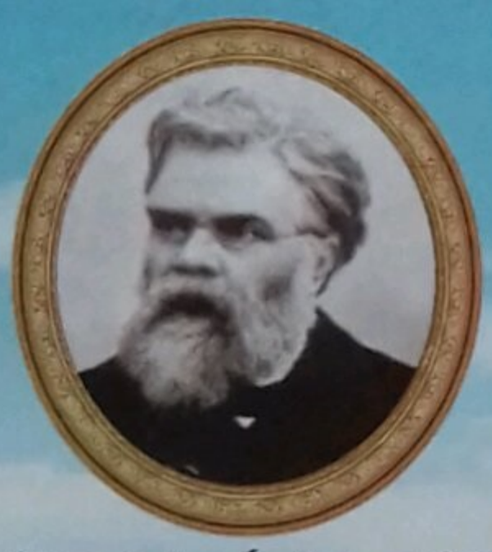
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2019
Số 503

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà toán học Émile Lemoine
(1840-1912)

Trường Đại học École Polytechnique (Pháp)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

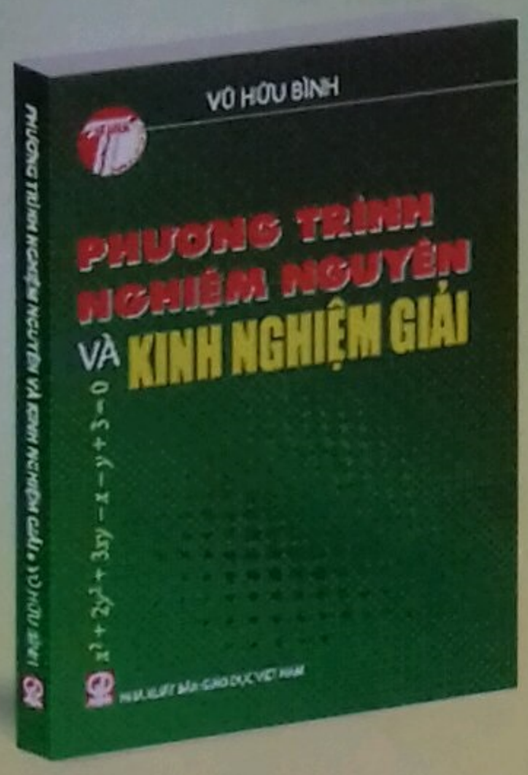
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat.*

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands.*

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

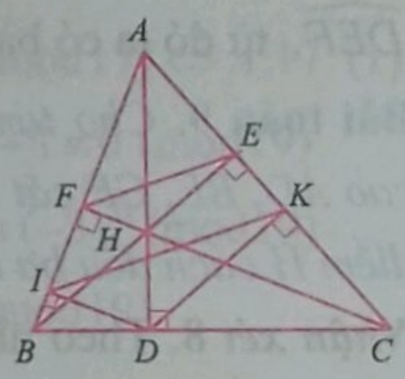
Có rất nhiều tính chất liên quan đến ba đường cao của tam giác, trong khuôn khổ bài viết này chúng ta sẽ khai thác một trong những tính chất đó thông qua bài toán cơ bản sau đây.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các cạnh AB và AC. Chứng minh rằng IK song song với EF.*

Lời giải. Ta có $HE \perp AC, DK \perp AC \Rightarrow HE \parallel DK$.

Theo định lí Thales có

$$\frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AD}.$$

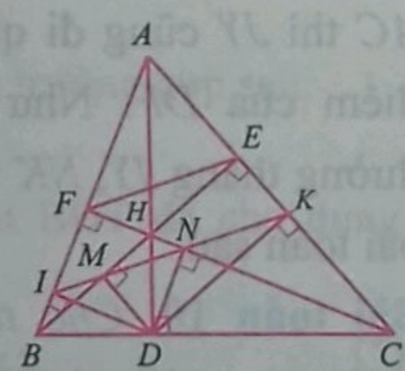


Tương tự

$$DI \parallel HF \Rightarrow \frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AD}.$$

Từ đó suy ra $\frac{AE}{AK} = \frac{AF}{AI} \Rightarrow EF \parallel IK$ (theo định lí Thales đảo).

Nhận xét 1. Nếu gọi M, N lần lượt là giao điểm của IK với BH và CH thì $IM \parallel EF$ nên theo định lí Thales ta có: $\frac{BI}{BF} = \frac{BM}{BE}$ (1)



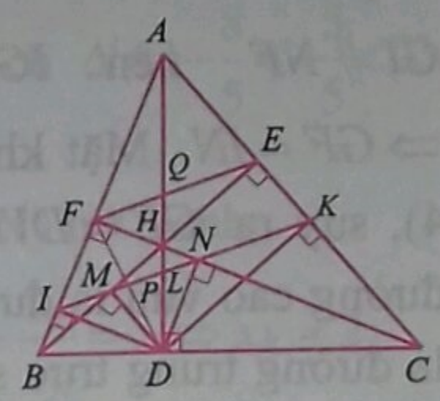
Mặt khác: $DI \parallel CF \Rightarrow \frac{BI}{BF} = \frac{BD}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) có $\frac{BD}{BC} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow MD \parallel CE$

$\Rightarrow MD \perp BE$, tương tự ta cũng chứng minh được $DN \perp CF$. Từ đó ta có bài toán sau:

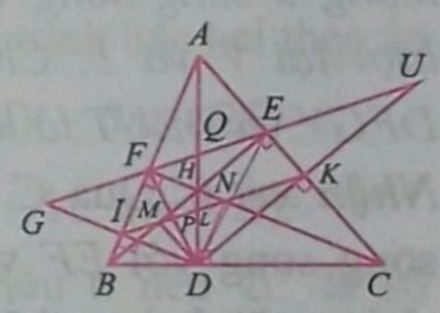
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K, M, N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng AB, AC, BE, CF. Chứng minh rằng bốn điểm I, M, N, K cùng nằm trên một đường thẳng.*

Nhận xét 2. Gọi $P = MK \cap DF$, $Q = EF \cap AD$, $L = IK \cap AD$, vì $DIFN$ là hình chữ nhật, nên $PF = PD$. Xét ΔDQF có: $PF = PD$ và $PL \parallel QF$ nên $LD = LQ$, từ đó ta có bài toán sau:



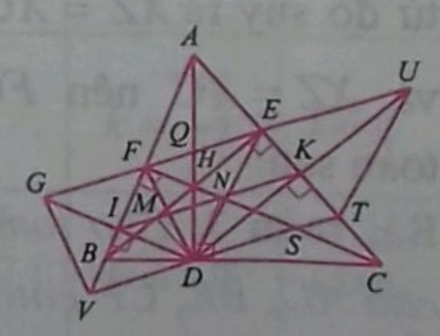
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng AB, AC và Q là giao điểm của EF và AD. Chứng minh rằng IK đi qua trung điểm của DQ.*

Nhận xét 3. Gọi G, U lần lượt là giao điểm của EF với DI và DK. Xét ΔDQU có: $LQ = LD$ và $LK \parallel QU$ nên ta có $KU = KD$. Xét ΔEDU có EK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔEDU cân tại E suy ra $ED = EU$. Tương tự $FD = FG$, từ đó ta có bài toán sau:



Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng AB, AC; gọi G, U lần lượt là giao điểm của EF với DI và DK. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF bằng độ dài đoạn thẳng GU.*

Nhận xét 4. Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC và HC lần lượt tại V, T và S. Xét tứ giác $DINS$ có: $DS \parallel IN$ và $DI \parallel NS$ nên tứ giác $DINS$ là hình bình hành, suy ra $DS = IN$. Tương tự tứ giác $DVIN$ cũng là hình bình hành suy ra $DV = IN$.



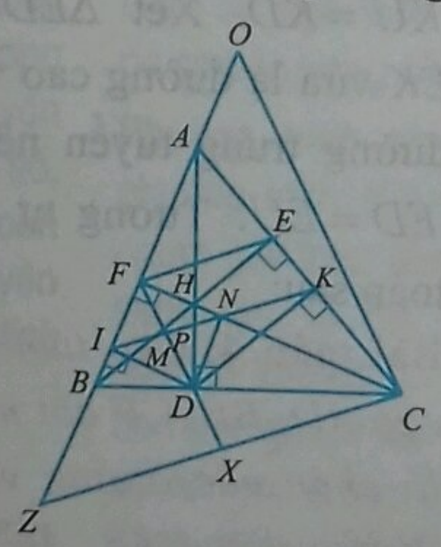
Do đó $DV = DS$, từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua D kẻ đường thẳng d song song với EF, d cắt các đường thẳng AB và HC lần lượt tại V và S. Chứng minh rằng $DV = DS$.*

Nhận xét 5. Xét tứ giác $IGFN$ có: $GF \parallel IN$ và $GI \parallel NF$ nên $IGFN$ là hình bình hành $\Rightarrow GF = IN$. Mặt khác $DV = IN$ (theo nhận xét 4), suy ra $GF = DV$. Xét ΔFGD có: FI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên FI cũng là đường trung trực suy ra $VG = VD$, kết hợp với $FD = FG$ suy ra tứ giác $DFGV$ là hình thoi. Tương tự $DEUT$ cũng là hình thoi, từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng AB, AC. Gọi G, U lần lượt là giao điểm của EF với DI và DK. Qua điểm D kẻ đường thẳng d song song với EF, d cắt AB và AC lần lượt tại V và T. Chứng minh rằng các tứ giác DFGV và DEUT là hình thoi.*

Nhận xét 6. Qua C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với EF và DF, chúng cắt đường thẳng AB lần lượt tại Z và O. Gọi X là giao điểm của DF và CZ. Vì $EF \parallel IK$ và $CZ \parallel EF$ nên $IK \parallel CZ$, theo hệ quả của định lí Thales ta có:



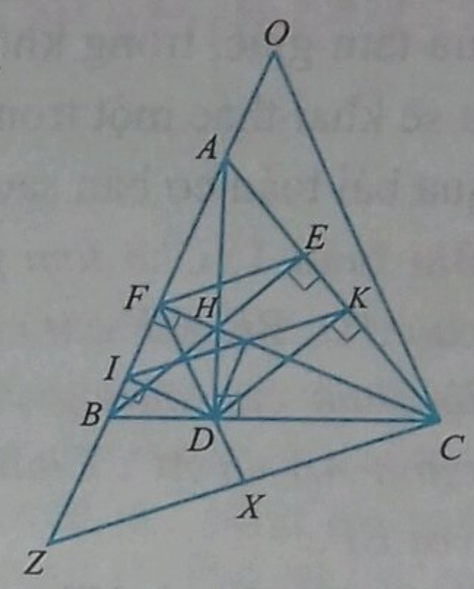
$$\frac{PI}{XZ} = \frac{PN}{XC}\left(= \frac{FP}{FX}\right).$$

Mà tứ giác $DIFN$ là hình chữ nhật nên $PI = PN$, từ đó suy ra $XZ = XC$. Xét ΔCZO có $FX \parallel CO$ và $XZ = XC$ nên $FO = FZ$. Từ đó ta có các bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua C kẻ đường thẳng song song với EF cắt đường thẳng AB tại Z. Chứng minh rằng FD đi qua trung điểm của CZ.*

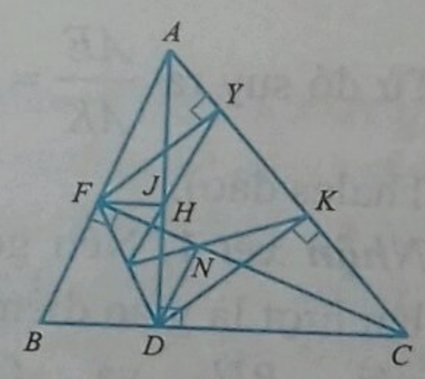
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua C lần lượt kẻ các đường thẳng song song với EF và DF, chúng cắt đường thẳng AB lần lượt tại Z và O. Chứng minh rằng F là trung điểm của OZ.*

Nhận xét 7. Vì tứ giác $DIFN$ là hình chữ nhật, nên $\widehat{PFN} = \widehat{PNF}$. Mà $EF \parallel IK$ nên $\widehat{EFN} = \widehat{PNF}$, do đó $\widehat{PFN} = \widehat{EFN}$, suy ra FH là tia phân giác của góc $\widehat{DFE}$. Tương tự ta có DH và EH lần lượt là tia phân giác của góc $\widehat{EDF}$ và góc $\widehat{DEF}$, từ đó ta có bài toán quen thuộc sau:



Bài toán 9. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng điểm H cách đều ba cạnh của tam giác DEF.*

Nhận xét 8. Theo nhận xét 2 thì ta có NK đi qua trung điểm của DF. Tương tự, nếu gọi J, Y lần lượt là hình chiếu của F trên AD và AC thì JY cũng đi qua trung điểm của DF. Như vậy ba đường thẳng JY, NK và DF đồng quy. Từ đó ta có bài toán sau:



Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nhọn với hai đường cao AD và CF cắt nhau tại H. Gọi N và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên CF và AC; J và Y thứ tự là hình chiếu của F trên AD và AC. Chứng minh các đường thẳng NK, JY và DF đồng quy.*

(Bài T4/473, Tạp chí TH&TT, tháng 11/2016).

Trên đây là một số kết quả được khai thác từ một tính chất liên quan đến ba đường cao của tam giác, rất mong các bạn tìm thêm được các kết quả khác từ tính chất này.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH, năm học 2018 - 2019

Câu 1. 1. a) ĐK: $a \neq b, a > 0, b > 0$.

$$T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

$$= \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}.$$

b) Xét $T > 1 \Leftrightarrow \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} > 1 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$.

BĐT trên đúng. Dấu "=" không xảy ra vì $a \neq b$. Vậy $T > 1$.

2. Đặt $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$. Ta có: $20 \equiv 3 \pmod{17}$

$$\Leftrightarrow 20^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{17}$$

$$16 \equiv -1 \pmod{17} \Leftrightarrow 16^{2k} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Do đó

$$A = 20^{2k} - 3^{2k} + 16^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow A \vdots 17 \quad (1)$$

Ta có: $20 \equiv 1 \pmod{19} \Leftrightarrow 20^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{19}$

$$16 \equiv -3 \pmod{19} \Leftrightarrow 16^{2k} \equiv (-3)^{2k} \pmod{19}$$

$$\Leftrightarrow 16^{2k} - 3^{2k} \equiv 0 \pmod{19}.$$

Do đó

$$A = 20^{2k} - 3^{2k} + 16^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow A \vdots 19 \quad (2)$$

Vì (17, 19) = 1 nên từ (1), (2) suy ra $A \vdots 17.19$. Vậy A chia hết cho 323.

Câu 2. 1. ĐK: $x \geq \frac{-8}{7}$. Xét hai trường hợp sau:

• Nếu $3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{3}$ thì BĐT đã cho đúng.

Kết hợp ĐK ta có: $\frac{-8}{7} \leq x \leq \frac{-2}{3}$. (*)

• Nếu $3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$ thì BĐT đã cho tương đương với $(3x+2)^2 \leq 7x + 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{9}$.

Kết hợp $x > \frac{-2}{3}$ ta có $\frac{-2}{3} < x \leq \frac{4}{9}$ (**). Kết hợp hai kết quả (*), (**) ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $\frac{-8}{7} \leq x \leq \frac{4}{9}$.

2. Đặt $t = x + y$ $(t \neq 0)$. PT(2) trở thành:

$$t + \frac{6}{t} = -5 \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ hoặc } t = -3.$$

- Với $t = -2 \Rightarrow x + y = -2$. PT(1) trở thành:

$$x + y - \frac{4(x+y)}{xy} = 3 \Leftrightarrow -2 + \frac{8}{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = \frac{8}{5}.$$

Theo định lý Viète, x và y là các nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 + 2X + \frac{8}{5} = 0$, có $\Delta' = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} < 0$: phương trình vô nghiệm.

- Với $t = -3 \Rightarrow x + y = -3$. PT(1) trở thành:

$$x + y - \frac{4(x+y)}{xy} = 3 \Leftrightarrow -3 + \frac{12}{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 2.$$

Theo định lý Viète, x và y là các nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 + 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X+2) = 0$ $\Leftrightarrow X = -1$ hoặc $X = -2$. Khi đó $x = -1, y = -2$ hoặc $x = -2, y = -1$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (-1; -2)$ hoặc $(x; y) = (-2; -1)$.

Câu 3. $(m-1)x^2 - 2(2m-3)x - 5m + 25 = 0$ (1)

• Nếu $m = 1$ thì (1) trở thành:

$$2x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \in \mathbb{Q} \text{ (thỏa mãn).}$$

• Nếu $m \neq 1$, thì (1) là phương trình bậc hai theo ẩn x. Ta có $\Delta' = (2m-3)^2 - (m-1)(-5m+25)$

$$= 9m^2 - 42m + 34 = (3m-7)^2 - 15 \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ nếu Δ' là số chính phương, tức là

$$\Delta' = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (3m-7)^2 - 15 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (3m-7)^2 - k^2 = 15 \Leftrightarrow (3m-7-k)(3m-7+k) = 15$$

Khi đó ta có bảng sau:

$\begin{cases} 3m-k-7=1 \\ 3m+k-7=15 \end{cases}$	$m=5$	$k=7$	Nhận
$\begin{cases} 3m-k-7=15 \\ 3m+k-7=1 \end{cases}$	$m=5$	$k=-7$	Nhận
$\begin{cases} 3m-k-7=3 \\ 3m+k-7=5 \end{cases}$	$m=\frac{11}{3}$	$k=1$	Loại
$\begin{cases} 3m-k-7=5 \\ 3m+k-7=3 \end{cases}$	$m=\frac{11}{3}$	$k=-1$	Loại
$\begin{cases} 3m-k-7=-1 \\ 3m+k-7=-15 \end{cases}$	$m=-\frac{1}{3}$	$k=-7$	Loại
$\begin{cases} 3m-k-7=-15 \\ 3m+k-7=-1 \end{cases}$	$m=-\frac{1}{3}$	$k=7$	Loại

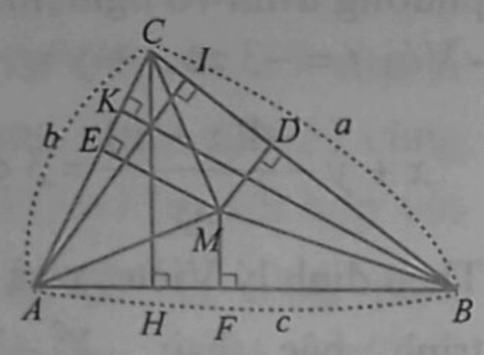
$\begin{cases}3m-k-7=-3\\3m+k-7=-5\end{cases}$	$m=1$	$k=-1$	Nhận
$\begin{cases}3m-k-7=-5\\3m+k-7=-3\end{cases}$	$m=1$	$k=1$	Nhận

Với $m=5$ thì (1) trở thành:

$$4x^2-14x=0 \Leftrightarrow x_1=0;\ x_2=\frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m=1;\ m=5$ thì phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ.

Câu 4. 1) Kẻ ba đường cao CH, AI, BK của tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các cạnh BC, CA, AB.



Đặt $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$.

Vì $AB\ge BC\ge CA \Leftrightarrow c\ge a\ge b$. Ta có:

$$CH.AB=AI.BC=BK.CA\ (=2S_{ABC}).$$

Do $AB\ge BC\ge CA$ nên $CH\le AI\le BK$. Vì điểm M thuộc miền tam giác ABC nên:

$$S_{MAC}+S_{MBC}+S_{MAB}=S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow ME.AC+MD.BC+MF.AB=CH.AB$$

$$\Leftrightarrow ME.b+MD.a+MF.c=CH.c.$$

Vì $c\ge a\ge b$ nên

$$ME.c+MD.c+MF.c\ge ME.b+MD.a+MF.c=CH.c$$

$$\Leftrightarrow (ME+MD+MF).c\ge CH.c$$

$$\Leftrightarrow ME+MD+MF\ge CH.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M trùng C. Vậy khi M trùng với C thì tổng các khoảng cách $(MD+ME+MF)$ từ M đến các cạnh tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất và bằng chiều cao CH của tam giác ABC.

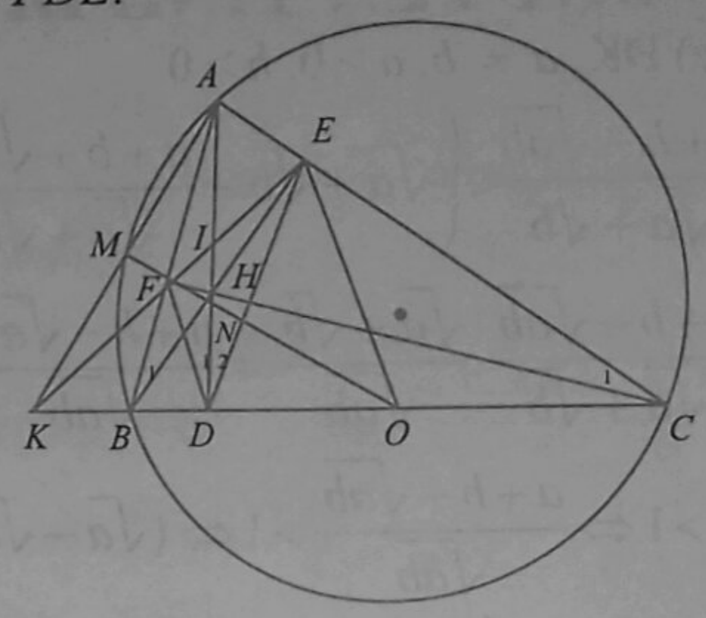
2. a) Ta có: $\widehat{BFH}+\widehat{BDH}=90^0+90^0=180^0$ nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{B_1}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{FH}\right)$ (1)

$\widehat{AFC}=\widehat{ADC}=90^0$ nên tứ giác $AFDC$ nội tiếp

$$\Leftrightarrow \widehat{C_1}=\widehat{D_1}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AF}\right) \quad (2)$$

$\widehat{CEH}+\widehat{CDH}=90^0+90^0=180^0$ nên tứ giác $CEHD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{C_1}=\widehat{D_2}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{HE}\right)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$. Vậy DA là phân giác góc FDE.



b)

Ta có DI là phân giác trong góc FDE của tam giác FDE nên $\frac{DF}{DE}=\frac{IF}{IE}$. (1)

$DK\perp DI$ nên DK là phân giác ngoài góc FDE nên

$$\frac{KF}{KE}=\frac{DF}{DE}. \quad (2)$$

Vì $MF\,//\,AE \Rightarrow \frac{KF}{KE}=\frac{MF}{AE}$ (3)

và $FN\,//\,AE \Rightarrow \frac{IF}{IE}=\frac{FN}{AE}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{MF}{AE}=\frac{NF}{AE}\Leftrightarrow MF=NF$.

Vậy F là trung điểm của MN.

c) Ta có: DA là phân giác góc EDF nên

$$\widehat{EDF}=2\widehat{EDH}=2\widehat{D_2}. \quad (1)$$

Tứ giác $HDCE$ nội tiếp nên $\widehat{D_2}=\widehat{C_1}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{EDF}=2\widehat{C_1}$. Mặt khác, tứ giác $EFBC$ nội tiếp đường tròn có tâm O nên $\widehat{EOF}=2\widehat{C_1}$. Do đó $\widehat{EDF}=\widehat{EOF}\Rightarrow$ tứ giác $EFDO$ nội tiếp. Vì $OE=OF$ nên

$$\widehat{OEF}=\widehat{EDO}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OF}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{OE}\right).$$

Mặt khác, $\widehat{EOD}$ là góc chung nên $\Delta ODE\sim\Delta OEK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OE}{OK}=\frac{OD}{OE}\Leftrightarrow OD.OK=OE^2$. (3)

Ta có:

$$BD.DC=(OB-OD).(OC+OD)=OB^2-OD^2. \quad (4)$$

$$OD.DK=OD.(OK-OD)=OD.OK-OD^2 \quad (5)$$

Thay (3) vào (5) ta có:

$$OD.DK=OE^2-OD^2=OB^2-OD^2. \quad (6)$$

☞

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM HỌC 2018 – 2019

Câu 1 (1,5 *điểm*). a) Cho các biểu thức

$$P(x)=\frac{5x-12\sqrt{x}-32}{x-16} \text{ và } Q(x)=x+\sqrt{x}+3.$$

Tìm số nguyên x_0 sao cho $P(x_0)$ và $Q(x_0)$ là các số nguyên, đồng thời $P(x_0)$ là ước của $Q(x_0)$.

b) Cho $t=\dfrac{x}{x^2-x+1}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ theo t.

Câu 2 (2 *điểm*). a) Cho parabol $(P): y=\dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y=\dfrac{11}{8}x-\dfrac{3}{2}$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và (d). Tìm tọa độ điểm C trên trục tung sao cho $CA+CB$ có giá trị nhỏ nhất.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\\ x^2+y^2+x+y-4=0\end{cases}.$$

Câu 3 (1,5 *điểm*). a) Xác định các giá trị của m để phương trình $x^2-2mx-6m-9=0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2x_2}=\frac{1}{3}.$$

b) Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2-x+1}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2}-\sqrt[3]{6x-3}=\sqrt[3]{2}.$$

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O, có ba đường cao là AD, BE, CF và trực tâm là H. Gọi M là giao điểm của AO với BC và P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc vẽ từ M đến AB, AC.

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Chứng minh $HE.MQ=HF.MP$.

c) Chứng minh $\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{DB}{DC}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Câu 5 (2 *điểm*). a) Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$\dfrac{1}{16x}+\dfrac{1}{4y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{49}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Cho số tự nhiên z và các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện $x+y+xy=1$. Tìm giá trị của x, y, z sao cho $(2^{z+1}+42)(x^2+y^2+1+x^2y^2)$ là số chính phương lớn nhất.

NGUYỄN TẤN TƯỜNG

(Phó Phòng phổ thông, Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế) ***giới thiệu***

☞ Từ (4), (6) suy ra $BD.DC=OD.DK$. Vậy

$$OD.OK=OE^2;\ BD.DC=OD.DK.$$

Câu 5. Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right](1^2+1^2)\ge\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2.$$

Thay $a+\dfrac{1}{b}=1$ và $b=\dfrac{1}{1-a}$ vào vế phải, ta có:

$$\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)\right]^2=\left(1+b+\frac{1}{a}\right)^2=\left(1+\frac{1}{-a^2+a}\right)^2$$

$$=\left[1+\frac{1}{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right]^2\ge\left(1+\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2=25.$$

Do đó

$$\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ ab=1\end{array}\right.$.

• Nếu $a=b$ thì $a+\dfrac{1}{a}=1\Leftrightarrow a^2-a+1=0$: PT vô nghiệm ($\Delta=-3<0$).

• Nếu $ab=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{b}=a$. Khi đó

$$a+a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$.

BÙI VĂN CHI

(21/2 Đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định) ***giới thiệu***

16th HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION, VIETNAM 2019

INDIVIDUAL CONTEST - JUNIOR SECTION

GROUP A

NGUYỄN VĂN MẬU
NGUYỄN MINH TUẤN
(Hội Toán học Hà Nội) giới thiệu

LỜI GIỚI THIỆU

Kỳ thi toán học Hà Nội mở rộng năm nay thu hút gần 700 học sinh tham dự, trong đó có 122 thí sinh Quốc tế. Các thí sinh được chia làm hai bảng: Bảng A dành cho thí sinh Quốc tế và một số thí sinh Hà Nội; bảng B dành cho thí sinh Hà Nội và 24 tỉnh, thành phố.

Bảng A của kỳ thi HOMC 2019 có tổng số 146 học sinh đến từ 14 Quốc gia và vùng lãnh thổ gồm: Indonesia, Malaysia, Nepal, Trung Quốc, Philippines, Hungary, Iran, Myanmar, Ba Lan, Tây Ban Nha, Đài Loan, Thái Lan, Các Tiểu vương Quốc Ả Rập thống nhất (UAE) và nước chủ nhà Việt Nam. Các thí sinh dự thi ở hai nội dung: cá nhân và đồng đội

Kết quả, Ban tổ chức đã trao 101 huy chương cá nhân, trong đó có 17 Huy chương Vàng. Ở nội dung đồng đội, đội Junior của Trung Quốc và đội Senior của Indonesia giành giải vô địch. Đội Junior của Việt Nam và Senior của Trung Quốc giành giải Nhất. Ngoài thành tích đồng đội, học sinh Việt Nam cũng giành 6 Huy chương Vàng cá nhân.

Kỳ thi toán học Hà Nội mở rộng năm 2019 do Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội phối hợp với Hội toán học Hà Nội tổ chức diễn ra từ ngày 3 đến ngày 5/4/2019 tại Hà Nội. Ngoài phần tranh tài ở nội dung cá nhân và đồng đội, các thí sinh trong nước và nước ngoài đã tham gia nhiều hoạt động tập thể bổ ích như thăm một số làng nghề truyền thống và điểm du lịch của Hà Nội; giao lưu văn hoá, nghệ thuật; trao đổi kinh nghiệm về việc học tập và nghiên cứu toán học.

JUNIOR SECTION (GROUP A)
1. QUESTION

(Time limit: 120 minutes)

Problem 1. Let x and y be positive real numbers. Which of the following expressions is larger than both x and y?

A. $xy+1$. **B.** $(x+y)^2$. **C.** x^2+y.
D. $x(x+y)$. **E.** $(x+y+1)^2$.

Problem 2. What is the last digit of $4^{3^{2019}}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6. **E.** 8.

Problem 3. Let a and b be real numbers and $P(x)=ax+b$ such that $P(2)-P(1)=3$. Compute the value of $P(5)-P(0)$.

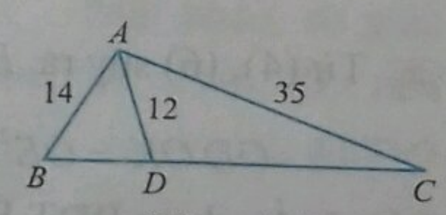
A. 11. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 17. **E.** 19.

Problem 4. How many ***connected subsequences*** (i.e, consisting of one element or consecutive elements) of the following sequence are there?

$$1,2,3,\ldots,99,100.$$

A. 1010. **B.** 2020. **C.** 3030. **D.** 4040. **E.** 5050.

Problem 5. Let ABC be a triangle and AD be the bisector of the triangle. Assume that $AB=14$ cm, $AC=35$ cm, $AD=12$ cm.



Which of the following is the area of the ΔABC, in cm^2?

A. $\frac{1176}{5}$. **B.** $\frac{1167}{5}$. **C.** 234. **D.** $\frac{1176}{7}$. **E.** 236.

Problem 6. What is the largest positive integer n such that $10\times11\times12\times\ldots\times50$ is divisible by 10^n?

Answer:.....

Problem 7. Let p and q be odd prime numbers. Assume that there exists a positive integer n such that $pq-1=n^3$. Express $p+q$ in terms of n.

Answer:.....

Problem 8. Let ABC be a triangle, and M be the midpoint of BC. Let N be the point on the segment AM with $AN = 3NM$, and P be the intersection point of the lines BN and AC. What is the area in cm^2 of the triangle ANP if the area of the triangle ABC is $40\,cm^2$?

Answer:.....

Problem 9. Let a and b be positive real numbers with $a > b$. Find the smallest possible values of

$$S = 2a + 3 + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}.$$

Answer:.....

Problem 10. For any positive integer n, let r_n denote the greatest odd divisor of n. Compute

$$T = r_{100} + r_{101} + r_{102} + \ldots + r_{200}.$$

Answer:.....

Problem 11. Find all integers x and y satisfying the following equation

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 6y - 3 = 0.$$

Problem 12. Given an expression $x^2 + ax + b$ where a, b are integer coefficients. At any step one can change the expression by adding either 1 or -1 to only one of the two coefficients a, b.

a) Suppose that the initial expression has $a = -7$ and $b = 19$ Show your modification steps to obtain a new expression that has zero value at some integer value of x.

b) Starting from the initial expression as above, one gets the expression $x^2 - 17x + 9$ after m modification steps. Prove that at a certain step k with $k < m$, the obtained expression has zero value at some integer value of x.

Problem 13. Find all points inside a given eProblem uilateral triangle such that the distances from it to three sides of the given triangle are the side lengths of a triangle?

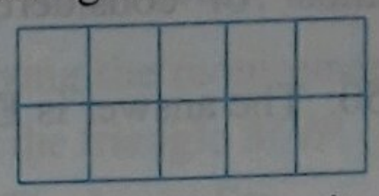
Problem 14. Let a, b, c be non-negative real numbers satisfying $a + b + c = 3$.

a) If $c > \frac{3}{2}$, prove that $3(ab + bc + ca) - 2abc < 7$.

b) Find the greatest possible value of

$$M = 3(ab + bc + ca) - 2abc.$$

Problem 15. Given a 2×5 rectangle is divided into unit squares as the figure below.



How many ways are there to write the letters H, A, N, O, I into all of the unit squares such that two *neighbor squares* (the squares with a common side) do not contain the same letters?

Note: Each unit square is filled by only one letter. Each letter may be used several times or not used as well. For example, the following is satisfied

H	A	N	O	I
A	N	A	H	A

2. JUNIOR SECTION'S ANSWERS AND SOLUTION

Problem 1. We have $(x+y+1)^2 > x+y+1$

(because $x+y+1>1,\ \forall x, y > 0$)

$\Rightarrow (x+y+1)^2 > x+y+1 > x+y$

$\Rightarrow (x+y+1)^2 > x$ and $(x+y+1)^2 > y$.

For the other answers

- $xy+1 < x$ if $x = 4$ and $y = \frac{1}{2}$
- $(x+y)^2 < x$ if $x = \frac{1}{2}$ and $y = \frac{1}{10}$
- $x^2 + y < x$ if $x = \frac{1}{2}$ and $y = \frac{1}{10}$
- $x(x+y) < y$ if $x = \frac{1}{10}$ and $y = \frac{1}{2}$.

The answer is **E.**

Problem 2. Clearly,

$$3 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2019} \equiv (-1)^{2019} \equiv -1 \pmod 4$$

$$\Rightarrow 3^{2019} = 4k + 1 (k \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\Rightarrow 4^{3^{2019}} = 4^{4k+1} = 4 \times 16^{2k} \equiv 4 \times 6^k \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}.$$

The last digit of $4^{3^{2019}}$ is 4. The answer is **C.**

Problem 3. From

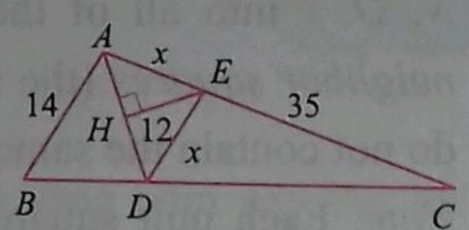
$P(2) - P(1) = 3 \Rightarrow (2a+b) - (a+b) = 3$

$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow P(x) = 3x + b \Rightarrow P(5) - P(0) = 15.$

The answer is **C**.

Problem 4. Note that for $n = 1,2,...,100$ there are exactly n connected subsequences ending with n, so the total number of considered subsequences equals $\sum_{n=1}^{100} n = 5050$. The answer is **E**.

Problem 5. Draw $DE \parallel AB$ $(E \in AC)$. We can prove that ΔADE is an isosceles triangle at E. Let $DE = x \Rightarrow CE = 35 - x$.



By Thales's Theorem:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow \frac{x}{14} = \frac{35-x}{35} \Leftrightarrow x = 10.$$

It follows that $HE = 8 \Rightarrow S_{\Delta AED} = \frac{1}{2}.8.12 = 48.$

On the other hand,

$$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{2}{7} \Rightarrow S_{\Delta AED} = \frac{2}{7}.S_{\Delta ADC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{7} \Rightarrow S_{\Delta ADC} = \frac{5}{7}.S_{\Delta ABC} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow S_{\Delta AED} = \frac{10}{49} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{49}{10}.48 = \frac{1176}{5}.$$

The answer is **A**.

Problem 6. The power of 5 in the prime factorisation of $10 \times 11 \times 12 \times ... \times 50$ is 11.

The answer is 11.

Problem 7. By assumption, observe that

$$pq = n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1).$$

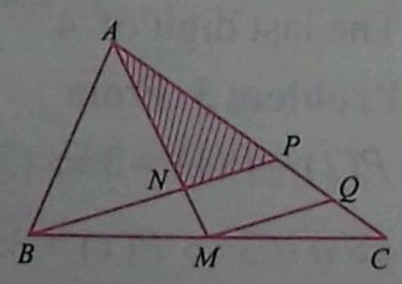
Since $p, q > 2$, it follow that $n \geq 2$ and therefore $n+1, n^2 - n + 1 > 2$, we obtain

$$\begin{cases} q = n+1 \\ p = n^2 - n + 1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} q = n^2 - n + 1 \\ p = n+1 \end{cases}$$

Therefore $p + q = n^2 + 2$. The answer is $n^2 + 2$.

Problem 8. Because M is midpoint of BC so

$$S_{AMB} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 20\,\text{cm}^2$$



Draw $MQ \parallel NP$. Because M is midpoint of BC so

$$PQ = QC.$$

And because $AN = 3NM$ so

$$AP = 3PQ \Rightarrow \frac{QC}{AC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MQC}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S_{MQC} = 4\,\text{cm}^2 \Rightarrow S_{AMQ} = 16\,\text{cm}^2.$$

On the other hand, $AN = 3NM \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{3}{4}$ and

$$NP \parallel MQ \Rightarrow \frac{S_{ANP}}{S_{AMQ}} = \left(\frac{AN}{AM}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{ANP} = 9\,\text{cm}^2.$$

The answer is 9cm^2.

Note. We can use Menelaus's Theorem. Using Menelaus's Theorem for ΔAMC:

$$\frac{PA}{PC}.\frac{BC}{BM}.\frac{NM}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{3}{2}$$

Then we have:

$$\frac{S_{\Delta ANP}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{AN}{AM}.\frac{AP}{AC} = \frac{3}{4}.\frac{3}{5} = \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ANP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{9}{40}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ANP} = 9\,\text{cm}^2.$$

Problem 9

$$S = 2(a-b) + \frac{1}{2}(2b+3) + \frac{1}{2}(2b+3) + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{2(a-b) \times \frac{1}{2}(2b+3) \times \frac{1}{2}(2b+3) \times \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}} = 8.$$

The "=" happens when $a = \frac{3}{2}; b = \frac{1}{2}$.

The answer is 8.

Problem 10. Since r_n is the greatest odd divisor of n

$$\Rightarrow \begin{cases} r_n \leq n \\ n = 2^{x_n} r_n \ (r_n \in \mathbb{Z}, r_n \geq 0) \end{cases}.$$

If $m > n$ and $r_m = r_n \Rightarrow m \geq 2n$.

Because $200 < 2 \times 101 \Rightarrow r_{101}, r_{102}, r_{103}, ..., r_{200}$ are 100 distinct odd numbers and they do not exceed 200. We note that from 1 to 200, there are exactly 100 odd numbers : $1,3,5,...,199$. So, $(r_{101}, r_{102}, r_{103}, ..., r_{200})$ is a permutation of $1,3,5,...,199$. Therefore

$$r_{101} + r_{102} + r_{103} + ... + r_{200} = 1 + 3 + 5 + ... + 199 = 100^2$$

$\Rightarrow T = r_{100} + 100^2 = 10025$. The answer is 10025.

Note. It the answer is 10000, student get 5 point for this question.

Problem 11. $x^2-2xy+5y^2+2x-6y-3=0$

$\Leftrightarrow (x-y+1)^2+(2y-1)^2=5 \Rightarrow (2y-1)^2 \le 5$.

Because $2y-1$ is odd $\left[\begin{array}{l}2y-1=-1\\2y-1=1\end{array}\right.$.

- $2y-1=-1 \Rightarrow \begin{cases}y=0\\(x-y+1)^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}$

- $2y-1=1 \Rightarrow \begin{cases}y=1\\(x-y+1)^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\end{cases}$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(1;0);(-3;0);(2;1);(-2;1)\}$.

Problem 12. a) For $a=-7, b=19$ we get the initial expression $P(x)=x^2-7x+19$. By adding -1 to b 19 times, we obtain the new expression $Q(x)=x^2-7x$ which has zero value at $x=7$.

b) The initial expression is $P(x)=x^2-7x+19$, and the new expression after m modification steps is

$$P_m(x)=x^2-17x+9.$$

Let $P_n(x)=x^2-a_nx+b_n$ be the expression obtained after n modification steps from the initial expression

$$P(x)=x^2-7x+19.$$

At the step $n+1$, if we change the coefficient b_n then $|P_{n+1}(x)-P_n(x)|=|b_{n+1}-b_n|=1$. And if we change the coefficient a_n then

$$|P_{n+1}(x)-P_n(x)|=|a_{n+1}-a_n||x|$$

Which gives $|P_{n+1}(1)-P_n(1)|=1$. Hence, we get either $P_{n+1}(1)=P_n(1)+1$ or $P_{n+1}(1)=P_n(1)-1$ But $P(1)=13>0$ and $P_m(1)=-7<0$ We conclude that there exists an integer $k<m$ satisfying $P_k(1)=0$.

Problem 13. Let ABC be the given equilateral triangle and T be a point satisfying the requirement of the problem. Let x,y,z be the distances from T to three sides of the triangle ABC then $x+y+z=h$, where h is the altitude of the triangle ABC. Therefore, x,y,z are the side lengths of a triangle if and only if $x,y,z<\frac{h}{2}$. Thus, T is inside the triangle MNP, where M,N,P are the midpoints of BC,CA,AB respectively, we conclude that all the points satisfying the requirement of the Problem is the interior of the triangle MNP.

Problem 14. a) The inequality

$$\Leftrightarrow M-7<0 \Leftrightarrow (3-2c)ab+3c(3-c)-7<0$$

If $3-2c<0 \Rightarrow (3-2c)ab \le 0$

$$\Rightarrow M-7 \le 3c(3-c)-7=-3\left(c-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \le -\frac{1}{4}<0$$

$$\Rightarrow M<7. \qquad (1)$$

b) If $3-2c \ge 0$

$$\Rightarrow (3-2c)ab \le (3-2c).\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(3-2c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow M-7 \le (3-2c).\left(\frac{3-c}{2}\right)^2+3c(3-c)-7$$

$$=\frac{-(c-1)^2(2c+1)}{4} \le 0 \Rightarrow M \le 7 \qquad (2)$$

From (1) and (2) we have $M_{\max}=7$, and the "=" happens when $a=b=c=1$.

Problem 15. Let $G(i,j)$ be the letter in the common unit square of i - *row* and j - *column*. We have 5 choices for $G(1,1)$ which are *H, A, N, O, I*. With each choice of $G(1,1)$, we have 4 choices for $G(2,1)$ and for each choice of $G(2,1)$, we also 4 choices for $G(2,2)$. Then, there are 13 choices for $G(1,2)$ and $G(2,2)$.

Indeed, for example, if $G(1,1)=H$, and $G(2,1)=A$, then $G(2,2) \in \{N,O,I,H\}$.

- If $G(2,2) \in \{N,O,I\}$, then there are 3 choices for $G(1,2)$.
- If $G(2,2)=H$, we have 4 choices for $G(1,2)$.

So there are $3\times3+4=13$ choices for the pair of $G(1,2)$ and $G(2,2)$. So, we have $5\times4=20$ ways for the first column, and 13 ways for each of the remain columns. Therefore, there are

$$20\times13^4=571220 \text{ ways.}$$

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐẶNG THANH HẢI

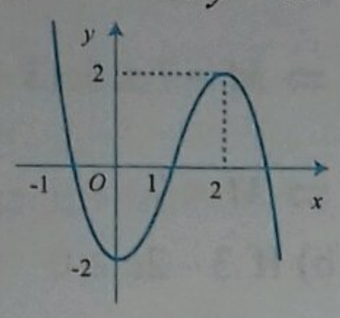
(GV THPT Triệu Quang Phục, Hưng Yên)

Câu 1. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y=\frac{3x+2018}{x-1} \text{ là}$$

A. $y=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(0;2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 3. Môđun của số phức $w=2-\sqrt{5}i$ là

A. $|w|=\sqrt{29}$. **B.** $|w|=1$. **C.** $|w|=\sqrt{7}$. **D.** $|w|=3$.

Câu 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x+2$. **B.** $y=x^3$.

C. $y=x^2-2x+5$. **D.** $y=\dfrac{x-2019}{x+2019}$

Câu 5. Cho khối lăng trụ có thể tích V, diện tích đáy là B và chiều cao h. Tìm khẳng định đúng.

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\sqrt{Bh}$.

C. $V=Bh$. **D.** $V=3Bh$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)>0,\forall x>0$. Biết e $\approx 2{,}718$, hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(e)-f(\pi)>0$.

B. $f(e)+f(\pi)<f(3)+f(4)$.

C. $f(e)+f(\pi)<2f(2)$

D. $f(1)+f(2)=2f(3)$.

Câu 7. Trong tất cả các loại hình đa diện đều sau, loại nào có số mặt nhiều nhất?

A. Loại $\{3;5\}$. **B.** Loại $\{5;3\}$.

C. Loại $\{4;3\}$. **D.** Loại $\{3;4\}$.

Câu 8. Một giải thi đấu bóng đá quốc gia có 16 đội thi đấu vòng tròn 2 lượt tính điểm. Hai đội bất kỳ đều đấu với nhau đúng 2 trận. Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua 0 điểm, nếu hòa mỗi đội được 1 điểm. Sau giải đấu, Ban tổ chức thống kê được 80 trận hòa. Hỏi tổng số điểm của tất cả các đội sau giải đấu bằng bao nhiêu?

A. 720. **B.** 560. **C.** 280. **D.** 640.

Câu 9. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ và $F(0)=1$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\ln 2+1$. **B.** $F(1)=\dfrac{1}{2}\ln 2+1$.

C. $F(1)=0$. **D.** $F(1)=\ln 2+2$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình dưới.

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=(3x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) qua điểm $M(2;3;5)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{18}{\sqrt{91}}$. **B.** $\dfrac{24}{\sqrt{91}}$. **C.** $\dfrac{16}{\sqrt{91}}$. **D.** $\dfrac{32}{\sqrt{91}}$.

Câu 13. Từ phương trình

$$\left(1+\sqrt{5}\right)(\sin x-\cos x)+\sin 2x-1-\sqrt{5}=0$$

ta tìm được $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$$

là phương trình mặt cầu.

A. $-5<m<1$. B. $m<-5$ hoặc $m>1$.

C. $m<-5$. D. $m>1$.

Câu 15. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=a, OB=b, OC=c$. Thể tích tứ diện $OABC$ là

A. $V=\frac{abc}{12}$. B. $V=\frac{abc}{4}$. C. $V=\frac{abc}{3}$. D. $V=\frac{abc}{6}$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3a, AD=a\sqrt{3}, AA'=2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

A. 60^0. B. 45^0. C. 120^0. D. 30^0.

Câu 17. Cho các số phức z, w thỏa mãn

$$|z-5+3i|=3,\ |iw+4+2i|=2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|3iz+2w|$.

A. $\sqrt{554}+5$. B. $\sqrt{578}+13$.

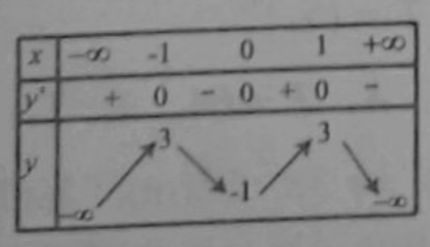
C. $\sqrt{578}+5$. D. $\sqrt{554}+13$.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=mx^3+nx^2+p$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $ab>0$. B. $mn<0$.

C. $m=0$ và $n\neq 0$. D. $\begin{cases} m=0; n\neq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=-2019$ tại bao nhiêu điểm?



A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ và có điểm cực đại là $M(2;3)$. Tính $Q=a+2b+c$.

A. $Q=0$. B. $Q=-4$. C. $Q=1$. D. $Q=2$.

Câu 21. Gọi

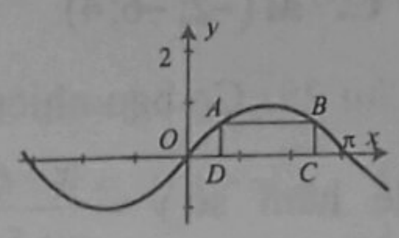
$$\int 2019^x dx = F(x)+C,$$

với C là hằng số. Khi đó hàm số $F(x)$ bằng

A. $2019^x \ln 2019$. B. $\frac{2019^{x+1}}{x+1}$.

C. $\frac{x2019^{x-1}}{\ln 2019}$. D. $\frac{2019^x}{\ln 2019}$.

Câu 22. Cho hai điểm A,B thuộc đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[0;\pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD=\frac{2\pi}{3}$ Độ dài của cạnh BC bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23. Tìm m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m\in(-\infty;0)$. B. $m\in\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)\setminus\{0\}$.

C. $m\in(0;+\infty)$. D. $m=0$.

Câu 24. Cho $\int_0^1 (x+2)e^x dx = ae+b\ (a,b\in ¤)$.

Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=-1$. B. $S=10$. C. $S=5$. D. $S=0$.

Câu 25. Một hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh là 9, 3, 4, 3, 4, 5, 9, 5, 9. Thể tích của khối lăng trụ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 46. B. 50. C. Không tính được. D. 54.

Câu 26. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp 12A ***không*** chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

A. Không có học sinh nào trong lớp 12A chấp hành luật giao thông.

B. Mọi học sinh trong lớp 12A đều chấp hành luật giao thông.

C. Có một học sinh trong lớp 12A chấp hành luật giao thông.

D. Mọi học sinh trong lớp 12A không chấp hành luật giao thông.

Câu 27. Đặt $a=\log_3 45$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{45} 5 = \frac{a+2}{a}$. B. $\log_{45} 5 = \frac{a-1}{a}$.

C. $\log_{45} 5 = \frac{2-a}{a}$. D. $\log_{45} 5 = \frac{a-2}{a}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(1;-1;2), C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

A. $M(-2;6;-4)$. B. $M(2;-6;4)$.

C. $M(-2;-6;4)$. D. $M(5;5;0)$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

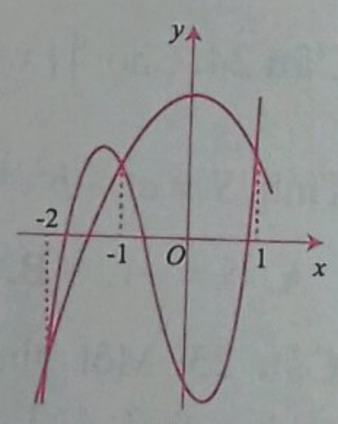
A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Câu 30. Tính diện tích S của mặt cầu có bán kính bằng $2a$.

A. $S = 16\pi a^2$. B. $S = 4\pi a^2$.

C. $S = \frac{32}{3}\pi a^3$. D. $S = \frac{16}{3}\pi a^2$.

Câu 31. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (xem hình vẽ). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. $a+b+c = d+e+4$. B. $b-d = -4$.

C. $c-e = 0$. D. $a+b+c = d+e$.

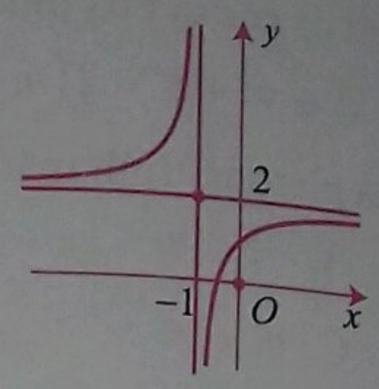
Câu 32. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2+1)x - m + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 9. Giá trị của S bằng.

A. $S = 5$. B. $S = 1$. C. $S = -5$. D. $S = -1$.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60^0. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 34. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các phương án A, B, C, D dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$. D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

Câu 35. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng, với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m và sau một giây thì nó đạt độ cao 8,5m; sau hai giây nó ở độ cao 6m. Hãy tìm công thức hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo của quả bóng theo thời gian t trong tình huống trên.

A. $h = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$. B. $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

C. $h = -4,9t^2 + 12,2t - 1,2$. D. $h = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Câu 36. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu diễn bởi công thức $v(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. B. 12. C. 31. D. 32.

Câu 37. Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$.

A. $T = 64$. B. $T = 32$. C. $T = 8$. D. $T = 16$.

Câu 38. Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

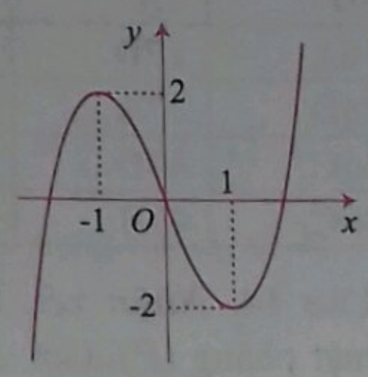
A. $2\pi a^2$. B. $8\pi a^2$. C. $4\pi a^2$. D. $16\pi a^2$.

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.

A. $y' = 2^{2x+2}\ln 4$. B. $y' = 4^{x+2}\ln 4$.

C. $y' = 2^{2x+2}\ln 16$. D. $y' = 2^{2x+3}\ln 2$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là:



A. $(-2;0]$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $[-2;0)$. **D.** Tập rỗng.

Câu 41. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+3$ có ba điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp.

A. $S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. **B.** $S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

C. $S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Câu 42. Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả như sau:

Bộ phim A: có 28 người đã xem.
Bộ phim B: có 26 người đã xem.
Bộ phim C: có 14 người đã xem.
Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B.
Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C.
Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C.
Có 2 người đã xem cả ba bộ phim A, B và C.
Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim A, B, C là:

A. 55. **B.** 45. **C.** 32. **D.** 51.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+2y-z-6=0$ và hai điểm $A(5;7;-3), B(-1;-2;0)$. Gọi M là giao điểm của AB và (P). Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1

Câu 44. Có 13 tấm thẻ phân biệt trong đó có một tấm thẻ ghi chữ ĐỖ, một tấm thẻ ghi chữ ĐẠI, một tấm thẻ ghi chữ HỌC và mười tấm thẻ đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên từ đó ra 7 tấm thẻ. Tính xác suất để rút được 7 tấm thẻ theo thứ tự: ĐỖ, ĐẠI, HỌC, 2, 0, 1, 9.

A. $\frac{1}{1260}$. **B.** $\frac{1715}{1716}$. **C.** $\frac{1}{A_{13}^7}$. **D.** $\frac{1}{1716}$.

Câu 45. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau ít nhất là bao nhiêu năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 150% số tiền gửi ban đầu?

A. 8 năm. **B.** 10 năm. **C.** 9 năm. **D.** 11 năm.

Câu 46. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P=6$. **B.** $P=2+3\sqrt{2}$.

C. $P=3+2\sqrt{2}$. **D.** $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Câu 47. Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được nhận 2 suất quà khác loại (ví dụ: 1chiếc áo và 1 thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em *Hải* và *Vũ*. Tính xác suất để hai em *Hải* và *Vũ* đó nhận được suất quà giống nhau?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 48. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA=a, OB=OC=2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 49. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AC=AD=BC=BD=a, CD=2x$, tìm giá trị của x theo a để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 50. Tính tổng

$$S=C_{2018}^0+\frac{1}{2}C_{2018}^1+\frac{1}{3}C_{2018}^2+\ldots+\frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}.$$

A. $\frac{2^{2018}-1}{2018}$. **B.** $\frac{2^{2019}-1}{2019}$. **C.** $\frac{2^{2018}-1}{2017}$. **D.** $\frac{2^{2019}-1}{2018}$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

1B	2B	3A	4A	5B	6D	7A	8A	9A	10B
11A	12D	13D	14B	15B	16A	17D	18A	19B	20D
21A	22A	23C	24A	25B	26D	27A	28A	29A	30C
31A	32C	33B	34A	35D	36C	37D	38C	39C	40A
41A	42C	43B	44B	45B	46C	47B	48B	49D	50B

Câu 3. Ta có

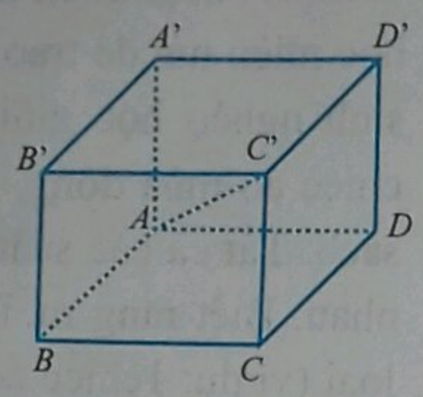
$P = \log_a(a^2.b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2 + 3\log_a b = 11.$

Chọn **A**.

Câu 4. Đặt $z = a + bi$ trong đó $a; b \in \mathbb{R} \Rightarrow M(a;b)$ là điểm biểu diễn của z. Có $\overline{z} = a - bi \Rightarrow N(a;-b)$

$\Rightarrow M, N$ đối xứng nhau qua trục Ox. Chọn **A**.

Câu 6. Ta có cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\dfrac{AC'}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.



Vậy thể tích khối lập phương là: $V = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$. Chọn **D**.

Câu 7. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (0;-1;-1)$. Chọn **A**.

Câu 8. G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\dfrac{1}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$ Chọn **A**.

Câu 10. Ta có

$\log_2(x+1) = 4 \Leftrightarrow x + 1 = 16 \Leftrightarrow x = 15$. Chọn **B**.

Câu 11. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $y_{CT} = 2$. Chọn **A**.

Câu 12. Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Chọn **D**.

Câu 13. Ta có

$$\int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + C.$$

Do $F(0) = 1 \Rightarrow C = 2$. Chọn **D**.

Câu 14. ***Nhận xét.*** Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P). Gọi $A(1;2;-3)$ là điểm thuộc đường thẳng d. Ta có:

$$d(d;(P)) = d(A;(P)) = \frac{|1 - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$ Chọn **B**.

Câu 15. Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$,

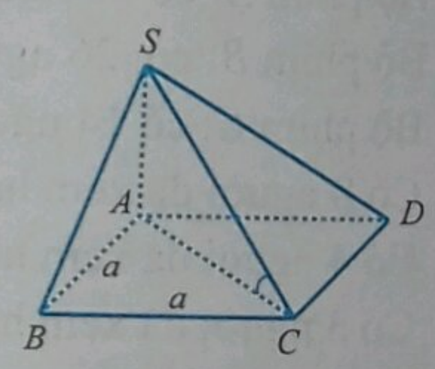
do $x \in [-1;3]$ nên chỉ nhận $x = 1$. $y(-1) = 14$; $y(1) = -2$; $y(3) = 30$. Vậy $\min\limits_{[-1;3]} y = -2$. Chọn **B**.

Câu 16. Ta có

$$f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x)\,dx = \int_1^2 (2x+1)\,dx = 4.$$ Chọn **A**.

Câu 17. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA} = 60^0$.

Vì đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.



Ta có

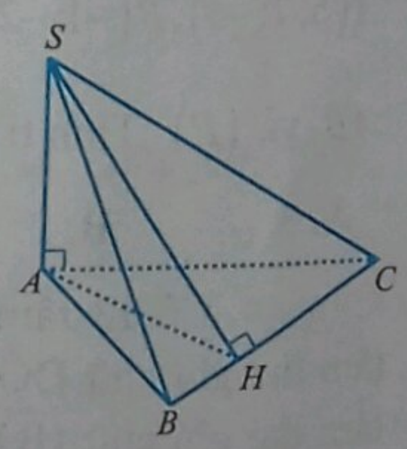
$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC}$$

$\Rightarrow SA = a\sqrt{2}.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. Chọn **D**.

Câu 18. Từ đồ thị ta thấy: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi $0 < m < 4$. Do m nguyên dương, nên $m = 1; 2; 3$. Tổng các giá trị của m là 6. Chọn **A**.

Câu 19. Ta có:



$$\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$$

$\Rightarrow BC \perp AH$. Chọn **B**.

Câu 20. Ta có

$a = \log_2 10 \Leftrightarrow \log_2 5 = a - 1$.

Do đó

$$\log_{16} 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 16} = \frac{3a-3}{4}.$$ Chọn **D**.

Câu 21. Vì a, b là số thực nên phương trình có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau. Do đó $\overline{z} = 1 + i$

cũng là một nghiệm của phương trình. Theo định lý Viète ta có: $-a = z + \overline{z} = 2 \Rightarrow a = -2;\ b = z.\overline{z} = 2$. Chọn **A.**

Câu 22. Ta có

$$\left(x - \frac{2}{x^3}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{12-k}.\left(-\frac{2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{12-4k}$$

Theo đề bài ta tìm hệ số của số hạng không chứa x nên $12 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy hệ số là $C_{12}^3(-2)^3 = -1760$. Chọn **A.**

Câu 23. Dựa vào BBT của hàm số ta thấy đồ thị của hàm số có 3 đường tiệm cận là $x = 1;\ x = -1$ và $y = -2$. Chọn **C.**

Câu 24. Ta có

$$4 = \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$$

$$\Rightarrow \int_0^2 [f(v) - 3]\,\mathrm{d}v = \int_0^2 f(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^2 3\,\mathrm{d}v = 7 - 6 = 1.$$

Chọn **A.**

Câu 25. Gọi $z = x + yi$ trong đó $x,\ y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|7z - \overline{z}| \le 10 \Leftrightarrow |6x + 8yi| \le 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} \le 1$$

$\Rightarrow (H)$ là hình elip $\Rightarrow S_{(H)} = \pi.\frac{5}{3}.\frac{5}{4} = \frac{25\pi}{12}\cdot$ Chọn **B.**

Câu 26. Ta có

$$\text{mp}(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Khi đó $d(O;(ABC)) = \dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{7}\cdot$ Chọn **D.**

Câu 27. Xét $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0;2]$. Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên [0; 2], suy ra

$$\max_{x\in[0;2]} g(x) = m + 2 \text{ và } \min_{x\in[0;2]} g(x) = m - 2.$$

Nếu $(m-2)(m+2) \le 0$ thì $a = \min\limits_{[0;2]} |g(x)| = 0$ nên $A.a = 0$, không thỏa mãn.

Nếu $(m-2)(m+2) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = m + 2,\ a = m - 2 \\ A = 2 - m,\ a = -m - 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A.a = |(m-2)(m+2)| = |m^2 - 4| = 12 \Rightarrow m = \pm 4$.

Chọn **A.**

Câu 28. Ta có: $4^x - (m+3).2^{x+1} + m + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow 4^x - 2(m+3).2^x + m + 9 = 0\ (1).$$

Đặt $t = 2^x$. Phương trình trở thành

$$t^2 - 2(m+3)t + m + 9 = 0\ (2).$$

• ***Cách* 1.** (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1,\ t_2$ lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 - 1 + t_2 - 1 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (m+9) > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ 2(m+3) > 2 \\ m + 9 - 2(m+3) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-5) \cup (0;+\infty) \\ m > -2 \\ m < 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

• ***Cách* 2.**

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = m.(2t - 1) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 6t + 9}{2t - 1}\cdot$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 6t + 9}{2t - 1}$ trên $(1;+\infty)$;

$$f'(t) = \frac{2t^2 - 2t - 12}{(2t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 < 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow 0 < m < 4$. Chọn **A.**

Câu 29.

$$(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - [(z^2 - 3z + 6) + (z^2 + 3z + 3)]z + (z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = z^2 - 3z + 6 \\ z = z^2 + 3z + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - 4z + 6 = 0 \\ z^2 + 2z + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \pm i\sqrt{2} \\ z = -1 \pm i\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Chọn **A.**

Câu 30. Gọi $R,\ h,\ l$ lần lượt là độ dài của bán kính đáy, đường cao và đường sinh của hình nón.

Đặt $R = x,\ h = x + d,\ l = x + 2d$. ĐK: $x > 0$.

Do $l > h$, nên ta có $d > 0$. Ta có:

$$l^2 = h^2 + R^2 \Leftrightarrow (x + 2d)^2 = (x + d)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xd - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{d}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -d \text{ (không thỏa mãn ĐK)} \\ x = 3d \text{ (thỏa mãn ĐK)} \end{array}\right..$$

Mặt khác: $S_{xq} = \pi Rl = \pi x.(x+2d) = 60\pi$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xd = 60 \Leftrightarrow 15d^2 = 60 \Leftrightarrow d = 2.$

Do đó $R = 6,\ h = 8$. Vậy thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}.\pi.6^2.8 = 96\pi.$$ Chọn **C.**

Câu 31. Từ đồ thị ta có $f'(x) = a(x+1)(x-1)^2$ với $a > 0$. Ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x-1)$

$$= a(2x+1)(x^2+x)(x^2+x-2)^2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$, trong đó $x = 1$ và $x = -2$ là nghiệm kép. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$. Chọn **A.**

Câu 32. Vì d tiếp xúc của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm A nên $f'(x_A)$ là hệ số góc của d và $f'(x_A)$ chính là hệ số góc cát tuyến của đồ thị hàm số $g(x) = 2x^2 - 3$. Do đó ta có

$$f'(x_A) = \frac{g(x_B) - g(x_A)}{x_B - x_A} = -\frac{5}{2}.$$ Chọn **C.**

Câu 33. Sau bốn năm kinh doanh, giá trị xe còn lại là $500 \times (1-0,1)^4 = 328,05$ triệu đồng. Số tiền thu được khi kinh doanh là $10 \times 48 = 480$ triệu đồng. Vậy sau bốn năm kinh doanh, tổng số tiền ông *Tuấn* có là $480 + 328,05 = 808,05$ triệu đồng nên số tiền lãi là $308,05$ triệu đồng. Chọn **B.**

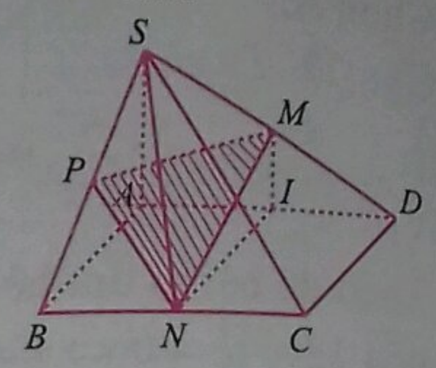
Câu 34. Tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^1 x^{2018} f(x)\,dx = f(x).\frac{x^{2019}}{2019}\Big|_0^1 - \frac{1}{2019}\int_0^1 x^{2019} f'(x)\,dx.$$

Mà theo giả thiết $f(1) = 0$ và $\int_0^1 x^{2018} f(x)\,dx = 2$ nên ta có $\int_0^1 x^{2019} f'(x)\,dx = -4038$. Chọn **A.**

Câu 35. Gọi P, I lần lượt trung điểm của SB và AD $\Rightarrow SC \parallel (PMN)$.

Vậy $d(SC, MN) = d(S,(PMN)) = \dfrac{3V_{SMNP}}{S_{\Delta MNP}}$. Ta có



$$PN = \frac{a\sqrt{6}}{2},\ PM = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$MN = \sqrt{MI^2 + NI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$\Rightarrow \Delta MNP$ cân tại M

$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{8}$. Mặt khác

$$\frac{V_{SMNP}}{V_{SDNB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNP} = \frac{1}{4}.V_{SDNB} = \frac{1}{12}.SA.S_{\Delta BND} = \frac{a^3}{24}.$$

Suy ra $d(SC, MN) = \dfrac{3V_{SMNP}}{S_{\Delta MNP}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{21}$. Chọn **D.**

Câu 36. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ $(H_1), (H_2), (H_3)$. Thể tích của khối trụ (H_1) là $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = V_3$. Thể tích của khối trụ (H_2) là

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi\left(\frac{1}{3}r_1\right)^2.h_2 = \frac{1}{9}\pi r_1^2 h_2.$$

Theo bài ra ta có

$$V_1 + V_2 + V_3 = 60\pi \overset{V_1 = V_3}{\Leftrightarrow} 2V_1 + V_2 = 60\pi$$

$$\Leftrightarrow 2.\pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{9}.\pi r_1^2 h_2 = 60\pi\ (*).$$

Mặt khác: $2h_1 + h_2 = 9 \Leftrightarrow h_2 = 9 - 2h_1$.

Lúc đó:

$$(*) \Leftrightarrow 2.\pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{9}.\pi r_1^2(9 - 2h_1) = 60\pi \Leftrightarrow \frac{16}{9}r_1^2 h_1 + r_1^2 = 60$$

$$\Leftrightarrow r_1^2\left(\frac{16}{9}h_1 + 1\right) = 60 \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{540}{16h_1 + 9}}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{540}{16h_1 + 9}} = \sqrt{\frac{60}{16h_1 + 9}}$$

Vậy $V_{(H_2)} = \pi r_2^2 h_2 = \pi.\dfrac{60(9 - 2h_1)}{16h_1 + 9}$. Chọn **C.**

Câu 37. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$, phương trình $(P): 2x - 3y + 4z + d = 0$. Mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại

$$D\left(-\frac{d}{2};0;0\right); E\left(0;\frac{d}{3};0\right); F\left(0;0;-\frac{d}{4}\right).$$

Thể tích tứ diện $OABC$: $V = \dfrac{1}{6}OD.OE.OF = \dfrac{|d^3|}{144}$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{|d^3|}{144}=\frac{3}{2}\Rightarrow d=\pm 6$. Vậy phương trình mp $(P): 2x-3y+4z\pm 6=0$. Chọn **D.**

Câu 38. Ta có $x_3-x_2=x_2-x_1 \Leftrightarrow x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$ và do đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành theo thứ tự tại ba điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng nên đồ thị hàm số nhận điểm $A(x_2;0)$ làm tâm đối xứng của đồ thị. Khi đó $\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x=\frac{S}{2}$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_2}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{S}{2}.$$

Suy ra: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{S}{2};\int_{x_2}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{S}{2}.$

Vì đồ thị của hai hàm số $y=f(x)+1$ và $y=-f(x)-1$ đối xứng với nhau qua trục hoành nên ta có: $S_1=2\int_{x_1}^{x_3}|f(x)+1|\mathrm{d}x=2\int_{x_1}^{x_3}[f(x)+1]\mathrm{d}x$

$$=2\int_{x_1}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x+2\int_{x_1}^{x_3}\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x\right]+2\int_{x_1}^{x_3}\mathrm{d}x$$

$$=2\left(\frac{S}{2}-\frac{S}{2}\right)+2(x_3-x_1)=4\sqrt{3}.$$ Chọn **C.**

Câu 39. Ta có $|z^2-2iz|=2$

$\Leftrightarrow |-(iz)^2-2iz-1+1|=2 \Leftrightarrow |(iz+1)^2-1|=2.$

Đặt $w=iz+1\Rightarrow |w^2-1|=2\Rightarrow$ tập các điểm biểu diễn hình học của số phức w^2 là đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R=2$. Lại có:

$$P=|iz+1|\Rightarrow P^2=|w|^2=|w^2|.$$

Suy ra $\max P^2=OI+R=3\Rightarrow \max P=\sqrt{3}$. Chọn **C.**

Câu 40. Xét mặt cắt bởi thiết diện đi qua trục của chiếc ly. Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ: Ta có điểm tiếp xúc của đường tròn và đồ thị $(C): y=2^x$ là điểm $A(2;4)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$d: y=4\ln 2(x-2)+4$ hay $4\ln 2\, x-y-8\ln 2+4=0$.

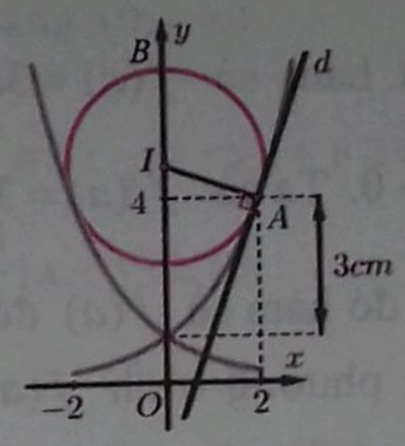
Khi đó tâm I của đường tròn bằng giao điểm của Δ và Oy với Δ là đường thẳng vuông góc với d tại A.

Ta có

$\Delta: x+4\ln 2.y$

$$-2-16\ln 2=0$$

$$\Rightarrow I\left(0;\frac{1+8\ln 2}{2\ln 2}\right).$$



Từ hình vẽ ta thấy:

$$y_B=y_I+IA=\frac{1+8\ln 2}{2\ln 2}+IA.$$

Suy ra thể tích chiếc ly: $V_{ly}=\pi\int_1^{y_B}(\log_2 y)^2\,dy.$

Thể tích bi: $V_{bi}=\frac{4}{3}\pi IA^3$. Thể tích nước:

$$V=V_{ly}-V_{bi}\approx 29,66\ \mathrm{cm}^3.$$ Chọn **A.**

Câu 41. Ta có

$$g'(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f'(2-\sqrt{x^2+1})-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\left[f'(2-\sqrt{x^2+1})+1\right].$$

Suy ra

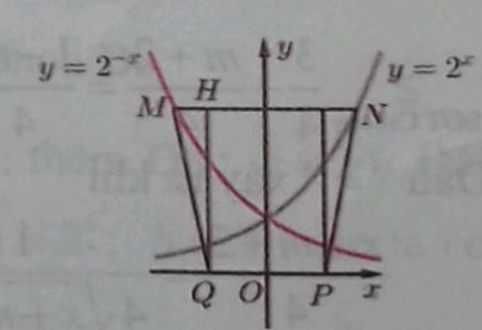
$$g'(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\left[(2-\sqrt{x^2+1})^2-2(2-\sqrt{x^2+1})+1\right]$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(1-\sqrt{x^2+1})^2.$$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)\ge 0\Rightarrow x\le 0$. Chọn **A.**

Câu 42. (*Đính chính*. Trong đề bài câu 42 này, đã viết: tứ giác $MNPQ$ có chu vi bằng 14, xin sửa là: tứ giác $MNPQ$ có chu vi bằng $9+\sqrt{265}$. Thành thật xin lỗi bạn đọc).

Ta có $MN \parallel PQ \parallel Ox$ nên



$y_M=y_N\Rightarrow 2^{x_M}=2^{-x_N}\Rightarrow$

$x_M=-x_N$. Gọi $M(-a;2^a)$

với $a>0\Rightarrow N(a;2^a)$.

$MN=2a$ và $PQ=a$.

Kẻ $QH\perp MN$. Suy ra $MH=\frac{MN-PQ}{2}=\frac{a}{2}$.

Xét tam giác ΔMQH vuông tại H, ta có:

$$MQ=\sqrt{MH^2+QH^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(2^a\right)^2}=\frac{\sqrt{4^{a+1}+a^2}}{2}.$$

Ta có chu vi của hình thang $MNPQ$ bằng $9+\sqrt{265}$.

nên: $MN+QP+2MQ=9+\sqrt{265}$

$$\Leftrightarrow 3a+\sqrt{4^{a+1}+a^2}=9+\sqrt{265}$$

$$\Leftrightarrow 3a+\sqrt{4^{a+1}+a^2}-9-\sqrt{265}=0.$$

Xét hàm số $f(a)=3a+\sqrt{4^{a+1}+a^2}-9-\sqrt{265}$ với $a>0$. Ta có: $f'(a)=3+\dfrac{4^{a+1}\ln 2+a}{\sqrt{4^{a+1}+a^2}}>0$ với $a>0$.

Do đó hàm số $f(a)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên phương trình $f(a)=0$ có tối đa một nghiệm. Mà $f(3)=0$ suy ra $a=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Với $a=3\Rightarrow MN=6$, $PQ=3$ và $QH=8$.

Vậy $S_{MNPQ}=\dfrac{MN+PQ}{2}.QH=\dfrac{6+3}{2}.8=36$ (đơn vị).

Chọn **C.**

Câu 43. Ta có $y'=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+m+2}}$. Hàm số $y=\dfrac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị khi $y'\ge 0$ với mọi $x>-m-2$ hoặc $y'\le 0$ với mọi $x>-m-2$.

Mặt khác dễ thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y'=+\infty$ cho nên điều kiện cần và đủ là: $y'\ge 0$ với mọi $x>-m-2$. Đặt $D=(-m-2;+\infty)$.

Do đó: $0\le \min\limits_{D}\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+m+2}}\right)$ với D là miền xác định của hàm số. Lại có:

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{2\sqrt{x+m+2}}=\left(\frac{x+m+2}{4}+\frac{1}{4\sqrt{x+m+2}}+\frac{1}{4\sqrt{x+m+2}}\right)-\frac{m+2}{4}$$

$$\underset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge}\frac{3}{4}-\frac{m+2}{4}=\frac{1-m}{4}.$$

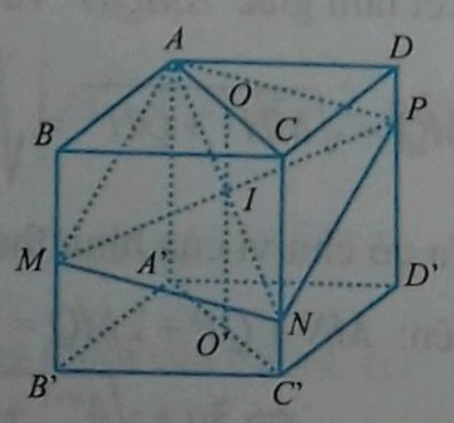
Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{x+m+2}{4}=\frac{1}{4\sqrt{x+m+2}}\Rightarrow x=-m-1\in D.$$

Suy ra: $0\le\dfrac{1-m}{4}\Leftrightarrow m\le 1$. Chọn **B.**

Câu 44.

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AC, $A'C'$ và I là giao điểm của OO' với MP. Khi đó N là giao điểm của CC' với AI.



Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $AMNP$ là hình bình hành và $CN=\dfrac{3}{4}CC'$. Từ đó suy ra $BM=a$, $CN=\dfrac{3a}{2}$, $DP=\dfrac{a}{2}$. Ta có

$$V_{AMNPBCD}=V_{A.BMNC}+V_{A.CNPD}.$$

$$V_{A.BMNC}=\frac{1}{3}AB\cdot S_{BMNC}=\frac{1}{3}AB\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot(MB+NC)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\left(a+\frac{3a}{2}\right)=\frac{5a^3}{3}.$$

$$V_{A.CNPD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{CNPD}=\frac{1}{3}AD\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot(CN+PD)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}\right)=\frac{4a^3}{3}.$$

Vậy $V_{AMNPBCD}=\dfrac{5a^3}{3}+\dfrac{4a^3}{3}=3a^3$. Chọn **B.**

Câu 45. Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó:

$$|z-4+3i|=3\Leftrightarrow(x-4)^2+(y+3)^2=9\ (C_1);$$

$$|z^2+3|=2|z+\bar{z}|\Leftrightarrow 2|2x|=\sqrt{(x^2-y^2+3)^2+(2xy)^2}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2=x^4+y^4+9-2x^2y^2+6x^2-6y^2+4x^2y^2$$

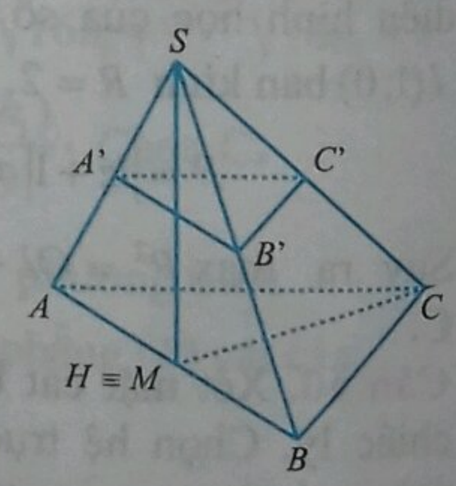
$$\Leftrightarrow(x^2+y^2-3)^2=4x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+y^2=4\ \ (C_2)\\(x+1)^2+y^2=4\ \ (C_3)\end{array}\right..$$

(C_1) là đường tròn có tâm $I(4;-3)$ bán kính $R_1=3$; (C_2) là đường tròn có tâm $J(1;0)$ bán kính $R_2=2$.

Vì $R_1+R_2=5>3\sqrt{2}=IJ>1=|R_1-R_2|$ nên (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm. (C_3) là đường tròn có tâm $K(-1;0)$ bán kính $R_3=2$.

Vì $R_1+R_3=5<2\sqrt{7}=IK$ nên (C_1) và (C_3) không có điểm chung. Chọn **B.**

Câu 46. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC), ta có:



$$SH=SC.\sin 60^0=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của ba cạnh SA, SB, SC, ta có: $A'B'\parallel AB$ nên tứ giác $A'B'BA$ là hình thang, mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu ngoại tiếp đa diện $A'B'C'.ABC$ theo một đường tròn ngoại tiếp hình thang $A'B'BA$. Do đó, hình thang $A'B'BA$ cân và $AA'=BB'$.

Tương tự: $CC' = BB' \Rightarrow AA' = BB' = CC'$ và $SA = SB = SC = 3\sqrt{2}$. Suy ra ΔSAB đều.

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là $x + 4y - z - 11 = 0$. Gọi M là trung điểm của AB

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{3}{2}\right); SM = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác $SH = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ và $SH \perp (ABC) \Rightarrow SM \equiv SH$

$\Rightarrow M \equiv H$ và mp(ABC) cố định đi qua M và nhận $2\overrightarrow{SM} = (1; -2; -7)$ làm vectơ pháp tuyến có PT: $x - 2y - 7z - 8 = 0$. Chọn **C.**

Câu 47. Đồ thị (C) và đường thẳng d có 3 điểm chung khi và chỉ khi d tiếp xúc với (C) tại 1 điểm và đồng thời cắt (C) tại 2 điểm phân biệt tiếp theo. Vì vậy giả sử hoành độ tiếp điểm là $x_1 = a$ khi đó ta có tiếp tuyến: $y = (4a^3 - 4a)(x - a) + a^4 - 2a^2$.

Hoành độ giao điểm:

$$x^4 - 2x^2 = (4a^3 - 4a)(x - a) + a^4 - 2a^2$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 2) = 0. \quad (1)$$

Điều kiện (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình $x^2 + 2ax + 3a^2 - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác a.

Do đó: $\begin{cases} \Delta' = 2 - 2a^2 > 0 \\ 6a^2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ a \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Khi đó theo định lý Viète:

$$x_2 + x_3 = -2a, \quad x_2x_3 = 3a^2 - 2.$$

Lại có:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3)$$
$$= 11a^3 - 12a.$$

Theo giả thiết thì

$$11a^3 - 12a = -1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{165}}{22}.$$

Kết hợp điều kiện ta thấy chỉ có duy nhất giá trị $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{165}}{22}$ thỏa mãn. Chọn **B.**

Câu 48. Từ giả thiết

$$\Rightarrow \log_2 x^2 + x^2 \geq \log_2(6x - xy) + 6x - xy \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t.\ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

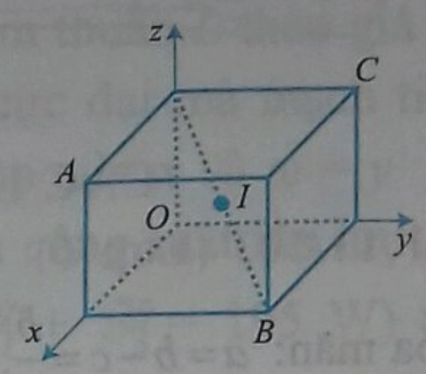
Do đó

$(1) \Leftrightarrow f(x^2) \geq f(6x - xy) \Leftrightarrow x^2 \geq 6x - xy \Rightarrow x + y \geq 6$.

Suy ra $P = \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{y}{2} + \frac{8}{y} + \frac{3}{2}(x + y) \geq 19$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$, $y = 4$. Chọn **B.**

Câu 49.



Dễ thấy tứ diện $ABCO$ nội tiếp mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$, đồng thời I cũng là trọng tâm của tứ diện $ABCO$. Ta có

$$MA = \frac{1}{\sqrt{14}}\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{IA}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{14}}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).\overrightarrow{IA}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \sqrt{14}.$$

Tương tự:

$$MB \geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \sqrt{14}, \; MC \geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + \sqrt{14},$$

$$MO \geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IO} + \sqrt{14}.$$

Cộng vế ta được

$$MA + MB + MC + MO \geq \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IO})$$
$$+ \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$.

Vậy $\Delta: \frac{x - 3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{-2}$. Chọn **D.**

Câu 50. (Bổ sung đề câu 50: thêm ĐK: $a \neq b$). Đặt $\log_a b = z$ thì $a^z = b$. Mà $a = 2^x$, $b = 2^y$ nên ta có $(2^x)^z = 2^{xz} = 2^y$, vì vậy $y = zx$.

Do $y \leq 25 \Rightarrow x \leq 12 \Rightarrow n(A) = \sum_{k=1}^{12}\left[\frac{25}{k} - 1\right] = 62$.

Hoặc ta có thể liệt kê các phương án có thể của x, y như sau: Với mỗi cách chọn y thì số cách chọn x chính là số ước số của y và không trùng với y. Do đó ta có tất cả 62 cặp $(x; y)$ tương ứng.

Ta có $n(\Omega) = A_{25}^2 = 600 \Rightarrow P_A = \frac{31}{300}$. Chọn **B.**

NGUYỄN KHẢI VÀ BAN QUẢN TRỊ NHÓM TOÁN VD - VDC

CÁC LỚP THCS

Bài T1/503 (Lớp 6). Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn: $a=b-c=\frac{b}{c}$. Chứng minh rằng $a+b+c$ bằng lập phương của một số nguyên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T2/503 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A với góc A nhọn. Hạ BH vuông góc với AC (H thuộc AC). Đường thẳng qua H, song song với BC và đường thẳng qua C, song song với BH cắt nhau tại E. Gọi M là trung điểm của HE. Tính số đo góc $\widehat{AMC}$.

NGUYỄN XUÂN BÌNH (*Hà Nội*)

Bài T3/503. Giải phương trình

$$x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}.$$

LƯƠNG VĂN BÁ

(*GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi*)

Bài T4/503. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, M là một điểm trên tia đối của tia AB. Vẽ cát tuyến MCD đến đường tròn (C nằm giữa M và D). AD cắt BC tại I. Xác định vị trí của điểm M biết tứ giác $MCIO$ nội tiếp.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN (*Hải Phòng*)

Bài T5/503. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện: $(1+a^2)(4+b^2)(9+c^2)\le 100$. Chứng minh rằng: $-4\le 3ab+2ac+bc\le 16$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/503. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =\sqrt{3}(x+y+z).\\ \sqrt{xyz}-(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+2=0\end{cases}$$

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(*GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình*)

Bài T7/503. Cho tam giác ABC, hãy chứng minh

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}\le 3(9-5\sqrt{3}).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHẠM HÙNG

(*46 Hàng Chuối, Hà Nội*)

Bài T8/503. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) tại A_2, B_2, C_2. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh rằng

$$\frac{A_1A_2}{a}+\frac{B_1B_2}{b}+\frac{C_1C_2}{c}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PHẠM DUY KHÁNH

(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)

Bài T9/503. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\frac{4}{3}$. Chứng minh rằng

$$3\left[a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2\right]\ge ab+bc+ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

VŨ THANH TÚ

(*SV K54CC, Khoa CNTT, ĐH Công nghệ Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/503. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(n; k)$ sao cho: $(n+1)(n+2)...(n+k)-k$ là số chính phương.

NGUYỄN DUY LIÊN

(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc*)

Bài T11/503. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và thỏa mãn $f'(x)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\forall x\in(a;b)$, trong đó a, b là các số thực cho trước và $a<b$.

NGUYỄN TUẤN ANH

(*Lớp K28D, Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội II*)

Bài T12/503. Cho đường tròn tâm O và điểm K nằm ngoài đường tròn. Từ K kẻ các tiếp tuyến KI, KJ với đường tròn (I, J là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia IO lấy điểm O' bất kỳ, vẽ đường tròn tâm O' bán kính $O'J$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai A. AI cắt đường tròn (O') tại D khác A. Một đường thẳng qua K vuông góc với $O'D$ cắt đường tròn (O') tại B và C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

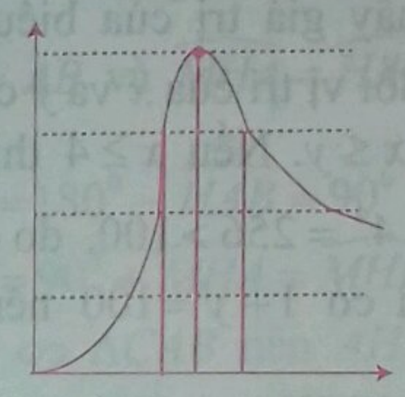
NGUYỄN XUÂN HÙNG

(*GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam*)

Bài L1/503. Cho hai dao động điều hoà cùng phương với các phương trình lần lượt là $x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm) và $x_2 = A_2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ (cm). Phương trình của dao động tổng hợp từ hai dao động này là $x = 4\cos(\omega t + \varphi)$ (cm). Khi $(A_1 + A_2)$ có giá trị cực đại thì giá trị của φ là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/503. Đặt điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi nhưng tần số góc ω thay đổi được vào hai đầu đoạn mạch AB mắc nối tiếp gồm cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L, điện trở R và tụ điện có điện dung C. Hình vẽ dưới là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm thuần L theo giá trị tần số góc ω. Công suất cực đại mà mạch tiêu thụ là 100 W. Lần lượt cho $\omega = x$ và $\omega = y$ và $\omega = z$ thì mạch AB tiêu thụ công suất lần lượt là $\mathscr{P}_1$ và $\mathscr{P}_2$ và $\mathscr{P}_3$. Nếu ($\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3 = 195$ W) thì $\mathscr{P}_2$ có giá trị bằng bao nhiêu?



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/503 (For 6th grade). Given integers a, b, c satisfying $a = b - c = \frac{b}{c}$. Prove that $a+b+c$ is a cube of some integer.

Problem T2/503 (For 7th grade). Given an isosceles ABC with the acute vertex angle A. Draw the altitude BH (H is on AC). The line through H and parallel to BC and the line through C and parallel to BH intersect at E. Let M be the midpoint of HE. Find the value of the angle $\widehat{AMC}$.

Problem T3/503. Solve the equation

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Problem T4/503. Given a half circle with the center O and the diameter $AB = 2R$. Let M be a point on the opposite ray of the ray AB. Draw a secant MCD of the circle (C is between M and D). Assume that AD intersects BC at I. Determine the position of M given that $MCIO$ is a cyclic quadrilateral.

Problem T5/503. Given real numbers a, b, and c satisfying $(1+a^2)(4+b^2)(9+c^2) \le 100$. Show that $-4 \le 3ab + 2ac + bc \le 16$.

FOR HIGH SHOOL

Problem T6/503. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \\ \qquad\qquad = \sqrt{3}(x+y+z). \\ \sqrt{xyz} - (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) + 2 = 0 \end{cases}$$

Problem T7/503. For any triangle ABC, show that

$$\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} \le 3(9 - 5\sqrt{3}).$$

When does the equality happen?

(*Xem tiếp trang 29*)

Bài T1/499. *Tìm các số nguyên dương x, y sao cho* $x^y + y^x = 100$.

Lời giải. Ta thấy giá trị của biểu thức $x^y + y^x$ không đổi khi đổi vị trí của x và y cho nhau, do đó giả sử rằng $1 \le x \le y$. Nếu $x \ge 4$ thì

$$x^y \ge x^x \ge 4^4 = 256 > 100, \text{ do đó } x \le 3.$$

• Với $x = 1$ thì có $1 + y = 100$ nên $y = 99$, thỏa mãn.

• Với $x = 2$ thì có $2^y + y^2 = 100$. Nếu $y \le 5$ thì $2^y + y^2 \le 2^5 + 5^2 = 57 < 100$. Nếu $y = 6$ thì $2^y + y^2 = 2^6 + 6^2 = 100$, thỏa mãn. Nếu $y \ge 7$ thì $2^y + y^2 \ge 2^7 + 7^2 = 177 > 100$.

• Với $x = 3$ thì có $3^y + y^3 = 100$. Nếu $y = 3$ thì $3^y + y^3 = 3^3 + 3^3 = 54 < 100$. Nếu $y \ge 4$ thì

$$3^y + y^3 \ge 3^4 + 4^3 = 145 > 100.$$

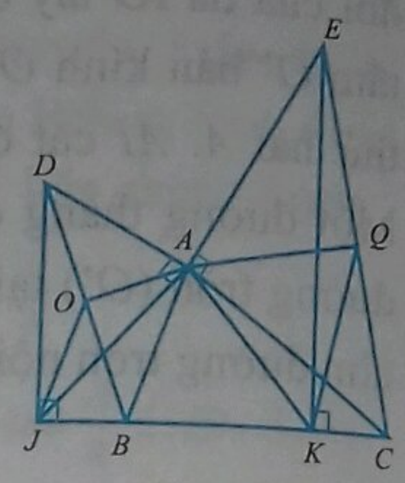
Vậy bài toán có 4 nghiệm $(x; y)$ là (1; 99), (99; 1), (2; 6), (6; 2). ❐

➢***Nhận xét.*** Chú ý rằng điều giả sử $x \le y$ chỉ giúp cho lời giải gọn hơn, nhưng nếu kết luận chỉ nêu ra hai nghiệm ứng với $x \le y$ thì vẫn chưa kể hết các nghiệm mà đề toán đòi hỏi. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Lê Đức Anh, Phạm Minh Châu, Hà Ngọc Huyền*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; *Nghệ An*: *Nguyễn Thị Hương*, 6B, *Nguyễn Cảnh Nam Khánh*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Minh Trí*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Tố, Q. 10.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/499. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE. Gọi J và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và E trên đường thẳng BC. Chứng minh tam giác AJK vuông cân.*

Lời giải. Gọi O và Q thứ tự là trung điểm của BD và CE. Vì ΔADB vuông cân tại A, ΔJBD vuông tại J nên các tam giác OAD, ODJ, OJB, OAB là các tam giác cân tại O. Do đó:



$$2\widehat{ODJ} + 2\widehat{ODA} + 2\widehat{OBA} + 2\widehat{OJB}$$
$$= \widehat{DAB} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{BDJ}$$
$$+ \widehat{DJB} + \widehat{DBJ} = 360^0$$
$$\Leftrightarrow \widehat{JOB} + 90^0 + 90^0 + 2\widehat{OJA} + 2\widehat{AJB} = 360^0$$
$$\Leftrightarrow \widehat{JOB} + 2\widehat{OJA} + 2\widehat{AJB} = 180^0.$$

Mà $\widehat{JOB} + 2\widehat{OJA} + \widehat{AOB} = 180^0$ (Vì ΔJOA cân tại O) $\Rightarrow 2\widehat{AJB} = \widehat{AOB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AJB} = 45^0$ (1)

Ta lại có

$$\widehat{QAE} + \widehat{AEQ} + \widehat{QCK} + \widehat{QKC} + \widehat{QKA} + \widehat{QAK} = 360^0$$
$$\Leftrightarrow 2\widehat{AEQ} + 2\widehat{CKA} = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{AKC} + \widehat{AEQ} = 180^0$$
$$\Rightarrow \widehat{AKC} = 135^0 \Rightarrow \widehat{AKJ} = 45^0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ΔAJK vuông cân tại A. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng và gửi về Tòa soạn sớm: **Nghệ An:** *Thái Khắc Hoàng*, 7D, *Nguyễn Văn Chung*, 8A, *Chu Thế Phong*, *Phạm Công Toàn*, *Trần Đăng Quân*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương;**Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trần Phương Mai*, *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Thọ:** *Chử Lê Phương Linh*, *Đỗ Ngọc Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/499. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2 + x^3}} + 2\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \frac{3}{2}.$$

Lời giải. ĐK:

$$\begin{cases} 3x^2 + x^3 > 0 \\ \dfrac{x}{3x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+3) > 0 \\ x(3x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\dfrac{1}{3}. \\ x > 0. \end{array}\right.$$

• Với $-3 < x < -\dfrac{1}{3}$ thì $(x-1)(x+2)^2 \le 0$ và $\dfrac{x-5}{4(3x+1)} > 0$ nên $3x^2 + x^3 = 4 + (x-1)(x+2)^2 \le 4$ và

$$2\sqrt{\frac{x}{3x+1}}=\sqrt{\frac{4x}{3x+1}}=\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{x-5}{4(3x+1)}}>\sqrt{\frac{5}{4}}>1.$$

Suy ra $\text{VT}=\frac{1}{\sqrt{3x^2+x^3}}+2\sqrt{\frac{x}{3x+1}}>\frac{1}{\sqrt{4}}+1=\frac{3}{2}.$

Vì vậy VT > VP.

• Với $0<x\le 1$ thì $x^3\le x$ nên $3x^2+x^3\le 3x^2+x$ và $\frac{(1-x)(11x+4)}{4(3x^2+x)}\ge 0$ nên

$$\text{VT}\ge\frac{1}{\sqrt{3x^2+x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}=\frac{1+2x}{\sqrt{3x^2+x}}$$

$$=\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{3x^2+x}}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{(1-x)(11x+4)}{4(3x^2+x)}}\ge\frac{3}{2}.$$

Vì vậy VT ≥ VP, dấu bằng xảy ra khi x = 1.

• Với $x>1$ thì $x^3>x$ nên $3x^2+x^3>3x^2+x$ và $\frac{(1-x)(11x+4)}{4(3x^2+x)}<0$ nên

$$\text{VT}<\frac{1}{\sqrt{3x^2+x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}=\frac{1+2x}{\sqrt{3x^2+x}}=\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{3x^2+x}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{(1-x)(11x+4)}{4(3x^2+x)}}<\frac{3}{2}.$$

Tức là VT < VP. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ❐

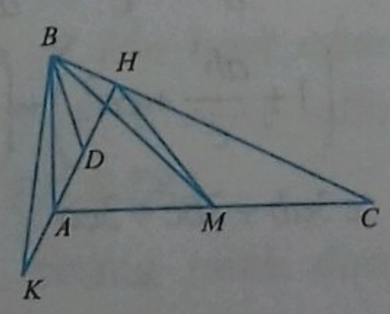
➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải phương trình có chứa ẩn trong căn và ở mẫu thức hơi phức tạp, ta nên phân chia theo từng trường hợp của ẩn kết hợp với bất đẳng thức để so sánh hai vế của phương trình, từ đó tìm nghiệm của nó. Có ít bạn tham gia giải bài này. Tuyên dương bạn *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội** có lời giải tốt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/499. *Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC=2AB$. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AH=2AK$. Tính tổng $\widehat{AKB}+\widehat{HAB}$.*

Lời giải. *Cách* 1. Theo giả thiết ta có $\frac{AC}{AB}=2\Leftrightarrow\frac{AC^2}{AB^2}=4$

$\Leftrightarrow\frac{CH.CB}{BH.BC}=4\Leftrightarrow\frac{HC}{HB}=4.$



Mà $AH^2=BH.CH$, suy ra $AH=2BH$. Gọi D là trung điểm AH, ta có $BH=HD=DA=AK$.

Vậy tam giác BHD vuông cân tại H, nên $\widehat{BDH}=45^0$.

Mặt khác, $BD^2=2.HD^2=DA.DK$, dẫn đến

$$\frac{BD}{AD}=\frac{DK}{BD}.$$

Từ đó suy ra $\Delta BDA\backsim\Delta KDB$ (c.g.c), nên

$$\widehat{AKB}=\widehat{ABD}.$$

Vậy $\widehat{AKB}+\widehat{HAB}=\widehat{ABD}+\widehat{DAB}=\widehat{BDH}$.

Do đó $\widehat{AKB}+\widehat{HAB}=45^0$.

Cách 2. Gọi M là trung điểm của đoạn AC. Ta có $HM=\frac{1}{2}AC=AB$ và $\widehat{MHA}=\widehat{HAC}$. Ta có

$$\widehat{BAK}=180^0-\widehat{HAB}=90^0+\widehat{HAC}$$
$$=90^0+\widehat{MHA}=\widehat{MHB}.$$

Lại có, $\Delta AHB\backsim\Delta CAB$ nên $AH=2BH$, suy ra $AK=HB$. Vậy $\Delta AKB=\Delta HBM$ (c.g.c), dẫn đến $\widehat{AKB}=\widehat{HBM}$. Mặt khác, $\widehat{HAB}=\widehat{ACB}$, ta có

$$\widehat{AKB}+\widehat{HAB}=\widehat{HBM}+\widehat{ACB}$$
$$=\widehat{CBM}+\widehat{MCB}=\widehat{AMB}.$$

Mà ΔABM vuông cân tại A nên $\widehat{AMB}=45^0$.

Do đó $\widehat{AKB}+\widehat{HAB}=45^0$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Nguyễn Quốc Nguyên Chương*, *Lê Văn Quang Trung*, *Lê Văn Mạnh*, 9B, *Hoàng Nguyễn Mai Sương*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 9A5, THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu*, *Nguyễn Trần Phương Mai*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/499. *Cho các số thực x, y thỏa mãn $y-2x+4<0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=x^2-4y+\frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}.$$

Lời giải. Ta có: $y-2x+4<0\Rightarrow 2x-y-4>0;$

$$(y-2x+4)^2=(2x-y-4)^2.$$

Mặt khác

$(x-4)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge 8x-16$

$\Rightarrow x^2-4y \ge 8x-4y-16 = 4(2x-y-4) > 0,$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x=4$. Do đó

$$P = x^2-4y+\frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}$$

$$\ge 4(2x-y-4)+\frac{16(2x-y-4)}{(2x-y-4)^2}$$

$$=4\left(2x-y-4+\frac{4}{2x-y-4}\right) \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có $(2x-y-4)+\frac{4}{2x-y-4} \ge 4$ (2); dấu đẳng thức xảy ra khi

$$2x-y-4=\frac{4}{2x-y-4} \Leftrightarrow 2x-y-4=2.$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \ge 16$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=4 \\ 2x-y-4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy $\min P = 16$ khi $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Điều then chốt của lời giải là chứng minh $x^2-4y \ge 4(2x-y-4) > 0$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $a+\frac{4}{a} \ge 4$ $(a>0)$ để suy ra $P \ge 16$. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa**: *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Lê Văn Mạnh*, *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/499. *Tìm các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz=4 \\ \left(\frac{1}{x^9}+\frac{1}{y^9}+\frac{1}{z^9}\right)(1+2xyz)=9 \end{cases}.$$

Lời giải. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm thực dương của hệ phương trình. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số thực dương, từ hệ phương trình ta có:

$$4 = x^2+y^2+z^2+xyz \ge 4\sqrt[4]{x^2.y^2.z^2.xyz}$$

$$=4\sqrt[4]{(xyz)^3} \Rightarrow 1 \ge xyz.$$

$$9=\left(\frac{1}{x^9}+\frac{1}{y^9}+\frac{1}{z^9}\right)(1+2xyz) \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^9.y^9.z^9}}(1+2xyz)=$$

$$=\frac{3(1+2xyz)}{(xyz)^3} \Rightarrow 3 \ge \frac{1+2xyz}{(xyz)^3}=\frac{1}{(xyz)^3}+\frac{2}{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \ge 1$$

(vì nếu $0<a<1$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^2} > 1+2=3$).

Từ hai nhận xét trên ta suy ra $xyz=1$ và tất cả các bất đẳng thức ở trên đều có dấu đẳng thức xảy ra. Suy ra $x^2=y^2=z^2=xyz=1 \Rightarrow x=y=z=1$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm thực dương duy nhất $x=y=z=1$. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán giải hệ phương trình trên là bài toán cơ bản, đơn giản (số phương trình ít hơn số ẩn số, do đó đã có một bất đẳng thức nào đó trở thành đẳng thức). Có rất nhiều các bạn học sinh THPT tham gia và có lời giải đúng và chỉ có duy nhất một bạn học sinh THCS cũng làm được như vậy: *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/499. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Quang Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa** và của một số bạn khác).

Ta có

$$M(ab+bc+ca)=a^3+b^3+c^3+\frac{ca^3}{b}+\frac{bc^3}{a}+\frac{ab^3}{c}+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$=3+\frac{ca^3}{b}+\frac{ab^3}{c}+\frac{bc^3}{a}+ab^2+bc^2+ca^2=$$

$$=\left(1+\frac{ab^3}{c}+ca^2\right)+\left(1+\frac{bc^3}{a}+ab^2\right)+\left(1+\frac{ca^3}{b}+bc^2\right)$$

$$\ge 3ab+3bc+3ca$$

Chia 2 vế bất đẳng thức cho $ab+bc+ca>0$, ta có $M\geq 3$. Khi $a=b=c=1$ thì $M=3$. Vậy $\min M=3$. ❐

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn giải đúng bài này, đó là các bạn sau: **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2 THPT số 2 Phù Cát; **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Vinh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương, Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, *Trần Thành Đạt*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, TX. Ba Đồn; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8 THPT Cam Lộ; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân, Lâm Khánh Hòa*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, *Trương Ngọc Tâm*, 9D THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Trà Vinh:** *Đặng Thành Đạt*, 10A1 THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành; **Vĩnh Long:** *Trương Gia Bảo, Lê Minh Tâm*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/499. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm đường tròn nội tiếp là I. M là trung điểm của AI. K thuộc BC sao cho $IK\perp IO$. Q thuộc (O) sao cho $AQ\parallel IK$. QM cắt BC tại H. G thuộc AK sao cho $HG\parallel QI$. QK cắt (O) tại L khác Q. Chứng minh rằng $\widehat{GIK}=\widehat{IAL}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Đức Toàn*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

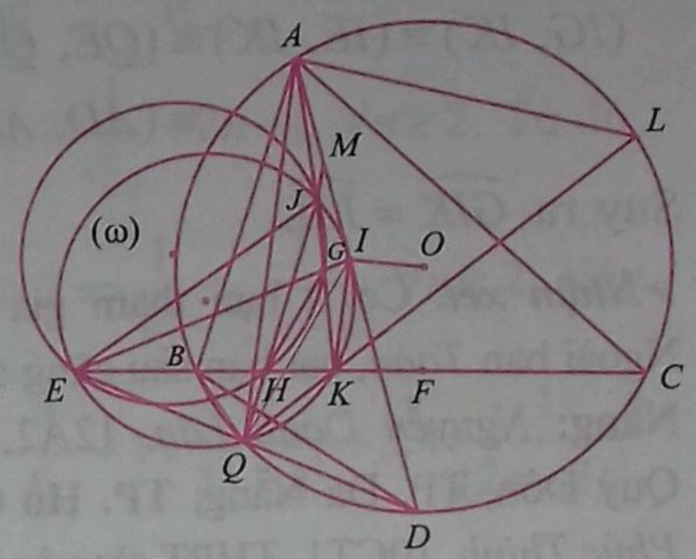
Bổ đề. **(Định lý Reim)** *Cho A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn. Lấy E, F lần lượt nằm trên AD và BC sao cho A, B, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Khi đó $EF\parallel DC$.*

Bổ đề này khá quen thuộc, chứng minh đơn giản.

Trở lại bài toán: Gọi D là giao điểm của AI với đường tròn (O). DQ cắt lại BC tại E, EI cắt lại AK tại G'. Đường tròn ngoại tiếp ΔIQK cắt lại AK tại J. QJ cắt lại AI tại M'.

Dễ thấy

$$(QB,QD)\equiv(CB,CD)\equiv(BD,BC)\equiv(BE,BD)\pmod{\pi}.$$



Lại có

$$(DQ,DB)=-(DB,DE)\pmod{\pi}$$

nên tam giác DBQ và tam giác DEB đồng dạng ngược hướng. Suy ra

$$(EK,EQ)\equiv(EB,ED)\equiv(BD,BQ)\equiv(AD,AQ)$$
$$\equiv(QA,QI)\equiv(IK,IQ)\pmod{\pi}.$$

Suy ra E, Q, K, I cùng thuộc đường tròn (ω).

Cũng từ $\Delta DBQ\backsim\Delta DEB\Rightarrow DB^2=DE.DQ$.

Từ tính chất quen thuộc

$$DI=DB=DC\Rightarrow DI^2=DE.DQ.$$

Do đó DI tiếp xúc với (ω). Từ đây

$$(QI,QK)\equiv(ID,IK)\equiv(AD,AQ)\equiv(EK,EQ)$$
$$\equiv(IK,IQ)\pmod{\pi}.$$

Suy ra K là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{QI}$ của (ω).

Vì $M'I$ tiếp xúc với (ω) nên tam giác $M'JI$ và tam giác $M'IQ$ đồng dạng ngược hướng. Suy ra

$$(IJ,IA)\equiv(IJ,IM')\equiv(QJ,QI)\equiv(KJ,KI)$$
$$\equiv(KA,KI)\equiv(AJ,AQ)\pmod{\pi}.$$

Lại có

$$(JA,JQ)\equiv(JQ,JK)\equiv(JK,JI)\equiv(JA,JI)\pmod{\pi},$$

nên tam giác JQA và tam giác JAI đồng dạng ngược hướng. Từ đó

$$(AJ,AM')\equiv(AJ,AI)\equiv(QJ,QA)\pmod{\pi},$$

suy ra tam giác $M'AJ$ và tam giác $M'QA$ đồng dạng ngược hướng.

Vậy có $M'A^2=M'J.MQ=M'I^2$, hay M' là trung điểm của $AI\Rightarrow M'\equiv M$. Do đó Q, H, J thẳng hàng. Gọi giao điểm của EI và AK là G'.

Ta có

$$(EG', EH) \equiv (EI, EK) \equiv (JI, JK) \equiv (JK, JQ)$$
$$\equiv (JG', JH) \pmod{\pi}.$$

Suy ra E, J, H, G' cùng nằm trên một đường tròn. Áp dụng định lý Reim có $HG' \parallel QI$. Suy ra $G' \equiv G$, hay E, G, I thẳng hàng. Từ đó

$$(IG, IK) \equiv (IE, IK) \equiv (QE, QK) \equiv (QD, QL)$$
$$\equiv (AD, AL) \pmod{\pi}.$$

Suy ra $\widehat{GIK} = \widehat{IAL}$. □

➢***Nhận xét.*** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn *Toàn*, hai bạn sau cũng có lời giải đúng: **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/499. *Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt*

$$A_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right].$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $\dfrac{n^6-1}{A_n}$ *là một số chính phương. Trong đó kí hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Lời giải. (Của bạn *Phan Phước Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).

Dễ thấy với $n = 4k, n = 4k+1, n = 4k+2, n = 4k+3$ ta luôn có $A_n = n+1$. Vậy ta cần tìm n để $\dfrac{n^6-1}{n+1}$ là số chính phương. Ta có

$$P = \frac{n^6-1}{n+1} = (n^3-1)(n^2-n+1).$$

Đặt $d = (n^2-n+1, n^3-1)$. Suy ra

$$d \mid (n^3-1) - n(n^2-n+1) \Rightarrow d \mid n^2-n-1$$
$$\Rightarrow d \mid (n^2-n+1) - (n^2-n-1) = 2.$$

Mà $d \mid (n^2-n+1) = n(n-1)+1$. Vậy d lẻ, do đó $d = 1$ tức là n^3-1 và n^2-n+1 là hai số nguyên tố cùng nhau. Do đó n^2-n+1 là số chính phương. Đặt $n^2-n+1 = a^2 \Leftrightarrow 4n^2-4n+4 = 4a^2$

$$\Leftrightarrow 4a^2-(2n-1)^2 = 3 \Leftrightarrow (2a-2n+1)(2a+2n-1) = 3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-2n+1=1 \\ 2a+2n-1=3 \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} 2a-2n+1=3 \\ 2a+2n-1=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ n=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n=0 \\ a=1 \end{cases}.$$

Thử lại thấy $n=1$ thỏa mãn. Vậy $n=1$ là giá trị duy nhất để $P = \dfrac{n^6-1}{A_n}$ là số chính phương. □

➢***Nhận xét.*** Đây là một bài toán dễ nhưng ít có bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10 T1, THPT chuyên Lam Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/499. *Ta gọi "vết" của một tam giác là tỉ số giữa độ dài cạnh ngắn nhất và độ dài cạnh dài nhất của tam giác đó. Với một hình vuông có cạnh bằng 2019 đơn vị dài, tồn tại hay không số nguyên dương n và cách phân hoạch hình vuông này thành n hình tam giác thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

i) *Không có tam giác nào có cạnh dài hơn cạnh hình vuông.*

ii) *Tổng tất cả các "vết" của n tam giác thu được không vượt quá* $\dfrac{n^2+6n-9}{n^2}$.

Lời giải. Giả sử ta đã phân hoạch hình vuông thành n tam giác Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Kí hiệu độ dài các cạnh của Δ_i là a_i, b_i, c_i (với $a_i \geq b_i \geq c_i$) thì "vết" của tam giác này là $V_i = \dfrac{c_i}{a_i}$.

Nhận xét: "Vết" của mỗi tam giác không thay đổi qua phép đồng dạng, theo đó ta có thể coi cạnh

của hình vuông ban đầu bằng 1, khi đó có $1 \ge a_i \ge b_i \ge c_i > 0$ với mọi $i = \overline{1,n}$.

Với mỗi i ta có: $V_i = \dfrac{c_i}{a_i} \ge c_i a_i \ge 2S(\Delta_i)$ với $S(\Delta_i)$ là diện tích của Δ_i. Lưu ý rằng $c_i a_i = 2S(\Delta_i)$ khi và chỉ khi Δ_i là tam giác vuông với hai cạnh góc vuông có độ dài là a_i, c_i, điều này mâu thuẫn với thứ tự $a_i \ge b_i \ge c_i$. Vậy có $V_i > 2S(\Delta_i), \forall i = \overline{1,n}$. Suy ra $\sum_{i=1}^{n} V_i > 2\sum_{i=1}^{n} S(\Delta_i) = 2.1 = 2$.

Do đó không thể xảy ra

$$\sum_{i=1}^{n} V_i \le \frac{n^2+6n-9}{n^2} = 2 - \frac{(n-3)^2}{n^2} \le 2. \quad \square$$

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/499. *Cho dãy số $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ xác định bởi*

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n(n+1)}.\frac{u_n}{u_n^2+n}, \forall n = 1,2,\ldots.$$

a) *Tính* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) *Tìm* $\left[\dfrac{\sqrt{2018}}{u_{2018}}\right]$.

(Kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có:

$$u_{n+1} = \sqrt{n(n+1)}.\frac{u_n}{u_n^2+n} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{\dfrac{u_n^2}{n}+1}{\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}}.$$

Đặt $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{u_{n+1}}, n = 1,2,\ldots$ ta được dãy số:

$$v_1 = 1;\ v_{n+1} = \frac{\dfrac{1}{v_n^2}+1}{\dfrac{1}{v_n}} = v_n + \frac{1}{v_n}, \forall n = 1,2,\ldots$$

Ta thấy $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và từ $v_{k+1} = v_k + \dfrac{1}{v_k} \Rightarrow$

$$v_{k+1}^2 = v_k^2 + \frac{1}{v_k^2} + 2, \forall k = 1,2,\ldots$$

Cho k nhận giá trị từ 1 đến $n-1$ ta được:

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{1}{v_1^2} + 2, v_3^2 = v_2^2 + \frac{1}{v_2^2} + 2, \ldots, v_n^2 = v_{n-1}^2 + \frac{1}{v_{n-1}^2} + 2$$

$$\Rightarrow v_n^2 = v_1^2 + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}^2} + 2(n-1)$$

$$\Leftrightarrow v_n^2 = \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}^2} + 2n - 1, \forall n \ge 2.$$ Từ đó:

$$v_n^2 > 2n-1, \forall n \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{v_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n \ge 2.$$ Vậy

$$\frac{1}{v_1^4} + \frac{1}{v_2^4} + \frac{1}{v_3^4} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}^4} < 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-3)^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-5)(2n-3)}$$

$$< 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-3}\right) < \frac{3}{2}, \forall n \ge 2.$$ Từ đó:

$$v_n^2 \le \sqrt{(1^2+1^2+\ldots+1^2)\left(\frac{1}{v_1^4} + \frac{1}{v_2^4} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}^4}\right)} + 2n - 1$$

$$< \sqrt{\frac{3}{2}(n-1)} + 2n - 1, \forall n \ge 2.$$

Vậy ta được: $2n - 1 < v_n^2 < 2n - 1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}(n-1)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-1} < v_n < \sqrt{2n-1+\sqrt{\frac{3}{2}(n-1)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n-1} < \frac{\sqrt{n+1}}{u_{n+1}} < \sqrt{2n-1+\sqrt{\frac{3}{2}(n-1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n-1}} > u_{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n-1+\sqrt{\frac{3}{2}(n-1)}}}, \forall n \ge 2.$$

Theo nguyên lý kẹp ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Từ câu a) ta có:

$$\sqrt{4035} < \frac{\sqrt{2018}}{u_{2018}} < \sqrt{4035 + \sqrt{\frac{3}{2}.2017}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2018}}{u_{2018}}\right]=63.$$

➢***Nhận xét.*** 1) Để tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ có thể sử dụng định lý Stolz – Cesaro, định lí Stolz – Cesaro phát biểu như sau: *Cho $(a_n),(b_n)$ là hai dãy số thỏa mãn: (b_n) là dãy tăng, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$. Khi đó ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.* Với cách đặt dãy (v_n) như lời giải trên, ta dễ thấy dãy này là dãy tăng, không bị chặn trên nên theo định lí Stolz – Cesaro thì

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n^2}{n}=\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}^2-v_n^2)=\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)(v_{n+1}+v_n)$$

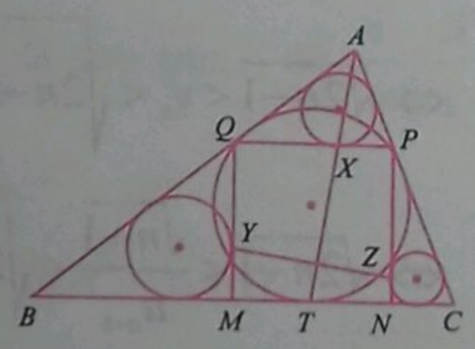
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}+v_n}{v_n}=...=2\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{v_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Có hai bạn giải đúng bài này, là các bạn: *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Dương Hải Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa, **Đồng Nai**. Cả hai bạn đều dùng định lý Stolz – Cesaro để tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

NHƯ HOÀNG

Bài T12/499. *Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm M, N thuộc đoạn BC và các điểm P, Q theo thứ tự thuộc các đoạn CA, AB sao cho MNPQ là hình vuông. Các đường tròn nội tiếp các tam giác APQ, BQM, CPN theo thứ tự tiếp xúc với PQ, QM, PN tại X, Y, Z. Chứng minh rằng $AX\perp YZ$.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Xuân Huy*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**).



Bổ đề. *Nếu đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại T thì $AB-AC=TB-TC$.*

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây. Gọi T là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BC. Vì $MNPQ$ là hình vuông nên $MN=NP=PQ=QM=x$.

Mà $BC\,//\,QP$ nên $\frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}=k$.

Do đó phép vị tự tâm A, tỷ số k: $V_A^k(X)=T$. Điều đó có nghĩa là A, X, T thẳng hàng. Theo bổ đề trên, ta có $(XY^2-XZ^2)-(TY^2-TZ^2)$

$$=(XQ^2+YQ^2)-(XP^2+ZP^2)-(TM^2+YM^2)+(TN^2+ZN^2)$$

$$=(XQ^2-XP^2)+(YQ^2-YM^2)+(ZN^2-ZP^2)+(TN^2-TM^2)$$

$$=QP(XQ-XP)+QM(YQ-YM)+NP(ZN-ZP)+NM(TN-TM)$$

$$=x((XQ-XP)+(YQ-YM)+(ZN-ZP)+(TN-TM))$$

$$=x((AQ-AP)+(BQ-BM)+(CN-CP)+(TN-TM))$$

$$=x((AQ+BQ)-(AP+CP)-(TM+BM)+(TN+CN))$$

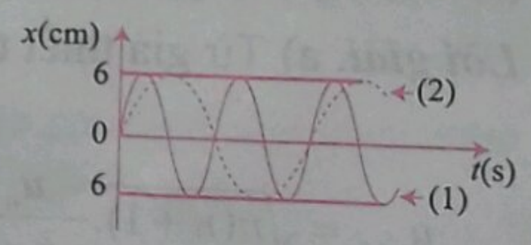
$$=x((AB-AC)-(TB-TC))=0.$$

Do đó, theo định lí bốn điểm, $AX\equiv XT\perp YZ$. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này lạ nhưng không khó. Tuy nhiên, ngoài bạn *Huy*, chỉ có hai bạn tham gia giải với lời giải tương tự: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/499. *Đồ thị li độ theo thời gian của chất điểm 1 (đường 1) và chất điểm 2 (đường 2) như hình vẽ, tốc độ cực đại của chất điểm 2 là 4π (cm/s). Không kể thời điểm $t=0$, thời điểm hai chất điểm có cùng li độ lần thứ 5 là bao nhiêu?*



Lời giải. Từ đồ thị, ta có : $\begin{cases} A_1=A_2=6\ \text{cm} \\ T_1=\frac{T_2}{2}\Rightarrow\omega_1=2\omega_2 \end{cases}$

$$v_{2\,max}=A_2\omega_2=4\pi$$

$$\omega_2=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}\ \text{rad/s}\Rightarrow\omega_1=\frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

Phương trình li độ: $\begin{cases} x_1 = 6\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2}\right) \text{(cm)} \\ x_2 = 6\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2}\right) \text{(cm)} \end{cases}$

Khi hai chất điểm có cùng li độ:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{4\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2} = -\left(\dfrac{2\pi}{3}t - \dfrac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

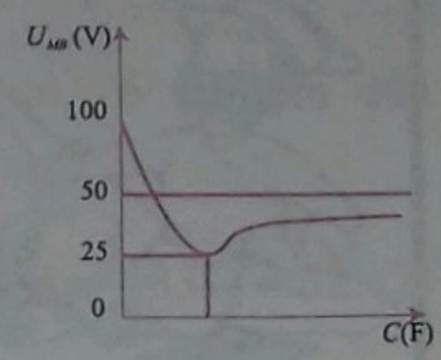
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3k \\ t = 0,5 + k \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} t = 3;\ 6 \\ t = 0,5;\ 1,5;\ 2,5;\ 3,5. \end{cases}$$

Vậy lần thứ 5 ứng với thời điểm $t = 3,5$ s. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn có tên dưới đây đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán , THPT chuyên Quốc học Huế; *Hà Phương Hoàng Mai*, *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/499. *Cho mạch điện xoay chiều AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Đoạn mạch AM chỉ có điện trở thuần R; đoạn mạch MB gồm cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r mắc nối tiếp với tụ điện có điện dung C thay đổi được. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi, tần số f = 50Hz. Khi tăng dần điện dung C từ 0 đến ∞, người ta thu được đồ thị liên hệ giữa điện áp hiệu dụng U_{MB} và điện dung C như hình bên. Điện trở r của cuộn dây có giá trị bằng bao nhiêu?*



Lời giải. Ta có

$$U_{MB} = I.Z_{MB} = \frac{U\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(r+R)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \quad (1)$$

Khi $C = 0 \Rightarrow U_{MB} = U = 100$V. Từ đồ thị ta thấy khi $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ thì U_{MB} cực tiểu, khi đó $Z_L = Z_C = 100\Omega$. Từ (1) suy ra:

$$U_{MB} = U\frac{r}{R+r} = 25 \Rightarrow R = 3r \quad (2)$$

Khi C rất lớn $(Z_C \approx 0)$ thì $U_{MB} = 50$V nên lại từ (1) ta có: $50 = \dfrac{100\sqrt{r^2 + 100^2}}{\sqrt{(r+R)^2 + 100^2}}$ (3)

Từ (2) và (3) ta tìm được: $r = 50\Omega$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng bạn sau có lời giải đúng: *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 21)

Problem T8/503. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). The medians AA_1, BB_1, CC_1 respectively intersect (O) at A_2, B_2, C_2. Let $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Show that

$$\frac{A_1A_2}{a} + \frac{B_1B_2}{b} + \frac{C_1C_2}{c} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problem T9/503. Given non-negative numbers a, b, c satisfying $a+b+c=\dfrac{4}{3}$. Prove that

$$3\left[a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2\right] \geq ab + bc + ca.$$

When does the equality happen?

Problem T10/503. Find all pairs of positive integers $(n;\ k)$ so that $(n+1)(n+2)...(n+k) - k$ is a complete square.

Problem T11/503. Find all functions $f(x)$ which are continuous on $[a;\ b]$, are differentiable on $(a;\ b)$, and satisfy $f'(x) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\forall x \in (a;b)$, where a, b are given real numbers with $a < b$.

Problem T12/503. Given a circle (O) and a point K lying outside the circle. Draw the tangents KI, KJ to the circle at I, J. On the opposite ray of IO take an arbitrary point O'. The circle with center O' radius $O'J$ intersects (O) at the other point A. AI intersects (O') at the other point D. The line through K perpendicular to $O'D$ meets (O') at B and C. Show that I is the center of the incircle of ABC.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

TOWARDS MATHEMMTICAL OLYMPIAD

PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh*)
TRẦN VĂN LÂM (*Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, TX. Phú Yên, Thái Nguyên*)

Khi gặp một phương trình (PT) có chứa các biểu thức dạng hàm hợp $f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ ta cần lưu ý một số hướng sau để có thể giúp giải được PT. Trước hết ta kí hiệu:

$$f_1(x)=f(x);\ f_n(x)=f(f_{n-1}(x))\ (n\geq 2).$$

I. Hướng 1. Rút gọn $f_n(x)$ bằng phương pháp quy nạp hoặc lượng giác hóa.

Thí dụ 1. *Cho* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. *Biết phương trình* $f_n(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{10}$ *có nghiệm* $x=\sqrt{2}$. *Tìm n và các nghiệm còn lại.*

Lời giải. Ta có $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+1}+1}}=\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

Bằng quy nạp (dành cho bạn đọc chứng minh) ta được $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{nx^2+1}}$. PT đã cho trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{nx^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+6}}{10}.$$

PT này có $x=\sqrt{2}$ là nghiệm phương trình nên

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{8}}{10}\Leftrightarrow\sqrt{2n+1}=5\Leftrightarrow n=12.$$

PT đã cho trở thành: $\dfrac{x}{\sqrt{12x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{10}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \dfrac{x^2}{12x^2+1}=\dfrac{x^2+6}{100}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 12x^4-27x^2+6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2=2\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \text{hoặc}\ x=\frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm còn lại là $x=\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 2. *Cho* $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. *Giải phương trình:*

$$\sum_{i=1}^{5}f_i(x)=0.\quad(1)$$

Lời giải. Ta có $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$$f_2(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}.$$

Bằng quy nạp ta được $f_n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$. PT(1) trở thành:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{3x+1}+\frac{x}{4x+1}+\frac{x}{5x+1}=0.\quad(2)$$

Ta có $x=0$ là nghiệm PT(2).

Xét $x\neq 0$ thì PT(2) tương đương với

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{3+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{4+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{5+\dfrac{1}{x}}=0.\quad(3)$$

Đặt $\frac{1}{x}=a-3$ thì PT(3) trở thành:

$$\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a^2-4}+\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{a}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0;\pm 1;\pm 2 \\ 5a^4-15a^2+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0;\pm 1;\pm 2 \\ a=\pm\sqrt{\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}} \end{cases} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}}.$$

Với a tìm được thì PT(1) có 5 nghiệm là:

$$0;\ \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}}-3}.$$

Thí dụ 3. *Cho $f(x)=2x^2-1$. Tìm số nghiệm của phương trình: $f_5(x)=\frac{x-\sqrt{3-3x^2}}{2}$.* (1)

Lời giải. ĐK: $3-3x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$. Đặt $x=\cos t$ với $t\in[0;\pi]$. Suy ra

$$f_1(x)=2\cos^2 t-1=\cos 2t$$

$$f_2(x)=2\cos^2 2t-1=\cos 2^2 t.$$

Bằng quy nạp ta được $f_5(x)=\cos 2^5 t$.

$$\text{VP}(1)=\frac{\cos t-\sqrt{3-3\cos^2 t}}{2}=\frac{\cos t-\sqrt{3\sin^2 t}}{2}$$

$$=\cos t.\cos\frac{\pi}{3}-\sin t.\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right).$$

PT(1) trở thành:

$$\cos 32t=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 32t=t+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 32t=-t-\frac{\pi}{3}+m2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 31t=\frac{\pi}{3}+2\pi k \\ 33t=-\frac{\pi}{3}+2\pi m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{93}+\frac{2\pi}{31}k \\ t=-\frac{\pi}{99}+\frac{2\pi}{33}m \end{array}\right..$$

Với $t=\frac{\pi}{93}+\frac{2\pi}{31}k$ và $t\in[0;\pi]$ suy ra $k\in\{0;1;...;15\}$, tương ứng có 16 nghiệm của PT(1).

Với $t=-\frac{\pi}{99}+\frac{2\pi}{33}m$ và $t\in[0;\pi]$ suy ra $m\in\{1;2;...;16\}$, tương ứng có 16 nghiệm của PT(1). Xét

$$\frac{\pi}{93}+\frac{2\pi}{31}k=-\frac{\pi}{99}+\frac{2\pi}{33}m \Leftrightarrow 3(31m-33k)=32. \ (2)$$

Do VT(2)$\vdots$3 và VP(2)$\not\vdots$3 nên PT(2) không có nghiệm nguyên. Vậy PT(1) có đúng 32 nghiệm.

II. Hướng 2. Sử dụng một số kết quả sau để giải phương trình.

***Kết quả* 1.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D và có tập giá trị là tập con của D.

a) Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên trên miền D thì ta có: $f_n(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x$ (với $n\in\mathbb{N}^*$).

b) Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên trên miền D thì ta có:

$$f_{2k}(x)=x \Leftrightarrow f_2(x)=x \text{ (với } k\in\mathbb{N}^*).$$

$$f_{2k+1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \text{ (với } k\in\mathbb{N}).$$

Chứng minh. a)

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=x$ suy ra

$$f_1(x_0)=f(x_0)=x_0 \Rightarrow f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$$

$$\Rightarrow f_2(x_0)=x_0 \Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)=x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_n(x)=x$.

Vậy $f(x)=x \Rightarrow f_n(x)=x$.

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$ nên có $f_n(x_0)=x_0$. Giả sử $f(x_0)>x_0$ thì do hàm số $y=f(x)$ đồng biến nên

$$f(f(x_0))>f(x_0)>x_0 \Rightarrow f_2(x_0)>x_0$$

$$\Rightarrow f_3(x_0)=f(f_2(x_0))>f(x_0)>x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_n(x_0)>x_0$ mâu thuẫn với giả sử $f_n(x_0)=x_0$.

Tương tự nếu $f(x_0)<x_0$ ta có $f_n(x_0)<x_0$ mâu thuẫn với $f_n(x_0)=x_0$.

Do đó chỉ xảy ra $f(x_0)=x_0$. Suy ra x_0 là nghiệm của PT: $f(x)=x$. Vậy $f_n(x)=x \Rightarrow f(x)=x$.

b) • Ta chứng minh $y = f_2(x)$ là hàm số đồng biến. Thật vậy: Giả sử $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\Rightarrow f_2(x_1) = f(f(x_1)) > f(f(x_2)) = f_2(x_2).$$

Áp dụng kết quả câu a với $h(x) = f_2(x)$ là hàm số đồng biến ta có

$$f_{2k}(x) = x \Leftrightarrow h_k(x) = x \Leftrightarrow h(x) = f_2(x) = x.$$

• Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ suy ra

$$f_1(x_0) = f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$

$$\Rightarrow f_2(x_0) = x_0 \Rightarrow f_3(x_0) = f(f_2(x_0)) = f(x_0) = x_0.$$

Bằng quy nạp ta có $f_{2k+1}(x_0) = x_0$.

Suy ra x_0 là nghiệm PT: $f_{2k+1}(x) = x$.

Vậy $f(x) = x \Rightarrow f_{2k+1}(x) = x$.

Ta chứng minh $f_{2k+1}(x) = x \Rightarrow f(x) = x$ như sau:

Xét $f_{2k+1}(x) = x$.

Đặt $y_1 = f(x)$; $y_2 = f(y_1)$;...; $y_{2k} = f(y_{2k-1})$.

Ta có hệ hoán vị vòng quanh:

$$\begin{cases} y_1 = f(x) \\ y_2 = f(y_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{2k} = f(y_{2k-1}) \\ x = f(y_{2k}) \end{cases}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x = \min\{y_1; y_2; \dots; y_{2k}; x\}.$$

Có $x \le y_1 \Rightarrow f(x) \ge f(y_1) \Rightarrow y_1 \ge y_2$.

Suy ra $f(y_1) \le f(y_2)$ hay $y_2 \le y_3, \dots$.

Tiếp tục như vậy ta có: $y_{2k} \le x \Rightarrow f(y_{2k}) \ge f(x)$ hay $x \ge y_1$. Suy ra $x \ge y_1 \ge x$ suy ra $x = y_1$.

Quá trình trên ta còn suy ra $x = y_1 = y_2 = \dots = y_{2k}$.

Vậy $x = y_1 = f(x)$.

Nhận xét. PT: $f_n(x) = x$ còn có cách giải là đưa về hệ hoán vị vòng quanh. Sau đây là các thí dụ.

Thí dụ 1. *Cho phương trình:*

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + m\right)^3 + m\right)^3 + m = x. \quad (1)$$

a) Giải phương trình khi $m = \frac{2}{3}$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải. a) Với $m = \frac{2}{3}$ PT(1) trở thành:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} = x. \quad (2)$$

Do $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$\text{PT}(2) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy PT(2) có 2 nghiệm $x = 1$; $x = -2$.

b) Do hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có: PT(1) $\Leftrightarrow g_3(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + m = x \Leftrightarrow x - \frac{1}{3}x^3 = m.$$

Xét $y = x - \frac{1}{3}x^3; y' = 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra PT(1) có đúng 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Vậy m cần tìm là $m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots - \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}}}} = x. \quad (1)$$

(vế trái có 100 dấu căn).

Lời giải. Do VT(1) ≥ 0 nên $x \ge 0$. Suy ra PT xác định trên đoạn $[0;1]$. Do $f(x) = \sqrt{1-x}$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f_{100}(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) = x$$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{1-x}} = x \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} = x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 1-x^2 \Leftrightarrow 1-x = (1-x^2)^2$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Do $x \in [0;1]$ nên PT đã cho có 3 nghiệm

$$x = 0;\ x = 1;\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cách khác. Ta thấy $h(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow h_{50}(x) = x \Leftrightarrow h(x) = x.$$

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$1+\frac{1}{\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{\sqrt{1+3x}}}}}} = x. \quad (1)$$

Lời giải. Do $\text{VT}(1) > 1$ nên $x > 1$.

Ta chứng minh được $f(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow f_3(x) = x \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}} = x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+3x}} = x-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+3x} = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow (1+3x)(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x(3x^2-5x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

Do $x > 1$ nên PT(1) có đúng 1 nghiệm

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{6}.$$

Thí dụ 4. *Giải phương trình:*

$$x^2+x = \sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt{1+2x}}}}. \quad (1)$$

Lời giải. Do $\text{VP} \ge 0$ nên ta có ĐK:

$$\begin{cases} x^2+x \ge 0 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

PT(1) trở thành:

$$x^2+x = \sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4(x^2+x)}}}}.$$

Đặt $x^2+x = t \ge 0$ ta có:

$$\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4\sqrt[4]{1+4t}}}} = t. \quad (2)$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = \sqrt[4]{1+4t}$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f_4(t) = t \Leftrightarrow \sqrt[4]{1+4t} = t \Leftrightarrow t^4 = 4t+1$

$\Rightarrow (x^2+x)^4 = 4(x^2+x)+1 \Leftrightarrow ((x^2+x)^2)^2 = (2x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x^2+x)^2 = 2x+1$ (do $x \ge 0$)

$\Leftrightarrow x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1 = 2x+1+2x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow (x^2+x+1)^2 = 2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x+1 = \sqrt{2}(x+1)$ (do $x \ge 0$)

$\Leftrightarrow x^2+(1-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Vậy PT đã cho có đúng 1 nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x = \log_2 y & (1) \\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+y} = \dfrac{8x-y}{3} & (2) \end{cases}.$$

Lời giải. Từ PT(1) suy ra $y = 2^x$ thay vào PT(2) được: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2^x+x} = \dfrac{8x-2^x}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2^{\frac{2^x+x}{3}}+\frac{2^x+x}{3}}{3} = x.$ (1)

Do $f(x) = \dfrac{2^x+x}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f_2(x) = x \Leftrightarrow \frac{2^x+x}{3} = x \Leftrightarrow 2^x-2x = 0.$$

Xét $h(x) = 2^x-2x$;

$$h'(x) = 2^x\ln 2-2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right).$$

Do $h'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm suy ra $h(x)$ có không quá 2 khoảng đơn điệu Vì vậy $h(x)$ có tối đa 2 nghiệm. Suy ra $x = 1, x = 2$ là tất cả các nghiệm của $h(x)$. Với $x = 1$ thì $y = 2$. Với $x = 2$ thì $y = 4$. Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (2; 4)$.

(Kỳ sau đăng tiếp)

ĐẶC BIỆT HÓA BÀI HÌNH HỌC BALKAN MO 2009

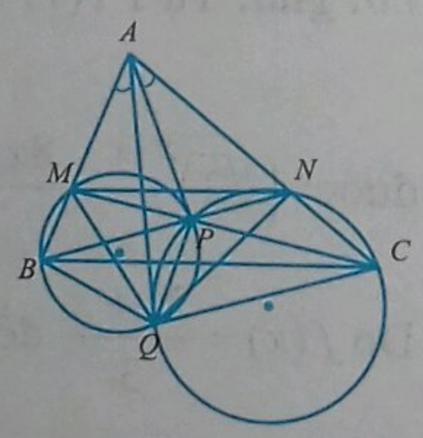
NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)
TRƯƠNG THỊ THÚY VÂN
(GV ĐHSPKT Vĩnh Long)

Kì thi Olympic Toán Balkan lần thứ 26 tổ chức từ ngày 28 tháng 4 đến ngày 4 tháng 5 năm 2009 tại Kragujevac, Serbia có tổng cộng 20 đội tham dự. Trong kì thi này có bài hình học do tác giả *Liubomir Chiriac* người Moldova đề xuất khá thú vị. Bài hình học này là một kết quả có nhiều khai thác và ứng dụng. Trong bài viết này, chúng tôi xin gửi đến bạn đọc một hướng khai thác đặc biệt của bài hình học trên.

Bài 1. (Balkan MO 2009) *Cho điểm M nằm trên cạnh AB và điểm N nằm trên cạnh AC của tam giác ABC sao cho MN song song với BC. Các đường thẳng BN và CM cắt nhau tại P. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh rằng $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.*

Lời giải. Do các tứ giác $BMPQ$ và $CNPQ$ nội tiếp nên $\widehat{BMQ} = \widehat{BPQ} = \widehat{NCQ}$,

$$\widehat{BQM} = \widehat{MPB} = \widehat{NQC}.$$



Suy ra hai tam giác MQB và CQN đồng dạng. Từ đó

$$\frac{d(Q,AB)}{d(Q,AC)} = \frac{d(Q,MB)}{d(Q,NC)} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC},$$

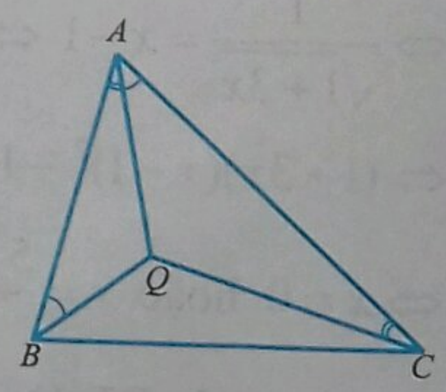
hay AQ là đường đối trung của tam giác ABC nên $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.

***Nhận xét* 1.** 1) Bài toán 1 có mệnh đề đảo vẫn đúng. Nghĩa là nếu $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$ thì $MN \parallel BC$. Lời giải chúng tôi xin dành cho bạn đọc.

2) Ta thấy điểm Q trong bài toán 1 là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AMPNBC$, hay Q là điểm nằm trên 4 đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP, CNP, ANB và AMC.

3) Bây giờ, chúng ta đặc biệt hóa bài toán bằng cách cho đường thẳng MN song song với BC suy biến về trùng với điểm A. Lúc này các đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP và CNP lần lượt trở thành đường tròn qua B, tiếp xúc với AC tại điểm A và đường tròn qua C, tiếp xúc với AB tại điểm A. Khi đó, chúng ta dễ chứng minh AQ vẫn là đường đối trung và điểm Q trở thành *điểm Dumpty* ứng với đỉnh A trong tam giác ABC. Để bạn đọc tiện theo dõi bài viết, chúng tôi xin nhắc lại mô hình *điểm Dumpty* trong tam giác.

4) *Định nghĩa điểm Dumpty*. Cho tam giác ABC. Điểm Q nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{QBA} = \widehat{QAC}$ và $\widehat{QAB} = \widehat{QCA}$ được gọi là điểm A – *Dumpty*. Định nghĩa tương tự cho các điểm B – *Dumpty* và C – *Dumpty*. *Điểm Dumpty* có nhiều tính chất đẹp và các tính chất này sẽ được chúng tôi khai thác thông qua hệ thống các bài toán dưới đây.



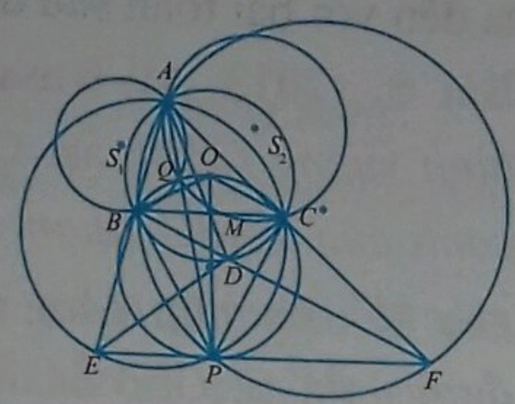
Bài 2. *Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM cắt (O) tại hai điểm A và D. Giả sử đường thẳng BD cắt đường thẳng AC tại F, đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại E, đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABF và ACE cắt nhau tại A và P. Gọi (S_1) là đường tròn qua C tiếp xúc với AB tại A, (S_2) là đường tròn qua B tiếp xúc với AC*

tại A, Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (S_1) và (S_2). Chứng minh rằng:

a) *Ba điểm A, Q, P thẳng hàng*

b) *Tam giác OPQ vuông.*

Lời giải



a) Dễ thấy P là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABDCEF$. Theo định lý Brocard thì O là trực tâm của tam giác EFM, hay $OM \perp EF$. (1)

Lại có $\overline{EA}.\overline{EB} = \overline{EC}.\overline{ED} \Rightarrow \mathscr{P}_{E/(ABF)} = \mathscr{P}_{E/(DCF)}$, mà trục đẳng phương của hai đường tròn trên là PF nên 3 điểm E, P, F thẳng hàng.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O), xét

$$\begin{aligned} OF^2 - OE^2 &= (OF^2 - R^2) - (OE^2 - R^2) \\ &= \mathscr{P}_{F/(O)} - \mathscr{P}_{E/(O)} \\ &= \overline{FA}.\overline{FC} - \overline{EC}.\overline{ED} = \overline{FP}.\overline{FE} - \overline{EP}.\overline{EF} \\ &= \overline{FE}(\overline{FP} + \overline{EP}) = (\overline{PF} - \overline{PE}).(\overline{PF} + \overline{PE}) \\ &= PF^2 - PE^2. \end{aligned}$$

Suy ra $OP \perp EF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3 điểm O, M và P thẳng hàng. Mặt khác, OM là đường trung trực của cạnh BC nên $OM \perp BC$, dẫn đến $BC \parallel EF$. Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BPE} = \widehat{PBC}$ hay PB là tiếp tuyến của (O). Chứng minh tương tự, PC là tiếp tuyến của (O), hay AP là đường đối trung của tam giác ABC. (3)

Mặt khác, dễ thấy

$$\Delta BAQ \backsim \Delta ACQ \text{ (g.g) nên } \frac{d(Q, AB)}{d(Q, AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Suy ra AQ là đường đối trung của tam giác ABC (4). Từ (3) và (4) suy ra ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

b) Theo câu a, ta có tứ giác $OBPC$ nội tiếp đường tròn đường kính OP. Suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{BQC} &= 360^0 - \widehat{AQB} - \widehat{AQC} \\ &= (180 - \widehat{AQB}) + (180 - \widehat{AQC}) \\ &= (\widehat{QAB} + \widehat{ABQ}) + (\widehat{QAC} + \widehat{ACQ}) \\ &= 2.\widehat{BAC} = \widehat{BOC}. \end{aligned}$$

Suy ra điểm Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OBPC$. Dẫn đến $OQ \perp OP$, hay tam giác OPQ vuông tại Q.

Nhận xét 2. Từ bài toán 2, ta dễ dàng nhận ra Q là điểm A – Dumpty trong tam giác ABC. Như vậy điểm Q có thể được xây dựng dựa vào một trong các cách sau:

a) Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn (S_1), (S_2).

b) Q là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính OP và đường đối trung AP của ΔABC.

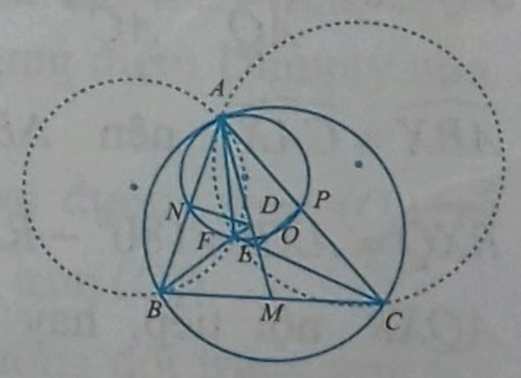
c) Q là hình chiếu vuông góc của điểm O trên đường đối trung AP của ΔABC.

d) Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn đường kính OP và đường tròn đường kính AO.

Tiếp tục khai thác cách xây dựng điểm Dumpty, ta đến với bài toán sau đây.

Bài 3. (USAMO 2008) *Cho tam giác ABC nhọn và không cân nội tiếp đường tròn (O), đường trung trực của AB và AC cắt đường trung tuyến AM tại D và E tương ứng. Gọi F là giao điểm của BD và CE; N, P lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng 4 điểm N, F, O, P cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB.



Theo bài toán 2, ta suy ra AQ là đường đối trung ứng với góc A của ΔABC. Gọi D', E' lần lượt là giao điểm của BQ, CQ với AM. Ta có $\widehat{ABQ} = \widehat{QAC} = \widehat{BAD'}$. Từ đó dẫn đến $\Delta BD'A$ cân tại D', suy ra $D \equiv D'$. Chứng minh tương tự, ta được $E \equiv E'$. Vì vậy $Q \equiv F$, hay F là điểm A – Dumpty trong tam giác ABC nên bốn điểm N, F, O, P cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

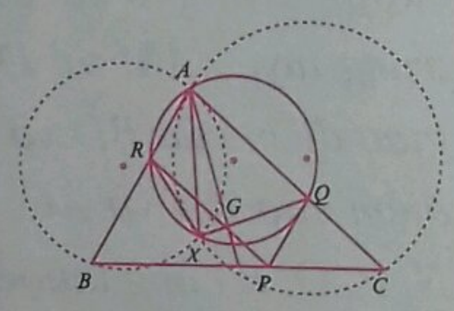
***Nhận xét* 3.** Từ bài toán trên ta có thêm một cách xây dựng điểm Dumpty độc đáo nữa. Thật trùng hợp, trong đề thi chọn Đội tuyển Mỹ năm 2008, mô hình điểm Dumpty tiếp tục được khai thác. Chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 4. (USA TST 2008) *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P là điểm thay đổi trên đoạn BC. Điểm Q và R lần lượt nằm trên các cạnh AC và AB sao cho $PQ \parallel AB$ và $PR \parallel AC$. Chứng minh rằng khi điểm P thay đổi trên đoạn BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR luôn đi qua một điểm X cố định thỏa mãn $\widehat{BAG} = \widehat{CAX}$.*

Lời giải. Gọi X là giao điểm thứ hai của đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB. Dễ thấy $\Delta AXB \backsim \Delta CXA$, suy ra $\dfrac{XB}{XA} = \dfrac{AB}{AC}$.

Mặt khác, do $PQ \parallel AB$ và $PR \parallel AC$ nên

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{RP}{AC} = \frac{AQ}{AC}.$$



Suy ra, $\dfrac{BR}{AQ} = \dfrac{AB}{AC}$, dẫn tới $\dfrac{XB}{XA} = \dfrac{BR}{AQ}$, mà $\widehat{ABX} = \widehat{CAX}$ nên $\Delta BRX \backsim \Delta AQX$, suy ra $\widehat{RXQ} = \widehat{AXB} = 180^0 - \widehat{RAQ}$. Suy ra tứ giác $AQXR$ nội tiếp, hay đường tròn ngoại tiếp ΔAQR đi qua điểm X cố định và X là điểm A – Dumpty trong ΔABC nên $\widehat{BAG} = \widehat{CAX}$.

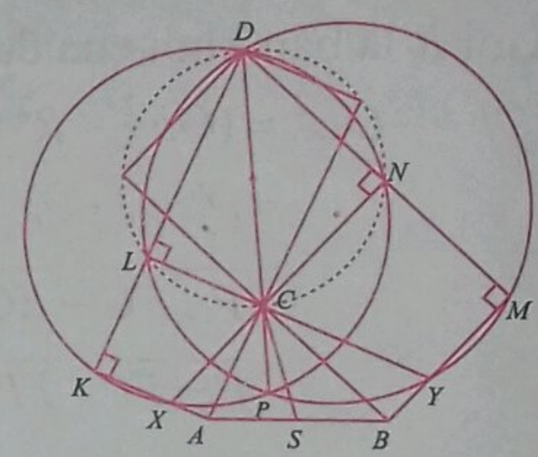
***Nhận xét* 4.** Lý do chúng ta nghĩ đến cách xây dựng điểm X là khi điểm P suy biến về hai điểm B và C thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR suy biến thành đường tròn qua hai điểm A, B đồng thời tiếp xúc với AC và đường tròn qua hai điểm A, C đồng thời tiếp xúc với AB. Từ đó, theo mô hình bài 2, dễ thấy điểm cố định cần tìm chính là điểm A – Dumpty trong ΔABC.

Tiếp tục khai thác cách xây dựng điểm Dumpty, ta đến với bài toán sau đây.

Bài 5. (2013 All-Russian Olympiad) *Các hình vuông CAKL và CBMN được vẽ trên các cạnh của ΔABC nhọn và nằm phía ngoài tam giác đó. Đường thẳng CN cắt đoạn AK tại X, đường thẳng CL cắt đoạn BM tại Y. Điểm P nằm trong ΔABC là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. Điểm S là trung điểm của AB. Chứng minh rằng*

$$\widehat{ACS} = \widehat{BCP}.$$

Lời giải. Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng KL và MN. Ta thấy D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KXN, D nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔLYM. Suy ra DP là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. Lại có, do $\Delta ACX \backsim \Delta BCY$ nên



$$\frac{CX}{CY} = \frac{CA}{CB} \Leftrightarrow CX.CN = CY.CL,$$

suy ra $\mathscr{P}_{C/(KXN)} = \mathscr{P}_{C/(LYM)}$, hay ba điểm P, C, D thẳng hàng.

Mặt khác, $\dfrac{d(D,AB)}{d(D,BC)} = \dfrac{KA}{BM} = \dfrac{AC}{CB}$, hay DP là đường đối trung ứng với góc C trong tam giác ABC, hay $\widehat{ACS} = \widehat{BCP}$.

Nhận xét 5. Điểm P trong bài toán trên chính là điểm C – Dumpty trong ΔABC. Để chứng minh cho nhận xét này ta đến với bài toán sau.

Bài 6. (Đề thi HSG lớp 10 Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội năm học 2013- 2014) *Cho tam giác ABC không cân tại A với $\widehat{BAC} > 45^0$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Dựng ra ngoài tam giác ABC các*

hình vuông ABKL và ACMN. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của đường tròn ngoại tiếp các tam giác LME và NFK.

a) *Chứng minh rằng E, F, O, P thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.*

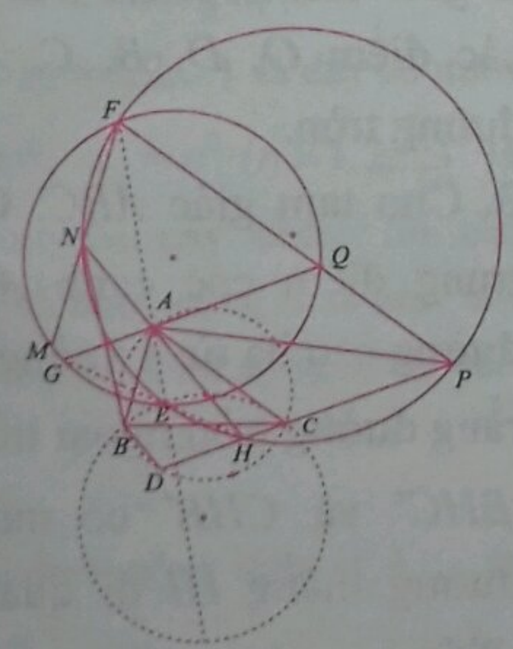
Nhận xét 6. Trong bài toán trên, yếu tố các hình vuông có thể thay thế bởi các hình bình hành đồng dạng. Thay vì đi giải bài 6, ta sẽ đến với một bài toán tổng quát hơn.

Bài 7. (Đề thi HSG Ninh Bình ngày 1, năm học 2018-2019) *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Dựng phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành ABMN và ACPQ sao cho tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAP. Gọi G là giao điểm của AQ và BM; H là giao điểm của AN và CP. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ và HNP cắt nhau tại E và F (E nằm trong đường tròn (O)).*

a) *Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, O cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. a) Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ và HNP; D là giao điểm của hai đường thẳng BM và CP, suy ra tứ giác $AGDH$ là hình bình hành. Do $\Delta ABN \backsim \Delta CAP$ nên dẫn đến



$\widehat{ABM} + \widehat{ACP} = 180^0$,

hay tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O). Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ADG}$ và $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{CDB} = \widehat{AGD}$, dẫn đến

$\Delta ABC \backsim \Delta GAD$, từ đó $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{GA}{GD} = \dfrac{GA}{AH}$ (1).

Cũng từ $\Delta ABN \backsim \Delta CAP \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AN}{CP}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{GA}{AH} = \frac{AN}{CP} \Leftrightarrow GA.AQ = AN.AH,$$

hay $\mathscr{P}_{A/(O_1)} = \mathscr{P}_{A/(O_2)}$. Vậy ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b) Gọi F' là giao điểm của hai đường thẳng MN và PQ. Ta có

$$\widehat{F'QG} = 180^0 - \widehat{GQP} = 180^0 - \widehat{F'MG},$$

suy ra F' thuộc đường tròn (O_1). Chứng minh tương tự, F' thuộc đường tròn (O_2). Suy ra $F \equiv F'$. Theo câu a, tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên tứ giác $DMFP$ nội tiếp. Từ đó suy ra

$\widehat{AEG} + \widehat{AEH} = 180^0 - \widehat{BMF} + 180^0 - \widehat{CPF} = 180^0$,

hay ba điểm G, H, E thẳng hàng. Dễ thấy các tứ giác $AEBG$ và $AEHC$ nội tiếp nên $\widehat{BAE} = \widehat{BGE} = \widehat{AHG} = \widehat{ACE}$. Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAEC. Chứng minh tương tự, AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Do đó E là điểm A – Dumpty trong tam giác ABC. Theo bài 2, ta suy ra bốn điểm B, C, E, O cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét 7. Thông qua bài toán trên, ta có thêm một số cách xây dựng điểm Dumpty nữa. Cụ thể là:

a) E là giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2) (E nằm trong đường tròn (O)).

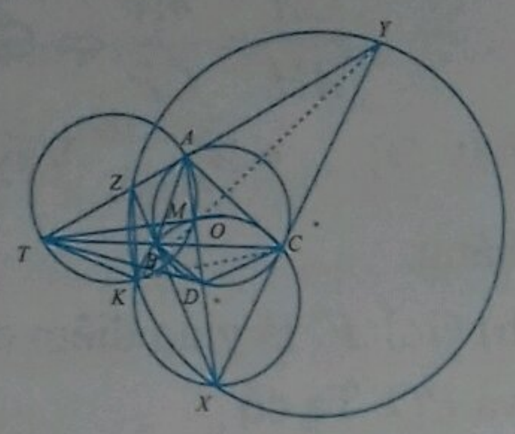
b) E là giao điểm của đường đối trung ứng với đỉnh A và đường thẳng GH.

Tiếp tục khai thác cách xây dựng điểm Dumpty, ta đến với bài toán sau đây.

Bài 8. (USA TST 2017) *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại T. Đường tròn đường kính AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại A_1 và A_2 sao cho $OA_1 < OA_2$. Các điểm B_1, B_2 và C_1, C_2 được định nghĩa*

tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy.

Lời giải. Kẻ các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C cắt nhau lần lượt tại X, Y, Z như hình vẽ. Đường đối trung AX của ΔABC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Gọi M là trung điểm của AD; K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ZBCYXT$. Ta có $ABDC$ là tứ giác điều hòa nên TD là tiếp tuyến của (O). Do đó ba điểm O, M, T thẳng hàng và điểm M nằm trên đường tròn đường kính AT (1). Mặt khác $\overline{TB}.\overline{TC} = TD^2 = TA^2 = \overline{TM}.\overline{TO}$, hay điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔOBC. (2)



Lại có K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ZBCYXT$, suy ra $\Delta ZBK \backsim \Delta YCK$ (g.g) nên

$$\frac{ZK}{ZB} = \frac{YK}{YC} \Leftrightarrow \frac{ZK}{ZA} = \frac{YK}{YA}.$$

Suy ra KA là phân giác của $\widehat{YKZ}$. Từ đó để ý tứ giác $TKBZ$ nội tiếp ta có:

$$\widehat{TKA} = \widehat{TKZ} + \widehat{ZKA} = \widehat{XBC} + \widehat{BXO} = 90^0,$$

hay K nằm trên đường tròn đường kính AT (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra M, K là hai giao điểm của đường tròn đường kính AT và đường tròn ngoại tiếp ΔOBC, hay $K \equiv A_2, M \equiv A_1$. Suy ra AA_1 là đường đối trung ứng với góc A của ΔABC. Chứng minh tương tự, BB_1, CC_1 cũng là các đường đối trung ứng với góc B và góc C của ΔABC nên chúng đồng quy tại *điểm Lemoine* (điểm liên hợp đẳng giác với trọng tâm G của ΔABC).

Nhận xét 8. Trong bài toán trên, dễ thấy M là điểm $A-$Dumpty của tam giác ABC. Từ đây chúng ta có thêm một số cách xây dựng điểm Dumpty nữa:

a) M là giao điểm của đường thẳng TO với đường đối trung AX.

b) M là giao điểm thứ hai của đường thẳng TO với đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Như vậy, việc xét bài hình học trong kỳ thi Balkan MO 2009 trong trường hợp suy biến, khi đó điểm Miquel của tứ giác toàn phần suy biến thành điểm Dumpty trong tam giác, chúng ta đã khai thác được rất nhiều tính chất thú vị về điểm Dumpty. Sau cùng, xin mời bạn đọc đến với một số bài toán rèn luyện.

BÀI TẬP

1. (China TST 2010) Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E và B nằm giữa A và E. Đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F và D nằm giữa A và F. Giả sử đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEC và CFD cắt nhau tại C và P. Chứng minh rằng $\widehat{BAP} = \widehat{CAD}$ khi và chỉ khi $BD \parallel EF$.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi U là giao điểm của SC với đường thẳng qua A và song song với BC, V là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và song song với SC, D là giao điểm của AS với UV. Chứng minh rằng các điểm O, D, B, C, S cùng nằm trên một đường tròn.

3. Cho tam giác ABC. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh AC và AB, H là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C'$, BHC' và CHB' có một điểm chung là I và đường thẳng HI đi qua trung điểm của cạnh $B'C'$.

4. (Iran TST 2017) Cho điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{BPC} = 2\widehat{BAC}$, $\widehat{PCA} = \widehat{PAD}$, $\widehat{PDA} = \widehat{PAC}$. Chứng minh rằng

$$\widehat{PBD} = \left|\widehat{PCA} - \widehat{BCA}\right|.$$

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

DÃY SỐ DƯỚI CỘNG TÍNH

KIỀU ĐÌNH MINH - HOÀNG BẢO LÂM - NGUYỄN ĐĂNG KHOA

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Trên các số báo TH&TT trước, chúng tôi đã giới thiệu một số dãy số đặc biệt: Dãy số điều hòa, dãy số lồi, ... Trong số này chúng tôi tiếp tục gửi đến bạn đọc một loại dãy số cũng rất thú vị khác, đó là dãy số "Dưới cộng tính".

I. Định nghĩa và tính chất

1. Định nghĩa

Dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ được gọi là dãy số **dưới cộng tính** nếu thỏa mãn $x_{m+n} \leq x_m + x_n$, $\forall m, n = 1,2,3,....$

Nếu dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn bất đẳng thức $x_{m+n} \geq x_m + x_n$, với mọi $m,n = 1,2,3,....$ thì $(x_n)_{n\geq 1}$ được gọi là dãy số **siêu cộng tính**.

Rõ ràng nếu dãy số $(x_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn $x_{m+n} \leq x_m + x_n + c, \forall m,n = 1,2,3,...$ với c là một hằng số thì dãy $(x_n + c)_{n\geq 1}$, cũng là một dãy dưới cộng tính.

Bạn đọc có thể tự lấy thí dụ về các dãy số dưới cộng tính hay dãy số siêu cộng tính, chẳng hạn:

Dãy số (x_n) với $x_n = \sqrt{n}$ $(n = 1,2,...)$ là dãy số dưới cộng tính, dãy số (x_n) với $x_n = n^2$ $(n = 1,2,...)$ là dãy số siêu cộng tính. Trong bài này, chúng tôi chỉ nói về tính chất của dãy số dưới cộng tính như tên của bài báo đã nêu. Về dãy số siêu cộng tính, bạn đọc hãy tự tìm hiểu thêm.

2. Tính chất

***Tính chất* 1.** Với mọi dãy dưới cộng tính $(x_n)_{n\geq 1}$, ta có $x_n \leq kx_m + x_{n-km}, \forall k < \dfrac{n}{m}$ $(m,n,k \in \mathbb{N}^*)$. (1)

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo k. Theo giả thiết, $x_n = x_{m+(n-m)} \leq x_m + x_{n-m}$, nên (1) đúng khi $k = 1$. Giả sử (1) đúng đến k, ta có

$$x_n \leq kx_m + x_{n-km} = kx_m + x_{m+(n-km-m)}$$
$$\leq kx_m + x_m + x_{n-km-m} = (k+1)x_m + x_{n-(k+1)m},$$

nghĩa là (1) cũng đúng đến $k+1$, với $k+1 < \dfrac{n}{m}$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. Ở đây ta chỉ quy nạp theo k đến chừng nào bất đẳng thức $k < \dfrac{n}{m}$ vẫn đúng!

***Tính chất* 2.** Với mọi dãy dưới cộng tính $(x_n)_{n\geq 1}$, ta có $x_n \leq mx_1 + \left(\dfrac{n}{m} - 1\right)x_m, \forall n \geq m$ $(m,n \in \mathbb{N}^*)$. (2)

Chứng minh. Từ giả thiết ta có

$$x_m = x_{1+(m-1)} \leq x_1 + x_{m-1} \leq ... \leq mx_1.$$

Viết $n = mk + r$, với $k \geq 1$, $r \in \{0;1;...;m-1\}$. Ta có $x_m \leq mx_1$ và $x_r \leq rx_1$. Ta cần chỉ ra rằng

$$x_{km+r} \leq mx_1 + \left(\frac{km+r}{m} - 1\right)x_m$$

hay $mx_{km+r} \leq m^2x_1 + ((k-1)m + r)x_m$ (*)

Ta sẽ chứng minh (*) bằng quy nạp theo k.

Với $k = 1$, ta phải chứng minh $mx_{m+r} \leq m^2x_1 + rx_m$. Ta có được điều này bằng cách cộng hai bất đẳng thức

$$rx_{m+r} \leq r^2x_1 + rx_m$$
$$(m-r)x_{m+r} \leq (m-r)(m+r)x_1 = (m^2 - r^2)x_1.$$

Giả sử (*) đúng đến k, tức là

$$mx_{km+r} \leq m^2x_1 + ((k-1)m + r)x_m.$$

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức này với mx_m, ta được $mx_{km+r} + mx_m \leq m^2x_1 + (km + r)x_m$.

Lại có $mx_{(k+1)m+r} \leq m(x_{km+r} + x_m) = mx_{km+r} + mx_m$, từ đó suy ra (*) đúng cho $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều cần chứng minh.

***Tính chất* 3.** Cho dãy dưới cộng tính $(x_n)_{n\geq 1}$, khi đó nếu $m \geq n$ thì $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq \dfrac{n(n+1)}{2m}x_m$ (3)

Chứng minh. Với $m = n$ thì (3) đúng, nghĩa là có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \frac{n+1}{2} x_n \qquad (**)$$

Thật vậy, ta có thể thấy điều này bằng cách cộng các bất đẳng thức cùng chiều sau:

$$x_1 + x_{n-1} \geq x_n$$
$$x_2 + x_{n-2} \geq x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} + x_1 \geq x_n$$

Suy ra

$$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) \geq (n-1)x_n$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n \geq \frac{n-1}{2} x_n + x_n = \frac{n+1}{2} x_n.$$

Bây giờ với $j \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_j = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_j}{1 + 2 + \ldots + j}$. Khi đó, từ (**) bằng cách cho $m = n = j = k+1$, ta được $y_j \geq \dfrac{x_j}{j}$ và $y_j \geq y_{j+1}$. Từ đó, khi $m \geq n$, ta có

$$y_n \geq y_{n+1} \geq \ldots \geq y_{m-1} \geq y_m \geq \frac{x_m}{m}.$$

Tính chất 4. Cho dãy dưới cộng tính $(x_n)_{n\geq 1}$, khi đó

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (4)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Hiển nhiên khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$. Giả sử khẳng định đúng với $n = 1, 2, \ldots, k-1$ $(k \in \mathbb{N}, k > 2)$. Ta có

$$x_1 = x_1$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} \geq x_2$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \geq x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{k-1} \geq x_{k-1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$(k-1)x_1 + (k-2)\frac{x_2}{2} + \ldots + (k-(k-1))\frac{x_{k-1}}{k-1} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}$$

$$\Rightarrow k\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{k-1}\right) \geq 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) \geq (k-1)x_k$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_k}{k} \geq x_k.$$

Theo nguyên lý quy nạp thì (4) được chứng minh xong. Ta cũng có thể sử dụng tích chất 3 để chứng minh (4) như sau: Bằng cách áp dụng (3) nhiều lần ta được

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)(x_1 + x_2 + \ldots + x_j) \geq$$
$$\geq \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2n} x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)}.\frac{j(j+1)}{2n}.x_n = x_n.$$

Tính chất 5 (Bổ đề Fekete). Cho dãy dưới cộng tính $(x_n)_{n\geq 1}$ không âm, khi đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$ và giới hạn đó bằng $\inf\limits_{n\geq 1} \dfrac{x_n}{n}$.

Chứng minh. Đặt $L = \inf\limits_{n\geq 1} \dfrac{x_n}{n}$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, chọn n sao cho $\dfrac{x_n}{n} < L + \varepsilon$ hay $x_n < n(L + \varepsilon)$ (số n như vậy là tồn tại theo định nghĩa của infimum). Đặt $c = \max\limits_{1\leq i<n} x_i$. Nếu $m \geq n$, đặt $m = qn + r$ với $0 \leq r < n$. Từ tính chất dưới cộng tính của dãy , ta có

$$x_m = x_{qn+r} = x_{\underbrace{n+n+\ldots+n}_{q\text{ số }n}+r} \leq x_n + x_n + \ldots + x_n + x_r \leq qx_n + c.$$

Vì vậy $\dfrac{x_m}{m} \leq \dfrac{qx_n}{m} + \dfrac{c}{m} < \dfrac{qn(L+\varepsilon)}{m} + \dfrac{c}{m} \to L + \varepsilon$ khi $m \to +\infty$, do $\dfrac{qn}{m} \to 1$ khi $m \to +\infty$.

II. Một số thí dụ

Thí dụ 1. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a_{i+j} \leq a_i + a_j$, với mọi $i, j \geq 1$, $i + j \leq n$. Chứng minh rằng:*

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).\frac{a_n}{n}.$$

Lời giải. Đặt

$$t = \min\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n}{n}\right\} = \frac{a_l}{l} \quad (1 \leq l \leq n).$$

Khi đó xét dãy số (b_i) xác định bởi

$$b_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n},\ b_l = 0,\ b_i = a_i - ti.$$

Khi đó có $b_{i+j} \leq b_i + b_j$ hay dãy (b_i) thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - ti}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} - t\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \text{ và}$$

$$\frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{a_n-tn}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i^2}\ge\frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}\ge\frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ (*)

Ta chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, với $n=1$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng đến $n-1$. Xét các trường hợp

- Nếu $l=n$ tức $b_n=0$ thì khẳng định luôn đúng.
- Nếu $l\ne n$, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}\ge\sum_{i=1}^{n-l}\frac{b_i}{i^2}\ge\frac{b_{n-l}}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}=\frac{b_{n-l}+b_l}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}\ge\frac{b_n}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}.$$

Ta chứng minh dãy số $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ là giảm. Thật vậy

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$, điều này đúng vì $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}>1>\frac{1}{n(n-1)}>\frac{1}{n^2}$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i^2}\ge\frac{b_n}{n-l}\sum_{i=1}^{n-l}\frac{1}{i}\ge\frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. *Giả sử dãy các số nguyên không âm $a_1,a_2,...,a_{1997}$ thỏa mãn $a_i+a_j\le a_{i+j}\le a_i+a_j+1$, $\forall i,j\ge1$ và $i+j\le1997$. Chứng minh rằng tồn tại số thực x sao cho $a_n=[nx]$ với mọi $1\le n\le1997$ (trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).*

Lời giải. Ta phải chỉ ra tồn tại $x\in\left[\frac{a_n}{n};\frac{a_n+1}{n}\right)$, với mọi n mà $1\le n\le1997$. Do vậy cần chỉ ra sự tồn tại của x với 1997 phần tử của dãy thì các đoạn là giao nhau, tức là với mọi m, n thì $\frac{a_n+1}{n}\ge\frac{a_m}{m}$. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp theo $m+n$.

Nếu $m+n=2\Leftrightarrow m=n=1$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

- Nếu $m=n$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng
- Nếu $n>m\Rightarrow n=mq+r,\ 0<r<m$.

Do đó $m+r<n+m$ và từ giả thiết quy nạp suy ra

$$\frac{a_r+1}{r}\ge\frac{a_m}{m}\Rightarrow a_{mq+r}+1\ge qa_m+a_r+1=qa_m+r.\frac{a_r+1}{r}$$

$$\ge qa_m+r.\frac{a_m}{m}=n.\frac{a_m}{m}\Rightarrow\frac{a_n+1}{n}\ge\frac{a_m}{m}.$$

- Nếu $n<m\Rightarrow m=nq+r,\ 0<r<n$.

Do đó $n+r<n+m$ lại theo giả thiết quy nạp suy ra

$$\frac{a_r}{r}\le\frac{a_n+1}{n}\Rightarrow na_m=na_{qn+r}\le n(qa_n+a_r+q)\le$$

$$\le nqa_n+nq+nr.\frac{a_r}{r}$$

$$\le nqa_n+nq+nr.\frac{a_n+1}{n}=nqa_n+nq+ra_n+r$$

$$=m(a_n+1)\Rightarrow\frac{a_n+1}{n}\ge\frac{a_m}{m}.$$

Thí dụ 3. *Cho dãy (u_n) các số nguyên dương thỏa mãn $0\le u_{m+n}-u_m-u_n\le2,\ \forall m,n\ge1$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực dương a_1,a_2 sao cho*

$$[a_1n]+[a_2n]-1\le u_n\le[a_1n]+[a_2n]+1,\ \forall n\le2017.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp với mọi m, n nguyên dương thì $mu_n<n(u_m+2)$ (1) (hay $\frac{u_n}{n}<\frac{u_m+2}{m}$ như thí dụ 2).

Với $m+n=2\Rightarrow m=n=1$, (1) trở thành $u_1<u_1+2$, ta thấy (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $\forall m+n$ mà $2\le m+n<k$. Ta chứng minh (1) đúng với $m+n=k$. Thật vậy

- Nếu $m=n$ thì (1) trở thành $mu_m<m(u_m+2)$, bất đẳng thức này đúng.
- Nếu $m>n$, xét cặp số $(m-n,n)$, ta có $m-n+n=m<m+n=k$. Do đó theo giả thiết quy nạp thì $(m-n)u_n<n(u_{m-n}+2)$. Mặt khác từ điều kiện của đề bài $u_n+u_{m-n}\le u_m$ suy ra

$$n(u_n+u_{m-n})\le nu_m\Rightarrow(m-n)u_n+n(u_n+u_{m-n})<$$

$$<n(u_{m-n}+2)+nu_m\Rightarrow mu_n<n(u_m+2).$$

- Nếu $m<n$, xét cặp số $(m,n-m)$, ta có $m+n-m=n<m+n=k$. Do đó theo giả thiết quy nạp có $mu_{n-m}<(n-m)(u_m+2)$. Mặt khác, từ điều kiện đề bài $u_n\le u_{n-m}+u_m+2$ suy ra $mu_n\le m(u_{n-m}+u_m+2)$. Thành thử

$$mu_{n-m}+mu_n<(n-m)(u_m+2)$$

$$+m(u_{n-m}+u_m+2)\Rightarrow mu_n<n(u_m+2).$$

Trở lại bài toán. Từ (1) suy ra

$$\frac{u_n}{n}<\frac{u_m+2}{m},\forall m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Đặt $K=\max_{1\le n\le2017}\left(\frac{u_n}{n}-1\right)=\frac{u_p}{p}-1;$

$$L=\min_{1\le n\le 2017}\left(\frac{u_n+2}{n}-1\right)=\frac{u_q+2}{q}-1.$$

Do (1) có $\frac{u_p}{p}<\frac{u_q+2}{q}\Rightarrow K<L.$

Do $u_1\ge 1$ nên $K\ge\frac{u_1}{1}-1\ge 0$. Vậy $0\le K<L$. Chọn $a_1=1, a_2\in(K;L)$. Với mọi $1\le n\le 2017$, ta có:

- $a_2n<Ln\le\left(\frac{u_n+2}{n}-1\right)n=u_n+2-n$

$\Rightarrow[a_2n]\le u_n-n+1$. Do đó

$[a_1n]+[a_2n]-1=n-1+[a_2n]\le n-1+u_n-n+1=u_n.$

- $a_2n>Kn\ge\left(\frac{u_n}{n}-1\right)n=u_n-n\Rightarrow[a_2n]\ge u_n-n$

(do $u_n-n\in\mathbb{Z}$ và $a_2n>u_n-n$).

Vậy

$[a_1n]+[a_2n]+1=n+1+[a_2n]\ge n+1+u_n-n=u_n+1>u_n.$

Thí dụ 4. *Dãy các số thực $x_1,x_2,...$ thỏa mãn $|x_{m+n}-x_m-x_n|\le 1,\ \forall m,n=1,2,...$. Chứng minh rằng*

$$\left|\frac{x_m}{m}-\frac{x_n}{n}\right|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ \forall m,n=1,2,...$$

Lời giải. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh

$$|x_{mn}-nx_m|<n. \qquad (1)$$

Với $n=1$ ta có $|x_m-x_m|=0<1$, khẳng định (1) đúng. Giả sử (1) đúng cho n, khi đó

$$|x_{m(n+1)}-(n+1)x_m|\le|x_{mn+m}-x_{mn}-x_m|+|x_{mn}-nx_m|<1+n,$$

do đó (1) đúng cho $n+1$. Từ đó ta có

$$|mx_n-nx_m|\le|x_{mn}-mx_n|+|x_{mn}-nx_m|<m+n$$

$$\Rightarrow\left|\frac{x_m}{m}-\frac{x_n}{n}\right|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\forall m,n=1,2,...$$

Thí dụ 5. *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại hàm cộng tính $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $|f(x)-g(x)|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$.*

Lời giải. Theo thí dụ 4 thì dãy $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ là dãy Cauchy nên nó là dãy hội tụ. Cố định x, xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_n=f(nx), n\in\mathbb{N}^*$. Theo giả thiết ta có $|x_{m+n}-x_m-x_n|\le 1,\ \forall m,n=1,2,...$. Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(nx)}{n}$. Ta sẽ chứng minh g là cộng tính. Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$-1\le f(nx+ny)-f(nx)-f(ny)\le 1$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{n}\le\frac{f(n(x+y))}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\le\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*,$$

cho $n\to+\infty$, ta được $g(x+y)=g(x)+g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Mặt khác, theo nhận xét trên thì

$$-n+1\le f(nx)-nf(x)\le n-1$$

$$\Rightarrow-1+\frac{1}{n}\le\frac{f(nx)}{n}-f(x)\le 1-\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Cho $n\to+\infty$, ta được

$$-1\le g(x)-f(x)\le 1\Rightarrow|f(x)-g(x)|\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Trên đây, chúng tôi đã giới thiệu một cách cơ bản về khái niệm dãy số Dưới cộng tính cũng như một số thí dụ có liên quan. Rất hy vọng bạn đọc sẽ khai thác thêm nhiều tính chất cho dãy số thú vị này. Sau cùng chúng tôi giới thiệu thêm một số bài tập để bạn đọc tự luyện tập.

1. Cho số thực $C>1$ và dãy số thực dương $(a_n)_{n\ge1}$ có $a_1=1, a_2=2$ thỏa mãn các điều kiện sau $a_{mn}=a_ma_n$ và $a_{m+n}\le C(a_n+a_m)$, $m,n=1,2,...$. Chứng minh rằng $a_n=n,\ \forall n=1,2,...$

2. Cho $c>2$, $a_1,a_2,...$ là dãy các số thực không âm sao cho $a_{m+n}\le 2a_m+2a_n,\ \forall m,n\ge1$ và $a_{2^k}\le\frac{1}{(k+1)^c},\forall k\ge0$. Chứng minh rằng dãy số $(a_n)_{n\ge1}$ bị chặn.

3. Xét dãy số thực $x_1,x_2,x_3,...$ thỏa mãn $|x_{m+n}-x_m-x_n|<\frac{1}{m+n},\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số đã cho là một cấp số cộng.

4. Cho dãy số thực $(a_n)_{n\ge1}$ thỏa mãn $a_m+a_n-1<a_{m+n}<a_m+a_n+1,\ \forall m,n\ge1$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\omega$ và $\omega n-1<a_n<\omega n+1,\ \forall n\ge1$.

5. Cho dãy số thực $(u_n)_{n\ge1}$ sao cho $\begin{cases}u_n\ge1,\forall n=1,2,...\\u_{m+n}\le u_mu_n,\forall m,n=1,2,...\end{cases}$ và dãy số $(v_n)_{n\ge1}$ xác định bởi $v_n=\frac{\ln u_n}{n},\ \forall n=1,2,...$. Chứng minh rằng $(v_n)_{n\ge1}$ hội tụ và giới hạn của nó là $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(v_n)$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 44

Problem. *The salaries of 9 randomly chosen people in a small company are* 9, 12, 14, 15, 200, 9, 17, 16, 11 (*mililions VND*).

Choose an appropriate measure of central tendency (mean, mode, or median) to summarise these salaries. Give the reasons why the other measures are not suitable.

Solution. We can reorder the data as follows 9, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 200.

The mode is 9. The median is 14. The mean is (9 + 9 + 11 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17 + 200): 9 = 33.7 (up to 1 d.p.).

We should choose the median to summarize the salaries. We should not use the mean since we have an outlier which is 200 and that will give the wrong information. We should not use the mode which is 9 because it only appears one more comparing to the other data and also, it is at the low extreme.

TỪ VỰNG

Central	: trung tâm
Tendency	: xu hướng
Mean	: trung bình
Mode	: số xuất hiện nhiều lần nhất
Median	: trung vị
Outlier	: phần tử ngoại lai
Up to	: chính xác đến, tính đến
Decimal place (d.p.)	: chữ số thập phân

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 41

Bài toán. *Có 9 tấm thẻ: một thẻ được đánh số 1, một thẻ được đánh số 2, … một thẻ được đánh số 9. Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ, lấy lần lượt từng tấm thẻ một và không đặt trở lại vị trí ban đầu, sau đó tính tổng của hai số ghi trên hai tấm thẻ đó. Tính xác suất để tổng hai số là số có một chữ số.*

Lời giải. Xét bảng sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	3	4	5	6	7	8	9	
2	3	×	5	6	7	8	9		
3	4	5	×	7	8	9			
4	5	6	7	×	9				
5	6	7	8	9					
6	7	8	9						
7	8	9							
8	9								
9									

Lưu ý rằng có $9 \times 8 = 72$ cách chọn hai tấm thẻ. Từ bảng trên ta thấy xác suất để tổng hai số trên hai tấm thẻ là số có một chữ số bằng $\frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. □

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm hơn cả: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Huy, Nguyễn Thị Nhật*, 12A1 – K12, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, Phường 7, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 24: *Giải phương trình*

$$2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -1$.

Cách 1. Đặt ẩn phụ (một ẩn).

$(1) \Leftrightarrow 2(x+1)+2(x^2-x+1)=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$

Vì $x=-1$ không là nghiệm của PT nên chia hai vế cho $\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \neq 0$ ta được:

$$2\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+2\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}=5.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}>0$ ta có phương trình:

$$2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

• Với $t=2$ ta có: $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}=2 \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$

PT này vô nghiệm.

• Với $t=\frac{1}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Cách 2. Đặt ẩn phụ (một ẩn).

Vì $x=0$ không là nghiệm của PT nên chia hai vế của PT(1) cho $x^2 \neq 0$ ta được: $2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=5\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}$

Đặt $t=\frac{1}{x}$ PT trở thành:

$$2(1+2t^2)=5\sqrt{t+t^4} \Leftrightarrow 9t^4-16t^2+25t-4=0$$

$$\Leftrightarrow (3t^2+5t-1)(3t^2-5t+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t^2+5t-1=0 \\ 3t^2-5t+4=0 \end{array}\right..$$

• Với $3t^2-5t+4=0$: PT vô nghiệm.

• Với $3t^2-5t-1=0$ suy ra

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-5-\sqrt{37}}{6}=\frac{2}{5-\sqrt{37}} \\ t=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}=\frac{2}{5+\sqrt{37}} \end{array}\right..$$

Từ đó ta có 2 nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Cách 3. Đặt ẩn phụ (hai ẩn).

$(1) \Leftrightarrow 2(x+1)+2(x^2-x+1)=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$

Đặt $a=\sqrt{x+1}>0;\ b=\sqrt{x^2-x+1}>0$ ta có PT:

$$2a^2+2b^2=5ab \Leftrightarrow (2a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a=b \\ a=2b \end{array}\right..$$

• Với $2a=b$ ta có:

$$2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

• Với $a=2b$ ta có:

$$\sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0:$$

PT vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Cách 4. Đặt ẩn phụ (hai ẩn)

$(1) \Leftrightarrow 2(x^2+2)=5\sqrt{(x+1)[(x^2+2)-(x+1)]}$

Đặt $a=x^2+2>0;\ b=x+1>0$ ta có PT:

$$2a=5\sqrt{b(a-b)} \Leftrightarrow 4a^2-25ab+25b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (4a-5b)(a-5b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a=5b \\ a=5b \end{array}\right..$$

• Với $4a=5b$ ta có: $4(x^2+2)=5(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$: PT vô nghiệm.

• Với $a=4b$ ta có: $x^2+2=5(x+1) \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Cách 5. Đặt ẩn phụ (hai ẩn)

Vì $x=0$ không là nghiệm của PT nên chia hai vế của PT(1) cho $x \neq 0$ ta được:

$$\begin{cases} x>0 \\ 2\left(x+\frac{2}{x}\right)=5\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)} \end{cases} \quad \text{(I) hoặc}$$

$$\begin{cases} -1 \le x < 0 \\ 2\left(x+\dfrac{2}{x}\right) = -5\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)} \end{cases} \quad (\text{II})$$

• Xét hệ (I). Đặt $a = x + \dfrac{1}{x}$; $b = \dfrac{1}{x}$; PT trở thành:

$2(a+b) = 5\sqrt{(b+1)(a-1)} \Rightarrow 4(a+b)^2 = 25(a-1)(b+1)$

$\Rightarrow 4a^2 - a(17b+25) + 4b^2 + 25b + 25 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{b+5}{4} \\ a = 4b+5 \end{array}\right..$$

- Với $4a = b+5$ ta có:

$$4\left(x+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 5 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0:$$

PT vô nghiệm.

- Với $a = 4b+5$ ta có: $x + \dfrac{1}{x} = 4\dfrac{1}{x} + 5 \Rightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$ (do $x > 0$).

• Xét hệ (II) giải tương tự trên ta được nghiệm:

$$x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}.$$

Tóm lại PT đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Nhận xét. Qua các cách giải trên, nhận thấy PT đã cho có các thừa số $(x^2 - 5x - 3)$ và $(4x^2 - 5x + 3)$ nên ta có thêm các cách giải sau:

Cách 6. Đưa về phương trình có chứa hai thừa số $(x^2 - 5x - 3)$ và $(4x^2 - 5x + 3)$

$(1) \Leftrightarrow 4(x^4 + 4x^2 + 4) = 25(x^3 + 1)$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 3)(4x^2 - 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right..$$

Đến đây ta được 2 nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Cách 7. Nhân biểu thức liên hợp làm xuất hiện nhân tử $(x^2 - 5x - 3)$.

$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 - 5x - 3) = 5\sqrt{x^3+1} - 10(x+1)$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x - 3) = 5\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x - 3) = 5\sqrt{x+1}.\frac{x^2 - 5x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 2\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 3)\left[2 - \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 2\sqrt{x+1}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 2 = \dfrac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 2\sqrt{x+1}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right..$$

Giải như trên, PT đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Cách 8. Nhân biểu thức liên hợp làm xuất hiện nhân tử $(4x^2 - 5x + 3)$.

PT (1) $\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 10\sqrt{x^3+1} - 5(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 5\sqrt{x+1}(2\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x+1})$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 5\sqrt{x+1}.\frac{4x^2 - 5x + 3}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 5x + 3)\left[1 - \frac{5\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 1 = \dfrac{5\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \end{array}\right..$$

Giải như trên, PT đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(*GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định*)

Nhận xét. Ngoài 8 cách giải nêu trên của bạn *Đoàn Cát Nhơn* – tác giả bài toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải tương tự như những cách giải trong bài trên từ các bạn: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Vũ Hàn Tín*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội;** *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ;** *Nguyễn Văn Luân*, GV THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương;** *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên;** *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An;** *Trần Mạnh Hùng*, GV THCS Ea Yong, huyện Krông Păk, **Đăk Lăk;** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi;** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, Phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre.** Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 26 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2019.

BÀI TOÁN 26. *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình* $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 501, T3.2019.

Bài 32 (MEMO 2017).

Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của biểu thức

$$A = \left|2^m - 181^n\right|$$

với m và n là các số nguyên dương.

Lời giải. Ta có: $181^2 = 32761$ và $2^{15} = 32768$.

Lấy hiệu của hai số trên ta có: $2^{15} - 181^2 = 7$.

Ta thấy hiệu $2^m - 181^n$ là số lẻ, do đó A phải là số lẻ dương. Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của A là 7, và để làm điều đó ta chỉ cần chứng tỏ A không thể nhận các giá trị là 1, 3 và 5.

Đầu tiên ta xét đồng dư modulo 15 của 2^m và 181^n. Ta có: $2^m \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$

và $181^n \equiv 1 \pmod{15}$

$\Rightarrow 2^m - 181^n \equiv 0, 1, 3, 7 \pmod{15}$

$\Rightarrow A = \left|2^m - 181^n\right| \equiv 0, 1, 3, 7, 8, 12, 14 \pmod{15}$

$\Rightarrow A$ không thể nhận giá trị bằng 5.

Rõ ràng $m \geq 4$ là cần thiết để A nhỏ hơn 7. Bây giờ ta xét các phương trình sau:

- $2^m - 181^n = -1 \Rightarrow 2^m = 181^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$:

điều này là không thể.

- $2^m - 181^n = 1 \Rightarrow 2^m = 181^n + 1 \equiv 2 \pmod 4$:

điều này là không thể với $m \geq 2$.

- $2^m - 181^n = -3 \Rightarrow 2^m = 181^n - 3 \equiv 2 \pmod 4$:

điều này cũng là không thể với $m \geq 2$.

- Do đó ta còn phương trình cuối cần xét là:

$$2^m - 181^n = 3 \Leftrightarrow 2^m = 181^n + 3. \qquad (*)$$

Do $2^m \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ và $181^n + 3 \equiv 4 \pmod{15}$

nên $2^m \equiv 4 \pmod{15}$, do đó $m \equiv 2 \pmod 4$ hay

$m = 4k + 2,\ k \in \mathbb{N}$.

Bây giờ ta xét phương trình (*) với modulo 13. Ta có: $2^m = 181^n + 3 \Rightarrow 2^{4k+2} \equiv (-1)^n + 3 \pmod{13}$

$$\Leftrightarrow 4.16^k \equiv (-1)^n + 3 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow 4.3^k \equiv (-1)^n + 3 \pmod{13}.$$

Ta có: $(-1)^n + 3 \equiv 2, 4 \pmod{13}$;

$$4.3^k \equiv 4, 12, 10 \pmod{13}.$$

Do đó: $(-1)^n + 3 \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow n$ phải chẵn hay $n = 2q,\ q \in \mathbb{N}^*$. Từ đó:

$$A = \left|2^m - 181^n\right| = \left|2^{4k+2} - 181^{2q}\right|$$

$$= \left|(2^{2k+1} - 181^q)(2^{2k+1} + 181^q)\right| \geq 183.$$

Vậy $\min\limits_{m,n \in \mathbb{N}^*} \left|2^m - 181^n\right| = 7$ khi $m = 15, n = 2$.

Nhận xét. Một số bạn khi giải bài này đã không chú ý đến điều kiện nguyên dương của m, n nên đã dẫn đến kết luận sai.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 34. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

PHẠM DUY KHÁNH

(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)

GIẢI ĐÁP: AI ĐÚNG !

(*Đề đăng trên TH&TT số* 499, *tháng* 1 *năm* 2019)

Phân tích. Lời giải của cả *Hạnh* và *Phúc* đều sai.

Lời giải của bạn *Hạnh* mới chỉ trao thưởng cho *Hùng* và *Hậu* mà chưa trao thưởng cho 10 bạn còn lại. Lời giải của *Phúc* đã phân biệt phần thưởng của *Hùng*, *Hậu* với phần thưởng cùng loại của các bạn khác trong số 10 bạn còn lại, trong khi những phần thưởng cùng loại là giống hệt nhau.

Lời giải đúng. Số phần thưởng là 12, mỗi phần thưởng gồm 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Gọi x là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí, y là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học, z là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Ta có $x+y+z=12, x+y=7, x+z=8, y+z=9$.

Tính được $x=3,\ y=4,\ z=5$. Nếu coi 12 phần thưởng này đôi một khác nhau thì số cách trao thưởng cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng giống nhau là $A_3^2+A_4^2+A_5^2$. Số cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại là $10!$. Tuy nhiên, 12 phần thưởng của thầy *Hoàng Ngọc Hiền* được chia thành 3 nhóm, 1 nhóm có 3 phần thưởng giống nhau, 1 nhóm có 4 phần thưởng giống nhau, 1 nhóm có 5 phần thưởng giống nhau. Vì thế, số cách trao thưởng theo yêu cầu của bài toán là

$$\frac{(A_3^2+A_4^2+A_5^2)10!}{3!.4!.5!}=7980 \text{ (cách)}.$$

Nhận xét. Chỉ có hai bạn phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Đó là các bạn: *Hà Thị Phương Mai, Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

KIHIVI

ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐỒ THỊ !

Trong giờ ôn thi THPTQG tại lớp 12A1, thầy giáo có nêu bài toán: *Hai số thực a, b thỏa mãn đường thẳng (d): $y = ax + b$ luôn tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): y=x^2-(2m+3)x+m^2+2m$ với mọi tham số thực m. Khẳng định nào sau đây đúng:*

A. $a+b=0$ **B.** $a-b=0$

C. $ab<0$ **D.** *không tồn tại a, b.*

Sau vài phút suy nghĩ, bạn *Hoài* xung phong lên bảng giải, sau đây là lời giải của bạn *Hoài*:

Điều kiện tiếp xúc của đường thẳng (*d*) với đồ thị (C) là hệ phương trình

$$\begin{cases} a=2x-(2m+3) & (1) \\ ax+b=x^2-(2m+3)x+m^2+2m & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x.$$

Bây giờ ta tìm *a*, *b* để hệ (1), (2) có nghiệm *x* với mọi tham số *m*. Thay (1) vào (2) ta được

$$[2x-(2m+3)]x+b=x^2-(2m+3)x+m^2+2m$$

$$\Leftrightarrow x^2=m^2+2m-b \ (3).$$

PT(3) có nghiệm với mọi *m* khi và chỉ $m^2+2m-b\ge 0\,\forall m \Leftrightarrow (m+1)^2\ge b+1\ \forall m \Leftrightarrow b\le -1$.

Với $b\le -1$, ta có $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{m^2+2m-b} \\ x=-\sqrt{m^2+2m-b} \end{array}\right.$

TH1: $x=\sqrt{m^2+2m-b}$, ta có:

$a=2\sqrt{m^2+2m-b}-(2m+3)$, ta thấy *a* còn phụ thuộc vào tham số *m*. Thật vậy, với $m=0$ ta có $a=2\sqrt{-b}-3$, với $m=-2$ ta có $a=2\sqrt{-b}+1$, mà $2\sqrt{-b}-3\ne 2\sqrt{-b}+1, \forall b\le -1$. Vậy trường hợp này không tồn tại *a* thỏa mãn yêu cầu.

TH2: $x=-\sqrt{m^2+2m-b}$, ta có:

$a=-2\sqrt{m^2+2m-b}-(2m+3)$, ta thấy *a* còn phụ thuộc vào tham số *m*. Thật vậy, với $m=0$ ta có $a=-2\sqrt{-b}-3$, với $m=-2$ ta có $a=-2\sqrt{-b}+1$, mà $-2\sqrt{-b}-3\ne -2\sqrt{-b}+1, \forall b\le -1$. Vậy trường hợp này không tồn tại *a* thỏa mãn yêu cầu.

Ta chọn đáp án **D**.

Các bạn thấy thế nào về lời giải trên?

NGUYỄN ANH VŨ

(*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 503 (5.2019)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

BẠN CÓ BIẾT!

NHỮNG BÀI TOÁN CHƯA GIẢI ĐƯỢC

Điều này có gây sốc cho bạn không! nhưng ai có thể nói rằng mọi bài toán đều giải được? Những bài toán chưa giải được có một vai trò rất quan trọng trong toán học. Những cố gắng để giải chúng nhiều khi dẫn đến những phát hiện quan trọng khác. Tuy vậy có những bài toán mà cho đến nay những bộ óc lỗi lạc nhất vẫn chưa giải được – cũng hấp dẫn chúng ta bởi một câu hỏi rằng liệu chúng ta có thể giải được không, nhất là khi bài toán trông cực kỳ dễ hiểu. Ta sẽ xét một số bài toán như vậy để hiểu rõ hơn về lịch sử toán học.

Bài toán 4 màu có từ năm 1852, khi *Francis Guthrie* vẽ bản đồ các quận của nước Anh đã nhận xét rằng chỉ cần 4 màu là đủ. Ông hỏi người anh *Frederic* liệu có đúng rằng có thể dùng 4 màu để tô bất kỳ một bản đồ nào sao cho hai vùng kề nhau (nghĩa là hai vùng có chung một đoạn biên giới, chứ không phải chỉ chung một điểm) được tô bằng hai màu khác nhau hay không. *Frederic Guthrie* thông báo giả định này cho một nhà Toán học nổi tiếng *Augustus De Morgan*. Năm 1977, hai nhà toán học *K. Appel* và *W. Haken* đã giải được bài toán 4 màu. Họ sử dụng máy tính để xem xét tất cả mọi bản đồ có thể và chứng minh rằng chỉ cần nhiều nhất là 4 màu để tô một bản đồ sao cho không có hai vùng nào có chung biên giới bị tô bởi cùng một màu.

Gần đây hơn, ngày 23 tháng 6 năm 1993, *Andrew Wile*, một giáo sư toán ở Đại học Princeton, thông báo rằng ông đã giải được *Định lí cuối cùng của Fermat* tồn tại hơn 350 năm nay. Ông cần thêm một năm để sửa chữa một vài lỗi trong chứng minh và cuối cùng đã kết thúc một bài toán đã làm bận tâm rất nhiều nhà Toán học trong nhiều thế kỷ. Bài toán này được *Pierre de Fermat* viết (khoảng năm 1630) ở lề cuốn sách toán Số học (Arithmetica) của *Diophantus* mà ông đang đọc và nó được con trai ông phát hiện khi ông qua đời. Trong lời chú thích bên cạnh phát biểu định lí, *Fermat* tuyên bố rằng chứng minh của ông quá dài để có thể viết đủ vào lề, vì thế tốt hơn là ông để cho người khác chứng minh phát biểu của ông.

Định lí Fermat. *Với $n > 2$ phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khác 0.*

Gần đây, người ta nghiên cứu những bài toán chưa giải được vẫn còn lại khá nhiều. Hai trong số đó rất dễ hiểu nhưng có vẻ cực kỳ khó giải và cho đến nay vẫn chưa giải được. *Christian Goldbach* (1690-1764), một nhà toán học người Phô, vào năm 1742 trong bức thư gửi cho nhà toán học Thụy sĩ nổi tiếng *Leonhard Euler* đã đặt ra bài toán sau mà cho đến này vẫn chưa giải được.

Giả thuyết Goldbach. *Mọi số chẵn lớn hơn 2 đều có thể biểu diễn thành tổng của hai số nguyên tố.*

Ta xét một vài trường hợp: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $14 = 7 + 7$; $16 = 5 + 11$; $20 = 7 + 13$; …; $48 = 19 + 29$; …; $100 = 3 + 97$.

Giả thuyết thứ hai của Goldbach. *Mọi số lẻ lớn hơn 5 đều là tổng của ba số nguyên tố.*

Ta cũng xem một số số lẻ đầu tiên: $7 = 2 + 2 + 3$; $9 = 3 + 3 + 3$; $11 = 3 + 3 + 5$; $13 = 3 + 5 + 5$; $15 = 5 + 5 + 5$; $17 = 5 + 5 + 7$; …; $51 = 3 + 17 + 31$; …; $77 = 5 + 5 + 67$; …; $101 = 5 + 7 + 89$.

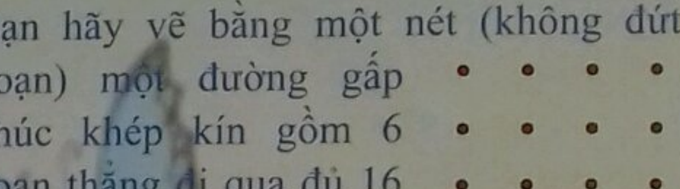
Bạn hãy cho thêm một số ví dụ nữa của hai bài toán này và thử chứng minh nhé!

KHÁNH HỮU *sưu tầm*

GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T3.2019

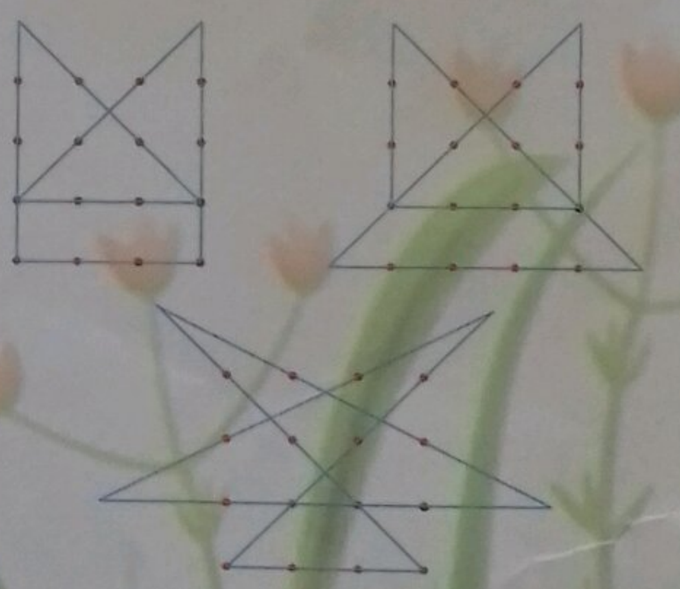
VẼ MỘT NÉT QUA 16 ĐIỂM

Bạn hãy vẽ bằng một nét (không đứt đoạn) một đường gấp khúc khép kín gồm 6 đoạn thẳng đi qua đủ 16 điểm như ở hình bên, các điểm này lập thành các đỉnh của các ô vuông của hình vuông kích thước 4×4. Đường gấp khúc được vẽ có thể đi qua một điểm nhiều lần.



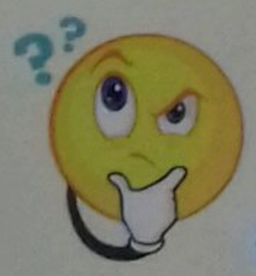
ĐAN QUỲNH *(Hà Nội)*

Lời giải. Ta có thể vẽ như các hình dưới đây



Nhận xét. Có hai bạn tìm ra cách giải bài này, đó là: **Hưng Yên:** *Vũ Tiến Hưng*, 11A2, THPT Dương Quảng Hàm; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*



ĐỐ VUI!

BÀI THƠ GHI NỢ

Chuyện kể rằng: Có hai ông bạn thơ từ Hà Nội xuống chơi, *Tú Xương* giục vợ làm cơm đãi khách. Cảnh nhà túng bấn không có sẵn món nhắm, *Tú Xương* ra chợ Rồng (Nam Định) chọn mua cân xương rẻ quạt và hai cái chân giò. Lúc thanh toán, sờ túi không còn hào nào, ông nài nỉ với cô bán thịt:

- Nhà có khách, vội quá, tôi quên tiền ở nhà. Tôi là Tú Xương, xin khất cô, mai tôi đến trả đủ, có được không?

Cô hàng thịt đã từng đọc thơ Tú Xương, nhã nhặn đáp:

- Cũng được. Giờ em xin bác mấy chữ để làm tin!

Tú Xương gật gù cầm bút viết:

Tú tài đi chợ quên tiền
Xương sườn, giò lợn, bạn hiền chờ ăn.
Nợ đời nặng gánh phong trần
Em đâu nỡ để tần ngần khách thơ!

Trong thơ *Tú Xương* không hề đả động đến chuyện khất nợ tiền. Cô hàng thịt vốn là người thông minh, ham thích thơ không những hiểu ngay nội dung bài thơ khất nợ của *Tú Xương*, phục tài thơ của ông còn gói thêm quả tim và đôi cật lợn để ông thết đãi bạn thơ.

Theo các bạn tại sao cô hàng thịt lại hiểu ngay đây đúng là bài thơ khất nợ của Tú Xương?

NGUYỄN THANH GIANG
(Hưng Yên)

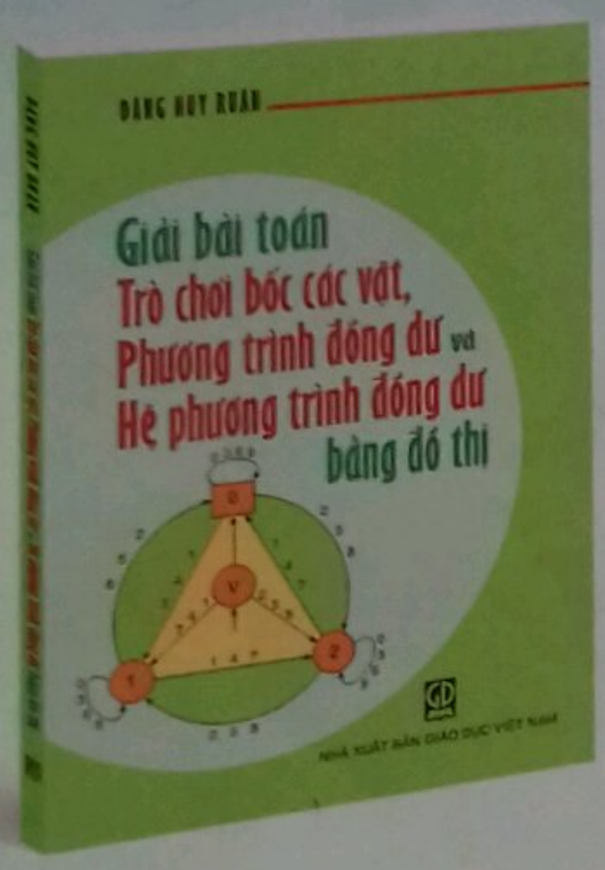
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT5M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng