$.

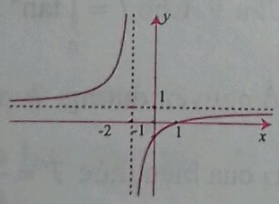
A. 3 B. 6 C. 7 D. 5.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;2;-2)$. Tìm vectơ **không phải** là vectơ chỉ phương của đường thẳng OA.

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;-1;1)$ B. $\overrightarrow{u_2}=(0;1;-1)$

C. $\overrightarrow{u_3}=(0;-2;2)$ D. $\overrightarrow{u_4}=(0;1;1)$.

Câu 15. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

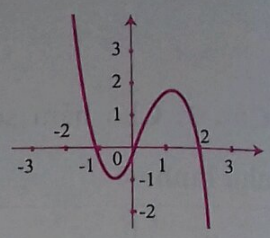
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 16. Kí hiệu M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-\sqrt{x-2}$ trên $[2;6]$. Tính $M-m$.

A. 2 B. 4 C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{9}{2}$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy xác định dấu của $P=\frac{ac}{bd}$.



A. $P>0$ B. $P<0$

C. $P=0$ D. Không xác định được.

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C'D)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi H là hình chiếu của D' trên $C'D$. Biết diện tích tam giác $AB'H$ là $3a^2$, tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $9a^3$ B. $6a^3\sqrt{3}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $6a^3$.

Câu 19. Cho $0<a\neq 1;\ b,c>0$ thỏa mãn

$\log_a b=\frac{1}{3}$; $\log_a c=2$. Tính $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(a^{25}b^6c^{2019}\right)$.

A. 1355 B. 4065 C. 2056 D. 12195.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương sao cho $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{9}$.

Viết phương trình mặt cầu tâm O đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

A. $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}$ B. $x^2+y^2+z^2=3$.

C. $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}$ D. $x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 21. Cho phương trình

$$\log_{x+1}2+\log_4(8x+8)=0$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$. Tính x_1+2x_2.

A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{7}{4}$ C. -2 D. -3.

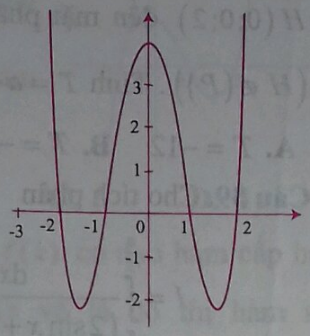
Câu 22. Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(2x+2-x^2\right)$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ và trục hoành.



A. $\frac{32}{15}$ **B.** $\frac{76}{15}$ **C.** 8 **D.** 5.

Câu 24. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm là I và tiếp xúc với đường thẳng Δ.

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{50}{36}$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{74}{36}$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{50}{9}$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{74}{9}$.

Câu 25. Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 2.

Câu 26. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 27. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $2z + \overline{z} + 3 - (3 + |z|i)i = 0$. Tìm $S = 4a + b$.

A. $S = -8$ **B.** $S = 3$ **C.** $S = 5$ **D.** $S = -6$.

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi các điểm M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD, BD, BC, CD. Tính thể tích khối đa diện $MNPQRS$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{48}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{32}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{24}$.

Câu 29. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(3;5;11)$ và song song với trục Oz thì có phương trình tham số tương ứng là:

A. $(d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 11 \end{cases}$ **B.** $(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 11 + t \end{cases}$

C. $(d): \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = t \end{cases}$ **D.** $(d): \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 11 + t \end{cases}$.

Câu 30. Cho bất phương trình

$$-\ln^2 x + 2m\ln x + 2m - 8 < 0.$$

Số giá trị nguyên dương m để bất phương trình trên có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(1; e^3\right)$ là

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1.

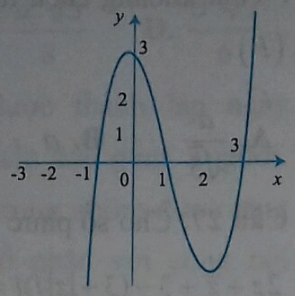
Câu 31. Hàm số

$$y = \sqrt{5}mx - \sin 5x - m\sin x + 3x - m \ (m \in \mathbb{R})$$

đồng biến trên khoảng $(0;2019)$ khi và chỉ khi $m \geq a + b\sqrt{c}$ (a, b là các số hữu tỷ và c là số nguyên tố). Tính $a + b + c$.

A. 6 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Khi đó hàm số $y=f\left(\left|2^x-4\right|\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(0;\log_2 3)$ **B.** $\left(\frac{8}{5};\frac{19}{10}\right)$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 33. Cho số phức z có phần ảo bằng -1. Khi đó giá trị lớn nhất của $\left|\frac{1}{z}-1\right|$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{5}\right)$ **B.** $\left(0;\frac{3}{5}\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{5};\frac{2}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 34. Giá trị biểu thức

$P=C_{2019}^0+2C_{2019}^1+3C_{2019}^2+...+2020C_{2019}^{2019}$ bằng

A. 2^{2019} **B.** 2019.2^{2018} **C.** 2020.2^{2018} **D.** 2021.2^{2018}

Câu 35. Chia một nhóm học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 9 học sinh nữ thành ba tổ có số lượng học sinh bằng nhau. Tính xác suất để mỗi tổ đều có học sinh nam.

A. $\frac{16}{55}$ **B.** $\frac{8}{165}$ **C.** $\frac{16}{165}$ **D.** $\frac{14}{55}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị của x bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** a.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60^0, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a}{2}$ và cạnh SA có độ dài nhỏ nhất. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{7a^3\sqrt{7}}{384}$ **B.** $\frac{13a^3\sqrt{39}}{3456}$ **C.** $\frac{13a^3\sqrt{39}}{432}$ **D.** $\frac{7a^3\sqrt{21}}{384}$

Câu 38. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi $(P): ax+by+cz-3=0$, (với a, b, c là các số nguyên) là phương trình mặt phẳng đi qua $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$ sao cho khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất $(H\notin(P))$. Tính $T=a-2b+3c+12$.

A. $T=-12$ **B.** $T=-16$ **C.** $T=12$ **D.** $T=16$.

Câu 39. Cho tích phân

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{(2\sin x+\cos x)^2}=\frac{a+b\sqrt{3}}{c}$$

với a, b, $c\in\mathbb{Z}, c>0$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=300a+30b+c-23$.

A. 2020 **B.** 2019 **C.** 2018 **D.** 2021.

Câu 40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông, $\Delta B'BD$ đều, $AB=AB'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'CD)$ bằng

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0.

Câu 41. Biết $F(x)=\int\cos^5 x.\cos 7x dx=\frac{a.\sin bx\cos^6 x}{6}+C$ với $a,b\in\mathbb{Z}, b>0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính a^3+b^2.

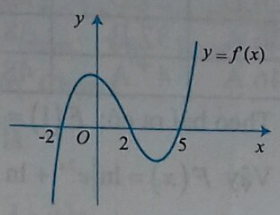
A. 35 **B.** 37 **C.** 32 **D.** 30.

Câu 42. Ông A vay ngân hàng X số tiền 100 triệu đồng, với lãi suất 1%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, Ông A bắt đầu hoàn nợ; biết rằng hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và bằng 2 triệu đồng. Sau một năm, mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,2%/tháng và ông A muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thỏa thuận với ngân hàng X trả 5 triệu đồng cho mỗi tháng. Hỏi phải mất bao nhiêu lâu kể từ thời điểm bắt đầu vay tiền ngân hàng ông A mới trả hết nợ?

A. 19 tháng **B.** 31 tháng **C.** 20 tháng **D.** 32 tháng.

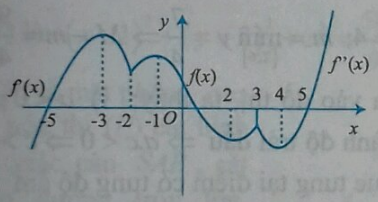
Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+m}\right)$ có năm điểm cực trị?



A. 2024 **B.** 2023 **C.** 5 **D.** 4.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$; đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $(-\infty;-2]$, đồ thị của hàm số $y=f''(x)$ trên $[3;+\infty)$. Hàm số $y=f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 8 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4.

Câu 45. Trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-12}{10}$ và hai mặt cầu có phương trình lần lượt là

$$(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=2$$

$$(S_2):(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=5.$$

Biết rằng $(S_1);(S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn (C) và điểm $M(a;b;c)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** 2

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(-1;+\infty)$. Biết đẳng thức

$$2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}$$ được thỏa mãn $\forall x\in(-1;+\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

A. $2-\sqrt{3}$ **B.** $-\sqrt{3}$

C. $e-\sqrt{3}$ **D.** Chưa đủ dữ kiện tính $f(0)$.

Câu 47. Tính tỷ số diện tích giữa phần chung của parabol (P) $y^2=\dfrac{1}{4}px$ $(p>0)$ với elip (E): $\dfrac{x^2}{8p^2}+\dfrac{y^2}{p^2}=1$ và phần còn lại của (E).

A. $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$ **B.** $\dfrac{3\pi+10}{9\pi+10}$ **C.** $\dfrac{10-3\pi}{9\pi-10}$ **D.** $\dfrac{10-3\pi}{9\pi+10}$.

Câu 48. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2-2i|=\dfrac{1}{2}$ và $|z_2-\sqrt{3}|+|z_2+\sqrt{3}|=4$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $a-b=-4$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P=|z-2z_1|+|z-z_2|$$ bằng:

A. $P_{\min}=5$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$ **C.** $P_{\min}=6$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{13}{2}$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+x-2^m$. Tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(f(x))=x$ có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ bằng

A. 8 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 2.

Câu 50. Buổi họp nhóm *Strong Team Toán VD – VCD* ngày 28/6/2019 dự kiến có 10 thầy và 5 cô tham gia. Họ sẽ chia đều ngẫu nhiên thành 3 tổ A, B, C mỗi tổ 5 người để bàn luận, quyết định về các vấn đề khác nhau. Xác suất để tổ A có nhiều nhất 2 cô, tổ B có ít nhất 4 thầy là

A. $\dfrac{18}{1981}$ **B.** $\dfrac{125}{429}$ **C.** $\dfrac{163}{1980}$ **D.** $\dfrac{901}{3003}$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

1.D	2.A	3.C	4.C	5.C	6.A	7.B	8.B	9.C	10.B
11.C	12.D	13.A	14.D	15.C	16.C	17.A	18.A	19.D	20.D
21.B	22.C	23.C	24.C	25.D	26.D	27.D	28.D	29.D	30.D
31.A	32.B	33.A	34.D	35.A	36.A	37.B	38.D	39.A	40.C
41.B	42.D	43.D	44.C	45.A	46.A	47.A	48.C	49.C	50.D

Câu 3. Số đoạn thẳng có 2 đầu mút thuộc n điểm đã cho là $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$. Theo bài ra ta có $\frac{n(n-1)}{2}=190$. Tìm được $n=20$. Chọn **C**.

Câu 8. $z_1=(1+2i)+(1-2i)=2$ là số thực.

$z_2=\frac{1+i}{1-i}=i$ là số thuần ảo; $z_3=(2+2i)^2=8i$ là số thuần ảo; $z_4=(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)=3+4=7$. Vậy có 2 số thuần ảo trong các số phức đã cho. Chọn **B**.

Câu 9. Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

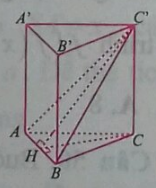
Suy ra $a=1, b=1, c=4$. Do đó: $T=\frac{a}{b}+2c=9$. Chọn **C**.

Câu 10. $P=\frac{1}{\log_2 2019!}+\frac{1}{\log_3 2019!}+...+\frac{1}{\log_{2019} 2019!}$

$=\log_{2019!}2+\log_{2019!}3+...+\log_{2019!}2019$

$=\log_{2019!}(2.3.....2019)=\log_{2019!}(2019!)=1$. Chọn **B**.

Câu 11. Gọi H là trung điểm AB. ΔABC đều, CH là đường cao nên



$$CH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\Delta C'AB$ cân tại C' có:

$S_{\Delta ABC'}=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.C'H=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{2}C'H=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow C'H=a.$

Do $\Delta C'CH$ vuông tại C nên

$CC'=\sqrt{C'H^2-CH^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}.$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.CC'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Chọn **C**.

Câu 13. Ta tính $\int\frac{2xe^{2x}+1}{x(e^{2x}+\ln x)}dx$. Đặt $t=e^{2x}+\ln x$

$\Rightarrow dt=\left(2e^{2x}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{2x.e^{2x}+1}{x}dx$. Khi đó

$\int\frac{2xe^{2x}+1}{x(e^{2x}+\ln x)}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|e^{2x}+\ln x|+C.$

Theo bài ra có: $F(1)=2\Leftrightarrow 2+C=2\Leftrightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=\ln|e^{2x}+\ln x|$. Suy ra

$F(2)=\ln(e^4+\ln 2)\Rightarrow m=1, n=1, p=0.$

Vậy $P=m^2+2n^2+3p^2=3$. Chọn **A**.

Câu 16. Hàm số $y=x-\sqrt{x-2}$ liên tục trên $[2;6]$ có:

$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x-2}}=0\Rightarrow 2\sqrt{x-2}-1=0$

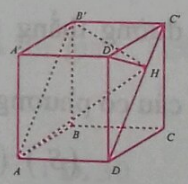
$\Leftrightarrow 4(x-2)=1\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}\in[2;6]$; $y(2)=2; y(6)=4$;

$y\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{7}{4}$. Suy ra

$M=\max\limits_{[2;6]}y=4$; $m=\min\limits_{[2;6]}y=\frac{7}{4}\Rightarrow M-m=\frac{9}{4}$. Chọn **C**.

Câu 17. Dựa vào đồ thị, ta thấy: i) $a<0$; ii) Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu $\Rightarrow a.c<0\Rightarrow c>0$; iii) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d<0$; iiii) Điểm uốn của đồ thị hàm số có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$. Do đó: $P=\frac{ac}{bd}>0$. Vậy chọn **A**.

Câu 18. Đặt $CD=x$ $(x>0)$ thì $AD=x$. Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C'D)$ và $(ABCD)$ bằng góc CDC' $\Rightarrow\widehat{CDC'}=60^0$.



Do đó: $CC'=CD.\tan 60^0=x\sqrt{3}$,

$C'D=\frac{CD}{\cos 60^0}=2x\Rightarrow S_{AB'C'D}=AD.C'D=2x^2$. Mặt khác

$S_{AB'C'D}=2S_{AB'H}=6a^2\Rightarrow 2x^2=6a^2\Leftrightarrow x=a\sqrt{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=CC'.S_{ABCD}=CC'.AB.AD=\sqrt{3}x^3=9a^3$. Chọn **A**.

Câu 19. $\log_{\sqrt[3]{a}}(a^{25}b^6c^{2019})=3(25\log_a a+6\log_a b+2019\log_a c)$

$=3\left(25+6.\frac{1}{3}+2019.2\right)=12195$. Chọn **D**.

Câu 22. $y'=(2-2x).f'(2x+2-x^2)=2(1-x).f'(2x+2-x^2)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ đã cho, suy ra:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x=0\\ f'(2x+2-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 2x+2-x^2=-2\\ 2x+2-x^2=2\\ 2x+2-x^2=4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{5} \\ x=0 \text{ (bội chẵn)} \\ x=2 \text{ (bội chẵn)} \end{array}\right.$$. Nhận thấy y' đổi dấu qua các nghiệm đơn là $x=1$, $x=1-\sqrt{5}$ và $x=1+\sqrt{5}$ và không đổi dấu qua các nghiệm bội chẵn. Vậy hàm số $y=f\left(2x+2-x^2\right)$ có 3 điểm cực trị. Chọn **C**.

Câu 23. Diện tích hình phẳng (H) là:

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^4-5x^2+4\right|dx=-\int_{-2}^{-1}\left(x^4-5x^2+4\right)dx+$$

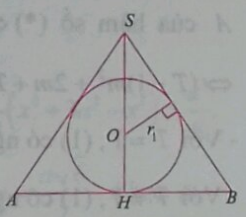
$$+\int_{-1}^{1}\left(x^4-5x^2+4\right)dx-\int_{1}^{2}\left(x^4-5x^2+4\right)dx=8.$$ Chọn **C**.

Câu 24. Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với Δ nên bán kính của mặt cầu là $R=d(I,\Delta)$. Theo giả thiết, Δ đi qua $M(-1;1;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}(1;2;-2)$. Ta có: $\overrightarrow{MI}(2;1;1)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]=(-4;5;3)\Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

PT mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{50}{9}$. Chọn **C**.

Câu 25. Gọi (P) là mặt phẳng qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức $r_1=\frac{S_{SAB}}{p}=\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$ (trong đó p là nửa chu vi của tam giác SAB). Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi hr^2}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}=$



$$=\frac{1}{4}\frac{hr^2}{\left(\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}\right)^3}=\frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\frac{h^2}{r^2}}=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x},$$

với $\frac{h^2}{r^2}=x>0$. Xét hàm số $f(x)=\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{4x}$ có

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{x+1}}.$$

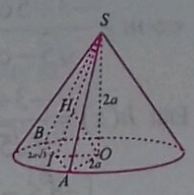
$$f'(x)=0\Leftrightarrow x-2-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow x=8.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		8		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	2	↗	

Vậy giá trị bé nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng 2. Chọn **D**.

Câu 26. Gọi I là trung điểm của AB; đường tròn đáy có tâm O, bán kính R. Kẻ $OH\perp SI$.



Ta có $AB\perp SO$ và $AB\perp OI$. Suy ra $AB\perp OH$. Khi đó $OH\perp(P)$. Do đó $d(O,(P))=OH$.

Ta có: $OI=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a.$

Suy ra: $OH=\frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Chọn **D**.

Câu 27. Ta có: $2z+\overline{z}+3-(3+|z|i)i=0$

$$\Leftrightarrow 2(a+bi)+(a-bi)+3=3i-\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 3a+bi+3=3i-\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases} b=3 \\ \sqrt{a^2+9}=-3(a+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b=3 \\ a=-\frac{9}{4}\end{cases}.$$ Vậy $S=4(-\frac{9}{4})+3=-6$. Chọn **D**.

Câu 30. Với mọi $x\in\left(1;e^3\right)$ ta có:

$$-\ln^2x+2m\ln x+2m-8<0$$

$$\Leftrightarrow 2m(\ln x+1)<\ln^2x+8\Leftrightarrow 2m<\frac{\ln^2x+8}{\ln x+1}\quad(1)$$

Đặt $t=\ln x$. Do $x\in\left(1;e^3\right)\Rightarrow t\in(0;3)$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+8}{t+1}\Rightarrow f'(t)=\frac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}$.

Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=2\in(0;3) \\ t=-4\notin(0;3)\end{array}\right.$. Có bảng biến thiên

t	0		2		3
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$	8	↘	4	↗	$\frac{17}{4}$

Từ bảng biến thiên, (1) có nghiệm với $\forall x\in(1;e^3)$ khi và chỉ khi $2m<4\Leftrightarrow m<2$. Vậy có 1 số nguyên dương thỏa mãn bài toán. Chọn **D**.

Câu 31. Ta có: $f'(x)=\sqrt{5}m-5\cos5x-m\cos x+3$.

Dễ thấy nếu $f'(x)=0$ có nghiệm trên $(0;2019)$ thì số nghiệm là hữu hạn nên ta có:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2019)$

$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0\ \forall x\in(0;2019)$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}m - 5\cos 5x - m\cos x + 3 \ge 0 \quad \forall x \in (0;2019)$

$\Leftrightarrow m \ge \dfrac{-3+5\cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x} \quad \forall x \in (0;2019)$ (*)

Đặt $h(x) = \dfrac{-3+5\cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x}$; $x \in (0;2019)$

Ta có: $\begin{cases} -8 \le -3+5\cos 5x \le 2 \\ \sqrt{5}-1 \le \sqrt{5}-\cos x \le \sqrt{5}+1 \end{cases} \forall x \in (0;2019)$

$\Rightarrow \begin{cases} -8 \le -3+5\cos 5x \le 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} \le \dfrac{1}{\sqrt{5}-\cos x} \le \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} \end{cases} \forall x \in (0;2019)$

$\Rightarrow \dfrac{-3+5.\cos 5x}{\sqrt{5}-\cos x} \le \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} \quad \forall x \in (0;2019)$

$\Rightarrow h(x) \le \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} \quad \forall x \in (0;2019)$;

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 5x = 1 \\ \cos x = 1 \\ x \in (0;2019) \end{cases}$

(dễ thấy hệ trên luôn có nghiệm thuộc $(0;2019)$, chẳng hạn $x = 2\pi$).

Từ đó suy ra : (*) $\Leftrightarrow m \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{5}$.

Vậy $a = b = \dfrac{1}{2}; c = 5$ nên chọn **A.**

Câu 32. Ta có: $y = g(x) = f\left(\left|2^x - 4\right|\right) = f\left(\sqrt{\left(2^x-4\right)^2}\right)$.

$g'(x) = f'\left(\sqrt{\left(2^x-4\right)^2}\right).\left(\sqrt{\left(2^x-4\right)^2}\right)'$

$= f'\left(\left|2^x-4\right|\right).\dfrac{\left(2^x-4\right).2^x.\ln 2}{\left|2^x-4\right|}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\left|2^x-4\right|\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|2^x-4\right| = -1 \\ \left|2^x-4\right| = 1 \\ \left|2^x-4\right| = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 5 \\ x = \log_2 3 \\ x = \log_2 7 \\ x = 0 \end{array}\right.$

. $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'\left(\left|2^x-4\right|\right).\left(2^x-4\right) > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 4 > 0 \\ f'\left(2^x-4\right) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 4 < 0 \\ f'\left(4-2^x\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 4 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} -1 < 2^x - 4 < 1 \\ 2^x - 4 > 3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 4 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4 - 2^x < -1 \\ 1 < 4 - 2^x < 3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 2^x - 4 < 1 \\ 2^x - 4 > 3 \\ 1 < 4 - 2^x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < 2^x < 5 \\ 2^x > 7 \\ 1 < 2^x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < \log_2 5 \\ x > \log_2 7 \\ 0 < x < \log_2 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\log_2 3$		2		$\log_2 5$		$\log_2 7$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	‖	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Suy ra hàm số $y = f\left(\left|2^x - 4\right|\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{19}{10}\right)$. Chọn **B.**

Câu 33. Đặt $z = m - i$ $(m \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$$\left|\frac{1}{m-i} - 1\right| = \left|\frac{1-m+i}{m-i}\right| = \frac{\left|(1-m)+i\right|}{\left|m-i\right|} = \frac{\sqrt{(1-m)^2+1^2}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}.$$

Xét hàm số $y = \dfrac{m^2-2m+2}{m^2+1}$ (*). Số T thuộc tập giá trị A của hàm số (*) $\Leftrightarrow$ PT $T = \dfrac{m^2-2m+2}{m^2+1}$ có nghiệm $\Leftrightarrow (T-1)m^2 + 2m + T - 2 = 0$ (1) có nghiệm.

- Với $T = 1$, (1) có nghiệm $m = \dfrac{1}{2}$. Do đó $1 \in A$.

- Với $T \ne 1$, (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' = 1 - (T-1)(T-2) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le T \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có tập giá trị của hàm số (*) là $A = \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Chọn **A.**

Khi đó giá trị lớn nhất của $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right|$ là $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1,61$.

Câu 34. Ta có:

$(1+x)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1.x + C_{2019}^2.x^2 + \ldots + C_{2019}^{2019}.x^{2019}$

$\Rightarrow x(1+x)^{2019} = x.C_{2019}^0 + x^2.C_{2019}^1 + x^3.C_{2019}^2 + \ldots + x^{2020}.C_{2019}^{2019}$ (*).

Đạo hàm 2 vế của (*) được:

$(1+2020x)(1+x)^{2018} = C_{2019}^0 + 2xC_{2019}^1 + \ldots + 2020x^{2019}.C_{2019}^{2019}$ (**).

Thay $x = 1$ vào (**) có:

$C_{2019}^0 + 2C_{2019}^1 + 3C_{2019}^2 + \ldots + 2020C_{2019}^{2019} = 2021.2^{2018}$.

Vậy $P = 2021.2^{2018}$. Chọn **D.**

Câu 35. Trước hết ta hiểu 3 tổ được chia không phân biệt tên gọi. Khi đó:

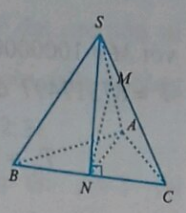
• Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \dfrac{C_{12}^4.C_8^4.C_4^4}{3!} = 5775$.

• Gọi A là biến cố "chia 12 em học sinh thành ba tổ mà tổ nào cũng có học sinh nam". Ta xác định số phần tử của A như sau:

- Chia ba em học sinh nam vào ba tổ: có 1 cách chia.
- Chia 9 em nữ còn lại vào các tổ của các em nam: có $C_9^3.C_6^3.C_3^3$ cách chia.

Suy ra $n(A)=C_9^3.C_6^3.C_3^3=1680$. Do đó xác suất biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{16}{55}$. Chọn **A**.

Câu 36. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA,BC. Do các tam giác SBC,ABC đều nên



$SN\perp BC, AN\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAN)$.

Lại có:

$SN=AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{SN^2-SM^2}$

$=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}\Rightarrow S_{\Delta SAN}=\dfrac{1}{2}SA.MN=\dfrac{x\sqrt{3a^2-x^2}}{4}$.

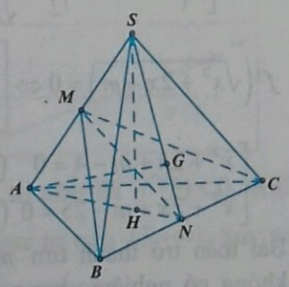
Vậy $V_{SABC}=V_{BSAN}+V_{CSAN}=\dfrac{1}{3}BN.S_{\Delta SAN}+\dfrac{1}{3}CN.S_{\Delta SAN}$

$=\dfrac{1}{3}(BN+CN).S_{\Delta SAN}=\dfrac{1}{3}.BC.S_{\Delta SAN}$.

$=\dfrac{1}{12}ax\sqrt{3a^2-x^2}=\dfrac{a}{24}2x\sqrt{3a^2-x^2}\le\dfrac{a}{24}\left(x^2+3a^2-x^2\right)=\dfrac{a^3}{8}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2=3a^2-x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chọn **A**.

Câu 37. Gọi N, M lần lượt là trung điểm của đoạn BC và SA. Do tam giác SBC và ABC là các tam giác cân lần lượt tại S và A nên $SN\perp BC, AN\perp BC$ $\Rightarrow BC\perp(SAN)$. Tương tự ta thấy do các tam giác SAB và SAC là tam giác đều nên $MB\perp SA, MC\perp SA\Rightarrow SA\perp(MBC)$. Do đó góc giữa MB và MC là góc giữa mp(SAB) và mp(SAC).



Kẻ $AG\perp SN$, vì $BC\perp(SAN)\Rightarrow BC\perp AG\Rightarrow$ $AG\perp(SBC)$ hay $AG=d(A,(SBC))=\dfrac{a}{2}$.

Theo giả thiết $\Delta SBC=\Delta ABC(c.c.c)$ suy ra $AN=SN$ nên ΔNSA cân tại N. Kẻ $SH\perp AN$ dễ chứng minh được $SH\perp(ABC)$ và $SH=AG=\dfrac{a}{2}$.

Đặt $SA=x>0$ và $x>\dfrac{a}{2}$, ta có hai trường hợp sau:

TH1: $BMC=60°$, khi đó ΔMBC đều cạnh $MB=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=BC$.

$SN=\sqrt{SB^2-BN^2}=\sqrt{x^2-\dfrac{3x^2}{16}}=\dfrac{x\sqrt{13}}{4}$, suy ra

$S_{SBC}=\dfrac{1}{2}SN.BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}.\dfrac{x\sqrt{13}}{4}=\dfrac{x^2\sqrt{39}}{16}$.

Thể tích $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{MBC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{16}.x=\dfrac{x^3\sqrt{3}}{16}$.

Mặt khác $V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\dfrac{1}{3}.S_{SBC}.AG=\dfrac{a.x^2\sqrt{39}}{96}$, nên:

$\dfrac{x^3\sqrt{3}}{16}=\dfrac{a.x^2\sqrt{39}}{96}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$ (thỏa mãn).

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{13a^3\sqrt{39}}{3456}$.

TH2: $\widehat{BMC}=120^0$, khi đó tam giác MBC cân tại M cạnh $MB=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ và $BC=\dfrac{3x}{2}$.

$SN=\sqrt{SB^2-BN^2}=\sqrt{x^2-\dfrac{9x^2}{16}}=\dfrac{x\sqrt{7}}{4}$, suy ra

$S_{SBC}=\dfrac{1}{2}SN.BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{x\sqrt{7}}{4}.\dfrac{3x}{2}=\dfrac{3x^2\sqrt{7}}{16}$

và $S_{MBC}=\dfrac{1}{2}.MB.MC.\sin 120°=\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{16}$. Thể tích

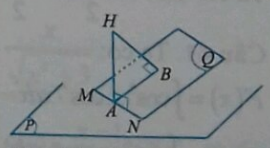
$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{MBC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{16}.x=\dfrac{x^3\sqrt{3}}{16}$. Mặt khác

$V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\dfrac{1}{3}.S_{SBC}.AG=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3x^2\sqrt{7}}{16}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a.x^2\sqrt{7}}{32}$, nên:

$\dfrac{x^3\sqrt{3}}{16}=\dfrac{a.x^2\sqrt{7}}{32}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ (thỏa mãn).

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{7a^3\sqrt{7}}{384}$. Từ giả thiết thì $SA=\dfrac{a\sqrt{13}}{6}$ nên $V_{S.ABC}=\dfrac{13a^3\sqrt{39}}{3456}$. Chọn **B**.

Câu 38. Từ H kẻ $HA\perp MN$. Gọi mp(Q) là mặt phẳng bất kì đi qua M và N. Dựng $HB\perp$ mp(Q), $B\in(Q)$, khi đó $d(H,(Q))=HB$;



Ta có $BH\le AH$. Dấu "=" xảy ra khi $B\equiv A$.

Khi đó mp(Q) $\perp AH$. Vậy mp(P) cần tìm sẽ vuông góc với AH. Ta có: $A\in MN, HA\perp MN$

$\Rightarrow A\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{HA}=\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Mà $AH\perp$ mp(P) $\Rightarrow\vec{n}_P=(1;1;-1)$ là VTPT của mp (P).

Suy ra phương trình mp(P) đi qua $M(0;-1;2)$ là:

$x+(y+1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow -x-y+z-3=0$

$\Rightarrow a=-1, b=-1, c=1$. Vậy

$T=a-2b+3c+12=-1-2.(-1)+3.1+12=16$. Chọn **D**.

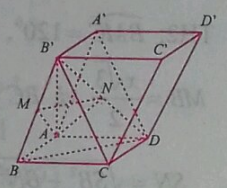
Câu 39. Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$. Với $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$,

$x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}$. Có: $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{(2\sin x+\cos x)^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{(2\tan x+1)^2}$

$=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(2t+1)^2}=-\frac{1}{2(2t+1)}\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2(2\sqrt{3}+1)}+\frac{1}{6}=\frac{7-3\sqrt{3}}{33}$.

Vậy $a=7, b=-3, c=33 \Rightarrow P=300a+30b+c-23=2020$. Chọn **A**.

Câu 40. Đặt $AB=AB'=x, (x>0)$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD=x\sqrt{2}$. $\Delta B'BD$ đều nên $B'B=BD=B'D=x\sqrt{2}$.



$\Delta B'BA$ có:

$AB'^2+AB^2=2x^2=BB'^2$ nên $\Delta B'BA$ vuông cân tại A $\Rightarrow AB'\perp AB$ (1).

$\Delta B'DA$ có: $AB'^2+AD^2=2x^2=DB'^2$ nên $\Delta B'DA$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB'\perp AD$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $AB'\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BB', $\Delta B'BA$ vuông cân tại A nên $AM\perp BB'$ (3); $BC\perp AB', BC\perp AB \Rightarrow BC\perp(ABB'A')$

$\Rightarrow BC\perp AM$ (4); Từ (3) và (4) có: $AM\perp(BCC'B')$ (5).

Gọi N là trung điểm của $B'D$, $\Delta B'DA$ vuông cân tại A nên $AN\perp B'D$ (6); $CD\perp AB', CD\perp AD \Rightarrow$ $CD\perp(ADB')\Rightarrow CD\perp AN$ (7). Từ (6) và (7), ta có $AN\perp(A'B'CD)$ (8); Từ (5) và (8) ta suy ra góc giữa mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(A'B'CD)$ bằng $\widehat{(AM,AN)}=\alpha$.

Ta có: $MN=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}=AM=AN\Rightarrow\alpha=60^0$. Chọn **C**.

Câu 41. Ta có:

$F(x)=\int\cos^5 x.\cos 7x dx=\int\cos^5 x.(\cos 6x.\cos x-\sin 6x.\sin x)dx$

$=\int\cos^6 x.\cos 6x dx-\int\cos^5 x.\sin 6x.\sin x dx$

Đặt $G(x)=\int\cos^6 x.\cos 6x dx$; $H(x)=\int\cos^5 x.\sin 6x.\sin x dx$

Tìm $H(x)$. Đặt $\begin{cases}u=\sin 6x\\ dv=\cos^5 x.\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=6\cos 6x dx\\ v=-\dfrac{\cos^6 x}{6}\end{cases}$

$\Rightarrow H(x)=\sin 6x.\left(-\dfrac{\cos^6 x}{6}\right)+\int 6\cos 6x.\dfrac{\cos^6 x}{6}dx$

$=-\dfrac{\sin 6x.\cos^6 x}{6}+G(x)$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{\sin 6x.\cos^6 x}{6}+C\Rightarrow a=1; b=6$.

Vậy $a^3+b^2=37$. Chọn **B**.

Câu 42. Sau 1 năm số tiền còn nợ ngân hàng X là:

$$T=M(1+r)^n-\frac{m}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$$

với $M=100000000$, $m=2000000$, $r=1\%$, $n=12$ ta được $T\approx 87317497$ đồng. Số tiền còn nợ lại của ông A là

$$T_{m_1}=M_1(1+r_1)^{n_1}-\frac{m_1}{r_1}\left[(1+r_1)^{n_1}-1\right].$$

Với n_1 là số tháng kể từ thời điểm bắt đầu tăng lãi suất lên 1,2% /tháng đến khi ông A trả hết nợ. Để trả hết số nợ còn lại ta cần có: $T_{m_1}=0\Leftrightarrow M_1(1+r_1)^{n_1}-\dfrac{m_1}{r_1}\left[(1+r_1)^{n_1}-1\right]=0$

với $M_1=87317497$, $m_1=5000000$, $r_1=1{,}2\%$. Từ đó ta suy ra được $n_1\approx 19{,}7$ tháng. Vậy cần $12+20=32$ tháng để ông A trả hết nợ. Chọn **D**.

Câu 43. ĐK: $x^2+2x+m\ge 0$. Ta có

$$y=f\left(\sqrt{x^2+2x+m}\right)$$

$\Rightarrow y'=\left[f\left(\sqrt{x^2+2x+m}\right)\right]'=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+m}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+m}\right)$

$f'\left(\sqrt{x^2+2x+m}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+m}=2\\ \sqrt{x^2+2x+m}=5\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+2x+m-4=0 & (1)\\ x^2+2x+m-25=0 & (2)\end{array}\right.$

Bài toán trở thành tìm m để các phương trình (1), (2) không có nghiệm chung và đều có 2 nghiệm phân biệt khác -1 đồng thời $x=-1$ thuộc tập xác định hàm số

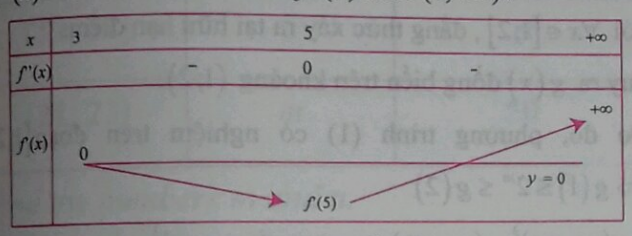
$\Leftrightarrow\begin{cases}5-m>0\\ 26-m>0\\ m-5\ne 0\\ m-26\ne 0\\ -1+m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<5.$

Kết hợp điều kiện $m\in[-2019;2019]$, $m\in\mathbb{Z}$.

Suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$. Chọn **D**.

Câu 44. Hàm $f(x)$ đạo hàm cấp hai xác định trên $\mathbb{R}$, nên đạo hàm cấp một liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra tại điểm $x=-2$ có $f'(-2)>0 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị tại $x=-2$. Trên $(-\infty;-2)$ đạo hàm cấp một triệt tiêu và đổi dấu qua điểm $x=-5$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x=-5$. Trên $(-2;3)$ hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=2$. Từ đồ thị $y=f''(x)$ trên $[3;+\infty)$, ta nhận thấy $f''(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=5$, suy ra đạo hàm cấp một $f'(x)$ sẽ đạt cực tiểu tại điểm $x=5$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ nên suy ra $f'(x)>0$ trên khoảng $(2;3)$.

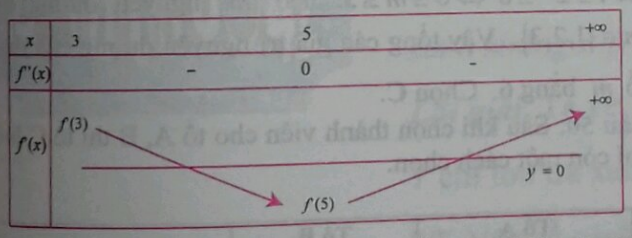
TH1: Nếu hàm $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=3$ thì $f'(3)=0$. Ta có BBT của $f'(x)$ trên $(3;+\infty)$:



Khi đó hàm $y=f(x)$ có thêm điểm cực trị tại $x=x_1>5$.

Suy ra hàm $y=f(x)$ có 5 điểm cực trị.

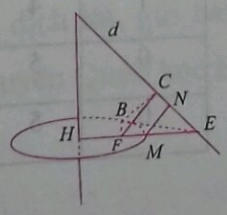
TH2: Nếu hàm $y=f(x)$ không có cực trị tại $x=3$ thì $f'(3)>0$. Ta có BBT của $f'(x)$ trên $(3;+\infty)$:



Để hàm $y=f(x)$ có nhiều cực trị nhất thì $f'(5)<0$. Khi đó hàm $y=f(x)$ có hai điểm cực trị trên $(3;+\infty)$. Suy ra hàm số $y=f(x)$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Cả hai trường hợp hàm số $y=f(x)$ đều có ta tối đa 5 điểm cực trị. Chọn **C**.

Câu 45. • (S_1) có tâm $I_1(1;2;-2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$, (S_2) có tâm $I_2(3;1;-4)$, bán kính $R_2=\sqrt{5}$.



• Vì $(S_1),(S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn (C) nên phương trình mp(P) chứa (C) là

$(P):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2-(x-3)^2-(y-1)^2-(z+4)^2=2-5$

$\Leftrightarrow 4x-2y-4z-14=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z-7=0.$

Đường thẳng I_1I_2 có phương trình: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-2-2t \end{cases}$.

Gọi H là tâm đường tròn (C) thì $H=I_1I_2\cap(P)$

$\Rightarrow 2+4t-2+t+4+4t-7=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{-8}{3}\right)$.

(d) đi qua điểm $A(1;-5;12)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(-3;-2;10)$.

Gọi $(Q)=\text{mp}(I_1;d)$. Ta có: $\overrightarrow{AI_1}=(0;7;-14)$, suy ra $\vec{n}_{(Q)}=\left[\overrightarrow{AI_1};\overrightarrow{u_d}\right]=(42;42;21)$ cùng phương với vectơ $(2;2;1) \Rightarrow (Q): 2x+2y+z-4=0$. Ta thấy: $I_2(3;1;-4)\in(Q)$, do đó I_1I_2, d đồng phẳng.

• Gọi E là giao điểm của d và (P), suy ra $E(4;-3;2)$; $I_1H=d(I_1;(P))=1$. Bán kính đường tròn (C) là

$$R_c=\sqrt{R_1^2-I_1H^2}=\sqrt{2-1}=1=HM.$$

Ta có: $EH=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-4\right)^2+\left(\frac{5}{3}+3\right)^2+\left(\frac{-8}{3}-2\right)^2}=7.$

Vì khoảng cách từ M đến đường thẳng d là nhỏ nhất nên $M=EH\cap(C)$ thỏa mãn $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{7}\overrightarrow{HE}$.

Thật vậy, ta lấy điểm $B\in(C)$ và kẻ MN, BC lần lượt vuông góc với đường thẳng d. Kẻ $BF\perp HE$ $\Rightarrow BF\perp(HEC)\Rightarrow d\perp(BFC)\Rightarrow d\perp CF \Rightarrow CF//MN$ và $CF>MN$. Lại có ΔFBC vuông tại F nên $BC>CF>MN$. Vậy MN là khoảng cách ngắn nhất từ một điểm thuộc đường tròn đến đường thẳng d.

$\overrightarrow{HM}=\left(a-\frac{5}{3};b-\frac{5}{3};c+\frac{8}{3}\right)$; $\overrightarrow{HE}=\left(\frac{7}{3};\frac{-14}{3};\frac{14}{3}\right)$

$\Rightarrow a=2;b=1;c=-2 \Rightarrow a+b+c=1$. Chọn **A**.

Câu 46. Kí hiệu $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}$ (*)

Với $\forall x\in(-1;+\infty)$ thì

$(*)\Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Nhận xét: $\left[\frac{x-1}{x+1}f(x)\right]'=\frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)$, từ đó

$\int[\frac{x-1}{x+1}f(x)]'dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}f(x)=\sqrt{x^2+3}+C.$

Thay $x=1$ vào đẳng thức trên ta được $C=-2$, do đó

$$\frac{x-1}{x+1}f(x)=\sqrt{x^2+3}-2.$$

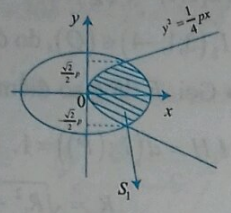
TH1: $\forall x\in(-1;+\infty)\setminus\{1\}$, ta có:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(x+1)}{x-1}=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}.$$

TH2: Với $x=1$, thay vào (*) ta có: $f(1)=1$. Bổ sung giá trị $f(1)=1$ cho hàm $f(x)=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}, \forall x\in(-1;+\infty)\setminus\{1\}$ ta được hàm $f(x)=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}, \forall x\in(-1;+\infty)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $f(0)=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$. Chọn **A**.

Câu 47. Hệ phương trình tọa độ giao điểm:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{8p^2}+\frac{y^2}{p^2}=1\\ y^2=\frac{1}{4}px\ (x\ge 0)\end{cases}$$



$\Leftrightarrow x=2p, y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}p.$

Gọi S_1 là diện tích giới hạn (P) và (E) ta được.

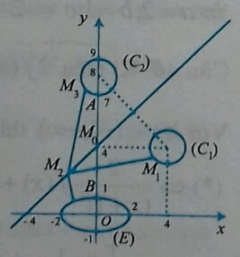
$$S_1=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}p}\left[\sqrt{8}\left(\sqrt{p^2-y^2}\right)-\frac{4y^2}{p}\right]dy.$$

Tính được $S_1=\sqrt{2}p^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)$. Diện tích Elip: $S=\pi.a.b=\pi.2\sqrt{2}p.p=2\sqrt{2}\pi p^2$ ($2a$ độ dài trục lớn, $2b$ độ dài trục bé). Diện tích còn lại:

$$S_2=S-S_1=2\sqrt{2}\pi p^2-\sqrt{2}p^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}\right)p^2.$$

Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{2}p^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}p^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. Chọn **A**.

Câu 48. Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $2z_1$, z_2, z trên hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(4;4)$, bán kính $R_1=1$. Quỹ tích của điểm M_2 là đường Elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.



Quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: x-y+4=0$.

Ta có $P=|z-2z_1|+|z-z_2|=MM_1+MM_2$. Gọi (C_2) là đường tròn đối xứng với (C_1) qua d và gọi M_3 là điểm đối xứng với M_1 qua d. Suy ra (C_2) có tâm $J(0;8)$ và bán kính $R_2=1$ và $M_3\in(C_2)$. Khi đó

$$P=MM_1+MM_2=MM_3+MM_2\ge M_3M_2\ge AB=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $M_3\equiv A, M_2\equiv B, M\equiv M_0$ với M_0 là giao điểm của d với trục Oy. Vậy $\min P=6$. Chọn **C**.

Câu 49. Ta có: $y'=f'(x)=3x^2+1\ge 1$, $\forall x\in[1;2]$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$. Có:

$$f(f(x))=x\Leftrightarrow[f(x)]^3+f(x)-2^m=x$$
$$\Leftrightarrow[f(x)]^3+f(x)-x=2^m\quad(1).$$

Xét hàm $g(x)=[f(x)]^3+f(x)-x$ trên đoạn $[1;2]$.

Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ nên $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$. Có: $g'(x)=3.f'(x)[f(x)]^2+f'(x)-1\ge 0$ với $\forall x\in[1;2]$, đẳng thức xảy ra tại hữu hạn điểm.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Do đó, phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$

$\Leftrightarrow g(1)\le 2^m\le g(2)$

$\Leftrightarrow(2-2^m)^3+(2-2^m)-1\le 2^m\le(10-2^m)^3+(10-2^m)-2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-2^m)^3+2(2-2^m)-3\le 0\\(10-2^m)^3+2(10-2^m)-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2^m\le 1\\10-2^m\ge 2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1\le 2^m\le 8\Leftrightarrow 0\le m\le 3$. Do m nguyên dương nên $m\in\{1,2,3\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của tham số m bằng 6. Chọn **C**.

Câu 50. Sau khi chọn thành viên cho tổ A, B thì tổ C luôn chỉ còn một cách chọn.

Tổ A		Tổ B		Số cách chọn
Số cô	Số thầy	Số cô	Số thầy	
2	3	1	4	$(C_5^2.C_{10}^3).(C_3^1.C_7^4).1$
2	3	0	5	$(C_5^2.C_{10}^3).(C_7^5).1$
1	4	1	4	$(C_5^1.C_{10}^4).(C_4^1.C_6^4).1$
1	4	0	5	$(C_5^1.C_{10}^4).(C_6^5).1$
0	5	1	4	$(C_{10}^5).(C_5^1.C_5^4).1$
0	5	0	5	$(C_{10}^5).(C_5^5).1$

Tổng: 227052.

Xác suất cần tìm: $P=\frac{227052}{C_{15}^5.C_{10}^5.1}=\frac{901}{3003}$. Chọn **D**.

NGUYỄN VĂN QUÝ VÀ TẬP THỂ GIÁO VIÊN STRONG TEAM TOÁN VD-VDC

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 45

Problem. *The numbers of people finishing a running race were as follows.*

Time (minutes)	*Frequency*	*Cumulative frequency*
(0; 15]	10	10
(15; 17]	12	22
(17; 19]	20	42
(19; 21]	5	n
(21; 23]	m	50

Find the numbers m and n.

Solution. From the cumulative frequency column we see that there were 42 people finishing the race with the time in the range (0; 19] and n people with the time in (0; 21]. Combining with the frequency column we have $n-42=5$. Hence $n=47$.

Similarly, $m=50-n=50-47=3$.

TỪ VỰNG

Frequency : tần suất

Cumulative frequency : tần suất cộng dồn

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Có 3 lon coca giống hệt nhau, 2 lon trà xanh giống hệt nhau, 2 lon nước cam giống hệt nhau được sắp xếp thành một hàng. Tính số cách sắp xếp để cho 3 lon coca xếp cạnh nhau và 2 lon trà xanh không xếp cạnh nhau.*

Lời giải. Ta xét mô hình _(*CCC*)_ *O* _ *O* _, trong đó *C* chỉ lon coca, *T* chỉ lon trà xanh và *O* là lon nước cam. Có 4 chỗ trống _ để sắp xếp 2*T*. Vậy số cách sắp xếp là C_4^2.

Chú ý rằng thứ tự của hai lon trà xanh không quan trọng vì chúng giống hệt nhau. Mặt khác ta có 3 mô hình là (*CCC*) nằm ở bên trái, ở giữa hoặc bên phải 2 lon nước cam. Do đó số cách sắp xếp thỏa mãn đề bài là $3\times C_4^2=18$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Xuân Thành Đạt*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre.

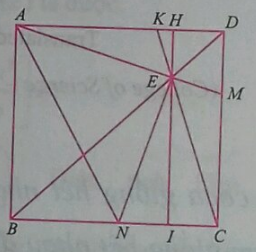
HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 25. *Cho hình vuông ABCD và điểm M trên cạnh CD sao cho $CM = 2DM$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng AM và đường thẳng BD. N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng EN.*

Lời giải.

Cách 1. Gọi K là giao điểm của CE với AD, H là chân đường vuông góc kẻ từ E trên cạnh AD. Ta có:



$\Delta AED = \Delta CED$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{KCD} \Rightarrow \Delta ADM = \Delta CDK$ (g.c.g)

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{CKD}$. Mà $\widehat{DKC} = \widehat{KCB}$ (so le trong), nên $\widehat{AMD} = \widehat{KCB}$. (1)

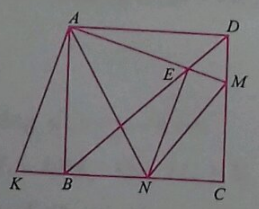
Gọi I là giao điểm của HE với BC, thì

$$\frac{CI}{IB} = \frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra I là trung điểm của CN. Khi đó ΔENC cân tại E nên $\widehat{ENC} = \widehat{KCB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{ENC}$. Do đó, tứ giác $EMCN$ nội tiếp. Mà $\widehat{NCM} = 90^0$ nên $\widehat{MEN} = 90^0$, hay $AM \perp NE$.

Cách 2. Đặt cạnh hình vuông bằng a. Khi đó:



$CN = \frac{a}{2}$; $CM = \frac{2a}{3}$;

$MN = \sqrt{CN^2 + CM^2} = \frac{5a}{6}$.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm K, sao cho: $KB = DM$. Ta có: $\Delta ADM = \Delta ABK$, suy ra: $\widehat{KAB} = \widehat{DAM}$, do đó $\widehat{KAM} = 90^0$. Lại có

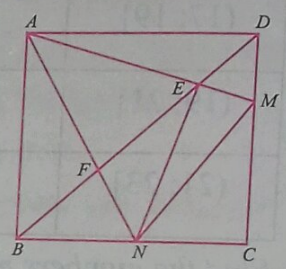
$$NK = BN + KB = BN + DM = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} \Rightarrow NK = NM,$$

suy ra $\Delta AKN = \Delta AMN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{KAN} = 45^0$.

Vậy tứ giác $AENB$ nội tiếp (do $\widehat{EAN} = \widehat{EBN} = 45^0$).

Mà $\widehat{ABN} = 90^0$ nên $\widehat{AEN} = 90^0$, hay $AM \perp EN$.

Cách 3. Gọi F là giao điểm của AN với BD thì F là trọng tâm ΔABC. Đặt cạnh hình vuông $ABCD$ là a. Ta có:



$AF = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{5}}{3}$;

$BF = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ suy ra $\frac{AF}{BF} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (1)

Lại có: $NF = \frac{1}{3}AN = \frac{a\sqrt{5}}{6}$;

$EF = BD - BF - ED = a\sqrt{2} - \frac{1}{3}a\sqrt{2} - \frac{1}{4}a\sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{12}$

nên $\frac{EF}{NF} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{EF}{NF} \Rightarrow \Delta AFE \backsim \Delta BFN \text{ (c.g.c)}.$$

$\Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{EBN} = 45^0 \Rightarrow$ tứ giác $AENB$ nội tiếp.

Mà $\widehat{ABN} = 90^0$ nên $\widehat{AEN} = 90^0$, hay $AM \perp EN$.

Cách 4. Đặt cạnh hình vuông là a. Lấy các điểm K, P trên cạnh BC sao cho

$$BK = KN = NP = PC.$$

Kẻ $KI \parallel NH \parallel PE$ (I, H thuộc AM). Ta có:

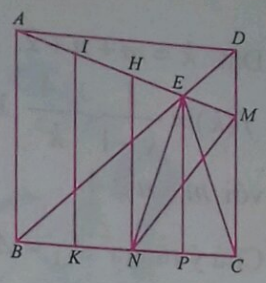
$NH = \frac{AD + CM}{2} = \frac{5a}{6}$; $IK = \frac{AB + NH}{2} = \frac{11a}{12}$;

$EP = \frac{CM + NH}{2} = \frac{9a}{12}$; $NP = \frac{a}{4}$.

Do đó

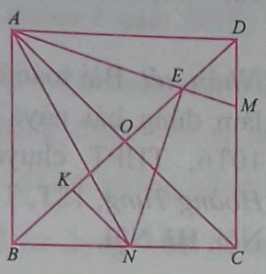
$$\tan\widehat{ENP} = \frac{EP}{NP} = 3;$$

$$\tan\widehat{AMD} = \frac{AD}{DM} = 3.$$



Suy ra $\widehat{ENP} = \widehat{AMD}$, do đó tứ giác $EMCN$ nội tiếp. Mà $\widehat{NCM} = 90^0$ nên $\widehat{MEN} = 90^0$, hay $AM \perp EN$.

Cách 5. Kẻ $NK \perp BD$. Ta có: $KN = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$;



$KE = BD - BK - ED$

$= a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

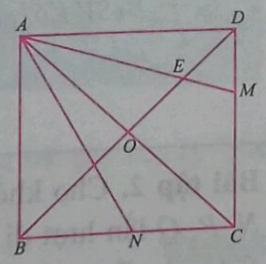
$\Rightarrow \frac{KN}{KE} = \frac{1}{2}$. Mà $\frac{BN}{BA} = \frac{1}{2}$ nên

$$\Delta EKN \backsim \Delta ABN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{BEN}.$$

Suy ra tứ giác $AENB$ nội tiếp. Mà $\widehat{ABN} = 90^0$ nên $\widehat{AEN} = 90^0$. Vậy $AM \perp EN$.

Cách 6. Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là a. Ta có:

$DE = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$



$\Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{2}}{4}; AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{AO}{OE} = 2$. Do $\frac{AB}{BN} = 2$ nên

$\Delta ABN \backsim \Delta AOE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ANB}$. Suy ra tứ giác $AENB$ nội tiếp. Mà $\widehat{ABN} = 90^0$ nên $\widehat{AEN} = 90^0$. Vậy $AM \perp EN$.

Lưu ý. Trong ***Cách 2*** ta thấy $CN + CM + MN = 2a$. Từ đây ta có thể phát biểu bài toán tổng quát như sau: *Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Điểm M trên cạnh CD sao cho $CM = m.a$, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $CN = n.a$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng AM và đường thẳng BD. Biết rằng $m + n + \sqrt{m^2 + n^2} = 2$; m, n là các số hữu tỉ dương. Chứng minh rằng:*

a) *Đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng EN.*

b) *Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

c) *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.*

PHAN ĐÌNH ÁNH

(GV THCS Thạch Kim, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải nêu trên của bạn *Phan Đình Ánh*, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải tương tự cho Bài toán 25 này của bạn *Nguyễn Văn Luân*, GV THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương;** *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên;** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi;** *Mai Ngọc Tuyên*, *Hà Trọng Tài*, 10T6, THPT chuyên Bình Long, **Bình Phước.** Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 27 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2019.

BÀI TOÁN 27. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc $\widehat{KNE}$.*

ĐẬU CÔNG NHO

(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 502, T4.2019.

Bài 33 (Pi in the Sky, 12.2005). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A=\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{(m+1)(n+1)}$, *trong đó m, n là các số nguyên dương.*

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(m+1)(n+1)\le\frac{(m+n+2)^2}{4},$$

suy ra: $$\frac{1}{(m+1)(n+1)}\ge\frac{4}{(m+n+2)^2}.$$

Do đó: $$A=A_{m,n}=\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{(m+1)(n+1)}\le\frac{1}{m+n+1}-\frac{4}{(m+n+2)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n$.

Đặt $k=m+n+2$. Khi đó có thể kiểm tra rằng $f(k)=\frac{1}{k-1}-\frac{4}{k^2}$ là hàm số giảm với $k\ge 6$, hay với $m+n\ge 4$.

Chú ý rằng: $A_{1,1}=A_{1,2}=A_{2,1}=\frac{1}{12}=0,08(3)$;

$A_{3,1}=A_{1,3}=0,075$; $A_{2,2}=\frac{4}{45}=0,0(8)\Rightarrow A_{m,n}\le\frac{4}{45}$

với $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Vậy $\max\limits_{m,n\in\mathbb{N}^*}A_{m,n}=\frac{4}{45}$.

Nhận xét. Bài toán đơn giản nhưng hay. Có hai bạn làm đúng bài này, đó là các bạn: *Hà Trọng Tài*, 10T6, THPT chuyên Bình Long, **Bình Phước**; *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.7.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 35. *Cho $a_2,a_3,\ldots,a_n$ là $n-1$ số thực dương thỏa mãn $a_2a_3\ldots a_n=1$. Chứng minh rằng:*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n>n^n.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(*SV K61, ngành SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)

SỬ DỤNG VECTƠ ĐƠN VỊ ...

(*Tiếp theo trang 30*)

III. Một số bài tập

Bài tập 1. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By. Hai điểm M và N chuyển động trên Ax và By tương ứng.

a) Giả sử $\frac{AM}{BN}=k$ cho trước $(k>0)$. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng MN luôn chạy trên một nửa đường thẳng cố định.

b) Giả sử Ax và By chéo nhau, điểm M và N chuyển động tự do trên Ax và By tương ứng. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng MN luôn thuộc một góc phẳng cố định.

Bài tập 2. Cho khối tứ diện $ABCD$, các điểm M, N, P, Q lần lượt di chuyển trên các cạnh AB, BC, CA và DA tương ứng. Giả sử ta luôn có $AM=BN=CP=DQ$. Tìm quỹ tích trọng tâm của hệ bốn điểm $\{M, N, P, Q\}$.

Bài tập 3. Trong không gian cho tam giác ΔABC với $A(0;0;0), B(3;4;0)$ và $(3;16;5)$.

a) Viết phương trình các đường phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$ của ΔABC.

b) Tìm tọa độ tâm các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc B của ΔABC.

Bài tập 4. Cho ba đường thẳng phân biệt tùy ý a, b và c. Tìm quỹ tích trọng tâm của tam giác ABC mà A, B và C thay đổi trên a, b và c tương ứng.

GIẢI ĐÁP: ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ!

(*Đề đăng trên TH&TT số* 500, *tháng* 2 *năm* 2019)

Phân tích và đáp án. Cách giải 1 theo quy tắc 2 là đúng. Cách giải 2 sai bởi khẳng định: "*Hàm số $f(t)$ không có cực trị suy ra $f(x)$ không có cực trị*" là không đúng. Lời giải 2 sử dụng định lý cơ sở của quy tắc 1 nhưng học sinh này đang xét dấu đạo hàm của hàm số theo biến mới chứ không phải hàm ban đầu. Vì hàm ban đầu có $f'(x)=f'(t).t'(x)$ nên dấu của $f'(x)$ không chỉ phụ thuộc vào dấu của $f'(t)$ mà còn phụ thuộc vào dấu của $t'(x)$. Trong trường hợp này $t'(x)=2\cos 2x$ không mang dấu cố định. Mở rộng, để khẳng định trên là đúng ta cần thêm điều kiện hàm $t'(x)>0$. Khi đó dấu của $f'(x)$ là dấu của $f'(t)$.

Nhận xét. Một số bạn tham gia bài này nhưng phát hiện không đúng sai lầm.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU!

Trong đề ôn tập chuẩn bị kỳ thi THPT quốc gia năm 2019, có một bài toán trắc nghiệm như sau:

Trong mặt phẳng Oxy cho đồ thị hai hàm số $y=(\sqrt{3})^x$ (C_1) và $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (C_2). Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên đồ thị (C_1) và (C_2), với A có hoành độ lớn hơn 1, sao cho tam giác OAB đều. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** $9\sqrt{3}$.

Khi chấm điểm và kiểm tra các lỗi sai, ngạc nhiên là hầu hết các em đều làm sai ở câu này, với đáp án chọn là A. Để biết lỗi sai ở đâu, thầy giáo yêu cầu một học sinh khá (giải được câu này chứ không phải chọn ngẫu nhiên) lên bảng giải và cùng phân tích cho cả lớp.

Lời giải của bạn đó như sau:

Do hai đồ thị (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua trục tung, tam giác OAB đều nên $OA=OB$, do đó hai điểm A, B cũng đối xứng nhau qua trục tung. Chú ý rằng $\left(\frac{1}{b}\right)^{-x}=b^x$, gọi hai điểm $A(a;(\sqrt{3})^a)$ và $B\left(-a;(\sqrt{3})^a\right)$. Khi đó $H(0;(\sqrt{3})^a$ là trung điểm AB và $AB=2a$. Do tam giác OAB đều nên $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Rightarrow(\sqrt{3})^a=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a\Rightarrow(\sqrt{3})^{a-1}=a$ (1). Nhận thấy ngay phương trình (1) có nghiệm $a=1$, và tính được $AB=2$ nên diện tích tam giác ABC là $\frac{\sqrt{3}}{4}.2^2=\sqrt{3}$. Trong bốn đáp án có đáp án A trùng với kết quả. Vậy A là phương án cần chọn.

Theo bạn thì lời giải trên sai ở đâu ? Lời giải đúng là thế nào?

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

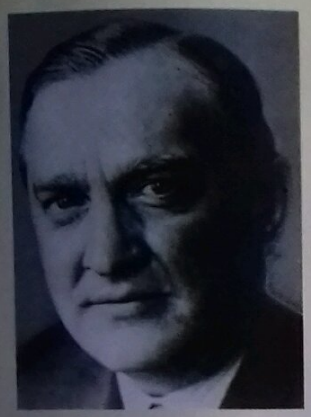
XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 504 (6.2019)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

BẠN CÓ BIẾT!

NHÀ TOÁN HỌC STEFAN BANACH



Stefan Banach (1892 – 1945)

Cho đến ngày nay, chưa ai hiểu lai lịch thời niên thiếu của nhà Toán học nổi tiếng thế giới có nguồn gốc Ba Lan này. Ông đã bị mẹ đẻ bỏ rơi từ nhỏ, và mẹ ông là ai, cũng không có người nào biết. Theo nhà Toán học *Steinhaus* (người Ba Lan, cùng thời với *Banach*) thì *Banach* có người cha tên là *Greczek* và họ *Banach* của ông xuất xứ từ họ mẹ được cho là một người đầy tớ gái hoặc người giặt là của một gia đình Ba Lan khá giả nào đó.

Sau khi *Banach* học xong Đại học Bách khoa Lwów thì ông làm bạn với giáo sư *Steinhaus* cùng một số nhà toán học khác như *Mazur*, *Nikodym*, *Ulam*, *Schauder* để hình thành trường phái toán học Ba Lan. Cách làm việc của trường phái Toán học Ba Lan này rất độc đáo: *Stefan Banach* chủ trương mọi người tha hồ phát biểu ý kiến, thường là quanh cốc cà phê ở tiệm "Cà phê Scotland" (Kawiarna Szkocka). Những ý tưởng đầu tiên về giải tích hàm xuất hiện từ đó. Một lần nữa, *Banach* cùng *Steinhaus* sáng lập Tạp chí Toán học Ba Lan nổi tiếng **Studia mathematica**. Năm 1919 ông dạy ở Đại học Bách khoa Lwów và năm 1927 ông được bổ nhiệm làm Giáo sư trường Đại học Tổng hợp Lwów. Sau khi Lwów thuộc về lãnh thổ Liên Xô, ông vẫn tiếp tục công tác nghiên cứu mà không gặp trở ngại gì. Năm 1941, thành phố Lwów bị phát xít Đức chiếm đóng, nhiều đồng nghiệp của ông bị bắt bớ, tù đày, riêng ông bị đưa vào Viện nghiên cứu Vi khuẩn, chuyên lo nuôi chấy. Chiến tranh thế giới thứ hai kết thúc, ông trở về Ba Lan, được bổ nhiệm làm Giáo sư Đại học Cracovie nhưng ông bị ung thư phổi và mất trước khi chính thức nhận nhiệm vụ.

Stefan Banach là một trong những người sáng lập môn Giải tích hàm. Năm 1920 ông đưa ra khái niệm **không gian vectơ định chuẩn**, đồng thời các nhà toán học như *Riesz*, *Hahn* và *Wiener* cũng đưa ra những định nghĩa tương tự, nhưng theo theo nhận định thời bấy giờ có lẽ công trình của *Banach* được đánh giá là tốt nhất. Ông đưa ra và nghiên cứu về các **toán tử liên tục**. Ông còn chứng minh rằng: *Sự liên tục của chúng tương đương với sự tồn tại hằng số K sao cho với mọi x,* $\|F(x)\| \le K\|x\|$ và ông còn đưa ra nhận xét: *Nếu* (F_n) *là một dãy các toán tử liên tục hội tụ đơn về F thì F là một toán tử liên tục.*

Năm 1929, *Banach* đưa ra khái niệm **đối ngẫu tôpô**, điều này tổng quát hóa các hệ thức của *Riesz* về các không gian L^p và L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Cũng thời kỳ này, ông tổng quát hóa một định lí của *Hahn* và do đó sau này người ta gọi định lí này là **định lí Hahn - Banach**. Ông còn tổng quát hóa kết quả của *Baire* vào các không gian metric đủ. Điều này giúp ông chứng minh được điều lí thú mà ngày nay ta gọi là **định lí về đồ thị khép kín**. *Banach* còn quan tâm đến bài toán đo phổ dụng của nhà toán học Đức *Hausdorff* phát biểu như sau: *Một ánh xạ* μ *xác định trên phần giới nội của* $\mathbb{R}^n$, *bất biến qua các phép tịnh tiến và quay đồng thời thỏa mãn* $A \cap B = \Phi$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, *là không thực hiện được với* $n \ge 3$. *Banach* đã dựng được một ánh xạ như vậy với $n = 1$ và $n = 2$. Năm 1923, cùng với *Tarski*, ông xây dựng được một nghịch lí gọi là **nghịch lí Banach-Tarski**, nghịch lí này nói rằng: *Một hình cầu trong không gian Euclid 3 chiều có thể chia thành hữu hạn các phần nhỏ, mà sau đó ghép các phần này lại được hai hình cầu có cùng kích thước với hình cầu ban đầu* và đó là một trong những ứng dụng đầu tiên của **Tiên đề chọn** vào Giải tích.

Ông có nhiều những sáng tạo trong Toán học nói chung và giải tích nói riêng, tuy nhiên ông ít qua tâm đến vấn đề công bố mà ông thường tìm cách hoàn thiện các kết quả đã có. Ông có nhiều công lao trong việc đào tạo những nhà toán học Ba Lan trẻ thuộc thế hệ giữa hai thế chiến.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT *(Hà Nội)*

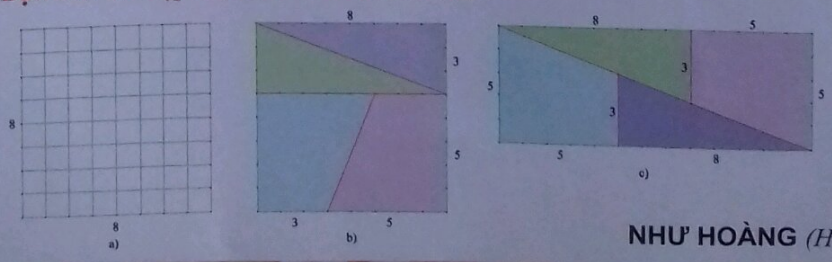
ĐỐ VUI !

LẠ THẾ NHỈ : 64 = 65 ?

Cho hình vuông a) với kích thước 8 × 8. Bây giờ ta chia hình vuông đó thành 2 tam giác vuông và 2 hình thang vuông như hình b). Ghép các tam giác vuông và hình thang vuông này lại ta được hình chữ nhật c). Hình vuông ban đầu có diện tích: 8 × 8 = 64. Hình chữ nhật c) có diện tích: 5 × 13 = 65.

Như vậy: 64 = 65!

Bạn cho biết lập luận trên sai từ đâu nhé ?



NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

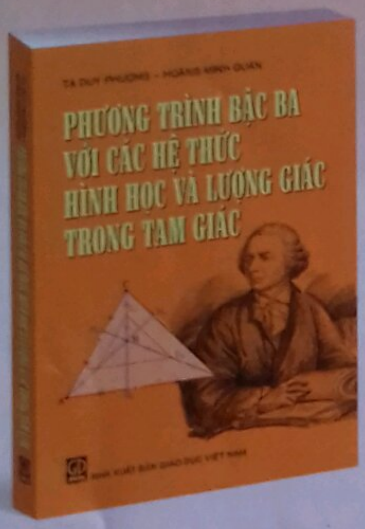
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT6M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng