https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

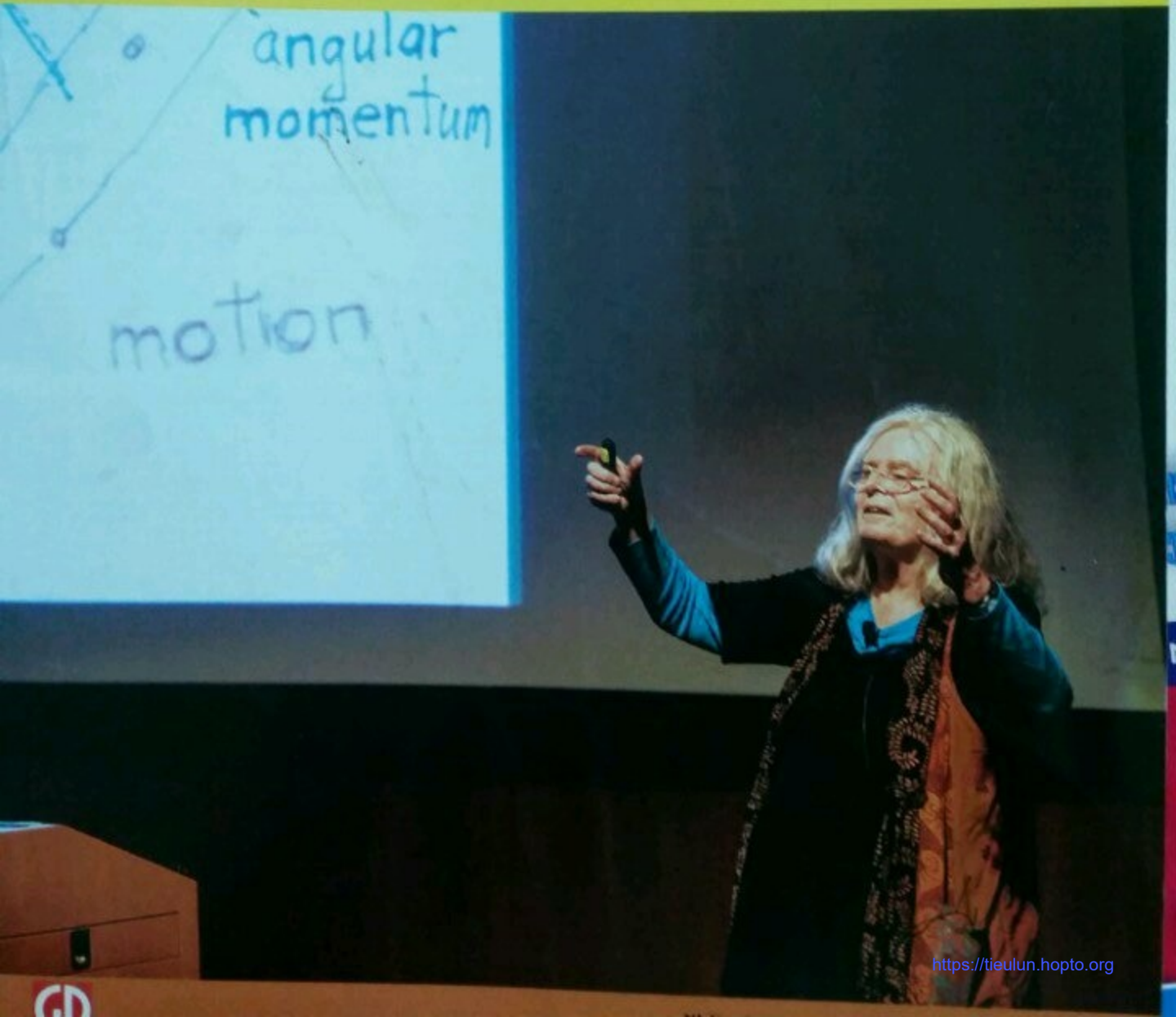
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2019 Số 502

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



https://tieulun.hopto.org

HÀNH TRÌNH LÀM NÊN LỊCH SỬ CỦA NGƯỜI PHỤ NỮ GIÀNH GIẢI "NOBEL TOÁN HỌC"

GS. Karen Keskulla Uhlenbeck

Nghiên cứu của giáo sư Mỹ Karen Keskulla Uhlenbeck đã dẫn đến những tiến bộ mang tính cách mạng ở giao điểm của toán học và vật lý.

Người phụ nữ đầu tiên giành giải "Nobel Toán học"

Lần đầu tiên trong lịch sử, giải thưởng Abel danh giá (thường được coi là "Nobel Toán học") sẽ được trao cho một phụ nữ. Đó là *Karen Keskulla Uhlenbeck*, giáo sư Đại học Texas tại Austin (Mỹ).

Theo *Tech Times*, *Hans Gruver*, Chủ tịch Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy đã công bố chủ nhân giải thưởng Abel năm 2019 vào hôm thứ ba 19/3 tại Oslo. Dự kiến GS. *Uhlenbeck* nhận giải thưởng này tại lễ trao giải ngày 21/5, có sự tham gia của Vua *Harald*, Na Uy.

Bà *Uhlenbeck* được trao giải nhờ thành tựu tiên phong trong việc nghiên cứu về phương trình vi phân, lý thuyết trường chuẩn (gauge theory) cùng tác động của chúng đối với lĩnh vực giải tích, hình học và vật lý toán học. Những công trình nghiên cứu của bà được mô tả là quan trọng bậc nhất trong lĩnh vực toán học của thế kỷ 20.

Caroline Series, giáo sư toán tại Đại học Warwick ở Coventry, Vương quốc Anh, đồng thời là Chủ tịch của Hiệp hội Toán học London chia sẻ trên tạp chí *Science*: *"Nhà thắng một phụ nữ đạt được thành tựu nhờ người cống hiến cả cuộc đời cho công việc đặc biệt là nghiên cứu toán học, người tạo ra sự khác biệt đối với sự phát triển của lĩnh vực này trong 40 năm qua, điều đó vô cùng có ý nghĩa"*.

Nữ giáo sư 76 tuổi đã dành phần lớn sự nghiệp của mình ở Đại học Texas tại Austin. Sự nghiệp kéo dài hàng thập kỷ của *Uhlenbeck* trải dài trên nhiều lĩnh vực, bao gồm vật lý, hình học và lý thuyết lượng tử. Một trong những đóng góp lớn nhất của *Uhlenbeck* là lý thuyết về toán học được lấy cảm hứng từ bong bóng xà phòng. Diện tích bề mặt cong, mỏng của bong bóng xà phòng là ví dụ về *"bề mặt tối thiểu"*, một bề mặt tự sắp xếp thành hình dạng chiếm ít diện tích nhất. Xem xét cách các bề mặt này hoạt động có thể giúp nhà nghiên cứu hiểu rõ hơn về một lượng lớn hiện tượng khoa học.

Trong quá trình tìm hiểu bong bóng xà phòng, *Uhlenbeck* đã đi tiên phong trong lĩnh vực giải tích hình học (geometric analysis). Lĩnh vực này chưa hình thành khi *Uhlenbeck* bắt đầu chương trình sau đại học vào giữa những năm 1960, nhưng mối liên kết giữa giải tích và tô pô học (topology, ngành toán học liên quan đến sự biến dạng, sự soắn và sự kéo dãn) đã manh nha xuất hiện. Đến đầu những năm 1980, *Uhlenbeck* và các cộng sự đã tạo ra những bước đột phá về *"bề mặt tối thiểu"* nhờ kết hợp sức mạnh giữa giải tích và hình học.

Sinh năm 1942, là con của một kỹ sư và một nghệ sĩ, *Uhlenbeck* có sở thích leo núi và quyết tâm học lướt sóng ở tuổi 40. Ngày bé, bà rất mê đọc sách và quan tâm đến mọi thứ xung quanh. Trong cuộc phỏng vấn năm ngoái với *Celebratio Mathematica*, bà mô tả bản thân: *"Tôi luôn bồn chồn, muốn biết chuyện gì đang diễn ra và đặt rất nhiều câu hỏi"*. Ban đầu, *Uhlenbeck* học chuyên ngành vật lý với tư cách là sinh viên hệ cử nhân của Đại học Michigan. Tuy nhiên, sự thiếu kiên nhẫn với công việc trong phòng thí nghiệm và tình yêu toán học ngày càng lớn đã khiến bà quyết định đổi ngành. Dù vậy, niềm đam mê suốt đời dành cho vật lý vẫn không hề thay đổi, nhiều vấn đề nghiên cứu của *Uhlenbeck* về sau đều liên quan đến vật lý.

"Nghiên cứu của Uhlenbeck đã dẫn đến những tiến bộ mang tính cách mạng ở giao điểm của toán học và vật lý. Những hiểu biết tiên phong của bà có thể được ứng dụng trên một loạt chủ đề hấp dẫn, từ lý thuyết dây đến hình học không - thời gian", *Paul Goldbart*, Trưởng khoa Khoa học tự nhiên thuộc Đại học Texas tại Austin nhận xét.

Uhlenbeck chính là người đầu tiên giới thiệu các công cụ giải tích vào hình học vi phân và cả việc nghiên cứu các phương trình Yang-Mills, một trong những lý thuyết trường chuẩn quan trọng nhất thế kỷ 20. *"Người tiên phong là từ thích hợp dành cho bà ấy"*, nhà toán học *Alice Chang* của Đại học Princeton, thành viên ủy ban trao giải Abel nhận xét về *Uhlenbeck*.

Trong cuộc đời hoạt động khoa học, *Uhlenbeck* từng nhận học bổng MacArthur danh giá, thường được gọi là *"giải thưởng thiên tài"*, Huân chương Khoa học Quốc gia năm 2000 và Giải thưởng Steele năm 2007.

Uhlenbeck không chỉ là một nhà toán học đáng kính, bà còn khuyến khích người trẻ, đặc biệt là phụ nữ tham gia vào lĩnh vực này. Đầu những năm 1990, *Uhlenbeck* góp công thành lập Viện Toán học Park City ở Utah, một trong những chương trình "tích hợp dọc" đầu tiên, tập hợp các giáo viên, sinh viên xuất sắc, nghiên cứu sinh và nhà nghiên cứu. Sau đó, *Uhlenbeck* và nhà toán học *Chuu-Lian Terng* ở Đại học California, Irvine đã thành lập một chương trình cố vấn, ban đầu liên kết với nhóm Park City nhưng dần phát triển thành Chương trình Phụ nữ và Toán học (WAM) tại Viện Nghiên cứu Cao cấp (IAS) ở Princeton. WAM hy vọng sẽ giải quyết sự mất cân bằng về số lượng nam giới và nữ giới trong lĩnh vực toán học.

Song song với hoạt động tích cực của *Uhlenbeck*, nền toán học cũng có nhiều chuyển biến. Khi *Uhlenbeck* lấy bằng tiến sĩ năm 1968, số lượng nữ giáo sư toán tại các trường đại học hàng đầu nước Mỹ chỉ đếm trên đầu ngón tay. Giờ đây, con số vẫn còn khá ít nhưng đang ngày một tăng.

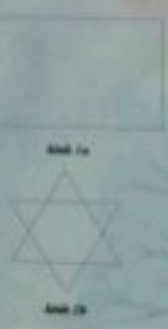
Năm 2014, Huy chương Fields, giải thưởng uy tín nhất dành cho các nhà toán học từ 40 tuổi trở xuống, lần đầu tiên vinh danh một phụ nữ, bà *Maryam Mirzakhani* tại Đại học Stanford, người đã qua đời năm 2017. Năm 2019, Abel sử lại gọi tên *Karen Keskulla Uhlenbeck* cho giải thưởng Abel, vốn luôn dành cho nam giới trong suốt 16 mùa giao giải trước đây. Giải Nobel không có lĩnh vực toán học, trong nhiều thập kỷ, giải thưởng toán học có uy tín nhất là Huy chương Fields, nhưng chỉ giới hạn cho các nhà toán học 40 tuổi hoặc trẻ hơn và được trao bốn năm một lần.

Giải Abel, lần đầu được trao vào năm 2003, tôn vinh một cuộc đời cống hiến cho toán học và đánh giá tầm ảnh hưởng của nhà toán học. Giải được đặt theo tên nhà toán học người Na Uy *Niels Hendrik Abel*, trị giá 6 triệu kroner Na Uy (704.000 USD). Những người đoạt giải trước đây gồm *Andrew J. Wiles*, nhà toán học đang làm việc tại Đại học Oxford, người đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat; *Peter D. Lax* của Đại học New York; *John F. Nash Jr.*, người mà cuộc đời đã được phóng thành bộ phim *"A Beautiful Mind"*. Năm 2018, giải Abel được trao cho nhà toán học người Mỹ gốc Canada *Robert P. Langlands*. *"Chương trình Langlands"* do ông đề ra năm 1967 được lưu hành giữa các nhà toán học, là nền tảng của những thành tựu lớn trong nửa thế kỷ qua.

(*nguồn: vnexpress.net*)

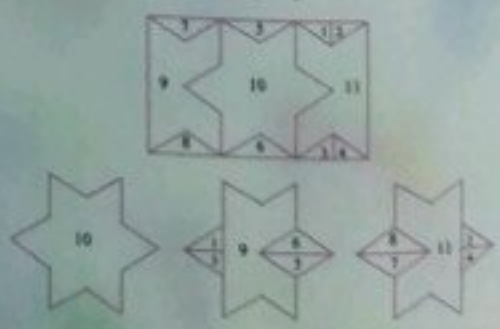
GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T2.2019

BA HÌNH NGÔI SAO 6 CÁNH



Để trang trí nhân dịp năm mới, Bạn *Toàn* có tấm bìa hình chữ nhật với đường chéo bằng hai lần chiều rộng (hình 1a) và muốn cắt mảnh bìa này thành các mảnh rồi ghép tất cả các mảnh đó với nhau sao cho chúng không chồm lên nhau và khít nhau (không có khe hở giữa hai mảnh kề nhau) để tạo thành ba hình ngôi sao 6 cánh bằng nhau như hình 1b. Bạn hãy giúp bạn *Toàn* cắt ghép hình như thế với số mảnh được cắt ra càng ít càng tốt.

Lời giải. Ta có thể cắt ghép như hình vẽ.



VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG ĐỊNH LÝ VIÈTE

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Trong nhiều trường hợp ta sẽ gặp khó khăn nếu cố gắng tìm cách chứng minh các bất đẳng thức một cách trực tiếp với các biến ban đầu. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu phương pháp sử dụng định lý Viète để chứng minh lớp các bài toán nêu trên:

Bước 1. Sử dụng định lý Viète chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành bất đẳng thức giữa các nghiệm của đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

Bước 2. Sử dụng các bất đẳng thức đại số để chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1. *Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}.$$

Lời giải. Giả sử hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ và } x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

Chia cả tử và mẫu của P cho $a^2\neq 0$ ta được:

$$P=\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{b}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

$$=2+\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \quad (1)$$

Mặt khác: $x_1; x_2\in[0;1]$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2\leq x_1+x_2\leq 1+x_1x_2$, nên từ (1) suy ra:

$$P\leq 2+\frac{1+x_1+x_2+x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{bmatrix}x_1=x_2=1\\x_1=0;\ x_2=1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a=2c=-b\neq 0\\c=0;\ a=-b\neq 0\end{bmatrix}.$$

Bài 2. *Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{5a^2-6ab+b^2}{2a^2-2ab+ac}$.*

Lời giải. Giả sử hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ và } x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

Chia cả tử và mẫu của P cho $a^2\neq 0$ ta được:

$$P=\frac{5-6.\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2-2.\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{5+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{2+2(x_1+x_2)+x_1x_2} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$0\leq x_1\leq x_2\leq 1\Rightarrow\begin{cases}x_1^2\leq x_1x_2\\x_2^2\leq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\leq 3x_1x_2+1.$$

Từ (1) suy ra:

$$P\leq\frac{5+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+1}{2+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{3[2+2(x_1+x_2)+x_1x_2]}{2+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{bmatrix}x_1=x_2=1\\x_1=0;\ x_2=1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a=2c=-b\neq 0\\c=0;\ a=-b\neq 0\end{bmatrix}.$$

Bài 3. *Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ có hai nghiệm không nhỏ hơn 2. Chứng minh*

$$(4a-b)\left(2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\geq 2(4a-2b+c).$$

Lời giải. Giả sử hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ và } x_1.x_2=\frac{c}{a}.$$

Do đó: $(4a-b)\left(2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\geq 2(4a-2b+c)$

$$\Leftrightarrow\left(4-\frac{b}{a}\right)\left(2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\geq 2\left(4-2.\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

https://tieulun.hopto.org

$$\Leftrightarrow (4+x_1+x_2)\left(2+\sqrt{x_1x_2}\right)\ge 2\left[4+2(x_1+x_2)+x_1x_2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}\ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{(2+x_1)(2+x_2)}\ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+x_1}+\frac{1}{2+x_2}\ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{x_1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{x_2}{2}}\ge \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}}} \quad (1)$$

Đặt $u=\sqrt{\frac{x_1}{2}};\ v=\sqrt{\frac{x_2}{2}}\ (u,v>0)$

$\Rightarrow uv=\sqrt{\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}}\ge\sqrt{\frac{2.2}{4}}=1$. BĐT trên tương ứng với $\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{1+v^2}\ge\frac{2}{1+uv}$. Bất đẳng thức này đúng với mọi $uv\ge 1$ (bạn đọc tự chứng minh BĐT cơ bản này). Vậy bất đẳng thức (1) cũng đúng, ta có điều cần chứng minh.

Bài 4. *Cho phương trình*

$$ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=0 \quad (1)\ (a\ne 0)\ (1)$$

có ba nghiệm là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{2a-b}{a+c-b}+\frac{a}{b}>0$.

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow (x-1)(ax^2+bx+c)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ ax^2+bx+c=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Gọi hai nghiệm của phương trình (2) là x_2, x_3. Theo định lí Viète ta có:

$$x_2+x_3=-\frac{b}{a} \text{ và } x_2x_3=\frac{c}{a}$$

Ta có:

$$\frac{2a-b}{a+c-b}+\frac{a}{b}>0\Leftrightarrow \frac{2-\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}}+\frac{a}{b}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+x_2+x_3}{1+x_2x_3+x_2+x_3}-\frac{1}{x_2+x_3}>0$$

$$\Leftrightarrow (2+x_2+x_3)(x_2+x_3)-(1+x_2x_3+x_2+x_3)>0$$

$$\Leftrightarrow x_2+x_3-1+x_2^2+x_3^2+x_2x_3>0 \quad (*)$$

Vì $x_1=1; x_2; x_3$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $x_2+x_3-1>0$. Suy ra bất đẳng thức (*) đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a>0; bc=3a^2; a+b+c=abc$. Chứng minh rằng*

$$a\ge\sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} bc=3a^2 \\ b+c=abc-a=3a^3-a\end{cases}.$$

Theo định lí Viète đảo suy ra b, c là hai nghiệm của phương trình $X^2-(3a^3-a)X+3a^2=0$ (1). Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta=(3a^3-a)^2-12a^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2(9a^4-6a^2-11)\ge 0\Leftrightarrow (3a^2-1)^2-12\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2\ge\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$. Vì $a>0$ nên $a\ge\sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Bài 6. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=5$ và $ab+bc+ca=8$. Chứng minh rằng*

$$1\le a\le\frac{7}{3}; 1\le b\le\frac{7}{3}; 1\le c\le\frac{7}{3}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} a+b=5-c \\ ab=8-c(a+b)=c^2-5c+8\end{cases}.$$

Theo định lí Viète đảo thì a, b là hai nghiệm của phương trình $X^2+(c-5)X+c^2-5c+8=0$ (1). Phương trình (1) có nghiệm khi

$$\Delta=(c-5)^2-4(c^2-5c+8)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3c^2-10c+7\le 0\Leftrightarrow (c-1)(3c-7)\le 0\Leftrightarrow 1\le c\le\frac{7}{3}.$$

Do a, b, c có vai trò như nhau nên ta cũng có:

$$1\le a\le\frac{7}{3}; 1\le b\le\frac{7}{3}.$$

Bài toán đã được chứng minh.

Bài 7. *Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\frac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$.

Lời giải. Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Chia cả tử và mẫu của P cho $a^2\ne 0$ ta được:

$$P=\frac{8-6.\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{4-2.\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2} \quad (1)$$

(Xem tiếp trang 5)

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, năm học 2018 - 2019

Câu 1. Ta có $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c$.

Do đó $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$

$=2(a+c+1)(-c-1)=-2a(c+1)-2(c+1)^2$.

Nên $a^2+2a(c+1)+2(c+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (a+c+1)^2+(c+1)^2=0$

$\Leftrightarrow a+c+1=0$ và $c+1=0 \Leftrightarrow a=0; c=-1$.

Mà $a+b+c=0$. Do đó $b=-a-c=-0+1=1$.

Vậy $A=a^2+b^2+c^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$.

Câu 2. a) ĐK: $x\ge -3, x\ne 0$.

Phương trình trở thành

$4x\sqrt{x+3}=x+4x^2+2$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+3}+x+3=1$

$\Leftrightarrow (2x-\sqrt{x+3})^2=1 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x+3}=1$ (1)

hoặc $2x-\sqrt{x+3}=-1$ (2)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\ge 0\\ x+3=(2x-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \frac{1}{2}\\ 4x^2-5x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \frac{1}{2}\\ x=\frac{5\pm\sqrt{57}}{8}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{57}}{8}$;

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge 0\\ x+3=(2x+1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ 4x^2+3x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{1}{2}\\ x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Vậy $S=\left\{\frac{5+\sqrt{57}}{8}; \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

b) Từ hệ đã cho ta có

$\begin{cases}y^5-y^3=x^3+y^2-1\\ x^2=1-y^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3=(y^2-1)(y^3-1)\\ x^2=1-y^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-y^2\\ x^2=1-y^3\end{cases}$

$\Rightarrow (1-y^2)^2=1-y^3 \Leftrightarrow (1-y)(2y^2+y^3)=0$

$\Leftrightarrow (1-y)y^2(2+y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=0$ hoặc $y=-2$

- $y=1$ thì $x=0$
- $y=0$ thì $x=1$
- $y=-2$ thì $x=-3$.

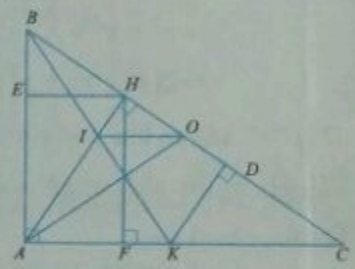
Vậy nghiệm (x, y) của hệ phương trình là: $(0;1)$; $(1;0)$; $(-3;-2)$.

Câu 3. a) Tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao $\Rightarrow AB^2=BH.BC$, $AC^2=CH.BC$.

Mặt khác

$HE\perp AB$, $AC\perp AB$

$\Rightarrow HE \parallel AC$.



Tam giác ABC có

$HE \parallel AC$

$\Rightarrow \frac{BE}{AB}=\frac{EH}{AC}$

$\Rightarrow AB.EH=BE.AC$.

Mà $AB.EH=AH.BH$ $(=2S_{ABH})$,

do đó $BE.AC=AH.BH$.

Tương tự $CF.AB=AH.CH$.

Vì vậy

$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=\frac{BE\sqrt{CH.BC}+CF\sqrt{BH.BC}}{\sqrt{BC}}$

$=\frac{BE.AC+CF.AB}{\sqrt{BC}}=\frac{AH.BH+AH.CH}{\sqrt{BC}}$

$=\frac{AH.BC}{\sqrt{BC}}=AH.\sqrt{BC}$.

b) Gọi I là giao điểm của AH và BK. Ta có $AH\perp BC$, $KD\perp BC \Rightarrow AH \parallel KD$.

Tam giác BKD có

$BH=HD$, $IH \parallel KD \Rightarrow BI=IK$.

Dó đó OI là đường trung bình của tam giác $BCK \Rightarrow OI \parallel CK$, mà CK vuông góc với AB nên OI vuông góc với AB. Tam giác ABO có AH, OI là hai đường cao cắt nhau tại I nên I là

https://tieulun.hopto.org

trực tâm của tam giác ABO suy ra BI vuông góc với OA. Vậy BK vuông góc với AO.

Câu 4. a) Ta có

$$x^4 - x + \frac{1}{2} = \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2} = 0 \text{ và } x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = x = \frac{1}{2} \text{ (vô lí).}$$

Vậy $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0,\ \forall x$.

b) Ta có

$$P = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + (x-y)^2$$

$$= x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2$$

$$= 2(x^2 - xy + y^2) = 2.3 = 6 \Rightarrow P \leq 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = x^2 + y^2$ là 6.

Ta có

$$P = x^2 + y^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3(x^2 + y^2)}{2}$$

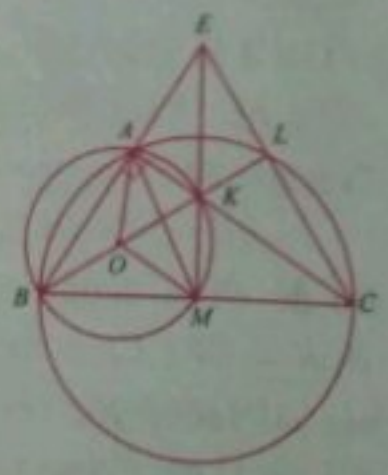
$$\geq \frac{2}{3} \cdot \frac{3(x^2 + y^2) - (x+y)^2}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^2 - 2xy + 2y^2}{2} = \frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2) = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1,\ y = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2$ là 2.

Câu 5. Ta có $\widehat{BAK} = 90^0$ (gt) suy ra BK là đường kính của (O) $\Rightarrow \widehat{BMK} = 90^0$. Hai đường cao KM, CL của tam giác BCK cắt nhau tại $E \Rightarrow E$ là trực tâm của tam giác $BCK \Rightarrow CK \perp BE$.



Mà $CK \perp AB$, do đó BE và AB trùng nhau $\Rightarrow B, A, E$ thẳng hàng.

Ta có $\widehat{EAC} = \widehat{EMC} = 90^0 \Rightarrow AECM$ là tứ giác nội tiếp. Vậy E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Câu 6. a) Các số tô màu xanh có dạng $24m + 17$ $(m \in \mathbb{N})$. Các số tô màu đỏ có dạng $40n + 7$ $(n \in \mathbb{N})$. Ta có $24m + 17 = 4(6m+4) + 1$ chia cho 4 dư 1 và $40n + 7 = 4(10n+1) + 3$ chia cho 4 dư 3. Giả sử tồn tại một số được tô cả hai màu xanh và đỏ thì số đó chia cho 4 dư 1 và chia cho 4 dư 3. Điều này vô lí! Vậy không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ.

Ta có: $1 \leq 24m + 17 \leq 2018 \Rightarrow 0 \leq m \leq 83 \Rightarrow$ có 84 số tô màu xanh và

$$1 \leq 40n + 7 \leq 2018 \Rightarrow 0 \leq n \leq 50$$

vậy có 51 số tô màu đỏ. Vậy số các số được tô màu vàng là

$$2108 - (84 + 51) = 1883 \text{ (số).}$$

b) $|a-b| = 2 \Leftrightarrow a - b = 2$ hoặc $a - b = -2$,

$a = 24m + 17$ và $b = 40n + 7$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

• $a - b = 2$. Ta có

$$(24m+17) - (40n+7) = 2 \Leftrightarrow 24m - 40n = -8$$

$$\Leftrightarrow 3m - 5n = -1 \Leftrightarrow m = 2n - \frac{n+1}{3}.$$

Vì $(m \in \mathbb{N})$ nên $(n+1)$ chia hết cho 3.

Đặt $n + 1 = 3t$ $(t \in \mathbb{N})$. Ta có $n = 3t - 1$ và $m = 5t - 2$ mà $0 \leq m \leq 83,\ 0 \leq n \leq 50$ nên

$$0 \leq 5t - 2 \leq 83,\ 0 \leq 3t - 1 \leq 50.$$

Do đó $1 \leq t \leq 17, t \in \mathbb{N}$. Như vậy có 17 cặp số (a, b) sao cho a được tô màu xanh, b được tô màu đỏ và $|a-b| = 2$.

• $b - a = 2$. Ta có $(40n+7) - (24m+17) = 2$

$$\Leftrightarrow 40n - 24m = 12 \Leftrightarrow 10n - 6m = 3$$

(vô lí vì $(10n - 6m)$ chia hết cho 2 còn 3 không chia hết cho 2). Vậy có 17 cặp số (a, b) sao cho a được tô màu xanh, b được tô màu đỏ và $|a-b| = 2$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG

(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu

https://tieulun.hopto.org

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH
NĂM HỌC 2018 – 2019

Câu 1 (2 điểm). 1. Cho biểu thức

$$T=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right)$$

với $a\neq b$, $a>0$, $b>0$.

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Chứng tỏ $T>1$.

2. Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n-3^n+16^n-1$ chia hết cho số 323.

Câu 2 (2 điểm). 1. Giải bất phương trình:

$$3x+2\leq\sqrt{7x+8}.$$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{y}=3\\ x+y+\dfrac{6}{x+y}=-5\end{cases}$

Câu 3 (1 điểm). Cho phương trình:

$$(m-1)x^2-2(2m-3)x-5m+25=0$$

(m là tham số). Tìm các giá trị m là số nguyên sao cho phương trình có nghiệm là số hữu tỉ.

Câu 4 (4 điểm) 1) Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và $AB\geq BC$, $BC\geq CA$. Xác định vị trí điểm M thuộc miền tam giác ABC (gồm các cạnh và miền trong tam giác) sao cho tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh nhỏ nhất.

2) Cho tam giác ABC ($AB<AC$) có các góc đều nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC và AD lần lượt tại K và I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M và N. Gọi O là trung điểm BC. Chứng minh:

a) DA là phân giác của góc FDE.

b) F là trung điểm của MN.

c) $OD.OK=OE^2$ và $BD.DC=OD.DK$.

Câu 5 (1 điểm). Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+\dfrac{1}{b}=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

BÙI VĂN CHI

(21/2 đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định) ***giới thiệu***

PHƯƠNG PHÁP...

(Tiếp theo trang 2)

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$0\leq x_1\leq x_2\leq 2\Rightarrow\begin{cases}x_1^2\leq x_1x_2\\ x_2^2\leq 4\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\leq 3x_1x_2+4.$$

Từ (1) suy ra:

$$P\leq\frac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$$

$$=\frac{3\left[4+2(x_1+x_2)+x_1x_2\right]}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{bmatrix}x_1=x_2=2\\ x_1=0;\ x_2=2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4a=c=-b\neq 0\\ c=0;\ b=-2a\neq 0\end{bmatrix}.$$

Bài 8. *Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^3c+ac^3+b^3-3abc$.*

Lời giải. Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viète ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\text{ và }x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Ta có: $ax_1+bx_2+c=0$

$$\Rightarrow x_1+\frac{b}{a}x_2+\frac{c}{a}=0\Rightarrow x_1-(x_1+x_2)x_2+x_1x_2=0$$

$$\Rightarrow x_1-x_2^2=0\Rightarrow x_1=x_2^2\Rightarrow\begin{cases}x_2^2+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_2^3=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

Khi đó $M=a^3\left[\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3-3.\dfrac{b}{a}.\dfrac{c}{a}\right]$

$$=a^3\left[x_2^3+x_2^6-(x_2^2+x_2)^3+3(x_2^2+x_2)x_2^3\right]$$

$$=a^3x_2^3\left[1+x_2^3-(x_2+1)^3+3(x_2^2+x_2)\right]$$

$$=a^3x_2^3\left[1+x_2^3-x_2^3-3x_2^2-3x_2-1+3x_2^2+3x_2\right]=0.$$

Vậy $M=0$.

https://tieulun.hopto.org

ỨNG DỤNG TÂM TỈ CỰ CỦA HỆ ĐIỂM TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

HUỲNH VĂN MINH

(GV Trường PTDTNT Sa Thầy, Kon Tum)

I. MỞ ĐẦU

Nối tiếp bài viết "**Ứng dụng từ hai định lý cơ bản**" đã đăng trên Tạp chí TH&TT tháng 7 năm 2014, tác giả tiếp tục phát triển kết quả trên hệ điểm $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ cùng với bộ số thực $\{k_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ được thể hiện thành một định lí toán học.

*Định lí. Cho hệ điểm $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ cùng với bộ số thực $\{k_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$, bao giờ cũng tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{IA_i} = \vec{0}$. Điểm I được gọi là **tâm tỉ cự của hệ điểm** $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ cùng với bộ số thực $\{k_i\}_{i=\overline{1,n}}$, viết tắt là $\{A_i(k_i)\}_{i=\overline{1,n}}$.*

Tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_i(k_i)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Gọi I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_i(k_i)\}_{i=\overline{1,n}}$. Khi đó, với mọi điểm M ta có $\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\overrightarrow{MI}$.

Vận dụng tính chất **tâm tỉ cự của hệ điểm** ta có thể giải nhanh một số bài toán hình học giải tích trong đề thi THPT Quốc gia. Sau đây là một số thí dụ minh họa cho nhận định trên.

II. NỘI DUNG

Bài toán với hệ hai điểm

Gọi I tâm tỉ cự hệ hai điểm $\{A; B\}$cùng với bộ số thực $\{\alpha;\beta\}$. Tức là $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

1. Với mọi điểm M ta có phân tích

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}.$$

2. Với mọi điểm M ta có phân tích

$$\alpha MA^2+\beta MB^2=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$=\alpha IA^2+\beta IB^2+2\overrightarrow{MI}(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})+(\alpha+\beta)MI^2$$
$$=\alpha IA^2+\beta IB^2+(\alpha+\beta)MI^2.$$

Sau đây là một số thí dụ sử dụng phân tích 1, 2 để giải.

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hai điểm $A(4;3)$, $B(-3;-4)$ và đường thẳng $\Delta: 3x+5y-21=0$. Tìm trên Δ điểm M sao cho vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$ có môđun nhỏ nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A; B\}$ cùng bộ số thực $\{2; 5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases}7x=2x_A+5x_B=-7\\7y=2y_A+5y_B=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\Leftrightarrow I(-1;-2).$$

Áp dụng kết quả **1** ta có $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=7\overrightarrow{MI}$.

Điểm $I(-1;-2)$ cố định, điểm M thuộc đường thẳng Δ. Nên $|\vec{u}|$ nhỏ nhất khi độ dài MI nhỏ nhất; MI có độ dài nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng Δ. Đường thẳng qua I vuông góc với Δ có phương trình $\begin{cases}x=-1+3t\\y=-2+5t\end{cases}$.

Điểm $M(x;y)=d\cap\Delta$: $\begin{cases}x=-1+3t,\ y=-2+5t\\3x+5y-21=0\end{cases}\Rightarrow t=1$.

Tọa độ điểm $M(2;3)$.

Thí dụ 2. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-6)$, $B(6;-4;8)$ và mặt phẳng có phương trình $(P): 2x-3y+2z-5=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$ có môđun nhỏ nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A; B\}$, cùng bộ số thực $\{2;5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

https://tieulun.hopto.org

$$\begin{cases}2x_A+5x_B=7x=28\\2y_A+5y_B=7y=-14\\2z_A+5z_B=7z=28\end{cases}\Rightarrow I(4;-2;4).$$

Áp dụng kết quả **1** ta có $\vec{u}=2.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MB}=7.\overrightarrow{MI}$.

Do đó $\left|\vec{u}\right|$ nhỏ nhất khi $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất. Điểm I cố định, điểm $M\in(P)$ nên $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi $MI\perp(P)$.

Phương trình đường thẳng $MI:\begin{cases}x=4+2t\\y=-2-3t\\z=4+2t\end{cases}$.

Điểm M là giao điểm của đường thẳng MI và mặt phẳng (P) nên toạ độ M thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}x=4+2t, y=-2-3t, z=4+2t\\2x-3y+2z-5=0\end{cases}\Rightarrow 17t+17=0$$

$\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(2;1;2)$.

Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy) cho hai điểm $A(7;13)$, $B(5;5)$ và $\Delta:3x+4y-3=0$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho $3.MA^2-5.MB^2$ lớn nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A;B\}$, cùng bộ số thực $\{3;-5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $3.\overrightarrow{IA}-5.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases}3x_A-5x_B=-2x\\3y_A-5y_B=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}\Rightarrow I(2;-7).$$

Áp dụng kết quả **2** ta có

$$3MA^2-5MB^2=3IA^2-5IB^2-2MI^2.$$

Do $3IA^2-5IB^2$ không đổi nên $3MA^2-5MB^2$ lớn nhất khi MI bé nhất, MI bé nhất khi $MI\perp\Delta$.

Phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với Δ là $d:\begin{cases}x=2+3t\\y=-7+4t\end{cases}$. Điểm M là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng Δ nên toạ độ M thoả mãn $\begin{cases}x=2+3t, y=-7+4t\\3x+4y-3=0\end{cases}\Rightarrow t=1$.

Suy ra tọa độ điểm $M(5;-3)$.

Thí dụ 4. *Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho hai điểm $A(1;-5)$, $B(-3;-9)$ và $\Delta:4x+5y+7=0$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho $MA^2+3.MB^2$ nhỏ nhất.*

Nhận xét. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A;B\}$, cùng bộ số thực $\{1;3\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA}+3.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases}x_A+3x_B=4x=-8\\y_A+3y_B=4y=-32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-8\end{cases}\Rightarrow I(-2;-8).$$

Áp dụng kết quả **2** ta có

$$MA^2+3.MB^2=IA^2+3.IB^2+4.MI^2.$$

Do $IA^2+3.IB^2$ không đổi nên $MA^2+3.MB^2$ nhỏ nhất khi MI có độ dài nhỏ nhất.

Điểm I cố định, điểm $M\in\Delta$ nên MI nhỏ nhất khi $MI\perp\Delta$. Phương trình $MI:\begin{cases}x=-2+4t\\y=-8+5t\end{cases}$.

Điểm $M=MI\cap\Delta$ nên toạ độ M thoả mãn

$$\begin{cases}x=-2+4t, y=-8+5t\\4x+5y+7=0\end{cases}.$$

Suy ra $t=1\Rightarrow M(2;-3)$.

Thí dụ 5. *Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho $A(7;8)$, $B(5;6)$ và $\Delta:3x+5y-39=0$, điểm M thuộc Δ. Tìm giá trị lớn nhất của $5MA^2-7MB^2$.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A;B\}$, cùng bộ số thực $\{5;-7\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $5.\overrightarrow{IA}-7.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases}5.x_A-7x_B=-2.x=0\\5.y_A-7y_B=-2.y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1).$$

Áp dụng kết quả **2** ta có

$$5MA^2-7MB^2=5IA^2-7IB^2-2MI^2.$$

Vậy $5MA^2-7MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Điểm I cố định, điểm M thuộc Δ, MI nhỏ nhất khi $MI\perp\Delta$. PT đường thẳng $MI:5x-3y+3=0$.

Điểm $M(x;y)=IM\cap\Delta$ nên toạ độ M thoả mãn

$$\begin{cases}5x-3y+3=0\\3x+5y-39=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}.$$

Vậy $\max(5MA^2-7MB^2)=72$.

Thí dụ 6. *Trong không gian với hệ toạ độ Descartes $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-7;-7)$, $B(1;-5;-5)$ và*

https://tieulun.hopto.org

đường thẳng có phương trình $\Delta: \frac{x-8}{3} = \frac{y-9}{5} = \frac{z+5}{-1}$, *M là điểm thuộc đường thẳng* Δ. *Tìm giá trị lớn nhất của* $3.MA^2 - 5.MB^2$.

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự của hệ hai điểm $\{A; B\}$ cùng bộ số thực $\{3; -5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $3.\overrightarrow{IA} - 5.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} 3x_A - 5x_B = -2x = -8 \\ 3y_A - 5y_B = -2y = 4 \\ 3z_A - 5z_B = -2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow I(4; -2; -2).$$

Áp dụng kết quả **2** ta có

$$3.MA^2 - 5.MB^2 = 3.IA^2 - 5.IB^2 - 2MI^2.$$

Do đó $3.MA^2 - 5.MB^2$ lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Điểm I cố định, điểm $M \in \Delta$ nên MI nhỏ nhất khi $MI \perp \Delta$. Mặt phẳng qua I vuông góc đường thẳng Δ có phương trình $(P): 3x + 5y - z - 4 = 0$. Điểm M là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) nên toạ độ M thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 8 + 3t, y = 9 + 5t, z = -5 - t \\ 3x + 5y - z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $t = -2 \Rightarrow M(2; -1; -3)$.

Vậy $\max(3.MA^2 - 5.MB^2) = 78$.

Thí dụ 7. *Trong không gian với hệ trục toạ độ Descartes Oxyz cho hai điểm* $A(-1;1;3)$, $B(-5;3;5)$ *và mặt phẳng* $(P): 3x - y - 2z - 3 = 0$, *điểm M thay đổi thuộc (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $5.MA^2 - 3.MB^2$.

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ hai điểm $\{A; B\}$ cùng bộ số thực $\{5; -3\}$.

Lời giải. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $5.\overrightarrow{IA} - 3.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 5x_A - 3x_B = 2x = 10 \\ 5y_A - 3y_B = 2y = -4 \\ 5z_A - 3z_B = 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I(5; -2; 0).$$

Áp dụng kết quả **2** ta có biến đổi

$$5.MA^2 - 3.MB^2 = 5.IA^2 - 3.IB^2 + 2MI^2.$$

Do đó $5.MA^2 - 3.MB^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Điểm I cố định, điểm $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi $MI \perp (P)$. Phương trình của $MI: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$. Điểm $M(x; y; z)$ là giao điểm của đường thẳng MI và mặt phẳng (P) nên toạ độ M thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x = 5 + 3t, y = -2 - t, z = -2t \\ 3x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(2; -1; 2).$$

Vậy $\max(5.MA^2 - 3.MB^2) = -152$.

Bài toán với hệ ba điểm

Gọi I là tâm tỉ cự hệ ba điểm $\{A; B; C\}$ cùng với bộ số thực $\{\alpha; \beta; \delta\}$. Tức là $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \delta\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

3. Với mọi điểm M ta có phân tích

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + \delta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= (\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MI} + \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \delta\overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MI}.$$

4. Với mọi điểm M ta có phân tích

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2$$

$$= \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + \delta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \delta IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \delta\overrightarrow{IC}) + (\alpha + \beta + \delta)MI^2.$$

$$= \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \delta IC^2 (\alpha + \beta + \delta)MI^2.$$

Sau đây là một số thí dụ sử dụng kết quả 3, 4 để giải

Thí dụ 8. *Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho tọa độ ba điểm* $A(-7;1)$, $B(3;2)$, $C(-4;-5)$ *và đường thẳng* $\Delta: 5x - 4y - 39 = 0$. *Tìm trên đường thẳng* Δ *điểm M sao cho vectơ* $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC}$ *có môđun nhỏ nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A; B; C\}$ cùng bộ số thực $\{1; 3; 5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x; y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + 3.\overrightarrow{IB} + 5.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} 9x = x_A + 3x_B + 5x_C = -18 \\ 9y = y_A + 3y_B + 5y_C = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-2; -2).$$

Áp dụng kết quả **3** ta có $\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC} = 9.\overrightarrow{MI}$

Do đó $\left|\vec{u}\right|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Điểm $I(-2;-2)$ cố định, điểm M thuộc đường thẳng Δ nên MI nhỏ

https://tieulun.hopto.org

nhất khi $MI \perp \Delta$. Phương trình đường thẳng $MI: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$.

Điểm $M(x;y) = MI \cap \Delta: \begin{cases} x = -2 + 5t, y = -2 - 4t \\ 5x - 4y - 39 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(3;-6)$.

Thí dụ 9. *Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(7;4;-3)$, $B(2;4;2)$, $C(6;2;2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 2y - 2z - 2 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}$ có môđun nhỏ nhất.*

Phân tích. Xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A; B; C\}$ cùng bộ số thực $\{2; 3; 5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó tọa độ điểm $I(5;3;1)$.

Áp dụng kết quả 3 ta có biến đổi

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = 10\overrightarrow{MI}.$$

Điểm I cố định, điểm $M \in (P)$, nên MI ngắn nhất khi $MI \perp (P)$. Phương trình $MI: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

Xét $M(x;y) = IM \cap (P)$:

$$\begin{cases} x = 5 + 3t, y = 3 + 2t, z = 1 - 2t \\ 3x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $t = -1 \Rightarrow M(2;1;3)$.

Thí dụ 10. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(2;4;3)$, $C(-5;0;8)$ và đường thẳng có phương trình $\Delta: \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-9}{5} = \dfrac{z+1}{1}$. Tìm trên Δ điểm M sao cho vectơ $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ có môđun nhỏ nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A; B; C\}$ cùng bộ số thực $\{5; -3; -1\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $5\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} 5x_A - 3x_B - x_C = x = 4 \\ 5y_A - 3y_B - y_C = y = -2 \\ 5z_A - 3z_B - z_C = z = -2 \end{cases} \Rightarrow I(4;-2;-2).$$

Áp dụng kết quả 3 ta có $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$. Điểm I cố định, điểm $M \in \Delta$, MI ngắn nhất khi $MI \perp \Delta$. PT mặt phẳng qua I và vuông góc với Δ là $(P): 2x + 5y + z + 4 = 0$.

$$M(x;y) = \Delta \cap (P): \begin{cases} x = 6 + 2t, y = 9 + 5t, z = -1 + t \\ 2x + 5y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Suy ra $t = -2 \Rightarrow M(2;1;-3)$.

Thí dụ 11. *Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho tọa độ ba điểm $A(-2;11)$, $B(-4;-8)$, $C(2;7)$ và đường thẳng $\Delta: 3x + 5y - 34 = 0$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho $MA^2 - 3MB^2 - 5MC^2$ lớn nhất.*

Phân tích. Ta xét bài toán với hệ ba điểm $\{A; B; C\}$, cùng bộ số thực $\{1; -3; -5\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} - 5\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} -7x = x_A - 3x_B - 5x_C = 0 \\ -7y = y_A - 3y_B - 5y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0;0).$$

Áp dụng kết quả 4 ta có

$$MA^2 - 3MB^2 - 5MC^2 = IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2 - 7IM^2.$$

Do $IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2$ có giá trị không đổi nên biểu thức $MA^2 - 3MB^2 - 5MC^2$ lớn nhất khi IM nhỏ nhất. Vì điểm $I(0;0)$ cố định, điểm M thuộc đường thẳng Δ nên IM nhỏ nhất khi $IM \perp \Delta$. Phương trình đường thẳng $IM: \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t \end{cases}$. Do điểm M là giao điểm của IM và Δ nên ta có $34t - 34 = 0$. Từ đó suy ra $t = 1$. Tọa độ điểm $M(3;5)$.

Thí dụ 12. *Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho $A(3;5)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$ và $\Delta: 3x + 5y - 19 = 0$. Tìm trên Δ điểm M mà $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$ nhỏ nhất.*

Phân tích. Xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A; B; C\}$ cùng bộ số thực $\{1; 3; -2\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\begin{cases} x_A + 3x_B - 2x_C = 2x = 0 \\ y_A + 3y_B - 2y_C = 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow I(0;-3).$$

Áp dụng kết quả 4 ta có

$$MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = IA^2 + 3IB^2 - 2IC^2 + 2MI^2.$$

Do $IA^2 + 3IB^2 - 2IC^2$ không đổi nên điểm M thỏa mãn đề bài khi $MI \perp \Delta$.

https://tieulun.hopto.org

Phương trình đường thẳng $Ml: \begin{cases} x = 3t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$

Điểm $M(x;y) = Ml \cap \Delta: \begin{cases} x = 3t, y = -3 + 5t \\ 3x + 5y - 19 = 0 \end{cases}$

Suy ra $t = 1 \Rightarrow M(3;2)$.

Thí dụ 13. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz, cho ba điểm $A(2;4;3)$, $B(1;1;1)$, $C(-5;-11;-2)$ và điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+13}{-5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $3.MA^2 - 5.MB^2 + MC^2$.*

Phân tích. Xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A;B;C\}$ cùng bộ số thực $\{3;-5;1\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $3\overrightarrow{IA} - 5.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó $\begin{cases} 3x_A - 5.x_B + x_C = -x = -4 \\ 3y_A - 5.y_B + y_C = -y = -4 \\ 3z_A - 5.z_B + z_C = -z = 2 \end{cases} \Rightarrow I(4;4;-2)$.

Áp dụng kết quả 4 ta có biến đổi

$3MA^2 - 5MB^2 + MC^2 = (3IA^2 - 5IB^2 + IC^2) - MI^2$.

Do $3IA^2 - 5IB^2 + IC^2$ không đổi nên điểm M thỏa mãn đề bài khi MI nhỏ nhất, khi đó $MI \perp \Delta$.

Phương trình mặt phẳng chứa điểm I và vuông góc với Δ là $2x - 3y - 5z - 6 = 0$.

Xét hệ $\begin{cases} x = 7 + 2t, y = -1 - 3t, z = -13 - 5t \\ 2x - 3y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $t = -2 \Rightarrow M(3;5;-3)$.

Vậy $\max(3MA^2 - 5MB^2 + MC^2) = 255$.

Thí dụ 14. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz, cho ba điểm $A(1;8;2)$, $B(4;3;2)$, $C(4;5;4)$ và điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng $(P): 5x - y + 3z - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $2.MA^2 + 3.MB^2 - 4.MC^2$.*

Phân tích. Xét bài toán tìm tâm tỉ cự I của hệ ba điểm $\{A;B;C\}$, cùng bộ số thực $\{2;3;-4\}$.

Lời giải. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Khi đó

$\begin{cases} 2x_A + 3x_B - 4x_C = x = -2 \\ 2y_A + 3y_B - 4y_C = y = 5 \\ 2z_A + 3z_B - 4z_C = z = -6 \end{cases} \Rightarrow I(-2;5;-6)$.

Áp dụng kết quả 4 ta có

$2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2 = 2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2 + IM^2$.

Vì $2IA^2 + 3IB^2 - 4IC^2$ không đổi, nên điều kiện là MI ngắn nhất. Điểm I cố định, điểm $M \in (P)$, nên MI ngắn nhất khi $MI \perp (P)$.

Phương trình $Ml: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 5 - t \\ z = -6 + 3t \end{cases}$.

Giả sử $M(x;y)$

$M = IM \cap (P): \begin{cases} x = -2 + 5t, y = 5 - t, z = -6 + 3t \\ 5x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $t = 1 \Rightarrow M(3;4;-3)$.

Vậy $\min(2.MA^2 + 3.MB^2 - 4.MC^2) = -33$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho $A(3;2)$, $B(7;-6)$ và đường thẳng $\Delta: 2x + 3y + 13 = 0$, điểm M thay đổi thuộc đường thẳng Δ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 3MB^2$.

2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;3)$, $B(7;-4;3)$ và đường thẳng có phương trình $\Delta: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{-1}$. Tìm trên Δ điểm M sao cho $\vec{u} = 5.\overrightarrow{MA} - 3.\overrightarrow{MB}$ có môđun nhỏ nhất.

3. Trong mặt phẳng toạ độ (Oxy), cho ba điểm $A(1;3)$, $B(4;8)$, $C(3;4)$ và điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $\Delta: x + 2y + 7 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $MA^2 + 3MB^2 - 5MC^2$.

4. Trong không gian với hệ toạ độ Descartes $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;4;-1)$, $B(-2;1;4)$, $C(-1;2;3)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+6}{5} = \frac{z+9}{3}$ và điểm M thuộc Δ. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$2MA^2 + 3.MB^2 - 4.MC^2$.

5. Trong không gian với hệ trục toạ độ Descartes $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;2;-1)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;-1)$ và M thay đổi thuộc mặt phẳng $(P): 5x + y - 3z - 4 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của

$MA^2 - 4.MB^2 + 2.MC^2$.

https://tieulun.hopto.org

VỀ SỬ DỤNG MỘT CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TỨ GIÁC TRONG CÁC SÁCH TOÁN CỔ

TẠ DUY PHƯỢNG
(Viện Toán học Việt Nam)
MAI VĂN THU
(Học viên Cao học, ĐH Hồng Đức)

1 Mở đầu.

Một tam giác hoàn toàn được xác định (dựng được, tính toán được mọi yếu tố), nếu biết ba yếu tố độc lập (thí dụ, ba cạnh a, b, c...). Để một tứ giác được hoàn toàn xác định, ta phải biết năm yếu tố (thí dụ, biết độ dài bốn cạnh và một đường chéo,...).

Để tính diện tích tam giác khi biết ba cạnh, ta có *Hệ thức Heron*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{với } p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Để tính diện tích tứ giác, ta có *công thức Bretschneider* (1842, xem chứng minh trong *Bretschneider's formula - Wikipedia* hoặc *Bretschneider's formula - Wolfram MathWorld*):

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)},$$

trong đó a, b, c, d là độ dài bốn cạnh, $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi, S là diện tích, A và C là số đo góc A và góc C của tứ giác.

***Nhận xét* 1**. Vì tổng các góc trong một tứ giác bằng 360^0 nên công thức trên không thay đổi nếu thay $A+C$ bằng $B+D$.

***Nhận xét* 2**. Công thức Bretschneider là mở rộng của hệ thức Heron khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $(A+C=180^0)$:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

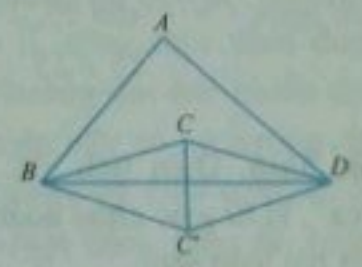
***Nhận xét* 3**. Công thức Bretschneider là mở rộng của hệ thức Heron nếu coi tam giác là tứ giác đặc biệt khi độ dài cạnh $d=0$ (đỉnh D trùng với đỉnh A).

***Nhận xét* 4**. Công thức Bretschneider chính xác nhưng khá cồng kềnh. Liệu có công thức đánh giá trên (đánh giá theo bất đẳng thức) diện tích tứ giác qua bốn cạnh không? Xét bài toán sau.

Bài 1. (Olympic Moscow lần thứ 16, 1953, Lớp 8, vòng II) *Cho a,b,c,d là các cạnh liên tiếp và S là diện tích của một tứ giác. Chứng minh rằng:*

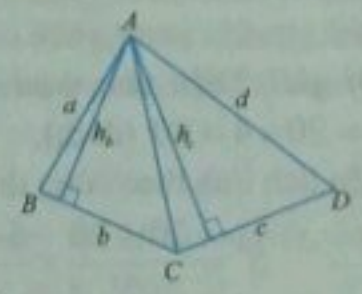
$$S\le\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$

Chứng minh. Có thể giả thiết $ABCD$ là tứ giác lồi vì nếu $ABCD$ là tứ giác lõm thì ta có



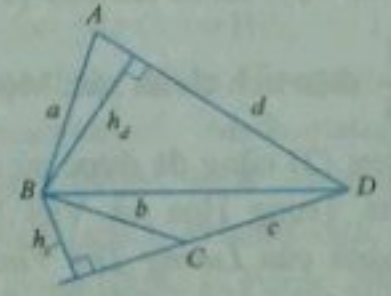
$$S_{ABCD}\le S_{ABC'D}.$$

Đặt các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng là a,b,c,d; các đường cao hạ từ đỉnh A xuống các cạnh b,c là h_b,h_c. Ta có



$$\begin{aligned}S&=S_{ABC}+S_{ACD}\\&=\frac{1}{2}bh_b+\frac{1}{2}ch_c\\&\le\frac{1}{2}(ba+cd).\end{aligned}$$

Kí hiệu các đường cao hạ từ đỉnh B xuống các cạnh c,d là $h_{c'},h_d$. Ta có:



$$\begin{aligned}S&=S_{ABD}+S_{CBD}\\&=\frac{1}{2}dh_d+\frac{1}{2}ch_{c'}\\&\le\frac{1}{2}(da+cb).\end{aligned}$$

Suy ra $2S\le\frac{1}{2}(ba+cd)+\frac{1}{2}(da+cb)$,

hay $S\le\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$. (1)

***Nhận xét* 5.** Dấu bằng trong công thức (1) xảy ra khi và chỉ khi tất cả bốn đường cao $h_b,h_c,h_{c'},h_d$ trùng với các cạnh tứ giác hay $ABCD$ là hình chữ nhật.

Một điều đáng ngạc nhiên là công thức tính diện tích tứ giác sai

$$S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}=\frac{1}{4}(a+c)(b+d). \quad (2)$$

đã được sử dụng để tính thể tích trong thực tế ở khá nhiều nơi trên thế giới trong suốt hơn 3000 năm (từ

https://tieulun.hopto.org

thời Babilon, 1600 năm trước công nguyên đến tận thế kỉ thứ 19 ở Việt Nam).

Công thức (2) tính diện tích tứ giác có thể tìm thấy trong Rind Papyrus (giấy cói) vào khoảng 1550 trước công nguyên và trong các hình vẽ trong ngôi đền Thần *Horus* tại Edfu (Ai Cập) vào khoảng 100 năm trước công nguyên (xem [2], trang 54), trong cuốn sách *Bhahmasputa Siddhānta* của nhà toán học *Bhahmagupta* (Ấn Độ, viết năm 628) và trong nhiều tài liệu khác.

Bài 2. (Bhahmagupta, [1], trang 242). *Một tứ giác có các cạnh với độ dài 25, 25, 25, 39. Diện tích tứ giác*

$$S=\frac{25+25}{2}\times\frac{25+39}{2}=800.$$

Lời bình. Diện tích chỉ là "gần đúng thô - gross area", vì tứ giác chưa hoàn toàn được xác định.

Xét bài toán sau.

Bài 3. *Một hình bình hành có các cạnh với độ dài 20, 5, 20, 5. Khoảng cách giữa hai cạnh có độ dài 20 là 4. Tính sai số giữa diện tích thực của hình bình hành và diện tích tính theo (2).*

Lời giải. Diện tích thực của hình bình hành bằng $S=20\times4=80$ (đvdt).

Diện tích tính theo công thức (2) là

$$S'=\frac{20+20}{2}\times\frac{5+5}{2}=100 \text{ (đvdt)}.$$

Như vậy, sai số lên đến $(100-80)\%=20\%$, bằng $\frac{1}{5}$ diện tích chính xác. Một con số không nhỏ! Công thức (2) cũng đã được sử dụng trong các sách toán của Trung Hoa và Việt Nam, từ *Toán pháp đại thành* của *Lương Thế Vinh* cuối thế kỉ XV đến *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* của *Nguyễn Hữu Thận* hoàn thành năm 1829 và một số sách khác. Dưới đây là một số bài toán trong các sách toán cổ của Việt Nam.

Bài 4. (Toán pháp đại thành, trang 44a, [7]). *Có một thửa ruộng Đông - Tây cộng lại được 8 trượng 4 xích, Nam - Bắc cộng lại được 27 trượng 6 xích. Hỏi diện tích thửa ruộng là bao nhiêu?*

Đáp số. 2 sào 8 xích 6 thốn 4 phân.

Lời giải. Để trình bày dễ hiểu, trong một số bài, chúng tôi đổi đơn vị sang hệ mét và sau đó đổi lại theo cách tính độ dài và diện tích cổ như sau. Đổi đơn vị: 1 cao (1 sào dài) = 15 xích (thước); 1 trượng = 10 xích; 1 xích = 10 thốn; 1 thốn = 10 phân; 1 phân =10 li; 1 li =10 hào; 1 xích = 0,4m; 1 sào = 15 xích (vuông) hay 1 xích (vuông) = 24 m^2.

Áp dụng: 8 trượng 4 xích = 84 xích = 33,6m;

27 trượng 6 xích = 276 xích = 110,4m.

Theo công thức (2) ta có

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}=\frac{33,6}{2}\times\frac{110,4}{2}=927,36 \ (m^2)$$

$$=2\times360+8\times24+6\times2,4+4\times0,24 \ (m^2)$$

= 2 sào 8 xích 6 thốn 4 phân.

Bài 5. (Toán pháp đại thành, [7], *trang 45a*). *Có một thửa ruộng Đông - Tây cộng lại được 100 trượng 5 xích, Nam - Bắc cộng lại được 87 trượng 8 xích. Hỏi thửa ruộng có diện tích bao nhiêu?*

Lời giải. Đổi đơn vị:

100 trượng 5 xích = 1005 xích = 402 m;

87 trượng 8 xích = 878 xích = 351,2 m.

Theo công thức tính diện tích tứ giác (2) ta có

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}=\frac{402}{2}\times\frac{351,2}{2}=35295,6 \ (m^2)$$

$$=9\times3600+8\times360+6\times2,4+5\times0,24 \ (m^2)$$

= 9 mẫu 8 sào 6 thốn 5 phân.

Nhận xét. *A. Volkov* trong [3] có nhắc đến *Lương Thế Vinh* đã sử dụng công thức (2) để tính diện tích tứ giác, nhưng Ông không giải thích qua tính toán cụ thể như trên.

Bài 6. (Toán điền trừ cửu pháp, [6], *trang 5a*). *Tìm diện tích ruộng biết đông dài 15 cao 8 xích 7 thốn, nam dài 14 cao 3 xích 1 thốn, tây dài 14 cao 5 xích 3 thốn, bắc dài 14 cao 4 xích 2 thốn.*

Đáp số: 2 mẫu 1 cao 4 xích 7 thốn 6 phân.

Lời giải. Đổi đơn vị:

Đông: 15 cao 8 xích 7 thốn = $15\times15+8$ xích 7 thốn = 233 xích 7 thốn = $2337\times0,04=93,48$m;

Tây: 14 cao 5 xích 3 thốn = $14\times15+5$ xích 3 thốn= 215 xích 3 thốn = $2153\times0,04=86,12$ m;

Nam: 14 cao 3 xích 1 thốn = $14\times15+3$ xích 1 thốn = 213 xích 1 thốn = $2131\times0,04=85,24$ m;

Bắc: 14 cao 4 xích 2 thốn = $14\times15+4$ xích 2 thốn = 214 xích 2 thốn = $2142\times0,04=85,68$ m.

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}=\frac{93,48+86,12}{2}\times\frac{85,24+85,68}{2}$$

$$=7674,308=2\times3600+1\times360+4\times24$$

$$+7\times24(m^2)+6\times0,24+0,068(m^2)$$

https://tieulun.hopto.org

= 2 mẫu 1 cao 4 xích 7 thốn 6 phân.

Bài 7. (Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, [5], Quyển 2) *Cho một thửa ruộng, đông dài 17 sào 2 xích, tây dài 16 sào 2 xích, nam rộng 15 sào 7 xích, bắc rộng 14 sào 7 xích, hỏi thực điền là bao nhiêu?*

Lời giải. $a+c=$ 17 sào 2 xích + dài 16 sào 2 xích = 33 sào 4 xích $=33\times 15+4=499$ xích = 199,6 m.

$b+d=$ 15 sào 7 xích+ 14 sào 7 xích = 29 sào 14 xích $=29\times 15+14=449$ xích = 179,6m.

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}=\frac{199,6}{2}\times\frac{179,6}{2}=8962,04(\text{m}^2)$$

$$=2\times 3600+4\times 360+13\times 24+4\times 2,4$$

$$+1\times 0,24+8\times 0,024+0,008\ (\text{m}^2)$$

= 2 mẫu 4 sào 13 xích 4 thốn 1 phân 8 li.

Bài 8. (Toán điền trừ cửu pháp, [6], trang 5b) *Tính diện tích thửa ruộng biết Đông 35 trượng 2 xích, Nam 12 trượng 4 xích, Tây 36 trượng 3 xích, Bắc 12 trượng 4 xích.*

Lời giải. Đông +Tây = 35 trượng 2 xích + 36 trượng 3 xích = 715 xích = 286m;

Nam + Bắc = 12 trượng 4 xích + 12 trượng 4 xích = 248 xích = 99,2m. Do đó:

$$S=\frac{a+c}{2}\times\frac{b+d}{2}=(286\times 99,2):4=7092,8\ (\text{m}^2)$$

$$=1\times 3600+9\times 360+10\times 24+5\times 2,4+3\times 0,24$$

$$+3\times 0,024+3\times 0,0024+0,0008\ (\text{m}^2)$$

$$=1\times 3600+9\times 360+10\times 24+5\times 2,4+3\times 0,24$$

$$+3\times 0,024+3\times 0,0024+0,0008(m^2).$$

Đáp số: Diện tích thửa ruộng là 1 mẫu 9 sào 10 xích 5 thốn 3 phân 3 li 3 hào.

Nhận xét. Sử dụng công thức (2) tính diện tích sai dẫn đến tính thể tích sai. Ví dụ:

Bài 9. (Đại thành toán học chỉ minh, [4], *trang 7b*) *Nay có đất ruộng, đông dài 5 trượng 3 thước, tây dài 6 trượng 3 thước, nam dài 7 trượng, bắc dài 8 trượng, khơi sâu 2 thước. Tính đất bao nhiêu phương (khối)?*

Lời giải. Sử dụng công thức (2) ta được

$$V=S_d\times h=\frac{53+63}{2}\times\frac{70+80}{2}\times 2=58\times 75\times 2$$

$=4350\times 2=8700$ thước khối = 87 phương (khối).

Lời bình. Toán học thời cổ (từ Babilon, Ai Cập) đến thời Trung đại (Trung Hoa và Việt Nam) thường được gọi là *toán học kinh nghiệm (empirical mathematics)*. Nhiều công thức (như công thức (2)) được xây dựng từ kinh nghiệm đo đạc thực tế và được sử dụng mà không hề có chứng minh. Mặc dù các công thức này chỉ là gần đúng, thậm chí có sai số lớn (xem Bài 2), nhưng các kiến thức toán học này cũng đã đáp ứng được một phần các yêu cầu của thực tế cuộc sống. Tuy nhiên, với sự phát triển của toán học, không thể áp dụng một công thức mà không có chứng minh chặt chẽ. Dạy toán theo con đường lôgic chặt chẽ (xây dựng hệ tiên đề, các định nghĩa chính xác, các định lí, công thức phải được chứng minh chặt chẽ...) thường đòi hỏi nhiều thời gian và công sức, vì vậy hiện nay có xu hướng dạy toán theo con đường *trực quan* và *kinh nghiệm*. Sử dụng lâu dài và phổ biến một công thức sai (công thức (2)) cho thấy việc giải quyết mối quan hệ và tỉ lệ thời lượng giữa *toán học kinh nghiệm* và *toán học lôgic* trong giảng dạy toán học có lẽ cũng cần được quan tâm và giải quyết thỏa đáng trong chương trình và nội dung giảng dạy mới đang được biên soạn và triển khai.

Tài liệu dẫn

[1] Cal B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New Jork, 1968.

[2] David M. Burton, *The History of Mathematics: Introduction*, Seventh Edition, Mc Graw Hill, 2011.

[3] Alexei Volkov, *On the origins of the "Toan phap dai thanh* (Great Compendium of Mathematical Methods)", in Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dallen (eds.), Proceedings of International Conference *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2002, pp. 369-410.

[4] Phạm Gia Kỉ 范嘉紀, *Đại thành toán học chỉ minh* 大成算學指明, Thư viện Hán Nôm, Kí hiệu: A. 1555.

[5] Nguyễn Hữu Thận 阮有慎, *Ý trai toán pháp nhất đắc lục* 意齋算法一得錄, Thư viện Hán Nôm, Kí hiệu: A.1336.

[6] *Toán điền trừ cửu pháp* 算田除九法 (không rõ tác giả), Thư viện Hán Nôm, Kí hiệu: VHb.50.

[7] Lương Thế Vinh 梁世榮, *Toán pháp đại thành* 算法大成, Thư viện Hán Nôm, Kí hiệu: A.2931.

https://tieulun.hopto.org

CÁC LỚP THCS

Bài T1/502 (Lớp 6). Chứng minh rằng:

$$A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{2019}} - 5$$

chia hết cho 7.

TRẦN ANH TUẤN

(GV THCS Nhân Phú, Lý Nhân, Hà Nam)

Bài T2/502 (Lớp 7). Cho a, b, c là các số nguyên. Tìm số tự nhiên d sao cho

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2018^d + 2019.$$

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/502. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

CAO VĂN DŨNG

(GV THPT chuyên Hà Nội Amsterdam)

Bài T4/502. Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$. Gọi D là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AC. Vẽ hình bình hành $BMCE$. Tia BM cắt cạnh AC tại I. Tia DI cắt cắt đường thẳng BE ở F. Chứng tỏ rằng các điểm A, D, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/502. Giải phương trình: $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$.

ĐOÀN NHƯ TRIỆU

(Số 11/2A6, phố Chương Dương, TP. Hải Dương)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/502. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y + 1 \\ 128x^3\sqrt{4x^2 + y^2} = y^3\sqrt{64x^2 + y^2} \end{cases}.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T7/502. Cho khai triển

$$(1 + x + x^2 + ... + x^{2018})^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{4036}x^{4036}.$$

Chứng minh đẳng thức sau

$$C_{2019}^0 a_{2019} - C_{2019}^1 a_{2018} + C_{2019}^2 a_{2017} - C_{2019}^3 a_{2016} + ... + C_{2019}^{2018} a_1 - C_{2019}^{2019} a_0 = -2019.$$

TRẦN NGỌC THĂNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/502. Cho tam giác nhọn ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm, P là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. E là giao điểm của BH và AC, F là giao điểm của CH và AB. Q, R theo thứ tự là giao điểm thứ hai của PE, PF và (O). K là giao điểm của BQ và CR. Chứng minh rằng $KH \parallel AP$.

LƯU CÔNG ĐÔNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/502. Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c.$$

NGÔ VĂN THÁI (*Thái Bình*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/502. Đặt $S_n = \sum_{k=2}^{n} k\cos\frac{\pi}{k}$. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

NGUYỄN TIẾN DŨNG

(SV lớp 41B2 Toán, Đại học Vinh)

Bài T11/502. Có 100 hòn đá được xếp thành k đống. Một cách xếp được gọi là *đặc biệt* nếu hai đống khác nhau có số đá khác nhau, nhưng nếu chia một đống tùy ý thành hai đống nhỏ thì trong $k + 1$ đống mới có những đống có số đá bằng nhau. Tìm giá trị k lớn nhất, k nhỏ nhất sao cho có cách xếp *đặc biệt*.

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

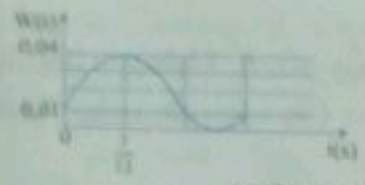
Bài T12/502. Về phía ngoài tứ giác nột tiếp $ABCD$, dựng các hình vuông $ABMN$, $BCPQ$, $CDRS$, $DAUV$. Gọi B' là giao điểm của PQ và MN, D' là giao điểm của UV và RS. Chứng minh rằng trung điểm của $B'D'$ thuộc BD.

NGUYỄN MINH HÀ (*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)

LÊ VIẾT ÂN (*TP. Hồ Chí Minh*)

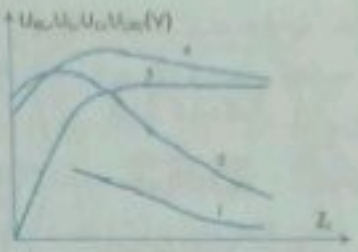
Bài L1/502. Một con lắc lò xo gồm vật nặng có khối lượng m = 200g dao động điều hòa. Chọn gốc tọa độ O tại vị trí cân bằng. Sự phụ thuộc của thế năng của con lắc theo thời gian được cho như trên đồ thị. Lấy $\pi^2 = 10$. Biên độ dao động của con lắc bằng bao nhiêu?

https://tieulun.hopto.org



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài I.2/502 Đặt điện áp xoay chiều ổn định vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp theo thứ tự gồm cuộn cảm thuần L có cảm kháng Z_L thay đổi được, điện trở R và tụ điện C. Hình bên là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện áp hiệu dụng trên L, trên C, trên đoạn chứa RL và trên đoạn chứa RC theo Z_L. Đường biểu diễn sự phụ thuộc điện áp hiệu dụng trên đoạn chứa RL theo Z_L là đường nào?



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/502 (For 6th grade). Show that

$$A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + ... + 10^{10^{10}} - 5$$

is divisible by 7.

Problem T2/502 (For 7th grade). Given integers a, b, and c. Find the natural number d so that

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2018^d + 2019.$$

Problem T3/502 Given positive numbers a, b, c such that $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{4}$. Find the maximum value of the expression $P = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$.

Problem T4/502 Given a triangle ABC and M is inside the triangle so that $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$. Let D be the symmetrical point of M about the line AC. Draw the parallelogram $BMCE$. The ray BM intersects AC at I. The ray DI intersects BE at F. Show that the points A, D, C, E, F are on the same circle.

Problem T5/502 Solve the equation

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0.$$

FOR HIGHSHOOL

Problem T6/502 Solve the system of equations

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y + 1 \\ 128x^3\sqrt{4x^2+y^2} = y^3\sqrt{64x^2+y^2} \end{cases}.$$

Problem T7/502 Suppose that

$$(1+x+x^2+...+x^{2018})^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{4076342}x^{4076342}.$$

Prove that

$$C_{2019}^0 a_{2019} - C_{2019}^1 a_{2018} + C_{2019}^2 a_{2017} - C_{2019}^3 a_{2016} + ... + C_{2019}^{2018} a_1 - C_{2019}^{2019} a_0 = -2019.$$

Problem T8/502 Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (O). Let H be the orthocenter of the triangle, P the midpoint of the minor arc $\overset{\frown}{BC}$. Assume that E is the intersection between BH and AC, F is the intersection between CH and AB. Let Q, R respectively be the second intersections between PE, PF and (O). Let K be the intersection between BQ and CR. Show that $KH \parallel AP$.

Problem T9/502 Given non-negative numbers a, b, c with at most one of them is equal to 0. Prove that

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYPIAD

Problem T10/502 Let $S_n = \sum_{k=2}^{n} k\cos\frac{\pi}{k}$.

Find $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

Problem T11/502 There are 100 marbles distributed into k groups. A distribution is called "special" if any two groups have different numbers of marbles and if we divide any group into two smaller ones then among $k+1$ new groups there are groups with equal numbers of marbles. Find the maximum and minimum values for k so that there exist corresponding special distributions.

Problem T12/502 Outside a cyclic quadrilateral $ABCD$, draw the squares $ABMN$, $BCPQ$, $CDRS$, $DAUV$. Let B' be the intersection between PQ and MN, D' the intersection between UV and RS. Show that the midpoint of $B'D'$ belongs to BD.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

https://tieulun.hopto.org

Bài T1/498. *Cho*

$$A = 1^{2016} + 2^{2016} + 3^{2016} + ... + 2015^{2016} + 2016^{2016}.$$

Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải. Gọi số dư trong phép chia số tự nhiên x cho số tự nhiên $m > 0$ là $T_m(x)$. Cho hai số tự nhiên $a = mk + r$ và $b = mh + s$ với các số tự nhiên k, r, h, s thì tích $ab = (mk + r)(mh + s) = m^2kh + m(ks + hr) + rs$, suy ra $T_m(ab) = T_m(rs)$. Từ đó $T_m(a^n) = T_m(r^n)$ với n là số tự nhiên.

Cách 1. Xét số dư khi chia cho 9. Mỗi số tự nhiên a viết được trong dạng $a = 9k + r$, trong đó k và r là các số tự nhiên với $0 \le r \le 8$. Xét số chính phương a^2 thì $T_9(a^2) = T_9((9k + r)^2) = T_9(r^2)$.

Với r bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 thì số r^2 chia cho 9 có số dư lần lượt bằng 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1, suy ra a^2 không có dạng $9h + s$ với s bằng 2, 3, 5, 6, 8, trong đó h là số tự nhiên. Trong dãy 2016 số tự nhiên từ 1 đến 2016 có $2016 : 3 = 672$ số hạng chia hết cho 3 và có $2016 - 672 = 1344$ số hạng không chia hết cho 3.

• Với mỗi số a chia hết cho 3 thì a^2 chia hết cho 9 nên a^{2016} chia hết cho 9, do đó trong tổng A có 672 số hạng chia hết cho 9.

• Mỗi số tự nhiên b không chia hết cho 3 có dạng $b = 3k + r$, trong đó k và r là các số tự nhiên với $1 \le r \le 2$. Ta có

$$b^3 = (3k + r)^3 = (3k + r)^2(3k + r)$$
$$= (9k^2 + 6kr + r^2)(3k + r) = 9t + r^3$$

với t là số tự nhiên. Với $r = 1$ thì $r^3 = 1$, với $r = 2$ thì $r^3 = 8$, do đó b^3 có dạng $9h + 1$, $9h + 8$, trong đó h là số tự nhiên. Từ đó xét số $b = 3k + r$ với r bằng 1 hoặc 2 thì số $b^6 - 1 = (b^3 - 1)(b^3 + 1)$ luôn chia hết cho 9, tức là b^6 có dạng $b^6 = 9s + 1$ với s là số tự nhiên. Với mỗi số b không chia hết cho 3 thì $b^{2016} = (b^6)^{336} = (9s + 1)^3$ chia cho 9 có dư 1.

Từ đó xét tổng

$$A = 1^{2016} + 2^{2016} + ... + 2015^{2016} + 2016^{2016}$$

thì $T_9(A) = T_9(1344.1) = T_9(1 + 3 + 4 + 4) = 3$,

tức là A có dạng $9h + 3$, do đó số A không thể là số chính phương.

Khi giải bài này theo *Cách* 2 và *Cách* 3 ta cần Bổ đề sau.

Bổ đề. *Số $r^4 - 1$ chia hết cho 5 với r bằng 1, 2, 3, 4 và chia hết cho 10 với r bằng 1, 3, 7, 9.* Thực vậy, ta viết

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = (r^2 - 1)(r^2 - 9 + 10)$$
$$= (r^2 - 1)(r^2 - 9) + 10(r^2 - 1)$$
$$= (r - 1)(r + 1)(r - 3)(r + 3) + 10(r^2 - 1).$$

Từ đó

• Với r bằng 1, 2, 3, 4 thì tích $(r-1)(r+1)(r-3)(r+3)$ chia hết cho 5 nên $r^4 - 1$ chia hết cho 5.

• Với r bằng 1, 3, 7, 9 thì tích $(r-1)(r+1)(r-3)(r+3)$ chia hết cho 10 nên $r^4 - 1$ chia hết cho 10.

Ta trở về chứng minh bài toán bằng cách xét số dư khi chia cho 5 hoặc cho 10.

Trong dãy 2016 số tự nhiên từ 1 đến 2016 có $2015 : 5 = 403$ số hạng chia hết cho 5, và có $2016 - 403 = 1613$ số không chia hết cho 5.

Cách 2. Xét số chính phương a^2 thì

$$T_5(a^2) = T_5((5k + r)^2) = T_5(r^2).$$

Với r bằng 0, 1, 2, 3, 4 thì số r^2 chia cho 5 có số dư lần lượt bằng 0, 1, 4, 4, 1, suy ra a^2 không có dạng $5h + s$ với s bằng 2, 3, trong đó h là số tự nhiên.

• Với mỗi số tự nhiên $a = 5k > 0$ với k là các số tự nhiên thì $T_5(a^{2016}) = 0$.

• Xét mỗi số $b = 5k + r$ với k là các số tự nhiên và r bằng 1, 2, 3, 4 thì $b^4 - 1 = 5t$ với t là số tự nhiên theo Bổ đề trên, do đó $b^{2016} = (b^4)^{504} = (5t + 1)^{504}$ chia cho 5 dư 1.

Từ đó xét tổng $A = 1^{2016} + 2^{2016} + ... + 2015^{2016} + 2016^{2016}$ thì $T_5(A) = T_5(1613.1) = 3$, tức là A có dạng $5h + 3$, do đó số A không thể là số chính phương.

Cách 3. Mỗi số tự nhiên a không chia hết cho 10 có dạng $a = 10k + r$, trong đó k và r là các số tự nhiên với $1 \le r \le 9$. Với r bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì r^2 khi chia cho 10 có số dư lần lượt bằng 0, 1, 4, 9,

https://tieulun.hopto.org

6, 5, 6, 9, 4, 1, suy ra a^2 không có dạng $10h+s$ với s bằng 2, 3, 7, 8, trong đó h là số tự nhiên.

Trong dãy 2016 số tự nhiên từ 1 đến 2016 có $2010:10=201$ số với tận cùng 0 và $403-201=202$ số với tận cùng 5.

• Lũy thừa với số mũ 2016 của 202 số tận cùng là 5 cũng có tận cùng là 5 nên $T_{10}(202.5)=T_{10}(1010)=0$.

Như thế khi xét số dư của A chia cho 10 ta chỉ cần xét chữ số tận cùng của $2016-403=1613$ số hạng không chia hết cho 5, trong đó có 807 số chẵn dạng $a=10k+r$ với r bằng 2, 4, 6, 8 (từ 1 đến 2016 có 1008 số chẵn, loại bỏ 201 số tận cùng 0 thì còn 807 số chẵn có tận cùng là 2, 4, 6, 8) và có $1613-807=806$ số lẻ dạng $a=10k+r$ với r bằng 1, 3, 7, 9.

• Xét các số lẻ $a=10k+r$ với r bằng 1, 3, 7, 9 thì a^4 chia cho 10 dư 1 theo Bổ đề trên, tức là $a^4=10h+1$ mà số mũ $2016=4.504$ nên $a^{2016}=(a^4)^{504}=(10h+1)^{504}$ chia cho 10 dư 1.

• Xét các số chẵn $b=10k+2r$ với r bằng 1, 2, 3, 4 thì số r^4-1 chia hết cho 5 theo Bổ đề trên nên $(2r)^4-6=16r^4-6=10r^4+6(r^4-1)$ chia hết cho 10. Vì $T_{10}(b^4)=T_{10}((2r)^4)$ thì b^4 có dạng $10h+6$, do đó $b^{2016}=(b^4)^{504}=(10h+6)^{504}$ chia cho 10 dư 6.

Từ đó xét tổng $A=1^{2016}+2^{2016}+\ldots+2015^{2016}+2016^{2016}$ thì

$T_{10}(A)=T_{10}(806.1+807.6)=T_{10}(6+42)=T_{10}(48)=8$, tức là A có dạng $10h+8$, do đó số A không thể là số chính phương. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Nguyễn Ngọc Anh, Đỗ Ngọc Tiến, Triệu Thanh Hằng, Vũ Minh Đức, Đỗ Văn Huấn*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Vương Viết Lượng*, 6A, *Lê Văn Quang Hiếu, Nguyễn Hằng Nga*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/498. *Tìm các số tự nhiên k, m, n thoả mãn $2.k!=m!-2.n!$ (với kí hiệu: $n!=1.2.3...n$; $0!=1$).*

Lời giải. Từ phương trình ta có $2.(k!+n!)=m!$ Từ đó ta thấy: $k\le n<m$ hoặc $n\le k<m$.

• Xét $k=n$, thay vào phương trình ta có

$$4.k!=m!\Leftrightarrow 4=(k+1).(k+2)...m.$$

Ta thấy $k+1$ là ước của 4 nên $k+1=1$ hoặc $k+1=2$ hoặc $k+1=4$.

- Với $k=0$; $k=1$ thì $4=m!$ vô nghiệm.

- Với $k=3$ thì $24=m!\Rightarrow m=4$.

Vậy phương trình có nghiệm (3; 3; 4).

• Giả sử $k<n$ từ $2.(k!+n!)=m!$ ta có

$$2.k![1+(k+1).(k+2)...n]=m!$$

$$\Leftrightarrow 2[1+(k+1).(k+2)...n]=(k+1).(k+2)...m$$

$$\Leftrightarrow 2+2(k+1).(k+2)...n=(k+1).(k+2)...m\ (*)$$

Ta thấy vế phải của (*) chia hết cho $k+1$ và cho n còn $1+(k+1).(k+2)...n$ không chia hết cho $k+1$, từ đó ta thấy 2 chia hết cho $k+1$ và chia hết cho n. Vì vậy $k+1=n=2$ nên $m=3$. Do đó ta có nghiệm là (1; 2; 3).

• Trường hợp $k\ge n$ làm tương tự.

Vậy có các bộ số nguyên $(k; n; m)$ sau: (1; 2; 3); (2; 1; 3); (3; 3; 4) thoả mãn yêu cầu bài toán. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng gửi về Toà soạn: **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa, Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Lâm Thao:** *Tạ Đức Quý*, 6A3, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/498. *Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình: $(y-\sqrt{y^2+2}).\sqrt{x}+\sqrt{4+2x}=2$.* (1)

Lời giải. ĐK: $x\ge 0$.

• Với $x=0$ thì vế trái của (1) bằng 2, nên (1) luôn đúng với mọi y nguyên.

• Với $x>0$, ta có

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x}.y+\sqrt{4+2x}=2+\sqrt{y^2+2}.\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}.y+\sqrt{4+2x})^2=(2+\sqrt{y^2+2}.\sqrt{x})^2$$

$$\Leftrightarrow y\sqrt{4+2x}=2\sqrt{y^2+2}$$

$$\Rightarrow (y\sqrt{4+2x})^2=(2\sqrt{y^2+2})^2$$

$$\Leftrightarrow y^2(4+2x)=4(y^2+2)\Leftrightarrow xy^2=4 \quad (2)$$

Do x, y là các số nguyên nên y^2 là số chính phương và là ước số của 4, kết hợp với (2) suy ra $y^2=1$ hoặc $y^2=4$.

- Nếu $y^2=1$ thì $y=\pm 1$, thay vào (2) tìm được $x=4$. Thay vào (1) chỉ có $(x; y)=(4; 1)$ thỏa mãn.

- Nếu $y^2=4$ thì $y=\pm 2$, thay vào (2) tìm được $x=1$. Thay vào (1) chỉ có $(x; y)=(1; 2)$ thỏa mãn.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; t)$, $(1; 2)$, $(4; 1)$ với $t\in\mathbb{Z}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải phương trình tìm nghiệm nguyên có chứa căn thức, mấu chốt của bài toán là sử dụng suy luận và biến đổi để dẫn đến (2). Từ đó sử

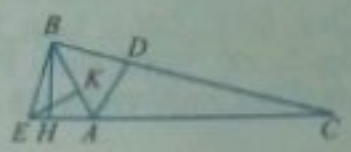
https://tieulun.hopto.org

đụng tính chất chia hết để tìm ra x và y. Cần nhớ rằng phép bình phương hai vế của phương trình không phải là phép biến đổi tương đương, do đó sau khi tìm được x, y cần phải kiểm tra có thỏa mãn (1) thì mới kết luận là nghiệm của (1). Một số bạn sử dụng nhân biểu thức căn liên hợp và đặt ẩn phụ để tìm ra (2), nhưng cách giải dài dòng hơn. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt: **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An**: *Trương Công Cảnh, Đặng Hữu Thanh*, 8A, *Nguyễn Thiện Phúc Anh, Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/498. *Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn hệ thức $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}=8:3:1$. AD là phân giác của góc A (D thuộc BC). Biết $\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{4}{3}$. Tính độ dài đoạn thẳng AD.*

Lời giải. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}=8:3:1$ nên



$$\frac{\widehat{A}}{8}=\frac{\widehat{B}}{3}=\frac{\widehat{C}}{1}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{12}=15^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{A}=120^\circ$, $\widehat{B}=45^\circ$, $\widehat{C}=15^\circ$.

Hạ $BH\perp AC$ tại H và kẻ $BE\perp BC$ ($E\in AC$). Vì AD là phân giác góc A và $\widehat{ABC}=45^\circ$ nên

$\widehat{BAH}=\widehat{BAD}=\widehat{DAC}=60^\circ$; $\widehat{ABE}=90^\circ-\widehat{ABC}=45^\circ$.

Suy ra $\Delta ABE=\Delta ABD$ (g.c.g), dẫn đến $AE=AD$, $BD=BE$. Theo giả thiết $\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{4}{3}$, ta có

$$\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{BH^2}=\frac{4}{3}\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{BAH}=60^\circ$ nên

$$AB=BH.\frac{2}{\sqrt{3}}=1.$$

Hạ $EK\perp AB$ tại K. Ta có $\frac{BK}{EK}+\frac{AK}{EK}=\cot 45^\circ+\cot 60^\circ$

$$\Leftrightarrow\frac{AB}{EK}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}\Rightarrow EK=\frac{3}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $AD=AE=\frac{2S_{ABE}}{BH}=\frac{EK.AB}{BH}=\sqrt{3}-1$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Trương Công Cảnh, Nguyễn Văn Thành Nam*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Tx. Bút Sơn, Hoằng Hóa.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/498. *Giải phương trình:*

$$2x^3+20=9x\sqrt[3]{x^3-7}.$$

Lời giải. Lập phương hai vế, phương trình đã cho tương đương với $(2x^3+20)^3=729x^3(x^3-7)$.

Đặt $t=x^3$ và biến đổi, ta được:

$$8t^3-489t^2+7503t+8000=0$$
$$\Leftrightarrow(t+1)(8t^2-497t+8000)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t+1=0\\8t^2-497t+8000=0\end{array}\right.$$

Ta có: $t+1=0\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1$.

Phương trình $8t^2-497t+8000=0$ vô nghiệm vì có $\Delta=497^2-32.8000=-8991<0$. Như vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất $x=-1$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Một số bạn sử dụng hệ thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

và suy ra $a^3+b^3+c^3=3abc\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\a=b=c\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho viết thành

$$x^3+(\sqrt[3]{x^3-7})^3+3^3=3.3.x\sqrt[3]{x^3-7}.$$

Sử dụng kết quả trên với $a=x;b=\sqrt[3]{x^3-7};c=3$, ta được phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}x+\sqrt[3]{x^3-7}+3=0\\x=\sqrt[3]{x^3-7}=3\end{array}\right.$. Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm của bài toán. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Nghệ An**: *Lê Hải Phong, Lê Văn Mạnh, Nguyễn Đức Bảo Hoàng, Nguyễn Thanh Nguyên, Nguyễn Cảnh Mạnh*, 9B, *Nguyễn Hữu Hào*, 9D, *Nguyễn Văn Hoàng Minh, Hoàng Thị Kim Oanh, Đặng Hữu Khanh, Nguyễn Văn Chung, Trương Công Cảnh*, 8A, *Chu Thế Phong*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trung Phú*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/498. *Giải hệ phương trình*

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2(x^2+4y^2-8)}\\\qquad=\left(\sqrt{y^2+x-3}+1-y\right)\left(\sqrt{y^2+x-3}+1+y\right)\quad(1)\\2\sqrt[3]{y^4+5}=x\qquad(2)\end{array}\right.$$

https://tieulun.hopto.org

Lời giải. ĐK: $x^2+4y^2-8\ge 0$, $y^2+x-3\ge 0$.

Ta có: $\left(\sqrt{y^2+x-3}+1-y\right)\left(\sqrt{y^2+x-3}+1+y\right)$

$=y^2+x-3+2\sqrt{y^2+x-3}+1-y^2=x-2+2\sqrt{y^2+x-3}$.

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$x-2+2\sqrt{y^2+x-3}\le\sqrt{2\left[(x-2)^2+4(y^2+x-3)\right]}$$
$$=\sqrt{2(x^2+4y^2-8)}.$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow x-2=2\sqrt{y^2+x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2=4y^2\\ x\ge 2\end{cases}.$$

Thay $(x-4)^2=4y^2$ vào PT(2) ta được:

$$x^4-(x-4)^4=80 \qquad (3)$$

Đặt $x-2=t$, PT(3) trở thành:

$$(t+2)^4-(t-2)^4=80\Leftrightarrow t^3+4t-5=0\Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1\Rightarrow x=3\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$ (thỏa mãn các điều kiện). Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(3;\frac{1}{2}\right) \text{ và } \left(3;-\frac{1}{2}\right). \qquad \square$$

➢***Nhận xét.*** Có khá đông các bạn tham gia giải bài này, có 3 bạn giải sai, một số bạn do không đặt ẩn phụ nên lời giải còn dài. Các bạn sau đây có lời giải tương đối ngắn gọn: **Hưng Yên:** *Chu Ngọc Chiến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; *Nghiêm Thị Mai Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh. **Nam Định:** *Lưu Ngọc Ánh, Mai Văn Nguyên, Đỗ Tiến Dũng, Trần Quang Minh, Cồ Huy Dũng*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hà Nam:** *Ngô Việt Anh*, 10 chuyên toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 10A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hóa. **Hà Tĩnh:** *Bùi Tuấn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Lê Hồng Quân, Nguyễn Thị Huyền My*, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang. **Thừa Thiên Huế:** *Trương Công Đức, Trịnh Phương Thảo, Nguyễn Minh Thảo, Nguyễn Minh Tuấn, Phạm Tiến Duy*, 11 Toán 2, *Võ Thị Hải Yến, Đoàn Thị Kim Anh, Phạm Bá Hoàng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát. **Trà Vinh:** *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành. **Đồng Tháp:** *Phạm Ngọc Thùy Dương, Nguyễn Trúc Như Bình, Đinh Thái Duy, Ngô Bách Phương*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh. **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm, Trương Gia Bảo, Lê Kim Chúc, Trương Khánh Linh*, 10T1, *Trần Nguyên Yên Đan*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Long An:** *Nguyễn Phước Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Long An. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Đắk Lắk:** *Nguyễn Trần Thiện Nhân*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du. **Gia Lai:** *Hoàng Minh Quyết*, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/498. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{1+2\log_{16}x^2}+\sqrt{4-\frac{3}{4}\log_2 x^4}+\frac{\log_2 x^2-3}{\log_2^2 x-\frac{2}{3}\log_2 x^3+2}=0. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK:

$$\begin{cases}x>0\\ 1+2\log_{16}x^2\ge 0\\ 4-\frac{3}{4}\log_8 x^4\ge 0\\ \log_2^2 x-\frac{2}{3}\log_2 x^3+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ -1\le\log_2 x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le 16.$$

PT(1)

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4-\log_2 x}+\frac{2\log_2 x-3}{\log_2^2 x-2\log_2 x+2}=0.$$

Đặt $\log_2 x=t$ $(-1\le t\le 4)$, PT(1) trở thành:

$$\sqrt{1+t}+\sqrt{4-t}+\frac{2t-3}{t^2-2t+2}=0 \quad (2).$$

Với $\sqrt{1+t}-\sqrt{4-t}=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$, PT(2) không thoả mãn.

$$(2)\Leftrightarrow\frac{2t-3}{\sqrt{1+t}-\sqrt{4-t}}+\frac{2t-3}{t^2-2t+2}=0$$

$$\Leftrightarrow(2t-3)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}-\sqrt{4-t}}+\frac{1}{t^2-2t+2}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ hoặc $\sqrt{1+t}-\sqrt{4-t}=-t^2+2t-2$ (3)

• $t=\frac{3}{2}$ thì $\log_2 x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ (thoả mãn ĐK).

• Giải PT(3), ta thấy $-t^2+2t-2=-(t-1)^2-1\le -1$

$$\Rightarrow\sqrt{1+t}-\sqrt{4-t}\le -1\Leftrightarrow\sqrt{1+t}+1\le\sqrt{4-t}\Leftrightarrow\sqrt{1+t}\le 1-t$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-t\ge 0\\ 1+t\le 1-2t+t^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 1\\ \left[\begin{array}{l}t\ge 3\\ t\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t\le 0\Rightarrow -1\le t\le 0 \ (*)$$

https://tieulun.hopto.org

$$\text{PT(3)} \Leftrightarrow \sqrt{1+t}+4-t-\sqrt{4-t}+\frac{1}{4}=-t^2+t+\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+t}+\left(\sqrt{4-t}-\frac{1}{2}\right)^2=-t^2+t+\frac{9}{4}.$$

Với $-1\le t\le 0 \Rightarrow \sqrt{4-t}\ge 2 \Rightarrow \left(\sqrt{4-t}-\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+t}+\left(\sqrt{4-t}-\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow t^2-t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1. \text{ (**)}$$

Từ (*) và (**), suy ra PT(3) chỉ có thể có nghiệm $t=0$. Thử lại ta thấy $t=0$ không thoả mãn PT(3), suy ra PT(3) vô nghiệm. Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x=2\sqrt{2}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về phương trình sử dụng tính chất cơ bản của lôgarit và căn thức. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Nam Định:** *Cổ Huy Dũng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Long An:** *Phạm Quý Lê*, 12T1, THPT chuyên Long An.

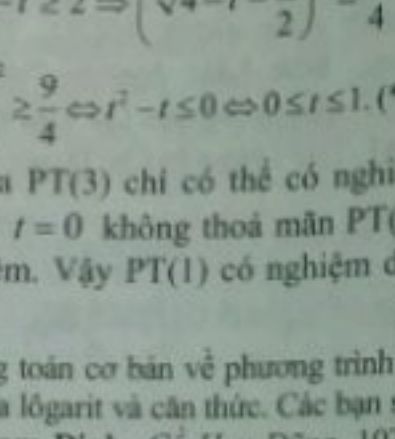
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/498. *Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có điểm A thay đổi và hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn (O) cố định, hai điểm A và O luôn nằm về cùng một phía so với đường thẳng BC. Đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm T (T nằm bên ngoài tam giác ABC) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng BC tại R. Các đường thẳng TB, TC cắt đường tròn (O') lần lượt tại E, F ($E\ne T, F\ne T$). Chứng minh rằng*

a) *Đường thẳng EF song song với đường thẳng BC.*

b) *Đường thẳng RT luôn đi qua một điểm cố định khi điểm A thay đổi.*

Lời giải. Xét phép vị tự $\mathcal{V}$ với T là tâm vị tự, biến đường tròn (O') thành đường tròn (O). Khi đó $\mathcal{V}_t$ $\begin{matrix}E\mapsto B\\F\mapsto C\end{matrix}$ suy ra $\mathcal{V}_t$ $EF\mapsto BC$, dẫn đến $EF\ /\!/\ BC$.



b) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến RPQ ta có

$$\frac{RB}{RC}.\frac{QC}{QA}.\frac{PA}{PB}=1\Rightarrow\frac{RB}{RC}=\frac{PB}{QC} \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{BP^2}{CQ^2}=\frac{BE.BT}{CF.CT}=\frac{BT^2}{CT^2}$ (do $EF\ /\!/\ BC$)

$$\Rightarrow\frac{BP}{CQ}=\frac{BT}{CT} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{RB}{RC}=\frac{TB}{TC}$, dẫn đến TR là phân giác ngoài của $\widehat{BTC}$. Từ đó RT luôn đi qua điểm chính giữa của cung $\widehat{BTC}$, đó là điểm cố định. ❐

➢***Nhận xét.*** Trừ bạn *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ** và bạn *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành, **Trà Vinh** cho lời giải trong trường hợp điểm A thay đổi tuỳ ý, những lời giải còn lại đều giải bài toán trong trường hợp điểm A thay đổi trên đường tròn (O), đó là các bạn: **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thăng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên:** *Chu Ngọc Chiến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Nam Định:** *Vũ Minh Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hoà Phan, Lê Thị Minh Thuỷ, Nguyễn Duy Phước, Trần Đại Hân, Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, *Nguyễn Đức Phát*, 10 Toán 2, *Trương Công Đức, Nguyễn Minh Thảo, Phạm Tiến Duy, Trịnh Phương Thảo*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Công Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/498. *Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+2}{\sqrt{6(a^2+2)}}+\frac{b+2}{\sqrt{6(b^2+2)}}+\frac{c+2}{\sqrt{6(c^2+2)}}\le 2.$$

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét: giả thiết

$$a+b+c+2=abc$$

$$\Leftrightarrow (ab+a+b+1)+(bc+b+c+1)+(ca+c+a+1)$$
$$=abc+ab+bc+ca+a+b+a+1$$

https://tieulun.hopto.org

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)$
$=(a+1)(b+1)(c+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=1$ (do $a,b,c>0$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số thực dương ta có: $6(a^2+2)=4a^2+2(a^2+4)+4$

$$\geq 4a^2+8a+4=4(a+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+2}{\sqrt{6(a^2+2)}}\leq \frac{a+2}{\sqrt{4(a+1)^2}}=\frac{a+2}{2(a+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(a+1)}.$$

Tương tự

$$\frac{b+2}{\sqrt{6(b^2+2)}}\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2(b+1)};\ \frac{c+2}{\sqrt{6(c^2+2)}}\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2(c+1)}.$$

Suy ra $\dfrac{a+2}{\sqrt{6(a^2+2)}}+\dfrac{b+2}{\sqrt{6(b^2+2)}}+\dfrac{c+2}{\sqrt{6(c^2+2)}}$

$$\leq \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, đơn giản. Giả thiết và kết luận cùng đưa về đánh giá qua $a+1, b+1, c+1$. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa, Nguyễn Kim Việt Hùng*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; **Nam Định:** *Lưu Ngọc Ảnh, Đỗ Tiến Dũng*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu, Lê Mỹ Duyên, Trần Đại Hân, Phạm Bá Hoàng, Nguyễn Hoà Phan, Lê thị Minh Thuỳ*, 10T1, *Nguyễn Đức Phát*, 10T2, *Đoàn Thị Kim Anh, Võ Thị Hải Yến*, 11T1, *Trương Công Đức, Trịnh Phương Thảo*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát; **Vĩnh Long:** *Trương Gia Bảo, Nguyễn Tấn Phát, Lê Minh Tâm*, 10T1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/498. a) *Cho a_1, a_2 là 2 số hữu tỉ. Chứng minh rằng nếu với mọi số nguyên dương m, $a_1^m+a_2^m$ là số nguyên thì a_1, a_2 là 2 số nguyên.*

b) *Bài toán còn đúng không nếu chỉ giả thiết rằng a_1, a_2 là 2 số thực.*

Lời giải. a) Nếu $a_1=-a_2$ thì ta có: $2a_1^2=k\in\mathbb{Z}$ và $2a_1^4\in\mathbb{Z}$. Do đó, $2a_1^4=\dfrac{k^2}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\vdots 2\Rightarrow a_1^2\in\mathbb{Z}$, mà $a_1\in\mathbb{Q}$ nên $a_1\in\mathbb{Z}$, suy ra $a_2\in\mathbb{Z}$.

Xét $a_1\neq -a_2$. Giả sử $a_1=\dfrac{x}{z}, a_2=\dfrac{y}{z'}$, trong đó

$$x,y\in\mathbb{Z}, z,z'\in\mathbb{Z}^*, (x,z)=(y,z')=1.$$

Ta có:

$$a_1+a_2=\frac{x}{z}+\frac{y}{z'}\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z'(a_1+a_2)=z'.\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z'}\right)=z'.\frac{x}{z}+y\in\mathbb{Z}\Rightarrow z'.\frac{x}{z}\in\mathbb{Z}.$$

Vì $(x,z)=1$ nên $z\mid z'$. Tương tự: $z'\mid z$. Do đó, $z'=z$. Vậy $a_1=\dfrac{x}{z}, a_2=\dfrac{y}{z}$, trong đó

$$(x,z)=(y,z)=1,\ x\neq -y \text{ (do } a_1\neq -a_2).$$

Ta sẽ chứng minh: $z=1$. Thật vậy, giả sử phản chứng là $z>1$. Theo giả thiết ta có:

$$z^n\mid x^n+y^n, \forall n\in\mathbb{Z}^*.$$

Gọi p là một ước nguyên tố của z thì $p^n\mid z^n\mid x^n+y^n, \forall n\in\mathbb{Z}^*$, nói riêng với $n=1$ thì $p\mid(x+y)$. Suy ra: $n\leq v_p(x^n+y^n), \forall n\in\mathbb{Z}^*$. Vì $(x,z)=(y,z)=1$ nên $p\nmid x, p\nmid y$. Ta xét 2 trường hợp:

• TH1: $p=2$. Khi đó, $2\nmid x, 2\nmid y\Rightarrow x,y$ là hai số nguyên lẻ. Theo bổ đề LTE ta có:

$$2^m\leq v_2(x^{2^m}+y^{2^m})=1,\ \forall m\in\mathbb{Z}^*.$$

Điều này vô lí.

• TH2: p là số nguyên tố lẻ thì theo bổ đề LTE ta có:

$$p^m\leq v_p(x^{p^m}+y^{p^m})=v_p(x+y)+v_p(p^m)$$
$$=v_p(x+y)+m, \forall m\in\mathbb{Z}^*.$$

Điều này vô lí vì $\lim\limits_{m\to+\infty}(p^m-m)=+\infty$ và $v_2(x+y)$ là hữu hạn (do $x\neq -y$). Vậy $z=1$ và ta có đpcm.

b) Ta chứng minh bài toán không còn đúng nếu chỉ giả thiết rằng a_1, a_2 là 2 số thực. Thật vậy, lấy $a_1=1-\sqrt{2}, a_2=1+\sqrt{2}$ thì ta có a_1, a_2 là 2 số vô tỉ nhưng

$$a_1^m+a_2^m=(1-\sqrt{2})^m+(1+\sqrt{2})^m=S_m\in\mathbb{Z}, \forall m\in\mathbb{Z}^*.$$

Thật vậy, dễ dàng thấy rằng: $S_{m+2}-2S_{m+1}-S_m=0$. Và do $S_1=2, S_2=6\in\mathbb{Z}$ nên dễ dàng bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $S_m\in\mathbb{Z}, \forall m\in\mathbb{Z}^*$. ❐

https://tieulun.hopto.org

➢ ***Nhận xét.*** Với bài T10/498 này, trường hợp tổng quát đề đã đăng ở số 438 (T12/2013), lời giải ở số 442 (T4/2014), tuy nhiên chúng tôi phát hiện có "lỗ hổng" trong lời giải đó, đến nay vẫn chưa khắc phục được. Vì vậy chúng tôi chỉ đưa ra lời giải bài toán cho trường hợp $n = 2$. Trường hợp tổng quát với n số hữu tỷ tùy ý, chúng tôi xin để mở, dành cho bạn đọc nghiên cứu trao đổi thêm. Rất mong nhận được ý kiến của bạn đọc!

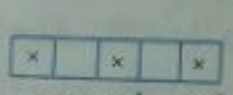
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/498. *Có một ghế băng có 5 chỗ ngồi. Có 5 người lần lượt đi đến và ngồi xuống ghế băng. Người đầu tiên ngồi vào một chỗ tùy ý. Mỗi người đến sau cố gắng chọn chỗ ngồi để không phải ngồi cạnh người đến trước, nếu không thể thì họ chọn một chỗ trống tùy ý để ngồi. Hỏi rằng có bao nhiêu khả năng sắp xếp chỗ ngồi cho họ phù hợp với qui tắc như vậy?*

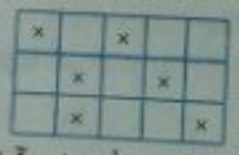
Lời giải. Ký hiệu A là tập hợp các chỗ ngồi mà sau khi chúng được ngồi bởi $|A|$ người, thì những người đến sau buộc phải ngồi cạnh một người đến trước. Ta thấy dễ dàng là $|A|=3$ hoặc $|A|=2$.

Xét các trường hợp:

1. Trong trường hợp $|A|=3$ thì các vị trí ngồi thuộc A chỉ có duy nhất một khả năng như đánh dấu bởi × như sau: Trong trường hợp này có 3! = 6 cách xếp chỗ cho 3 người đầu tiên và trong mỗi cách xếp chỗ cho 3 người đầu tiên có 2! = 2 cách xếp chỗ cho 2 người đến cuối cùng. Tổng cộng có 12 cách xếp chỗ cho 5 người ngồi với phương án có 3 người đầu tiên không phải ngồi cạnh người đến trước họ.



2. Với $|A|=2$, các khả năng lựa chọn A được biểu diễn trong hình bên. Trong mỗi phương án này, có 2!.3!=12 cách xếp chỗ cho 5 người.



Tổng cộng ta có 4.12 = 48 cách xếp chỗ có thể. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Nhiều bạn giải sai bài này. Chỉ có các bạn sau đây có đáp số đúng: **Hưng Yên**: *Chu Ngọc Chiến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Quảng Bình**: *Đinh Đoàn Xuân Phương, Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Đà Nẵng**: *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Nghệ An**: *Đặng Hữu Khanh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang Đô Lương. **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

VŨ ĐÌNH HOÀ

Bài T12/498. *Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến ứng với các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 2\sqrt{3}(m_a+m_b+m_c).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11T, Trường THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**). Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1 (BĐT Schur). Với ba số $a,b,c>0$, ta có

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bổ đề 2. Với ba số $a,b,c>0$, ta có

$$1)\ a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

$$2)\ 3\left[(a^3+b^3+c^3)+2abc\right]$$
$$\ge \frac{5}{2}\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right].$$

Chứng minh. 1) Khai triển BĐT ở Bổ đề 1 ta có ngay 1).

2) Theo BĐT Cauchy ta có: $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$. Do đó:

$$3\left[(a^3+b^3+c^3)+2abc\right]=\frac{5}{2}(a^3+b^3+c^3)$$
$$+\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3)+6abc$$
$$\ge \frac{5}{2}(a^3+b^3+c^3)+\frac{15}{2}abc=\frac{5}{2}(a^3+b^3+c^3+3abc)$$
$$\ge \frac{5}{2}\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc\right].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bổ đề 3 (BĐT Schwarz). Với ba số $a,b,c>0$, ta có

$$\frac{a^2c^2}{b}+\frac{b^2c^2}{a}\ge (a+b)c^2.$$

Trở lại giải bài toán trên. Theo công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác và theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$\left[2\sqrt{3}(m_a+m_b+m_c)\right]^2=3(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}+\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$$
$$+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2})^2$$

https://tieulun.hopto.org

$$= 3\left(\sqrt{\frac{1}{a}a(2b^3+2c^2-a^3)}+\sqrt{\frac{1}{b}b(2c^3+2a^2-b^3)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{1}{c}c(2a^3+2b^3-c^3)}\right)^2$$
$$\le 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[2ab(a+b)+2bc(b+c)$$
$$+2ca(c+a)-a^3-b^3-c^3]$$
$$= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[6ab(a+b)+6bc(b+c)$$
$$+6ca(c+a)-3(a^3+b^3+c^3)] \quad (1).$$

Theo các bổ đề 2 và 3, ta có

$$6[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]-3(a^3+b^3+c^3)$$
$$=6[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$-3[(a^3+b^3+c^3)+2abc]+6abc$$
$$\le 6[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$-\frac{5}{2}[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]+6abc$$
$$\le 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$+\frac{1}{2}[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]+6abc$$
$$\le 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2a^2}{c}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{c^2b^2}{a}+\frac{a^2b^2}{c}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{b^2c^2}{a}\right)+6abc$$
$$=3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$
$$+\frac{b^2c^2}{a}+\frac{c^2a^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}+6abc$$
$$=(ab+bc+ca)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

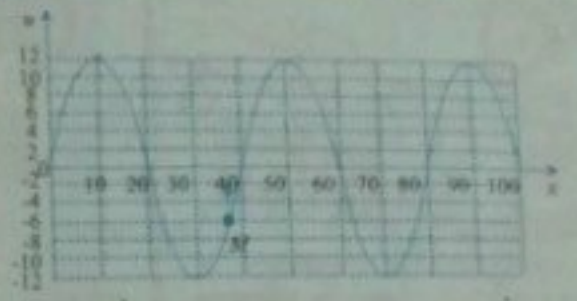
$$2\sqrt{3}(m_a+m_b+m_c)\le(bc+ca+ab)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán khó, ngoài bạn *Phương* chỉ có 4 bạn tham gia giải: **Nam Định:** *Nguyễn Quang Vinh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT Phù Cát số 2; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Long An:** *Phan Qui Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/498. *Sóng cơ truyền trên một sợi dây đàn hồi, dọc theo trục Ox. Vào thời điểm t, hình dạng sợi dây như hình bên. O là tâm sóng, M là điểm trên dây có chiều chuyển động như hình vẽ (u và x tính bằng cm). Khoảng cách giữa hai điểm O và M trên hình bằng bao nhiêu?*



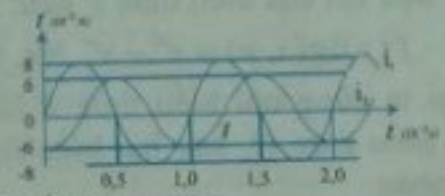
Lời giải. Từ đồ thị ta có $\lambda = 40\text{cm}$. Điểm N có tọa độ 20cm đang đi qua vị trí cân bằng theo chiều âm, còn điểm M có tọa độ -6cm đang đi theo chiều dương. Ta có: $\frac{2\pi\Delta x_{MN}}{\lambda}=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\Delta x_{MN}=\frac{50}{3}\text{cm}$.

Do đó: $\Delta x_{OM}=\frac{110}{3}\text{cm}$. Khoảng cách giữa 2 điểm O và M: $OM=\sqrt{6^2+\left(\frac{110}{3}\right)^2}\approx 37,2\text{cm}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào có đáp án đúng gửi về Toà soạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/498. *Hai mạch dao động điện từ LC lí tưởng đang có dao động điện từ tự do với các cường độ dòng điện tức thời trong hai mạch là i_1 và i_2 được biểu diễn như hình vẽ. Tổng điện tích của hai tụ điện trong hai mạch ở cùng một thời điểm có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?*



Lời giải. Từ đồ thị, ta có :

$$\begin{cases} i_1 = 8.10^{-3}\cos\left(2000\pi t-\frac{\pi}{2}\right)(A) \\ i_2 = 6.10^{-3}\cos(2000\pi t+\pi)(A) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{8.10^{-3}}{2000\pi}\cos(2000\pi t-\pi)\ (C) \\ q_2 = \frac{6.10^{-3}}{2000\pi}\cos\left(2000\pi t+\frac{\pi}{2}\right)(C) \end{cases}$$

Ta thấy : q_1, q_2 vuông pha nhau, vì thế :

$$q_1+q_2 = Q_0\cos(2000\pi t+\varphi)\ (C)$$
$$\max(q_1+q_2)=Q_0=\sqrt{Q_{01}^2+Q_{02}^2}$$
$$=\frac{5}{\pi}.10^{-6}(C)=\frac{5}{\pi}(\mu C).$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc là chưa có bạn nào đi đến kết quả cuối cùng cho đề ra kỳ này!

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

https://lieulon.hopto.org

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG BIỂU THỨC LIÊN KẾT

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài viết giới thiệu đến bạn đọc phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng cách sử dụng biểu thức liên kết. Đây là một phương pháp rất hiệu quả cho việc chứng minh một số dạng bất đẳng thức phân thức.

1. Khái niệm biểu thức liên kết

Đây là một khái niệm mới chưa được định nghĩa, sau đây là định nghĩa nghĩa của chúng tôi: Xét biểu thức P có dạng:

$$P = f(a)g(a,b) + f(b)g(b,c) + f(c)g(c,a), \forall a,b,c \in D.$$

trong đó $f(x)$ là một đa thức, $g(x, y)$ là một phân thức đối xứng với hai biến x và y, thì chúng ta gọi biểu thức có dạng sau:

$$Q = f(b)g(a,b) + f(c)g(b,c) + f(a)g(c,a), \forall a,b,c \in D$$

là biểu thức liên kết của biểu thức P nếu:

$$(f(x) - f(y))g(x,y) = x^n - y^n, \forall x, y \in D$$

và ngược lại ta cũng nói biểu thức P là biểu thức liên kết của biểu thức Q, hay hai biểu thức P và Q liên kết với nhau.

Tính chất. Nếu hai biểu P, Q liên kết với nhau thì:

$$P = Q.$$

Sử dụng tính chất trên chúng ta sẽ chứng minh, hoặc sáng tạo được nhiều bất đẳng thức đẹp.

2. Một số áp dụng

Thí dụ 1. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (1)$$

Phân tích. Biểu thức cần đánh giá ở vế trái của BĐT là: $P = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$,

và P có biểu thức liên kết là:

$$Q = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}.$$

Trong cách xác định biểu thức P và Q liên kết trên thì $f(x) = x^2$; $g(x,y) = \frac{1}{x+y}$ với $x, y \in (0;+\infty)$.

Như vậy để chứng minh BĐT đã cho, chúng ta cần chứng minh: $P = Q$, $P + Q \geq a + b + c$.

Lời giải. Gọi vế trái BĐT là P, và gọi:

$$Q = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}.$$

Khi đó, ta có $P - Q = \frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2}{c+a}$.

Mặt khác, ta lại có: $\frac{x^2-y^2}{x+y} = x - y, \forall x, y > 0$.

Nên theo hệ thức này ta có:

$$P - Q = a - b + b - c + c - a = 0 \Rightarrow P = Q.$$

Sử dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}, \forall x, y > 0$ ta được:

$$2P = P + Q = \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}$$

$$\Rightarrow 2P \geq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \Rightarrow 2P \geq a+b+c.$$

Suy ra: $P \geq \frac{a+b+c}{2}$. Vậy BĐT đã cho đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thí dụ 2. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \quad (2)$$

Phân tích. Ta thấy biểu thức cần đánh giá ở vế trái của BĐT(1) và BĐT(2) đều là: $P = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$ và P có biểu liên kết $Q = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$ theo thí dụ 1 ta đã chứng minh được $P = Q$. Từ đó, để chứng minh BĐT(2) ta

https://tieulun.hopto.org

cần chứng minh biểu thức PQ lớn hơn hoặc bằng bình phương vế phải của BĐT(2).

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT(2) là P, và gọi:

$$Q=\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}.$$

Theo bài trên ta có $P=Q$. Khi đó theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$P^2=PQ=\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\times\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right)\geq\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)^2.$$

Suy ra: $P\geq\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$.

Nên BĐT(2) đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Thí dụ 3. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\geq 1.$$

Phân tích. Gọi P là vế trái của BĐT ở trên, sử dụng điều kiện ta viết P dưới dạng

$$P=\frac{x^3}{x^3+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^3+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^3+zx+x^2}$$

và từ đó ta thấy P có biểu thức liên kết là:

$$Q=\frac{y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{x^3}{z^2+zx+x^2}$$

ta chứng minh: $P=Q,\ P+Q\geq 2$.

Lời giải. Gọi vế trái BĐT là P, khi đó do $xyz=1$ nên ta có: $P=\frac{x^2}{x+y+\frac{y^2}{x}}+\frac{y^2}{y+z+\frac{z^2}{y}}+\frac{z^2}{z+x+\frac{x^2}{z}}$

$$=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}.$$

Ta gọi:

$$Q=\frac{y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{x^3}{z^2+zx+x^2}.$$

Khi đó, ta có:

$$P-Q=\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3-z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3-x^3}{z^2+zx+x^2}$$
$$=x-y+y-z+z-x=0\Rightarrow P=Q.$$

Mặt khác, với a, b là các số thực dương thì:

$$(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+ab+b^2\geq 3ab\Rightarrow\frac{ab}{a^2+ab+b^2}\leq\frac{1}{3}\ (*)$$

Ta có:

$$P+Q=\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}$$

$$\Rightarrow P+Q=(x+y)\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}+(y+z)\frac{y^2-yz+z^2}{y^2+yz+z^2}+(z+x)\frac{z^2-zx+x^2}{z^2+zx+x^2}.$$

Theo BĐT (*) thì ta được:

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=1-\frac{2xy}{x^2+xy+y^2}\geq 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Tương tự ta có: $\frac{y^2-yz+z^2}{y^2+yz+z^2}\geq\frac{1}{3},\ \frac{z^2-zx+x^2}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{1}{3}$.

Từ các BĐT ở trên ta suy ra:

$$2P=P+Q\geq\frac{2(x+y+z)}{3}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}=1$

nên ta có: $2P\geq 2\Rightarrow P\geq 1$ nên BĐT đã cho đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Thí dụ 4. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+a^2)(c+a)}\geq\frac{1}{4}(a+b+c).$$

Phân tích. Gọi biểu thức ở vế trái của BĐT là P, ta thấy P có biểu thức liên kết là:

$$Q=\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}.$$

Chúng ta cần chứng minh:

$$P=Q,\ P+Q\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT là P, và gọi

$$Q=\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}.$$

Khi đó ta có:

https://tieulun.hopto.org

$$P-Q=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4-c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4-a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}$$
$$=a-b+b-c+c-a=0\Rightarrow P=Q.$$

Lại có:

$$P+Q=\frac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4+c^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4+a^4}{(c^2+a^2)(c+a)}.$$

Nhưng ta thấy:

$$x^4+y^4\geq\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\geq\frac{(x^2+y^2)(x+y)^2}{4},\forall x>0,y>0.$$

Suy ra: $\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}\geq\frac{x+y}{4}$.

Theo BĐT này ta có:

$$2P=P+Q\geq\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4}=\frac{a+b+c}{2}$$
$$\Rightarrow P\geq\frac{a+b+c}{4}.$$

Như vậy BĐT đã cho đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Đối với BĐT trên, nếu sử dụng phương pháp ước lượng mẫu số ở các phân thức của vế trái BĐT hay sử dụng BĐT Schwarz thì rất khó chứng minh được BĐT ở trên.

Thí dụ 5. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{b^3}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+\frac{c^3}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}\geq\frac{1}{5}(a+b+c).$$

Phân tích. Gọi vế trái của BĐT là P và gọi Q là biểu thức liên kết của P. Khi đó để chứng minh BĐT đã cho chúng ta chứng minh:

$$P=Q,\ P+Q\geq\frac{2(a+b+c)}{5}.$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT là P và gọi

$$Q=\frac{b^3}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{c^3}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+\frac{a^3}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}$$

Khi đó ta thấy:

$$P-Q=\frac{a^3-b^3}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}.$$

Với x, y là các số thực dương, ta có:

$$\frac{x^3-y^3}{x^4+xy(x^2+y^2)+y^4+x^2y^2}=\frac{(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}=x-y.$$

Áp dụng hệ thức trên, ta được:

$$P-Q=a-b+b-c+c-a=0\Rightarrow P=Q.$$

Ta lại có:

$$2P=P+Q=\frac{a^3+b^3}{a^4+ab(a^2+b^2)+b^4+a^2b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^4+bc(b^2+c^2)+c^4+b^2c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^4+ca(c^2+a^2)+a^4+c^2a^2}$$
$$=(a+b)\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}+(b+c)\frac{b^4-b^3c+b^2c^2-bc^3+c^4}{b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4}+(c+a)\frac{c^4-c^3a+c^2a^2-ca^3+a^4}{c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4}.$$

Ta sẽ chứng minh BĐT:

$$\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}\geq\frac{1}{5},\forall x>0,y>0\ (**)$$

Thật vậy:

$$(**)\Leftrightarrow 2(x^4+y^4+x^2y^2)\geq 3(x^3y+xy^3)$$

https://tieulun.hopto.org

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right]\ge 3\left[\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{x}{y}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1\right)^2\left[2\left(\frac{x}{y}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\right]\ge 0.$$

BĐT này đúng nên BĐT (**) đúng. Khi đó theo BĐT (**) ta có:

$$2P\ge\frac{2(a+b+c)}{5}\Rightarrow P\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

Như vậy BĐT đã cho đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Thí dụ 6. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(a+b)a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2(a+b+c)^3}{9}.$$

Lời giải. Gọi vế trái của BĐT là P và gọi

$$Q=\frac{(a+b)b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Khi đó, ta có:

$$P-Q=\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^3-c^3)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^3-a^3)}{c^2+ca+a^2}$$

$$=a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2=0\Rightarrow P=Q.$$

Mặt khác, ta có:

$$P+Q=\frac{(a+b)(a^3+b^3)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^3+c^3)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^3+a^3)}{c^2+ca+a^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)^2(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)^2(c^2-ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}.$$

Theo BĐT (*) ở thí dụ 3 ta có:

$$\frac{ab}{a^2+ab+b^2}\le\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=1-\frac{2ab}{a^2+ab+b^2}\ge 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{1}{3},\ \frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{1}{3}.$$

Từ các BĐT trên ta suy ra:

$$2P=P+Q\ge\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{3}.$$

Ta lại thấy từ BĐT

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$$

suy ra $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

Từ đó ta có: $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$ (3)

Nên theo BĐT (3) ta có:

$$2P\ge\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{3}\ge\frac{4(a+b+c)^2}{9}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2(a+b+c)^2}{9}.$$

Vậy BĐT đã cho đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Lời kết. Từ bài viết chúng ta rút ra một kết luận là, nếu BĐT cần chứng minh có vế trái giống dạng ở phần khái niệm thì sử dụng phương pháp biểu thức liên kết thường cho lời giải gọn nhất. Và cũng từ bài viết chúng ta rút ra một kinh nghiệm quý báu cho cách học toán là, phải thường xuyên tổng kết kinh nghiệm học toán đúc rút phương pháp học, phương pháp suy nghĩ giải toán từ việc giải các bài toán cụ thể. Cuối cùng, để thành thạo trong việc sử dụng phương pháp đã nêu, các bạn hãy giải các bài toán sau.

BÀI TẬP.

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3+ab(a+b)}+\frac{b^4}{b^3+c^3+bc(b+c)}+\frac{c^4}{c^3+a^3+ca(c+a)}\ge\frac{a+b+c}{4}.$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^8}{(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^8}{(b^4+c^4)(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^8}{(c^4+a^4)(c^2+a^2)(c+a)}\ge\frac{1}{8}(a+b+c).$$

3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)(a^2+b^2)a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^2+c^2)b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^2+a^2)c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{4(a+b+c)^4}{81}.$$

https://tieuluanhoctoan.org

DIỄN ĐÀN

DẠY HỌC TOÁN

VẬN DỤNG CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC ĐỂ NHẬN DẠNG TAM GIÁC

BÙI TRUNG HIẾU

(GV THPT Hưng Đạo, Tứ Kỳ, Hải Dương)

Đối với các trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Trong đó, đối với học sinh, có thể coi việc giải toán là hoạt động chủ yếu của hoạt động toán học. Thông qua quá trình hướng dẫn học sinh giải toán, giáo viên cần chú ý hướng dẫn học sinh phương pháp tìm lời giải bài toán theo bốn bước của *G. Polya*, biết kiểm tra và nghiên cứu sâu lời giải, phát triển đề bài theo nhiều khía cạnh khác nhau để có được những dạng bài tương tự hay có thể đề xuất được các bài toán khác có liên quan. Đây là hoạt động rất tốt và cần thiết để rèn luyện cho học sinh, bởi vì thông qua quá trình này, học sinh sẽ được rèn luyện các thao tác tư duy, hình thành và rèn luyện tư duy khoa học, phát triển thêm về tư duy thuật giải … Sau đây chúng tôi sẽ trình bày quá trình rèn luyện các hoạt động trí tuệ khái quát hoá, tương tự hóa, đặc biệt hoá, hệ thống hoá, so sánh… thông qua giải và khai thác kết quả các bài toán *đẳng thức, bất đẳng thức từ đó nhận dạng các tam giác* dựa trên việc vận dụng công thức lượng giác và các hệ thức trong tam giác.

Dạng đề: "Cho tam giác ABC thỏa mãn một *điều kiện cho trước* chứng minh rằng ABC là tam giác cân, vuông, đều."

"*Điều kiện cho trước*" có thể là:

- Đẳng thức lượng giác về góc.
- Đẳng thức lượng giác + độ dài (cạnh, trung tuyến, phân giác, ...).
- Đẳng thức độ dài.
- Hệ đẳng thức.

Phương pháp chung. Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "*Điều kiện cho trước*" đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài phương pháp đã nêu trên ta có thể giải quyết bài toán bằng cách sử dụng các bất đẳng thức tam giác. Trong bài này chúng tôi sẽ đi sâu vào phương pháp sử dụng các đẳng thức và bất đẳng thức trong tam giác (áp dụng khi "*Điều kiện cho trước*" có dạng đẳng thức $A = B$). Mục đích chính là để phát triển tư duy lôgic cho học sinh thông qua các dạng bài toán nhận dạng tam giác. Hy vọng sẽ giúp ích nhiều cho thầy cô trong quá trình giảng dạy và ra đề, đồng thời giúp các em học sinh có tư duy lôgic, sáng tạo hơn trong quá trình giải toán. Cụ thể phương pháp này gồm 2 bước như sau:

Bước 1. Chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ hoặc $A \leq B$. (1)

Bước 2. Lập luận để đẳng thức (1) xảy ra thì tam giác ABC vuông, cân hoặc đều.

I. ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

Bài toán xuất phát. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta có hệ thức:*

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

Lời giải

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \sin C.$$

Vì A, B, C là các góc trong tam giác ABC nên $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ hay

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2};\ \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó ta có: $\sin A + \sin B + \sin C$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

https://tieulun.hopto.org

Bài tập tương tự. Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì ta có hệ thức:

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C \quad (2.1)$$

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$$
$$=-4\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{3B}{2}.\cos\frac{3C}{2} \quad (1.2)$$

Qua lời giải đó, học sinh sẽ phát hiện ra mấu chốt của các bài tập trên chính là sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích. Từ đó các em có thể áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích để giải các bài tập sau:

$$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C$$
$$=-4\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C \quad (2.2)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}. \quad (3.1)$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$$
$$=-1-4\cos A.\cos B.\cos C \quad (4.1)$$

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C$$
$$=1-4\sin\frac{3A}{2}.\sin\frac{3B}{2}.\sin\frac{3C}{2} \quad (3.2)$$

$$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C$$
$$=-1+4\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C \quad (4.2)$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C \quad (5.1)$$

$$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C$$
$$=\tan 2A.\tan 2B.\tan 2C \quad (5.2)$$

Khái quát hoá

• Từ (1.1) và (1.2) ta có:

$$\sin(2k+1)A+\sin(2k+1)B+\sin(2k+1)C$$
$$=(-1)^k 4.\cos(2k+1)\frac{A}{2}.\cos(2k+1)\frac{B}{2}.\cos(2k+1)\frac{C}{2}. \quad (1.a)$$

• Từ (2.1) và (2.2) ta có:

$$\sin 2kA+\sin 2kB+\sin 2kC$$
$$=(-1)^{k+1}4.\sin kA.\sin kB.\sin kC \quad (2.a)$$

• Từ (3.1) và (3.2) ta có:

$$\cos(2k+1)A+\cos(2k+1)B+\cos(2k+1)C$$
$$=1+(-1)^k 4.\sin(2k+1)\frac{A}{2}.\sin(2k+1)\frac{B}{2}.\sin(2k+1)\frac{C}{2}. \quad (3.a)$$

• Từ (4.1) và (4.2) ta có:

$$\cos 2kA+\cos 2kB+\cos 2kC$$
$$=-1+(-1)^k 4.\cos kA.\cos kB.\cos kC \quad (4.a)$$

• Từ (5.1) và (5.3) ta có:

$$\tan kA+\tan kB+\tan kC=\tan kA.\tan kB.\tan kC. \quad (5.a)$$

Cách chứng minh các công thức này hoàn toàn tương tự như trên. Thông qua giải một số bài tập riêng lẻ, cụ thể, học sinh đã được tập luyện các hoạt động khái quát hoá cách giải cho một lớp các bài tập tương tự. Đồng thời đưa về các bài tập tổng quát hơn. Làm như vậy sẽ góp phần mở rộng, đào sâu, hệ thống hoá kiến thức và cao hơn là sáng tạo toán học.

II. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

Bài toán xuất phát. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta luôn có:*

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

Lời giải 1. Có thể sử dụng kết quả bất đẳng thức tổng quát sau: "*Cho ba góc x, y, z thoả mãn* $0<x,y,z<\pi$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\le\sin\frac{x+y+z}{3}".$$

Chứng minh. Ta có:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\le 2\sin\frac{x+y}{2}$$

$$\left(\text{vì } 0<\frac{x+y}{2}<\pi\Rightarrow\sin\frac{x+y}{2}>0 \text{ và } \left|\cos\frac{x-y}{2}\right|\le 1\right).$$

Từ đó ta có: $\frac{\sin x+\sin y}{2}\le\sin\frac{x+y}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\cos\frac{x-y}{2}=1\Leftrightarrow x=y$. Ta có

$$\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=\sin\left(\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}}{2}\right)$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}\right)\right)$$

https://lieulun.hopto.org

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x+\sin y}{2}+\frac{\sin z+\sin\dfrac{x+y+z}{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin x+\sin y+\sin z+\sin\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Từ đó suy ra:

$$\sin x+\sin y+\sin z\leq 3\sin\frac{x+y+z}{3}$$

hay $\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\leq \sin\dfrac{x+y+z}{3}$ (đpcm)

(đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z$).

Từ công thức tổng quát trên, ta dễ dàng có:

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(đpcm). (Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C$, hay ΔABC đều).

Lời giải 2. Ta có: $\sin A+\sin B+\sin C+\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\leq 2\sin\frac{A+B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

(vì $0<\cos\dfrac{A-B}{2}\leq 1,\ 0<\cos\left(\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$)

$$=2.2.\sin\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}.\cos\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4}\leq 4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\left(\text{vì } 0<\cos\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4}\leq 1\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Từ đó suy ra: $\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Khai thác giả thiết. A,B,C là ba góc trong của một tam giác, ta có : $\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$,

$$\frac{C+A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},\ \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

và $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}=\pi$. Suy ra:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (6.1)$$

(Từ (6) $\Rightarrow$ (6.1) là nguyên lý đối ngẫu: *góc chia đôi, hàm đổi chéo*).

Khái quát hoá

$$\sin\frac{mA+nA}{m+n}+\sin\frac{mB+nC}{m+n}+\sin\frac{mC+nA}{m+n}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (6.2)$$

• Từ (1.1) và (6) suy ra

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}. \qquad (6.3)$$

• Ta cũng có công thức (6.3) từ (6.1) và bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\cos\dfrac{A}{2},\cos\dfrac{B}{2},\cos\dfrac{C}{2}$ (vì $0<\dfrac{A}{2};\dfrac{B}{2};\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ nên $0<\cos\dfrac{A}{2};\cos\dfrac{B}{2};\cos\dfrac{C}{2}<1$) như sau:

$$3.\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}\leq\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

suy ra $\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Khái quát hoá hệ thức (6.3)

$$\cos^x\frac{A}{2}.\cos^y\frac{B}{2}.\cos^z\frac{C}{2}$$

$$\leq\left(\frac{3\sqrt{3}}{2(x+y+z)}\right)^{x+y+z}.x^x.y^y.z^z;\forall x,y,z>0 \qquad (6.4)$$

Chứng minh. Ta có:

$$(6.4)\Leftrightarrow\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{x}\right)^{\frac{x}{x+y+z}}.\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{y}\right)^{\frac{y}{x+y+z}}$$

$$.\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{z}\right)^{\frac{z}{x+y+z}}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2(x+y+z)}.$$

https://tieulun.hopto.org

Do $\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$, nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy mở rộng ta được:

$$VT=\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{x}\right)^{\frac{x}{x+y+z}}\cdot\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{y}\right)^{\frac{y}{x+y+z}}\cdot\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{z}\right)^{\frac{z}{x+y+z}}$$

$$\le\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\cdot\frac{1}{x+y+z}$$

$$\le\frac{3\sqrt{3}}{2(x+y+z)}.$$

Tương tự. Do A,B,C là ba góc trong một tam giác nên $0<\sin A,\ \sin B,\ \sin C\le 1$. Từ (6) và bất đẳng thức Cauchy ta cũng có:

$$\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}. \qquad (6.3')$$

Và $\sin^x A.\sin^y B.\sin^z C$

$$\le\left(\frac{3\sqrt{3}}{2(x+y+z)}\right)^{x+y+z}x^x.y^y.z^z;\forall x,y,z>0 \qquad (6.4')$$

Đặc biệt hoá. Cho $x=y=z=2$ ta thu được

$$\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C\le\frac{27}{64}. \qquad (6.5)$$

Thực chất khi bình phương hai vế của BĐT (6.3') ta cũng được BĐT (6.5).

Từ (6.5) suy ra $\frac{1}{\sin^2 A}\cdot\frac{1}{\sin^2 B}\cdot\frac{1}{\sin^2 C}\ge\frac{64}{27}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ge$$

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2 A}\cdot\frac{1}{\sin^2 B}\cdot\frac{1}{\sin^2 C}}=3\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=4. \qquad (6.6)$$

ta đã biết $\frac{1}{\sin^2 A}=1+\cot^2 A$,

$\frac{1}{\sin^2 B}=1+\cot^2 B$, $\frac{1}{\sin^2 C}=1+\cot^2 C$.

Do đó, từ (6.6) $\Rightarrow\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C\ge 1$.

Tổng quát hoá. Áp dụng bất đẳng thức:

$$x^n+y^n+z^n\ge 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$$

(với $x,y,z>0;n\in\mathbb{N}^*$) suy ra

$$\cot^{2n}A+\cot^{2n}B+\cot^{2n}C\ge\frac{1}{3^{n-1}} \qquad (6.7)$$

Tương tự

$$\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{27}{64} \qquad (6.5')$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge 4 \qquad (6.6')$$

$$\Rightarrow\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1 \qquad (6.7')$$

Từ định lí sin trong tam giác ABC và BĐT (6) ta suy ra:

$$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a+b+c\le 3\sqrt{3}.R. \qquad (6.8)$$

Từ đó suy ra $S=p.r\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.Rr.$ (6.9)

Cứ tiếp tục khai thác như vậy ta sẽ có những hệ thức mới.

III. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là*

$$m_b^2+m_c^2=5m_a^2.$$

Qua thực tế dạy ở trường phổ thông, chúng tôi thấy khi chứng minh bài toán này, học sinh thường quên mất phần thuận. Các em thường trình bày bài như sau:

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến cho ΔABC có

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4};$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Từ $m_b^2+m_c^2=5m_a^2$

$$\Rightarrow\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}=5\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)$$

$\Rightarrow b^2+c^2=a^2\Rightarrow\Delta ABC$ là tam giác vuông tại A. Như thế mới chỉ được một phần bài toán, đó là điều kiện đủ còn điều kiện cần thì làm như thế nào?

https://tieulun.hopto.org

• Nếu thay dấu $\Rightarrow$ bởi dấu $\Leftrightarrow$ thì bài toán mới hoàn thành.

• Nếu đề bài chỉ yêu cầu chứng minh điều kiện cần: "*Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh* $BC=a$. *Chứng minh* $m_b^2+m_c^2=5m_a^2$" thì sao?

Lời giải.

$$m_b^2+m_c^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}=\frac{5}{4}a^2$$

(vì $a^2=b^2+c^2$).

Do tam giác ABC vuông tại A nên $m_a=\frac{a}{2}$. Vậy $5m_a^2=\frac{5}{4}a^2$, vì thế $m_b^2+m_c^2=5m_a^2$ (đpcm).

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là*

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1. \quad (7)$$

Lời giải. Từ công thức (4.1) ta có:

$$(7)\Leftrightarrow -1-4\cos A.\cos B.\cos C=-1$$

$$\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A=0\\ \cos B=0\\ \cos C=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \text{ tam giác } ABC \text{ vuông}.$$

Tương tự như vậy từ công thức (5.2) suy ra tam giác ABC vuông khi và chỉ khi

$$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=0.$$

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng tam giác ABC cân hoặc vuông nếu* $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\tan B}{\tan C}$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\tan B}{\tan C}\Leftrightarrow \sin B.\cos B=\sin C.\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin 2B=\sin 2C\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2B=2C\\ 2B=\pi-2C\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=C\\ B+C=\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=C\\ A=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A hoặc vuông tại A.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A nếu* $\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B.\sin C}$.

Lời giải. Ta có: $\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}=\frac{a}{\sin B.\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B.\sin C}$$

(theo định lý sin)

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B.\cos C+\sin C.\cos B}{\cos B\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B.\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B.\sin C}\Leftrightarrow \cos B.\cos C=\sin B.\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos(B+C)=0 \ (\text{do } \sin A>0)\Leftrightarrow B+C=\frac{\pi}{2}$$

(với B, C là các góc trong tam giác)

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

Tương tự nếu thay dấu bất đẳng thức trong các bất đẳng thức (6), (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.5'), (6.6'), (6.7'), (6.8) bởi dấu "=" ta sẽ được một loạt các điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều. Đây cũng coi như các bài tập dành cho các bạn học sinh tự chứng minh. Qua một số thí dụ về bài toán nhận dạng tam giác các bạn thấy rằng để nhận dạng tam giác dù bằng phương pháp biến đổi lượng giác hay dùng các bất đẳng thức lượng giác quen thuộc thì cuối cùng đều quy về việc xét sự đặc biệt của các yếu tố trong tam giác như sự đặc biệt của góc, cạnh hay sự đặc biệt trong mối quan hệ giữa các góc và các cạnh. Chẳng hạn để nhận dạng tam giác vuông ta có thể dựa vào định lý Pythagore hoặc tam giác có một góc bằng 90^0, ..., tam giác cân thì có hai cạnh bằng nhau hoặc hai góc bằng nhau. Làm như vậy sẽ đem lại tính mục đích của việc giải mỗi bài toán mà ta có thể phát hiện ra các cách giải khác nhau. Trong quá trình giải toán nói chung, các em sẽ biết cụ thể hoá điều cần chứng minh hay tìm kiếm ở mỗi bài toán, từ đó phát hiện ra phương hướng giải bài toán.

https://tieulun.hopto.org

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 90 phút)

(NGUYỄN KHẢI VÀ BAN QUẢN TRỊ NHÓM TOÁN VD – VDC)

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (Oxz)?

A. $(P): x-3=0$. **B.** $(Q): y-2=0$.

C. $(R): z+1=0$. **D.** $(S): x+z+3=0$.

Câu 3. Cho $\log_a b=3$. Giá trị của biểu thức $\log_a(a^2b^3)$ bằng

A. 11. **B.** 6 **C.** 23. **D.** 13.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn cho số phức z và $\overline{z}$ (với $z\neq 0$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

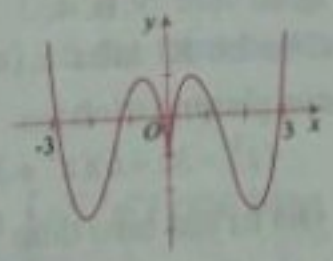
A. M và N đối xứng nhau qua trục Ox.

B. M và N đối xứng nhau qua trục Oy.

C. M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

D. M và N đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ hai.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(-3;3)$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $AC'=\sqrt{6}$. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2\\y=-3+t\\z=-1+t\end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;-1;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$.

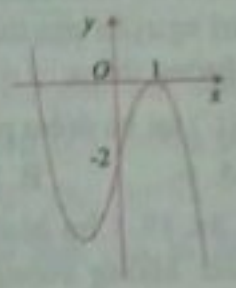
C. $\overrightarrow{u_3}=(2;-3;-1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-1;-1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-1)$ và $C(-3;0;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(0;-1;-1)$.

C. $(0;1;1)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^3+3x-2$.

B. $y=x^3-3x-2$.

C. $y=-x^4+2x^2-2$.

D. $y=-x^4-3x^2-2$.

Câu 10. Phương trình $\log_2(x+1)=4$ có nghiệm là

A. $x=4$. **B.** $x=15$. **C.** $x=3$. **D.** $x=16$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y=(x^2-1)^{-3}$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Câu 13. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F(0)=1$. Hàm số $F(x)$ là

A. $\cos x-\sin x+1$. **B.** $-\cos x+\sin x+1$.

C. $-\cos x+\sin x-2$. **D.** $-\cos x+\sin x+2$.

https://tieulun.hopto.org

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** 0.

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

A. 14. **B.** -2. **C.** 30. **D.** 1.

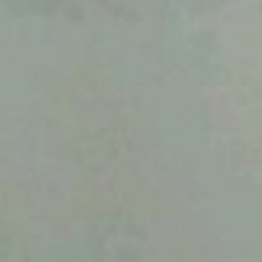
Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 2x+1$. Giá trị $f(2) - f(1)$ bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và SC tạo với mặt đáy một góc 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt bằng



A. 6. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác không vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp SC$. **B.** $BC \perp AH$.
C. $BC \perp AB$. **D.** $BC \perp AC$.

Câu 20. Ký hiệu $a = \log_2 10$ thì $\log_{16} 125$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{4}{3a}$. **C.** $\frac{3a-1}{4}$. **D.** $\frac{3a-3}{4}$.

Câu 21. Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$, với a, b là các số thực, có một nghiệm phức là $z = 1-i$, giá trị của biểu thức $a^{10} + b$ bằng

A. 1026. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 1024.

Câu 22. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x^3}\right)^{12}$, $x \neq 0$ là

A. -1760. **B.** 1760. **C.** 220. **D.** -220.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
y	-2 ↘ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ ↘ 1		↗ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ ↗ -2

Đồ thị hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 4, \int_2^6 f(u)\,du = -3.$$

Giá trị của $\int_0^2 [f(v) - 3]\,dv$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 25. Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thoả mãn $|7z - \bar{z}| \leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{25\pi}{12}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** 5π.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mp(ABC) bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Câu 27. Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để $A.a = 12$, tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+3).2^{x+1} + m + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

Câu 29. Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình

$$(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0.$$

Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

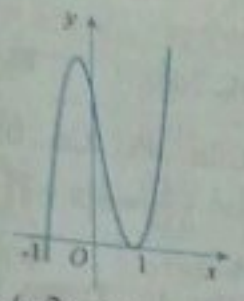
A. $2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$. **B.** 2.
C. $2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$. **D.** $2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$.

Câu 30. Cho hình nón có bán kính đáy, độ dài đường cao và đường sinh lần lượt lập thành cấp số cộng. Biết diện tích xung quanh của hình nón bằng 60π, thể tích của khối nón bằng

A. 35π. **B.** 66π. **C.** 96π. **D.** 70π.

https://tieulun.hopto.org

Câu 31. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(x^2+x-1)$ đồng biến trên khoảng



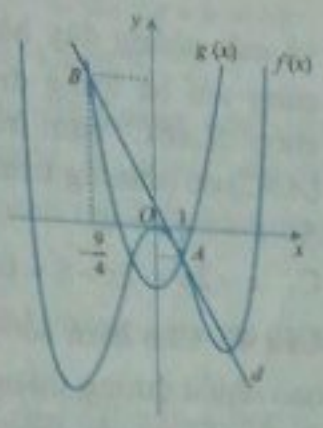
A. $(0;1)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

D. $(-\infty;-2)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $g(x)=2x^2-3$ và đường thẳng d có đồ thị như hình vẽ. Biết A là điểm chung của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$, $x_A=1$. Điểm B thuộc đồ thị $g(x)$, $x_B=-\frac{9}{4}$ và d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Giá trị $f'(x_A)$ bằng



A. -1. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. -2.

Câu 33. Ông *Tuấn* đầu tư 500 triệu đồng để mua xe ô tô chở khách. Sau khi mua, thu nhập trung bình mỗi tháng được 10 triệu đồng (sau khi trừ đi các khoản chi phí khác). Tuy nhiên, mỗi năm giá trị xe lại giảm 10% so với năm trước đó. Tổng số tiền lãi sau 4 năm kinh doanh của ông *Tuấn* bằng bao nhiêu?

A. 480 triệu đồng. B. 308,05 triệu đồng.
C. 328,05 triệu đồng. D. Lỗ 171,95 triệu đồng

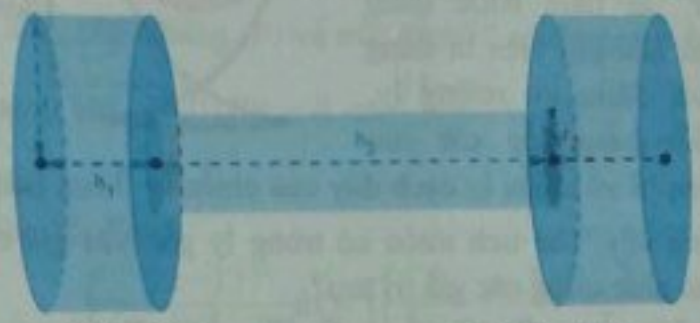
Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 x^{2018}f(x)\,dx=2$. Giá trị của $\int_0^1 x^{2019}f'(x)\,dx$ bằng

A. -4038. B. $\frac{2}{2019}$.
C. 4038. D. $-\frac{2}{2019}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AD=2a$, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SD và BC. Khoảng cách giữa SC và MN bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{12}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{24}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 36. Một quả tạ tập tay gồm 3 khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3 thỏa mãn $r_3=r_1$, $h_3=h_1$, $r_2=\frac{1}{3}r_1$ (xem hình vẽ). Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng

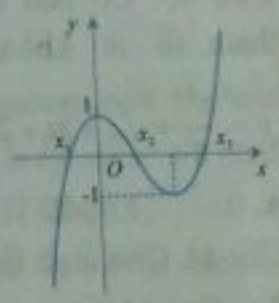


A. $\pi.\frac{16(9-2h_1)}{16h_1+9}$. B. $\pi.\frac{36(9-2h_1)}{16h_1+9}$.
C. $\pi.\frac{60(9-2h_1)}{16h_1+9}$. D. $\pi.\frac{46(9-2h_1)}{16h_1+9}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(3;-1;5)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox, Oy và Oz tại các điểm D,E và F. Biết thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-3y+4z\pm\sqrt[3]{36}=0$. B. $2x-3y+4z+\frac{3}{2}=0$.
C. $2x-3y+4z\pm12=0$. D. $2x-3y+4z\pm6=0$.

Câu 38. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1,x_2,x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3-x_1=2\sqrt{3}$. Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S, diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)+1, y=-f(x)-1$, $x=x_1$ và $x=x_3$ bằng



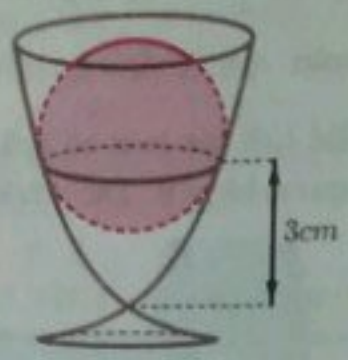
A. $S+2\sqrt{3}$. B. $S+4\sqrt{3}$.
C. $4\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{3}$.

https://tieulun.hopto.org

Câu 39. Cho số phức z thoả mãn $|z^2-2iz|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|iz+1|$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 40. Một chiếc ly bằng thuỷ tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành khi quay 1 phần đồ thị hàm số $y=2^x$ xung quanh trục Oy. Người ta thả vào chiếc ly một viên bi hình cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín viên bi đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của viên bi và chiếc ly cách đáy của chiếc ly 3cm (như hình vẽ). Thể tích nước có trong ly gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?



A. 30cm^3. **B.** 40cm^3. **C.** 50cm^3. **D.** 60cm^3.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(2-\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}-3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$ **D.** $(2;3)$

Câu 42. Gọi M thuộc đồ thị hàm số $y=2^x$; N thuộc đồ thị hàm số $y=2^{-x}$; P, Q là hai điểm thuộc trục hoành sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân với đáy lớn MN, $MN=2PQ$ và có chu vi bằng 14 đơn vị dài. Diện tích của hình thang $MNPQ$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A.$(20;25)$. **B.** $(27;33)$. **C.**$(34;39)$. **D.**$(41;45)$.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2019 để hàm số $y=\dfrac{x^2}{8}+\sqrt{x+m+2}$ không có điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 44. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP=\dfrac{1}{4}DD'$. Biết mp(AMP) cắt CC' tại N, thể tích của khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\dfrac{11a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{4}$.

Câu 45. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2+3|=2|z+\bar{z}|$ và $|z-4+3i|=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC=AB=3\sqrt{2}$, $S(1;3;2)$, đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{-1}$ và góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Khi ba điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+y-4z-14=0$.

C. $x-2y-7z-8=0$. **D.** $x+y-4z+14=0$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu đường thẳng d có đúng ba điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x+x(x+y)\ge\log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$ bằng

A. $\dfrac{59}{3}$. **B.** 19. **C.** $\dfrac{53}{3}$. **D.** $8+6\sqrt{2}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;6)$, $B(2;4;0)$ và $C(0;4;6)$. Biết M là điểm để biểu thức $MA+MB+MC+MO$ đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $H(3;0;-1)$ và M là

A. $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Câu 50. Chọn ngẫu nhiên một bộ $(a;b)$ từ tập hợp $A=\{2,2^2,2^3,...,2^{25}\}$. Xác suất để $\log_a b$ là số nguyên bằng

A. $\dfrac{2}{200}$. **B.** $\dfrac{31}{300}$.

C. $\dfrac{13}{300}$. **D.** $\dfrac{7}{50}$.

https://tieulun.hopto.org

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

1A	2B	3C	4B	5B	6D	7A	8D	9D	10D
11D	12B	13C	14C	15D	16D	17C	18B	19A	20D
21B	22C	23B	24A	25D	26A	27A	28C	29B	30B
31D	32C	33B	34A	35B	36C	37B	38A	39A	40D
41A	42D	43C	44A	45D	46B	47C	48B	49A	50A

Câu 1. Ta có

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d;\ f'(x)=3ax^2+2bx+c.$

Khi đó $f(0)=2\Leftrightarrow d=2;\ f'(0)=0\Leftrightarrow c=0.$

$f'(2)=0\Leftrightarrow 3a+b=0;\ f(2)=-2\Leftrightarrow 2a+b=-1.$

Tính được $a=1;b=-3\Rightarrow S=0$. Chọn **A.**

Câu 2. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x=-1$, tiệm cận ngang là $y=2$, do đó $I(-1;2)$ thay vào các phương trình thì I thuộc đường thẳng $2x-y+4=0$. Chọn **B.**

Câu 3. $M_1(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục $Oz\Rightarrow\begin{cases}x=y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M_1(0;0;-1)$. Chọn **C.**

Câu 6. $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}AB.AD.SA$

$=\frac{1}{3}a.2a.a\sqrt{3}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. Chọn **D.**

Câu 8. Ta có

$(\Delta,d)=60^0\Leftrightarrow\left|\cos(\vec{n}_\Delta,\vec{n}_d)\right|=\cos 60^0\Leftrightarrow\frac{\left|\vec{n}_\Delta.\vec{n}_d\right|}{\left|\vec{n}_\Delta\right|.\left|\vec{n}_d\right|}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{|m+1|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2|m+1|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow m^2+4m+1=0\Rightarrow m_1+m_2=-\frac{b}{a}=-4$. Chọn **D.**

Câu 10.

$T=5^{x+1}+3.5^x-5^{x-1}=\left(5+3-\frac{1}{5}\right).5^x=\frac{39}{5}.5^x=\frac{39\sqrt{7}}{5}.$

Chọn **D.**

Câu 11. Gọi $M\left(x_0;\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\frac{2}{3}\right)$. Do tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên ta có hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k=3$. Ta có $y'=x^2-1$. Theo đề bài ta có phương trình

$x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2.$

Theo đề bài điểm M có hoành độ âm nên $M(-2;0)$.

Chọn **D.**

Câu 12. Ta có: $(2x-y)i+y(1-2i)=3+7i$

$\Leftrightarrow y+(2x-3y)i=3+7i\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=7\\y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=3\end{cases}$

Khi đó biểu thức: $P=40$. Chọn **B.**

Câu 13. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi: $d(I;(P))=R\Leftrightarrow\frac{|11-m|}{5}=2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=1\\m=21\end{bmatrix}$.

Chọn **C.**

Câu 15. Ta có

$$\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)dx$$

$$=5\int\frac{1}{x+1}dx-3\int\frac{1}{x-1}dx=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C.$$

Vậy $\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=8$. Chọn **D.**

Câu 16. Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C.$

Mà

$F(0)=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}.$

Khi đó:

$T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2017)$

$+F(2018)+F(2019)$

$=\frac{2^0}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}+\frac{2^2}{\ln 2}+...+\frac{2^{2019}}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.\frac{1-2^{2020}}{1-2}$

$=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. Chọn **D.**

Câu 17. Ta có $|z-4-4i|$ là khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến điểm biểu diễn số phức $z=4+4i$, do đó $2\le|z-4-4i|\le 4$. Chọn **C.**

Câu 18. - Với $m=1$ ta có: $y=-x+4$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Với $m=-1$ ta có: $y=-2x^2-x+4$ là hàm số bậc hai, không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Với $m\ne\pm 1$ ta có $y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1$

https://tieulun.hopto.org

Hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ (m-1)^2+3(m^2-1)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1 \Rightarrow m=0.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m. Chọn **B.**

Câu 19. Có 3 trường hợp xảy ra:

TH1: Lấy được 5 bóng đèn loại I: có 1 cách

TH2: Lấy được 4 bóng đèn loại I, 1 bóng đèn loại II: có $C_5^4.C_7^1$ cách

TH3: Lấy được 3 bóng đèn loại I, 2 bóng đèn loại II: có $C_5^3.C_7^2$ cách

Theo quy tắc cộng, có: $1+C_5^4.C_7^1+C_5^3.C_7^2=246$. Chọn **A.**

Câu 20. Đặt $t=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\frac{t^2-4}{2},\ \text{ĐK: } 2\le t\le 2\sqrt{2}.$$

Phương trình trở thành:

$$t+2\frac{t^2-4}{2}+2m+3=0 \Leftrightarrow t^2+t+2m-1=0. \quad (*)$$

Lập BBT của hàm số $f(t)=t^2+t-1$ ta thấy phương trình (*) có nghiệm thỏa $2\le t\le 2\sqrt{2}$ khi

$$5\le 2m\le 7+2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2}\le m\le \frac{7+2\sqrt{2}}{2}\approx 4,91.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên dương là $m=3,\ m=4$.

Chọn **D.**

Câu 21. Với $t>0$, ta có $t^2+1\ge 2t$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1$. Do đó, $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\le\dfrac{t}{2t}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=\dfrac{1}{2}$ khi $t=1$. Chọn **B.**

Câu 22. Ta có:

$$\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_1+z_3=-z_2 \\ z_2+z_3=-z_1 \end{cases} \Rightarrow A=\left|-z_1\right|^2+\left|-z_2\right|^2+\left|-z_3\right|^2=\frac{8}{3}.$$

Chọn **C.**

Câu 23. Thể tích bể bơi phần hình hộp chữ nhật phía trên: $10.25.2=500\ (\text{m}^3)$.

Thể tích bể bơi phần hình lăng trụ tam giác phía dưới: $2.7.10=140\ (\text{m}^3)$.

Bể chứa được lượng nước là: $500+140=640\ (\text{m}^3)$.

Chọn **B.**

Câu 24. Ta có

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+\sqrt{4x-3})(x-3)x}{(x+1+\sqrt{5x+1})(x-3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})}=\frac{9}{8}.$$

Suy ra $a=9;\ b=8 \Rightarrow a-b=1$. Chọn **A.**

Câu 25. Ta có $w+2i=(3+4i)z$

$$\Rightarrow |w+2i|=|(3+4i)z|=|(3+4i)||z|$$

$$=5\left[(m+1)^2+4\right]\ge 20.$$

$$\Rightarrow |w+2i|\ge 20.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$. Vậy đường tròn có bán kính nhỏ nhất $R=20$ với tâm $I(0;-2)$.

Chọn **D.**

Câu 26. $I=\int\limits_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]dx=F(x)\Big|_{-1}^{2}+x^2\Big|_{-1}^{2}$

$$=F(2)-F(-1)+(4-1)=4-1+3=6.$$ Chọn **A.**

Câu 27. Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$, và chia hết cho 6 $\Rightarrow \begin{cases} d=\{2,4,6,8\} \\ a+b+c+d\vdots 3 \end{cases}$. Khi đó, chọn d có 4 cách chọn, b và c đều có 9 cách chọn (từ $1\to 9$). Ta có $4.9.9=324$ số dạng $\overline{bcd}$. Xét mỗi số trong số 324 số dạng $\overline{bcd}$ đó:

- Nếu $b+c+d\vdots 3$ thì $a=\{3,6,9\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a.
- Nếu $b+c+d:3$ dư 1 thì $a=\{2,5,8\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a.
- Nếu $b+c+d:3$ dư 2 thì $a=\{1,4,7\} \Rightarrow$ có 3 cách chọn a.

Như vậy với mỗi số trong 324 số dạng $\overline{bcd}$ chỉ có đúng 3 cách chọn $a \Rightarrow$ có $324.3=972$.

Vậy xác suất cần tính là $P=\dfrac{972}{9^4}=\dfrac{4}{27}$. Chọn **A.**

Chú ý: Chọn d đầu tiên, việc chọn a, b, c ở các bước tiếp theo không phụ thuộc vào thứ tự chọn.

Câu 28. Ta có : $I=\int f(x)dx=\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

Đặt $\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt$ khi đó

$$I=\int e^{\sqrt[3]{x}}dx=3\int e^t t^2dt.$$

https://tieulun.hopto.org

Đặt $\begin{cases} t^2 = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = du \\ e^t = v \end{cases}$

$\Rightarrow I = 3\left(e^t t^2 - 2\int e^t t dt\right) = 3e^t t^2 - 6\int e^t t dt.$

Tính $\int e^t t dt$. Đặt $\begin{cases} t = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ e^t = v \end{cases}$

$\Rightarrow \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t.$

Vậy $\Rightarrow I = 3e^t t^2 - 6(e^t t - e^t) + C$

$\Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2} - 6\left(e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}\right) + C.$

Theo giả thiết ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C = -4$

$\Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2} - 6\left(e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}\right) - 4$

$\Rightarrow F(-1) = \dfrac{15}{e} - 4$. Chọn **C.**

Câu 29. Ta có

$$\int_a^d f(x)dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_a^d = \frac{a}{3}d^3 + \frac{b}{2}d^2 + cd.$$

Do đó:

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = -\dfrac{7}{2} \\ \int_1^2 f(x)dx = -2 \\ \int_0^2 f(x)dx = \dfrac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \dfrac{9}{2}b + 3c = \dfrac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\dfrac{16}{3} \end{cases}.$$

Vậy $P = a + b + c = -\dfrac{4}{3}$. Chọn **B.**

Câu 30. Đặt $a = \int_1^3 f(x)dx$, $b = \int_1^3 g(x)dx$. Khi đó

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10 \Leftrightarrow a + 3b = 10,$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6 \Leftrightarrow 2a - b = 6.$$

Do đó: $\begin{cases} a + 3b = 10 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$

Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = a + b = 6$. Chọn **B.**

Câu 31.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = I + J.$$

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow$

$$I = x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = mx^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{4}m$. Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m)dx = \frac{\pi^2}{4}m + \frac{\pi}{2} - 1.$$ Ta có:

$$\frac{\pi^2}{4}m + \frac{\pi}{2} - 1 = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow m = 8.$$ Chọn **D.**

Câu 32. Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1} |f'(x)|dx = 9$ và $\int_1^4 |f'(x)|dx = 12$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\int_{-2}^{1} |f'(x)|dx = -\int_{-2}^{1} f'(x)dx = -f(x)\Big|_{-2}^{1} = -f(-1) + f(-2)$$

$\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9.$

Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$. Như vậy

$$[-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3$$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$. Chọn **C.**

Câu 33. ĐK: $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}.$

Ta có $12 + \sqrt{4x - x^2} \ne 0\ \forall x$ nên để (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình

$$\sqrt{x^2 - 6x + 2m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2m = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 4]$.

Để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' = 9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}.$$

Gọi 2 nghiệm phân biệt của $(*)$ là $x_1 < x_2$, ta có $0 \le x_1 < x_2 \le 4$. Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1.x_2 = 2m \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{cases} x_1x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) \ge 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 \ge 0 \\ (x_1 + x_2) - 8 \le 0 \end{cases}$$

https://tieulun.hocto.org

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge 0 \\ 6 \ge 0 \\ 2m - 24 + 16 \ge 0 \\ 6 - 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 2m - 8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 4.$$

Kết hợp nghiệm ta có: $4 \le m < \frac{9}{2}$. Chọn **B.**

Câu 34. • Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là: $V = \pi r^2 h = \pi . 4^2 . 8 = 128\pi$.

• Thể tích hình giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y = 4$ quay quanh Oy là:

$$\Rightarrow V_{(P)} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 32\pi.$$

Suy ra thể tích (H_1) là:

$$V_1 = V - 2V_{(P)} = 128\pi - 2.32\pi = 64\pi.$$

• Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$ là:

$$V_L = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi.$$

• Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$ là:

$$V_N = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi.$$

Suy ra thể tích (H_2) là:

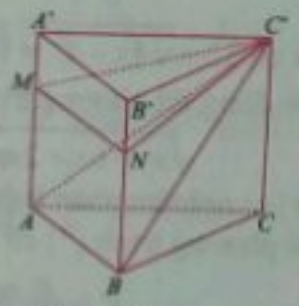
$$V_2 = V_L - 2V_N = \frac{256\pi}{3} - \frac{2.32\pi}{3} = 64\pi.$$

Vậy $V_1 = V_2$. Chọn **A.**

Câu 35. Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có

$$V_{C'.ABC} = \frac{1}{3}V$$

$$\Rightarrow V_{C'.A'B'BA} = \frac{2}{3}V.$$



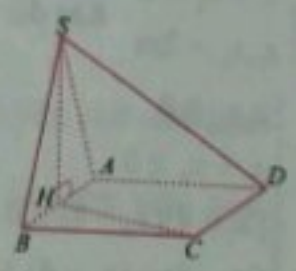
Mà $S_{A'B'NM} = \frac{1}{3}S_{A'B'BA}$.

Do đó $V_{C'.A'B'NM} = \frac{1}{3}V_{C'.A'B'BA} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}V = \frac{2}{9}V.$

Suy ra $V_{ABCMNC'} = \frac{7}{9}V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. Chọn **B.**

Câu 36. Gọi H là trung điểm AB. Ta có: $S_{ABCD} = a^2$,

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$$



$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}; HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,HC)} = \widehat{SCH};$$

$$\tan\widehat{SCH} = \frac{SH}{CH} = \frac{a\sqrt{15}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^0.$$

Chọn **C.**

Câu 37. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 6m - 3$.

$$f'(x) - 6x > 0, \forall x \ge 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 6m - 3 - 6x > 0, \forall x \ge 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 - 2x > 0, \forall x \ge 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 2} > m, \forall x \ge 2$$

$$\Rightarrow m < \min_{x \ge 2} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 2} = -\frac{1}{2}.$$ Chọn **B.**

Câu 38. Ta có $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Với $x \in [0;3]$ thì $f'(x) \ge 0$. Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Suy ra GTNN $m = f(0) = -1$ và GTLN $M = f(3) = -\frac{1}{2}$. Từ đây ta tính được

$$S = 2m + 3M = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}.$$ Chọn **A.**

Câu 39. Số cách chọn 3 chữ số chẵn trong các chữ số $0, 2, 4, 6$ là C_4^3.

Số cách chọn 2 chữ số lẻ trong các chữ số $1, 3, 5, 7$ là C_4^2.

Số cách sắp xếp 5 chữ số được chọn là $5!$.

Theo tắc nhân có $C_4^3 . C_4^2 . 5!$ số.

Trong các số trên có cả các số bắt đầu bằng 0, ta xem có bao nhiêu số bắt đầu bằng 0: $\overline{0abcd}$

Trong số này có 1 số chẵn rồi, ta chỉ cần chọn thêm 2 số chẵn khác 0 và 2 số lẻ. Số cách chọn là $C_3^2 . C_4^2$, sau đó đem hoán vị 4 phần tử đã chọn là $4!$ cách.

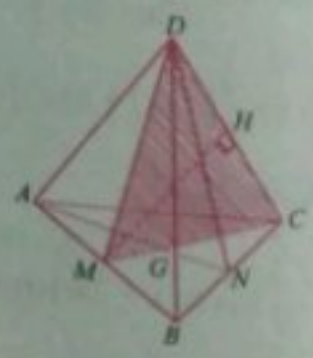
Vậy có $C_3^2 . C_4^2 . 4! = 432$ số có dạng $\overline{0abcd}$.

Vậy có $C_4^3 . C_4^2 . 5! - C_3^2 . C_4^2 . 4! = 2448$. Chọn **A.**

Câu 40. Thiết diện là tam giác cân MCD trong đó M là trung điểm AB. Ta có

$$DM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CD = a.$$

Gọi H là trung điểm CD, suy ra

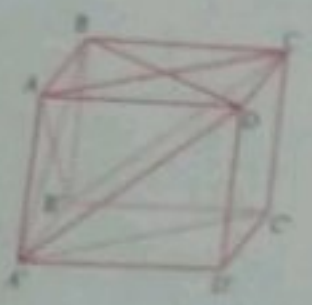


https://tieulun.hopto.org

$MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S_{MCD} = \frac{1}{2} MH.CD = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Chọn **D.**

Câu 41. Ta có $A.A'BD$ là chóp đều có tất cả các cạnh bằng 1 $\Rightarrow V_{A'.ABD} = V_{A.A'BD} = \frac{\sqrt{2}}{12} = V_{B'.ABC} = V_{B.B'AC}$.



Ta có

$h = d(AB', A'C')$

$= d(A'C', (ACB'))$

$= d(A', (ACB'))$

$= d(B, (ACB')) = \frac{3V_{B.B'AC}}{S_{\Delta B'AC}}$.

$\Delta AB'C$ có $B'C = A'D = 1$;

$AC = AB' = \sqrt{3}$ (do $ABCD$ là hình thoi cạnh 1 có $\widehat{BAD} = 60^0$).

Do đó $S_{\Delta B'AC} = \frac{\sqrt{11}}{4}$. Vậy $h = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$. Chọn **A.**

Câu 42. Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} d(M; AB).AB$ nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất khi $d(M; AB)$ nhỏ nhất. Gọi Δ là đường vuông góc chung của d, AB. Khi đó $M = \Delta \cap d$. Gọi $N = \Delta \cap AB$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;2;0)$,

phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases}$.

Do $N \in AB \Rightarrow N(s; -1+2s; 2), M \in d$

$\Rightarrow M(-1+t; t; 1+t)$

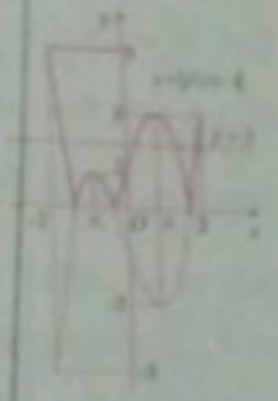
$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (t-s-1; t-2s+1; t-1)$.

Mà $MN \perp d, MN \perp \Delta$ nên

$$\begin{cases} t-s-1+2t-4s+2=0 \\ t-s-1+t-2s+1+t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-5s=-1 \\ 3t-3s=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{4}{3} \\ s=1 \end{cases}.$$

Do đó $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$ hay $T = a + 2b + 3c = 10$. Chọn **D.**

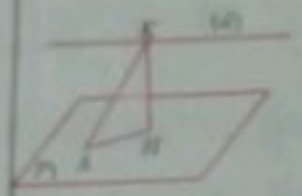
Câu 43. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số: $y = |f(x) - 1|$ như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(x) - 1| = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ và đường thẳng $y = 2$. Từ đồ thị ta có phương trình $|f(x) - 1| = 2$ có 4 nghiệm phân biệt trên $[-2; 2]$. Chọn **C.**



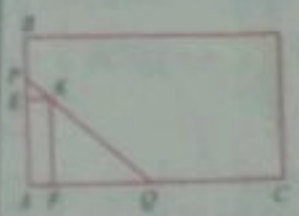
Câu 45. Gọi $K(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của A trên d. Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1;1;1).$$

Ta có $d((d),(P)) = d(K,(P)) = KH \le KA = \sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$. Chọn **D.**



Câu 46. Đặt $AP = a$, $AQ = b$ $(a, b > 0)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$. Ta có:



$$\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}; \frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1 \text{ hay } \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Ta có: $PQ^2 = a^2 + b^2$. Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8k}{a} + \frac{k}{b} = k \ \forall k > 0$.

$$a^2 + b^2 + k = \left(a^2 + \frac{8k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{b}\right)$$

$$= \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b}\right) \ge 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4k}{a} \\ b^2 = \frac{2k}{b} \\ \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125}$ $= 5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$. Chọn **B.**

Câu 47. Ta có $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

https://tieulun.hopto.org

Gọi $A\left(a;1+\dfrac{2}{a-1}\right)$, $a\neq 1$ là một điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C). Gọi $I(1;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận, ta có $IA^2=(1-a)^2+\dfrac{4}{(1-a)^2}$. Theo giả thiết ta có $AEBF$ là hình vuông nên $S_{AEBF}=AE^2$ $\Rightarrow S_{AEBF}$ nhỏ nhất khi AE^2 nhỏ nhất. Với

$$AE=AI\sqrt{2}\Rightarrow AE^2=2AI^2=2(1-a)^2+\frac{8}{(1-a)^2}.$$

Mặt khác ta lại có

$$2(1-a)^2+\frac{8}{(1-a)^2}\geq 2\sqrt{2(1-a)^2.\frac{8}{(1-a)^2}}=8.$$

hay $AE^2\geq 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (1-a)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình vuông $AEBF$ nhỏ nhất bằng 8. Chọn **C.**

Câu 48. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)-m=0$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x)$$
$$-2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)-m-1=0$$

$\Leftrightarrow(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2-2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)-m-1=0.$

Đặt $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ thì phương trình được viết lại là $t^2-2t=m+1$ (*). Do $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên

$$t=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1;2].$$

Do với mỗi $t\in[-1;\sqrt{3})$ thì tương ứng sẽ cho một nghiệm thuộc khoảng $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ và mỗi $t\in[\sqrt{3};2]$ thì sẽ cho hai nghiệm thuộc khoảng $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

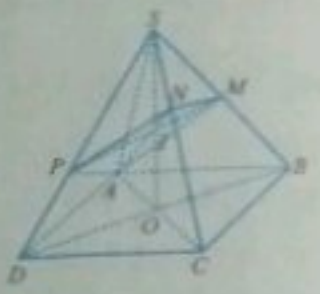
Vậy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để phương trình (*) "có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $[-1;\sqrt{3})$" hoặc "chỉ có 1 nghiệm thuộc $[\sqrt{3};2]$ và không có nghiệm thuộc $[-1;\sqrt{3})$." Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên $[-1;2]$ thì ta tìm được kết quả

$-1<m+1<3-2\sqrt{3}\Leftrightarrow -2<m<2-2\sqrt{3}$. Chọn **B.**

Câu 49. Gọi O là tâm hình bình hành. Gọi $I=MP\cap SO\Rightarrow N=AI\cap SC$. Ta có

$$\frac{1}{3}=\frac{SP}{SD}.\frac{SM}{SB}=\frac{S_{\Delta SPM}}{S_{\Delta SDB}}=\frac{S_{\Delta SPI}+S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SDB}}=\frac{S_{\Delta SPI}}{2S_{\Delta SBO}}+\frac{S_{\Delta SMI}}{2S_{\Delta SBO}}$$
$$=\frac{SI}{2SO}\left(\frac{SP}{SD}+\frac{SM}{SB}\right)=\frac{7}{12}.\frac{SI}{SO}\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{4}{7}.$$

Suy ra:



$$\frac{SN}{SC}=\frac{S_{\Delta SAN}}{S_{\Delta SAC}}=\frac{S_{\Delta SAI}+S_{\Delta SNI}}{S_{\Delta SAC}}$$
$$=\frac{S_{\Delta SAI}}{2S_{\Delta SAO}}+\frac{S_{\Delta SNI}}{2S_{\Delta SAO}}$$
$$=\frac{SI}{2SO}+\frac{SI}{2SO}.\frac{SN}{SC}$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}.\frac{SN}{SC}\Rightarrow\frac{SN}{SC}=\frac{2}{5}.$$ Suy ra

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}+V_{S.MNP}}{V}=\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.BCD}}$$
$$=\frac{SA.SM.SP}{2SA.SB.SD}+\frac{SM.SN.SP}{2SB.SC.SD}=\frac{7}{30}$$

$\Rightarrow V_{ABCDMNP}=\dfrac{23}{30}V$. Chọn **A.**

Câu 50. Ta có $x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1+xy$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=x^2y^2+2xy+1$

$\Leftrightarrow x^4+y^4=-x^2y^2+2xy+1.$

Do đó $P=\dfrac{-x^2y^2+2xy+2}{xy+2}$.

Lại có $x^2+y^2=1+xy\geq 2xy\Rightarrow xy\leq 1;$

$x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=1$

$\Rightarrow(x+y)^2=1+3xy\geq 0\Leftrightarrow xy\geq\dfrac{-1}{3}.$

Đặt $xy=t\Rightarrow P=\dfrac{-t^2+2t+2}{2+t}$, với $t\in\left[\dfrac{-1}{3};1\right]$.

Ta có $P'=\dfrac{-t^2-4t+2}{(2+t)^2}\Rightarrow P'=0\Leftrightarrow -t^2-4t+2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2+\sqrt{6}\ \text{(thoả mãn)}\\t=-2-\sqrt{6}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$. Ta có $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{15}$;

$P(1)=1; P(-2+\sqrt{6})=6-2\sqrt{6}$. Do đó

$$m=\min P=\frac{11}{15};\ M=\max P=6-2\sqrt{6}.$$

Vậy $A=6-2\sqrt{6}+11=17-2\sqrt{6}$. Chọn **A.**

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

https://tieulun.hopto.org

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 43

Problem. *Given a (oblique) rectangular prism $ABCDA'B'C'D'$ with $AB = a$, $AD = 3\sqrt{a}$. The perpendicular projection of A' on $(ABCD)$ is exactly the point of intersection O between AC and BD. Find the distance from B' to $(A'BD)$.*

Solution. We can compute the distance via the computations of the volume of the pyramid $B'.A'BD$ and the area of the triangle $A'BD$. And this distance does not depend on the distance from A' to the base $(ABCD)$ and hence we can assume the second distance is equal to a.

We have

$$V_{B'.A'BD} = \frac{1}{6}V_{prism} = \frac{1}{6}a \times a\sqrt{3} \times a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

And $S_{A'BD} = \frac{1}{2}A'O \times BD = \frac{1}{2}a \times (2a) = a^2$.

Therefore

$$d_{(B',A'BD)} = \frac{3V_{B'.A'BD}}{S_{A'BD}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{6} : a^2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Remark. This exercise is collected from a math test of Nam Dinh province.

TỪ VỰNG

Rectangular prism : hình hộp chữ nhật

Oblique : xiên, nghiêng

Volume : thể tích

Pyramid : khối chóp

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

BẢI DỊCH SỐ 40

Bài toán. *Trong một phép thử xác suất có hai biến cố A và B với $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ và $P(A' \cap B') = \frac{3}{5}$. Tìm $P(A \cap B)$.*

Lời giải. Ta có

$$P(A \cup B) = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Mà $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Do đó $P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{12} - \frac{2}{5} = \frac{11}{60}$. □

Chú ý. A' là biến cố đối của biến cố A.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm: **Hà Nội:** *Trần Phương Nhật Chung*, 11A6, THPT Thường Tín, Thường Tín; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, *Nguyễn Xuân Thành Đạt*, 10 Toán 2, *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

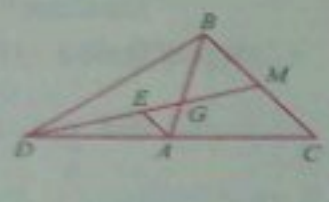
https://tieuiun.hopto.org

BÀI TOÁN 23: *Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm của BC; G là một điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường thẳng MG và CA cắt nhau tại D. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BCD.*

Phân tích. Tam giác BCD có DM là trung tuyến và $GB = 2GA$. G là trọng tâm của tam giác BCD khi A là trung điểm của CD hoặc $\frac{DG}{DM} = \frac{2}{3}$.

ĐỊNH HƯỚNG 1. *Kẻ hình phụ là đường thẳng song song để lập các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

***Cách* 1.** Kẻ $AE \parallel BC$ $(E \in DM)$, khi đó $\frac{AE}{CM} = \frac{DA}{DC}$. Lại có



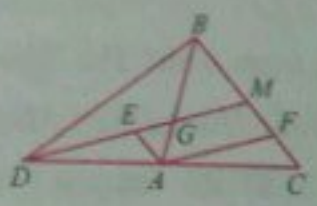
$$\frac{AE}{BM} = \frac{GA}{GB} = \frac{1}{2},$$

mà $BM = CM$ nên $\frac{DA}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = AC$.

Tam giác BCD có BA, DM là các đường trung tuyến nên G là trọng tâm của tam giác BCD.

***Cách* 2.** Kẻ $AE \parallel BC$ $(E \in DM)$, $AF \parallel DM$ $(F \in BC)$, khi đó $AE = MF$ (tính chất đoạn chắn). Mặt khác $\frac{AE}{BM} = \frac{GA}{GB} = \frac{1}{2}$,

mà $BM = CM$ nên



$$\frac{MF}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = FC$$

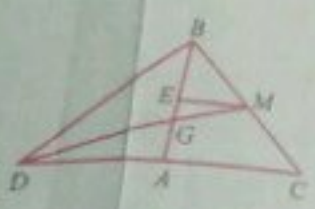
$$\Rightarrow AE = FC.$$

Tam giác DMC có

$$MF = FC,\ AF \parallel DM \Rightarrow DA = AC.$$

Tam giác BCD có BA, DM là các trung tuyến suy ra G là trọng tâm của ΔBCD.

***Cách* 3.** Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E. Vì $MB = MC$ nên $AE = EB$ suy ra ME là đường trung bình của



$$\Delta ABC \Rightarrow ME = \frac{1}{2}AC \quad (1)$$

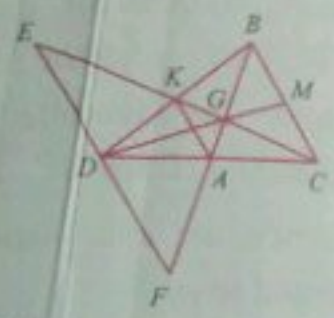
Mặt khác

$$GB = 2GA \Rightarrow GA = 2GE.$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AD} = \frac{GE}{GA} = \frac{1}{2} (\text{do } ME \parallel AD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD = AC$ dẫn đến BA là trung tuyến của tam giác BCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

***Cách* 4.** Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, cắt BA tại F, cắt CG tại E. Gọi K là giao điểm của CE và BD. Ta có



$$\frac{BM}{DF} = \frac{CM}{DE}\left(= \frac{MG}{GD}\right)$$

Mà $BM = CM$ nên $DE = DF$.

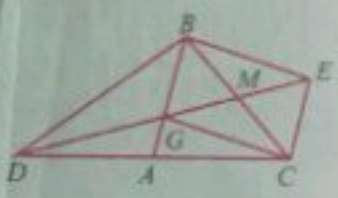
Lại có $\frac{DE}{BC} = \frac{DK}{KB}; \frac{DF}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{DK}{KB} = \frac{DA}{AC}$

$$\Rightarrow AK \parallel BC \Rightarrow \frac{GA}{GB} = \frac{AK}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow DA = AC \Rightarrow BA$ là trung tuyến của ΔBCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

ĐỊNH HƯỚNG 2. *Dựng các điểm đối xứng với nhau qua một điểm để thiết lập các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

***Cách* 5.** Trên tia đối của tia MG lấy điểm E sao cho $ME = MG$. Vì $MB = MC$ nên tứ giác $BECG$ là hình bình hành, suy ra $BG = CE$, $BG \parallel CE$.



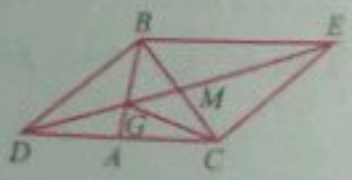
Do $GB = 2GA$ nên $CE = 2GA$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{AG}{CE} = \frac{1}{2} (AG \parallel CE) \Rightarrow DA = AC$$

Tam giác BCD có BA là trung tuyến nên G là trọng tâm của ΔBCD.

***Cách* 6.** Trên tia đối của tia MD lấy điểm E sao cho $ME = MD$.

Vì $MB = MC$ nên tứ giác $BECD$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = CD$, $BE \parallel CD$



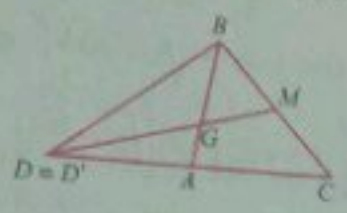
$$\Rightarrow \frac{DA}{BE} = \frac{GA}{GB} = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC \Rightarrow DA = AC$$

https://tieulun.hopto.org

$\Rightarrow BA$ là trung tuyến của ΔBCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

ĐỊNH HƯỚNG 3. *Dựng tam giác nhận BA là trung tuyến, chứng minh hai hình trùng nhau.*

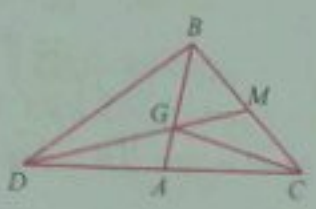
Cách 7. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D' sao cho $D'A = AC$ thì BA là đường trung tuyến của $\Delta BD'C$. Mà $GB = 2GA$ nên G là trọng tâm của $\Delta BD'C$. Lại có $MB = MC$, suy ra M, G, D' thẳng hàng $\Rightarrow D' \equiv D$. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.



ĐỊNH HƯỚNG 4. *Sử dụng tỉ số diện tích.*

Cách 8. Vì M là trung điểm của BC nên $S_{DBM} = S_{DCM}$ (hai tam giác có cùng chiều cao kẻ từ D xuống BC)

$\Rightarrow S_{DBG} = S_{DCG}$ (hai tam giác có chiều cao kẻ từ B và C xuống DM bằng nhau).



Lại có $GB = 2GA \Rightarrow \dfrac{S_{DAG}}{S_{DBG}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{S_{DAG}}{S_{DCG}} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác $\dfrac{S_{DAG}}{S_{DCG}} = \dfrac{DA}{DC} \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DA = AC$

$\Rightarrow BA$ là trung tuyến của ΔBCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

Cách 9. Kẻ $GI \perp DC$, $BK \perp DC$ thì $GI \parallel BK$, suy ra $\Rightarrow \dfrac{GI}{BK} = \dfrac{AG}{AB} = \dfrac{1}{3}$ (do $GB = 2GA$)

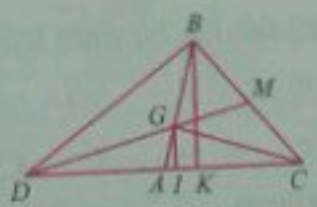
$\Rightarrow S_{GDC} = \dfrac{1}{3} S_{BCD}$.

Lại có

$S_{DBM} = S_{DCM} \Rightarrow S_{BCD} = 2S_{DCM}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{GDC}}{S_{DCM}} = \dfrac{2}{3}$ mà $\dfrac{S_{GDC}}{S_{DCM}} = \dfrac{DG}{DM} \Rightarrow DG = \dfrac{2}{3} DM$.

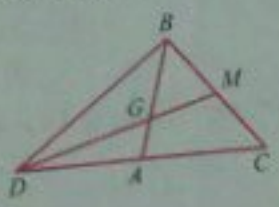
Tam giác BCD có DM là trung tuyến của ΔBCD và $DG = \dfrac{2}{3} DM$. Do đó G là trọng tâm của ΔBCD.



ĐỊNH HƯỚNG 5. *Sử dụng định lí Menelaus.*

Cách 10. Áp dụng định lí Menelaus cho ΔABC với cát tuyến MGD, ta có:

$$\frac{DA}{DC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{GB}{GA} = 1.$$

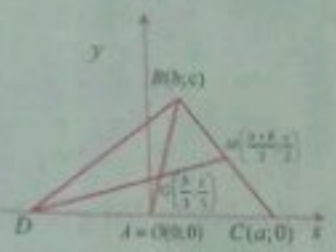


Mà $\dfrac{GB}{GA} = 2; \dfrac{MC}{MB} = 1$ nên $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DA = AC$, suy ra BA là trung tuyến của ΔBCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

ĐỊNH HƯỚNG 6. *Sử dụng mặt phẳng tọa độ.*

Cách 11. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình bên. $A(0;0)$, $B(b;c)$, $C(a;0)$ $(c \neq 0)$ suy ra

$$M\left(\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right), G\left(\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$$



Phương trình của đường thẳng MG:

$(3a+b)y - cx - ac = 0$.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(3a+b)y - cx - ac = 0\\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -a\\ y = 0\end{cases} \Rightarrow D(-a;0).$$

Mà $A(0;0), C(a;0)$ nên A là trung điểm của DC, suy ra BA là trung tuyến của ΔBCD. Vậy G là trọng tâm của ΔBCD.

ĐẬU CÔNG NHO

(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Nhận xét. Ngoài 10 cách giải của bạn *Đậu Công Nho*, GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An** - tác giả của đề toán, Toà soạn còn nhận được một số cách giải tốt của các bạn *Nguyễn Văn Luân*, GV THCS Nam Tiến, Nam Sách, **Hải Dương;** *Lê Hải Phong*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An,** *Nguyễn Văn Bán*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên;** *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp;** *Trương Quang An*, thôn An Hoà Nam, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi.**

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 25 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2019.

BÀI TOÁN 25. *Cho hình vuông ABCD và điểm M trên cạnh CD sao cho $CM = 2DM$. Gọi E là giao điểm của AM với BD, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp EN$.*

PHAN ĐÌNH ÁNH

(GV THCS Thạch Kim, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

https://tieulun.hopto.org

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 500, T2.2019.

Bài 31. (Crux 2018) *Tìm giới hạn*

$$P=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right\},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

trong đó $\{x\}=x-[x]$ *với* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá* x.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh:

$$(6+\sqrt{35})^n+(6-\sqrt{35})^n\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Với $n=1$, ta có: $\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n$

$=(6+\sqrt{35})^1+(6-\sqrt{35})^1=6+6=12\in\mathbb{N}$ (đúng).

Giả sử bài toán đúng đến $n=k$ $(k\in\mathbb{N}^*;k\ge 2)$, tức là: $(6+\sqrt{35})^k+(6-\sqrt{35})^k\in\mathbb{N}$ (1)

Do bài toán đúng đến $n=k$ nên bài toán cũng đúng đến $n=k-1$ $(k\in\mathbb{N}^*;k\ge 2)$, tức là:

$$(6+\sqrt{35})^{k-1}+(6-\sqrt{35})^{k-1}\in\mathbb{N} \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh bài toán đúng đến $n=k+1$, tức là chứng minh: $(6+\sqrt{35})^{k+1}+(6-\sqrt{35})^{k+1}\in\mathbb{N}$.

Thật vậy: $\left(6+\sqrt{35}\right)^{k+1}+\left(6-\sqrt{35}\right)^{k+1}$

$=\left((6+\sqrt{35})+(6-\sqrt{35})\right)\left((6+\sqrt{35})^k+(6-\sqrt{35})^k\right)$

$-(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})\left((6+\sqrt{35})^{k-1}+(6-\sqrt{35})^{k-1}\right)$

$=12\left((6+\sqrt{35})^k+(6-\sqrt{35})^k\right)$

$$-\left((6+\sqrt{35})^{k-1}+(6-\sqrt{35})^{k-1}\right). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow(6+\sqrt{35})^{k+1}+(6-\sqrt{35})^{k+1}\in\mathbb{N}$.

Do đó: $\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mặt khác, với $\forall n\in\mathbb{N}^*$, do $0<6-\sqrt{35}<1$ nên

$$0<\left(6-\sqrt{35}\right)^n<1 \text{ hay } 0<1-\left(6-\sqrt{35}\right)^n<1.$$

Ta có với $\forall x\in\mathbb{N}, 0<y<1$ thì $[x+y]=x$ (4).

Áp dụng (4) với $x=\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n-1\in\mathbb{N}$, $0<y=1-\left(6-\sqrt{35}\right)^n<1$, ta có:

$$\left[\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right]=\left[\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n-1+1-\left(6-\sqrt{35}\right)^n\right]$$

$$=\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n-1.$$ Từ đó

$$\left\{\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right\}=\left(6+\sqrt{35}\right)^n-\left[\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right]$$

$$=\left(6+\sqrt{35}\right)^n-\left(\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n-1\right)$$

$$=1-\left(6-\sqrt{35}\right)^n$$

$$\Rightarrow P=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right\}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(6-\sqrt{35}\right)^n\right)$$

$$=1-\lim_{n\to+\infty}\left(6-\sqrt{35}\right)^n.$$

Do $0<6-\sqrt{35}<1$ nên $\lim_{n\to+\infty}\left(6-\sqrt{35}\right)^n=0$

$\Rightarrow P=1-\lim_{n\to+\infty}\left(6-\sqrt{35}\right)^n=1-0=1\Rightarrow P=1$.

Vậy $P=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right\}=1$.

Nhận xét. Để chứng minh

$$S_n=\left(6+\sqrt{35}\right)^n+\left(6-\sqrt{35}\right)^n\in\mathbb{N},$$

có thể lập hệ thức truy hồi $S_n=12S_{n-1}-S_{n-2}$, rồi từ $S_1,S_2\in\mathbb{Z}$ và $S_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ suy ra $S_n\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chỉ có bạn *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội** làm đúng bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 31. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{(m+1)(n+1)}$$

trong đó m, n *là các số nguyên dương.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

https://tieulun.hopto.org

GIẢI ĐÁP: ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT !

(Đề đăng trên TH&TT số 498, tháng 12 năm 2018)

Phân tích sai lầm. Lời giải của *Tú* sai ở bước biến đổi

$a-4b=2\sqrt{2a^2+b^2} \Leftrightarrow 7a^2+8ab-12b^2=0$.

Ở bước này *Tú* đã viết là biến đổi tương đương nhưng $a-4b$ có thể âm nên biến đổi không tương đương (chỉ là biến đổi hệ quả).

Lời giải đúng. ĐK: $x\ge -3$ (*).

Đặt $a=2x-1, b=\sqrt{x+3}$ $(b\ge 0)$. Khi đó ta có: $8x^2-7x+5=2a^2+b^2$. Suy ra PT(1) trở thành:

$$a-4a=2\sqrt{2a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b\ge 0 \\ (a-4b)^2=4(2a^2+b^{2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 4b \\ 7a^2+8ab-12b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 4b \\ (7a-6b)(a+2b)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge 4b \\ 7a=6b \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge 4b \\ a=-2b \end{cases} \end{array}\right.$$

• Với $\begin{cases} a\ge 4b \\ 7a=6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a\ge 28b \\ 7a=6b \end{cases} \Rightarrow b\le 0$. Nhưng do $b\ge 0$ suy ra $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \sqrt{x+3}=0 \end{cases}$: hệ vô nghiệm.

• Với $\begin{cases} a\ge 4b \\ a=-2b \end{cases} \Rightarrow b\le 0$. Nhưng do $b\ge 0$ suy ra $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \sqrt{x+3}=0 \end{cases}$: hệ vô nghiệm.

Kết luận: PT đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Các bạn sau đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Dương Thị Khánh Linh, Đỗ Như Hưng*, 9A4, THCS Phong Châu, Phù Ninh. **Nghệ An:** *Kiều Đình Hải*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

KIHIVI

LỜI GIẢI NÀO ĐÚNG ?

Trong tiết ôn tập chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia năm 2019, Thầy giáo có ra một đề toán cho cả lớp như sau:

Cho số phức z thỏa mãn $z+\bar{z}=4$ và $2z+\bar{z}=(1+i)|z|$. Hỏi $|z|$ bằng bao nhiêu?

Hai bạn học sinh lên bảng với hai lời giải như sau:

Lời giải 1. Từ điều kiện đề bài, lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất ta được:

$$z=(|z|-4)+i|z|.$$

Lấy module hai vế ta được:

$$|z|=\sqrt{(|z|-4)^2+|z|^2} \Rightarrow |z|^2=(|z|-4)^2+|z|^2.$$

Do đó: $(|z|-4)^2=0 \Rightarrow |z|=4$.

Lời giải 2. Đặt $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thì do $z+\bar{z}=2a=4$ nên $a=2$. Lại từ điều kiện

$$z=(|z|-4)+i|z| \Rightarrow a+ib=(|z|-4)+i|z|.$$

Theo tính chất của các số phức bằng nhau suy ra

$$|z|-4=a=2 \Rightarrow |z|=6.$$

Cả hai lời giải đều đúng, lôgic, nhưng tại sao lại ra hai kết quả khác nhau? Hai lời giải trên làm cho cả lớp hoang mang! ***Ý kiến của bạn như thế nào về hai lời giải trên và lời giải đúng là gì?***

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

https://toanmath.com