TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2019
Số 501

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học John Wilson
(1741-1793)

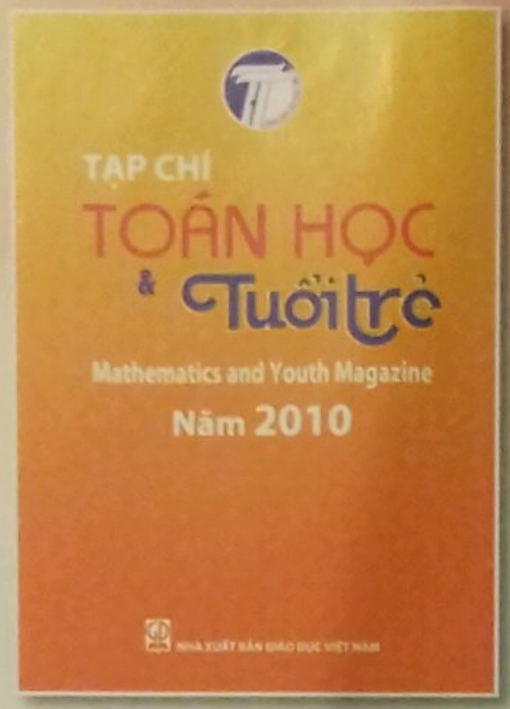
Kendal Parish Church

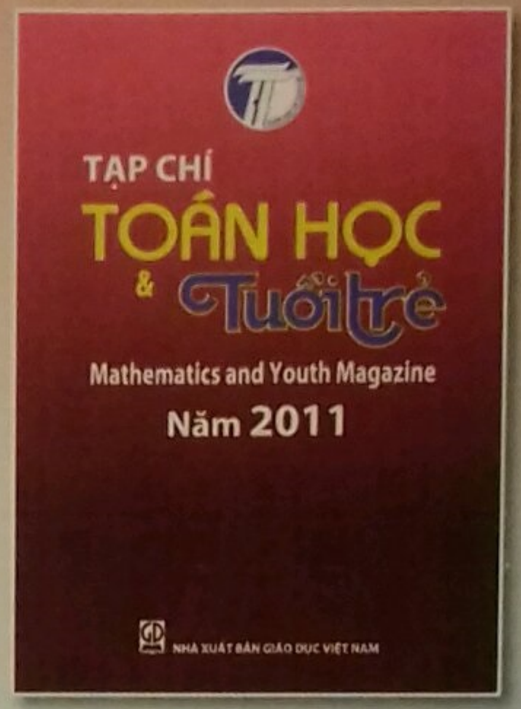
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

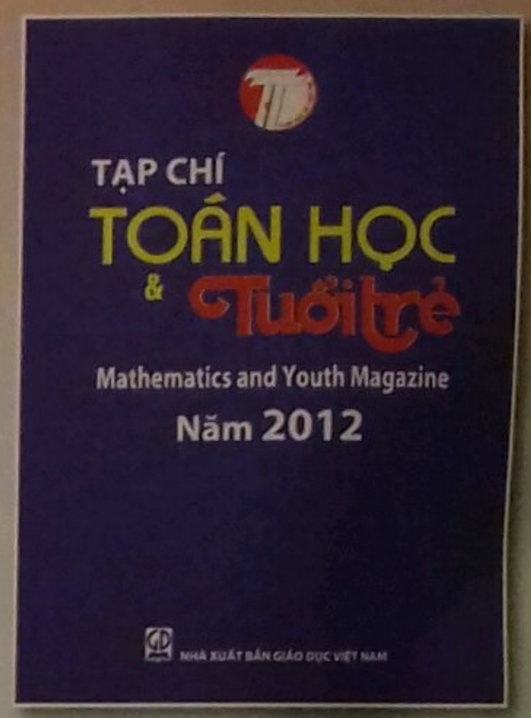
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM







Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

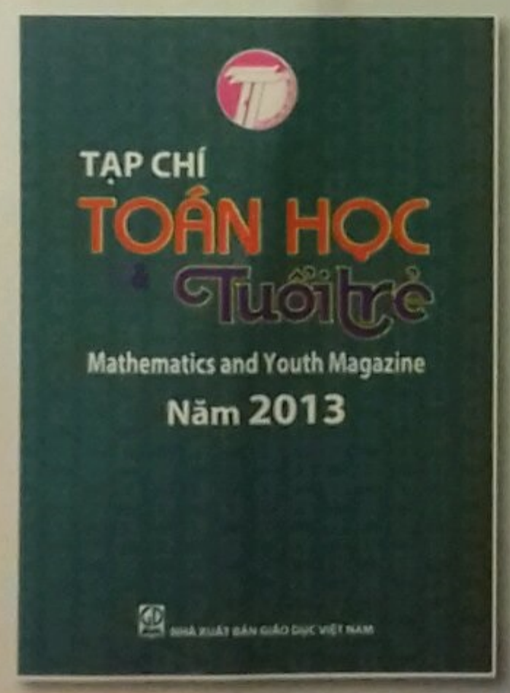
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

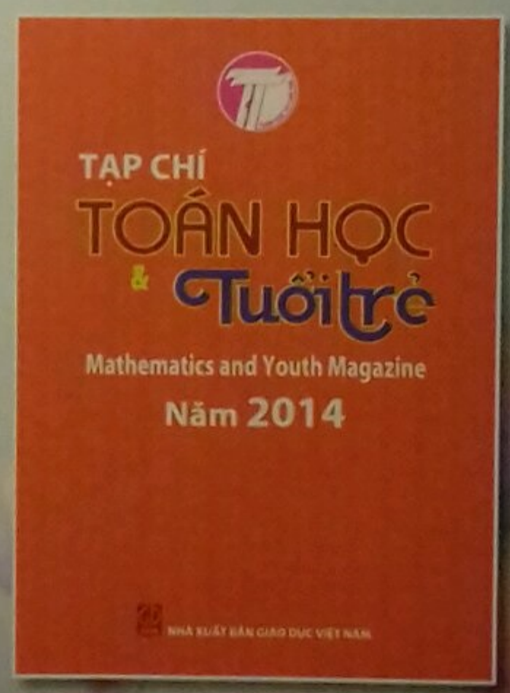
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

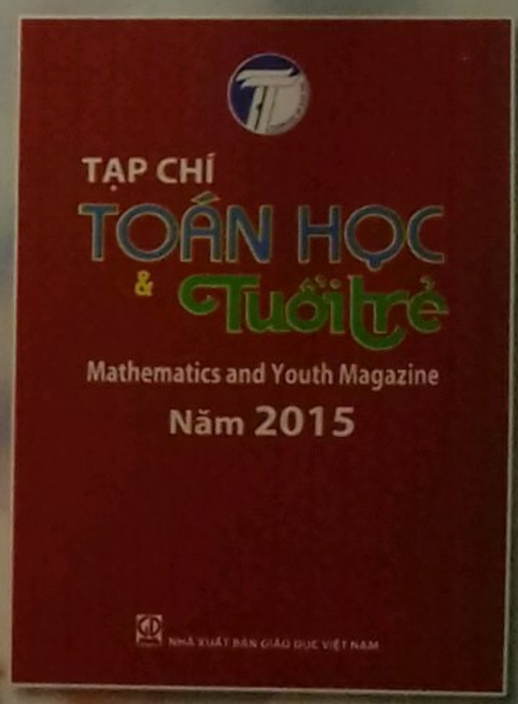
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

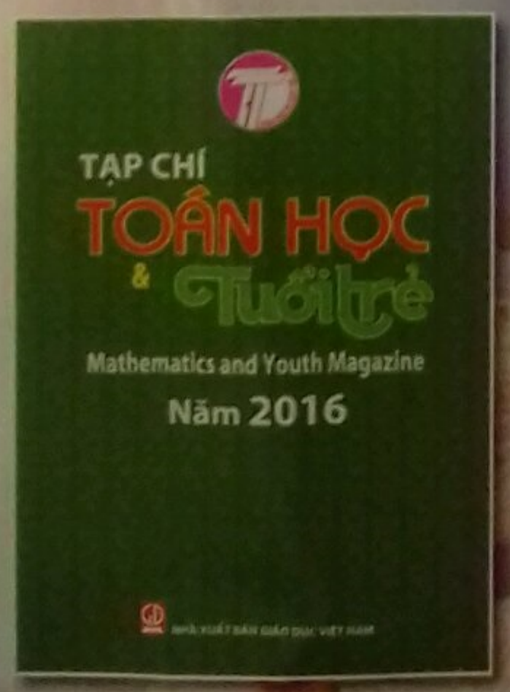
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

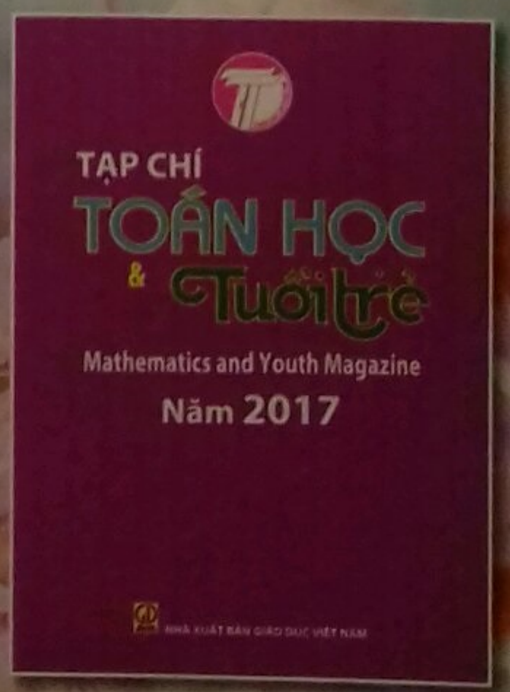
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

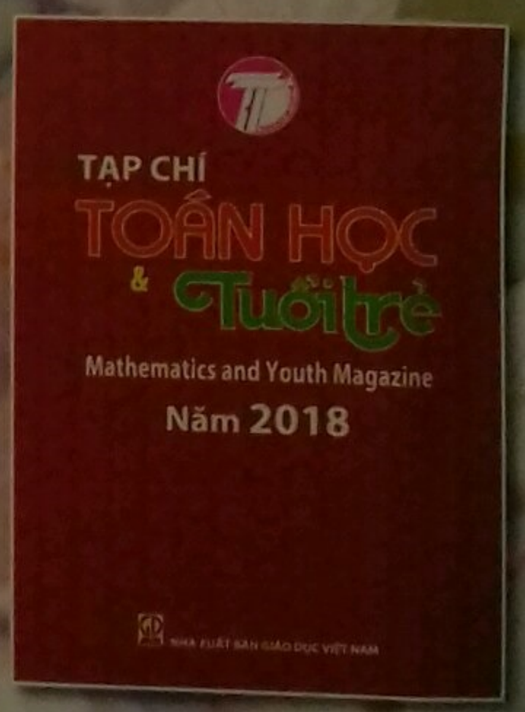










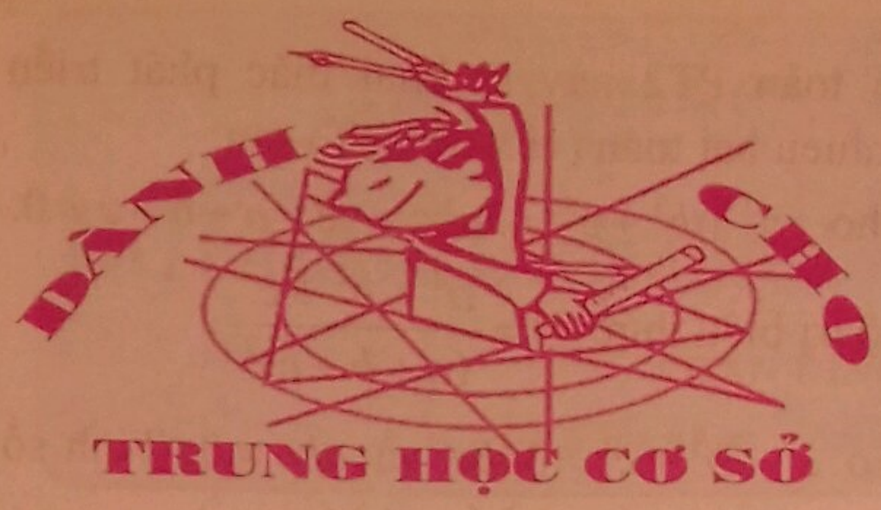


Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



KHAI THÁC VÀ PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN ĐẠI SỐ THCS

NGƯT. NGUYỄN TAM SƠN
(*Tiểu khu Nguyễn Du, TTr. Thường Tín, Thường Tín, Hà Nội*)

Khai thác, tìm tòi và phát triển một bài toán là phương pháp mà các thầy cô giáo giỏi thường sử dụng trong quá trình giảng dạy toán của mình, giúp cho học sinh rèn luyện tư duy sáng tạo, tăng hứng thú, say mê học tập. Bài viết này giới thiệu một số bài toán đại số được khai thác từ một bài toán quen thuộc:

Bài toán: *Phân tích đa thức A thành nhân tử*:

$$A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Lời giải. Ta có:

$$A = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$$
$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$$
$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

I. Bằng cách thay thế vai trò của *a*, *b*, *c* trong đa thức ta được các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử (phương pháp phân tích như bài trên) và kết quả như sau

1) Thay vai trò của b bằng $-b$, ta có:

$$A_1 = a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$$
$$= (a-b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc).$$

2) Thay vai trò của b bằng $-b$ và c bằng $-c$, ta có: $A_2 = a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$

$$= (a-b-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc).$$

3) Thay vai trò của b bằng $2b$, ta có:

$$A_3 = a^3 + 8b^3 + c^3 - 6abc$$
$$= (a+2b+c)(a^2 + 4b^2 + c^2 - 2ab - ac - 2bc).$$

4) Thay vai trò của b bằng $2b$ và c bằng $3c$, ta có:

$$A_4 = a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$$
$$= (a+2b+3c)(a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 3ac - 6bc).$$

5) Thay vai trò của c bằng 2, ta có:

$$A_5 = a^3 + b^3 + 8 - 6ab$$
$$= (a+b+2)(a^2 + b^2 + 4 - ab - 2a - 2b).$$

6) Thay vai trò của a, b, c bằng nghịch đảo của chúng, ta có:

$$A_6 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$$
$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right).$$

II. Sử dụng biến đổi trực tiếp của đa thức A để rút gọn các phân thức

Rút gọn các phân thức sau với a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau:

a) $A_7 = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a+b+c}$.

b) $A_8 = \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$.

Từ kết quả phân tích đa thức A ta thấy ngay

$$A_7 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc; \quad A_8 = \frac{2}{a+b+c}.$$

III. Phát triển bài toán

1. Bài toán PT1. *Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.*

Lời giải. Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0.$$

Vì $a + b + c = 0$, suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

(Có thể chứng minh cách khác: Từ $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a+b)^3 = -c^3$$
$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3$$
$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc).$$

Từ bài toán PT1 này ta khai thác phát triển thành nhiều bài toán (viết tắt là B) sau:

B₁. Cho $a + b + c = 0$ và $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

$$a^3+b^3+c^3 \vdots abc.$$

B₂. Cho $a+b+c \geq 0$. Chứng minh

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc.$$

B₃. Phân tích thành nhân tử:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

B₄. Phân tích thành nhân tử:

$$(2x-y-z)^3+(2y-x-z)^3+(2z-x-y)^3.$$

B₅. Cho x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh:

$$\frac{3xy(y-x)+3yz(z-y)+3zx(x-z)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=1.$$

B₆. Cho $a+b+c=2$. Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

B₇. Cho $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ và $x.y.z \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}$.

B₈. Cho $a+b+c=0$ và $abc \neq 0$. Rút gọn các biểu thức:

a) $M=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$;

b) $N=\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$.

B₉. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ và $abc \neq 0$. Tính giá trị biểu thức: $P=\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$.

B₁₀*. Cho $a+b+c=0$ và $abc \neq 0$; a, b, c đôi một khác nhau. Tính giá trị biểu thức:

$$Q=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

2. Bài toán PT2: *Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$. Chứng minh rằng $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$.*

Lời giải. Do $a^3+b^3+c^3=3abc$ nên ta có

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0.$$

Suy ra $a+b+c=0$, hoặc

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$$
$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$$
$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2=0$$

$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Điều này chỉ xảy ra khi $a=b=c$.

Từ bài toán PT2 này ta khai thác phát triển thành nhiều bài toán (viết tắt là T) sau:

T₁. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c \neq 0$.

Tính số trị biểu thức $D=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$.

T₂. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $abc \neq 0$. Tính số trị biểu thức: $E=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

T₃. Cho $a+b+c=4038$ và a, b, c đôi một khác nhau. Tính số trị biểu thức:

$$F=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

T₄. Cho $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=3x^2y^2z^2$ và $xyz \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ hoặc $x=y=z$.

T₅. Giải phương trình với ẩn x:

$$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

T₆. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3+3xyz=z^3 \\ z^3=(2x+2y)^2 \end{cases}$.

Các bài toán trên bạn đọc sử dụng kết quả bài toán nêu trên và các bài toán PT có thể dễ dàng giải được.

IV. Một số bài tập tổng hợp và nâng cao

Bài 1. Chứng minh rằng

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)^3$$

với mọi số thực a, b, c.

Bài 2. Cho x, y, z là các số nguyên khác 0. Chứng minh rằng, nếu: $x^2-yz=a$; $y^2-zx=b$; $z^2-xy=c$ thì tổng $ax+by+cz$ chia hết cho $a+b+c$. *(Đề thi học sinh giỏi Quốc gia năm học 1992 – 1993).*

Bài 3. Chứng minh rằng, nếu $a+b+c=0$ thì

$$2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2).$$

Bài 4. Chứng minh rằng, nếu $a+b+c=0$ và $abc \neq 0$ thì:

a) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$;

b) $10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$.

(Xem tiếp trang 4)

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

PHAN ĐÌNH ÁNH

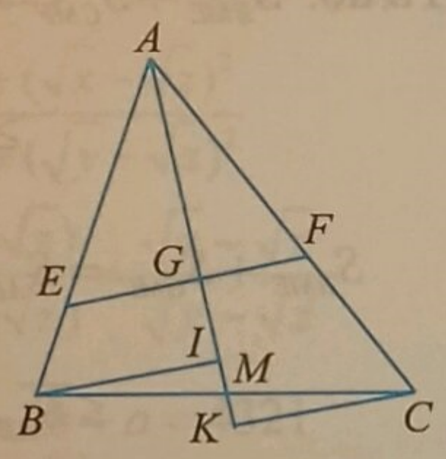
(GV THCS Thạch Kim, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

Việc khai thác các bài toán là thói quen cần thiết giúp học sinh sáng tạo, khám phá và phát hiện thêm những kiến thức mới. Sau đây là một ví dụ.

Bài toán. *Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Đường thẳng d bất kỳ đi qua trọng tâm G cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại E và F.*

Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=3$.

Lời giải. Kẻ $BI \parallel EF$; $CK \parallel EF$ (I, K thuộc AM). Khi đó:



$$\frac{AB}{AE}=\frac{AI}{AG};\ \frac{AC}{AF}=\frac{AK}{AG}.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=\frac{AI+AK}{AG}\quad (1)$$

Mặt khác: $\Delta BIM=\Delta CKM$ (g.c.g) $\Rightarrow MI=MK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=2\cdot\frac{AM}{AG}=3$.

Vậy: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=3$ (đpcm).

Khai thác Bài toán

Bài tập. *Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Đường thẳng bất kỳ đi qua trọng tâm G luôn cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại E và F.*

a) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* S_{AEF}.

b) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* S_{BCFE}.

c) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* $S_{BEF}+S_{CEF}$.

d) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* $S_{BCE}+S_{BCF}$.

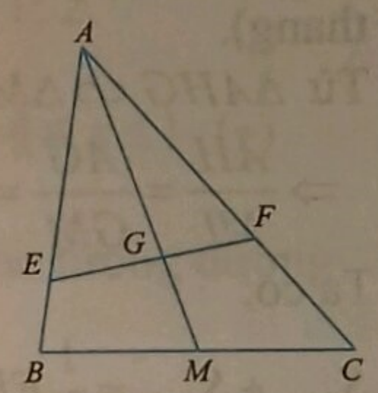
e) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* $S_{ABF}+S_{ACE}$.

f) *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của* $S_{BME}+S_{CMF}$.

(S_{XYZ} *kí hiệu diện tích tam giác XYZ*

S_{XYZT} *kí hiệu diện tích tứ giác XYZT*).

Lời giải. a) *Tìm giá trị nhỏ nhất của* S_{AEF}.



Theo bất đẳng thức $(a+b)^2\ge 4ab$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ ta có:

$$\left(\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}\right)^2\ge 4\frac{AB}{AE}.\frac{AC}{AF}\Leftrightarrow 9\ge 4\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}$$

$$\Leftrightarrow S_{AEF}\ge\frac{4}{9}S_{ABC}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}\Leftrightarrow d\parallel BC$.

Vậy $\min S_{AEF}=\frac{4}{9}S_{ABC}\Leftrightarrow d\parallel BC$.

Tìm giá trị lớn nhất của S_{AEF}.

Từ kết quả Bài toán 1, đặt: $\frac{AB}{AE}=x\ (1\le x\le 2)$ thì $\frac{AC}{AF}=3-x$. Ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=\frac{AB.AC}{AE.AF}=x(3-x)=(x-1)(2-x)+2\ge 2$$

$$\Rightarrow S_{AEE}\le\frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Vậy $\max S_{AEF}=\frac{1}{2}S_{ABC}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E\equiv B\\ F\equiv C\end{array}\right.$.

b) *Tìm giá trị nhỏ nhất của* S_{BCFE}. Ta có:

$$S_{BCFE}=S_{ABC}-S_{AEF}\ge S_{ABC}-\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABC}.$$

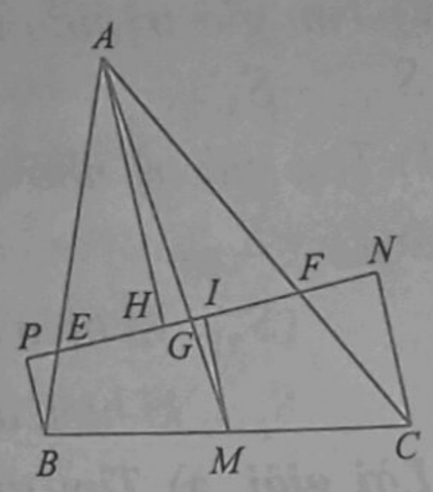
Vậy $\min S_{BCFE}=\frac{1}{2}S_{ABC}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}E\equiv B\\ F\equiv C\end{array}\right.$.

Tìm giá trị lớn nhất của S_{BCFE}.

$$S_{BCFE}=S_{ABC}-S_{AEF}\le S_{ABC}-\frac{4}{9}S_{ABC}=\frac{5}{9}S_{ABC}.$$

Vậy $\max S_{BCFE}=\frac{5}{9}S_{ABC}\Leftrightarrow d\parallel BC$.

c) *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $S_{BEF}+S_{CEF}$.



Kẻ AH, BP, MI, CN cùng vuông góc với đường thẳng EF. Khi đó $BP+CN=2MI$ (tính chất đường trung bình của hình thang).

Từ $\Delta AHG \backsim \Delta MIG$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{MI}=\frac{AG}{GM}=2 \Rightarrow AH=2MI \qquad (1)$$

Ta có:

$$S_{BEF}+S_{CEF}=\frac{1}{2}EF(BP+CN)=\frac{1}{2}EF.2MI$$

$$=EF.MI=\frac{1}{2}EF.AH=S_{AEF} \qquad (2)$$

Lại có: $S_{AEF}\ge\frac{4}{9}S_{ABC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $S_{BEF}+S_{CEF}\ge\frac{4}{9}S_{ABC}$.

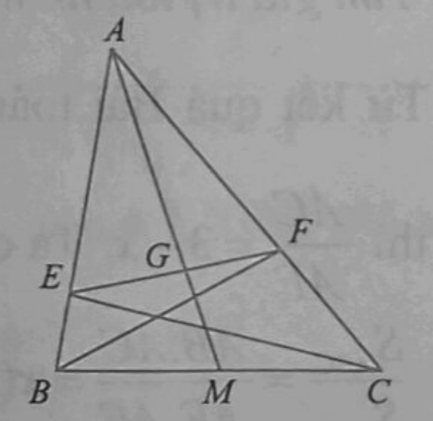
Vậy min $S_{BEF}+S_{CEF}=\frac{4}{9}S_{ABC}\Leftrightarrow d\,//\,BC$.

d) Ta có: $S_{BCE}+S_{BCF}$

$=2S_{ABC}-2S_{AEF}$

$-(S_{BEF}+S_{CEF})$

$=2S_{ABC}-3S_{AEF}$



Do đó: $S_{BCE}+S_{BCF}$

$\le 2S_{ABC}-3.\frac{4}{9}S_{ABC}=\frac{2}{3}S_{ABC}$;

$S_{BCE}+S_{BCF}\ge 2S_{ABC}-3.\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.

Vậy $\max(S_{BCE}+S_{BCF})=\frac{2}{3}S_{ABC}\Leftrightarrow d\,//\,BC$;

$$\min(S_{BCE}+S_{BCF})=\frac{1}{2}S_{ABC}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}E\equiv B\\F\equiv C\end{array}\right..$$

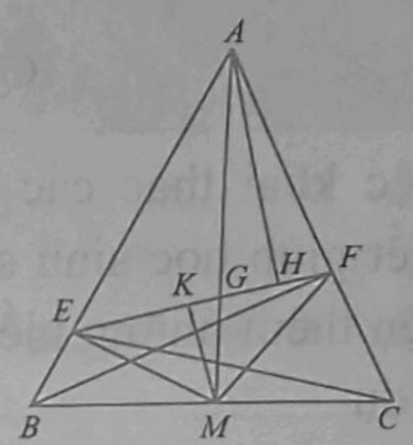
e) *Tìm* $\min(S_{ABF}+S_{ACE})$.

Ta có:

$S_{ABF}+S_{ACE}$

$=S_{AEF}+S_{BEF}+S_{CEF}$

$=2S_{AEF}$.



Đến đây trở lại câu a.

f) Kẻ AH, MK cùng vuông góc với EF.

Khi đó hai tam giác AGH, MGK đồng dạng với nhau theo tỉ số $\frac{AH}{MK}=2$, suy ra $S_{AEF}=2S_{MEF}$.

Từ đó: $S_{BME}+S_{CMF}=S_{ABC}-\frac{3}{2}S_{AEF}$

$\ge S_{ABC}-\frac{3}{2}.\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABC}$;

$S_{BME}+S_{CMF}=S_{ABC}-\frac{3}{2}S_{AEF}$

$\le S_{ABC}-\frac{3}{2}.\frac{4}{9}S_{ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$.

Vậy: $\min(S_{BME}+S_{CMF})=\frac{1}{4}S_{ABC}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}E\equiv B\\F\equiv C\end{array}\right.$

$\max(S_{BME}+S_{CMF})=\frac{1}{3}S_{ABC}\Leftrightarrow d\,//\,BC$.

Mời các bạn khai thác thêm các bài toán mới từ bài toán xuất phát ban đầu.

KHAI THÁC VÀ PHÁT TRIỂN...

(*Tiếp theo trang 2*)

Bài 5. Chứng minh rằng, nếu $a+b+c=0$ thì

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(c^2+a^2)+c^5(a^2+b^2)$$

$$=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4).$$

Bài 6. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$ và $xyz\ne 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}.$$

Đề thi vào THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh năm học 2014 – 2015).

Bài 7. Phân tích thành nhân tử:

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

Bài 8. Phân tích thành nhân tử:

$$8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3.$$

Bài 9. Phân tích thành nhân tử:

$$(x+y+z)^3-(x+y-z)^3$$

$$-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3.$$

Bài 10. Phân tích thành nhân tử:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC, năm học 2017 - 2018

Câu 1. ĐK: $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$P=\left[\frac{\sqrt{a}+2018}{(\sqrt{a}+1)^2}-\frac{\sqrt{a}-2018}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right]\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+2018)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2018)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{2.2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}=\frac{2017}{a-1}.$$

Câu 2. Ta có:

$$\frac{x+(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2}{y+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2-y+(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2-x+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{z})+(\sqrt{x}-\sqrt{z})^2}{(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{y}-\sqrt{z})+(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{z})(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z})}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-2\sqrt{z})}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}.$$

Câu 3. Ta có: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$

$\Leftrightarrow 1111a+111b+11c+d=4321 \quad (1)$

Vì $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ và $1\le a\le 9, 0\le b,c,d\le 9$ nên

$$3214\le 1111a\le 4321\Rightarrow a=3.$$

Thay vào (1) ta được: $111b+11c+d=988 \quad (2)$

Lập luận tương tự ta có: $880\le 111b\le 988$

$\Rightarrow b=8$. Thay vào (2) ta được: $11c+d=100$.

Mà $91\le 11c\le 100\Rightarrow c=9$ và $d=1$. Vậy

$$\overline{abcd}=3891.$$

Câu 4. Từ phương trình thứ hai ta có: $x=2-2y$ thế vào phương trình thứ nhất được:

$(m-1)(2-2y)+y=2\Leftrightarrow(2m-3)y=2m-4. \quad (3)$

Hệ có nghiệm x,y là các số nguyên $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm y là số nguyên.

Với $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m-3\neq 0\Rightarrow$ (3) có nghiệm

$$y=\frac{2m-4}{2m-3}=1-\frac{1}{2m-3}$$

$$y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-3=1\\2m-3=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right..$$

Vậy có 2 giá trị m thoả mãn là 1; 2.

Câu 5. ĐKXĐ: $\begin{cases}1-x\ge 0\\4+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -4\le x\le 1 \quad (*)$

Với ĐK (*), phương trình đã cho tương đương với: $5+2\sqrt{1-x}.\sqrt{4+x}=9$

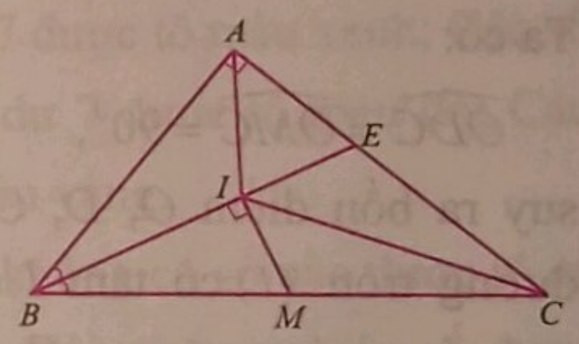
$$\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)(4+x)}=2\Leftrightarrow(1-x)(4+x)=4$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được

$$x=0;\ x=-3.$$

Câu 6. Ta có



$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$

$=20$cm.

Gọi E là giao điểm của BI với AC. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EC}{BC}=\frac{AE+EC}{AB+BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow EC=\frac{BC}{2}=10\text{cm}.$$

Ta có $\Delta ICE=\Delta ICM$ (c.g.c) do:

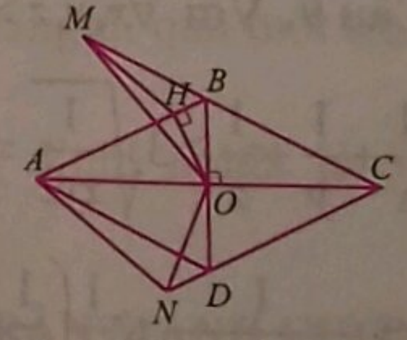
$EC=MC=10$; $\widehat{ICE}=\widehat{ICM}$; IC chung.

Suy ra: $\widehat{IEC}=\widehat{IMC}\Rightarrow\widehat{IEA}=\widehat{IMB}$. Mặt khác

$\widehat{IBM}=\widehat{IBA}\Rightarrow\Delta IBM\backsim\Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow\widehat{BIM}=\widehat{BAE}=90^0\Rightarrow BI\perp MI.$

Câu 7.



a) Ta có $\widehat{MBH}=\widehat{ADN}$,

$\widehat{MHB}=\widehat{AND}$

$\Rightarrow\Delta MBH\backsim\Delta ADN$

$\Rightarrow\dfrac{MB}{AD}=\dfrac{BH}{DN}$

$\Rightarrow MB.DN=BH.AD. \quad (1)$

b) Ta có: $\Delta OHB \backsim \Delta AOD$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow DO.OB = BH.AD \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$MB.DN = DO.OB \Rightarrow \frac{MB}{DO} = \frac{OB}{DN}.$$

Ta lại có:

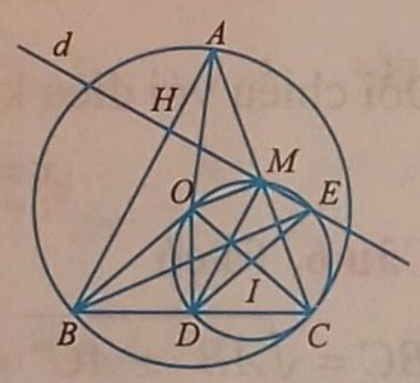
$$\widehat{MBO} = 180^0 - \widehat{CBD} = 180^0 - \widehat{CDB} = \widehat{ODN}$$

nên $\Delta MBO \backsim \Delta ODN \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{NOD}$. Từ đó suy ra:

$$\widehat{MON} = 180^0 - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD})$$
$$= 180^0 - (\widehat{MOB} + \widehat{OMB}) = 180^0 - \widehat{OBC} = 115^0.$$

Câu 8. Gọi D là trung điểm của đoạn BC, vì tam giác BOC, AOC là các tam giác cân tại O nên

$$OD \perp BC, OM \perp AC.$$



Ta có:

$$\widehat{ODC} = \widehat{OMC} = 90^0,$$

suy ra bốn điểm O, D, C, M cùng nằm trên đường tròn (I) có tâm I cố định, đường kính OC cố định. Gọi E là điểm đối xứng với D qua tâm I, khi đó E cố định và DE là đường kính của đường tròn (I). Nếu $H \neq E, H \neq B$ thì

- Với $M \equiv E \Rightarrow \widehat{BHE} = 90^0$.
- Với $M \neq E$, do $DM \parallel BH \Rightarrow \widehat{DMH} = 90^0$.

Khi đó $\widehat{DME} = \widehat{DMH} = 90^0 \Rightarrow H, M, E$ thẳng hàng. Suy ra $\widehat{BHE} = 90^0$. Vậy ta luôn có: $\widehat{BHE} = 90^0$ hoặc $H \equiv E$ hoặc $H \equiv B$ do đó H thuộc đường tròn đường kính BE cố định.

Câu 9. Với $\forall x, y, z > 0$ ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Ta có:

$$5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (2a+b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Tương tự:

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c$.

$$\frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right).$$

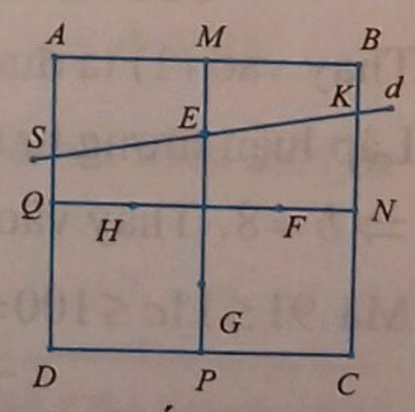
Đẳng thức xảy ra khi $c = a$.

Vậy

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}$$
$$\leq \frac{1}{9}\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c}\right) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 10. Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là a ($a > 0$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong 2018 đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn thẳng AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K sao cho $S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$. Từ $S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS + CK = 3(AS + BK)$

$$\Leftrightarrow a - AS + a - BK = 3(AS + BK)$$

$$\Leftrightarrow AS + BK = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow EM = \frac{1}{4}a.$$

Suy ra E cố định và d đi qua E.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2018 – 2019

Câu 1 (1 *điểm*). Cho a, b, c là ba số thực thoả mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2=2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị của biểu thức: $A=a^2+b^2+c^2$.

Câu 2 (2 *điểm*). a) Giải phương trình:

$$4\sqrt{x+3}=1+4x+\frac{2}{x}.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^3=1 \\ x^2+y^5=x^3+y^2 \end{cases}.$$

Câu 3 (2 *điểm*). Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ vuông tại A có đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh rằng:

$$BE\sqrt{CH}+CF\sqrt{BH}=AH\sqrt{BC}.$$

b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H và gọi O là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng BK vuông góc với AO.

Câu 4 (1,5 *điểm*). a) Chứng minh rằng:

$$x^4-x+\frac{1}{2}>0 \text{ với mọi số thực } x.$$

b) Cho x, y là các số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Câu 5 (1, 5 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB. Đường thẳng AC cắt (O) tại điểm thứ hai K. Đường thẳng BK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại L. Các đường thẳng CL và KM cắt nhau tại E. Chứng minh rằng E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM.

Câu 6 (2 *điểm*). Các số nguyên dương từ 1 đến 2018 được tô màu theo quy tắc sau: Các số mà khi chia cho 24 dư 17 được tô màu xanh; Các số mà khi chia cho 40 dư 7 được tô màu đỏ; Các số còn lại được tô màu vàng.

a) Chứng minh rằng không có số nào được tô cả hai màu xanh và đỏ. Hỏi có bao nhiêu số được tô màu vàng?

b) Có bao nhiêu cặp số (a, b) sao cho a được tô màu xanh, b được tô màu đỏ và $|a-b|=2$?

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG

(*TP. Hồ Chí Minh*) ***giới thiệu***

☞ *HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ ...*

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho $FN=GP=HQ=\frac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H. Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, H cố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(*GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc*) ***giới thiệu***

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

1C	2B	3D	4A	5D	6A	7B	8C	9D	10A
11A	12B	13B	14B	15A	16B	17B	18D	19A	20B
21D	22A	23D	24C	25A	26B	27C	28A	29C	30D
31D	32A	33D	34B	35C	36D	37A	38A	39D	40B
41C	42A	43C	44C	45B	46D	47A	48A	49A	50A

Câu 1. Đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$. Đường thẳng AI có phương trình: $x+y-2=0$. Điểm $D(4;-2)$ là giao điểm thứ hai của AI và (K). Ta chứng minh được $\widehat{DBC}=\widehat{DCB}\Rightarrow DB=DC$, $\widehat{DIC}=\widehat{DCI}\Rightarrow DI=DC$, do đó $DB=DC=DI$. Đường tròn (D) ngoại tiếp tam giác BCI có phương trình: $(x-4)^2+(y+2)^2=2$. Hai điểm B,C là giao điểm của (K) và (D) nên

$$B(3;-3),C\left(\frac{21}{5};-\frac{3}{5}\right) \text{ hoặc } B\left(\frac{21}{5};-\frac{3}{5}\right),C(3;-3).$$

Vậy $x_1+x_2=\frac{36}{5}$. Chọn **C.**

Câu 2. • ***Cách* 1.** Đặt $z=x+iy$, với $x,y\in\mathbb{R}$, thì từ $|4z+3i|=|4z-4+5i|$ ta được $y=2x-2$. Lúc này

$$P=|z+i|+|z-3i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$
$$=\sqrt{5x^2-4x+1}+\sqrt{5x^2-20x+25}=f(x).$$

Ta có: $f'(x)=\frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}+\frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}}$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(5x-2)(5x-10)\le 0\\(5x-2)^2(5x^2-20x+25)\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.\\=(5x-10)^2(5x^2-4x+1)\end{cases}$$

Hàm $f'(x)$ liên tục và phương trình $f'(x)=0$ vô nghiệm trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ do đó trên mỗi khoảng này $f'(x)$ không đổi dấu, kiểm tra thấy $f'(x)<0$ trên $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$, $f'(x)>0$ trên $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Dẫn tới $\min P=\min\limits_{x\in j}f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=2\sqrt{5}$.

• ***Cách* 2.** Cũng có thể gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Do $|4z+3i|=|4z-4+5i|$ nên suy ra M chạy trên đường thẳng $d:2x-y-2=0$. Lúc này $P=|z+i|+|z-3i|=MA+MB$, với $A(0;-1),B(0;3)$ là hai điểm nằm cùng phía so với d. Điểm $A'\left(\frac{4}{5};-\frac{7}{5}\right)$ đối xứng với A qua d. Ta có $P=MA+MB=MA'+MB\ge A'B=2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi M trùng với giao điểm $M_0\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ của đoạn $A'B$ và d. Vậy $\min P=2\sqrt{5}$. Chọn **B.**

Câu 4.

Với $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}1+x=\sqrt[3]{6y^2+6y+2}\\1+y=\sqrt[3]{6x^2+6x+2}\end{cases}$ thì

$$\begin{cases}x=\sqrt[3]{6\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-1\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1>-\frac{1}{2}\\y=\sqrt[3]{6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-1\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1>-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x,y\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Ta viết lại hệ ở dạng $\begin{cases}f(x)=g(y)\\f(y)=g(x)\end{cases}$, với $f(t)=(t+1)^3$, $g(t)=6t^2+6t+2$ là những hàm đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Hàm $f(t)+g(t)$ cũng đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Như vậy, với $x,y>-\frac{1}{2}$ thì hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}f(x)=g(y)\\f(y)=g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(y)\\f(x)+g(x)=f(y)+g(y)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(y)\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^3=6x^2+6x+2\\x=y\end{cases}.$$

Ta có

$(x+1)^3 = 6x^2+6x+2 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Suy ra $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2 = 2\sqrt[3]{2}$. Chọn **A.**

Câu 10. Số $x = 5\times 9^{2018}$ viết trong hệ thập phân có n chữ số khi và chỉ khi $10^{n-1} \le x < 10^n$

$\Leftrightarrow n-1 \le 2018\log 9+\log 5 < n \Rightarrow n = 1927$. Chọn **A.**

Câu 11. Tổng S_1+S_2 nhỏ nhất khi ΔMAB có diện tích lớn nhất, khi đó M là tiếp điểm của (P) với tiếp tuyến d mà $d\,P\,AB$. Tìm ra $M(2;5)$. Vậy $x_0^2+y_0^2 = 29$. Chọn **A.**

Câu 12. Ta thấy $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right| \ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$ khi $\left|\dfrac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right| \ge 2$ nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Trước hết phương trình $t^2-(m+1)t+4=0$ phải vô nghiệm, tức là

$$\Delta = (m+1)^2-16<0 \Leftrightarrow -5<m<3. \quad (1)$$

Với $-5<m<3$ thì $t^2-(m+1)t+4>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $3t^2+2t+12>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Lúc này

$$\left|\frac{3t^2+2t+12}{t^2-(m+1)t+4}\right| \ge 2 \Leftrightarrow 3t^2+2t+12 \ge 2[t^2-(m+1)t+4]$$

$$\Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+4 \ge 0. \quad (2)$$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$ khi $\Delta' = (m+2)^2-4 \le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 0$ (3). Kết hợp (1) và (3) ta được $-4\le m\le 0$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m để $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right| \ge 2, \forall x>0$.

Chọn **B.**

Câu 16. Ta chứng minh được

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'} = 2.\frac{SO}{SI}.$$

Do đó $\dfrac{1}{SA'}+\dfrac{1}{SB'}+\dfrac{1}{SC'}+\dfrac{1}{SD'} = 8$.

Ta có $64 = \left(\dfrac{1}{SA'}+\dfrac{1}{SB'}+\dfrac{1}{SC'}+\dfrac{1}{SD'}\right)^2$

$$\le 4\left[\left(\frac{1}{SA'}\right)^2+\left(\frac{1}{SB'}\right)^2+\left(\frac{1}{SC'}\right)^2+\left(\frac{1}{SD'}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{SA'}\right)^2+\left(\frac{1}{SB'}\right)^2+\left(\frac{1}{SC'}\right)^2+\left(\frac{1}{SD'}\right)^2 \ge 16,$$

đẳng thức xảy ra khi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Vậy

$$\min\left(\left(\frac{1}{SA'}\right)^2+\left(\frac{1}{SB'}\right)^2+\left(\frac{1}{SC'}\right)^2+\left(\frac{1}{SD'}\right)^2\right) = 16.$$

Chọn **B.**

Câu 17. Ta có:

$$\begin{cases} x-my+4m-2=0 \\ mx+y-3m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = m(y-4) \\ y-1 = m(3-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2)(3-x) = (y-4)(y-1)$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-5x-5y+10=0$. Chọn **B.**

Câu 19. Với các số thực dương a, b thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2}$ có tiệm cận ngang $y=0$.

• Nếu $a+2b\ne 2$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty$ nên đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$, do đó nó có hai đường tiệm cận.

• Với $a+2b=2$ thì đồ thị $y = \dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2}$ có một đường tiệm cận. Khi đó

$$3 = \frac{a+1}{2}+\frac{a+1}{2}+2b \ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 2b}$$

$$\Rightarrow (a+1)^2\frac{b}{2} \le 1 \Rightarrow 2+\log_{a+1}\frac{b}{2} \le 0 \Rightarrow P = \log_{a+1}\frac{b}{2} \le -2.$$

đạt được $\max P = -2$ khi $a=1, b=\dfrac{1}{2}$. Cũng có thể khảo sát hàm $P(b) = \log_{3-2b}\left(\dfrac{b}{2}\right)$ theo biến $b\in(0;1)$. Chọn **A.**

Câu 21. Qua N kẻ đường thẳng song song với CM và cắt AB, BC lần lượt tại I, K. Ta có

$$d(CM, SN) = d(C, (SKN)) = h.$$

Mà $SC = 4, CK = 2, CN = 2$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SC^2}+\frac{1}{CK^2}+\frac{1}{CN^2}=\frac{9}{16}\Rightarrow h=\frac{4}{3}.$$ Chọn **D.**

Câu 25. Gọi a là cạnh của tứ diện đều $ABCD$ thì

$$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}, r=\frac{a\sqrt{6}}{12}\Rightarrow\frac{R}{r}=3.$$ Chọn **A.**

Câu 26. Chiều cao $AA'=a\sqrt{2}$, diện tích đáy $S_{\Delta ABC}=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, thể tích

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=a^3\frac{\sqrt{6}}{4}.$$ Chọn **B.**

Câu 27. Từ $z^3=1$ suy ra $z^{2018}=(z^3)^{672}.z^2=z^2$. Ta có $z^2+z+1=0$ nên

$$(1-z+z^{2018})(1+z-z^{2018})=(1-z+z^2)(1+z-z^2)$$
$$=1-(z-z^2)^2=4-(1+z+z^2)=4.$$ Chọn **C.**

Câu 28. Với $x\neq 1$ ta có

$$1+x+x^2+...+x^{2018}=\frac{x^{2019}-1}{x-1}$$

suy ra

$$1+2x+3x^2+...+2018x^{2017}=\frac{2018x^{2019}-2019x^{2018}+1}{(x-1)^2}.$$

Do đó $z=1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}$

$$=\frac{2018i^{2019}-2019i^{2018}+1}{(i-1)^2}=1009+1010i.$$

Vậy $b-a=1$. Chọn **A.**

Câu 31. Đặt $x=\cos 2t$ với $0\le t\le\frac{\pi}{4}$ thì $dx=-2\sin 2t dt$, nếu $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, nếu $x=1$ thì $t=0$. Vậy

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}(-2\sin 2t dt)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)dt=\frac{\pi}{2}-1,$$

nên $a=1, b=2$, $m=n=1$, và $a^b+m^n=2$. Chọn **D.**

Câu 32. Để cho gọn, ta đặt

$$a=\sqrt{\log_2\frac{x}{4}}, b=\sqrt{\log_3\frac{y}{9}}, c=\sqrt{\log_5\frac{z}{25}}\Rightarrow a+b+c=3,$$

$\log_2 x=a^2+2$, $\log_3 y=b^2+2$, $\log_5 z=c^2+2$,

và $S=F.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$, với

$$F=\log_2 x.\log_3 y.\log_5 z=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

Để giải bài toán, ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$, trong đó a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Ba số a^2-1, b^2-1, c^2-1 luôn có ít nhất hai số có tích không âm. Giả sử $(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$, suy ra

$$c^2(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$$

hay $a^2b^2c^2+c^2\ge c^2b^2+c^2a^2$. (1)

Mặt khác, ta có

$$\left.\begin{array}{l}(a-b)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\ge 0\\(ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\ge 0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+8+2a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2\ge 6(ab+bc+ca)\ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+8$$
$$+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 6(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2+4(a^2+b^2+c^2)+8$$
$$+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 3(a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2.$$

Mà $a+b+c=3$ nên ta thu được

$$F=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 27,$$

đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Do đó $S\ge 27.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5$, đẳng thức xảy ra khi $x=8, y=27, z=125$. Vậy

$$\min S=27.\log_{2001}2.\log_{2018}3.\log_{2019}5.$$ Chọn **A.**

Câu 33. Đặt $x=t^3+t-1\Rightarrow dx=(3t^2+1)dt$, khi $x=-3$ thì $t=-1$, khi $x=1$ thì $t=1$, do đó

$$I=\int_{-3}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(t^3+t-1)(3t^2+1)dt.$$

Đặt $t=-u$ ta có $I=\int_{-1}^1 f(t^3+t-1)(3t^2+1)dt$

$$=\int_1^{-1}f(-u^3-u-1)(3u^2+1)(-du)=\int_{-1}^1 f(-t^3-t-1)(3t^2+1)dt.$$

Lúc này

$$2I=\int_{-1}^1 f(t^3+t-1)(3t^2+1)dt+\int_{-1}^1 f(-t^3-t-1)(3t^2+1)dt=$$

$$=\int_{-1}^1(-6t^6-12t^4-6t^2-2)(3t^2+1)dt=-40\Rightarrow I=-20$$

Chọn **D.**

Câu 34. Chọn đáp án **B** với kết quả là 89 chứ không phải là 281. Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

Câu 36. Nhận thấy $d_1 \cap d_2 = M(1;0;3)$, các vectơ $\vec{u}_1 = (1;-1;2), \vec{u}_2 = (-1;-2;1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2, $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = \sqrt{6}$, $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 3 > 0$, do đó đường phân giác d của các góc tù tạo bởi d_1, d_2 là đường thẳng đi qua $M(1;0;3)$, có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (2;1;1)$. Vậy d có phương trình chính tắc $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Chọn **D.**

Câu 37. Hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $x^3 - mx + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình này nên phương trình tương đương với $m = x^2 + \frac{1}{x}$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ và suy ra các giá trị của m để phương trình $m = x^2 + \frac{1}{x}$ có 3 nghiệm phân biệt là $m > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Số giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 cần tìm của m là 2017. Chọn **A.**

Câu 38. Đồ thị luôn có tiệm cận ngang $y = 1$. Để đồ thị có 3 đường tiệm cận thì phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và -2. Tìm được $m > -1, m \neq 8$. Chọn **A.**

Câu 39. Ta thấy

$$\text{PT} \Leftrightarrow (5^{x^2} - 5^x)(5^{2x^2-x+2m} - 5^{x^2+x+m+2}) = 0.$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình $x^2 - x + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và 1. Tìm được $m < 3, m \neq 2$. Chọn **D.**

Câu 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \max_{t\in[1;2]} \left|\frac{x^2 - x - t}{t+1}\right|, x \in \mathbb{R}.$$

Đặt

$$g(t) = \frac{x^2 - x - t}{t+1}, g'(t) = \frac{-x^2 + x - 1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \neq -1, \forall x \in \mathbb{R},$$

nên với mỗi $x \in \mathbb{R}$ hàm $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1,2]$, suy ra

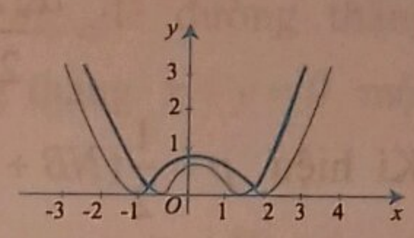
$$g(2) = \frac{x^2 - x - 2}{3} \leq g(t) = \frac{x^2 - x - t}{t+1} \leq g(1) = \frac{x^2 - x - 1}{2},$$

$\forall t \in [1;2]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x) = \max_{t\in[1;2]} \left|\frac{x^2 - x - t}{t+1}\right|$$

$$= \max\left\{\left|\frac{x^2 - x - 2}{3}\right|, \left|\frac{x^2 - x - 1}{2}\right|\right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Vẽ đồ thị các hàm $y = \left|\frac{x^2 - x - 2}{3}\right|$, $y = \left|\frac{x^2 - x - 1}{2}\right|$ trên cũng một hệ trục tọa độ, đồ thị hàm $y = f(x)$ là đường nét đậm như hình vẽ.



Đồ thị hàm $y = f(x)$ có 2 điểm cực tiểu là $A\left(\frac{5-\sqrt{165}}{10}; \frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{5+\sqrt{165}}{10}; \frac{1}{5}\right)$. Từ đó $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{5}$ đạt được khi $x = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$.

Chọn **B.**

Cách khác. Đặt

$$g(t) = \frac{x^2 - x - t}{t+1}, g'(t) = \frac{-x^2 + x - 1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \neq -1, \forall x \in \mathbb{R},$$

nên với mỗi $x \in \mathbb{R}$ hàm $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$, suy ra

$$g(2) = \frac{x^2 - x - 2}{3} \leq g(t) = \frac{x^2 - x - t}{t+1}$$

$$\leq g(1) = \frac{x^2 - x - 1}{2}, \forall t \in [1;2], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(x) = \max_{t\in[1;2]} \left|\frac{x^2 - x - t}{t+1}\right| = \max\left\{\left|\frac{x^2 - x - 2}{3}\right|, \left|\frac{x^2 - x - 1}{2}\right|\right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác

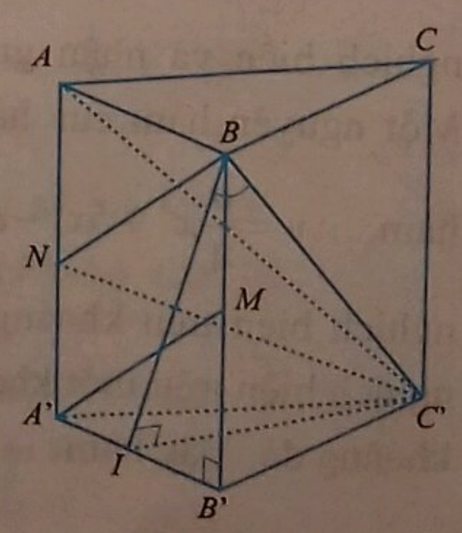
$$f(x) = \max\left\{\left|\frac{x^2 - x - 2}{3}\right|, \left|\frac{x^2 - x - 1}{2}\right|\right\}$$

$$\geq \frac{3}{5}\left|\frac{x^2 - x - 2}{3}\right| + \frac{2}{5}\left|\frac{x^2 - x - 1}{2}\right| \geq \frac{1}{5}\left|x^2 - x - 2 - x^2 + x + 1\right| = \frac{1}{5}.$$

Từ đó ta có $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{5}$, đạt được khi $x = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$.

Chọn **B.**

Câu 42. ***Cách 1.*** Gọi I là trung điểm của $A'B'$ thì $IC' \perp (ABB'A')$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là $\widehat{IBC'} = 60^0$. Ta có



$IB = \sqrt{B'B^2 + B'I^2} = a\sqrt{2}$,

$BC' = \frac{IB}{\cos 60^0} = 2a\sqrt{2}$,

$$IC' = BC'.\sin 60^0 = a\sqrt{6},$$

$$NB = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2},$$

$$NC' = \sqrt{A'N'^2 + A'C'^2}$$

$$= \sqrt{A'N'^2 + A'I^2 + IC'^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{29}}{2}.$$

Kí hiệu $p = \frac{1}{2}(NB + BC' + NC')$ thì diện tích tam giác $BC'N$ là

$$S_{\Delta BC'N} = \sqrt{p(p-NB)(p-BC')(p-NC')} = a^2\frac{\sqrt{111}}{4}.$$

Diện tích tam giác ABN là $S_{\Delta ABN} = \frac{a^2}{2}$. Ta có

$$d\left(M,(BC'N)\right) = d\left(A',(BC'N)\right) = d\left(A,(BC'N)\right)$$

$$= \frac{3.V_{ABC'N}}{S_{\Delta BC'N}} = \frac{S_{\Delta ABN}.IC'}{S_{\Delta BC'N}} = \frac{2a\sqrt{74}}{37}.$$

Cách 2. Gọi I là trung điểm của $A'B'$ thì $IC' \perp (ABB'A')$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là $\widehat{IBC'} = 60^0$. Ta có $IB = \sqrt{B'B^2 + B'I^2} = a\sqrt{2}$,

$$BC' = \frac{IB}{\cos 60^0} = 2a\sqrt{2},$$

$$IC' = BC'.\sin 60^0 = a\sqrt{6}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$$B(a;0;a), N(-a;0;\frac{a}{2}), C'(0;a\sqrt{6};0), M(a;0;\frac{a}{2}).$$

Mặt phẳng $(BC'N)$ có phương trình

$$\sqrt{6}x - 3y - 4\sqrt{6}z + 3a\sqrt{6} = 0.$$

Vậy $d\left(M,(BC'N)\right) = \frac{2a\sqrt{74}}{37}$. Chọn **A.**

Câu 43. Ta thấy hàm $y = ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d$ nghịch biến và nhận giá trị âm trên khoảng $(1;2)$. Một nguyên hàm của hàm này trên khoảng $(1;2)$ là hàm $y = \frac{a}{4}x^4 + bx^3 - cx^2 + dx - 2019$ và cũng nghịch biến trên khoảng đã cho. Tổng của hai hàm nghịch biến trên một khoảng là hàm nghịch biến trên khoảng đó. Vậy hàm

$$y = \frac{a}{4}x^4 + (a+b)x^3 + (3b-c)x^2 + (d-2c)x + d - 2019$$

nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Chọn **C.**

Câu 44. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1)$. Hai mặt phẳng (SAD), (SCD) lần lượt nhận $\vec{n}_1 = (1;0;0), \vec{n}_2 = (1;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng này thì

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}.$$ Chọn **C.**

Câu 47. Ta có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB+BC}{A'B'+B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\Rightarrow A'B' = 10, B'C' = 8.$$ Chọn **A.**

Câu 48. Có C_{10}^5 cách chọn 5 đội tuyển từ 10 đội vào bảng A và có C_5^5 cách chọn 5 đội tuyển còn lại vào bảng B. Do đó $n(\Omega) = C_{10}^5.C_5^5 = 252$. Gọi M là biến cố cần tính xác suất.

• TH1: hai đội tuyển Việt Nam và Malaysia ở bảng A. Có C_8^3 cách chọn 3 đội tuyển từ 8 đội tuyển vào bảng A, và có C_5^5 cách chọn 5 đội tuyển còn lại vào bảng B.

• TH2: hai đội tuyển Việt Nam và Malaysia ở bảng B. Có C_8^3 cách chọn 3 đội tuyển từ 8 đội tuyển vào bảng B, và có C_5^5 cách chọn 5 đội tuyển còn lại vào bảng A. Suy ra $n(M) = C_8^3.C_5^5 + C_8^3.C_5^5 = 112$.

Vậy $P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{112}{252} = \frac{4}{9}$. Chọn **A.**

Câu 49. Điều kiện cần và đủ: Phương trình $at^2 + bt + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt và nghiệm này bằng 9 lần nghiệm kia. Chọn **A.**

Câu 50.

$$M_1M_k = M_1B - M_kB = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2^k} = \frac{AB}{2^k}(2^{k-1} - 1),$$

$k = 1,2,...,100$. Với $k = 100$ thì $M_1M_{100} = 2^{99} - 1$. Chọn **A.**

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 90 phút)

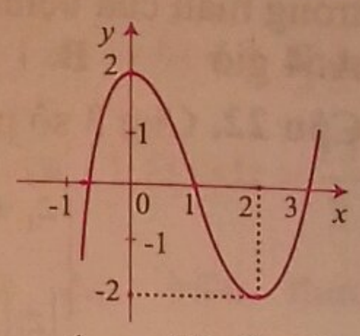
NGUYỄN THANH GIANG (*GV THPT chuyên Hưng Yên*)

Câu 1. Cho hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Tính tổng

$$S = a + b + c + d.$$



A. $S = 0$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = -4$ **D.** $S = 2$.

Câu 2. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. Khi đó, điểm I nằm trên đường thẳng có phương trình:

A. $x + y + 4 = 0$. **B.** $2x - y + 4 = 0$.

C. $x - y + 4 = 0$. **D.** $2x - y + 2 = 0$.

Câu 3. Trong không gian Oxy, cho điểm $M(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm:

A. $M_3(3;0;0)$. **B.** $M_4(0;2;0)$.

C. $M_1(0;0;-1)$. **D.** $M_2(3;2;0)$.

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3;1)$ là:

A. $y = -9x - 26$. **B.** $y = 9x - 26$.

C. $y = -9x - 3$. **D.** $y = 9x + 2$.

Câu 5. Cho hai biểu thức

$$M = \log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right),$$

$$N = \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_3 4.\log_2 3\right).$$

Tính $T = \dfrac{M}{N}$

A. $T = \dfrac{3}{2}$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = -1$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Rút gọn biểu thức $B = \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{a\sqrt[5]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{a}}$, ta được kết quả là:

A. $-\dfrac{91}{60}$. **B.** $\dfrac{60}{91}$. **C.** $\dfrac{16}{5}$. **D.** $-\dfrac{5}{16}$.

Câu 8. Có hai giá trị m_1, m_2 để đường thẳng $mx + y - 3 = 0$ hợp với đường thẳng $x + y = 0$ một góc 60^0. Tổng $m_1 + m_2$ bằng

A. -3 **B.** 3 **C.** 4 **D.** -4

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;-2;3)$ đến mp$(P): x + 3y - 4z + 9 = 0$ là

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\dfrac{17}{\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{26}}{13}$.

Câu 10. Cho biểu thức $T = \dfrac{1}{5^{-x-1}} + 3.\sqrt{5}^{2x} - 25^{\frac{x-1}{2}}$.

Khi $5^x = \sqrt{7}$ thì giá trị của biểu thức T là:

A. $\dfrac{9\sqrt{7}}{5}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{7}}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{5}$. **D.** $\dfrac{39\sqrt{7}}{5}$.

Câu 11. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$.

C. $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$. **D.** $M(-2;0)$.

Câu 12. Cho cặp số $(x;y)$ thỏa mãn: $(2x - y)i + y(1 - 2i) = 3 + 7i$. Khi đó biểu thức: $P = x^2 - xy$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 30. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ hoặc $m = -21$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. **D.** $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $2x-y-1=0$. **B.** $-y+2z-3=0$.
C. $2x-y+1=0$. **D.** $y+2z-5=0$.

Câu 15. Cho biết

$$\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}dx = a\ln|x+1| + b\ln|x-2| + C.$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

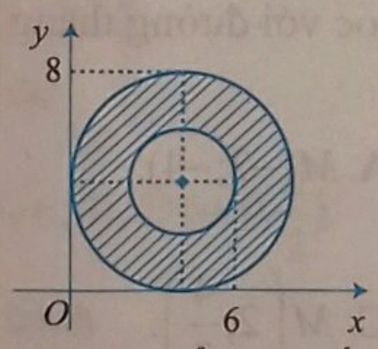
A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$.
C. $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Câu 16. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức

$$T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2017)+F(2018)+F(2019).$$

A. $T=1009.\frac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019.2020}$.
C. $T=\frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Câu 17. Phần gạch trong hình vẽ bên là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây:



A. $6 \le |z| \le 8$.
B. $2 \le |z+4+4i| \le 4$.
C. $2 \le |z-4-4i| \le 4$.
D. $4 \le |z-4-4i| \le 16$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số

$$y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 19. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II?

A. 246. **B.** 3480. **C.** 245. **D.** 3360.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{-x^2+4}-2m+3=0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ **B.** 1 giờ **C.** 3 giờ **D.** 2 giờ

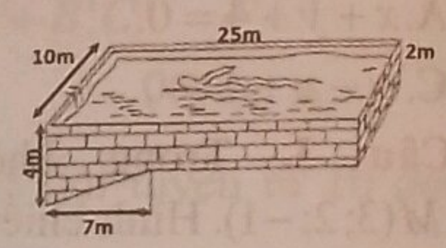
Câu 22. Cho 3 số phức $z_1;z_2;z_3$ thỏa mãn

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

Tính $A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 23. Các kích thước của một bể bơi được cho trên hình vẽ (mặt nước có dạng hình chữ nhật). Hãy tính xem bể chứa được bao nhiêu mét khối nước khi nó đầy ắp nước?



A. $1000m^2$. **B.** $640m^2$. **C.** $570m^2$. **D.** $500m^2$.

Câu 24. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a-b$ là

A. 1. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** -1. **D.** $\frac{9}{8}$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=(3+4i)z-2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=15$. **D.** $R=20$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int_{-1}^{2}[f(x)+2x]dx$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Câu 27. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số lập được từ tập hợp $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 6.

A. $\frac{4}{27}$. **B.** $\frac{9}{28}$. **C.** $\frac{9}{25}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 28. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\frac{15}{e}$. **B.** $4-\frac{10}{e}$. **C.** $\frac{15}{e}-4$. **D.** $\frac{10}{e}$.

Câu 29. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)dx=-2$ và $\int_0^3 f(x)dx=\frac{13}{2}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. $P=-\frac{3}{4}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C** $P=\frac{4}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

Câu 30. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3[f(x)+3g(x)]dx=10$ đồng thời $\int_1^3[2f(x)-g(x)]dx=6$. Tính $\int_1^3[f(x)+g(x)]dx$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 31. Biết m là số thực thỏa mãn

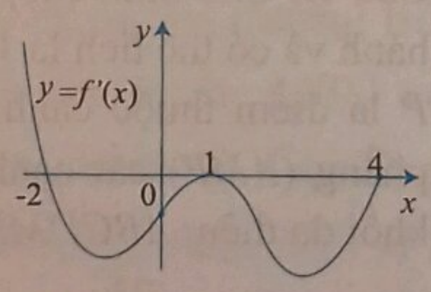
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)dx=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1.$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$.

C. $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng



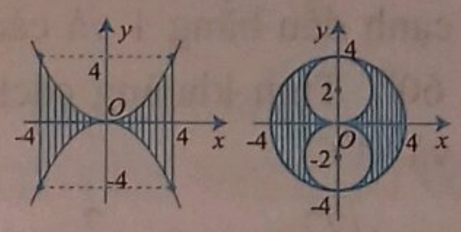
A. 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 33. Cho hàm số $y=\frac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S=[8;9)$. **B.** $S=\left[4;\frac{9}{2}\right)$.

C. $S=\left(4;\frac{9}{2}\right)$. **D.** $S=(0;9]$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{4}$, $x=-4$, $x=4$ và (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa mãn: $x^2+y^2\le 16$, $x^2+(y-2)^2\ge 4$, $x^2+(y+2)^2\ge 4$. Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1,V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?



A. $V_1=V_2$. **B.** $V_1=\frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1=2V_2$. **D.** $V_1=\frac{2}{3}V_2$.

Câu 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA',BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA'=3A'M$, $BB'=3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'MN$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{7}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích cho hình chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Câu 37. Cho hàm số

$$y=f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1.$$

Với giá trị nào của m thì $f'(x)-6x>0$ với mọi $x\ge 2$?

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m<-\frac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\le 0$.

Câu 38. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A. $S=-\frac{7}{2}$. **B.** $S=-\frac{3}{2}$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=4$.

Câu 39. Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5,6,7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?

A. 2448. B. 3600. C. 2324. D. 2592.

Câu 40. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) được thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

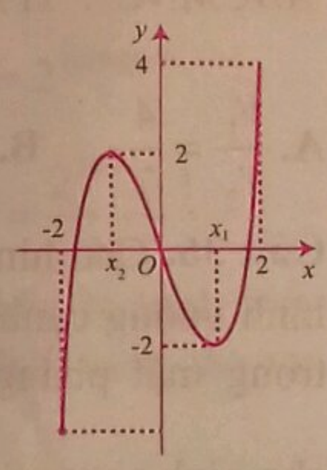
Câu 41. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng đỉnh A đều bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$. B. $\frac{2}{11}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{11}$. D. $\frac{3}{11}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2), B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng

A. 5. B. 3. C. 4. D. 10.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$, và có đồ thị là đường cong như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=2$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$.



A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-17=0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $2x-2y+z+7=0$. B. $2x-2y+z+17=0$.

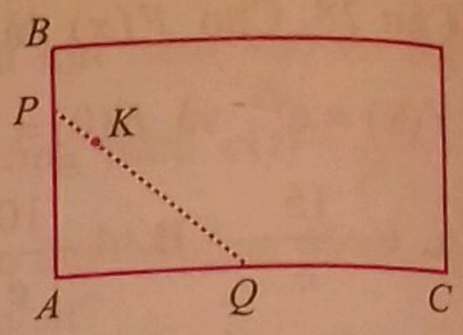
C. $x-y+2z-7=0$. D. $2x-2y+z-17=0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. B. $x+3y+2z+10=0$.

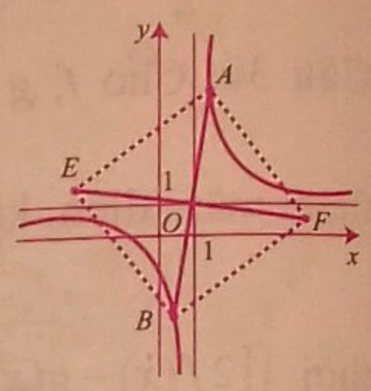
C. $x-2y-3z-1=0$. D. $3x+z+2=0$.

Câu 46. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1m và cách bờ AC là 8m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{71}}{4}$.

Câu 47. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giả sử A, B là hai điểm thuộc (C) và đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận. Dựng hình vuông $AEBF$. Diện tích nhỏ nhất của hình vuông $AEBF$ là:



A. $8\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 8. D. 16.

Câu 48. Cho phương trình

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)-m=0.$$

Để phương trình chỉ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc khoảng $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $m\in(a;b)$. Giá trị $b-a$ là

A. $3\sqrt{3}$. B. $4-2\sqrt{3}$. C. 4. D. $4\sqrt{3}-2$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M là trung điểm của SB. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N. Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V.

A. $V_{ABCDMNP}=\frac{23}{30}V$. B. $V_{ABCDMNP}=\frac{19}{30}V$.

C. $V_{ABCDMNP}=\frac{2}{5}V$. D. $V_{ABCDMNP}=\frac{7}{30}V$.

Câu 50. Cho x, y là những số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$. Giá trị của $A=M+15m$ là:

A. $A=17-2\sqrt{6}$. B. $A=17+\sqrt{6}$.

C. $A=17+2\sqrt{6}$. D. $A=17-\sqrt{6}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/501 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên x sao cho:

$$\frac{x-1}{2018}+\frac{x-7}{503}=\frac{x-3}{1008}+\frac{x-9}{670}.$$

LÊ MINH HOÀ

(*GV THCS Đông Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ*)

Bài T2/501 (Lớp 7). Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (x, y) thoả mãn phương trình:

$$1+3^{x+1}+2.3^{3x}=y^3.$$

PHẠM HẢI ĐĂNG

(*Kim Đường, Ứng Hoà, Hà Nội*)

Bài T3/501. Cho $0\le a\le 2$, $0\le b\le 2$, $0\le c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$3\le a^3+b^3+c^3\le 9.$$

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(*85 Biên Cương, Ngô Mây, Quy Nhơn, Bình Định*)

Bài T4/501. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC với đường tròn (O) (B nằm giữa M và C). Gọi D, E, K lần lượt là trung điểm của MA, MB, ME. H là điểm đối xứng với D qua K. Đường thẳng HE cắt CD tại N. Chứng minh rằng $CNKH$ là tứ giác nội tiếp.

LÊ XUÂN DƯƠNG

(*GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên*)

Bài T5/501. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+\sqrt{y}=138\\ y\sqrt{y}+6\sqrt{x}.y+8\sqrt{x}=213\end{cases}.$$

LẠI QUANG THỌ

(*Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/501. Giải phương trình:

$$12\sqrt[3]{x^2+4}.\sqrt{2x-3}=(x^2+16x-12)\sqrt[3]{x-1}.$$

NGUYỄN THẾ ANH

(*GV THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh*)

Bài T7/501. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+nx).$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T8/501. Cho tam giác ABC, $BC=a$, $CA=b$, $BA=c$; gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_a}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

NGUYỄN NGỌC TÚ

(*GV THPT chuyên Hà Giang*)

Bài T9/501. Cho các số dương a, b, c, d thoả mãn $a\ge b\ge c\ge d$ và $abcd=1$. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{k}{d+1}\ge\frac{3+k}{2}.$$

VÕ QUỐC BÁ CẨN

(*GV Archimedes Academy, Hà Nội*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/501. Cho n là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 6. Tìm số nguyên dương lớn nhất m để trong n số nguyên dương phân biệt bất kì không vượt quá m luôn tồn tại 4 số phân biệt mà một số bằng tổng của ba số còn lại.

HOÀNG NGỌC MINH

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T11/501. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để tồn tại hai dãy $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ thoả mãn:

a) $a_i, b_i\in\{1, 2018, 2018^2, 2018^3, ...\}, i=1,2,...,k$;

b) $a_i\ne b_i, i=1,2,...,k$;

c) $a_i\le a_{i+1}$, $b_i\le b_{i+1}$;

d) $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i$.

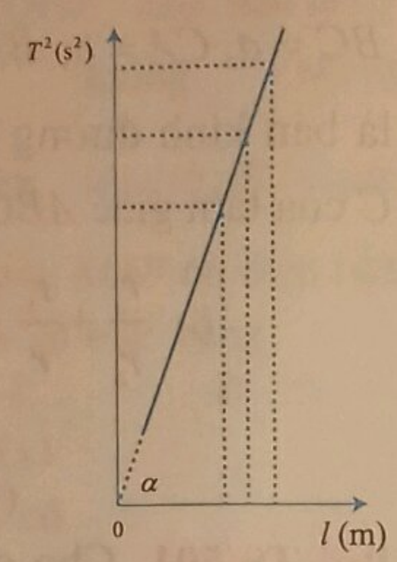
BÙI VĂN PHÚC

(*GV THPT chuyên Hà Giang*)

Bài T12/501. Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$ nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Gọi M_a là trung điểm của BC. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính HM_a và AO tiếp xúc với nhau.

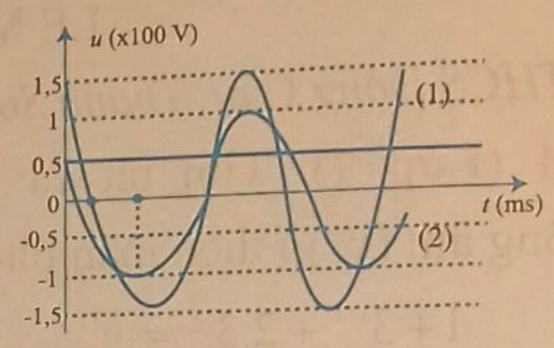
NGUYỄN VĂN LINH (*Hà Nội*)

Bài L1. Một học sinh thực hiện thí nghiệm kiểm chứng chu kì dao động điều hòa của con lắc đơn phụ thuộc vào chiều dài của con lắc. Từ kết quả thí nghiệm, học sinh này vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của T^2 vào chiều dài l của con lắc. Học sinh này đo được góc hợp bởi giữa đường thẳng đồ thị với trục Ol là $\alpha = 76,1^0$. Lấy $\pi = 3,14$, theo kết quả thí nghiệm của học sinh này, hãy xác định gia tốc trọng trường tại nơi làm thí nghiệm.



THANH LÂM (*Hà Nội*)

Bài L2. Một cuộn cảm thuần L được mắc vào nguồn (1) thì cường độ dòng điện là 3 A. Nếu mắc L vào nguồn (2) thì cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch là bao nhiêu ? Biết đồ thị phụ thuộc thời gian của điện áp nguồn (1) và nguồn (2) được mô tả ở hình dưới.



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/501 (For 6th grade). Find natural numbers x such that

$$\frac{x-1}{2018} + \frac{x-7}{503} = \frac{x-3}{1008} + \frac{x-9}{670}.$$

Problem T2/501 (For 7th grade). Find all pairs non-negative numbers (x, y) such that

$$1 + 3^{x+1} + 2.3^{3x} = y^3.$$

Problem T3/501. Given $0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 2$ and $a + b + c = 3$. Show that

$$3 \le a^3 + b^3 + c^3 \le 9.$$

Problem T4/501. From a point M which is outside a circle (O) we draw a tangent MA and a secant MBC to (O) (B is in between M and C). Let D, E, K respectively be the midpoints of MA, MB, ME. Suppose that H is the point of reflection of D through K. The line HE intersects CD at N. Prove that $CNKH$ is a cyclic quadrilateral.

Problem T5/501. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + \sqrt{y} = 138 \\ y\sqrt{y} + 6\sqrt{x}.y + 8\sqrt{x} = 213 \end{cases}.$$

FOR HIGH SHOOL

Problem T6/501. Solve the equation

$$12\sqrt[3]{x^2+4}.\sqrt{2x-3} = (x^2 + 16x - 12)\sqrt[3]{x-1}.$$

Problem T7/501. Find the coefficient of x^3 in the expansion of $(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+nx)$.

Problem T8/501. Given a triangle ABC. Let $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$; and r_a, r_b, r_c respectively the radii of the excircles relative to A, B, C. Prove that

$$\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

(*Xem tiếp trang 27*)

Bài T1/497. *Tìm tất cả các số nguyên dương n thoả mãn:*

$$1!+2!+3!+...+n!=p^2+q^2+5895,$$

trong đó p, q là hai số nguyên tố. Quy ước rằng $n!=1.2.3...n$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có ngay $n>3$. Khi đó tổng $1!+2!+3!+\ldots+n!=3+3!+\ldots+n!$ chia hết cho 3 vì với bất kì số nguyên $m\geq 3$ thì $m!=1.2.3\ldots m$ chia hết cho 3. Mặt khác, 5895 chia hết cho 3 nên từ giả thiết

$$1!+2!+3!+\ldots+n!=p^2+q^2+5895$$

suy ra p^2+q^2 phải chia hết cho 3.

Nhận xét. Mỗi số chính phương chia cho 3 có dư là 0 hoặc 1. Thực vậy, với số nguyên k nếu $a=3k$ thì $a^2=9k^2$, nếu $a=3k+r$ với r bằng 1 hoặc 2 thì r^2 bằng 1 hoặc 4 nên $a^2=9k^2+6kr+r^2$ chia cho 3 dư 1.

Theo nhận xét trên thì p^2+q^2 chia hết cho 3 chỉ khi p^2 và q^2 đều chia hết cho 3, suy ra p và q đều chia hết cho 3, nhưng theo giả thiết p và q đều là số nguyên tố nên $p=q=3$. Từ đó

$$1!+2!+3!+\ldots+n!=3^2+3^2+5895=5913,$$

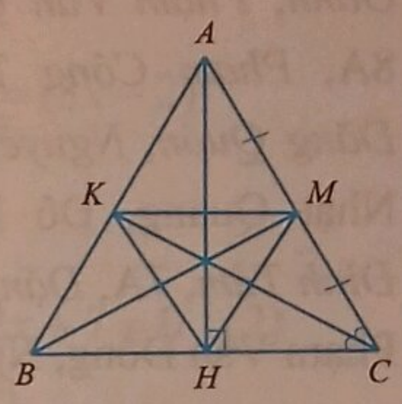
mà ta có $1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!=5913$ nên $n=7$. ❐

➢***Nhận xét.*** Một số bạn không nêu ra nhận xét trên nên lập luận không chặt chẽ. Các bạn có lời giải đúng là: **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Duy Gia Kiệt*, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Vương Viết Lượng*, *Lê Khắc Hưng*, 6A, *Võ Ánh Dương*, *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Minh Thông*, *Hồ Ngọc Việt*, 6A, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/497. *Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CK thoả mãn điều kiện HMK là tam giác đều. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.*

Lời giải. Ta có 2 kết quả sau:



(1) Trong tam giác vuông, trung tuyến tương ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

(2) Trong tam giác có trung tuyến tương ứng với một cạnh dài bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Trở lại bài toán.

Giả sử HMK là tam giác đều. Xét ΔAHC ta có $HM=\frac{1}{2}AC$ (theo (1)), mà $KM=HM$ nên $KM=\frac{1}{2}AC$, khi đó theo (2) ta có ΔAKC vuông tại K. Trong ΔABC có CK vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔABC cân tại C, suy ra $AC=BC$ và CK cũng là đường trung tuyến, tức K là trung điểm của AB. Khi đó trong tam giác vuông AHB có HK là trung tuyến nên $HK=\frac{1}{2}AB$. Lại có $HK=HM=\frac{1}{2}AC$, suy ra $AC=AB$. Vậy ABC là tam giác đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Lại Trường Giang*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 7B, THCS Nguyễn Tất

Thành, TP. Hưng Yên; **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa, *Nguyễn Đức Minh*, 7B, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Nghệ An:** *Hoàng Lê Ngọc Minh, Hồ Nam Khánh, Trần Phương Mai, Phạm Ngọc Trinh*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Khối 1, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; *Phạm Trọng Toàn, Thái Trần Thảo Trang, Lê Thiệp Sang, Hoàng Đình Đức, Trần Hồng Minh, Nguyễn Danh Tiến Nam, Thái Huyền Trang, Trần Thị Hào, Trần Duy Thành Đạt, Nguyễn Công An, Kiều Đình Nam, Bùi Nhật Đăng, Dương Trọng Nguyên, Nguyễn Công Phúc*, 7C, *Nguyễn Văn Chung*, 8A, *Hoàng Thị Kim Oanh, Phạm Văn Quyền, Nguyễn Vũ Vân Anh*, 8A, *Phạm Công Toàn, Đào Danh Hào, Trần Đăng Quân, Nguyễn Xuân Khoái*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 7A, *Đặng Cao Gia Nguyên*, 7C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/497. *Giả sử n là một số nguyên dương sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư của $2^n+17^n+2018^n$ khi chia cho 11.*

Lời giải. (Lời giải của một số bạn) Ta đặt $n=5k+r$ với $k,r\in\mathbb{N}, 0\le r\le 4$.

Đặt $s(n)=3^n+7^n$, ta có

$$s(n)=3^n+7^n=(3^5)^k.3^r+(7^5)^k.7^r$$
$$\equiv 3^r+7^r.(-1)^k \pmod{11}.$$

Khi k là số chẵn thì số dư của $s(n)$ trong phép chia cho 11 là 2, 10, 3, 7 và 7 (tương ứng với r = 0, 1, 2, 3, 4), tức là $s(n)$ không chia hết cho 11. Vậy k phải là số lẻ. Trong trường hợp này thì số dư của $s(n)$ trong phép chia cho 11 là 0, 7, 4, 3 và 1 tương ứng với r = 0, 1, 2, 3 và 4. Như vậy $s(n)$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi k là số lẻ và $r=0$. Khi đó có:

$$2^n+17^n+2018^{n^2}\equiv 2^n+6^n+5^{n^2}=2^{5k}+6^{5k}+5^{25k^2}$$
$$\equiv(2^5)^k+(6^5)^k+(5^5)^{5k^2}$$
$$\equiv(-1)^k+(-1)^k+1^{5k^2}=-1 \pmod{11}.$$

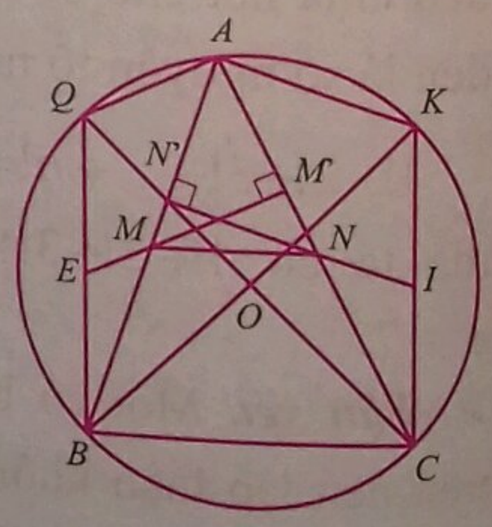
Vậy số dư của $2^n+17^n+2018^n$ cho 11 là 10 khi $s(n)$ chia hết cho 11. □

➢***Nhận xét.*** Tất cả các bạn gửi lời giải đều có đáp số đúng, đó là các bạn sau (có một bạn không ghi tên và địa chỉ): **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi*, 8C, THCS Lý Thái Tổ, *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Minh Đức, Nguyễn Tiến Dũng, Đỗ Ngọc Tiến*, 6A3, *Đặng Thái Tuấn, Vũ Minh Khải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thành Nam, Đặng Hữu Khanh, Phạm Văn Quyền*, 8A, *Nguyễn Công An, Bùi Nhật Đăng, Dương Trọng Nguyên, Phạm Viết Thịnh, Nguyễn Danh Tiến Nam, Nguyễn Công Phúc*, 7C, *Lê Văn Quang Trung, Nguyễn Huy Hoàng* 9B, THCS Lý Nhật Quang; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, *Võ Thị Hồng Thu*, 8B THCS Nghĩa Mỹ; **Vĩnh Phúc:** *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

VŨ ĐÌNH HOÀ

Bài T4/497. *Cho (O) và một dây BC cố định. A di động trên cung lớn BC, M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng hai đường cao MM' và NN' của ΔAMN, mỗi đường đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Kẻ đường kính BK và CQ. Gọi E là giao điểm của MM' với BQ và I là giao điểm của NN' với CK. Do BK là đường kính của đường tròn (O) nên $BA\perp KA$, suy ra $NN'\,//\,AK$ (cùng vuông góc với AB).



Tam giác ACK có N là trung điểm AC và $NI\,//\,AK$ nên NI là đường trung bình của ΔACK,

do đó I là trung điểm của CK. Vì các điểm C, K cố định nên điểm I cố định.

Tương tự, E là trung điểm của BQ nên E là điểm cố định.

Vậy MM' và NN' lần lượt đi qua các điểm E và I cố định khi A thay đổi trên cung lớn BC. □

➢*Nhận xét.* Bài toán không khó, có khá đông các bạn tham gia giải. Những bạn có tên sau đây cho lời giải đúng và gọn: **Nghệ An:** *Chu Thế Phong*, 8D, *Lê Văn Quang Trung*, *Nguyễn Đức Bảo Hoàng*, *Nguyễn Cảnh Mạnh*, *Nguyễn Thanh Nguyên*, *Lê Văn Mạnh*, *Lê Đức Anh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Việt Anh*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 9A5, THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 9A, *Đặng Cao Gia Nguyên*, 9C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Phú Thọ:** *Vũ Minh Khải*, *Đặng Thái Tuấn*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Lê Danh Vinh*, 9A1, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/497. *Giải phương trình:*

$$13x^2-5x-13=(16x-11)\sqrt{2x^2-3}.$$

Lời giải. ĐK: $2x^2-3\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x\ge \dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5(2x^2-3)-(16x-11)\sqrt{2x^2-3}+3x^2-5x+2=0.$$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3}$, $t\ge 0$, ta được

$$5t^2-(16x-11)t+3x^2-5x+2=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai của t, ta có

$$\Delta=(16x-11)^2-20(3x^2-5x+2)$$
$$=196x^2-252x+81=(14x-9)^2$$

Do đó

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{16x-11-(14x-9)}{10}=\dfrac{x-1}{5} \\ t=\dfrac{16x-11+(14x-9)}{10}=3x-2\end{array}\right..$$

• TH1: $t=\dfrac{x-1}{5}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{2x^2-3}=\dfrac{x-1}{5}\end{cases}$ (1)

Với $x\ge 1$:

$(1)\Leftrightarrow 25(2x^2-3)=(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 49x^2+2x-76=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+5\sqrt{149}}{49}$.

• TH2:

$$t=3x-2\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{3} \\ 2x^2-3=(3x-2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{3} \\ 7x^2-12x+7=0 \quad (2)\end{cases}.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì

$$\Delta'=36-49<0.$$

Vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1+5\sqrt{149}}{49}$. □

➢*Nhận xét.* Sau khi đặt điều kiện, có thể giải bài toán bằng cách bình phương hai vế, biến đổi về phương trình tích $(7x^2-12x+7)(49x^2+2x-76)=0$ từ đó suy ra kết quả. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Phú Thọ**: *Đặng Thái Tuấn*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/497. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+5}+\sqrt{4y^2+5}=6|xy| \\ 2^{\frac{1}{x^8}+\frac{2}{y^4}}+2^{\frac{1}{y^8}+\frac{2}{x^4}}=16\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x\ne 0, y\ne 0$. HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4}{y^2}+\dfrac{5}{x^2y^2}}+\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^2y^2}}=6\\ 2^{\frac{1}{x^8}+\frac{2}{y^4}}+2^{\frac{1}{y^8}+\frac{2}{x^4}}=16\end{cases}\quad (*)$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x^2}, b=\dfrac{1}{y^2}$ (với $a>0, b>0$), HPT (*) trở thành

$$\begin{cases}\sqrt{4a+5ab}+\sqrt{4b+5ab}=6 & (1)\\ 2^{a^4+2b^2}+2^{b^4+2a^2}=16 & (2)\end{cases}$$

Áp dụng BĐT Cauchy vào (2), ta có

$$16=2^{a^4+2b^2}+2^{b^4+2a^2}\ge 2\sqrt{2^{a^4+b^4+2(a^2+b^2)}}$$

$$\Leftrightarrow 2^6\ge 2^{a^4+b^4+2(a^2+b^2)}\Leftrightarrow 6\ge a^4+b^4+2(a^2+b^2).$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có: $2(a^4+b^4)\ge(a^2+b^2)^2$.

Do đó $6\ge\dfrac{(a^2+b^2)^2}{2}+2(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow(a^2+b^2-2)(a^2+b^2+6)\le 0,$$

nên $a^2+b^2\le 2$. Từ đây suy ra

$$2\ge a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow ab\le 1$$

$$2\ge a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow a+b\le 2.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky vào (1) với $ab\le 1$, $a+b\le 2$, ta được

$$6^2=\left(\sqrt{4a+5ab}+\sqrt{4b+5ab}\right)^2$$

$$\le 2[4(a+b)+10ab]\le 2(4.2+10)=6^2.$$

Do đó phải xảy ra dấu bằng: $ab=1$, $a+b=2$, $a=b$; tức là $a=b=1$ (thỏa mãn HPT (1), (2)).

Từ đây suy ra $x^2=y^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1;\ y=\pm 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn tham gia đều cho kết quả đúng, tuy nhiên biến đổi còn quá dài dòng do không đặt thêm biến phụ. Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Nam Định**: *Đỗ Tiến* Dũng, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Lê Hồng Quân*, *Nguyễn Quỳnh Trang*, 10A1, THPT Cù Huy Cận; **Long An**: *Võ Hoàng Phúc Khang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Long An; **Lâm Đồng**: *Tô Đức Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/497. *Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c,*

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+$$
$$+\sqrt{\frac{2(a+b+c)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Sử dụng các đồng nhất thức

$$(x+y)\omega+(y+z)u+(z+x)v$$
$$=(x+y+z)(u+v+\omega)-(xu+yv+z\omega),$$

$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx),$$

$$(u+v+\omega)^2=(u^2+v^2+\omega^2)+2(uv+v\omega+\omega u)$$

ta thu được $(x+y)\omega+(y+z)u+(z+x)v$

$$=\sqrt{[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)]}\times$$
$$\times\sqrt{[(u^2+v^2+\omega^2)+2(uv+v\omega+\omega u)]}-(xu+yv+z\omega).$$

Tiếp theo, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta thu được

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(u^2+v^2+\omega^2)}\ge xu+yv+z\omega;$$

$$\sqrt{[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)]}\times$$
$$\times\sqrt{[(u^2+v^2+\omega^2)+2(uv+v\omega+\omega u)]}-(xu+yv+z\omega)$$
$$\ge\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(u^2+v^2+\omega^2)}+$$
$$+2\sqrt{(xy+yz+zx)(uv+v\omega+\omega u)}-(xu+yv+z\omega).$$

Suy ra $(x+y)\omega+(y+z)u+(z+x)v$

$$\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)(uv+v\omega+\omega u)}.\quad (1)$$

Từ đề bài, áp dụng (1) với $(x,y,z)=(a^3,b^3,c^3)$ và $(u,v,\omega)=\left(\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}\right)$, ta thu được

$$\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}+\frac{a^3+b^3}{a+b}$$

$$\geq 2\sqrt{(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(c+a)}+\frac{1}{(c+a)(a+b)}}$$

hay

$$2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{2(a+b+c)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Do đó

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+$$

$$+\sqrt{\frac{2(a+b+c)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán quen thuộc về chứng minh bất đẳng thức dạng đối xứng mở rộng. Đa số các bạn gửi đến Toà soạn đều cho lời giải đúng theo cách đã nêu ở trên. Một số bạn sử dụng các phép biến đổi tương đương và đặt ẩn phụ cũng cho các kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tiến Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, *Võ Hoàng Thúc Khang*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Vinh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Trí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **Thanh Hoá:** *Trịnh Bá An*, 11C1, THPT Yên Định 2.

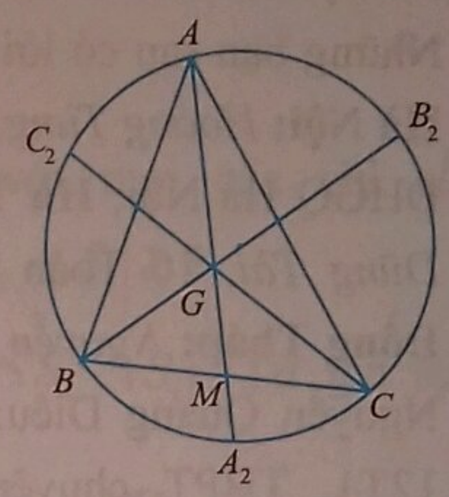
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/497. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I, trọng tâm là G. Kéo dài AG, BG, CG lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:*

$$GA_2+GB_2+GC_2\geq IA+IB+IC.$$

Lời giải. Đặt

$BC=a,\ AC=b,\ AB=c.$



Từ kết quả quen thuộc

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0},$$

ta có

$$(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC})^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2$$

$$+2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2ac\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}+2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=0$$

$$\Leftrightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+ab(IA^2+IB^2-c^2)$$

$$+ac(IA^2+IC^2-b^2)+bc(IB^2+IC^2-a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)(aIA^2+bIB^2+cIC^2)=abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc\Leftrightarrow\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Schwarz ta thấy

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}\geq\frac{(IA+IB+IC)^2}{bc+ca+ab}$$

$$\Rightarrow bc+ca+ab\geq(IA+IB+IC)^2 \qquad (1)$$

Gọi M là trung điểm của BC, khi đó

$$MA.MA_2=MB.MC=\frac{a^2}{4}\Rightarrow MA_2=\frac{a^2}{4MA}.$$

Từ đó $GA_2=GM+MA_2=\dfrac{MA}{3}+\dfrac{a^2}{4MA}\geq\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

(theo BĐT Cauchy).

Tương tự ta có: $GB_2\geq\dfrac{b}{\sqrt{3}}$; $GC_2\geq\dfrac{c}{\sqrt{3}}$. Do đó

$$GA_2+GB_2+GC_2\geq\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Mặt khác $(a+b+c)^2\geq 3(bc+ca+ab)$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{bc+ca+ab}. \qquad (3)$$

Từ (2), (3) và (1) suy ra

$$GA_2 + GB_2 + GC_2 \geq IA + IB + IC \cdot$$

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Những bạn sau có lời giải đúng (tuy còn hơi dài): **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tuấn Dũng, Trần Dũng Tài*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, THPT Nguyễn Quang Diêu; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/497. *Cho các hàm số liên tục $f, g:[a;b] \to [a;b]$ thỏa mãn $f(g(x)) = g(f(x))$; a, b là các số thực hữu hạn. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.*

Lời giải. Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$. Vì $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục nên $h(x)$ cũng là hàm liên tục. Giả sử PT $h(x) = 0$ vô nghiệm. Vì $h(x)$ là hàm liên tục nên có hai trường hợp xảy ra: $\left[\begin{array}{l} h(x) > 0\ \forall x \in [a;b] \\ h(x) < 0\ \forall x \in [a;b] \end{array}\right.$.

• TH1: $h(x) > 0\ \forall x \in [a;b]$. Khi đó

$$\exists \varepsilon > 0: h(x) \geq \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq g(x) + \varepsilon\ \forall x \in [a;b].$$

Vì $f(x) \in [a;b]$ nên

$$f(f(x)) \geq g(f(x)) + \varepsilon = f(g(x)) + \varepsilon \geq g(g(x) + 2\varepsilon.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f^n(x) \geq g^n(x) + n\varepsilon \qquad (*)$$

với $f^n(x) = \underbrace{f(...(f(x))...)}_{n \text{ lần } f}$.

Ở trên ta đã thấy (*) đúng với $n = 1, 2$. Giả sử (*) cũng đúng cho $n = k$, tức là

$$f^k(x) \geq g^k(x) + k\varepsilon \Rightarrow f^k(f(x)) \geq g^k(f(x)) + k\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow f^{k+1}(x) \geq g^{k-1}(f(g(x))) + k\varepsilon$$

$$= g^{k-2}(f(g(g(x)))) + k\varepsilon = \ldots$$

$$= f(g^k(x)) \geq g^{k+1}(x) + \varepsilon + kx = g^{k+1}(x) + (k+1)\varepsilon.$$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp (*) đúng với $\forall x \in [a;b], \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$b \geq f^n(x) \geq g^n(x) + n\varepsilon \geq a + n\varepsilon.$$

Cho $n \to \infty$ thì $a + n\varepsilon \to \infty$, do đó $b \to \infty$. Điều này là vô lý vì b hữu hạn, do đó loại trường hợp này.

• TH2: $h(x) < 0\ \forall x \in [a;b]$. Khi đó

$$\exists \varepsilon < 0: h(x) \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq g(x) + \varepsilon\ \forall x \in [a;b].$$

Chứng minh tương tự như trường hợp trên ta cũng suy ra được:

$$f^n(x) \leq g^n(x) + n\varepsilon. \qquad (**)$$

Do đó $a \leq f^n(x) \leq g^n(x) + n\varepsilon \leq b + n\varepsilon$.

Cho $n \to \infty$ thì $b + n\varepsilon \to -\infty$ (do $\varepsilon < 0$), do đó $a \to -\infty$. Điều này là vô lý vì a hữu hạn, do đó loại trường hợp này.

Kết luận: Vậy phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm hay phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm. ❐

➢***Nhận xét.*** Các giả thiết của bài toán đã được vận dụng khéo léo để chứng minh kết quả (*) và (**). Đây chính là điểm mấu chốt trong lời giải bài toán. Chỉ có ít bạn tham gia giải bài này nhưng lời giải đều không đúng.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/497. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thoả mãn $m^5n + 2019$ và $mn^5 + 2019$ là hai luỹ thừa ba của các số nguyên.*

Lời giải. (Của bạn *Đỗ Nguyễn An Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**).

Nhận xét. Với mọi số nguyên a thì

$$\begin{cases} a^3 \equiv 0 \pmod 9 \text{ hoặc } a^3 \equiv \pm 1 \pmod 9 \\ a^6 \equiv 0 \pmod 9 \text{ hoặc } a^6 \equiv 1 \pmod 9 \end{cases}$$

Thật vậy: nếu $a = 3k \Rightarrow a^3 \equiv 0 \pmod 9$;

nếu $a = 3k+1$ thì $a^3 \equiv 1 \pmod 9$;

nếu $a = 3k+2$ thì $a^3 \equiv -1 \pmod 9$;

do đó $a^6 = (a^3)^2 \equiv 0 \pmod 9$ hoặc $a^6 \equiv 1 \pmod 9$.

Quay trở lại bài toán: Giả sử $\begin{cases} m^5 n + 2019 = a^3 \\ mn^5 + 2019 = b^3 \end{cases}$

- Nếu $a \vdots 3$ và vì

$$2019 \vdots 3 \Rightarrow m^5 n \vdots 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^5 \vdots 3 \\ n \vdots 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \vdots 3 \\ n \vdots 3 \end{array}\right.$$

- Nếu $m \vdots 3 \Rightarrow m^5 n \vdots 27$. Mà $a \vdots 3 \Rightarrow a^3 \vdots 27 \Rightarrow 2019 \vdots 27$ (vô lý).

• Nếu $n \vdots 3 \Rightarrow mn^5 \vdots 27$. Vì $2019 \vdots 3 \Rightarrow b^3 \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3 \Rightarrow b^3 \vdots 27$. Mà $mn^5 \vdots 27 \Rightarrow 2019 \vdots 27$ (vô lý).

Vậy $a \not\vdots 3$. Tương tự $b \not\vdots 3$.

Vì $a \not\vdots 3 \Rightarrow a^3 \equiv \pm 1 \pmod 9 \Rightarrow m^5 n = a^3 - 2019$ $\equiv \pm 1 - 2019 \equiv 5$ hoặc 7 (mod 9).

Tương tự do $b \not\vdots 3$ nên $mn^5 \equiv 5$ hoặc 7 (mod 9).

Do đó $(mn)^6 = (m^5 n)(mn^5) \equiv 25, 35, 49 \equiv 7, 8, 4$ (mod 9). Điều này trái với nhận xét. Do đó không tồn tại cặp số nguyên (m, n) nào thoả mãn điều kiện đề bài. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Hoàng Lâm*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hưng Yên:** *Chu Ngọc Chiến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Trà Vinh:** *Đặng Thanh Đại*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành; **Thanh Hoá:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/497. *Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ và $S_1, S_2, \ldots, S_{410}$ là các tập con của S sao cho với mọi phần tử $i \in S$, tồn tại đúng 40 tập hợp chứa i. Chứng minh rằng tồn tại các chỉ số $j, k, l \in \{1, 2, \ldots, 410\}$ đôi một phân biệt sao cho $|S_j \cap S_k \cap S_l| \le 1$.*

Lời giải. *Phản chứng*: với mọi các chỉ số $1 \le j < k < l \le 410$: $|S_j \cap S_k \cap S_l| \ge 2$.

Ký hiệu $a = \sum\limits_{1 \le j < k < l \le 410} |S_j \cap S_k \cap S_l|$. Từ giả sử phản chứng ta có $a \ge 2.C_{410}^3$. Mặt khác từ giả thiết: mỗi phần tử của S thuộc đúng 40 tập hợp S_i, $1 \le i \le 410$, suy ra $a = 2019.C_{40}^3$. Do đó

$$a = 2019.C_{40}^3 \ge 2.C_{410}^3.$$

Điều này mâu thuẫn với

$$2019.C_{40}^3 = 19947720 < 2.C_{410}^3 = 22805840.$$

Vậy tồn tại các chỉ số $1 \le j < k < l \le 410$ sao cho

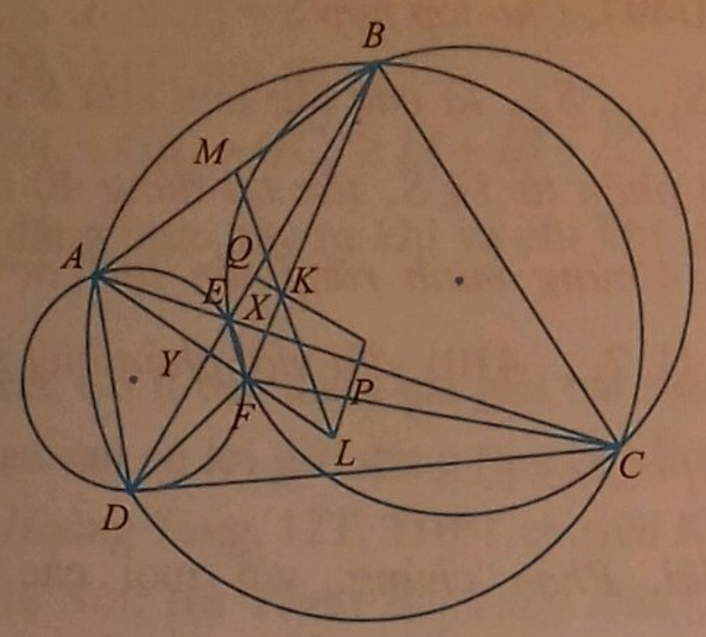
$$|S_j \cap S_k \cap S_l| \le 1.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán tính số phần tử của tập hợp, là phần "yếu" của học sinh Việt Nam trong các kỳ thi Olympic Toán Quốc tế. Trong số các bạn gửi lời giải tới Toà soạn có hai bạn cho lời giải gọn gàng như trên: **Hà Nội:** *Ngô Quỳnh Anh*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/497. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ với E là giao điểm của AC và BD. Hai đường tròn (EAD) và (EBC) cắt nhau tại F khác E. Trung trực của các đoạn thẳng BD, AC lần lượt cắt FB, FA theo thứ tự tại K, L. Chứng minh rằng KL chia đôi đoạn thẳng AB.*

Lời giải.



Gọi M, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BD; X, Y theo thứ tự là hình chiếu của F trên AC, BD. Dễ thấy $FXPLP; FYPKQ$ (1).

Dễ thấy

$$(AC, AF) \equiv (AE, AF) \equiv (DE, DF) \equiv (DB, DF) \pmod{\pi};$$

$$(CA, CF) \equiv (CE, CF) \equiv (BE, BF) \equiv (BD, BF) \pmod{\pi}.$$

Do đó các tam giác FAC, FDB đồng dạng (cùng hướng). (2)

Từ (1) và (2), theo định lí Thales, chú ý rằng P, Q thứ tự là trung điểm của AC, BD và X, Y theo thứ tự là hình chiếu của F trên AC, BD, suy ra

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KF}}.\frac{\overline{LF}}{\overline{LA}} = (-1).\frac{\overline{QB}}{\overline{QY}}.\frac{\overline{PX}}{\overline{PA}}$$

$$= (-1).\left(-\frac{\overline{QD}}{\overline{QY}}\right).\frac{\overline{QY}}{\overline{QD}} = 1.$$

Vậy theo định lí Menelaus, M, K, L thẳng hàng. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này dễ, có thể thay giả thiết *tứ giác ABCD nội tiếp* bởi giả thiết *bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.*

2) Khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên lời giải của nhiều bạn phụ thuộc hình vẽ.

3) Xin nêu tên các bạn có lời giải tương đối tốt: **Hưng Yên:** *Chu Ngọc Chiến*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Thừa Thiên - Huế:** *Phan Phước Minh*, 11T1, *Đỗ Trung Thái*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An, TP. Long An; **Trà Vinh:** *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành, TP. Trà Vinh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, *Huỳnh Tấn Phúc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Đồng Tháp.

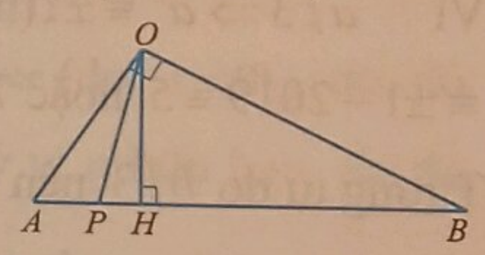
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/497. *Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số* $f = 80\text{Hz}$, *tốc độ truyền sóng là* $1{,}6\text{m/s}$. *Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O. Biết* $OA = 9\text{cm}$; $OB = 12\text{cm}$. *Xác định số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA.*

Lời giải. Gọi OH là đường cao của tam giác OAB. Do tam giác vuông tại O nên ta tính được $OH = 7{,}2\text{cm}$. Bước sóng: $\lambda = \frac{v}{f} = 2\text{cm}$; $OA = 9\text{cm} = 4{,}5\lambda$ nên dao động tại A ngược pha với tại O.

Xét điểm P bất kỳ trên cạnh AB. Để P dao động cùng pha với A (tức là ngược pha với O) thì:

$OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$ với k là số nguyên.



• Khi P thuộc AH: $OH < OP < OA$

$\Leftrightarrow 7{,}2 < OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda < 9$, không có giá trị nào của k thỏa mãn.

• Khi P thuộc BH: $OH < OP < OB$

$$\Leftrightarrow 7{,}2 < OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \le 12$$

suy ra $3{,}1 < k \le 5{,}5$, do đó có 2 điểm trên đoạn BH dao động cùng pha với A. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Ngọc Minh Nhật*, *Trần Huy Quý*, *Phan Nhật Tiến*, 12 Lý 2, *Lê Như Minh*, 12T2, THPT Quốc học Huế, TP. Huế.

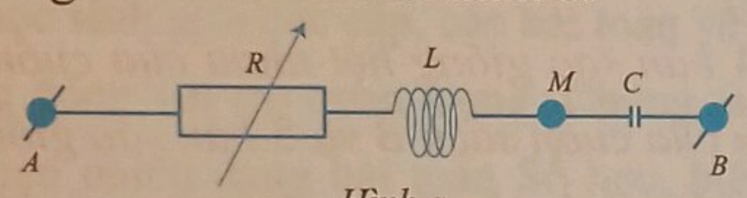
NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/497. *Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều* $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(V)$ *và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại* $\mathcal{P}_{max} = 45$ W. *Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là*

$$u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(V).$$

Xác định điện dung của tụ điện?

Lời giải. Sơ đồ mạch điện được mô tả như hình a. Ta có giản đồ vectơ như hình b.



Hình a

Khi công suất tiêu thụ trên AB cực đại thì:

$$R = |Z_L - Z_C|,$$

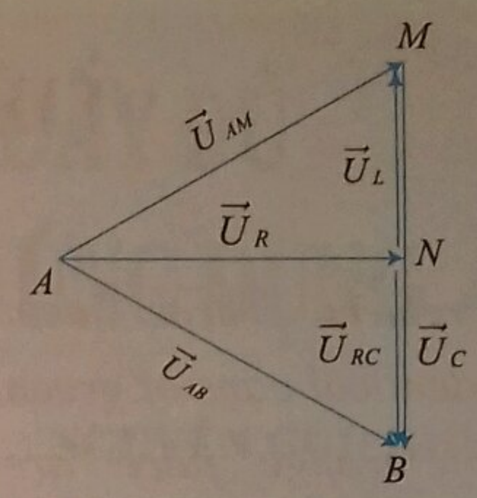
$$\widehat{NAB} = 45^0.$$

Theo đề bài

$$\widehat{MAB} = 105^0.$$

Suy ra $\widehat{MAN} = 60^0$.

$$U_R = U_{AM}\cos\widehat{MAN}$$
$$= 120\cos 60^0$$
$$= 60\,(V);$$



Hình b

$$R = \frac{U_R^2}{\mathcal{P}_{max}} = 80\ (\Omega).$$

$$U_L = U_{AM}.\sin\widehat{MAN} = 120\sin 60^0 = 60\sqrt{3}\ (V)$$

$$U_C = U_L + U_R = 60(\sqrt{3}+1).\ (V)$$

$$\frac{Z_C}{R} = \frac{U_C}{U_R} = \sqrt{3}+1.$$

Suy ra $Z_C = 218{,}6\ (\Omega)$ và $C = 15\ (\mu F)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn có tên sau đây đã có lời giải đúng cho đề ra kỳ này: **Thừa Thiên Huế:** *Hà Phương Hoàng Mai, Lê Như Minh, Trần Huy Quý*, 12 Lý 2, *Phan Nhật Tiến*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS...

(*Tiếp theo trang 18*)

TOWARDS MATHEMMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/501. Given positive numbers a, b, c, d such that $a \ge b \ge c \ge d$ and $abcd = 1$. Find the smallest constant k so that the following inequality holds

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{k}{d+1} \ge \frac{3+k}{2}.$$

Problem T10/501. Let n be an integer which is greater or equal to 6. Find the largest positive integer m so that among n arbitrary distinct positive integers which are less than or equal to m there always exist 4 numbers so that one of them is equal to the sum of the remains.

Problem T11/501. Find the smallest integer k so that there exist two sequences $\{a_i\}, \{b_i\}$ satisfying

a) $a_i, b_i \in \{1, 2018, 2018^2, 2018^3, ...\}, i = 1, 2, ..., k;$

b) $a_i \ne b_i, i = 1, 2, ..., k;$

c) $a_i \le a_{i+1}, b_i \le b_{i+1};$

d) $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i.$

Problem T12/501. Given a triangle ABC with $AB + AC = 2BC$. Let O be its circumcenter, and H its orthocenter. Let M_a be the midpoint of BC. Prove that the circles with diameters HM_a and AO are tangent to each other.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 42

Problem. *Three identical cans of cola, 2 identical cans of green tea and 2 identical cans of orange juice are arranged in a row. Calculate the number of arrangements if the 3 cans of cola are all next to each other and the 2 cans of green tea are not next to each other.*

Solution. Consider the model _(*CCC*) _ *O* _*O* _ , where *C* is for cola; *T* is for green tea; and *O* is for orange juice. We have 4 spaces _ to place 2 *T*'s. Hence the number of arrangements is C_4^2. Notice that the order of 2 *T*'s here is not important since they are identical.

But we have 3 such above models (*CCC*) can be left, center, or right. Therefore the number of required arrangements is $3 \times C_4^2 = 18$.

TỪ VỰNG

Identical : đồng nhất, giống hệt nhau

Arrangement : sự sắp xếp

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 39

Bài toán. *Một thư viện có 4 bản sao giống hệt nhau của cuốn sách A, 2 bản sao giống hệt nhau của cuốn sách B và 5 bản sao giống hệt nhau của cuốn sách C. 11 cuốn sách này được xếp trên một kệ sách ở thư viện. Tính số cách sắp xếp khác nhau sao cho tất cả cuốn sách A đặt cạnh nhau và không có cuốn sách B nào đặt cạnh nhau.*

Lời giải. Có nhiều cách để giải bài toán này. Chúng ta sẽ trình bày lời giải bằng phương pháp chèn. Khi đặt 5 cuốn sách *C* cạnh nhau, ta còn 6 vị trí để đặt (*AAAA*): _*C*_*C*_*C*_*C*_*C*_. Khi đặt (*AAAA*) chẳng hạn _*C*_*C*_(*AAAA*)_*C*_*C*_*C*_ chúng ta có 7 vị trí để đặt quyển sách *B*. Chọn một vị trí để đặt cuốn sách *B* đầu tiên vào, ví dụ _*C*_*C*_(*AAAA*)_*CBC*_*C*_, cuốn sách *B* thứ hai có 6 vị trí để đặt. Vậy số cách sắp xếp thoả mãn đề bài là $\frac{6.7.6}{2} = 126$. Ta cần phải chia cho 2 bởi vì khi hoán vị các cuốn sách *B*, ta không tạo ra cách sắp xếp mới nào. ❐

Lưu ý. Bài toán trên là một câu trong đề kiểm tra toán cấp độ A.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Nhật*, 12A1-K12, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10T1, *Nguyễn Trúc Quỳnh*, 10A2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thuỳ*, 10 Toán 1, *Lê Thị Thuý Nga*, *Đoàn Thị Kim Anh*, *Võ Thị Hải Yến*, 11 Toán 1, *Lê Như Minh*, *Trần Thị Mỹ Linh*, *Nguyễn Đình Thông*, *Đỗ Trung Thái*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Trương Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

HỆ THẶNG DƯ ĐẦY ĐỦ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

NGUYỄN CỬU HUY

(*Hiệu trưởng Trường THPT Thái Phiên, Đà Nẵng*)

1. Đặt vấn đề

Ngạn ngữ Pháp có câu: "*Toán học là vua của các khoa học nhưng Số học là Nữ hoàng*", điều này nói lên tầm quan trọng của Số học trong đời sống hàng ngày và trong khoa học. Số học giúp con người có cái nhìn tổng quát, sâu rộng hơn, suy luận chặt chẽ và tư duy sáng tạo. Trong các kì thi chọn học sinh giỏi các cấp, các bài toán về Số học thường đóng vai trò quan trọng. Chúng ta có thể làm quen nhiều dạng bài toán Số học, biết nhiều phương pháp giải, nhưng cũng có bài toán chỉ có một cách giải duy nhất. Mỗi khi gặp một bài toán mới chúng ta lại phải suy nghĩ tìm cách giải mới. Sự phong phú và đa dạng của các bài toán Số học luôn là sự hấp dẫn đối với mỗi giáo viên, học sinh giỏi yêu toán. Xuất phát từ những ý nghĩ đó tôi đã biên tập và hệ thống lại một số bài toán hay để viết thành bài viết "*Hệ thặng dư đầy đủ và một số bài toán áp dụng*". Trong bài viết này, do khuôn khổ có hạn nên chúng tôi chỉ trình bày với bạn đọc làm quen các định lí (không chứng minh) và việc áp dụng để giải một số bài toán Số học về tính chia hết thuộc một số dạng khác nhau.

2. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 2.1. Cho a là một số nguyên, m là số nguyên dương. Tập $\overline{a}=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\equiv a \pmod m\}$ gồm tất cả các số nguyên mà đồng dư modulo m với a được gọi là một lớp thặng dư, hoặc lớp đồng dư, modulo m.

Định lí 2.2. Với $m\in\mathbb{Z}^+$ và $a, b\in\mathbb{Z}$, ta có

(1) $\overline{a}=\overline{b}$ nếu và chỉ nếu $a\equiv b \pmod m$,

(2) $\overline{a}\cap\overline{b}=\varnothing$ hoặc $\overline{a}=\overline{b}$,

(3) $\bigcup_{x\in\mathbb{Z}}\overline{x}=\mathbb{Z}$,

(4) hai số nguyên x và y thuộc cùng lớp thặng dư khi và chỉ khi $x\equiv y \pmod m$ và

(5) m lớp thặng dư $\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{m-1}$ là rời nhau và hợp của chúng là tập tất cả các số nguyên.

Định nghĩa 2.3. Chọn một số x_i từ mỗi lớp thặng dư modulo m. Khi đó tập các số $x_1,x_2,\ldots,x_m$ được gọi là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m. Nói một cách khác, tập các số nguyên $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m nếu

(1) $x_i\not\equiv x_j \pmod m$ với bất kì $i\neq j$;

(2) với mỗi số nguyên x, có một $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ sao cho $x\equiv x_i \pmod m$

Chẳng hạn, tập $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ là một ví dụ của một hệ thặng dư đầy đủ modulo m. Hoặc $\{4,-7,14,7\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo 4.

Nhận xét. Cho m là một số nguyên dương.

(1) Cho $S=\{x_1,x_2,...,x_m\}\subseteq\mathbb{Z}$. Khi đó S là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m nếu và chỉ nếu $x_i\not\equiv x_j \pmod m$ với bất kì $i\neq j$.

(2) Nếu m là lẻ, thì $\left\{0,\pm1,\pm2,...,\pm\frac{m-1}{2}\right\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m.

(3) Nếu m là chẵn, thì

$$\left\{0,\pm1,\pm2,...,\pm\frac{m-2}{2},\pm\frac{m}{2}\right\}$$

là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m.

Bổ đề 2.4. Nếu x và y thuộc cùng lớp thặng dư modulo m, thì ƯCLN$(x,m)=$ ƯCLN(y,m).

Định nghĩa 2.5. Một lớp thặng dư $\overline{a}$ modulo m được nói là nguyên tố cùng nhau với m nếu ƯCLN$(a,m)=1$.

Định nghĩa 2.6. Cho m là một số nguyên dương. Một tập con S của một hệ thặng dư đầy đủ modulo m được gọi là một hệ thặng dư rút gọn modulo m nếu với $a\in\mathbb{Z}$ mà ƯCLN$(a,m)=1$, có tồn tại một số $r\in S$ sao cho $a\equiv r \pmod m$.

Nhận xét. Nếu $\{x_1,x_2,...,x_m\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m, thì $S=\{x_i : i\in\{1,...,m\}$ và ƯCLN$(x_i,m)=1\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo m.

Chẳng hạn $\{1,5,7,11\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo 12; hoặc $\{1,2,...,p-1\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo nguyên tố p; hay là $\{r\in\mathbb{Z}: 0\le r<m,\ \text{ƯCLN}(r,m)=1\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo m.

Định nghĩa 2.7. Cho m là một số nguyên dương. Định nghĩa phi - hàm Euler của m như sau:

$$\phi(m)=\left|\{r\in\mathbb{Z}: 0\le r<m \text{ và ƯCLN}(r,m)=1\}\right|.$$

Ta nhận thấy, $\phi(12)=4$ và để ý rằng $\phi(1)=1$ và $\phi(m)\le m-1$ với mọi $m\ge 2$. Rõ ràng là, nếu p là một số nguyên tố thì $\phi(p)=p-1$. Mặt khác, $\phi(m)=m-1$ nếu và chỉ nếu m là số nguyên tố.

Định lí 2.8. Nếu $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$, trong đó $p_i\ (i=\overline{1,r})$ là các số nguyên tố phân biệt thì

$$\phi(n)=(p_1-1)p_1^{k_1-1}.(p_2-1)p_2^{k_2-1}...(p_r-1)p_r^{k_r-1}.$$

Định lí 2.9. Nếu ƯCLN$(a,m)=1$ và $\{r_1,r_2,...,r_{\phi(m)}\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo m, thì $\{ar_1,ar_2,...,ar_{\phi(m)}\}$ cũng là một hệ thặng dư rút gọn modulo m.

3. Các thí dụ

Thí dụ 3.1 (MEMO 2015). *Cho $n\ge 2$ là một số nguyên. Tìm số các số nguyên dương m sao cho $m\le n$ và m^2+1 chia hết cho n.*

Lời giải. Kí hiệu $D(n)$ là số các số nguyên dương m sao cho $m\le n$ và m^2+1 chia hết cho n. Ta nhận thấy không có số dạng m^2+1 chia hết cho 4, vì vậy nếu n chia hết cho 4, ta có $D(n)=0$. Ta cũng biết rằng $D(n)=0$ nếu n chia hết cho số nào đó có dạng $4k+3$. Hơn nữa, $D(2)=1$.

1. Trước hết giả sử $n=p$ là một số nguyên tố lẻ có dạng $4k+1$. Ta chứng minh rằng $D(p)=2$.

Bổ đề. Nếu $p=4k+1$, trong đó k là một số nguyên dương và p là số nguyên tố, và nếu $S=\{x_1,...,x_p\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo p, thì tồn tại đúng hai phần tử $x\in S$ để $x^2\equiv -1 \pmod p$.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh phương trình đồng dư $x^2\equiv -1 \pmod p$ có ít nhất một nghiệm nếu $p\equiv 1 \pmod 4$. Theo định lí Wilson, ta có

$$\left(1\cdot 2\cdots\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left((p-1)(p-2)\cdots\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\right)$$

$$\equiv\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

như vậy, $x=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ là một nghiệm.

Hơn nữa, nếu $x_i \in S$ là một nghiệm thì $x_j = p - x_i \in S$ cũng là một nghiệm. Nếu $p = 2q+1$, thì có đúng một trong các số x_i, x_j nhỏ hơn hoặc bằng q. Ta có thể giả sử $x_i \le q$. Nếu phương trình đồng dư đã cho có nghiệm khác $x_k \in S$, bằng cách lí luận tương tự, ta giả sử $x_k \le q$. Do đó, $x_i^2 \equiv x_k^2 \equiv -1 \pmod{p}$ suy ra p chia hết $(x_k - x_i)(x_k + x_i)$, điều này không thể xảy ra vì $x_i, x_k \le q$. Bổ đề được chứng minh.

2. Tiếp theo giả sử $n = p^k$ là lũy thừa số nguyên tố với $p \equiv 1 \pmod 4$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $D(p^k) = 2$.

Trường hợp $k = 1$ là hiển nhiên. Giả sử $D(p^k) = 2$ với số nguyên dương k nào đó. Gọi i và j là hai số nguyên nhỏ hơn p^k sao cho i^2+1 và j^2+1 chia hết cho p^k.

Khi đó tất cả các số nhỏ hơn p^{k+1} mà thỏa mãn phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{p^k}$ là các số sau đây: $mp^k + i$, với $m = 0, \dots, p-1$ và $mp^k + j$, với $m = 0, \dots, p-1$.

Ta chứng minh có đúng một trong các số $\frac{(mp^k+i)^2+1}{p^k}$ chia hết cho p hay có đúng một trong các số $(mp^k+i)^2+1$ (với $m = 0, \dots, p-1$) chia hết cho p^{k+1}.

Để chứng minh điều này, giả sử ngược lại rằng có hai số như vậy, tức là $(m_1p^k+i)^2+1$ và $(m_2p^k+i)^2+1$. Ta có

$$\frac{(m_1p^k+i)^2+1}{p^k} - \frac{(m_2p^k+i)^2+1}{p^k}$$

$$= \frac{(m_1p^k+i-m_2p^k-i)(m_1p^k+i+m_2p^k+i)}{p^k}$$

$$= (m_1-m_2)\left[p^k(m_1+m_2)+2i\right]$$

chia hết cho p, điều này không thể xảy ra bởi vì $m_1 - m_2$ lẫn i không chia hết cho p.

Bằng cách lí luận như trên, ta kết luận rằng có đúng một trong số các số $(mp^k+j)^2+1$ (với $m = 0, \dots, p-1$) chia hết cho p^{k+1}. Do đó, $D(p^{k+1}) = 2$.

3. Tiếp theo giả sử $n = p^a q^b$, trong đó p và q là hai số nguyên tố phân biệt có dạng $4k+1$ với số nguyên dương k nào đó, thì $D(p^a q^b) = 4$ với mọi số nguyên dương a và b. Theo trên ta có $D(p^a) = 2$. Gọi i và j là hai số nguyên dương nhỏ hơn p^a sao cho cả hai số i^2+1 và j^2+1 đều chia hết cho p^a. Tất cả các số nhỏ hơn $p^a q^b$ mà thỏa mãn phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{p^a}$ là các số sau: $mp^a + i$ với $m = 0, \dots, q^b - 1$ và $mp^a + j$ với $m = 0, \dots, q^b - 1$. Vì $\{0, 1, 2, \dots, q^b - 1\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo q^b, điều này cũng đúng đối với $\{0, p^a, 2p^a, \dots, (q^b-1)p^a\}$ (bởi vì p^a và q^b là nguyên tố cùng nhau), do đó

$T=\{i, p^a+i, 2p^a+i, \ldots, (q^b-1)p^k+i\}$ cũng là một hệ thặng dư đầy đủ modulo q^b.

Từ bổ đề suy ra có đúng hai phần tử của tập T mà thỏa mãn phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{q^b}$.

Bằng lí luận giống như trên, có đúng hai phần tử của tập $\{j, p^a+j, 2p^a+j, \ldots, (q^b-1)p^a+j\}$ thỏa mãn phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{q^b}$.

Vậy, $D(p^a q^b)=4$.

Sử dụng phần quy nạp ở trên, ta kết luận được rằng $D(p^{\alpha_1}\cdots p^{\alpha_n})=2^n$ với các số nguyên tố lẻ phân biệt p_i, $i=1,2,\ldots,n$.

4. Cuối cùng, ta chứng tỏ rằng $D(p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})=D(2p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})$, nếu p_i, $i=1,2,\ldots,n$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt và tất cả đều đồng dư 1 modulo 4.

Đặt $a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$. Nếu $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2^n}$ là các số nguyên dương nhỏ hơn a mà thỏa mãn phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{a}$, thì tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn $2a$ để thỏa mãn phương trình trên có dạng: $\delta a + i_j$, với $j=1,2,3,\ldots,2^n$ và $\delta=0,1$.

Tuy nhiên, có đúng một trong số i_j^2+1 và $(a+i_j)^2+1$ là số chẵn, điều này dẫn đến $D(p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})=D(2p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})$. Như vậy, ta kết luận rằng

$$D(p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})=D(2p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n})=2^n,$$

với các số nguyên tố lẻ phân biệt $p_i, i=1,2,\ldots,n$.

Thí dụ 3.2 (SMO 2012). *Tìm tất cả các số tự nhiên n để tồn tại một hoán vị $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ của các số $(1,2,\ldots,n)$ sao cho các tập $\{p_i+i \mid 1\le i\le n\}$ và $\{p_i-i \mid 1\le i\le n\}$ tạo thành các tập thặng dư đầy đủ modulo n.*

Lời giải. Giả sử tồn tại một hoán vị như vậy. Vì $\{p_i+i \mid 1\le i\le n\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo n, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} k \equiv \sum_{i=1}^{n}(p_i+i) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} i \equiv 2\sum_{k=1}^{n} k \pmod{n},$$

khi đó $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$, suy ra 2 không chia hết n. Hơn nữa, ta lại có

$$2\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}\left((p_i+i)^2+(p_i-i)^2\right)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n}(2p_i^2+2i^2) \equiv 4\sum_{k=1}^{n} k^2 \pmod{n},$$

vì vậy $2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \equiv 0 \pmod{n}$, suy ra 3 không chia hết n. Do đó, ta phải có ƯCLN$(n,6)=1$. Mặt khác, nếu ƯCLN$(n,6)=1$ và $p_i \equiv 2i \pmod{n}$, $p_i \in \{1,2,\ldots,n\}$, thì $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ là hoán vị của $\{1,2,\ldots,n\}$ và thỏa mãn điều kiện, bởi vì

$$\{p_i+i \mid 1\le i\le n\} \equiv \{3i \mid 1\le i\le n\}$$

và $\{p_i-i \mid 1\le i\le n\} \equiv \{i \mid 1\le i\le n\} \pmod{n}$

là các hệ thặng dư đầy đủ modulo n.

Thí dụ 3.3 (SMO 2010). *Cho A là một tập vô hạn các số nguyên dương. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho với mỗi $a \in A$ thì $a^n + a^{n-1} + \cdots + a^1 + 1$ chia hết $a^{n!} + a^{(n-1)!} + \cdots + a^{1!} + 1$.*

Lời giải. Xét các đa thức $P(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+1$ và $Q(x)=x^{n!}+\cdots+x^{1!}+1$, giả sử $Q(x)=C(x)P(x)+R(x)$, trong đó C và R là các đa thức với hệ số nguyên với $\deg R < \deg P$. Điều kiện bài toán khẳng định rằng $P(a)$ chia hết

$Q(a)$ và do đó cũng chia hết $R(a)$ với vô hạn số a, nhưng với a đủ lớn ta có $|R(a)| < |P(a)|$, suy ra $R(a) = 0$, như vậy $R(x)$ có vô số nghiệm, nên $R(x) \equiv 0$ và $P(x)$ chia hết $Q(x)$.

Bổ đề. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}$. Đa thức $P(x)$ chia hết $Q(x) = x^{\alpha_n} + x^{\alpha_{n-1}} + \cdots + 1$ nếu và chỉ nếu $\{0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo $n+1$.

Chứng minh. Gọi r_i là thặng dư của α_i modulo $n+1$. Giả sử rằng $P(x)$ chia hết $Q(x)$. Vì $P(x)$ chia hết $x^{n+1} - 1$ nên chia hết $x^{\alpha_i} - x^{r_i}$, do đó nó cũng chia hết $Q_1(x) = x^{r_1} + \cdots + x^{r_n} + 1$. Do $\deg Q_1 \le \deg P$, suy ra $Q_1 = c \cdot P$ với hằng số c nào đó, và điều này chỉ có thể xảy ra nếu $c = 1$ và $\{r_1, ..., r_n\} = \{1, ..., n\}$. Ta kết luận từ bổ đề rằng các số n cần tìm là các số để $\{0, 1!, ..., n!\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo $n+1$.

Nếu $n > 3$ và $n+1$ là hợp số, thì $n+1$ chia hết $n!$, nên trong trường hợp này không thể xảy ra. Nếu $n+1 = p > 3$ là một số nguyên tố, thì theo định lí Wilson $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, vì vậy $(p-2)! \equiv 1 = 1 \pmod p$ cũng không thể xảy ra. Như vậy các khả năng còn lại là $n = 1$, $n = 2$ và các giá trị này thỏa mãn điều kiện đã cho.

Thí dụ 3.4 (APMO 2014). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mọi số nguyên k tồn tại một số nguyên a để $a^3 + a - k$ chia hết cho n.*

Lời giải. Bài toán đưa về việc tìm các số nguyên n sao cho tập $A = \{a^3 + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo n. Ta gọi tính chất này bởi kí hiệu (*). Dễ dàng nhận thấy $n = 1$ thỏa mãn (*) và $n = 2$ không thỏa mãn. Nếu $a \equiv b \pmod n$, thì $a^3 + a \equiv b^3 + b \pmod n$. Vì vậy n thỏa mãn (*) nếu và chỉ nếu không có $a, b \in \{0, ..., n-1\}$ với $a \ne b$ và $a^3 + a \equiv b^3 + b \pmod n$.

Trước hết, ta chứng minh rằng 3^j thỏa mãn (*) với mọi $j \ge 1$. Giả sử $a^3 + a \equiv b^3 + b \pmod{3^j}$ với $a \ne b$. Khi đó

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) \equiv 0 \pmod{3^j}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra theo modulo 3 rằng $a^2 + ab + b^2 + 1$ không chia hết cho 3. Để ý rằng nếu A không là một hệ thặng dư đầy đủ modulo số nguyên r, thì nó cũng không là một hệ thặng dư đầy đủ modulo bất kì bội của r. Khi đó việc còn lại cần chứng minh là với bất kì số nguyên tố $p > 3$ không thỏa mãn (*).

Nếu $p \equiv 1 \pmod 4$, tồn tại b sao cho $b^2 \equiv -1 \pmod p$. Khi đó ta lấy $a = 0$ để nhận được đồng dư $a^3 + a \equiv b^3 + b \pmod p$.

Bây giờ giả sử $p \equiv 3 \pmod 4$. Ta sẽ chứng minh có các số nguyên $a, b \not\equiv 0 \pmod p$ sao cho $a^2 + ab + b^2 \equiv -1 \pmod p$. Để ý rằng ta có thể giả sử $a \not\equiv b \pmod p$, vì ngược lại nếu $a \equiv b \pmod p$ thỏa mãn

$$a^2 + ab + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod p, \text{ thì}$$

$$(2a)^2 + (2a)(-a) + a^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

và $2a \equiv -a \pmod p$.

Gọi c là nghịch đảo của b modulo p (nghĩa là $bc \equiv 1 \pmod p$)), quan hệ là tương đương với $(ac)^2 + ac + 1 \equiv -c^2 \pmod p$. Để ý rằng $-c^2$ có thể lấy các giá trị của tất cả các thặng dư không bình phương modulo p. Nếu ta có thể tìm một số nguyên x sao cho $x^2 + x + 1$ là một thặng dư không bình phương modulo p, thì các giá trị của a

và c sẽ xác định một cách trực tiếp. Khi đó ta tập trung vào việc giải bài toán như sau.

Để ý rằng nếu $x, y \in \{0,...,p-1\} = B$, thì $x^2+x+1 \equiv y^2+y+1 \pmod p$ nếu và chỉ nếu p chia hết $x+y+1$. Ta kết luận rằng x^2+x+1 nhận $\frac{p+1}{2}$ các giá trị khác nhau thuộc B modulo p. Vì có $\frac{p-1}{2}$ các thặng dư không bình phương modulo p, nên có $\frac{p+1}{2}$ giá trị để x^2+x+1 phải bằng 0 đối với các thặng dư bình phương.

Gọi C là tập các thặng dư bình phương modulo p và 0, và cho $y \in C$. Giả sử $y \equiv z^2 \pmod p$ và đặt $z \equiv 2w+1 \pmod p$ (ta luôn có thể chọn w như vậy). Khi đó $y+3 \equiv 4(w^2+w+1) \pmod p$. Từ lí luận trên, ta biết rằng $4(w^2+w+1) \in C$. Điều này có nghĩa $y \in C$ suy ra $y+3 \in C$. Trừ khi $p=3$, quan hệ dẫn đến tất cả các phần tử của B đều thuộc C, mâu thuẫn. Kết luận này được chứng minh. Vậy các số nguyên dương n cần tìm có dạng $n=3^b$, trong đó b là số nguyên không âm nào đó.

Thí dụ 3.5 (USAMO 2006). *Cho p là một số nguyên tố và s là một số nguyên sao cho $0<s<p$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên m và n với $0<m<n<p$ và $\left\{\frac{sm}{p}\right\} < \left\{\frac{sn}{p}\right\} < \frac{s}{p}$ nếu và chỉ nếu s không là một ước của $p-1$. (Với x là số thực, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x, và $\{x\} = x-[x]$ kí hiệu là phần thập phân của x).*

Lời giải. Bài toán trên đưa về việc chứng minh mệnh đề phản đảo sau: Cho p là một số nguyên tố và s là một số nguyên sao cho $0<s<p$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương:

(a) s là một ước của $p-1$;

(b) nếu các số nguyên m và n sao cho $0<m<p$, $0<n<p$ và $\left\{\frac{sm}{p}\right\} < \left\{\frac{sn}{p}\right\} < \frac{s}{p}$, thì $0<n<m<p$.

Thật vậy, vì p là số nguyên tố và $0<s<p$, s nguyên tố cùng nhau với p và

$$s = \{s, 2s, ..., (p-1)s, ps\}$$

là một tập các lớp thặng dư đầy đủ modulo p. Đặc biệt

(1) có duy nhất một số nguyên d với $0<d<p$ sao cho $sd \equiv -1 \pmod p$; và

(2) với mọi k mà $0<k<p$, tồn tại duy nhất một cặp các số nguyên (m_k, a_k) với $0<m_k<p$ sao cho $m_k s + a_k p = k$.

Bây giờ ta xét các phương trình sau:

$$m_1 s + a_1 p = 1,\ m_2 s + a_2 p = 2,\ ...,\ m_s s + a_s p = s.$$

Khi đó $\left\{\frac{m_k s}{p}\right\} = \frac{k}{p}$ với $1 \le k \le s$.

Mệnh đề (b) đúng nếu và chỉ nếu $0<m_s<m_{s-1}<\cdots<m_1<p$. Với $1 \le k \le s-1$, ta có $m_k s - m_{k+1} s = (a_{k+1}-a_k)p - 1$ hay $(m_k - m_{k+1})s \equiv -1 \pmod p$. Vì $0<m_{k+1}<m_k<p$, theo (1), ta có $m_k - m_{k+1} = d$. Ta kết luận rằng (b) đúng nếu và chỉ nếu $m_s, m_{s-1}, ..., m_1$ lập thành một cấp số cộng với công sai $-d$. Rõ ràng $m_s = 1$, vì vậy $m_1 = 1+(s-1)d = jp-d$ với j nào đó. Khi đó $j=1$ bởi vì m_1 và d cả hai số đều dương và nhỏ hơn p, nên $sd = p-1$. Điều này chứng minh (a). Ngược lại, nếu (a) đúng, thì $sd = p-1$ và

$$m_k \equiv -dsm_k \equiv -dk \pmod p.$$

Khi đó $m_k = p-dk$ với $1 \le k \le s$. Như vậy $m_s, m_{s-1}, ..., m_1$ lập thành một cấp số cộng với công sai $-d$. Khi đó (b) đúng.

Thí dụ 3.6. *Cho n là số nguyên dương. Chứng tỏ rằng có một số nguyên dương k sao cho*

$$2k^2 + 2001k + 3 \equiv 0 \pmod{2^n}.$$

Lời giải. Bài toán đưa về việc chỉ cần chứng minh rằng $2k^2 + 2001k + 3,\ k = 0,1,\ldots,2^n - 1$ tạo thành một lớp thặng dư đầy đủ modulo 2^n. Giả sử có các số nguyên phân biệt $k_1, k_2, 0 \le k_1, k_2 \le 2^n - 1$ sao cho

$$2k_1^2 + 2001k_1 + 3 \equiv 2k_2^2 + 2001k_2 + 3 \pmod{2^n}$$

hay $(k_1 - k_2)(2k_1 + 2k_2 + 2001) \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Vì $2k_1 + 2k_2 + 2001$ là lẻ, nên ta phải có 2^n chia hết $k_1 - k_2$. Vì vậy, $k_1 \equiv k_2 \pmod{2^n}$. Mặt khác $0 \le k_1, k_2 \le 2^n - 1$, nên ta có $k_1 = k_2$. Do đó $2k^2 + 2001k + 3,\ k = 0,1,\ldots,2^n - 1$ tạo thành một lớp thặng dư đầy đủ modulo 2^n.

Thí dụ 3.7. *Chứng minh rằng $1^k, 2^k, \ldots, (p-1)^k$ tạo thành một hệ thặng dư rút gọn modulo p nếu và chỉ nếu* ƯCLN$(k, p-1) = 1$.

Lời giải. Ta nhận thấy có $p-1$ các phần tử cho trong bài toán, nên chỉ cần chứng minh các phần tử đó là khác nhau modulo p nếu và chỉ nếu ƯCLN$(k, p-1) = 1$. Giả sử r là căn nguyên thủy modulo p và giả sử $a, b \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ với $a \ne b$. Ta chứng tỏ a^k và b^k là khác nhau modulo p nếu và chỉ nếu ƯCLN$(k, p-1) = 1$. Đặt $a \equiv r^i, b \equiv r^j \pmod{p}$ với $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$. Ta có $a^k \equiv b^k \pmod{p}$ nếu và chỉ nếu $r^{ik} \equiv r^{jk} \pmod{p}$, điều này tương đương với $ik \equiv jk \pmod{p-1}$. Đồng dư này chỉ thỏa mãn nếu và chỉ nếu $p-1$ chia hết $(i-j)k$. Nếu ƯCLN$(k, p-1) = 1$, thì dẫn đến $p-1$ chia hết $i-j$, mâu thuẫn. Nếu ƯCLN$(k, p-1) = d > 1$, thì ta sẽ có $r^{\frac{p-1}{d}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ và $1^k \equiv \left(r^{\frac{p-1}{d}}\right)^k \pmod{p}$. Như vậy, trong trường hợp này ta không nhận được một hệ thặng dư rút gọn.

Thí dụ 3.8. *Cho p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \equiv 1 \pmod 4$. Tính biểu thức:* $S = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{\frac{k^2}{p}\right\}$ *(trong đó $\{x\} = x - [x]$, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).*

Lời giải. Trước hết ta để ý rằng $(-k)^2 \equiv (p-k)^2 \equiv k^2 \pmod{p}$. Cũng vậy, nếu $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, trong đó $1 \le x, y \le \frac{p-1}{2}$, thì $(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{p}$. Từ đây suy ra $x \equiv y \pmod{p}$ và dẫn đến $x = y$. Do $p \equiv 1 \pmod 4$ nên theo tiêu chuẩn Euler có $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, khi đó -1 là một thặng dư bình phương modulo p. Bởi vì $\left(\frac{-b}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ nên b là một thặng dư bình phương modulo p nếu và chỉ nếu $-b \equiv p - b$ là thặng dư bình phương modulo p. Do đó đối với modulo p, tập $\left\{1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$ là một tập có dạng $\left\{a_1, p-a_1, a_2, p-a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{4}}, p - a_{\frac{p-1}{4}}\right\}$ trong đó $1 \le a_i \le \frac{p-1}{2}$. Do $1 < a_i, p - a_i < p$, ta có $\left\{\frac{a_i}{p}\right\} + \left\{\frac{p-a_i}{p}\right\} = \frac{a_i + p - a_i}{p} = 1$. Như vậy tổng cần tìm là $S = \frac{p-1}{4}$.

Thí dụ 3.9. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng tỏ rằng* $\{2,4,6,...,2(p-1)\}$ *là một hệ thặng dư rút gọn modulo p. Sử dụng kết quả này để chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố lẻ thì*

$$2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

Lời giải. Giả sử $S=\{2,4,...,2(p-1)\}$. Để chứng tỏ S là một hệ thặng dư rút gọn modulo p, ta chỉ cần chỉ ra mỗi phần tử của S là nguyên tố cùng nhau với p và không có phần tử nào của S là đồng dư với bất kì phần tử khác modulo p. Vì $|S|=p-1$, từ đó sẽ suy ra có một hệ thặng dư rút gọn.

Xét $2a\in S$. Nếu ƯCLN$(2a,p)\neq 1$, thì p chia hết $2a$ và vì p là nguyên tố, nên suy ra p chia hết 2 hoặc p chia hết a. Do $p>2$ và $p>a$, vì $0<a\le p-1$, vậy ƯCLN$(2a,p)=1$.

Tiếp theo giả sử $2a\equiv 2b \pmod p$. Khi đó p chia hết $2a-2b=2(a-b)$. Vì p không chia hết 2, nên p phải chia hết $a-b$. Nhưng cả a và b đều thuộc tập $\{1,2,...,p-1\}$, nên $|a-b|<p$. Như vậy p chia hết $a-b$ kéo theo $a-b=0$, nên $a=b$ và vì vậy $2a=2b$. Điều này chứng tỏ rằng S là một hệ thặng dư rút gọn. Vì $\{1,2,...,p-1\}$ là một hệ thặng dư rút gọn modulo p, nên theo định lí Wilson và định lí Fermat ta có:

$$2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(p-1)\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1) \pmod p$$
$$\equiv (p-1)! \pmod p\equiv -1 \pmod p.$$

Như vậy,

$$-1\equiv\big(2\cdot 4\cdot 6\cdots(p-1)\big)\times$$
$$\times\big((p+1)\cdot(p+3)\cdots 2(p-1)\big) \pmod p,$$

hay

$$-1\equiv(2(2p-2))\cdot(4(2p-4))\cdot(6(2p-6))\cdots$$
$$.((p-1)(2p-(p-1))) \pmod p$$
$$\equiv(2(-2))\cdot(4(-4))\cdot(6(-6))\cdots$$
$$.(p-1)(-(p-1)) \pmod p.$$
$$\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(p-1)^2) \pmod p$$

Nhân cả hai vế đồng dư ở trên với $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, ta nhận được

$$2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(p-1)^2\equiv(-1)(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$
$$\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

4. Các bài toán dành cho bạn đọc

Bài 1. Cho $m,n\in\mathbb{N}$ sao cho ƯCLN$(m,n)=1$. Giả sử $R=\{r_i: 1\le i\le m\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m và $S=\{s_j: 1\le j\le n\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo n. Chứng minh rằng $T=nR+mS=\{nr_i+ms_j: 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo mn.

Bài 2. Cho n là một số nguyên lẻ lớn hơn 1 và $k_1,k_2,...,k_n$ là các số nguyên. Với mỗi một $n!$ các hoán vị $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ của $1,2,...,n$, đặt $S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i$. Chứng minh rằng có hai hoán vị b và c, $b\neq c$ sao cho $n!$ là một ước của $S(b)-S(c)$.

Bài 3. Cho $S_n=\{C_n^n,C_{2n}^n,...,C_{n^2}^n\}$ với $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

a) Tồn tại vô hạn hợp số các số tự nhiên n sao cho S_n không là một tập các thặng dư đầy đủ modulo n.

b) Tồn tại vô hạn hợp số các số tự nhiên n sao cho S_n là một tập các thặng dư đầy đủ modulo n.

Bài 4. Cho $p>2$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $r_1,...,r_p$ và $m_1,...,m_p$ là hai hệ thặng dư đầy đủ bất kì modulo p, thì tập $\{r_1m_1,...,r_pm_p\}$ không là một hệ thặng dư đầy đủ modulo p.

Bài 5. Cho $m>2$ là một số nguyên. Chứng minh rằng tổng của các phần tử của một hệ thặng dư rút gọn modulo m là đồng dư với 0 (mod m).

TỔNG QUÁT HOÁ BÀI TOÁN GIAO ĐIỂM CỦA MẶT PHẲNG VỚI CÁC ĐƯỜNG THẲNG CHỨA CẠNH BÊN CỦA HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

LÊ XUÂN VINH
(Tổ dân phố Phan Bội Châu 2, T Tr. Diên Khánh, Diên Khánh, Khánh Hoà)

1. Đặt vấn đề

Trong học tập và giảng dạy môn toán cũng như những môn học khác, việc tìm tòi những kết quả mới, tổng quát hóa các dạng toán luôn là điều cần thiết. Trong một số tài liệu toán ở bậc trung học phổ thông, chúng ta đã gặp bài bài toán sau:

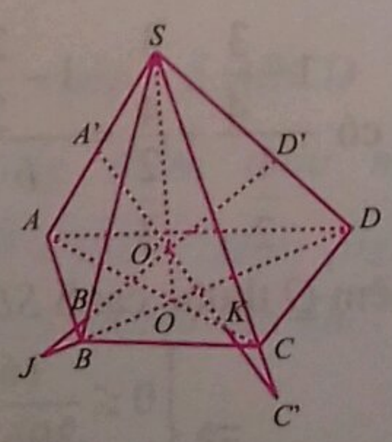
Bài toán gốc. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Khi đó ta có* $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Bài toán trên là một kết quả đẹp, tuy nhiên nó chỉ áp dụng cho trường hợp đáy là hình bình hành và các điểm A', B', C', D' thuộc cạnh bên. Liệu rằng chúng ta có thể mở rộng kết quả trên cho trường hợp đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi tùy ý và các giao điểm A', B', C', D' thuộc đường thẳng chứa các cạnh bên (A', B', C', D' không nhất thiết phải thuộc cạnh bên).

2. Bài toán mở rộng

Bài toán mở rộng. *Cho hình chóp $S.ABCD$. O là giao điểm của AC và BD và $\frac{AO}{AC}=t$, $\frac{BO}{BD}=s$. Mặt phẳng (α) cắt đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' (khác S). Đặt $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=a$, $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}=b$, $\frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}}=c$, $\frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}}=d$. Khi đó*

$$\frac{1-t}{a}+\frac{t}{c}=\frac{1-s}{b}+\frac{s}{d}.$$



Chứng minh. Ta có

$$SO=(SAC)\cap(SBD)$$

Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

$$\begin{cases} O'\in A'C'\subset(SAC) \\ O'\in B'D'\subset(SBD)\end{cases}$$

$$\Rightarrow O'\in(SAC)\cap(SBD)$$

$$\Rightarrow O'\in SO.$$

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔSAC, ta có

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}}=1\Rightarrow\frac{\overline{KC}}{\overline{KA}}=\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔSAO, ta có

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}}=1\Rightarrow\frac{\overline{KO}}{\overline{KA}}=\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}} \quad (2)$$

$$\begin{cases}\overline{KC}=\overline{KO}+\overline{OC}=\overline{KO}+(1-t)\overline{AC}\\ \overline{KA}=\overline{KO}+\overline{OA}=\overline{KO}-t.\overline{AC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t.\overline{KC}=t.\overline{KO}+t(1-t)\overline{AC}\\ (1-t)\overline{KA}=(1-t)\overline{KO}-t(1-t)\overline{AC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow t.\overline{KC}+(1-t)\overline{KA}=\overline{KO}\Rightarrow\frac{\overline{KC}}{\overline{KA}}=\frac{t-1}{t}+\frac{1}{t}.\frac{\overline{KO}}{\overline{KA}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) có: $\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}}=\frac{t-1}{t}+\frac{1}{t}.\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}}$

$$\Leftrightarrow\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}-\overline{SA'}}.\frac{\overline{SC}-\overline{SC'}}{\overline{SC'}}=\frac{t-1}{t}+\frac{1}{t}.\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}-\overline{SA'}}.\frac{\overline{SO}-\overline{SO'}}{\overline{SO'}}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{1-a}.\frac{1-c}{c}=\frac{t-1}{t}+\frac{1}{t}.\frac{a}{1-a}.\left(\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}-1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}=\frac{1-t}{a}+\frac{t}{c}. \quad (*)$$

Tương tự, áp dụng định lí Menelaus trong ΔSBD, ta có $\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{JB}}{\overline{JD}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'S}}=1\Rightarrow\frac{\overline{JD}}{\overline{JB}}=\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'S}}$ (4)

Áp dụng định lí Menelaus trong ΔSBO, ta có

$$\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{JB}}{\overline{JO}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}}=1\Rightarrow\frac{\overline{JO}}{\overline{JB}}=\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}} \quad (5)$$

$$\begin{cases}\overline{JD}=\overline{JO}+\overline{OD}=\overline{JO}+(1-s)\overline{BD}\\ \overline{JB}=\overline{JO}+\overline{OB}=\overline{JO}-s.\overline{BD}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s.\overline{JD}=s.\overline{JO}+s(1-s)\overline{BD}\\ (1-s)\overline{JB}=(1-s)\overline{JO}-s(1-s)\overline{BD}\end{cases}$$

$$\Rightarrow s.\overline{JD}+(1-s)\overline{JB}=\overline{JO}\Rightarrow\frac{\overline{JD}}{\overline{JB}}=\frac{s-1}{s}+\frac{1}{s}.\frac{\overline{JO}}{\overline{JB}}\quad(6)$$

Từ (4), (5), (6) ta có:

$$\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'S}}=\frac{s-1}{s}+\frac{1}{s}.\frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}}.\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'S}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}-\overline{SB'}}.\frac{\overline{SD}-\overline{SD'}}{\overline{SD'}}=\frac{s-1}{s}+\frac{1}{s}.\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}-\overline{SB'}}.\frac{\overline{SO}-\overline{SO'}}{\overline{SO'}}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{1-b}.\frac{1-d}{d}=\frac{s-1}{s}+\frac{1}{s}.\frac{b}{1-b}.\left(\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}-1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}=\frac{1-s}{b}+\frac{s}{d}.\qquad(**)$$

Từ (*) và (**) ta có: $\frac{1-t}{a}+\frac{t}{c}=\frac{1-s}{b}+\frac{s}{d}$.

3. Một số áp dụng

Bài toán 1.3.1 *Cho hình chóp S.ABCD. O là giao điểm của AC và BD,* $t=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{2}$, $s=\frac{BO}{BD}=\frac{2}{3}$. *$A',B',C'$ là các điểm lần lượt thỏa mãn* $a=\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=\frac{1}{3}$, $b=\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}=-\frac{1}{2}$, $\frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}}=\frac{4}{3}$. *Gọi D' là giao điểm của mặt phẳng $(A'B'C')$ với đường thẳng SD. Tính tỉ số* $d=\frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}}$.

Lời giải. Áp dụng công thức của bài toán mở rộng:

$$\frac{1-t}{a}+\frac{t}{c}=\frac{1-s}{b}+\frac{s}{d},$$

ta có: $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{2}{3}}{d}\Rightarrow d=\dfrac{16}{61}$.

Bài toán 1.3.2 *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) cắt cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại A',B',C',D' (khác S). Chứng minh rằng* $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Lời giải. Từ $ABCD$ là hình bình hành tâm O, suy ra

$$t=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{2},\ s=\frac{BO}{BD}=\frac{1}{2}.$$

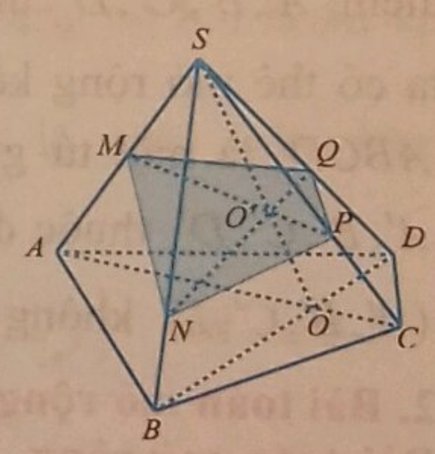
Ta có $a=\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=\frac{SA'}{SA}$, $b=\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}=\frac{SB'}{SB}$, $c=\frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}}=\frac{SC'}{SC}$, $d=\frac{\overline{SD'}}{\overline{SD}}=\frac{SD'}{SD}$. Áp dụng kết quả của bài toán mở rộng, ta có: $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{SA'}{SA}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{SC'}{SC}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{SB'}{SB}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{SD'}{SD}}$

hay $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Đây là kết quả của bài toán gốc đã được đề cập ở đầu bài viết.

Bài toán 1.3.3 *Cho hình chóp S.ABCD có* $S_{ABD}=3S_{BCD}$, $S_{ABC}=2S_{ACD}$. *M là trung điểm của SA, P là điểm trên cạnh SC thỏa mãn SP = 2PC, N là điểm di động trên cạnh SB (N không trùng S). Tìm điều kiện của* $\frac{\overline{SN}}{\overline{SB}}$ *để mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD.



$S_{ABD}=3S_{BCD}\Rightarrow t=\frac{AO}{AC}=\frac{3}{4}$;

$S_{ABC}=2S_{ACD}\Rightarrow s=\frac{BO}{BD}=\frac{2}{3}$.

$a=\frac{\overline{SM}}{\overline{SA}}=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\overline{SP}}{\overline{SC}}=\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}$, $b=\frac{\overline{SN}}{\overline{SB}}$ với $0<b\le 1$.

Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng chứa cạnh SD, $d=\frac{\overline{SQ}}{\overline{SD}}$.

Áp dụng kết quả bài toán mở rộng:

$$\frac{1-t}{a}+\frac{t}{c}=\frac{1-s}{b}+\frac{s}{d},$$

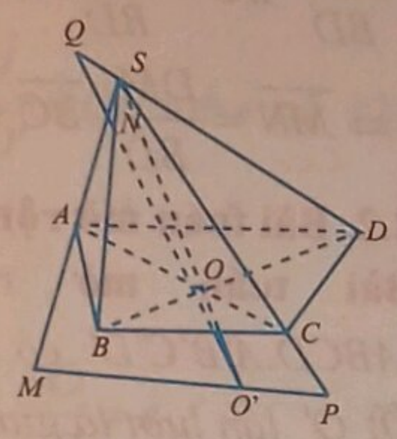
ta có $\dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{b}+\dfrac{\frac{2}{3}}{d}\Rightarrow d=\dfrac{16b}{39b-8}$.

Điểm Q thuộc cạnh SD khi $0\le d\le 1$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le\dfrac{16b}{39b-8}\le 1\\ 0<b\le 1\end{cases}\Rightarrow\frac{8}{23}\le b\le 1.$$

Vậy (MNP) cắt cạnh SD khi $\frac{8}{23} \le \frac{\overline{SN}}{\overline{SB}} \le 1$.

Bài toán 1.3.4 *Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. M, N, P là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{SC}$. Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng SD. Tính tỉ số $\frac{\overline{SQ}}{\overline{SD}}$.*



Lời giải. Từ $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow t = \frac{AO}{AC} = \frac{AD}{AD+BC} = \frac{1}{1+\frac{BC}{AD}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5};$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow s = \frac{BO}{BD} = \frac{BC}{AD+BC} = \frac{1}{1+\frac{AD}{BC}} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}.$$

$$\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SA} \Rightarrow a = \frac{\overline{SM}}{\overline{SA}} = 2;\ \overrightarrow{SN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{SB} \Rightarrow b = \frac{\overline{SN}}{\overline{SB}} = \frac{1}{5};$$

$$\overrightarrow{SP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{SC} \Rightarrow c = \frac{\overline{SP}}{\overline{SC}} = \frac{5}{4};\ d = \frac{\overline{SQ}}{\overline{SD}}.$$

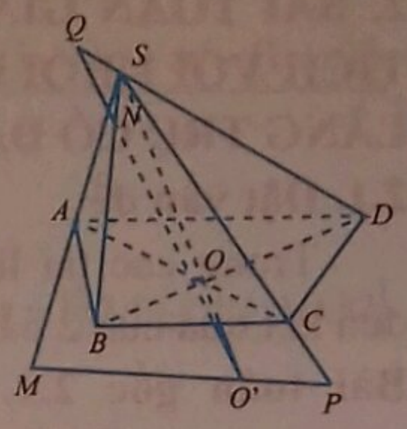
Áp dụng kết quả của bài toán mở rộng:

$$\frac{1-t}{a} + \frac{t}{c} = \frac{1-s}{b} + \frac{s}{d}$$

ta có: $\frac{1-\frac{3}{5}}{2} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{4}} = \frac{1-\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{d} \Rightarrow d = -\frac{5}{29}$.

Do đó $\frac{\overline{SQ}}{\overline{SD}} = -\frac{5}{29}$.

Bài toán 1.3.5 *Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$. M, N, P là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}$, $2\overrightarrow{SB} = 3\overrightarrow{SN}$, $5\overrightarrow{SP} = 3\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2 (V_1 là thể tích khối đa diện có đỉnh S). Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.*



Lời giải. Gọi

$$(MNP) \cap \{Q\}, d = \frac{\overline{SQ}}{\overline{SD}}.$$

Gọi $AC \cap BD = \{O\}$,

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow t = \frac{AO}{AC} = \frac{3}{4},\quad s = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{4}.$$

$$\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM},\ 2\overrightarrow{SB} = 3\overrightarrow{SN}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\overline{SM}}{\overline{SA}} = \frac{1}{2},\ b = \frac{\overline{SN}}{\overline{SB}} = \frac{2}{3},$$

$$5\overrightarrow{SP} = 3\overrightarrow{SC} \Rightarrow c = \frac{\overline{SP}}{\overline{SC}} = \frac{3}{5}.$$

Áp dụng kết quả bài toán mở rộng

$$\frac{1-t}{a} + \frac{t}{c} = \frac{1-s}{b} + \frac{s}{d} \text{ ta được } d = \frac{2}{5}.$$

Như vậy, mặt phẳng (MNP) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối $S.MNPQ$ và $MNPQABCD$, $V_1 = V_{S.MNPQ}$, $V_2 = V_{MNPQABCD}$. Đặt $V = V_{S.ABCD}$ ta có

$$\frac{V_{S.ABC}}{V} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{V}{4},$$

$$\frac{V_{S.ACD}}{V} = \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{AO}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{3V}{4}.$$

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{V_{S.ABC}}{5} = \frac{V}{20},$$

$$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SP}{SC}\cdot\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{25}$$

$$\Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{3V_{S.ACD}}{25} = \frac{9V}{100}.$$

$$V_1 = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{V}{20} + \frac{9V}{100} = \frac{7V}{50} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{50}{7}.$$

Ta có $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1 = \frac{50}{7} - 1 = \frac{43}{7}$.

2. BÀI TOÁN GIAO ĐIỂM, TÍNH TỈ LỆ THỂ TÍCH VỚI KHỐI ĐA DIỆN ĐÃ CHO LÀ HÌNH LĂNG TRỤ CÓ ĐÁY LÀ TỨ GIÁC LỒI

2.1. Đặt vấn đề

Trong các tài liệu tham khảo, chúng ta đã biết đến kết quả của 2 bài toán sau:

Bài toán gốc 2.1. *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC'. Khi đó*

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C}} = \frac{AM+BN+CP}{3AA'}.$$

Bài toán gốc 2.2. *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC', DD' đồng thời M, N, P, Q đồng phẳng. Khi đó*

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{1}{4}\left(\frac{AM+BN+CP+DQ}{AA'}\right)$$

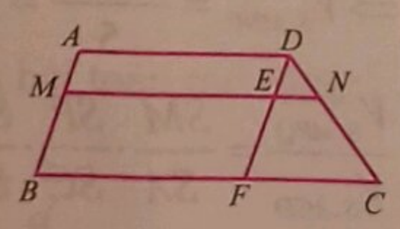
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AM+CP}{AA'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{BN+DQ}{AA'}\right).$$

Liệu rằng, chúng ta có thể thiết lập một kết quả tổng quát cho cả hai bài toán trên. Hơn nữa, trong trường hợp đáy của hình lăng trụ không phải là hình tam giác, hình bình hành mà là hình tứ giác lồi tùy ý thì có một kết quả tổng quát tương ứng không?

Bổ đề 1. *Cho hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AB, CD và thỏa mãn $MN \parallel AD$. Khi đó*

$$\overline{MN} = \frac{AM}{AB}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{AB}\cdot\overline{AD}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $BC \geq AD$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt MN, BC lần lượt tại E, F.



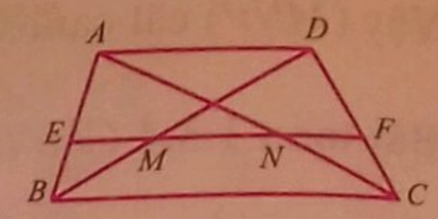
$$\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EN} = \overline{AD} + \frac{AM}{AB}\cdot\overline{FC}$$

$$= \overline{AD} + \frac{AM}{AB}\cdot(\overline{BC}-\overline{BF}) = \overline{AD} + \frac{AM}{AB}\cdot(\overline{BC}-\overline{AD})$$

$$= \left(1-\frac{AM}{AB}\right)\overline{AD} + \frac{AM}{AB}\cdot\overline{BC} = \frac{AM}{AB}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{AB}\cdot\overline{AD}.$$

Bổ đề 2. *Cho hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn BD, AC và thỏa mãn $MN \parallel AD$. Khi đó* $\overline{MN} = \frac{DM}{BD}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{DA}.$

Chứng minh. Kẻ đường thẳng qua M, N cắt AB, CD lần lượt tại E, F. Theo bổ đề 1, ta có



$$\overline{EF} = \frac{AE}{AB}\cdot\overline{BC} + \frac{BE}{AB}\cdot\overline{AD} = \frac{DM}{BD}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD}.$$

Mặt khác,

$$\overline{EF} = \overline{EM} + \overline{MN} + \overline{NF} = \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD} + \overline{MN} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD}.$$

Suy ra

$$\frac{DM}{BD}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD} = \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD} + \overline{MN} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{DM}{BD}\cdot\overline{BC} + \frac{BM}{BD}\cdot\overline{DA}.$$

2.2. Bài toán mở rộng

Bài toán mở rộng. *Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của AC và BD, $A'C'$ và $B'D'$. Đặt $t = \frac{AO}{AC}$, $s = \frac{BO}{BD}$. M, N, P, Q là bốn điểm đồng phẳng và lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC', DD'. Đặt $a = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}$, $b = \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}}$, $c = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}}$, $d = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}}$. Khi đó:*

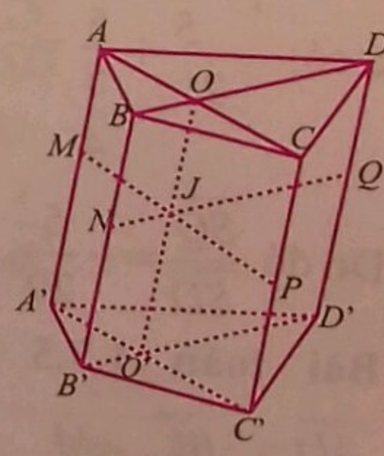
i) $(1-t)a + tc = (1-s)b + sd.$

ii) *Nếu* $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ *thì*

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right].$$

Chứng minh.

i) Gọi $MP \cap NQ = \{J\}$. Suy ra $J \in (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO'$. Do đó MP, NQ, OO' đồng quy tại J. Ta chứng minh



$$\frac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = (1-t)a + tc.$$

• Xét trường hợp $\overline{AM}.\overline{CP} > 0$.

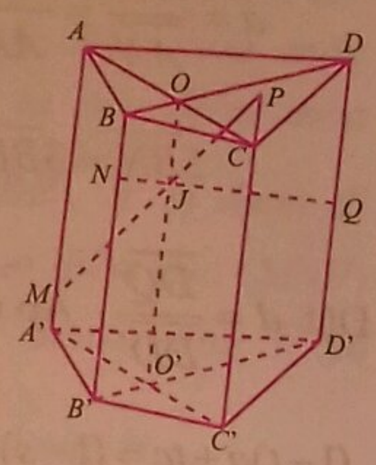
Áp dụng bổ đề 1 với hình thang $ACPM$, ta có

$$\overline{OJ} = \frac{AO}{AC}\cdot\overline{CP} + \frac{CO}{CA}\cdot\overline{AM}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = \frac{AO}{AC}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} + \frac{CO}{CA}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \frac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = (1-t)a + tc.$$

• Xét trường hợp $\overline{AM}.\overline{CP} < 0$.

Áp dụng bổ đề 2 với hình thang $APCM$, ta có



$$\overline{OJ} = \frac{AO}{AC}\cdot\overline{CP} + \frac{CO}{CA}\cdot\overline{AM}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = \frac{AO}{AC}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} + \frac{CO}{CA}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = (1-t)a + tc.$$

Do đó $\dfrac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = (1-t)a + tc$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có $\dfrac{\overline{OJ}}{\overline{OO'}} = (1-s)b + sd$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(1-t)a + tc = (1-s)b + sd$.

ii) Đặt $V = V_{ABCD.A'B'C'D'}$. Ta có

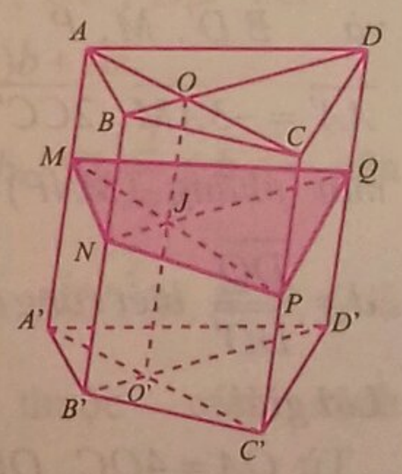
$$\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{V} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{BO}{BD} = s \quad (3)$$

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{AM+BN+CP}{3AA'}$$

$$= \frac{\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CP}}{3\overline{AA'}} = \frac{a+b+c}{3} \quad (4)$$

Từ (3), (4) thu được

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V} = \frac{(a+b+c)s}{3}.$$



Ta có

$$\frac{V_{ACD.A'C'D'}}{V} = \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{DO}{DB} = 1-s \quad (5)$$

$$\frac{V_{ACD.MPQ}}{V_{ACD.A'C'D'}} = \frac{AM+CP+DQ}{3AA'}$$

$$= \frac{\overline{AM}+\overline{CP}+\overline{DQ}}{3\overline{AA'}} = \frac{a+c+d}{3} \quad (6)$$

Từ (5), (6) ta có $\dfrac{V_{ACD.MPQ}}{V} = \dfrac{(a+c+d)(1-s)}{3}$.

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{V_{ABC.MNP}}{V} + \frac{V_{ACD.MPQ}}{V}$$

$$= \frac{(a+b+c)s}{3} + \frac{(a+c+d)(1-s)}{3} \quad (7)$$

Từ (i) ta có

$$(1-t)a + tc = (1-s)b + sd \Rightarrow d = \frac{(1-t)a + tc - (1-s)b}{s},$$

thế vào (7) ta được

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right].$$

2.3. Một số áp dụng

Bài toán 2.3.1 *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng:*

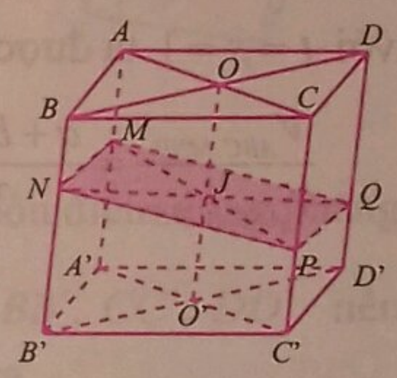
a) $AM + CP = BN + DQ$.

b) $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{AM+BN+CP+DQ}{4AA'}$

$$= \frac{AM+CP}{2AA'} = \frac{BN+DQ}{2AA'}.$$

Lời giải.

a) Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của AC và BD, $A'C'$ và $B'D'$. $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên



$$t = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2},\ s = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{2}.$$

M, N, P, Q thuộc các cạnh bên, nên

$$a = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \frac{AM}{AA'},\ b = \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}} = \frac{BN}{BB'},$$

$$c = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} = \frac{CP}{CC'},\ d = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}} = \frac{DQ}{DD'}.$$

Áp dụng kết quả bài toán mở rộng,

$$(1-t)a + tc = (1-s)b + sd$$

$$\Rightarrow a + c = b + d \Rightarrow AM + CP = BN + DQ. \quad (1)$$

b) Ta có

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right]$$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+c}{2} = \frac{AM+CP}{2AA'} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{AM+CP}{2AA'} = \frac{BN+DQ}{2AA'}$$

$$= \frac{AM + BN + CP + DQ}{4AA'}.$$

Đây là kết quả của bài toán gốc 2.2.

Bài toán 2.3.2 *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. M, N, P lần lượt là ba điểm trên cạnh AA', BB', CC'. Khi đó*

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{AM + BN + CP}{3AA'}.$$

Lời giải.

Ta có thể xem tam giác ABC là một tứ giác $ABCD$ với $D \equiv C$. Gọi $AC \cap BD = \{O\}$. Khi đó $O \equiv C \equiv D$ nên $t = \frac{AO}{AC} = 1, s = \frac{BO}{BD} = 1$.

Áp dụng kết quả bài toán mở rộng:

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right]$$

với $t = s = 1$ ta được:

$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}}\right)$$

$$= \frac{AM + BN + CP}{3AA'}.$$

Đây là kết quả của bài toán gốc 2.1.

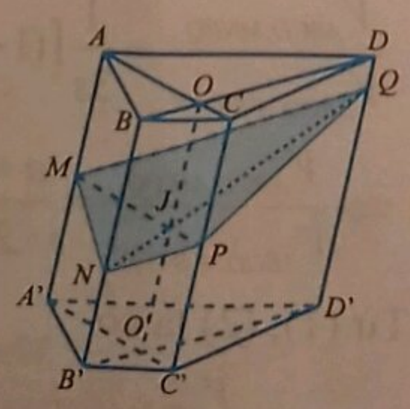
Bài toán 2.3.3 *Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$. M, P lần lượt là trung điểm của AA', CC'. N là điểm thỏa mãn $5\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BB'}$.*

a) Gọi Q là giao điểm của (MNP) với cạnh DD'. Tính tỉ số $\frac{DQ}{DD'}$.

b) Tính tỉ số $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}$.

Lời giải.

a) Gọi $AC \cap BD = \{O\}$.



Từ $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow t = \frac{AO}{AC} = \frac{AD}{AD + BC} = \frac{3BC}{3BC + BC} = \frac{3}{4}.$$

Tương tự, $s = \frac{BO}{BD} = \frac{BC}{BC + AD} = \frac{BC}{BC + 3BC} = \frac{1}{4}$.

M, P là trung điểm của AA', CC' nên

$$a = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2},\ c = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} = \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{2}.$$

$$5\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BB'} \Rightarrow b = \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}} = \frac{BN}{BB'} = \frac{3}{5}.$$

Đặt $d = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}}$. Áp dụng kết quả bài toán mở rộng:

$(1-t)a + tc = (1-s)b + sd$ với $t = \frac{3}{4}, s = \frac{1}{4}$, $a = c = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{3}{5}$ ta được $d = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{DQ}{DD'} = \frac{1}{5}$.

b) Áp dụng kết quả bài toán mở rộng:

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right]$$

với $t = \frac{3}{4}, s = \frac{1}{4}$, $a = c = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{3}{5}$ ta được

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{13}{30} \Rightarrow \frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDMNPQ} + V_{A'B'C'D'MNPQ}} = \frac{13}{30}$$

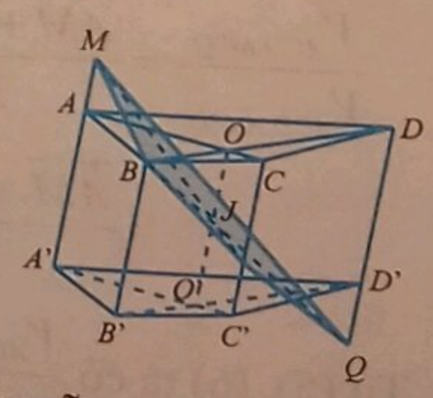
$$\Rightarrow \frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{A'B'C'D'MNPQ}} = \frac{13}{17}.$$

Bài toán 2.3.4. *Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là giao điểm của AC và $BD, A'C'$ và $B'D'$. M, P là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} = -3\overrightarrow{AM}$, $2\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{CP}$. Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng DD'. Tính $d = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}}$ biết rằng $OA = 4OC$, $OD = 2OB$.*

Lời giải.

Từ $OA = 4OC$, $OD = 2OB$

$$\Rightarrow t = \frac{AO}{AC} = \frac{4}{5},\ s = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}.$$



Bốn điểm đồng phẳng M, B, P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC', DD' thỏa mãn

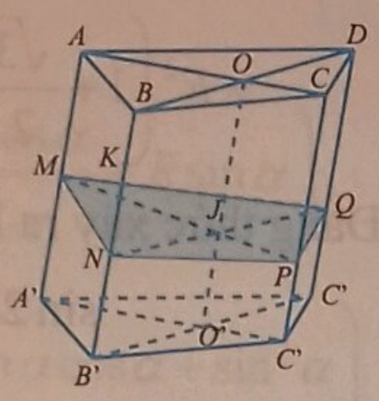
$$\overrightarrow{AA'} = -3\overrightarrow{AM},\ 2\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{CP}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = -\frac{1}{3}, c = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} = \frac{2}{3},\ b = \frac{\overline{BB}}{\overline{BB'}} = 0.$$

Áp dụng kết quả bài toán mở rộng, $(1-t)a + tc = (1-s)b + sd$ ta được $d = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}} = \frac{7}{5}$.

Bài toán 2.3.5 *Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có O là giao điểm của AC và BD thỏa mãn $AO = 2OC$, $BO = OD$. M, P, K là các điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PC'}$, $9\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BB'}$. N là điểm di động trên đoạn KB'. Gọi Q là giao điểm của (MNP) với đường thẳng DD'. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ không phụ thuộc vị trí của N.*

Lời giải.



Từ $AO = 2OC$, $BO = OD$

$$\Rightarrow t = \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3},\ s = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{2}.$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'},\ \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PC'},$$

$$9\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BB'}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA'}} = \frac{1}{2}, c = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} = \frac{2}{3},\ \frac{\overline{BK}}{\overline{BB'}} = \frac{2}{9}.$$

Vì N thuộc đoạn KB' nên

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BB'}} \le \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}} \le \frac{\overline{BB'}}{\overline{BB'}} \Rightarrow \frac{2}{9} \le b \le 1.$$

Đặt $d = \dfrac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}}$. M, N, P, Q là bốn điểm đồng phẳng thuộc các đường thẳng AA', BB', CC', DD' nên

$$(1-t)a + tc = (1-s)b + sd.$$

Suy ra $\dfrac{b}{2} + \dfrac{d}{2} = \dfrac{11}{18} \Rightarrow d = \dfrac{11}{9} - b$. Vì $\dfrac{2}{9} \le b \le 1$ nên $\dfrac{2}{9} \le d \le 1$. Do đó Q thuộc cạnh DD'. M, N, P, Q là bốn điểm đồng phẳng thuộc các cạnh AA', BB', CC', DD' nên

$$\frac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right]$$

$$= \frac{16}{27}.$$

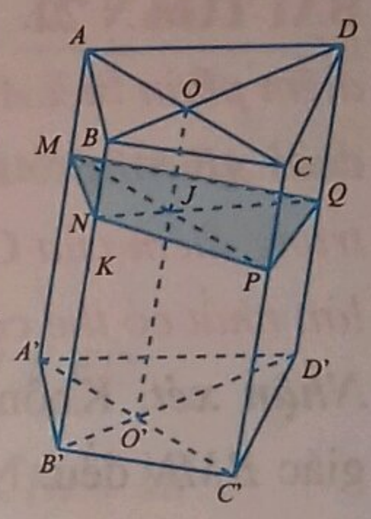
Do đó $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ không phụ thuộc vị trí của N.

Bài toán 2.3.6 *Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là giao điểm của AC với BD, $A'C'$ với $B'D'$ thỏa mãn $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BO}{BD} = \dfrac{1}{3}$. M, P, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{PC'} = 2\overrightarrow{CP}$, $5\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KB'}$. N là điểm di động trên đoạn BK. Gọi Q là giao điểm của (MNP) với DD'.*

a) *Xác định vị trí của N để $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ đạt giá trị lớn nhất.*

b) *Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}$ khi N di chuyển trên BK.*

Lời giải. a) Ta có



$$t = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2},\ s = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}.$$

$$\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{PC'} = 2\overrightarrow{CP},$$

$$5\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KB'} \Rightarrow a = c = \frac{1}{3},\ \frac{\overline{BK}}{\overline{BB'}} = \frac{3}{8}.$$

N thuộc đoạn BK nên

$$\frac{\overline{BB}}{\overline{BB'}} \le \frac{\overline{BN}}{\overline{BB'}} \le \frac{\overline{BK}}{\overline{BB'}} \Rightarrow 0 \le b \le \frac{3}{8}.$$

Đặt $d = \dfrac{\overline{DQ}}{\overline{DD'}}$. M, N, P, Q là bốn điểm đồng phẳng thuộc các đường thẳng AA', BB', CC', DD' nên $(1-t)a + tc = (1-s)b + sd$. Suy ra

$$2b + d = 1 \Rightarrow d = 1 - 2b.$$

Vì $0 \le b \le \dfrac{3}{8}$ nên $\dfrac{1}{4} \le d \le 1$. Do đó Q thuộc cạnh DD'. M, N, P, Q là bốn điểm đồng phẳng thuộc các cạnh AA', BB', CC', DD' nên

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3s}\left[(1-t+ts)a + (2s-1)b + (s+t-ts)c\right]$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{b}{3} \text{ với } 0 \le b \le \frac{3}{8}.$$

Từ đó $\dfrac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = 0$, tức là $N \equiv B$.

b) $\dfrac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{b}{3}$ với $0 \le b \le \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = \dfrac{3}{8}$.

Khi đó $\min\left(\dfrac{V_{ABCDMNPQ}}{V_{ABCDA'B'C'D'}}\right) = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{23}{72}$.

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 22. *Trên đường tròn (O, R) cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự đó, sao cho $AB = BC = DE = R$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AE. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của chu vi tam giác BMN.*

Nhận xét. Không khó khăn lắm nhận ra tam giác *BMN* đều. Như vậy mấu chốt của bài toán là xác định giá trị lớn nhất của một cạnh của tam giác *BMN*.

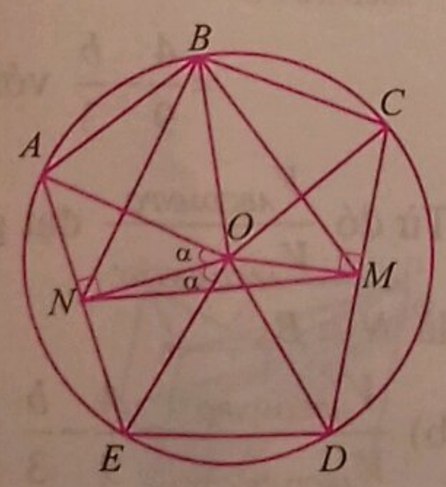
***Định hướng* 1.** Đặt góc $\widehat{AON} = \alpha$, $0 < \alpha < 90^0$. Tam giác *OBN* có $OB = R$,

$$\widehat{BON} = \widehat{AON} + \widehat{AOB} = \alpha + 60^0,$$

$$ON = OA.\cos\alpha = R.\cos\alpha.$$

Ta có $BN^2 = R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)$. Từ đó có được lời giải của bài toán.

***Cách* 1.** Theo giả thiết ta có các tam giác *OAB*, *OBC*, *ODE* đều nên $\widehat{AOE} + \widehat{DOC} = 180^0$. Mà $2\widehat{DOC} + \widehat{DOC} = 180^0$,



Nên $\widehat{AOE} = 2\widehat{DOC}$

$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{MCO}$.

Từ đó $\Delta NOA = \Delta MCO$ (c.h – g.n)

$\Rightarrow ON = CM \Rightarrow \Delta ONB = \Delta CMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow BN = BM$; $\widehat{OBN} = CBM$

mà $\widehat{OBC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{NBM} = 60^0$.

Vậy tam giác *MBN* đều. Áp dụng định lý côsin cho tam giác *OBN* có

$$BN^2 = OB^2 + ON^2 - 2OB.ON.\cos\widehat{BON},$$

nên

$$\begin{aligned} BN^2 &= R^2 + R^2\cos^2\alpha - 2R^2\cos\alpha.\cos(\alpha + 60^0) \\ &= R^2[1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha(\cos\alpha.\cos 60^0 \\ &\qquad - \sin\alpha\sin 60^0)] \\ &= R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right) \le R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

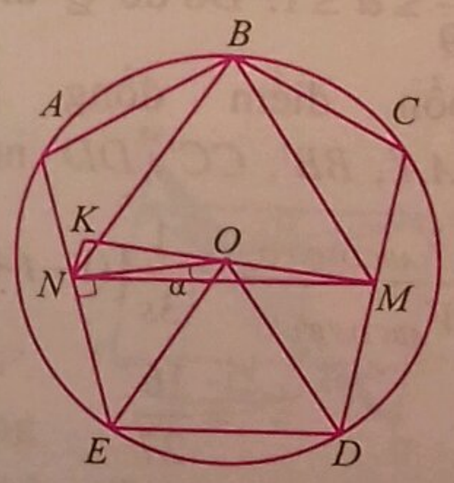
$$\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Vậy *BN* lớn nhất bằng $R\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{R(1+\sqrt{3})}{2}$ đạt được khi $\alpha = 45^0$. Chu vi lớn nhất có thể có của tam giác *BMN* là $p = \frac{3R(1+\sqrt{3})}{2}$.

Chú thích. Bài toán này là bài toán số 4 trong kỳ thi OLYMPIC 30 tháng 4 năm 2001, toán lớp 10 và lời giải trên là đáp án của kỳ thi.

***Định hướng* 2.** Đặt $\widehat{EON} = \alpha$, tam giác *OMN* có $\widehat{MON} = 150^0$, $ON = R\cos\alpha, OM = R\sin\alpha$. Từ $MN^2 = R^2(1 + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha)$, suy ra lời giải của bài toán.

***Cách* 2.** Ta có tam giác *MBN* đều (xem cách 1).



Đặt

$\widehat{EON} = \alpha$, $0^0 < \alpha < 90^0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{MON} &= \widehat{EON} + \widehat{DOM} + \widehat{DOE} \\ &= 90^0 + 60^0 = 150^0 \end{aligned}$$

Kẻ *NK* vuông góc với *OM* tại *K*, ta có $\widehat{NOK} = 180^0 - 150^0 = 30^0$. Suy ra

$$NK = \frac{1}{2}ON = \frac{R\cos\alpha}{2},$$

$$OK = ON\cos\widehat{NOK} = \frac{R\sqrt{3}\cos\alpha}{2}.$$

$\widehat{AON} + \widehat{COM} = 90^0 \Rightarrow \cos\widehat{COM} = \sin\widehat{AON}.$

Từ đó $KM = OK + OM = \dfrac{\sqrt{3}R\cos\alpha}{2} + R\sin\alpha.$

Tam giác KMN vuông tại K nên

$MN^2 = NK^2 + KM^2$ (định lí Pythagore)

Do đó

$$MN^2 = \left(\frac{R\cos\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R\cos\alpha}{2} + R\sin\alpha\right)^2$$

$$= R^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{4} + \frac{3\cos^2\alpha}{4} + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\right)$$

$$= R^2\left(1 + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$\le R^2\left(1 + \sqrt{3}\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}\right) = R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Suy ra $MN \le R\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}.$

Vậy MN lớn nhất bằng $\dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}$ đạt được khi

$$\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Chu vi lớn nhất có thể có của tam giác BMN là

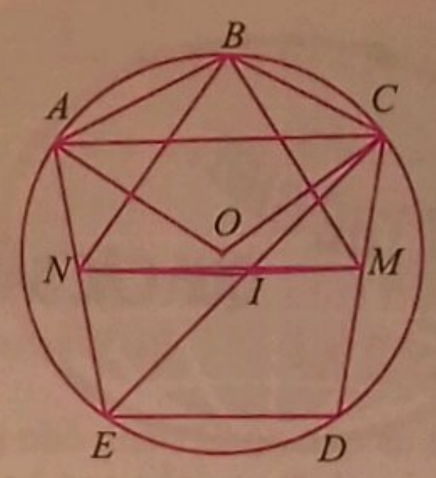
$$p = \frac{3R(1+\sqrt{3})}{2}.$$

Định hướng 3. Dễ thấy rằng $AC = R\sqrt{3}$. Tứ giác $ACDE$ có M, N lần lượt là trung điểm của CD, AE nên $MN \le \dfrac{ED + AC}{2}$ tức là

$$MN \le \frac{R(1+\sqrt{3})}{2}.$$

(Bài toán cơ bản, quen thuộc của hình học lớp 8). Chúng ta có được lời giải ngắn ngọn của bài toán

Cách 3.



Dễ chứng minh được $AC = R\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của CE. Ta có NI là đường trung bình của tam giác ACE nên $NI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ và $NI \parallel AC$. Tương tự MI là đường trung bình của tam giác CED nên

$$MI = \frac{ED}{2} = \frac{R}{2} \text{ và } MI \parallel ED.$$

Xét ba điểm I, M, N ta có $MN \le NI + MI$.

Do đó $MN \le \dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}$ ta có $p \le \dfrac{3R(1+\sqrt{3})}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I nằm giữa M, $N \Rightarrow MN \parallel AC \parallel ED$.

Vậy chu vi lớn nhất có thể có của tam giác BMN là $p = \dfrac{3R(1+\sqrt{3})}{2}.$

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)

Nhận xét. Ngoài ba cách giải của bạn *Nguyễn Đức Tấn*, Toà soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải nữa tương tự Cách 1 và Cách 2 ở trên của bạn *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh **Quảng Ngãi.**

LÊ MAI (*Hà Nội*)

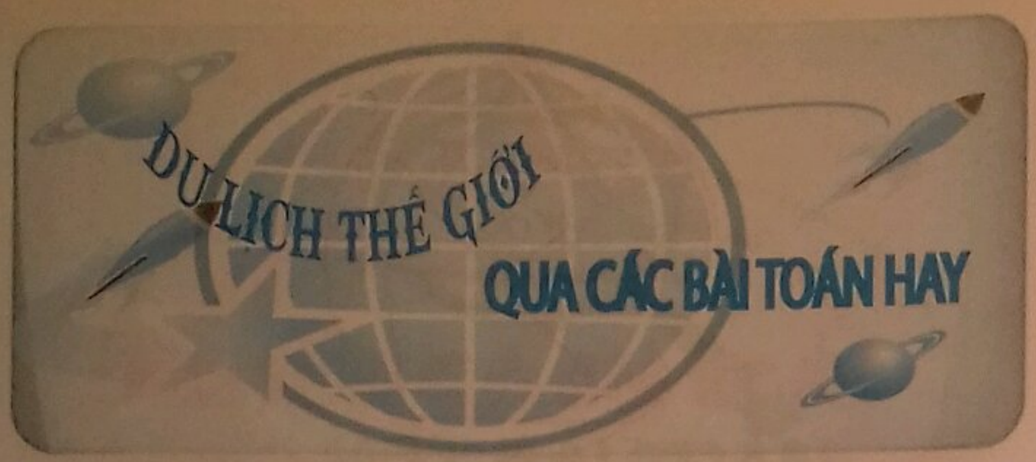
Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 24 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2019.

BÀI TOÁN 24. *Giải phương trình*

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

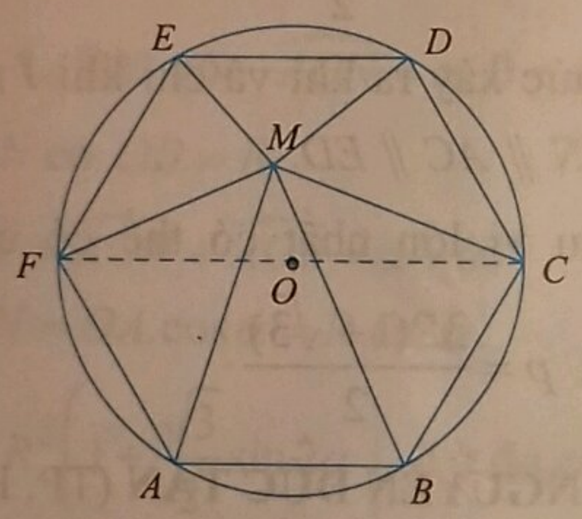
(*GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định*)



Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 497, T11.2018.

Bài 30 (***Thi vô địch Moscow 1974***). *Cho lục giác đều ABCDEF có cạnh bằng 1. Từ một điểm M nằm trong lục giác vẽ các đoạn thẳng tới các đỉnh lục giác tạo ra 6 tam giác. Chứng minh rằng với mọi điểm M thì 6 tam giác ấy luôn có 2 tam giác có chu vi lớn hơn hoặc bằng 3.*

Lời giải.



Ta có lục giác đều cạnh bằng 1 nội tiếp trong đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi tâm của đường tròn này là O, xét điểm M bất kỳ thuộc miền trong của lục giác $ABCDEF$.

• *Trường hợp* 1: M trùng với tâm O.

Ta có ngay ΔOAB và ΔOBC là hai tam giác có chu vi bằng 3.

• *Trường hợp* 2: M không trùng với O, không mất tính tổng quát ta giả sử O nằm phía trong hoặc trên biên ΔMAB.

Ta có: $\widehat{MAB} \geq 60^0$ và $\widehat{MBA} \geq 60^0$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} \leq 60^0 \Rightarrow \begin{cases} MA \geq AB = 1 \\ MB \geq AB = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ chu vi $\Delta MAB = MA + MB + AB \geq 3$.

Xét ΔMFC có: $MF + MC \geq FC = 2 \Rightarrow$ trong hai đoạn thẳng MF và MC sẽ có một đoạn lớn hơn hoặc bằng 1, giả sử $MC \geq 1 \Rightarrow$ chu vi ΔMBC là $MC + MB + BC \geq 1 + AB + 1 = 3 \Rightarrow \Delta MAB$ và ΔMBC có chu vi lớn hơn hoặc bằng 3. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán không khó, lời giải chỉ sử dụng kiến thức cơ bản ở THCS và bất đẳng thức tam giác. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

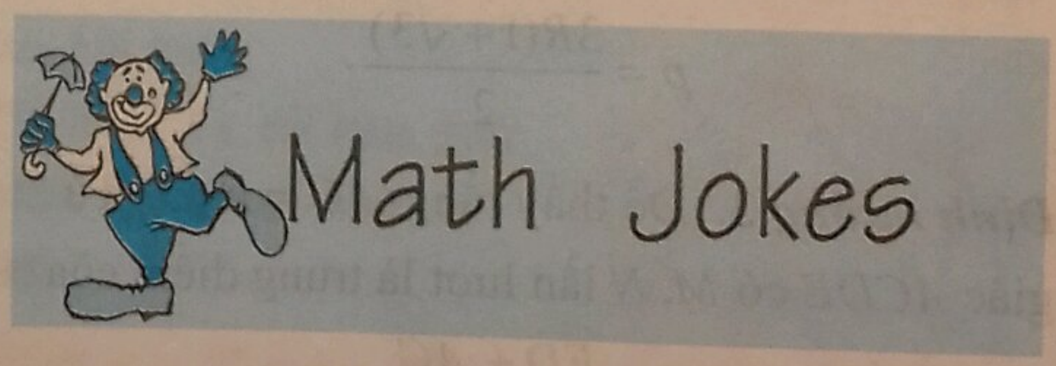
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.4.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 32. *Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của biểu thức* $A = \left|2^m - 181^n\right|$ *với m và n là các số nguyên dương.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

****



You might be a mathematician if...

You are fascinated by equations.

You know by heart the first fifty digits of π.

You have tried to prove Fermat's Last Theorem.

You know ten ways to prove the Pythagorean Theorem.

Your telephone number is the sum of two prime numbers.

****

GIẢI ĐÁP: ĐƯỢC ĐIỂM 10 !

(*Đề đăng trên TH&TT số 497, tháng 11 năm 2019*)

Phân tích. Bạn *Mỹ Linh* đã phạm hai sai lầm là: Thứ nhất, khi đặt $t=\frac{x}{y}, t\in\mathbb{R}$ là chưa đúng mà điều kiện của t là $t<-\sqrt{3}$ hoặc $t>\sqrt{3}$. Thứ hai, chưa kiểm tra có x, y để $P=-6$, $P=3$ hay không mà đã kết luận.

Lời giải đúng. Với $x^2-3y^2=1$, ta có

$$P=\frac{3y^2+12xy+x^2+1}{2xy+2x^2-1}=\frac{3y^2+12xy+x^2+x^2-3y^2}{2xy+2x^2-(x^2-3y^2)}$$

$$=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}.$$ Với $y=0$, ta có $P=2$.

Với $y\neq 0$ thì $P=\frac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+12\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}+3}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, do $x^2-3y^2=1\Leftrightarrow x^2=3y^2+1>3y^2$

$\Rightarrow t^2>3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-\sqrt{3}\\ t>\sqrt{3}\end{array}\right.$. (Ta có thể thế $x=ty$ vào PT $x^2-3y^2=1$, ta tìm điều kiện của t để PT tồn tại nghiệm $y\neq 0$, đó là điều kiện của t).

Khi đó $P=\frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$ trên $\mathbb{R}\setminus\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Ta có $f'(t)=\frac{-8t^2+12t+36}{(t^2+2t+3)^2}$,

$f'(t)=0\Leftrightarrow -8t^2+12t+36=0\Leftrightarrow t=\frac{-3}{2}, t=3.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\frac{3}{2}$		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		-	|		0	+	|		0	-	
$f(t)$	2	↘	$\frac{-3-5\sqrt{3}}{2}$	↘	-6	↗	$\frac{-3+5\sqrt{3}}{2}$	↗	3	↘	2

Ta thấy: $-\frac{3+5\sqrt{3}}{2}<f(t)\leq 3\ \forall t\in\mathbb{R}\setminus\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

$\Rightarrow \max f(t)=f(3)=3$ và $f(t)$ không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\setminus\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Mà $P=f(t)\Rightarrow \max P=3$ khi $x=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}, y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ và P không có giá trị nhỏ nhất. Chọn đáp án C.

Nhận xét. Một số bạn vẫn xác định sai điều kiện của biến t nên dẫn đến đáp số không đúng. Sau đây là các bạn phát hiện đúng sai lầm và có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Toán 2, *Phạm Bá Hoàng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bình Định:** *Võ Thị Ánh Thu*, 12A1, THPT số 1 Phù Mỹ, huyện Phù Mỹ.

KIHIVI

KHI NÀO DIỆN TÍCH LỚN NHẤT ?

Trong giờ học Toán, Thầy giáo cho học sinh làm bài toán

Bài toán. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $I(1;3)$, $M(2;5)$, $A(2;2)$. Gọi (C) là đường tròn tâm I bán kính IM. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt (C) tại P, Q sao cho ΔIPQ có diện tích lớn nhất.*

Sau một lúc suy nghĩ, bạn *Phong* xung phong lên bảng làm, lời giải của bạn *Phong* như sau:

Ta có: $R=IM=\sqrt{5}>IA=\sqrt{2}$. Diện tích ΔIPQ là

$$S=\frac{1}{2}IP.IQ\sin\widehat{PIQ}=\frac{1}{2}R.R.\sin\widehat{PIQ}=\frac{5}{2}\sin\widehat{PIQ}\leq\frac{5}{2}.$$

$S=\frac{5}{2}$ khi $\sin\widehat{PIQ}=1$ hay khi $IP\perp IQ$, khi đó ΔPIQ vuông cân tại I. Gọi H là trung điểm của PQ thì

$IH=d(I,\Delta)=R\sin 45^0=\sqrt{\frac{5}{2}}$. Vậy đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Gọi phương trình của Δ là $a(x-2)+b(y-2)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$.

Ta có: $d(I,\Delta)=\frac{|a(1-2)+b(3-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Leftrightarrow 2(a-b)^2=5(a^2+b^2)\Leftrightarrow 3a^2+4ab+3b^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2(a+b)^2=0$: PT này vô nghiệm. Vậy không có đường thẳng nào Δ nào thỏa mãn bài toán.

Theo bạn, bạn Phong làm có đúng không, nếu không lời giải của bạn thế nào?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 501 (3.2019)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Tam Sơn – Khai thác và phát triển bài toán đại số THCS.

3 *Phan Đình Ánh* – Khai thác một bài toán hình học.

5 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2017 - 2018.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2018 - 2019.

8 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 3.

12 Thử sức trước kì thi 2019 - Đề số 4.

17 Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/501, ..., T12/501, L1/501, L2/501.

19 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

28 Tiếng Anh qua các bài toán - *Bài số* 41.

Bài dịch số 39 - Tiếng Anh qua các bài toán.

29 Phương pháp giải toán

Nguyễn Cửu Huy – Hệ thặng dư đầy đủ và một số bài toán ứng dụng.

37 Bạn đọc tìm tòi

Lê Xuân Vinh – Tổng quát hoá bài toán giao điểm của mặt phẳng với các đường thẳng chứa cạnh bên của hình chóp tứ giác.

44 Nhiều cách giải cho một bài toán

46 Du lịch thế giới qua các bài toán hay

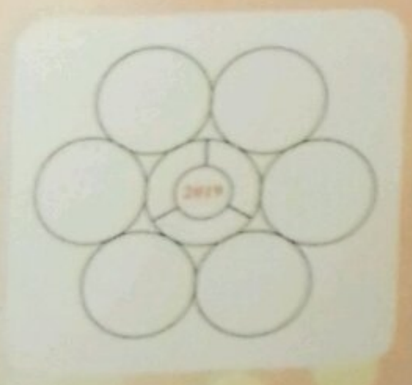
47 Sai lầm ở đâu?

Nguyễn Văn Xá - Khi nào diện tích lớn nhất!

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T1.2019

CHÀO NĂM MỚI 2019



Chào đón năm mới 2019, bạn Kỳ đố bạn Hợi điền 6 số tự nhiên phân biệt nhỏ hơn 340 vào sáu vòng tròn phía ngoài và 3 số tự nhiên vào ba phần của hình vành khăn của một hình hoa (hình vẽ) sao cho chúng có các tính chất sau đây :

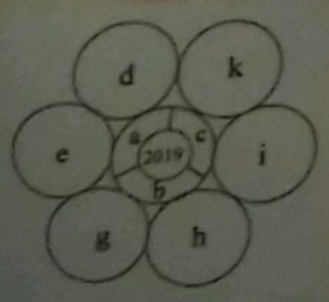
1) tổng sáu số trong các vòng tròn bằng tổng ba số ở hình vành khăn và bằng 2019.

2) tổng hai số trong hai vòng tròn kề nhau bằng số nằm trong hình vành khăn nếu hình vành khăn có cung tròn tiếp xúc với hai vòng tròn đó, và tổng hai số này bằng tổng hai số trong hai vòng tròn kề nhau khác nhưng không kề với hai vòng tròn ban đầu.

Bạn hãy nhanh chóng giúp bạn Hợi điền số để cùng đón năm mới nhé, chú ý rằng nếu từ một cách điền số ta quay 120° quanh tâm của hình tròn trung tâm cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ mà trùng với một cách điền số khác thì hai cách điền số đó được coi là một nghiệm.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

Lời giải. Theo tính chất 1 của giả thiết số 2019 bằng tổng của 6 số tự nhiên liên tiếp mà số lớn nhất không vượt quá 340 nên 2019 = 339 + 338 + 337 + 336 + 335 + 334, nếu thay một số trong 6 số trên bằng một số nhỏ hơn thì tổng 6 số mới sẽ nhỏ hơn 2019. Vậy 6 số cần điền vào trong 6 vòng tròn chính là 6 số trên.

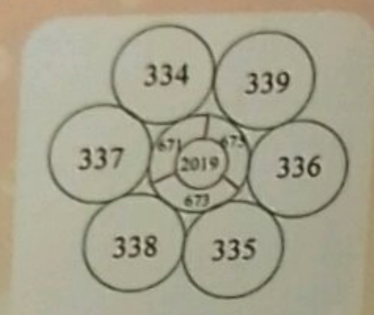


Hình 1

Gọi các số cần điền là a, b, c, d, e, g, h i, k như ở hình 1. Từ tính chất 2 của giả thiết có

a = d + e, b = g + h, c = i + k nên a + b + c = d + e + g + h + i + k = 2019.

Lại theo tính chất 2 của giả thiết có d + e = h + i (1); e + g = i + k (2); g + h = d + k (3).



Hình 2

Từ d + e + g + h + i + k = 2019 và (1), (2), (3) suy ra:

h + i + g + h + e + g = 2019 hay 2(g + h) + i + e = 2019 (6)

hoặc là d + e + g + h + e + g = 2019 hay 2(e + g) + d + h = 2019 (7).

• Trước hết ta xét trường hợp khi số lớn nhất trong 6 số trong vòng tròn là k (nếu quay 120° quanh tâm của hình tròn trung tâm cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ thì k chuyển đến h hoặc đến e nên xét k là đủ thay thế cho việc xét số lớn nhất là h hoặc e).

Giả sử số lớn nhất trong 6 số trong vòng tròn là k thì k = 339. Từ (2) suy ra i < e, i < g (4) và từ (3) suy ra d < g, d < h (5), do đó số nhỏ nhất là d hoặc là i.

1) Nếu d = 334 thì từ (3) có b = g + h = d + k = 334 + 339 = 673, thay vào (6) được i + e = 673 (8).

Do 673 = 335 + 338 = 336 + 337 (9) và do (4) nên chỉ xảy ra i = 335 hoặc i = 336.

a) Nếu i = 335 thì do (8) có e = 338, lúc đó c = i + k = 335 + 339 = 674 = 338 + g, suy ra g = 336 và từ (9) có h = 337, do đó a = 334 + 338 = 672, b = 673, c = 674, thỏa mãn đề bài.

b) Nếu i = 336 thì do (8) có e = 337, lúc đó c = i + k = 336 + 339 = 675 = 337 + g, suy ra g = 338 và từ (9) có h = 335, do đó a = 334 + 337 = 671, b = 673, c = 675, thỏa mãn đề bài.

2) Nếu i = 334 thì từ (2) có c = i + k = 334 + 339 = 673 = e + g, thay vào (7) được d + h = 673 (10). Do 673 = 335 + 338 = 336 + 337 (9) và do (5) nên chỉ xảy ra d = 335 hoặc d = 336.

a) Nếu d = 335 thì do (10) có h = 338, lúc đó b = g + 338 = d + k = 335 + 339 = 674, suy ra g = 336 và từ (9) có e = 337, do đó a = 335 + 337 = 672, b = 674, c = 673, thỏa mãn đề bài.

b) Nếu d = 336 thì do (10) có h = 337, lúc đó b = g + 337 = d + k = 336 + 339 = 675, suy ra g = 338 và từ (9) có e = 335, do đó a = 334 + 337 = 671, b = 675, c = 673, thỏa mãn đề bài.

Như vậy khi số lớn nhất trong 6 số trong vòng tròn là số k thì bài toán có 4 nghiệm.

• Bây giờ ta xét số lớn nhất trong 6 số trong vòng tròn là là i. Nếu lấy hình đối xứng của hình 1 qua trục đối xứng là tiếp tuyến chung của hai đường tròn chứa k và i thì chuyển được số k đến số i, như vậy khi số lớn nhất trong 6 số trong vòng tròn là số i thì bài toán có thêm 4 nghiệm nữa.

Bài toán có tất cả 8 nghiệm. Một nghiệm được thể hiện trên hình 2.

Hoan nghênh bạn Hà Phương Hoàng Mai, 12, Toán 2, THPT Quốc Học Huế, Thừa Thiên Huế, đã tìm ra một nghiệm bài này.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

ĐỐ VUI !

VẼ MỘT NÉT QUA 16 ĐIỂM

Bạn hãy vẽ bằng một nét (không đứt đoạn) một đường gấp khúc khép kín gồm 6 đoạn thẳng đi qua đủ 16 điểm như ở hình trên, các điểm này lập thành các đỉnh của các ô vuông của hình vuông kích thước 4 × 4. Đường gấp khúc được vẽ có thể đi qua một điểm nhiều lần.

ĐAN QUỲNH *(Hà Nội)*

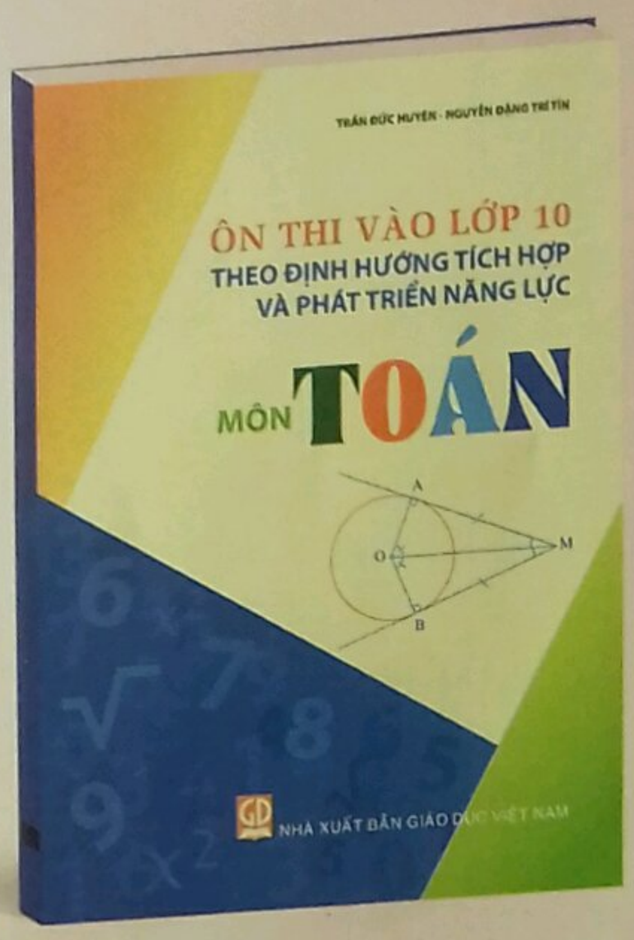
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

của các tác giả: TRẦN ĐỨC HUYÊN và NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

Sách dày 236 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa: 69.000đồng



Nhằm giúp cho các em học sinh có thể tự ôn luyện và hỗ trợ quý Thầy Cô có thêm tài liệu ôn thi vào lớp 10, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn cuốn "**ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC**".

Ngoài việc luyện thi vào lớp 10, cuốn sách này cũng đáp ứng yêu cầu cho việc đổi mới dạy - học, đáp ứng yêu cầu được các tiêu chí của bộ sách giáo khoa mới, theo định hướng tích hợp các môn học, và phát triển năng lực của học sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách gồm 4 chương:

CHƯƠNG 1. NHỮNG CHỦ ĐỀ CƠ BẢN

Bao gồm 12 chủ đề căn bản của chương trình toán lớp 9 hiện hành: Mỗi chủ đề đều có phần tóm tắt lý thuyết, đề toán có hướng dẫn và đề toán tự giải rất tiện cho các em học sinh tự ôn tập và rèn luyện.

CHƯƠNG 2. NHỮNG CHỦ ĐỀ TOÁN ỨNG DỤNG

Chủ đề 13: Những bài toán tích hợp liên môn Lý - Hóa - Sinh.

Chủ đề 14: Những bài toán tỉ lệ phần trăm trong tài chính.

Chủ đề 15: Những bài toán thực tế đo đạc hình học – Các bài toán về địa lí.

CHƯƠNG 3. NHỮNG CHỦ ĐỀ NÂNG CAO

Chủ đề 16: Vận dụng mô hình toán học để giải quyết các vấn đề thực tế.

Chủ đề 17: Toán đại số tổng hợp.

Chủ đề 18: Toán hình học tổng hợp.

CHƯƠNG 4. ĐỀ MẪU THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Gồm 6 đề thi mẫu được biên soạn theo đúng hướng dẫn cấu trúc và ma trận đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh, trong đó một số đề có hướng dẫn giải và các đề còn lại các em học sinh sẽ tự làm.

Để sử dụng tài liệu một cách có hiệu quả các em học sinh cần học đầy đủ các kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, tích cực rèn luyện cách suy nghĩ, tư duy, phân tích, phản biện, đồng thời tìm mối liên hệ với thực tế đối với kiến thức đã học.

Chúng tôi hi vọng tài liệu này sẽ giúp ích cho quý thầy cô và các em học sinh trong việc ôn tập, luyện thi vào lớp 10 theo cấu trúc đề mới và rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp xây dựng để những lần tái bản sau tài liệu sẽ được ngày càng hoàn thiện hơn.

Địa chỉ phát hành:

- Công ty CP Sách và Thiết bị giáo dục Miền Nam,
  231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh, ĐT: (028) 38358423
- Các Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Tỉnh (Thành phố).
- Mua sách trực tuyến tại: www.sobee.vn

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT03M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng