TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2019
Số 500

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

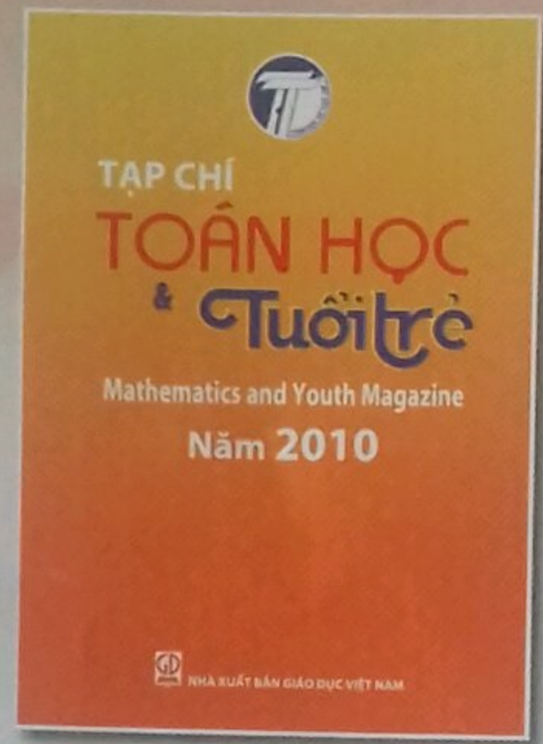
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

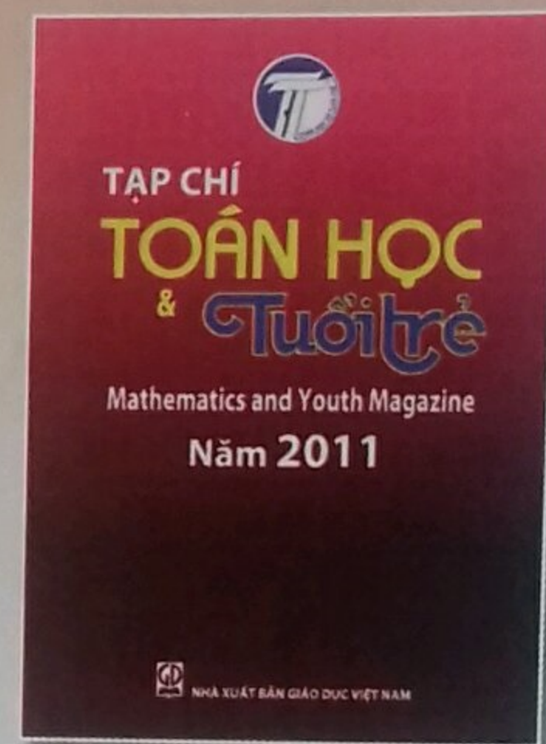
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

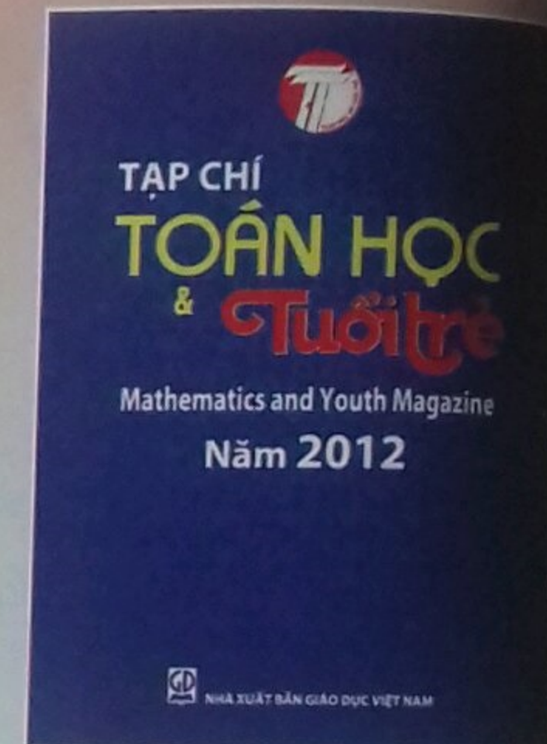
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM







Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

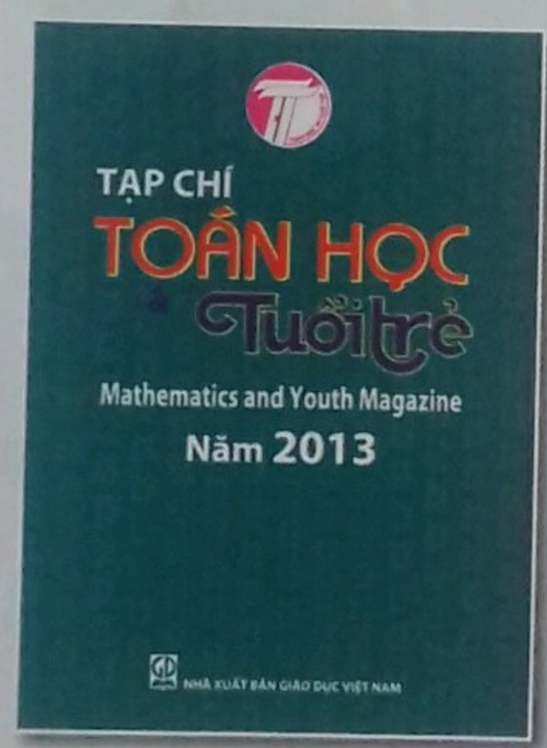
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

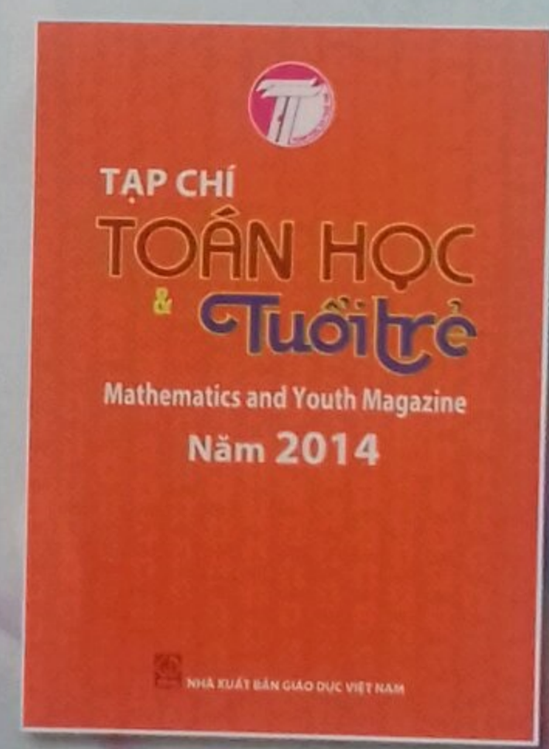
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

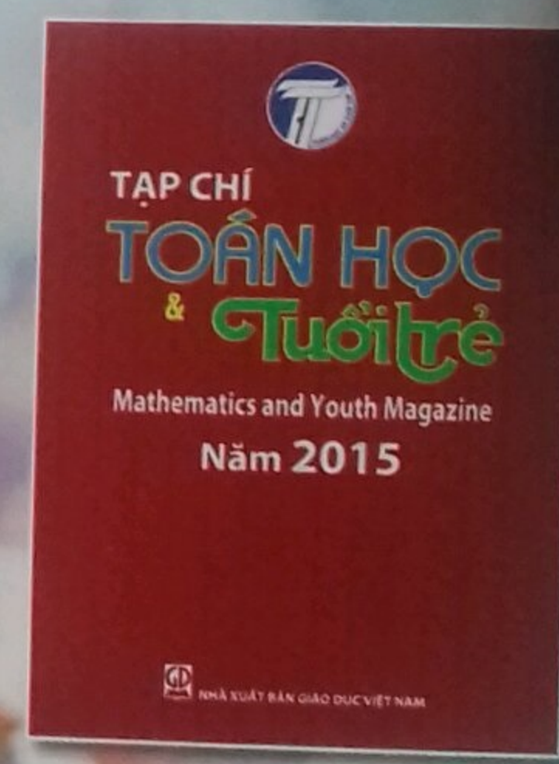
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

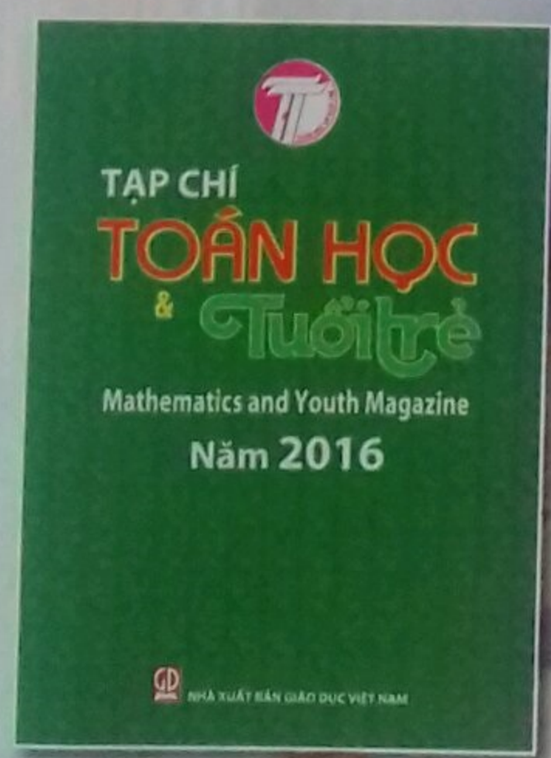
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

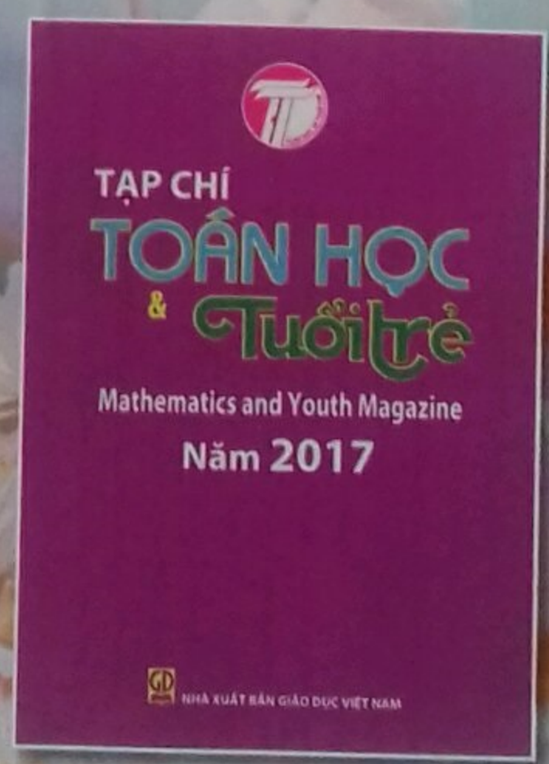
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

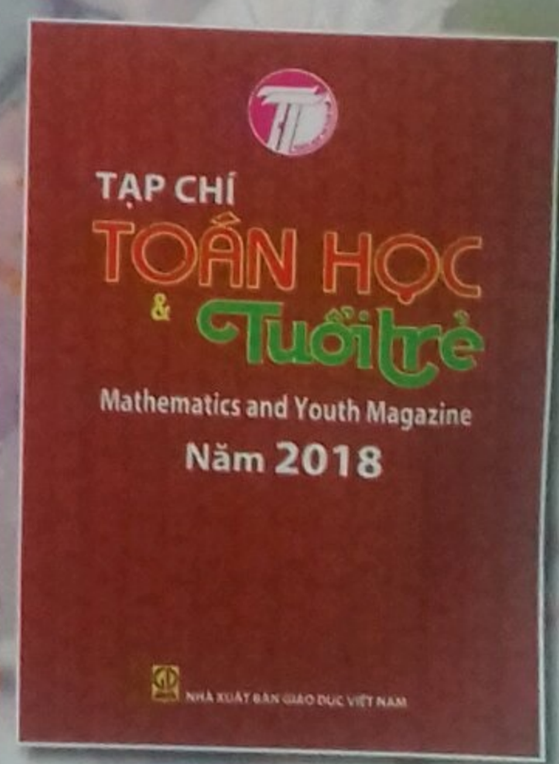












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG

MAI VĂN NĂM
(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Cách giải thì có rất nhiều
Tìm thêm cách mới là điều rất vui

Trong số 440 (T2/2014 - Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ) mục "**Bất đẳng thức nhỏ và công hiệu to**" của tác giả *Vũ Quang Minh* đã đưa ra cách chứng minh một số bất đẳng thức ba biến nhờ việc áp dụng bất đẳng thức cơ bản $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$. Trong quá trình tìm tòi lời giải chúng tôi cũng hướng tới một cách chứng minh cũng khá đơn giản bằng cách đưa về tổng các bình phương ($A^2+m+B^2+n+C^2+p$ với $m+n+p=0$) đây cũng là cách khá thú vị trong các bài toán bất đẳng có ba biến đối xứng hoán vị vòng quanh. Xin lấy lại các thí dụ trong bài báo đó nhưng với cách giải khác chỉ cần vận dụng các hằng đẳng thức và một số kỹ thuật biến đổi.

Bài toán 1. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}. \quad (1)$$

Lời giải:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a}{3}\right)+\left(\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}-\frac{b}{3}\right)+\left(\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}-\frac{c}{3}\right) \ge 0.$$

Xét hiệu:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{a}{3}=\frac{2a^3-a^2b-ab^2}{3(a^2+ab+b^2)}$$
$$=\frac{a^3-b^3}{3(a^2+ab+b^2)}+\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{3(a^2+ab+b^2)}$$
$$=\frac{a-b}{3}+\frac{(a+b)(a-b)^2}{3(a^2+ab+b^2)}.$$

Tương tự có:

$$\frac{b^3}{b^2+cb+c^2}-\frac{b}{3}=\frac{b-c}{3}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{3(b^2+bc+c^2)};$$
$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}-\frac{c}{3}=\frac{c-a}{3}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{3(c^2+ca+a^2)}.$$

Cộng lại ta có:

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{3(a^2+ab+b^2)}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{3(b^2+bc+c^2)}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{3(c^2+ca+a^2)} \ge 0,$$

BĐT này luôn đúng, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. Mặc dù các hiệu: $a-b; b-c; c-a$ chưa chắc đã không âm, nhưng tổng 3 hiệu đó bằng 0.

Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{3a^3+7b^3}{2a+3b}+\frac{3b^3+7c^3}{2b+3c}+\frac{3c^3+7a^3}{2c+3a} \ge 3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \quad (2)$$

Lời giải. BĐT (2) tương đương với

$$\left(\frac{3a^3+7b^3}{2a+3b}-3b^2+ab\right)+\left(\frac{3b^3+7c^3}{2b+3c}-3c^2+bc\right)+\left(\frac{3c^3+7a^3}{2c+3a}-3a^2+ac\right) \ge 0.$$

Xét:

$$\frac{3a^3+7b^3}{2a+3b}-3b^2+ab=\frac{(3a+2b)(a^2-b^2)}{2a+3b}$$
$$=a^2-b^2+\frac{(a+b)(a-b)^2}{2a+3b}.$$

Tương tự:

$$\frac{3b^3+7c^3}{2b+3c}-3c^2+bc=b^2-c^2+\frac{(b+c)(b-c)^2}{2b+3c};$$
$$\frac{3c^3+7a^3}{2c+3a}-3a^2+ac=c^2-a^2+\frac{(c+a)(c-a)^2}{2c+3a}.$$

Cộng lại ta có:

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{2a+3b}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{2b+3c}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{2c+3a}\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{19b^3-a^3}{ab+5b^2}+\frac{19c^3-b^3}{bc+5c^2}+\frac{19a^3-c^3}{ca+5a^2}\leq 3(a+b+c). \quad (3)$$

Lời giải. BĐT (3) tương đương với

$$\left(3b-\frac{19b^3-a^3}{ab+5b^2}\right)+\left(3c-\frac{19c^3-b^3}{cb+5c^2}\right)+\left(3a-\frac{19a^3-c^3}{ac+5a^2}\right)\geq 0.$$

Xét hiệu:

$$3b-\frac{19b^3-a^3}{ab+5b^2}=\frac{3ab^2-4b^3+a^3}{ab+5b^2}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab+5b^2}+a-b.$$

Tương tự:

$$3c-\frac{19c^3-b^3}{cb+5c^2}=\frac{(b+c)(b-c)^2}{bc+5c^2}+b-c;$$

$$3a-\frac{19a^3-c^3}{ca+5a^2}=\frac{(c+a)(c-a)^2}{ca+5a^2}+c-a.$$

Cộng lại ta có

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab+5b^2}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{bc+5c^2}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{ca+5a^2}\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Bài toán 4. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b}+\frac{4b^3+5c^3-3b^2c+10bc^2}{3b+c}+\frac{4c^3+5a^3-3c^2a+10ca^2}{3c+a}\geq 5(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca). \quad (4)$$

Lời giải. Xét hiệu:

$$\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b}-5a^2+ab=\frac{5b^3-5a^2b+11ab^2-11a^3}{3a+b}=\frac{(b+a)(b-a)^2}{3a+b}+4(b^2-a^2).$$

Tương tự:

$$\frac{4b^3+5c^3-3b^2c+10bc^2}{3b+c}-5b^2+bc=\frac{(c+b)(c-b)^2}{3b+c}+4(c^2-b^2);$$

$$\frac{4c^3+5a^3-3c^2a+10ca^2}{3c+a}-5c^2+ac=\frac{(a+c)(a-c)^2}{3c+a}+4(a^2-c^2).$$

Cộng lại ta có

$$\frac{(b+a)(b-a)^2}{3a+b}+\frac{(c+b)(c-b)^2}{3b+c}+\frac{(a+c)(a-c)^2}{3c+a}\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Bài toán 5. *Với a,b,c là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{3}{2}. \quad (5)$$

Lời giải. BĐT (5) tương đương

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a+b}{4}\right)+\left(\frac{b^2}{b+c}-\frac{b+c}{4}\right)+\left(\frac{c^2}{c+a}-\frac{c+a}{4}\right)\geq 0.$$

Xét hiệu:

$$\frac{a^2}{a+b}-\frac{a+b}{4}=\frac{3a^2-2ab-b^2}{4(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}+\frac{a-b}{2}.$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{b+c}-\frac{b+c}{4}=\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}+\frac{b-c}{2};$$

$$\frac{c^2}{c+a}-\frac{c+a}{4}=\frac{(c-a)^2}{4(c+a)}+\frac{c-a}{2}.$$

Cộng lại ta có: $\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{4(c+a)}\geq 0.$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c=1$.

Bài toán 6. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \quad (6)$$

(Xem tiếp trang 5)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

TỈNH BẮC NINH, NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. 1)

$$P=\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}-\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\left|\sqrt{2x-1}+1\right|-\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right]}{\sqrt{2x-1}+1-(\sqrt{2x-1}-1)}\quad (\text{vì } x\ge 2).$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{x-1}.$$

2) Từ giả thiết suy ra

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3\ (\text{do } x>0).$$

$$A=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3.3=18.$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=47.$$

Khi đó $846=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^7+\frac{1}{x^7}+x+\frac{1}{x}$

$$=B+3\Rightarrow B=843.$$

Câu 2. 1) Ta có $\Delta=m^4+2m^2-4m+9$

$$=m^4+2(m-1)^2+7>0\ \forall m.$$

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Theo hệ thức Viét,

$$\begin{cases}x_1+x_2=-m^2-1\\ x_1x_2=m-2\end{cases}.$$

Do đó $x_1x_2\ne 0\Leftrightarrow m-2\ne 0\Leftrightarrow m\ne 2$. Ta có:

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)=(x_1x_2)^2+55$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-(x_1+x_2)-(x_1x_2)^2-55=0$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2+1)^2-4(m-2)+(m^2+1)-(m-2)^2-55=0$$

$$\Leftrightarrow m^4+2m^2-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=4\\ m^2=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Từ ĐK suy ra $m=-2$.

2) Ký hiệu: $\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4 & (1)\\ 4x^2-24x+35=5(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}) & (2)\end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x+3-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ y=x+3\end{array}\right.$.

• Với $x=1$ thay vào (2) ta được

$$5(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y})=15\ \left(\text{ĐK: } y\ge\frac{11}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4y-11+2\sqrt{3y^2-11y}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3y^2-11y}=10-2y$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 5\\ y^2-29y+100=0\end{cases}\Leftrightarrow y=4$$

$\Rightarrow (x;y)=(1;4)$ là nghiệm của hệ.

• Với $y=x+3$ thay vào (2) ta được:

$$4x^2-24x+35=5(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3})\ \left(\text{ĐK}: x\ge\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-28x+24+(3x+2-5\sqrt{3x-2})+(x+9-5\sqrt{x+3})=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6)+\frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6)\left(4+\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=6\end{array}\right.,$$

$$\left(\text{do } 4+\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}>0,\forall x\ge\frac{2}{3}\right).$$

Từ đó, tìm được các nghiệm $(x;y)=(1;4);\ (6;9)$.

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là: $(1;4);\ (6;9)$.

Câu 3. 1) Theo giả thiết

$$(m+n^2)\vdots(m^2-n)\Rightarrow m+n^2\ge m^2-n$$

$$\Rightarrow (m+n)(n-m+1)\ge 0$$

$$\Rightarrow m\le n+1.\qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có $n\le m+1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $n\le m+1\le n+2$.

Do m, n nguyên dương nên $m=n$ hoặc $m=n+1$ hoặc $m=n-1$.

• TH1: Nếu $m=n$ thì

$(n^2+n)\vdots(n^2-n)\Rightarrow(n^2+n-n^2+n)\vdots(n^2-n)$

$\Rightarrow 2n\vdots(n^2-n)\Rightarrow 2n\ge n^2-n\Rightarrow n\le 3.$

- Với $m=n=1$, không thỏa mãn.
- Với $m=n=2$, thỏa mãn.
- Với $m=n=3$, thỏa mãn.

* TH2: Nếu $m=n+1$ thì

$(m^2+n)\vdots(n^2-m)\Rightarrow(n^2+3n+1)\vdots(n^2-n-1)$

$$\Rightarrow(4n+2)\vdots(n^2-n-1)$$

$\Rightarrow 4n+2\ge n^2-n-1\Rightarrow n(n-5)<3$

$$\Rightarrow n\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}.$$

Kiểm tra các trường hợp ta được giá trị của n thỏa mãn là $n\in\{1;2\}$.

* TH3: Nếu $m=n-1\Leftrightarrow n=m+1$ thì lập luận tương tự TH2 ta được giá trị của m thỏa mãn là $m\in\{1;2\}$. Vậy các cặp số $(n;\ m)$ thỏa mãn là:

$$(2;2),(3;3),(1;2),(2;3),(2;1),(3;2).$$

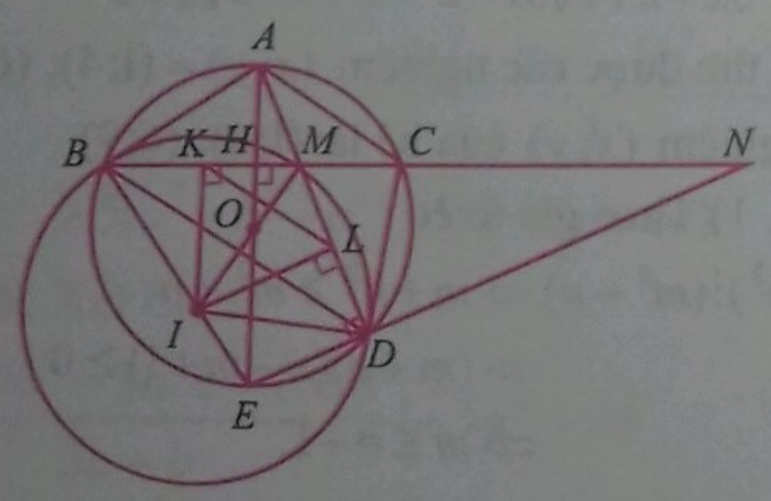
2) Giả sử k là số nguyên dương sao cho trong mỗi tập con có k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố. Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A. Khi đó, số phần tử của T là 8 và với mọi $a,b\in T$ ta luôn có a^2+b^2 là hợp số, do đó, $k\ge 9$. Xét

$$A=\{1;6\}\cup\{2;3\}\cup\{5;16\}\cup\{4;15\}\cup\{7;12\}$$
$$\cup\{8;13\}\cup\{9;10\}\cup\{11;14\}.$$

Tổng bình phương mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố.

Xét tập T có 9 phần tử của A, theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất một cặp số nói trên, hay nói cách khác T chứa ít nhất hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố. Vậy k nhỏ nhất bằng 9.

Câu 4.



1) Xét ΔMAC và ΔMDB có $\widehat{AMC}=\widehat{DMB}$, $\widehat{MAC}=\widehat{MDB}\Rightarrow\Delta MAC\backsim\Delta MDB$

$$\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MB}\Rightarrow MA.MB=MC.MD.$$

Xét ΔNCD và ΔNEB có $\widehat{CND}=\widehat{BNE}$, $\widehat{NCD}=\widehat{NEB}\Rightarrow\Delta NCD\backsim\Delta NEB$

$$\Rightarrow\frac{NC}{NE}=\frac{ND}{NB}\Rightarrow NB.NC=ND.NE.$$

Mặt khác, $\widehat{MHE}=\widehat{MDE}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $MHED$ nội tiếp. Tương tự ta cũng có

$$ND.NE=NM.NH\Rightarrow NM.NH=NB.NC$$
$$\Rightarrow\frac{NB}{NM}=\frac{NH}{NC}.$$

Do đó $\dfrac{BN}{BN-MN}=\dfrac{HN}{HN-CN}\Rightarrow\dfrac{BN}{BM}=\dfrac{HN}{HC}.$

Ngoài ra, ta lại có

$$\frac{NB}{NH}=\frac{NM}{NC}\Rightarrow\frac{NB-NH}{NH}=\frac{NM-NC}{NC}$$
$$\Rightarrow\frac{HB}{NH}=\frac{CM}{CN}.$$

Mà $HB=HC$ nên

$$\frac{CN}{CM}=\frac{HN}{HC}\Rightarrow\frac{BN}{BM}=\frac{CN}{CM}\Rightarrow BN.CM=BM.CN.$$

2) Kẻ $IK\perp BC(K\in BC);IL\perp AD(L\in AD)$. Suy ra K, L lần lượt là trung điểm của BM, MD. Ta có ΔBIM cân nên $\widehat{BIK}=\widehat{MIK}$.

Do $\widehat{MKI}=\widehat{MLI}=90^0$ nên tứ giác $IKML$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MIK}=\widehat{MLK}$. Trong ΔBMD, KL là đường trung bình nên $KL\,//\,BD$. Suy ra $\widehat{MLK}=\widehat{MDB}$.

Mà $\widehat{MDB}=\widehat{AEB}\Rightarrow\widehat{KIB}=\widehat{AEB}$. Do $IK\,//\,AE$ nên $\widehat{AEI}+\widehat{EIK}=180^0\Rightarrow\widehat{EIK}+\widehat{KIB}=180^0$ hay E,I,B thẳng hàng.

3) Do tứ giác $MHED$ nội tiếp nên

$$AM.AD=AH.AE.$$

Mà $AB^2=AH.AE\Rightarrow AB^2=AM.AD$. Ta có

$$2AM+AD\ge 2\sqrt{2AM.AD}=2\sqrt{2}AB=R\sqrt{2}.$$

Do đó, $2AM+AD$ nhỏ nhất là $R\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $2AM=AD\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $AD\Rightarrow OM\perp AD$.

Trong ΔABE ta có

$$\cos\widehat{BAE}=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}\Rightarrow AH=AB.\cos\widehat{BAE}=\frac{R}{8}$$
$$\Rightarrow OH=OA-AH=\frac{7}{8}R.$$

Lại có $MH^2=HA.OH=\dfrac{7R^2}{64}\Rightarrow HM=\dfrac{R\sqrt{7}}{8}.$

Mặt khác $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \dfrac{R\sqrt{15}}{8}$

$$\Rightarrow BM = BH + MH = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{7}}{8}R.$$

Vậy $2AM + AD$ nhỏ nhất khi M thuộc đoạn BC thỏa mãn $BM = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{7}}{8}R.$

Câu 5. 1) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3\sqrt[3]{2.2(xy+yz+zx)} \le 2+2+(xy+yz+zx)$$
$$\le xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$$
$$=(x+1)(y+1)(z+1).$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1} \le \frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)}, \text{ hay}$$

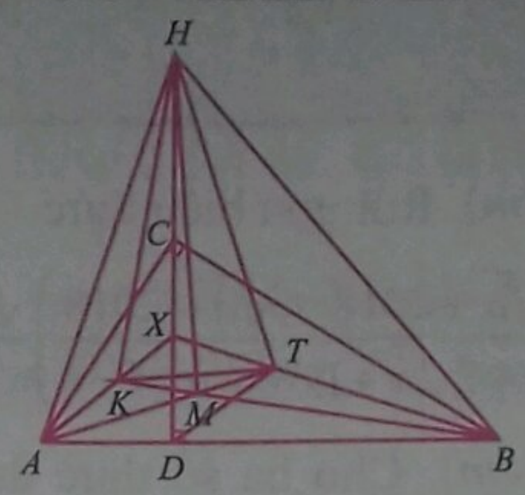
$$(x+1)^2(z+1)+(y+1)^2(x+1)+(z+1)^2(y+1) \le 25$$
$$\Leftrightarrow xy^2+yz^2+zx^2+(x+y+z)^2$$
$$+3(x+y+z)+3 \le 25 \Leftrightarrow xy^2+yz^2+zx^2 \le 4.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa hai số x, z. Khi đó,

$$x(y-x)(y-z) \le 0 \Leftrightarrow xy^2+zx^2 \le xyz+x^2y$$
$$\Rightarrow xy^2+yz^2+zx^2 \le xyz+x^2y+yz^2 = y(xz+x^2+z^2)$$
$$\le y(x+z)^2 \le \frac{4}{27}\left(y+2.\frac{x+z}{2}\right)^3 = 4.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (x;y;z)=(0;1;2)$ và các hoán vị.

2) Ta có $AT^2 = AC^2 = AD.AB \Rightarrow \Delta ATD \backsim \Delta ABT.$



Do đó, $\widehat{ATD} = \widehat{XBA}$. Gọi H là điểm nằm trên CD (H không thuộc đoạn CD) sao cho

$$DX.DH = BD.AD.$$

Vì $\widehat{BDX} = \widehat{HDA} = 90^0$ nên $\Delta HAD \backsim \Delta XBD$ $\Rightarrow \widehat{XBD} = \widehat{AHD}$. Do đó, $\widehat{ATD} = \widehat{AHD}$ và tứ giác $HADT$ nội tiếp. Vì vậy,

$$\widehat{HTA} = 90^0 \Rightarrow HT^2 = AH^2 - AT^2 = AH^2 - AC^2.$$

Tương tự $HK^2 = BH^2 - BC^2, \widehat{HKB} = 90^0.$

Do $CH \perp AB$ nên

$$AH^2 - AC^2 = BH^2 - BC^2 \Rightarrow HK = HT.$$

Ta lại có hai tam giác HKM, HTM là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền. Do đó

$$\Delta HKM = \Delta HTM \Rightarrow MK = MT.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh) ***giới thiệu***

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ...

(Tiếp theo trang 2)

Lời giải. BĐT (6) tương đương với

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-1\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}-1\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(a-b)^2+ab-c^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{1}{2}.\frac{(b-c)^2+bc-a^2}{(c+a)(a+b)}$$
$$+\frac{1}{2}.\frac{(c-a)^2+ca-b^2}{(a+b)(b+c)} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}$$
$$+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)} \ge 0$$

$$\left(\text{do } \frac{ab-c^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{bc-a^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{ca-b^2}{2(a+b)(b+c)}=0\right).$$

Đơn giản nhưng thú vị đó là điều chúng tôi thích ở phương pháp này. Các bài toán trên chắc sẽ còn nhiều phương pháp chứng minh khác. Hy vọng các bạn tìm ra cách chứng minh đơn giản và phù hợp hơn góp phần làm "đẹp" thêm cho Toán học. Để kết thúc mời các bạn cùng luyện qua một số bài tập sau:

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 2. Cho a, b, c các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{21a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{21b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{21c^3-a^3}{ca+3c^2} \le 5(a+b+c).$$

Bài 3. Cho a, b, c các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}$$
$$\ge \frac{a+b+c}{3}.$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC
NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1 (2 *điểm*). Rút gọn biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2018}{a-1}\right)\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}.$$

Câu 2 (2 *điểm*). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq\sqrt{z}$$

và $y\neq z$. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{x+\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)^2}{y+\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}.$$

Câu 3 (2 *điểm*). Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$.

Câu 4 (2 *điểm*). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ x+2y=2\end{cases}$$

(m là tham số và x, y là ẩn số)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) trong đó x, y là các số nguyên.

Câu 5 (2 *điểm*). Giải phương trình

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3.$$

Câu 6 (2 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=12$cm, $AC=16$cm. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI.

Câu 7 (2 *điểm*). Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=50^0$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN.

a) Chứng minh rằng: $MB.DN=BH.AD$.

b) Tính số đo góc $\widehat{MON}$.

Câu 8 (2 *điểm*). Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Câu 9 (2 *điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{2}{3}.$$

Câu 10 (2 *điểm*). Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***giới thiệu***

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(5/7/136 *Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

Chúng ta hãy bắt đầu bằng việc chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy} \qquad (1)$$

trong đó x,y là các số thực dương.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2+(y+1)^2}{(xy+x+y+1)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2+(y+1)^2](1+xy)\ge(xy+x+y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2x+2y+2)(1+xy)$$
$$\ge(xy+x+y)^2+2(xy+x+y)+1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2x+2y+2)$$
$$+(x^3y+xy^3+2x^2y+2xy^2+2xy)$$
$$\ge x^2y^2+x^2+y^2+2x^2y+2xy^2$$
$$+2xy+(2xy+2x+2y)+1$$

$$\Leftrightarrow 1+xy(x^2+y^2)\ge 2xy+x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(1-xy)^2\ge 0. \qquad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng, vậy bất đẳng thức (1) đúng. Dấu "=" ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Sử dụng bất đẳng thức (1) chúng ta có thể giải được các bài toán sau:

Bài toán 1. *Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab},$$

$$\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+cd}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}.$$

Mặt khác $\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+cd}=\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{ab}{ab+1}=1.$

Suy ra

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài toán 2 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2016 - 2017). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

Lời giải. Ta có: $P=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{b}\right)^2}+\dfrac{c}{4a}.$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có

$$\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}\ge\frac{1}{1+\frac{c}{a}}.$$

Suy ra $P\ge\dfrac{1}{1+\dfrac{c}{a}}+\dfrac{c}{4a}$. Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+\frac{c}{a}}+\frac{c}{4a}=\frac{1}{1+\frac{c}{a}}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

Suy ra $P\ge\dfrac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$.

Trong Tạp chí *Mathematical Reflections* số 6 năm 2017 có bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Sau đây là lời giải bài toán 3 của tác giả bài viết này.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab},$$

$$\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{1}{1+bc} \text{ và}$$

$$\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{1}{1+ca}.$$

Suy ra: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}$

$$\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)\times$$
$$\times(1+ab+1+bc+1+ca)\ge 9.$$

Suy ra $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$.

Do đó $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 4 (Vietnam TST 2005). *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\ge\frac{3}{8}.$$

Lời giải. Trước khi giải bài toán này ta có bổ đề sau

Bổ đề. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab} \text{ và } \frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{1+c}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+c}.$$

Mặt khác $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+c}=\frac{1}{1+ab}+\frac{ab}{ab+1}=1.$

Suy ra $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{4}\ge 1.$

Suy ra $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Chúng ta trở lại bài toán 4.

Đặt $P=\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}.$

Ta có: $P=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^3}.$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì

$x>0,\ y>0,\ z>0, xyz=1$ và

$$P=\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Suy ra $\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+x)^2}.$

Tương tự

$$\frac{2}{(1+y)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+y)^2},\quad \frac{2}{(1+z)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+z)^2}.$$

Suy ra $2P+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right].$

Mặt khác theo bổ đề trên ta có

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Suy ra $P\ge\frac{3}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán sau là một bài toán tổng quát của bài toán 4.

Bài toán 5. *Cho số nguyên $n\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$E=\frac{a^n}{(a+b)^n}+\frac{b^n}{(b+c)^n}+\frac{c^n}{(c+a)^n}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

Lời giải. • Với $n=2$ thì

$$E=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{(c+a)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^2}.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì $x>0, y>0, z>0$, $xyz=1$ và $E=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}$..

Mặt khác theo bổ đề trên thì

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Suy ra $E\ge\frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{3}{4}$.

• Xét trường hợp $n>2$. Ta có:

$$E=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^n}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^n}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^n}.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì $x>0, y>0, z>0$, $xyz=1$ và $E=\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(1+y)^n}+\frac{1}{(1+z)^n}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số thực dương trong đó có hai số bằng $\frac{1}{(1+x)^n}$ và $n-2$ số bằng $\frac{1}{2^n}$ ta có:

$$\frac{2}{(1+x)^n}+\frac{n-2}{2^n}\ge\frac{n}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Tương tự : $\frac{2}{(1+y)^n}+\frac{n-2}{2^n}\ge\frac{n}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{(1+y)^2}$,

$$\frac{2}{(1+z)^n}+\frac{n-2}{2^n}\ge\frac{n}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}.$$

Suy ra:

$$2E+\frac{3(n-2)}{2^n}\ge\frac{n}{2^{n-2}}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right].$$

Theo bổ đề trên ta có

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Suy ra $E\ge\frac{3}{2^n}$. Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{3}{2^n}$.

Bài toán sau là một bài toán tổng quát của bài toán 5.

Bài toán 6. *Cho số thực $\alpha\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F=\frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha}+\frac{b^\alpha}{(b+c)^\alpha}+\frac{c^\alpha}{(c+a)^\alpha}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

Lời giải.

• Nếu $\alpha=2$ thì giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{3}{4}$.

• Xét trường hợp $\alpha>2$.

Ta có: $F=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^\alpha}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^\alpha}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^\alpha}$.

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì $x>0, y>0, z>0, xyz=1$ và

$$F=\frac{1}{(1+x)^\alpha}+\frac{1}{(1+y)^\alpha}+\frac{1}{(1+z)^\alpha}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^{\frac{\alpha}{2}}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}.t$ $(0<t<1)$. Ta có:

$$f'(t)=\frac{\alpha}{2}t^{\frac{\alpha}{2}-1}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{\alpha}{2}\left[t^{\frac{\alpha}{2}-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right].$$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ ta thấy

$$f(t)\ge f\left(\frac{1}{4}\right),\ \forall t\in(0;1).$$

Suy ra $f(t) \geq \frac{2-\alpha}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \forall t \in (0;1)$.

Vì $0 < \frac{1}{(1+x)^2} < 1$ nên

$$\frac{1}{(1+x)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Tương tự :

$$\frac{1}{(1+y)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{1}{(1+z)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}.\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\Rightarrow F \geq \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}\right] + \frac{3(2-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Theo bổ đề trên ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Suy ra $F \geq \frac{3}{2^\alpha}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{3}{2^\alpha}$.

Bài toán sau được sáng tác bởi tác giả bài viết này.

Bài toán 7. *Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức* $\frac{x^k}{(1+x)^2} + \frac{y^k}{(1+y)^2} + \frac{z^k}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$ *đúng với mọi bộ ba số thực dương* (x, y, z) *thỏa mãn* $xyz = 1$.

Lời giải. Với số thực k và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$, đặt

$$P = \frac{x^k}{(1+x)^2} + \frac{y^k}{(1+y)^2} + \frac{z^k}{(1+z)^2}.$$

Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức

$$\frac{x^k}{(1+x)^2} + \frac{y^k}{(1+y)^2} + \frac{z^k}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương (x, y, z) thỏa mãn $xyz = 1$.

Chọn $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{n}, z = n^2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

Khi đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ và $P = \frac{2n^{2-k}}{(n+1)^2} + \frac{n^{2k}}{(n^2+1)^2} \geq \frac{3}{4}$.

• Nếu $0 < k < 2$ thì $2 - k < 2$ và $2k < 4$. Suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} P = 0$. Đó là điều vô lí. Vậy $k \leq 0$ hoặc $k \geq 2$.

• Giả sử $k = 0$ và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Khi đó theo bổ đề thì

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

• Giả sử k là số thực thỏa mãn $k < 0$ và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chúng ta chứng minh $P \geq \frac{3}{4}$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó $x^k \leq y^k \leq z^k$ và

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{(1+y)^2} \leq \frac{1}{(1+z)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$P \geq \frac{1}{3}(x^k + y^k + z^k)\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x^k + y^k + z^k \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^k} = 3.$$

Mặt khác theo bổ đề trên ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Suy ra $P \geq \frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

• Giả sử $k = 2$ và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chúng ta chứng minh $P \geq \frac{3}{4}$. Thật vậy, đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Khi đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ và

$$P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

• Giả sử k là số thực thỏa mãn $k>2$ và x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chúng ta chứng minh $P\ge\frac{3}{4}$.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$. Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$. Khi đó a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$, $a\le b\le c$ và

$$P=\frac{1}{a^{k-2}(1+a)^2}+\frac{1}{b^{k-2}(1+b)^2}+\frac{1}{c^{k-2}(1+c)^2}.$$

Ta có:

$$\frac{1}{a^{k-2}}\ge\frac{1}{b^{k-2}}\ge\frac{1}{c^{k-2}} \text{ và } \frac{1}{(1+a)^2}\ge\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{(1+c)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$P\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^{k-2}}+\frac{1}{b^{k-2}}+\frac{1}{c^{k-2}}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{a^{k-2}}+\frac{1}{b^{k-2}}+\frac{1}{c^{k-2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^{k-2}}}=3.$$

Mặt khác theo bổ đề trên ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}.$$

Suy ra $P\ge\frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Vậy tập hợp các số thực k thỏa mãn đề bài là $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

BÀI TẬP

1. Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\le 1.$$

Chứng minh rằng $abcd\ge 1$.

2. Cho các số thực dương a,b,c,d. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+d)^3}+\frac{d^3}{(d+a)^3}\ge\frac{1}{2}$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E=\frac{a^2}{(1+a)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{36c^3}{(1+3c)^3}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\frac{1}{6}$.

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{4c^3}{3(c+a)^3}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

5. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{(1+a)^2}+\frac{c+a}{(1+b)^2}+\frac{a+b}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{2}.$$

6. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2+c^2}{(1+a)^2}+\frac{c^2+a^2}{(1+b)^2}+\frac{a^2+b^2}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{2}.$$

7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b^{2019}+c^{2019}}{(1+a)^2}+\frac{c^{2019}+a^{2019}}{(1+b)^2}+\frac{a^{2019}+b^{2019}}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{2}.$$

8. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(1+a)^2}+\frac{b}{(1+b)^2}+\frac{c}{(1+c)^2}+\frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)}\le\frac{5}{4}.$$

9. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge 1.$$

10. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{1+a+b+c}\ge 1.$$

11. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}.$$

12. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+3$$
$$\ge\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right).$$

LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN CAO CẤP

LÊ THỊ NGỌC THÚY
(GV Trường CĐSP Nghệ An)

Thật khó xác định chính xác thời điểm ra đời của toán cao cấp, bởi ngay trong thời cổ đại Hy Lạp, nhiều tư tưởng toán cao cấp đã được hình thành và nhiều kết quả sâu sắc về chúng đã được phát hiện, điển hình là *Archimedes* (286 – 212 tr. CN) với phép tính vi tích phân. Hơn nữa, sau hàng trăm năm phát triển rực rỡ của toán cao cấp, nhiều vấn đề trong lĩnh vực toán sơ cấp (đặc biệt là số học) chưa giải quyết được, và hiện đang được quan tâm nghiên cứu. Bài viết này chỉ trình bày thời kỳ hình thành và phát triển rực rỡ nhất của toán cao cấp ở Châu Âu.

1. Ba sự kiện toán học lớn xuất hiện trong thế kỷ XIX

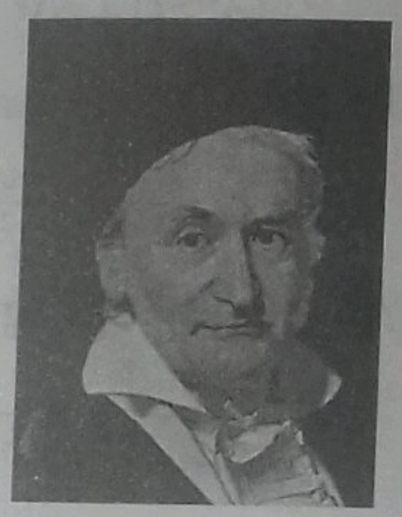
Trong thế kỷ XIX, *siêu cấu trúc* của toán học hình thành và phát triển trên nền móng tư tưởng sâu xa ở những thế kỷ trước. Sự tiến hóa từ trực giác đến tính chặt chẽ đã làm nảy sinh nhiều tiến bộ đáng kể, toán học dần dần được giải phóng khỏi những ràng buộc cổ truyền, sự *khái quát hóa* và *trừu tượng hóa* trở thành mệnh lệnh của thời đại. Tính trách nhiệm trong giảng dạy của các nhà toán học chuyên nghiệp được nâng cao. Việc nghiên cứu ngày càng tập trung nhiều hơn ở các trường đại học so với ở triều đình hoàng tộc hoặc quanh các hội viên của học viện. Ngôn ngữ dân tộc dần dần thay thế ngôn ngữ Latin khoa học, và các nhà toán học đã bắt đầu làm việc trong lĩnh vực chuyên môn hóa mà chưa từng thấy trước đó. Một số *triết học* trong toán học đã xuất hiện.

Ba sự kiện toán học có ý nghĩa sâu sắc diễn biến trong thế kỷ XIX là: sự xuất hiện của các hình học *Phi - Euclid* trong hình học, sự ra đời của *Đại số không giao hoán* và việc *số hóa* trong giải tích.

a. Sự xuất hiện các hình học Phi – Euclid.

Sự xuất hiện *hình học Phi – Euclid* đầu tiên vào khoảng năm 1829, do ba nhà toán học thiên tài độc lập với nhau khám phá ra một môn hình học *phi mâu thuẫn* và *tự nhất quán* khác hẳn với hình học *Euclid*. Ba nhà toán học đó là *Nicolai Ivanovich Lobachevsky* (1793 – 1856), *Janós Bolyai* (1802 – 1860) và *Carl Fredrich Gauss* (1777 – 1855).

Nikolai Ivanovich Lobachevsky
(1793 - 1856)
Nhà toán học người Nga



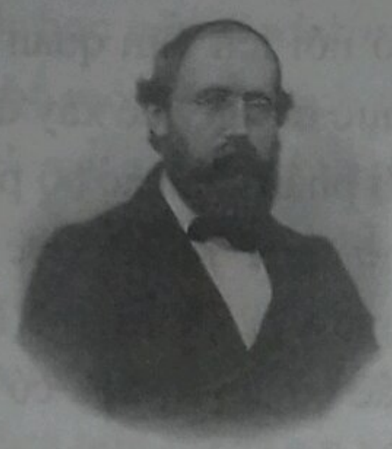
Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)
Nhà toán học người Đức

Bolyai János
(1802 - 1860)
Nhà toán học người Hungary

Hậu quả tức thời của sự xuất hiện hình học mới này là đặt dấu chấm hết cho các bài toán cổ xưa về định đề song song, một định đề được chứng minh độc lập với các giả định khác của hình học Euclid. Nhưng một hậu quả còn sâu rộng hơn nhiều là hình học đã được giải phóng khỏi khuôn mẫu cổ truyền của nó. Tính thuyết phục thâm căn cố đế của những thế kỷ xưa khẳng định rằng chỉ có một hình học khả hữu bị phá vỡ tan tành, và một con đường thênh thang đã rộng mở để có thể sáng tạo nhiều hệ thống hình học khác nhau. Cùng với khả năng sáng tạo ra các môn hình học "nhân tạo" như vậy, rõ ràng hình học không còn nhất thiết phải gắn bó với không gian vật lý thực tại.

Các định đề hình học, đối với nhà toán học, đã trở thành những giả thuyết mà chân lý vật lý của nó phù hợp hay không không cần phải bận tâm. Các nhà toán học có thể đưa ra những định đề theo ý mình miễn là các định đề trong hình học họ đang nghiên cứu nhất quán với nhau.

Năm 1854, nhà toán học Đức *G.F.B.Riemann* cho biết rằng nếu tính vô hạn của đường thẳng bị loại bỏ và chỉ cần thừa nhận tính không bị chặn của nó với một số điều chỉnh không đáng kể các định đề còn lại, một hình học phi Euclid nhất quán khác có thể được phát triển từ giả thiết góc tù. Năm 1871, *F.Klein* đã đưa ra ba môn hình học, một của *Bolyai* và *Lobachevsky*, một của *Euclid* và một của *Riemann* với các tên gọi *hình học hyperbolic, hình học parabol* và *hình học elliptic*.



Bernhard Riemann
(1826 - 1866)
Nhà toán học người Đức

b. Sự ra đời của đại số không giao hoán.

Năm 1848 có thể được xem như năm khai sinh ra đại số không giao hoán. Trong những năm đầu thế kỷ XIX, đại số học chỉ được xem đơn giản là số học suy rộng. Nói cách khác, thay vì làm việc với các con số riêng biệt trong giải quyết các vấn đề số học, trong đại số học ta làm việc với các chữ biểu thị các con số bất kỳ. Chính trong thời gian đầu của thế kỷ XIX, trường phái các nhà đại số Anh – *George Peacock* (1791 – 1858), *Ducan Farquharson Greory* (1813 – 1844), *Augustus De Morgan* (1806 – 1871) và một số người khác lần đầu tiên chú ý đến *sự hiện diện của cấu trúc* trong đại số học, chẳng hạn như các luật giao hoán và kết hợp của phép cộng và phép nhân, luật phân phối của phép nhân đối với phép cộng. Ở đầu thế kỷ XIX, người ta không tin được tồn tại một đại số nhất quán có một cấu trúc khác với cấu trúc đại số thông thường của số học. Mãi tới năm 1843, Nhà toán học Ireland *William Rowan Hamilton* (1805 – 1865) bằng nỗ lực qua các nghiên cứu vật lý của mình và sau nhiều năm suy nghĩ chín chắn đã phát kiến ra *đại số quaternion* trong đó luật giao hoán của phép nhân không còn đúng nữa. Một năm sau, nhà toán học Đức *Hermann Grassmann* (1809 – 1877) đã cho xuất bản đầu tiên cuốn *Ausdehnungslehre* nổi tiếng của mình trong đó đã phát triển toàn bộ các lớp đại số có một cấu trúc khác với cấu trúc của đại số quen thuộc của số học. Năm 1857, nhà toán học Anh *Arthur Caylay* (1821 – 1895) đã nghĩ ra *đại số ma trận*, đó là một ví dụ khác về đại số không giao hoán. Bằng cách phát triển các đại số thỏa mãn các luật cấu trúc khác với các luật mà đại số thông thường tuân thủ, các nhà toán học bắt đầu tháo cửa đập cho dòng đại số không giao hoán ào ạt chảy ra.

Bằng cách làm yếu đi hoặc xóa bỏ hẳn những định đề khác nhau của đại số thông thường, hoặc bằng cách thay thế một hoặc nhiều hơn các định đề đó bằng những định đề không nhất quán với những định đề còn lại, một số lượng lớn khác nhau các hệ thống có thể được nghiên cứu tới. Chẳng hạn ta có các hệ thống như phỏng nhóm, nửa nhóm, monoid, nhóm, vành, miền nguyên, dàn, vành có phép chia, vành Bool, đại số Bool, trường, không gian vectơ, đại số Jordan và đại số Lie, hai hệ thống sau là những ví dụ về đại số không kết hợp. Theo sự thống kê chưa đầy đủ, các nhà toán học đã nghiên cứu được trên 200 cấu trúc đại số như vậy. Đại bộ phận các công trình này thuộc thế kỷ XX và điều đó phản ánh ý thức về sự khái quát hóa và trừu tượng hóa thường thấy trong toán học ngày nay.

c. Việc số học hóa giải tích.

Sự kiện thứ ba trong ba sự kiện toán học sâu sắc của thế kỷ XIX đã xảy ra trong lĩnh vực giải tích học và cũng chậm chạp khi trở thành hiện thực, đó là việc số học hóa giải tích. Chúng ta đã biết rằng một số nhà toán học của thế kỷ XVIII đã bắt đầu báo động về sự khủng hoảng sâu đậm về cơ sở giải tích. Năm 1754, *d'Alembert* đã cho thấy rằng phải cần đến các lý thuyết giới hạn và vào năm 1797 *Lagrange* đã nỗ lực làm cho giải tích chặt chẽ hơn. Một bước tiến khổng lồ đã được thực hiện vào năm 1821 khi nhà toán học Pháp *Augustin Louis Cauchy* đã thực hiện thành công gợi ý của *d'Alembert* bằng cách phát triển một lý thuyết chấp nhận được rồi sau đó định nghĩa sự

hội tụ, tính liên tục, tính khả vi và tích phân xác định theo quan điểm về giới hạn. Những định nghĩa này hiện chúng ta thấy trong các sách giáo khoa sơ cấp về phép tính vi – tích phân.

Những yêu cầu cần phải hiểu sâu hơn nữa về cơ sở của giải tích đã được đáp ứng và gây ấn tượng mạnh vào năm 1874 khi nhà toán học Đức *Karl Weierstrass* đưa ra một ví dụ về hàm liên tục mà không có đạo hàm hoặc nói cách khác, đó là một đường mà không có tiếp tuyến tại mọi điểm bất kỳ nào của nó. *Georg Bernhard Riemann* đưa ra một hàm liên tục với mọi giá trị vô tỷ của biến nhưng lại gián đoạn với mọi giá trị hữu tỷ. Những ví dụ như vậy dường như mâu thuẫn với trực giác của con người và càng làm cho người ta nghĩ rằng *Cauchy* chưa thực sự thấy được cái tột cùng khó khăn trên con đường đi đến một cơ sở vững vàng cho giải tích học. Lý thuyết xây dựng giới hạn được xây dựng trên một khái niệm trực giác đơn giản hơn về hệ thống số thực. Thực ra hệ thống số thực ít nhiều đã được mặc nhiên xem như thực sự đã có và trong các văn bản trình bày về vi - tích phân hiện nay vẫn như vậy. Người ta thấy rõ ràng lý thuyết giới hạn, tính liên tục và tính khả vi phụ thuộc vào những tính chất khó hiểu của số thực hơn nhiều so với những gì chúng cần có. Do đó *Weierstrass* đề xuất một chương trình trong đó trước hết bản thân hệ thống số thực phải làm thật chặt chẽ rồi tất cả các khái niệm cơ bản của giải tích mới được rút ra từ hệ thống đó. Chương trình nổi tiếng này được gọi là chương trình *số học hóa giải tích*, nó cho thấy quả là tồn tại những khó khăn và rắc rối nhưng sau đó đã được *Weierstrass* và các môn đệ thực hiện được. Ngày nay mọi thứ trong giải tích đều có thể rút ra được một cách hợp lý từ một tập hợp định đề đặc trưng cho hệ thống số thực.

Các nhà toán học còn đi xa hơn nhiều so với việc xác lập hệ thống số thực để làm cơ sở cho giải tích. Hình học Euclid thông qua cách biểu thị bằng giải tích cũng có thể thực hiện trên hệ thống số thực và các nhà toán học cho biết đại bộ phận các ngành hình học đều nhất quán nếu hình học Euclid nhất quán. Ngoài ra vì hệ thống số thực hoặc một bộ phận của nó có thể dùng để biểu thị nhiều ngành đại số nên tính nhất quán của khá nhiều ngành đại số có thể thực hiện được phụ thuộc vào hệ thống số thực. Ngày nay có thể nói được rằng về cơ bản, mọi toán học hiện hữu đều nhất quán nếu hệ thống số thực nhất quán. Điều đó nói lên tầm quan trọng to lớn của hệ thống số thực trong việc xây dựng cơ sở cho toán học.

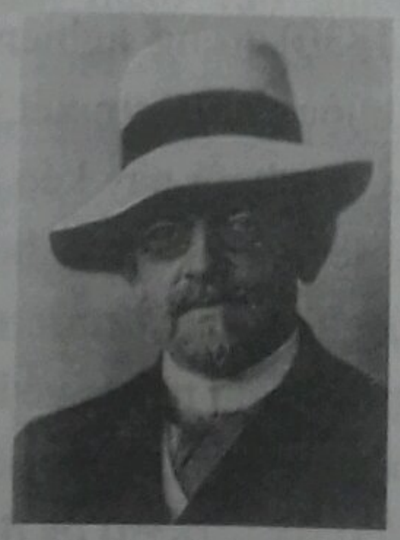
Vì phần lớn các bộ phận toán học hiện hữu đều có thể thực hiện được trên hệ thống số thực nên người ta không thể không tự hỏi rằng không biết các cơ sở dữ liệu có thể nén sâu được nữa không. Trong những năm cuối thế kỷ XIX, cùng với các công trình của *Richard Dedekind* (1831 – 1916), *Georg Cantor* (1845 – 1918) và *Giuseppi Peano* (1858 – 1932), những cơ sở này đã được thiết lập trong một hệ thống các số tự nhiên đơn giản và cơ bản hơn nhiều. Họ đã cho thấy hệ thống số thực và do đó một bộ phận toán học có thể được rút ra như thế nào từ một tập hợp tiên đề cho hệ thống các số tự nhiên. Đến đầu thế kỷ XX lại được thấy rằng các số tự nhiên có thể định nghĩa theo quan hệ của Lý thuyết tập hợp và như vậy đại bộ phận toán học lại có thể thực hiện trên mảnh đất của Lý thuyết tập hợp. Các nhà lôgic đứng đầu là *Bertrand Russell* (1872 – 1970) và *Alfred North Whitehead* (1861 – 1947) lại có tham vọng nén cho cơ sở xuống sâu hơn bằng cách rút ra lý thuyết các tập hợp từ một cơ sở trong phép tính mệnh đề của lôgic mặc dù không phải mọi nhà toán học đều cảm thấy bước đi này sẽ được thực hiện thành công.

2. Những quan điểm toán học cơ bản đã được hoàn thiện trong giai đoạn giao thời hai thế kỷ

a. Sự ra đời của Lý thuyết tập hợp vai trò quan trọng của nó trong sự phát triển toán học.

Cha đẻ của Lý thuyết tập hợp là *Georg Cantor*. Ông sinh ở St. Petersburg năm 1845, chuyển sang Đức cùng với song thân vào năm 1856, học ở trường Đại học Berlin (ở đó ông chịu ảnh hưởng của *Weierstrass*) từ 1863 đến 1869, dạy tại Đại học Halle từ 1869 đến 1905 và qua đời vào năm

1918. Những điều ông sớm quan tâm là lý thuyết số, phương trình vô định và các chuỗi lượng giác. Lý thuyết huyền ảo về các chuỗi lượng giác dường như gây cho ông một ấn tượng liên hệ tới cơ sở của giải tích học. Ông đưa ra một luận giải rất đẹp về các số vô tỷ bằng cách dùng các dãy hội tụ các số hữu tỷ, điều này khác căn bản với cách luận giải theo kiểu hình học của *Dedekind*. Năm 1874, ông bắt đầu công bố một công trình có tính chất cách mạng về *lý thuyết tập hợp* và *lý thuyết về cái vô hạn*. Với công trình sau, *Cantor* đã tạo ra toàn bộ một lĩnh vực nghiên cứu toán học mới. Trong các bản tham luận của mình, ông đã phát triển các số siêu hạn dựa trên việc xem xét toán học đối với cái vô hạn thực tại và đã tạo ra một *số học các số siêu hạn* tương tự như số học các số hữu hạn. *Cantor* là một người mang nặng tín ngưỡng và công trình của ông, hiểu theo một nghĩa nhất định, là tiếp tục những lập luận có liên hệ tới những *nghịch lý của Zeno*, phản ánh lòng ngưỡng mộ đầy thiện cảm đối với tư duy bác học thời trung cổ về bản chất của cái vô hạn. Quan niệm của ông đã bị phản đối mạnh mẽ, chủ yếu từ phía *Leopold Kronecker* (1823 – 1891) của Đại học Berlin. Đã xuất hiện những vướng mắc về lôgic và những nghịch lý. Vì đại bộ phận toán học có thể thực hiện được trên lý thuyết số thực nên việc phát hiện các nghịch lý viền quanh lý thuyết tập hợp đã làm nảy sinh cuộc khủng hoảng về cơ sở toán học và nhiều nhà toán học đã tham gia vào việc giải quyết cuộc khủng hoảng đó. Ba trường phái quan trọng của *triết học toán học* đã xuất hiện, đó là *trường phái lôgic* biểu lộ sự dứt khoát trong *Principia mathematica* trứ danh của *Whitehead* và *Russell*, *trường phái trực giác* có cội nguồn từ nhà toán học Hà Lan *J. E. J. Brouwer* (1881 – 1966, và *trường phái hình thức* do một nhà toán học người Đức *David Hinbert* (1862 – 1943) xây dựng nên. Cuộc bút chiến đầu thế kỷ XX giữa các nhà hình thức luận và các nhà trực giác luận về bản chất là tiếp tục cuộc bút chiến giữa *Cantor* và *Kronecker*.



David Hilbert
(1862 - 1943)
Nhà toán học người Đức

Dẫu vậy, tiếp sau sự phát triển lý thuyết tập hợp của *Cantor*, việc quan tâm tới lý thuyết đó đã phát triển nhanh chóng khi thực sự mỗi ngành toán học đều chạm chân đến nó. Các khái niệm về không gian và hình học của một không gian chẳng hạn đã hoàn toàn được cách mạng hóa bởi lý thuyết tập hợp. Các quan niệm cơ bản trong giải tích như giới hạn, hàm, tính liên tục, đạo hàm và tích phân bây giờ đã được mô tả thích hợp theo các tư tưởng của lý thuyết tập hợp. Tuy nhiên điều quan trọng hơn cả là cơ hội dành cho những phát triển mới mà trước đó không dám mơ ước tới. Ấy là cùng với việc tái xác nhận các thủ tục định đề trong toán học, các không gian trừu tượng đã ra đời, các lý thuyết tổng quát về thứ nguyên và độ đo đã được tạo ra và phát triển đặc biệt một ngành học toán học gọi là *Tôpô học*. Nói tóm lại dưới sự ảnh hưởng của Lý thuyết tập hợp, các bộ môn toán học cổ điển đã thống nhất đáng kể với nhau và nhiều môn toán học mới đã được tạo ra với một vận tốc bùng nổ.

b. Hoàn thiện quan niệm về không gian và hình học của nó dưới ánh sáng Lý thuyết tập hợp.

Khái niệm không gian và hình học của một không gian đã thay đổi nhiều từ thời Hy Lạp cổ đại. Đối với người Hy Lạp chỉ có một không gian và một hình học, đó là những quan niệm tuyệt đối. Người ta không nghĩ không gian như là tập các điểm mà là một lĩnh vực, một địa điểm trong đó các vật có thể được chuyển động quanh nhau và so sánh được với nhau. Theo quan niệm này mối liên hệ cơ bản trong hình học là sự so sánh hoặc sự có thể chồng lên nhau.

Cùng với sự phát triển của Hình học giải tích ở thế kỷ XVIII, không gian bắt đầu được xem như một tập hợp điểm, và cùng với sự phát hiện ra các hình học Phi – Euclid cổ điển cuối thế kỷ XIX, các nhà toán học đã chấp nhận tình huống có nhiều hơn một hình học. Nhưng không gian vẫn chỉ được xem là một địa điểm trong đó các vật có

thể được chuyển động quanh nhau và so sánh được với nhau. Tư tưởng trung tâm thiên về một *nhóm các phép biến đổi tương đẳng* cho một không gian thành chính nó và hình học bắt đầu được xem như là việc nghiên cứu các tính chất của những cấu hình các điểm không biến đổi trong một không gian đóng khi nó chịu tác động của các phép biến đổi này. Quan điểm này được *Fellix Klein* (1849 – 1929) mở rộng trong tác phẩm nổi tiếng *Erianger Program* (Chương trình mở rộng) của ông năm 1872. Trong tác phẩm ấy, *mỗi hình học được định nghĩa như là một lý thuyết bất biến của nhóm các phép biến đổi*. Quan niệm này đã tổng hợp và khái quát hóa tất cả các khái niệm trước đây về hình học và cung cấp một cách phân loại hình học đặc biệt rõ ràng về một số lớn các hình học quan trọng.

Cuối thế kỷ XIX, cùng với sự phát triển tư tưởng cho rằng một ngành toán học là một thể trừu tượng các định lý suy diễn từ một tập hợp các tiên đề, cho nên theo quan điểm này thì mỗi hình học thành một ngành riêng của toán học. Các tập hợp tiên đề được nghiên cứu cho một số lớn các hình học khác nhau, nhưng *Erianger Program* không có cách gì mà bị loại bỏ, bởi một hình học có thể xem là một ngành toán học với tính cách một lý thuyết, bất biến của một nhóm biến đổi.

Tuy nhiên, năm 1906 *Mauriece Fréchet* (1878 – 1973) đã mở đầu việc nghiên cứu các không gian trừu tượng và nhiều hình học rất tổng quát đã xuất hiện và chẳng bao lâu đã tất yếu thích hợp với cách phân loại của *Klein*. Một *không gian* trở thành chỉ là một tập hợp các vật, thường được gọi là các *điểm* cùng với một tập hợp các *quan hệ* trong đó các điểm này được xét tới, và một *hình học* đơn giản trở thành lý thuyết của một không gian như vậy. Tập hợp các quan hệ liên quan đến các điểm đó được gọi là *cấu trúc không gian* và cấu trúc này có thể hoặc không thể giải thích được theo lý thuyết của một nhóm phép biến đổi. Thế là thông qua Lý thuyết nhóm, hình học đã được khái quát hơn. Mặc dầu các không gian trừu tượng được giới thiệu một cách hình thức vào năm 1906, song tư tưởng về một hình học với tính cách nghiên cứu một tập hợp điểm với một cấu trúc thượng tầng nào đó thực sự đã được *Riemann* ghi nhận trong một bài giảng tầm cỡ của ông vào năm 1854. Điều đáng chú ý là một số hình học mới này đã tỏ ra có những ứng dụng giá trị trong lý thuyết tương đối của *Einstein* và trong những phát triển khác của vật lý hiện đại.

c. Quan niệm mới về hàm dưới ánh sáng Lý thuyết tập hợp.

Cũng như các khái niệm về không gian và hình học, quan niệm về *hàm* cũng trải qua một tiến hóa đáng ghi nhận và mỗi người học đều thấy những nét tinh lọc khác nhau trong quá trình tiến hóa này từ những giáo trình sơ cấp của các trường phổ thông đến những giáo trình cao cấp hơn ở bậc đại học.

Lịch sử thuật ngữ *hàm* là một ví dụ hấp dẫn về khuynh hướng của các nhà toán học nhằm khái quát hóa và mở rộng quan niệm của họ. Từ hàm, theo nghĩa Latin tương đương với nó do *Leibniz* đưa ra vào năm 1694, lúc đầu chỉ bất kỳ một đại lượng nào đó có liên quan tới một đường, chẳng hạn tọa độ của một điểm trên đường đó, độ nghiêng của đường, bán kính cong của đường, … Khoảng 1718, *Bernoulli* xem hàm là bất kỳ một biểu thức chứa một biến và một vài hằng số, và ít lâu sau *Euler* xem hàm là một phương trình bất kỳ hoặc một công thức bất kỳ chứa các biến và các hằng số. Tư tưởng sau là khái niệm hàm hình thành ở đại bộ phận sinh viên khi tiếp thu các giáo trình toán học sơ cấp. Quan niệm hàm của *Euler* không thay đổi cho tới khi *Joseph Furier* (1768 – 1830) trong nghiên cứu dòng nhiệt của mình đã buộc phải xem xét lại cái gọi là chuỗi lượng giác. Các chuỗi này kéo theo một loại quan hệ giữa các biến, tổng quát hơn những đối tượng đã được nghiên cứu trước đây. Để cố gắng đưa ra được một định nghĩa về hàm đủ rộng để có thể bao quát cả những quan hệ như vậy, *Lejeune Dirichlet* (1805 – 1859) đã đi tới phát biểu: Một biến là một ký hiệu biểu thị bất kỳ một số nào trong tập hợp số, nếu hai biến x, y có quan hệ với nhau như thế

nào đó để khi một giá trị được gán cho x thì bằng một luật hoặc một tương ứng nào đó, một giá trị tự động gán cho y, khi đó ta nói rằng y là một *hàm* (đơn trị) của x. Biến x mà các giá trị được gán cho theo ý muốn được gọi là *biến độc lập*, và biến y có các giá trị phụ thuộc vào các giá trị của biến x được gọi là *biến phụ thuộc*. Các giá trị mà x có thể được chấp nhận tạo thành một *miền xác định* của hàm, và các giá trị mà y nhận được gọi là *miền giá trị* của hàm. Người học thường bắt gặp *định nghĩa Dirichlet* về hàm trong giáo trình nhập môn về phép tính vi – tích phân. Đó là một định nghĩa rất rộng không kéo theo được gì xét về khả năng biểu thị quan hệ giữa x và y bằng một biểu thức giải tích nào đó; nó nhấn mạnh tư tưởng cơ bản về một quan hệ giữa hai tập số với nhau.

Lý thuyết tập hợp đã mở rộng quan hệ về hàm để bao gồm cả các quan hệ giữa bất kỳ hai tập hợp các phần tử, các phần tử đó là các số hoặc bất kỳ cái gì khác. Như vậy trong lý thuyết tập hợp một hàm f được định nghĩa là bất kỳ một tập hợp nào đó được sắp thỏa mãn điều kiện: Nếu $(a_1,b_1)\in f, (a_2,b_2)\in f$ và $a_1=a_2$ thì $b_1=b_2$. Tập hợp A các phần tử đầu tiên của các cặp được sắp gọi là *miền xác định* của hàm và tập hợp B các phần tử thứ hai của các cặp được sắp gọi là *miền giá trị* của hàm Một quan hệ hàm không phải là cái gì khác hơn một loại đặc biệt tập hợp con của *tập hợp tích Desecartes* $A\times B$. Sự tương ứng một – một, đến lượt nó lại là một loại hàm đặc biệt, đó là hàm f thỏa mãn điều kiện: Nếu $(a_1,b_1)\in f, (a_2,b_2)\in f$ và $b_1=b_2$ thì $a_1=a_2$.

Khái niệm hàm như vậy thâm nhập vào nhiều ngành toán học kể từ những năm đầu thế kỷ XX khi các nhà toán học có nhiều ảnh hưởng đã biện hộ cho việc dùng quan hệ này như là một nguyên lý thống nhất và trung tâm trong việc tổ chức các giáo trình toán học. Quan niệm này dường như trở thành một hướng dẫn tự nhiên và hữu hiệu trong việc lựa chọn và phát triển tài liệu dùng trong văn bản. Không còn phải ngờ vực về giá trị của một sinh viên toán học sớm làm quen với quan niệm như vậy về hàm.

Ghi chú. Một *quaternion* (thực) được xây dựng như sau. Xét tập hợp các bộ bốn các số thực có thứ tự $Q=\{(a,b,c,d)|a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, nghĩa là

$$(a,b,c,d)=(e,f,g,h)\Leftrightarrow a=e,b=f,c=g,d=h.$$

Ta đưa vào Q phép cộng và phép nhân cho bởi

$$(a,b,c,d)+(e,f,g,h)\Leftrightarrow(a+e,b+f,c+g,d+h)$$

$$(a,b,c,d).(e,f,g,h)\Leftrightarrow(x,y,z,t)$$

trong đó

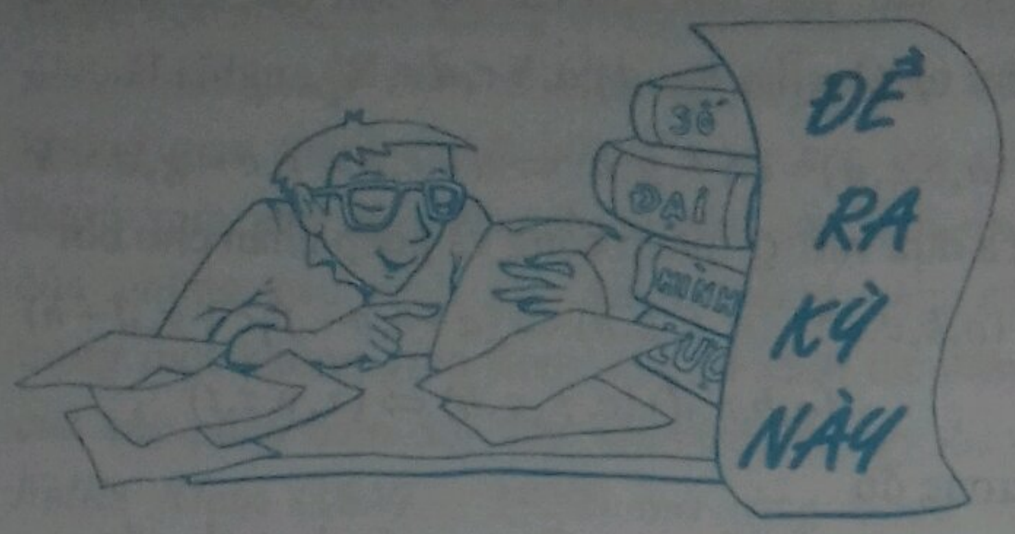
$$x=ae-bf-cg-dh,\ y=af+be+ch-dg,$$
$$z=ag+ce+df-bh,\ t=ah+bg+de-ef.$$

Thế thì phép cộng trong Q giao hoán, kết hợp và nhận $\theta=(0,0,0,0)$ làm phần tử trung hòa. Phép nhân trong Q kết hợp nhưng *không giao hoán* và nhận $\varepsilon=(1,0,0,0)$ làm phần tử trung hòa. Phép nhân phân phối đối với phép cộng. Hơn nữa với mọi số thực r và mọi cặp phần tử $\alpha,\beta\in Q$ có $\alpha(r\beta)=(r\alpha)\beta=r(\alpha\beta)$. Ta nói rằng Q cùng với các phép cộng và nhân được xác định như trên là đại số *quaternion* (thực). Đại số này là *đại số với phép chia*, nghĩa là mọi phần tử khác θ đều có khả nghịch $(\forall\alpha\neq\theta,\exists\beta:\alpha\beta=\varepsilon)$.

Các tương ứng $a\mapsto(a,0,0,0), a+bi\mapsto(a,b,0,0)$ tương ứng là các phép nhúng chìm đại số R các số thực và đại số C các số phức vào đại số *quaternion* (thực) Q. Do đó ta có thể xem R,C là các đại số con của đại số Q.

Ký hiệu $\varepsilon=(1,0,0,0)$, $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$, $k=(0,0,0,1)$ thì mỗi phần tử $\alpha=(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}$ được viết duy nhất dưới dạng $\alpha=a\varepsilon+bi+cj+dk$ và gọi là một *quarternion*. Khi đó phép cộng và phép nhân các quaternion được thực hiện như phép cộng và phép nhân các đa thức theo ε,i,j,k với sự hỗ trợ của bảng nhân ε,i,j,k cho bởi bảng:

$\times$	ε	i	j	k
ε	ε	i	j	k
i	i	$-\varepsilon$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-\varepsilon$	i
k	k	j	$-i$	$-\varepsilon$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/500 (Lớp 6). Tìm các giá trị nguyên của x thỏa mãn $(x-2018)^3+(x-2019)^3=2020-x$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/500 (Lớp 7). Xét 2019 số tự nhiên dạng $x_n=2^{2^n}+1;\ n=1,2,...,2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+...+\frac{2^{2018}}{x_{2019}}<\frac{1}{3}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/500. Cho $0<x<y\le z\le 2$ và $3x+2y+z=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=3x^2+2y^2+z^2.$$

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T4/500. Cho tam giác ABC có $AB<BC$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CD=AB$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại I. Từ I, kẻ IH vuông góc với cạnh BC tại H. Từ H, kẻ HE vuông góc với AB tại E và kẻ HF vuông góc với AD tại F. Chứng minh $\widehat{AEI}=\widehat{AFI}$.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/500. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy(x+y)-x(y-1)-\dfrac{3}{8}(y^2+1)=0 \\ xy^2+x-y=0 \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/500. Tìm nghiệm $x\in[-1;0]$ của phương trình

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}=2.$$

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T7/500. Giải phương trình:

$$(2+\sqrt{3})^{|\sin x|}+\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^{|\cos x|}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

VŨ ĐỨC SƠN

(Hà Nội)

Bài T8/500. Cho tam giác ABC với độ dài các đường cao là h_a, h_b, h_c; a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\ge 2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right).$$

TRẦN CÔNG HOAN

(GV THCS Vĩnh Chấp, Vĩnh Linh, Quảng Trị)

Bài T9/500. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn: $3n=2S^3(n)+7S^2(n)+16$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/500. Cho $0<\lambda<1$ và 2019 số thực dương $x_1,x_2,...,x_{2019}$ sao cho $\sum_{i=1}^{2019}x_i=2019$. Chứng minh rằng: $673\le\sum_{i=1}^{2019}f\left(\dfrac{2019-\lambda x_i}{2019-\lambda}\right)\le\sum_{i=1}^{2019}f(x_i)$, với $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

NGUYỄN TUẤN ANH

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Bài T11/500. Cho các dãy số $(x_n), (y_n)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_{n+1}=\sqrt{1-y_n^2} \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}\sqrt{9-5x_n^2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \\ x_1\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right],\ y_1\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \end{cases}$$

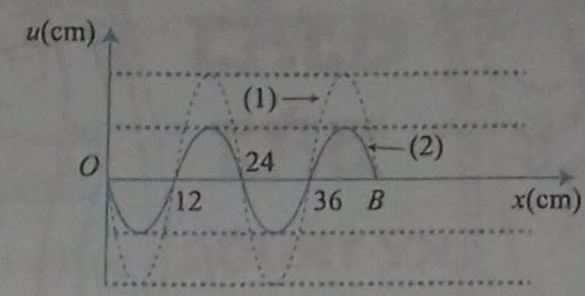
Chứng minh các dãy số $(x_n), (y_n)$ hội tụ và tìm $\lim x_n$, $\lim y_n$.

LÊ QUANG KHANH
(GV THPT Trần Quang Diệu, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T12/500. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=60^0, \widehat{BSC}=90^0, \widehat{CSA}=120^0; SA=2, SB=9, SC=4$. Gọi X là tập các giá trị của d sao cho tồn tại điểm M trong không gian mà khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB), (ABC) có giá trị lần lượt là $\sqrt{3}d, \frac{d}{2}, d, d$. Tìm số phần tử của X và giá trị lớn nhất mà d có thể nhận được.

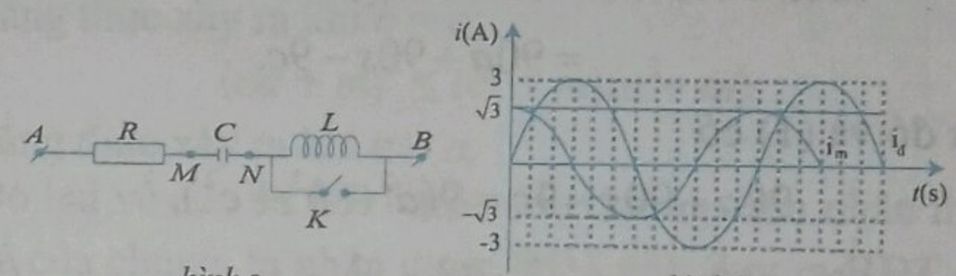
NGUYỄN VIẾT LONG
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài L1/500. Trên một sợi dây OB căng ngang, hai đầu cố định đang có sóng dừng với tần số f xác định. Gọi M, N và P là ba điểm trên dây có vị trí cân bằng cách B lần lượt là 4 cm, 6 cm và 38 cm. Hình vẽ mô tả hình dạng sợi dây tại thời điểm t_1 (đường 1) và $t_2 = t_1 + \frac{11}{12\pi}$ (đường 2). Tại thời điểm t_1, li độ của phần tử dây ở N bằng biên độ của phần tử dây ở M và tốc độ của phần tử dây ở M là 60cm/s. Tại thời điểm t_2, vận tốc của phần tử dây ở P là bao nhiêu?



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH *(Hà Nội)*

Bài L2/500. Cho mạch điện như hình a. Điện áp xoay chiều ổn định giữa hai đầu A và B là $u = 100\sqrt{6}\cos(\omega + \varphi)$. Khi K mở và K đóng, đồ thị cường độ dòng điện qua mạch theo thời gian tương ứng là i_m và i_d được biểu diễn như hình b. Điện trở các dây nối không đáng kể. Điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở R khi K mở bằng là bao nhiêu?



hình a *hình* b

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/500 (For 6th grade). Find all integer x such that $(x-2018)^3 + (x-2019)^3 = 2020 - x$.

Problem T2/500 (For 7th grade). Let $x_n = 2^{2^n} + 1; n = 1, 2, ..., 2019$. Show that

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + ... + \frac{2^{2018}}{x_{2019}} < \frac{1}{3}.$$

Problem T3/500. Given $0 < x < y \le z \le 2$ and $3x + 2y + z = 9$. Find the maximum value of the expression $A = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

Problem T4/500. Given triangle ABC with $AB < BC$. On the side BC choose D so that $CD = AB$. Through D draw the line which is parallel to AC. This line intersects the angle bisector of $\widehat{ABC}$ at I. From I draw IH perpendicular to BC (H is on BC). From H draw HE perpendicular to AB (E is on AB) and draw HF perpendicular to AD (F is on AD). Prove that $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$.

Problem T5/500. Solve the system of equations

$$\begin{cases} xy(x+y) - x(y-1) - \frac{3}{8}(y^2+1) = 0 \\ xy^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/500. Find $x \in [-1; 0]$ such that

$$\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x^2+1} = 2.$$

Problem T7/500. Solve the equation

$$(2+\sqrt{3})^{|\sin x|} + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^{|\cos x|} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

(Xem tiếp trang 29)

Bài T1/496. *Tìm số gồm ba chữ số sao cho số đó bằng 9 lần tổng bình phương các chữ số của nó.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là $\overline{abc} = 9(a^2+b^2+c^2)$ với $1 \le a \le 9$ và $0 \le b, c \le 9$ (1)

Do $\overline{abc}$ chia hết cho 9 thì $a+b+c$ cũng chia hết cho 9, đặt $a+b+c = 9s$ thì

$$100a+10b+c = 90a+10(a+b+c)-9c$$
$$= 90a+90s-9c.$$

Từ đó và (1) có

$$90a+90s-9c = 9(a^2+b^2+c^2),$$

tức là $10a+10s-c = a^2+b^2+c^2$ (2)

Do a, b, c là các chữ số thì chỉ xảy ra s bằng 1, hoặc 2, hoặc 3.

1) Giả sử $a+b+c = 27 = 9.3$ với $s=3$ thì $a=b=c=9$, không thỏa mãn (2).

2) Giả sử $a+b+c = 18 = 9.2$ với $s=2$. Ta có $a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 = (18-c)^2 = 18^2-36c+c^2$.

Thay vào (2) được

$$10a+20-c = 18^2-36c+2c^2-2ab,$$

hay là $10a+2ab = 304-35c+2c^2$, suy ra c là số chẵn. Đặt $c=2e$ với $0 \le e \le 4$. Thay vào đẳng thức trên được $2a(5+b) = 304-70e+8e^2$,

hay là $a(5+b) = 152+e(4e-35)$ (3)

- Nếu $e=0$ thì $a(5+b)=152$, không thỏa mãn.
- Nếu $e=1, c=2, a+b=16$ thì (3) trở thành $a(5+b) = 121 = 11^2$, không thỏa mãn.
- Nếu $e=2, c=4, a+b=14$ thì (3) trở thành $a(5+b) = 98 = 2.7.7$, không thỏa mãn.
- Nếu $e=3, c=6, a+b=12$ thì (3) trở thành $a(5+b)=83$ là số nguyên tố, không thỏa mãn.
- Nếu $e=4, c=8, a+b=10$ thì (3) trở thành $a(5+b) = 76 = 2^2.19$, không thỏa mãn.

3) Giả sử $a+b+c = 9 = 9.1$ với $s=1$. Ta có $a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 = (9-c)^2 = 9^2-18c+c^2$.

Thay vào (2) được

$$10a+10-c = 81-18c+2c^2-2ab,$$

hay là $10a+2ab = 71-17c+2c^2$, suy ra c là số lẻ. Đặt $c = 2e+1$ với $0 \le e \le 3$. Thay vào đẳng thức trên được $2a(5+b) = 56-26e+8e^2$, hay là

$$a(5+b) = 28+e(4e-13) \quad (4)$$

- Nếu $e=0, c=1, a+b=8$ thì (4) trở thành $a(5+b) = 28 = 2^2.7$, không thỏa mãn.
- Nếu $e=1, c=3, a+b=6$ thì (4) trở thành $a(5+b)=19$ là số nguyên tố, không thỏa mãn.
- Nếu $e=2, c=5, a+b=4$ thì (4) trở thành $a(5+b) = 18 = 2.9 = 3.6$.

Với $a=3, b=1, c=5$ thì $315 = 9(3^2+1^2+5^2)$, thỏa mãn. Với $a=1, 2, 4$ không thỏa mãn.

- Nếu $e=3, c=7, a+b=2$ thì (4) trở thành $a(5+b) = 25 = 5.5$, không thỏa mãn.

Vậy bài toán chỉ có một đáp số là số

$$315 = 9(3^2+1^2+5^2). \quad \square$$

➢***Nhận xét.*** 1) Một số bạn không đọc kĩ đề bài nên đi giải bài toán: *Tìm số gồm ba chữ số sao cho số đó bằng 9 lần bình phương của tổng các chữ số của nó.* Bài này vô nghiệm.

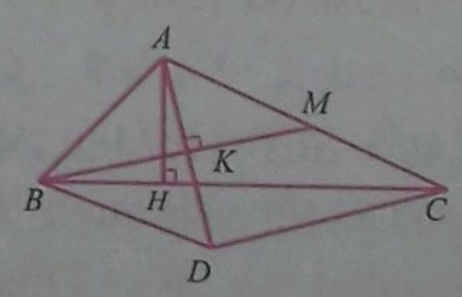
2) Nếu sử dụng bất đẳng thức ba biến hoặc tam thức bậc hai thì lời giải gọn hơn, nhưng không phù hợp với kiến thức toán lớp 6.

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/496. *Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^0$, $\widehat{C} = 30^0$. Bên ngoài tam giác ABC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 15^0$. Chứng minh rằng tam giác ABD đều.*

Lời giải. Lấy $M \in AC$ sao cho $\widehat{ABM} = 30^0$ thì



$$\widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{ABM} - \widehat{MAB}$$
$$= 180^0 - 30^0 - 105^0 = 45^0.$$

Vẽ $AH \perp BC$ tại H, $AK \perp BM$ tại K.

ΔAHC vuông có $\widehat{ACH} = 30^0$ nên $AC = 2AH$.

ΔAHB vuông có $\widehat{ABH} = 45^0$ nên $AH = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2}AB$.

ΔAKB vuông có $\widehat{ABK} = 30^0$ nên $AB = 2AK$

$\Rightarrow AC = 2\sqrt{2}AK$.

ΔAKM vuông có $\widehat{AMK} = 45^0$ nên $AK = \dfrac{AM}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AC = 2AM \Rightarrow MA = MC$.

Gọi $K' = AD \cap BM$. Ta có

$$MK' \parallel CD \text{ (do } \widehat{AMB} = \widehat{ACD} = 45^0).$$

Mà $MC = MA$ nên $K'A = K'D$. Lại có $\widehat{ABK'} = \widehat{DBK'}$ $(= 30^0)$ do đó ΔABD cân mà $\widehat{ABD} = 60^0$ nên ΔABD đều. □

(Chú ý: ta cũng có $AK' \perp BM$ nên $K \equiv K'$).

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt. **Nghệ An:** *Hoàng Thế Hiếu, Hoàng Nguyễn Mai Lương, Thái Trần Thảo Trang, Nguyễn Công An, Thái Huyền Trang, Trần Hồng Minh, Nguyễn Thị Khánh Linh, Nguyễn Tất Tú, Phạm Trọng Toàn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phạm Ngọc Trinh*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Khối 1, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hoàng Hưng*, 7A, *Đỗ Thị Như Nguyệt*, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Nguyễn Trần Phương Mai*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Vũ Nhật Minh*, 7A5, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Phú Thọ:** *Chử Lê Phương Linh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 7B, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam; *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/496. *Cho x, y, z là ba số không âm. Chứng minh rằng:* $[(x+y)(y+z)(z+x)]^2$

$$\geq xyz(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) \ (*)$$

Lời giải. • Nếu $xyz = 0$ thì BĐT (*) trở thành

$$[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq 0,$$

BĐT này luôn đúng, đẳng thức xảy ra khi

$$(x,y,z) \in \{(0,0,k), (0,k,0), (k,0,0) \text{ với } k \geq 0\}.$$

• Nếu x, y, z đều dương thì $xyz > 0$, ta chia cả hai vế của (*) cho $(xyz)^4$ và biến đổi tương đương thành:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{2}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)\left(\frac{2}{xz}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}\right)\left(\frac{2}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right) \quad (1)$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ $(a,b,c > 0)$ và

$$m = ab + bc + ca \ (m > 0)$$

thì (1) trở thành

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$
$$\geq (ab+m)(bc+m)(ca+m). \quad (2)$$

Để ý rằng $(a+b)(a+c) = a^2 + m$;

$$(b+c)(b+a) = b^2 + m; (c+a)(c+b) = c^2 + m$$

nên (2) tương đương với

$$(a^2+m)(b^2+m)(c^2+m)$$
$$\geq (ab+m)(bc+m)(ca+m). \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có

$$(ab+m)^2 \leq (a^2+m)(b^2+m),$$

đẳng thức xảy ra khi $a = b$;

$$(bc+m)^2 \leq (b^2+m)(c^2+m),$$

đẳng thức xảy ra khi $b = c$;

$$(ca+m)^2 \leq (c^2+m)(a^2+m),$$

đẳng thức xảy ra khi $c = a$.

Do hai vế của ba BĐT trên đều dương, nên nhân theo vế của chúng, ta nhận được BĐT (3). Suy ra BĐT (*) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. Vậy với x, y, z không âm, ta luôn có BĐT (*), đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hoặc

$$(x,y,z) \in \{(0,0,k), (0,k,0), (k,0,0) \text{ với } k \geq 0\}. \ □$$

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn tham gia đều cho kết quả đúng, tuy nhiên biến đổi còn quá dài dòng do không đặt thêm biến phụ. Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Bắc Ninh**: *Lê Danh Vinh*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Thanh Hóa**: *Lê Đức Anh*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

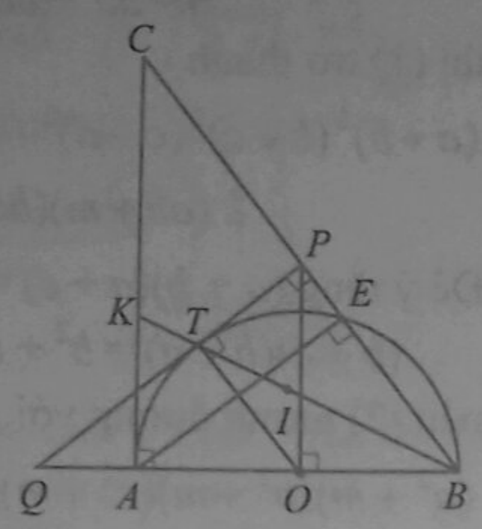
Bài T4/496. *Cho nửa đường tròn (O; R) đường tròn kính AB và tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy AK = R. Đường tròn tâm K bán kính R cắt KB ở I, đường tròn tâm B bán kính BI cắt (O) ở E. Tia BE cắt Ax ở C. Chứng minh rằng đường trung trực của BC là tiếp tuyến của (O).*

Lời giải. Gọi P là trung điểm của BC. Trung trực của BC cắt đường thẳng AB tại Q; T là hình chiếu của O trên PQ. Ta sẽ chứng minh $OT = R$. Ta có:

$$BK=\sqrt{AB^2+AK^2}=R\sqrt{5},$$

suy ra $BI=BE=(\sqrt{5}-1)R$.

Ta có $AE \parallel PQ$ (cùng vuông góc với BC) và $BP \parallel OT$ (cùng vuông góc với PQ).



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có $BE.BC=BA^2$, suy ra

$$BC=\frac{AB^2}{BE}=\frac{4R^2}{(\sqrt{5}-1)R}$$
$$=R(\sqrt{5}+1).$$

Do đó $BP=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}R.$

Lại có PO là đường trung bình của tam giác ABC nên $PO \parallel AC$, dẫn đến $PO \perp AB$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PQB ta có

$$BO.BQ=BP^2 \Rightarrow BQ=\frac{BP^2}{BO}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}R$$

$$\Rightarrow QO=BQ-BO=\frac{\sqrt{5}+1}{2}R.$$

Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{OT}{BP}=\frac{QO}{QB}\Rightarrow OT=\frac{BP.QO}{QB}=R.$$

Vậy PQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại T. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt. **Nghệ An:** *Lê Văn Quang Trung*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Nguyễn Vũ Quỳnh Mai, Nguyễn Thị Vân Anh, Nguyễn Thị Oanh, Nguyễn Vũ Ngọc Linh, Hoàng Lê Quỳnh Anh*, 9A3, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/496. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2(y-2x^2y)+y\sqrt{(xy+1)(3-xy)}=y^5 \\ x^3(1-x^2)+x\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+(x^2-y^2)^2}\right)=x^2y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Ta giải hệ phương trình đã cho chỉ trong trường hợp $x\neq 0;\ y\neq 0$ (nếu trong trường hợp x, y tùy ý thì lời giải cần tới kiến thức của bậc THPT).

ĐK: $(xy+1)(3-xy)\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq xy\leq 3.$

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-2x^2)+\sqrt{2xy-x^2y^2+3}=y^4 \\ x^2(1-x^2)+\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(x^2-y^2\right)^2}=xy^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-(1-xy)^2}=y^4+2x^4-x^2 & (1) \\ -2x^2+2x^4-1-\sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}=-2xy^2 & (2) \end{cases}$$

Cộng theo vế của (1) và (2), ta được:

$$\sqrt{4-(1-xy)^2}-2x^2+2x^4-1-\sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}$$
$$=y^4+2x^4-x^2-2xy^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4-(1-xy)^2}=\sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}$$
$$+x^2+y^4-2xy^2+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4-(1-xy)^2}=\sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}+(x-y^2)^2+1. \quad (3)$$

Ta có:

$$\sqrt{4-(1-xy)^2}\leq 2;\sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}+(x-y^2)^2+1\geq 2.$$

Do đó

$$(3)\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-(1-xy)^2}=2 \\ \sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}+(x-y^2)^2+1=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-xy=0 \\ x^2-y^2=0 \\ x-y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=xy \\ x^2=y^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Thử lại, ta thấy $x=y=1$ thỏa mãn điều kiện và các phương trình trong hệ. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(1;1)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán khó nên ít bạn tham gia gửi bài giải. Điều then chốt của lời giải là biến đổi làm xuất hiện phương trình (3). Sau đó sử dụng ước lượng

$$\sqrt{4-(1-xy)^2}\leq 2\leq \sqrt{1+4(x^2-y^2)^2}+(x-y^2)^2+1$$

để suy ra kết quả của bài toán. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa**: *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa. Hoan nghênh các bạn *Lê Ngọc Tùng* và *Trương Ngọc Tâm* đã giải bài toán cả trong trường hợp khó như $y=0;\ x\neq 0$. Hai bạn đều thực hiện đổi biến số và đưa về giải phương trình bậc ba $t^3-2t^2-t+1=0$.

Phần này nằm ngoài chương trình bậc THCS.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/496. *Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xyz} \\ x+y+z=xyz+\dfrac{8}{27}(x+y+z)^3 \end{cases}.$$

Lời giải. (Của bạn *Bùi Tuấn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** và một số bạn khác).

Điều kiện hệ phương trình có nghiệm là $x, y, z \neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có:

$$xy+yz+zx=1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$$

$$\Leftrightarrow x+y+z-xyz=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Từ đẳng thức thu được và từ phương trình thứ 2 của hệ phương trình đã cho, ta có

$$(x+y)(y+z)(z+x)=\frac{8}{27}(x+y+z)^3. \quad (2)$$

Từ (1) ta có:

$$x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$$

$$y^2+1=y^2+xy+yz+zx=(y+x)(y+z)$$

$$z^2+1=z^2+xy+yz+zx=(z+x)(z+y).$$

Thay vào (2), ta có

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)$$

$$=[(x+y)(y+z)(z+x)]^2=\frac{8^2}{27^2}(x^2+y^2+z^2+2)^3. \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\leq\frac{1}{27}(x^2+y^2+z^2+3)^3.$$

Thay bất đẳng thức này vào (3) ta có

$$\frac{8^2}{27^2}(x^2+y^2+z^2+2)^3\leq\frac{1}{27}(x^2+y^2+z^2+3)^3$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

Từ (1) ta có: $x^2+y^2+z^2\leq xy+yz+zx$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x=y=z.$$

Thay $x=y=z$ vào (1) ta có 2 nghiệm

$$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } x=y=z=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Thử lại vào hệ phương trình ta thấy chúng nghiệm đúng hệ phương trình. □

➢***Nhận xét.*** Có nhiều bạn gửi lời giải bài toán này. Tuy nhiên nhiều bạn giải không chính xác khi áp dụng bất đẳng thức mà không chú ý điều kiện của bất đẳng thức. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Bùi Tuấn Dũng, Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Đoàn Minh Tuệ, Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2, Phù Cát; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 10 A1, THPT Yên Phong số 1; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Trà Vinh:** *Vương Chí Quốc*, 11A12, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/496. *Giải phương trình:* $\log_2 x=\log_{5-x}3$.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} 0<x<5 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

Đặt $t=\log_2 x$. Nhận thấy $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình nên $t\neq 0$. Ta có: $x=2^t$ và

$$\log_{5-x}3=t\Leftrightarrow\log_3(5-x)=\frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}}=5-x\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{t}}+2^t-5=0 \quad (1).$$

Ta thấy, nếu $t<0$ thì $VT(1)<-3<0$ do đó $t>0$.

Xét hàm số $f(t)=3^{\frac{1}{t}}+2^t-5$, với $t>0$.

Ta có: $f'(t)=-\frac{1}{t^2}.3^{\frac{1}{t}}\ln 3+2^t\ln 2$;

$$f''(t)=\frac{1}{t^4}.3^{\frac{1}{t}}\ln^2 3+\frac{2}{t^3}.3^{\frac{1}{t}}\ln 3+2^t\ln^2 2>0, \forall t>0.$$

Mà $f'(t)$ là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ nên theo hệ quả của định lý Rolle, phương trình $f'(t)=0$ chỉ có tối đa một nghiệm trên $(0;+\infty)$. Do vậy, cũng vì $f(t)$ là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ nên phương trình $f(t)=0$ chỉ có tối đa hai nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Dễ thấy $t=1$ và $t=\log_2 3$ là hai nghiệm của $f(t)=0$ trên $(0;+\infty)$, do đó đây là hai nghiệm duy nhất của $f(t)=0$.

Suy ra, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ và $x=3$.

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn làm theo cách giải trên. Một số bạn chia trường hợp rồi đánh giá nghiệm phương trình cũng cho kết quả tương tự. Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Nam Định:** *Vũ Minh Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy*, 10 Toán 1, *Hồ Ngọc Hùng*, *Nguyễn Đức Phát*, 10 Toán 2, *Nguyễn Nhật Minh*, *Đoàn Thị Kim Anh*, *Lê Thị Thúy Nga*, *Võ Thị Hải Yến*,11 Toán 1, *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Lê Như Minh*, *Nguyễn Đình Thông*, *Trần Thị Mỹ Linh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát, *Võ Thị Ánh Thu*, 12A1, THPT số 1 Phù Mỹ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Hữu Ân*, *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Sóc Trăng:** *Trần Vĩnh Phú*, 11A8, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc Trăng. **Long An:** *Phan Quý Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An.

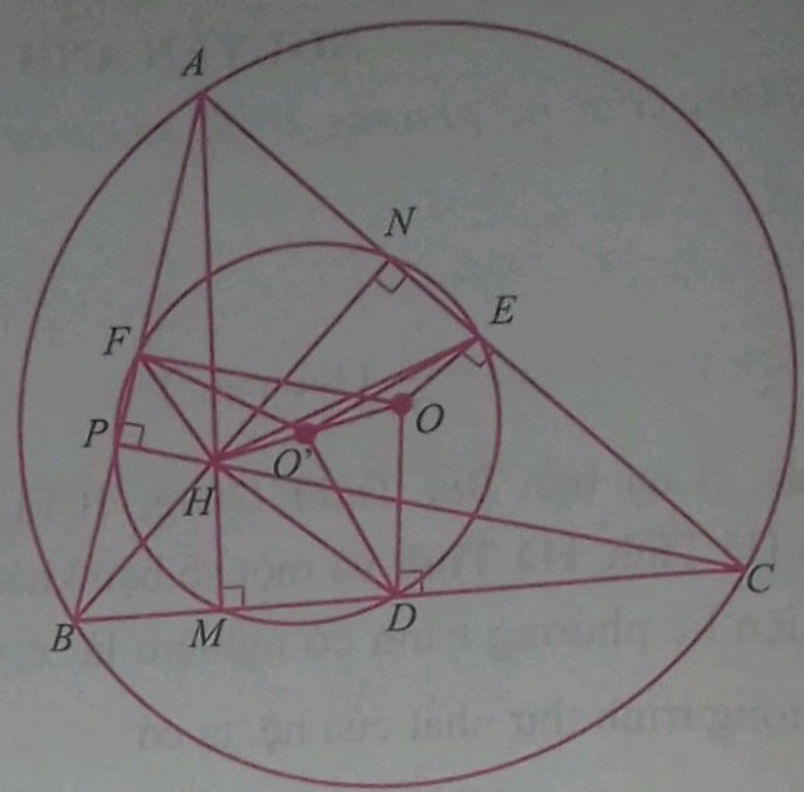
TRẦN HỮU NAM

Bài T8/496. *Chứng minh tổng bình phương khoảng cách từ trung điểm một cạnh của tam giác đến trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó không phụ thuộc vào việc chọn trung điểm của cạnh nào trong tam giác.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**).

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R; D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB; M, N, P là chân các đường cao kẻ từ A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB tương ứng; H là trực tâm, O' là tâm đường tròn Euler của ΔABC.

Theo tính chất đường tròn Euler ta thấy O' là trung điểm của OH và bán kính đường tròn (O') bằng nửa bán kính đường tròn (O). Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến cho các tam giác DOH, EOH, FOH ta được



$$\begin{cases} \dfrac{R^2}{4} = DO'^2 = \dfrac{DO^2+DH^2}{2} - \dfrac{OH^2}{4} \\ \dfrac{R^2}{4} = EO'^2 = \dfrac{EO^2+EH^2}{2} - \dfrac{OH^2}{4} \\ \dfrac{R^2}{4} = FO'^2 = \dfrac{FO^2+FH^2}{2} - \dfrac{OH^2}{4} \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$DO^2+DH^2 = EO^2+EH^2 = FO^2+FH^2 = \frac{OH^2+R^2}{2} \text{ (không đổi).}$$

Bài toán được giải quyết. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Để ý rằng $OH^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2)$, trong đó $a=BC$; $b=AC$; $c=AB$, ta thấy

$$DO^2+DH^2 = EO^2+EH^2 = FO^2+FH^2 = 5R^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

2) Số bài giải gửi về Tòa soạn khá đông. Ngoài bạn *Hào*, các bạn sau cũng có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Hà Minh Đức*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương; **Hưng Yên:** *Bùi Văn Quyến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Tân*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đăng Đức*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Bùi Minh Quân*, *Bùi Tuấn Dũng*, *Trịnh Hoàng Anh*, *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 11 Toán, THPT

chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, *Nguyễn Nhật Minh*, *Lê Thị Thái*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Quảng Nam:** *Trần Thu Hương*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Đồng Tháp:** *Võ Ngọc Vân Anh*, *Nguyễn Trúc Như Bình*, *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, *Trần Đoàn Minh Tuệ*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/496. *Với k là số nguyên dương cho trước, ta ký hiệu bình phương của tổng các chữ số của nó là* $f_1(k)$. *Đặt* $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$ $(n = 1, 2, ...)$. *Hãy tính* $f_{2018}(2^{1990})$.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT Phù Cát, **Bình Định**).

Ký hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của k. Dễ chứng minh

Nhận xét 1. $S(k) \equiv k \pmod 9$.

Nhận xét 2. Nếu $k < 10^m$ thì $S(k) \le 9m$.

Ta có $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$. Suy ra

$$2^{1990} \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod 9.$$

Ta có: $f_1(k) = [S(k)]^2$.

Đặt $N_0 = 2^{1990}$, $N_n = f_n(N_0)$. Suy ra $N_{n+1} = [S(N_n)]^2$.

Do $2^3 < 10$ ta có

$$N_0 = 2^{1990} < 2^{2100} < 10^{700} = S(N_0) \le 9.700 < 10^4$$

$$\Rightarrow N_1 = [S(N_0)]^2 < 10^8 \Rightarrow S(N_1) < 9.8 = 72.$$

Lại có $N_1 = [S(N_0)]^2 \equiv N_0^2 \equiv 7^2 \equiv 4 \pmod 9$

$$\Rightarrow S(N_1) \equiv 4 \pmod 9.$$

Vậy $S(N_1) \le 67 \Rightarrow N_2 = [S(N_1)]^2 \le 67^2 = 4489$

$\Rightarrow S(N_2) \le 30$ (ứng với $S(3999) = 30$).

Mà $N_2 = [S(N_1)]^2 \equiv 4^2 \equiv 7 \pmod 9$

$\Rightarrow S(N_2) \equiv 7 \pmod 9$.

Vậy $S(N_2) \in \{7, 16, 25\}$. Sử dụng hệ thức $N_{n+1} = [S(N_n)]^2$ ta có:

• Nếu $S(N_2) = 7 \Rightarrow N_3 = [S(N_2)]^2 = 49$

$$\Rightarrow N_4 = 169 \Rightarrow N_5 = 256 \Rightarrow N_6 = 169.$$

• Nếu $S(N_2) = 16 \Rightarrow N_3 = 256 \Rightarrow N_4 = 169$

$$\Rightarrow N_5 = 256 \Rightarrow N_6 = 169.$$

• Nếu $S(N_2) = 25 \Rightarrow N_3 = 625 \Rightarrow N_4 = 169$

$$\Rightarrow N_5 = 256 \Rightarrow N_6 = 169.$$

Từ đó: $N_n = 169$, với n chẵn và $n \ge 4$.

$N_n = 256$, với n lẻ và $n \ge 5$.

Vậy $f_{2018}(2^{1990}) = N_{2018} = 169$. □

➢***Nhận xét.*** Đây là một bài toán hay và cũng tương đối khó. Ngoài bạn *Nhân* chỉ có 4 bạn sau đây tham gia giải bài toán này và có lời giải đúng (tuy cách giải hơi dài): **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/496. *Cho dãy số* (x_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được xác định bởi:* $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Chứng minh rằng dãy* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Lời giải. Để cho gọn ta kí hiệu $a = \frac{1}{4}$, $0 < a < 1$. Xét các hàm số $f(x) = a^x$, $g(x) = a^x - x$, $0 \le x \le 1$.

Ta có $f(x)$ là hàm số giảm do $0 < a < 1$, $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục.

Nhận xét $g(0) = 1$, $g(1) = a - 1 < 0$. Do đó theo định lí Bolzano – Cauchy tồn tại duy nhất $0 < c < 1$ mà $g(c) = 0$ (trong trường hợp của bài toán $a = \frac{1}{4}$ thì $c = \frac{1}{2}$). Chú ý $x_1 = 0 < x_3 = a < c < x_2 = 1$ $(a < c$ do $g(a) = a^a - a > 0)$. Kết hợp với $f(x)$ là hàm số giảm, chứng minh bằng quy nạp theo n ta có:

$$x_1 = 0 < x_3 = a < x_5 < x_7 < ... < c < ... < x_8 < < x_6 < x_4 < x_2 = 1.$$

Từ đó suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = p$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = q$, $p \le c \le q$. Ta sẽ chứng minh $p = c = q$ (tức là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$). Ta có: $x_{2n} = f(x_{2n-1})$, $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chuyển qua giới hạn ta suy ra: $q = f(p)$

và $p=f(q)\Rightarrow h(p)=h(q)$, trong đó $h(x)=x+f(x)$, $a=x_3<x<1$. Chú ý

$$h'(x)=1+f'(x)=1+a^x\ln a>0,\ \forall a<x<1$$

vì $-a^x\ln a=a^x|\ln a|<a^a|\ln a|=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}.\ln 4=\frac{\ln 4}{\sqrt{2}}<1$

do $\ln 4<1,4<\sqrt{2}$. Bởi vậy $h(x)$ là hàm số tăng thực sự trong khoảng $(a, 1)$. Từ đó suy ra $p=q$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{2}$. □

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán giới hạn dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng (nhiều bạn nhầm lẫn trong việc chỉ ra $p=q$): **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/496. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:* $f(x)f(y)-\frac{4}{9}xy=f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay giá trị $x=0, y=0$ vào (1), ta thu được $f^2(0)=f(0)$ nên $f(0)=0$ hoặc $f(0)=1$.

• Xét $f(0)=0$: không xảy ra, vì khi đó, ứng với $y=0$, từ (1) suy ra $f(x)\equiv 0$, dẫn đến $-\frac{4}{9}xy\equiv 0$, mâu thuẫn.

• Xét $f(0)=1$. Thay $x=\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{3}{2}$ vào (1) ta thu được $f\left(\frac{3}{2}\right)f\left(-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\frac{3}{2}\right)=0\\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=0\end{array}\right.$.

- Với $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$, thay $y=\frac{3}{2}$ vào (1), ta thu được

$$-\frac{2}{3}x=f\left(x+\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{3}x+1.$$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn ĐK bài ra.

- Với $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$, thay $y=-\frac{3}{2}$ vào (1), ta thu được

$$\frac{2}{3}x=f\left(x-\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{3}x+1.$$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn ĐK bài ra.

Vậy có hai hàm số thỏa mãn bài toán là

$$f(x)=\pm\frac{2}{3}x+1.$$ □

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán quen thuộc về phương trình hàm với cặp biến tự do nên có nhiều bạn gửi bài giải về Tòa soạn. Đa số các bạn gửi đến Tòa soạn đều cho lời giải đúng theo cách đã nêu ở trên. Một số bạn sử dụng các phép biến đổi tương đương và đặt ẩn phụ cũng cho các kết quả đúng. Một số bạn khác tuy nhận được đáp số đúng nhưng vì chỉ giới hạn xét nghiệm trong lớp hàm đa thức nên lời giải không được chấp nhận. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Ngô Bạch Phương*, 10T, *Huỳnh Tấn Phúc*, *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Ngô Bảo An*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hữu An*, 10T, Phổ thông Năng khiếu, *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, *Lê Thị Minh Thùy*, 10T1, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, *Hồ Ngọc Hùng*, *Nguyễn Đức Phát*, *Nguyên Lê Hoàn Phương*, *Trương Tiến Dũng*, 10T2, *Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, *Bùi Văn Quyến*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Long An:** *Phan Quí Lộc*, 12T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Vũ Minh Đức*, 11T1, *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Hà Thanh Thuyết*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thái Nguyên:** *Phan Quang Đạt*, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Trà Vinh:** *Đặng Thành Đạt*, *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành; **Vĩnh Long:** *Tô Lê Hiền Uyên*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/496. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E, AD giao BC tại F. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với các tia EA, EB và tiếp xúc với (O); (O_2) là đường tròn tiếp xúc với các tia FA, FB và tiếp xúc ngoài với (O) tại một điểm trên cung*

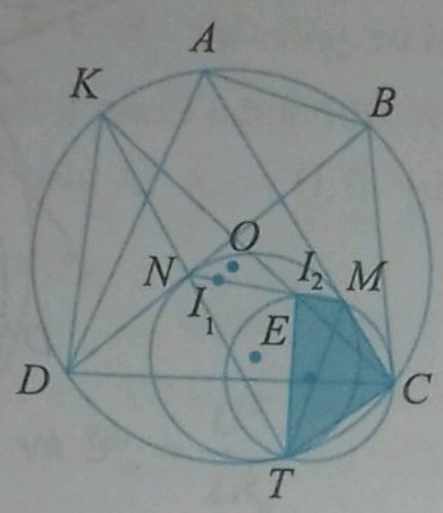
AB không chứa C, D. Chứng minh rằng giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên (O).

Lời giải. Ta cần có các kết quả sau.

Bổ đề 1. Cho đường tròn (O) và hai A, B điểm thuộc (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N. P là giao điểm thứ hai của MN và (O). Khi đó $PA = PB = \sqrt{PM.PN}$.

Phép chứng minh bổ đề 1 rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Bổ đề 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (E) theo thứ tự tiếp xúc với AC, BD tại M, N và tiếp xúc trong với (O) tại T thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B. Khi đó MN đi qua tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ACD, BCD và đường tròn (TCM) đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.



(h.1)

Chứng minh. Gọi K là giao điểm thứ hai của TN với (O); I_2 là giao điểm của MN và KC (h.1). Theo bổ đề 1, K là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAD}/(O)$. (1)

Gọi $V\left(T, \frac{R_E}{R_O}\right)$ là phép vị tự biến đường tròn (O) thành (E).

Qua $V\left(T, \frac{R_E}{R_O}\right)$, K, T theo thứ tự biến thành N, T.

Do đó $\widehat{I_2CT} = \widehat{KCT} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{KT}/(O) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{NT}/(E)$

$= \widehat{NMT} = \widehat{I_2MT}$.

Vậy tứ giác $TCMI_2$ nội tiếp. (2)

Từ đó, chú ý rằng MC tiếp xúc với (E), suy ra

$$\widehat{CI_2T} = \widehat{CMT} = \widehat{MNT} = \widehat{I_2NT}.$$

Điều đó có nghĩa là $\Delta KI_2T \backsim \Delta KNI_2$. Do đó $KI_2^2 = KN.KT$. Theo bổ đề 1, $KD^2 = KN.KT$.

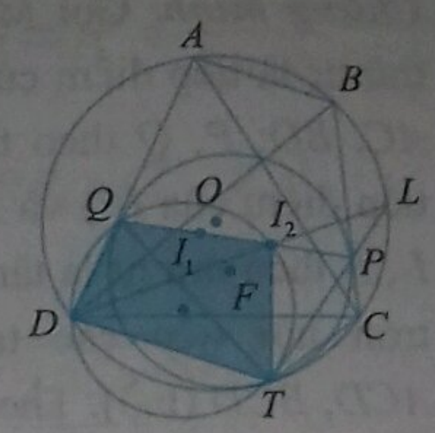
Vậy $KI_2 = KD = KB$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra I_2 là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBCD. Nói cách khác MN đi qua tâm đường tròn nội tiếp I_2 của ΔBCD. (4)

Tương tự MN đi qua tâm đường tròn nội tiếp I_1 của ΔACD. (5)

Từ (1), (4) và (5) suy ra đpcm.

Bổ đề 3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (F) theo thứ tự tiếp xúc với AD, BC tại P, Q và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm T' thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B. Khi đó PQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ACD, BCD và đường tròn $(T'DQ)$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD. (h.3).



(h.2)

Chứng minh. Gọi L là giao điểm thứ hai của $T'P$ với (O); I_2 là giao điểm của PQ và DL (h.2). Theo bổ đề 1, L là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}/(O)$. (1)

Gọi $V\left(T', \frac{R_F}{R_O}\right)$ là phép vị tự biến đường tròn (O) thành (F). Qua $V\left(T', \frac{R_F}{R_O}\right)$, L, T' theo thứ tự biến thành I_2, T' Do đó

$$\widehat{I_2DT'} = \widehat{LDT'} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{LT'}/(O) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{PT'}/(F)$$

$$= \widehat{PQT'} = \widehat{I_2QT'}.$$

Vậy tứ giác $T'DQI_2$ nội tiếp. (2)

Từ đó, chú ý rằng QD tiếp xúc với (F), suy ra

$$\widehat{DI_2T'} = \widehat{DQT'} = \widehat{PQT'} = \widehat{I_2PT'}.$$

Điều đó có nghĩa là $\Delta LI_2T' \backsim \Delta LPI_2$. Do đó $LI_2^2 = LP.LT'$. Theo bổ đề 1, $LC^2 = LP.LT'$.

Vậy $LI_2 = LC = LB$. (3)

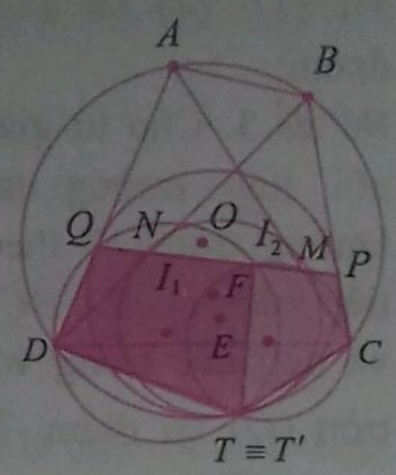
Từ (1) và (3) suy ra I_2 là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBCD. Nói cách khác PQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp I_2 của ΔBCD. (4)

Tương tự PQ đi qua tâm đường tròn nội tiếp I_1 của ΔACD. (5)

Từ (1), (4) và (5) suy ra đpcm.

Bổ đề 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (E) tiếp xúc với AC, BD và tiếp xúc trong với (O) tại điểm T thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B. Đường tròn (F) tiếp xúc với AD, BC và tiếp xúc trong với (O) tại điểm T' thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B. Khi đó $T \equiv T'$.

Chứng minh. Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (E) và AC, BD; P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của (F) và BC, AD; I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD (h.3). Theo các bổ đề 2, 3, M, N, P, Q, I_1, I_2 thẳng hàng. (1)



(*h*.3)

Theo bổ đề 2, tứ giác $TCMI_2$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{QI_2T} = 180^0 - \widehat{MI_2T} = \widehat{MCT} = 180^0 - \widehat{QDI}.$$

Do đó tứ giác $TDQI_2$ nội tiếp. (3)

Theo bổ đề 3, tứ giác $T'DQI_2$ nội tiếp. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $T \equiv T'$. (đpcm).

Bổ đề 5. Nếu S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2) thì S_1, S_2, S_3 thẳng hàng. Phép chứng minh bổ đề 5 rất đơn giản, không trình bày ở đây.

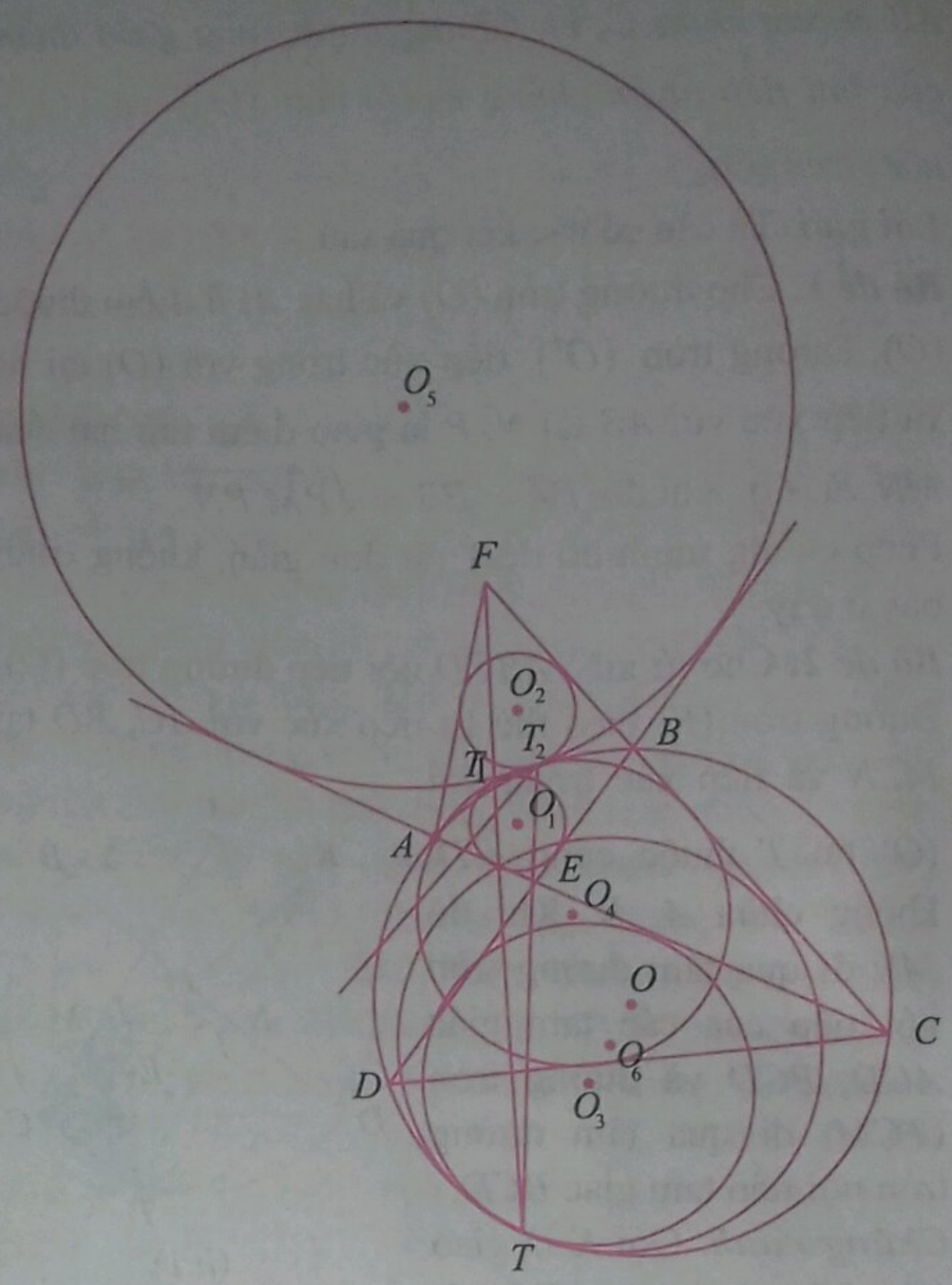
Trở giải bài toán **T12/496.**

Gọi (O_3) là đường tròn tiếp xúc với EC, ED và tiếp xúc trong với cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B; T_1, T_2, T_3 theo thứ tự là tiếp điểm của (O_1), (O_2), (O_3) và (O) (h.4). Theo bổ đề 4, tồn tại các đường tròn (O_4), (O_6) tiếp xúc với AD, BC và theo thứ tự tiếp xúc trong với (O) tại T_1, T_3. Tương tự bổ đề 4, tồn tại đường tròn (O_5) tiếp xúc với AC, BD và tiếp xúc ngoài với (O) tại T_2. Vì F, T_1, T_3 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_6), (O_4); (O_4), (O); (O), (O_6) nên theo bổ đề 4, F, T_1, T_3 thẳng hàng. (1)

Vì E, T_2, T_3 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_3), (O_2); (O_2), (O); (O), (O_3) nên, theo bổ đề 4, E, T_2, T_3 thẳng hàng. (2). Vì F, T_1 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_2), (O_4); (O_4), (O_1) nên, theo bổ đề 4, tâm vị tự ngoài của (O_1), (O_2) thuộc FT_1. (3)

Vì E, T_2 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_1), (O_5); (O_5), (O_2) nên, theo bổ đề 4, tâm vị tự ngoài của (O_1), (O_2) thuộc ET_2. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra T_3 là tâm vị tự ngoài của (O_1), (O_2) (đpcm).



(*h*.4)

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này khó, chỉ có 7 bạn tham gia giải, cả 7 lời giải đều trình bày không tốt.

2) Xin nêu tên cả 7 bạn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Chu Thị Thanh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Quảng Trị:** *Đỗ Nguyễn An Huy*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên - Huế:** *Phan Phước Minh*, 11T1, *Đỗ Trung Thái*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** *Lê Xuân Hoàng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/496. *Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, theo thứ tự xa dần nguồn âm. Mức cường độ âm tại A, B, C lần lượt là 40Db; 35,9dB và 30Db. Xác định khoảng cách giữa B và C.*

Lời giải. Ta có:

$$L_A - L_B = 10.\lg\frac{I_A}{I_B} = 20.\lg\frac{R_B}{R_A} = 20.\lg\frac{R_A + 30}{R_A}$$

Suy ra: $R_A \approx 49,73m$; $R_B \approx 79,73m$

$$L_A - L_C = 20.\lg\frac{R_C}{R_A} \Rightarrow R_C \approx 157,26\text{m}.$$

Do đó khoảng cách B và C bằng:

$$BC = R_C - R_B \approx 77,53\text{m}.$$ □

➢*Nhận xét.* **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, *Phan Nhật Tiến*, 12 Lý 2, *Hà Phương Hoàng Mai*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/496. *Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn cảm thuần và tụ điện mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp* $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V). *Khi* $R = R_0$ *thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại bằng* $\mathcal{P}_m$. *Khi* $R = R_1$ *hoặc* $R = R_2$ *thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB bằng nhau bằng 120 W và có hệ số công suất tương ứng là* $k_1 = 0,6$ *và* $k_2 = 0,8$. *Xác định giá trị của* $\mathcal{P}_m$.

Lời giải.

Khi $R = R_0$ thì $R_0 = |Z_L - Z_C|$ và $\mathcal{P}_m = \dfrac{U^2}{2R_0}$.

Khi $R = R_1$ hoặc khi $R = R_2$ thì công suất bằng nhau: R_1, R_2 là hai nghiệm của phương trình

$$R^2 - \frac{U^2}{\mathcal{P}}R + (Z_L - Z_C)^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{U^2}{R_1 + R_2}.$$

Suy ra $\dfrac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}} = \dfrac{R_1 + R_2}{2R_0}$ (1). Mà $R_1R_2 = (Z_L - Z_C)^2$,

hệ số công suất $k = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{Z_L - Z_C}{R}\right)^2}}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^2}};\ k_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R_0}{R_2}\right)^2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $\dfrac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R_1}{R_0} + \dfrac{R_2}{R_0}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 - k_1^2}} + \frac{k_2}{\sqrt{1 - k_2^2}}\right) = \frac{25}{24}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = 125 \text{ W}.$$ □

➢*Nhận xét.* Chúc mừng các bạn có tên sau đây đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Ngọc Minh Nhật*, *Trần Huy Quý*, 12 Lý 2, *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 19)

Problem T8/500. Given a triangle ABC with h_a, h_b, h_c and a, b, c are the lengths of altitudes and the corresponding sides. Prove that

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq 2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right).$$

Problem T9/500. Find all positive integers n such that $3n = 2S^3(n) + 7S^2(n) + 16$, where $S(n)$ is the sum of all the digits of n.

TOWARDS MATHEMMTICAL OLYMPIAD

Problem T10/500. Given $0 < \lambda < 1$ and 2019 positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ such that $\sum_{i=1}^{2019} x_i = 2019$.

Prove that $673 \leq \sum_{i=1}^{2019} f\left(\dfrac{2019 - \lambda x_i}{2019 - \lambda}\right) \leq \sum_{i=1}^{2019} f(x_i)$,

where $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

Problem T11/500. Two sequences $(x_n), (y_n)$ are determined as follows

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{1 - y_n^2} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\sqrt{9 - 5x_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right], y_1 \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \end{cases}.$$

Show that the sequences $(x_n), (y_n)$ converse and then find $\lim x_n$, $\lim y_n$.

Problem T12/500. Given a triangular pyramid $S.ABC$ with $\widehat{ASB} = 60^0, \widehat{BSC} = 90^0, \widehat{CSA} = 120^0; SA = 2, SB = 9, SC = 4$. Let X be the set of all values d such that there exists a point M from which the distances to the planes (SBC), (SCA), (SAB), (ABC) are respectively $\sqrt{3}d, \dfrac{d}{2}, d, d$. Find the cardinality of X and also find the largest possible value for d.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(1;1)$, các điểm $I(3;-1)$, $K(2;-1)$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các đỉnh B, C tương ứng. Tính giá trị của $x_1 + x_2$.

A. $-\frac{18}{5}$ B. 0 C. $\frac{36}{5}$ D. $\frac{18}{5}$

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|4z+3i| = |4z-4+5i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z+i| + |z-3i|.$$

A. $\min P = 2\sqrt{2}$ B. $\min P = 2\sqrt{5}$

C. $\min P = 5\sqrt{2}$ D. $\min P = \sqrt{5}$

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 + x - 5 = 0, x + y - 3 = 0$.

A. $\frac{19}{6}$ B. $\frac{15}{2}$ C. $\frac{37}{6}$ D. $\frac{9}{2}$

Câu 4. Gọi $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 1+x = \sqrt[3]{6y^2+6y+2} \\ 1+y = \sqrt[3]{6x^2+6x+2} \end{cases}$. Tính giá trị của $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2$.

A. $2\sqrt[3]{2}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $2(\sqrt[3]{2}-1)$ D. $1+\sqrt[3]{2}$

Câu 5. Cho số nguyên dương n và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, ..., A_nB_nC_n$, trong đó các điểm $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng B_iC_i, C_iA_i, A_iB_i $(i = \overline{1, n-1})$ sao cho $A_{i+1}C_i = 2A_{i+1}B_1$, $B_{i+1}A_i = 2B_{i+1}C_i$, $C_{i+1}B_i = 2C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả diện tích của n tam giác đó. Tìm số nguyên dương n biết rằng $S = 3\left(1 - \frac{1}{3^{2018}}\right)$ và tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng 2.

A. $n = 6054$ B. Đáp số khác

C. $n = 2017$ D. $n = 2018$

Câu 6. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ để hàm số $f(x) = x + a\sin x + b\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5 B. 6 C. 4 D. 3

Câu 7. Cắt một vật thể (V) bởi hai mặt phẳng song song $(P),(Q)$ lần lượt vuông góc với trục Ox tại $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ cắt (V) theo thiết diện có diện tích là $S(x) = (1+\sin^2 x)\cos x$. Tính thể tích của phần vật thể (V) giới hạn bởi hai mặt phẳng $(P),(Q)$.

A. 3,14 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{13\pi}{16}$ D. $\frac{8\pi}{3}$

Câu 8. Trong các khẳng định sau đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(1) $\log_{12}(x+1) + \log_{12} x = 1$ là điều kiện cần để có $\log_{12}((x+1)x) = 1$.

(2) $\log_{12}(x+1) + \log_{12} x = 1$ là điều kiện đủ để có $\log_{12}((x+1)x) = 1$.

(3) $\log_{12}((x+1)x) = 1$ là điều kiện cần để có $\log_{12}(x+1) + \log_{12} x = 1$.

(4) $\log_{12}((x+1)x) = 1$ là điều kiện đủ để có $\log_{12}(x+1) + \log_{12} x = 1$.

(5) $\log_{12}((x+1)x) = 1$ là điều kiện cần và đủ để có $\log_{12}(x+1) + \log_{12} x = 1$.

A. 5 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 9. Cho $f(x) = (1-3x+x^6)^{2018}$. Tính

$$S = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

trong đó $n = 6 \times 2018$.

A. 16054 B. Đáp số khác C. -1 D. 1

Câu 10. Số 5×9^{2018} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

A. 1927 B. 1926 C. 1214 D. 4435

Câu 11. Trên parabol $y = x^2 + 1$ (P) lấy hai điểm $A(1;2), B(3;10)$. Gọi M là điểm di động trên cung $\overset{\frown}{AB}$ của (P), M khác A, B. Gọi S_1 là diện tích

hình phẳng giới hạn bởi (P) và MA, gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và MB. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm M khi S_1+S_2 đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x_0^2+y_0^2$.

A. 29 **B.** 11 **C.** 109 **D.** 5

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+12}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\geq 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$?

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $\cos 2x$, $\frac{1}{2}\cos 4x$, $\cos 6x$ là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

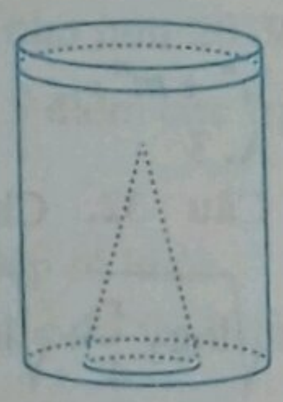
A. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}, x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{8}+k\pi, x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 14. Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơn khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy a và chiều cao 12, được đặt vào trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.



A. 11,37 **B.** 11 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** $\frac{\pi\sqrt{37}}{2}$

Câu 15. Một tập hợp M có tất cả 2^{2018} tập con. Hỏi M có bao nhiêu tập con có ít nhất 2017 phần tử ?

A. 2019 **B.** 2018 **C.** $\frac{2017\times 2018}{2}$ **D.** 2^{2017}

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=SB=SC=SD=1$, đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD. Gọi I là trung điểm của SO. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn đi qua điểm I, đồng thời cắt các đoạn thẳng SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D' khác S. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{(SA')^2}+\frac{1}{(SB')^2}+\frac{1}{(SC')^2}+\frac{1}{(SD')^2}$$

khi (α) thay đổi.

A. 4 **B.** 16 **C.** 64 **D.** 8

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-my+4m-2=0$, $d_2: mx+y-3m-1=0$, với m là tham số. Biết rằng với mỗi giá trị của m thì d_1,d_2 luôn cắt nhau tại M. Khi m thay đổi thì điểm M chạy trên đường tròn nào trong số các đường tròn có phương trình cho ở bốn đáp án sau đây?

A. $x^2+y^2-3x-15=0$

B. $x^2+y^2-5x-5y+10=0$.

C. $(x-1)^2+y^2=2$.

D. $x^2+(y+3)^2=16$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(4;-2;1)$ và vectơ $\vec{v}=(1;1;-2)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục Ox và phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. $A'(5;1;1)$. **B.** $A'(5;3;-1)$.

C. $A'(5;-1;-3)$. **D.** $A'(5;3;-3)$.

Câu 19. Với các số thực dương a,b để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_{a+1}\dfrac{b}{2}$.

A. -2 **B.** 2 **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 20. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(x-1)}}$.

A. $(1;2)$ **B.** $(2;+\infty)$

C. $(1;+\infty)$ **D.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 21. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB=4\sqrt{2}$, $SC=4$, hai mặt phẳng $(SAC),(SBC)$ cùng vuông

góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính khoảng cách giữa CM và SN.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 22. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0^0.

C. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0^0 và nhỏ hơn 90^0.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 23. Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 1$ (m là tham số).

A. $y = x^3 - x + 1$. **B.** $y = x^3 - x^2 + x - 1$.

C. $y = 2x^3 + x^2 - 1$. **D.** $y = -2x^3 + x - 1$.

Câu 24. Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b. Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trực của hai đáy.

A. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$. **B.** $\frac{1}{6}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.

C. $\frac{1}{12}\pi h(a^2 + ab + b^2)$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 25. Gọi r, R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$. Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A. 3 **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 26. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABB') là 30^0.

A. $a^3\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a^3\frac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $a^3\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a^3\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Câu 27. Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính

$$\left(1 - z + z^{2018}\right)\left(1 + z - z^{2018}\right).$$

A. 1 **B.** Đáp số khác **C.** 4 **D.** 2

Câu 28. Cho số phức

$$z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + ... + 2018i^{2017}$$

có phần thực là a và phần ảo là b. Tính $b - a$.

A. 1 **B.** -1 **C.** 1010 **D.** -2017

Câu 29. Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ (với $n \geq 3$ là số nguyên dương). Gọi B_j là trung điểm của đoạn thẳng SA_j ($j = \overline{1, n}$). Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2^n

Câu 30. Các ông *Xuân*, *Hạ*, *Thu*, *Đông* cùng góp chung số vốn 600 tỉ đồng để thành lập một công ty. Số tiền ông *Xuân*, *Hạ*, *Thu* góp lần lượt bằng $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ tổng số tiền của ba người còn lại. Hỏi ông *Đông* góp bao nhiêu tiền?

A. 200 tỉ đồng **B.** 150 tỉ đồng

C. 120 tỉ đồng **D.** 130 tỉ đồng

Câu 31. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{a}{b}\pi - \frac{m}{n}$, với $a, b, m, n \in \mathbb{N}^*$, các phân số $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}$ tối giản. Tính $a^b + m^n$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 2

Câu 32. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x.\log_{2018} y.\log_{2019} z$.

A. $\min S = 27.\log_{2001} 2.\log_{2018} 3.\log_{2019} 5$.

B. $\min S = 44.\log_{2001} 2.\log_{2018} 3.\log_{2019} 5$.

C. $\min S = 8.\log_{2001} 2.\log_{2018} 3.\log_{2019} 5$.

D. $\min S = \frac{289}{8}.\log_{2001} 2.\log_{2018} 3.\log_{2019} 5$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + x - 1) + f(-x^3 - x - 1)$

$$= -6x^6 - 12x^4 - 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính tích phân $\int_{-3}^{1} f(x)dx$.

A. 32 B. 4 C. -36 D. -20

Câu 34. Cho

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0.$$

Tính $x+y+z$.

A. 58 B. 281 C. 111 D. 1296

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và hai mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$, $(Q): 2x+y-z-4=0$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $d \parallel (P)$. B. $d \parallel (Q)$.

C. $(P)\cap(Q)=d$. D. $d\perp(P)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1, d_2.

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-3}{4}$. B. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 của m để hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$?

A. 2017 B. 2018 C. 2019 D. Đáp số khác

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-m}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m>-1 \\ m\neq 8 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m\geq -1 \\ m\neq 8 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq 8 \end{cases}$. D. $m>8$.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để phương trình

$$5^{3x^2-x+2m}+5^{x^2+2x+m+2}=5^{2x^2+x+m+2}+5^{2x^2+2m}?$$

có 4 nghiệm phân biệt

A. 2018 B. 2020 C. 2021 D. 2019

Câu 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\max_{t\in[1;2]}\left|\frac{x^2-x-t}{t+1}\right|, x\in\mathbb{R}.$$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{7}$

Câu 41. Có bao nhiêu đường thẳng cắt hypebol $y=\frac{3x-1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt mà cả hai điểm đó đều có tọa độ nguyên?

A. 12 B. 4 C. 6 D. 3

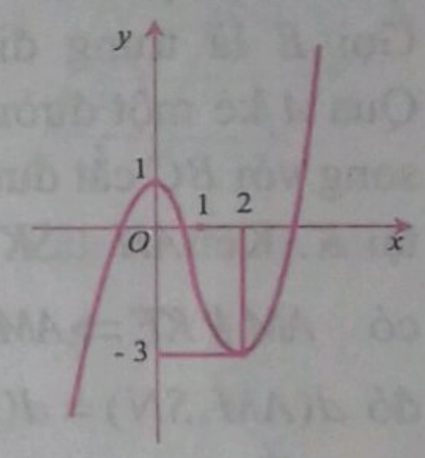
Câu 42. Cho hình hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB=2a$, $AA'=a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ là 60^0. Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB'. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$ B. $\frac{a\sqrt{74}}{37}$ C. $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$ D. $\frac{a\sqrt{37}}{37}$

Câu 43. Cho hàm số $y=ax^3+3bx^2-2cx+d$ (a,b,c,d là các hằng số, $a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$$y=\frac{a}{4}x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(d-2c)x+d-2019$$

nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;0)$ B. $(0;2)$ C. $(1;2)$ D. $(2;+\infty)$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA=AB=BC=\frac{1}{2}AD$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAD),(SCD)$.

A. $\arccos\frac{1}{3}$. B. $\arccos\frac{1}{6}$.

C. $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. D. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ lục giác đều (H). Hỏi (H) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 8 B. 7 C. 4 D. 6

Câu 46. Tìm họ nguyên hàm

$$F(x)=\int(x^2-x+1)e^x dx.$$

(Xem tiếp trang 42)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

1D	2B	3C	4C	5D	6C	7A	8B	9A	10D
11B	12D	13C	14C	15D	16A	17A	18D	19D	20A
21C	22D	23D	24A	25B	26A	27D	28C	29B	30B
31A	32C	33B	34B	35A	36B	37C	38A	39D	40B
41D	42A	43C	44B	45C	46B	47C	48C	49C	50B

Câu 1. Chọn **D.**

Ta có $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$

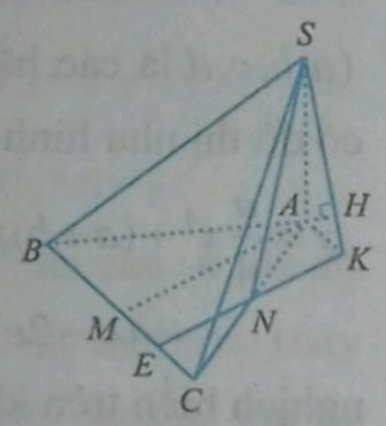
$= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} f(-u)du + \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$

$= \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} [f(x)+f(-x)]dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

$= \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\left|\cos x\right|dx = \sqrt{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx\right)$

$= 2\sqrt{2}-1.$

Câu 2. Chọn **B.**



Gọi E là trung điểm của MC. Qua A kẻ một đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng NE tại K. Kẻ $AH \perp SK$ $(H \in SK)$. Ta có $AM \parallel KE \Rightarrow AM \parallel (SKE)$. Do đó $d(AM, SN) = d(A,(SKE))$.

Ta dễ chứng minh được $AH \perp (SKE)$ nên $d(A,(SKE)) = AH$. Tam giác SAK vuông ở A có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{17}{a^2}.$$

Suy ra $AH = \dfrac{a}{\sqrt{17}}$.

Câu 3. Chọn **C.**

Áp dụng kết quả cơ bản $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ ta được

$$f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x} - 3(x-1)^2 + 3$$
$$\le \sqrt{2(3+x+5-x)} + 3 = 7.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Câu 4. Chọn **C.**

Chú ý kết quả cơ bản $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ với $a > 1$. Gọi L là giá trị của giới hạn cần tìm. Thế thì

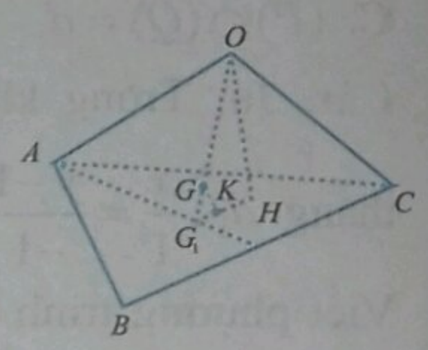
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(10-1)+(10^2-1)+...+(10^n-1)}{10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10+10^2+...+10^n-n}{10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+10+...+10^{n-1}}{10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^n-1}{9.10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9.10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right) = \frac{10}{9}.$$

Câu 5. Chọn **D.**



Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác ABC; H và K lần lượt là hình chiếu của O và G trên mặt phẳng (ABC). Khi đó

$$\frac{V_{GABC}}{V_{OABC}} = \frac{GK}{OH} = \frac{G_1G}{G_1O} = \frac{1}{4}.$$

Do đó $V_{GABC} = \dfrac{1}{4}V_{OABC} = \dfrac{abc}{24}$.

Câu 6. Chọn **C.**

Số cách chọn 4 nhà khoa học mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_5^2C_6^1C_7^1 + C_5^1C_6^2C_7^1 + C_5^1C_6^1C_7^2 = 1575$.

Số cách chọn 4 nhà khoa học nam mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_3^2C_3^1C_4^1 + C_3^1C_3^2C_4^1 + C_3^1C_3^1C_4^2 = 126$.

Số cách chọn 4 nhà khoa học nữ mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_2^2C_3^1C_3^1 + C_2^1C_3^2C_3^1 + C_2^1C_3^1C_3^2 = 45$.

Vậy số cách lập một ban thư kí thỏa mãn yêu cầu là:

$$1575 - 126 - 45 = 1404.$$

Câu 7. Chọn **A.**

Ta có $\left(1+x+x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9 = (1+x^2)^9\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9$

$$= \left(\sum_{k=0}^{9} C_9^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{9} C_9^i \frac{1}{x^i}\right) = \sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{9} C_9^k C_9^i x^{2k-i}.$$

Từ đây ta cho $2k-i=0$ thì tìm được 5 cặp (i, k) thỏa mãn là (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4). Vậy số hạng không chứa x là

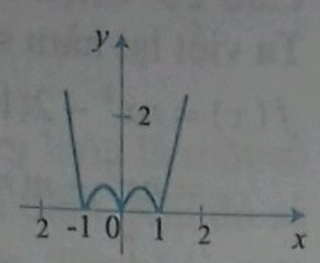
$$1 + C_9^1C_9^2 + C_9^2C_9^4 + C_9^3C_9^6 + C_9^4C_9^8 = 13051.$$

Câu 8. Chọn **B.**

Dễ thấy các điểm A, B, C có tọa độ là $A(-a,b,c)$, $B(a,-b,c)$, $C(a,b,-c)$. Thế thì tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC sẽ là $G\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$.

Câu 9. Chọn **A.**

Số điểm cực trị của hàm số đã cho cũng chính là số điểm cực trị của hàm $y=\left|x^3-x\right|$. Dựa vào tính chất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối, chúng ta dễ dàng vẽ được đồ thị của hàm $y=\left|x^3-x\right|$ như hình bên. Từ đồ thị ta nhận thấy hàm số này có 5 điểm cực trị.



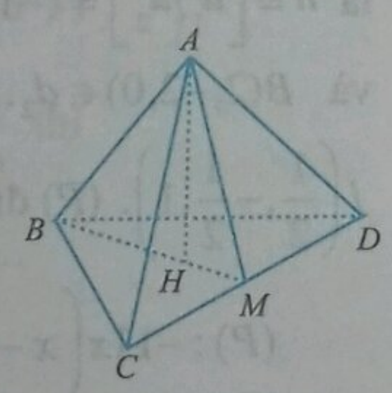
Câu 10. Chọn **D.**

Chọn 2 bạn nữ trong 4 bạn thì có C_4^2 cách. Ta "buộc" hai bạn này vào nhau coi như một bạn nữ thông thường. Có 2 cách để "buộc" như thế (vì có thể là *ab* hoặc *ba*). Lúc này nhóm học sinh gồm có 6 bạn nam và 3 bạn nữ (trong đó có một bạn nữ "đặc biệt"). Ta xếp vị trí cho các bạn nam trước thì có $6!$ cách. Giữa các bạn nam có 5 vị trí xen kẽ cùng với 2 vị trí đầu hàng và cuối hàng. Bây giờ ta xếp 3 bạn nữ vào 3 trong 7 vị trí kia thì có A_7^3 cách. Vậy xác suất cần tìm bằng

$$\frac{2C_6^4 6!A_7^3}{10!}=\frac{1}{2}.$$

Câu 11. Chọn **B.**

Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Ta có



$$V_{MBCD}=\frac{x}{3}.S_{BCD},\ V_{MCDA}=\frac{y}{3}.S_{CDA}$$

$$V_{DAB}=\frac{z}{3}.S_{DAB},\ V_{MABC}=\frac{t}{3}.S_{ABC}.$$

Cộng lại ta thu được (chú ý rằng $S_{BCD}=S_{CDA}=S_{DAB}=S_{ABC}=S$)

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}(x+y+z+t).S.$$

Suy ra $(x+y+z+t)=\frac{3V_{ABCD}}{S}=h$ với h là độ dài đường cao của tứ diện đều $ABCD$. Ta có

$$h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{AB^2-\frac{4}{9}BM^2}$$

$$=\sqrt{AB^2-\frac{4}{9}(BC^2-CM^2)}$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{4}{9}\left(a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vậy $x+y+z+t=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 12. Chọn **D.**

Ta có

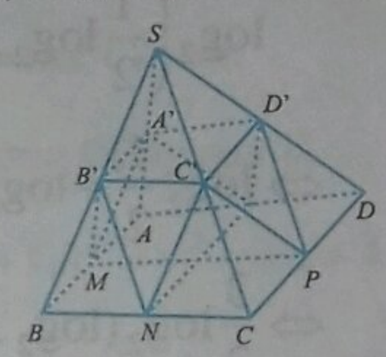
$$\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^3 x-\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2\sin^3 x-\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)}{\frac{2\sin^3 x}{\cos^3 x}-\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)}=\frac{(\tan x-1)(\tan^2 x+1)}{2\tan^3 x-(\tan^2 x+1)}$$

$$=\frac{(m-1)(m^2+1)}{2m^3-m^2-1}=\frac{m^2+1}{2m^2+m+1}.$$

Câu 13. Chọn **C.**

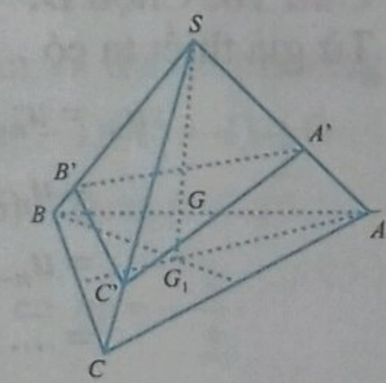
Giả sử $S.ABCD$ là chóp tứ giác. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trung điểm của các đoạn SA, SB, SC, SD và M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD, DA. Khi đó các mặt phẳng sau đây có tính chất cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp:



$(A'B'C'D')$, $(A'B'NQ)$, $(C'D'QN)$, $(A'D'PM)$, $(B'C'PM)$. Vậy có tất cả có 5 mặt phẳng.

Câu 14. Chọn **C.**

Gọi G_1 là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó



$$\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SG_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}).$$

Do $G\in(A'B'C')$ nên tồn tại x, y, $z\in\mathbb{R}$, $x+y+z=1$ sao cho

$$\overrightarrow{SG}=x\overrightarrow{SA'}+y\overrightarrow{SB'}+z\overrightarrow{SC'}=xm\overrightarrow{SA}+yn\overrightarrow{SB}+zp\overrightarrow{SC}.$$

So sánh hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\left(xm-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SA}+\left(yn-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SB}+\left(zp-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SC}=\vec{0}.$$

Nhưng do $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$xm=yn=zp=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{4m},\ y=\frac{1}{4n},\ z=\frac{1}{4p}.$$

Từ đây và do $x+y+z=1$ ta thu được

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=4.$$

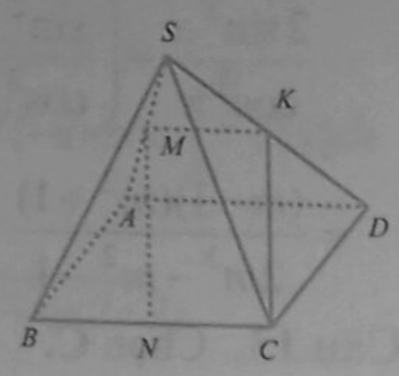
Câu 15. Chọn **D.**

Gọi S là tổng cần tính. Từ công thức khai triển nhị thức Newton chúng ta dễ dàng thấy

$$(1+2)^{99}+(1-2)^{99}=2S \Rightarrow S=\frac{3^{99}-1}{2}.$$

Câu 16. Chọn **A.**

Gọi K là trung điểm của SD. Dễ thấy tứ giác $MNCK$ là hình bình hành. Suy ra $MN \parallel KC$. Do đó góc giữa MN và SC chính là $\widehat{KCS}$. Tam giác SCD đều có CK là trung tuyến nên $CK \perp SD$. Từ đó



$$\sin\widehat{KCS}=\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{KCS}=30^0.$$

Câu 17. Chọn **A.**

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2}+\log_2(\log_2 x)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x)\le 3 \Leftrightarrow \log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow 0<\log_2 x\le 4 \Leftrightarrow 1<x\le 16.$$

Câu 18. Chọn **D.**

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}u_n&=u_{n-1}+n\\&=u_{n-2}+(n-1)+n\\&=u_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n\\&=....\\&=u_1+2+3+...+n\\&=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

Câu 19. Chọn **D.**

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow \bar{z}=a-bi$. Thế thì

$$\frac{|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|}{|z|}=\frac{|2a|+|2bi|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\le\frac{2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|a|=|b|$. Mặt khác

$$\frac{2\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Như vậy ta có $2\le\frac{|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|}{|z|}\le 2\sqrt{2}.$

Câu 20. Chọn **A.**

Ta viết lại hàm số đã cho thành

$$\begin{aligned}f(x)&=nx^2-2(1+2+...+n)x+1^2+2^2+...+n^2\\&=nx^2-n(n+1)x+1^2+2^2+...+n^2\\&=n\left[x^2-2.\frac{n+1}{2}.x+\frac{(n+1)^2}{4}\right]-\frac{n(n+1)^2}{4}+\\&\qquad+1^2+2^2+...+n^2\\&=n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)^2}{4}+1^2+2^2+...+n^2\\&\ge-\frac{n(n+1)^2}{4}+1^2+2^2+...+n^2.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{n+1}{2}$.

Câu 21. Chọn **C.**

d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2,3,1)$, tương ứng với d_2 có $\vec{u}_2=(1,5,-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng cách đều d_1 và d_2 thì (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(-11,5,7)$. Lấy điểm $A(-1,1,2)\in d_1$ và $B(2,-2,0)\in d_2$. Trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. (P) đi qua I nên có phương trình là

$$(P):-11x\left(x-\frac{1}{2}\right)+5\left(y+\frac{1}{2}\right)+7(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -11x+5y+7z+1=0.$$

Câu 22. Chọn **D.**

Ta biến đổi như sau

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\log_3|a|+\log_3|b|=5\\ \log_3|a|+\frac{1}{3}\log_3|b|=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3|a|=6\\ \log_3|b|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=729\\ |b|=27\end{cases}.$$

Câu 23. Chọn **D.**

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=-m^2+9m+10.$$

Phương trình này là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi $-m^2+9m+10>0\Leftrightarrow -1<m<10.$

Câu 24. Chọn **A.**

Gọi a, b, c $(1 \le a < b < c \le 20)$ tương ứng là vị trí của 3 cuốn sách lấy được. Để giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy thì điều kiện cần và đủ là $b-a>2$ và $c-b>2$. Tức là $5 \le a+4 < b+2 < c \le 20$. Như vậy số cách lấy ra 3 cuốn sách thỏa mãn yêu cầu chính là số cách lấy ra 3 số nguyên dương trong 16 số (từ 5 tới 20 có tất cả 16 số) và bằng C_{16}^3.

Câu 25. Chọn **B.**

Ta biết rằng số đỉnh của hình lăng trụ luôn là một số chẵn. Giả sử một hình lăng trụ có $2n$ đỉnh. Khi đó số cạnh của hình lăng trụ đó sẽ bằng $3n$. Theo bài ra ta có $2n+3n=200 \Leftrightarrow n=40$. Vậy lăng trụ đó có 80 đỉnh.

Câu 26. Chọn **A.**

Gọi S là tổng cần tính. Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có

$$S=\frac{1-\frac{1}{i^{2020}}}{1-\frac{1}{i}}=\frac{i^{2020}-1}{i^{2020}-i^{2019}}=\frac{(-1)^{1010}-1}{i^{2020}-i^{2019}}=0.$$

Câu 27. Chọn **D.**

Trước hết ta viết lại hàm số đã cho thành

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Từ đó $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right].$

Dễ dàng thấy rằng nếu $y=\frac{1}{ax+b}$ thì

$$y^{(n)}=\frac{n!(-a)^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Áp dụng kết quả này ta được

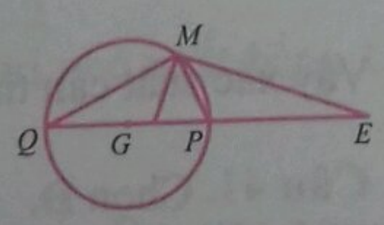
$$f^{(n)}(x)=\frac{n!(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

Suy ra

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(-1)^{n+1}}-1\right]=\frac{-n![1+(-1)^n]}{2}.$$

Câu 28. Chọn **C.**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ (điểm E như thế luôn tồn tại duy nhất).



Khi đó đẳng thức trên tương đương với $\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|$ hay $3MG=ME$. Trên đường thẳng GE ta lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $3PG=PE$, $3QG=QE$. Khi đó quỹ tích điểm M thỏa mãn yêu cầu là đường tròn đường kính PQ.

Câu 29. Chọn **B.**

Ta có $\ln 2=\int_a^2 \frac{1}{x^3+x}dx=\int_a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_a^2=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_a^2=\ln\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{5}}.$$

Từ đó suy ra $\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{5}}=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$

Câu 30. Chọn **B.**

Để đồ thị có 2 điểm cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Ta tìm được điều kiện $m<0$ hoặc $m>\frac{14}{33}$. Khi đó đường thẳng nối hai điểm cực trị có phương trình là

$$y=\frac{[mx^2+(4-2m)x-6]'}{[2(x+9)]'}=mx+2-m.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng này là

$$h=\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{\frac{(2-m)^2}{m^2+1}} \Rightarrow (m^2+1)h^2=m^2-4m+4$$

$$\Rightarrow (h^2-1)m^2+4m+h^2-4=0. \qquad (*)$$

Khi $h=1$ thì $m=\frac{3}{4}$. Khi $h \ne 1$ thì (*) là phương trình bậc hai của m. Điều kiện cần và đủ để phương trình này có nghiệm là $\Delta'=4-(h^2-1)(h^2-4)\ge 0$

$$\Rightarrow h^2(h^2-5)\le 0 \Rightarrow h \le \sqrt{5}.$$

Khi $h=\sqrt{5}$ thì $4m^2+4m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$

Câu 31. Chọn **A.**

Gọi r, h, V tương ứng là bán kính đáy, chiều cao và thể tích của khối trụ. Ta dễ dàng thấy $r^2+\frac{h^2}{4}=R^2$.

Và từ đó $V=\frac{\pi}{3}hr^2=\frac{\pi}{3}h\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right).$

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$V^2=\frac{\pi^2}{9}h^2\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)^2=\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{h^2}{2}\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

$$\le\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{1}{27}\left[\frac{h^2}{2}+\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)+\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)\right]^3=\frac{16\pi^2}{243}R^6.$$

Suy ra $V\le\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}R^3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{h^2}{2}=R^2-\frac{h^2}{4}\Rightarrow h^2=\frac{4}{3}R^2\Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Câu 32. Chọn **C.**

Trước hết ta có

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=1.$$

Áp dụng kết quả này ta được

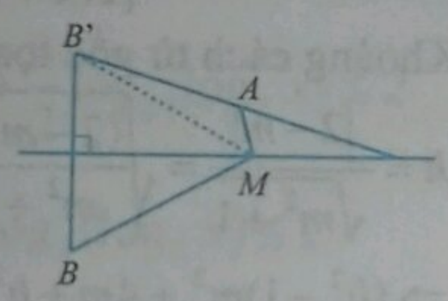
$$f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{49}\left[f\left(\frac{k}{100}\right)+f\left(1-\frac{k}{100}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2}\right)=49+\frac{1}{2}=\frac{99}{2}.$$

Câu 33. Chọn **B.**

Để tích các số chấm xuất hiện ở năm lần gieo là một số tự nhiên có tận cùng bằng 5 thì phải có ít nhất một lần ra mặt 5 chấm và các mặt khác ra mặt lẻ. Do đó xác suất cần tìm bằng $\frac{3^5-2^5}{6^5}=\frac{211}{7776}$.

Câu 34. Chọn **B.**



Dễ thấy A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (xOy). Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (xOy). Thế thì $B'(-1,4,3)$ và $MB=MB'$. Khi đó

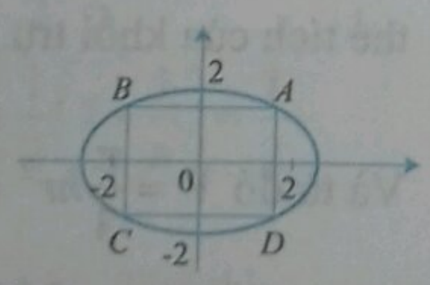
$$|MA-MB|=|MA-MB'|\le AB'.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, A, B' thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn AB'. Như vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng AB' và mặt phẳng (xOy). Đường thẳng AB' có phương trình

$$AB':\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Từ đó tìm được $M(5,1,0)$.

Câu 35. Chọn **A.**



Giả sử $ABCD$ là hình vuông nội tiếp elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Khi đó các đỉnh A, B, C, D phải nằm trên một trong hai đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ hai. Giả sử $A(m, m)$ với $m>0$. Khi đó $AB=2m$ và $S_{ABCD}=4m^2$. Mà $A(m, m)\in(E)$ nên ta có $\frac{m^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow m^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Câu 36. Chọn **B.**

Từ $\cot x-\cot y=5\Rightarrow\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan y}=5$

$\Rightarrow\frac{\tan y-\tan x}{\tan x\tan y}=5$. Kết hợp với $\tan x-\tan y=10$ thì ta được $\tan x\tan y=-2$. Do đó

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{10}{1-2}=-10.$$

Câu 37. Chọn **C.**

Áp dụng liên tiếp công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ ta được

$$C_9^9+C_{10}^9+...+C_{99}^9=\underbrace{C_{10}^{10}+C_{10}^9}+...+C_{99}^9$$

$$=\underbrace{C_{11}^{10}+C_{11}^9}+...+C_{99}^9$$

$$=\underbrace{C_{12}^{10}+C_{12}^9}+...+C_{99}^9$$

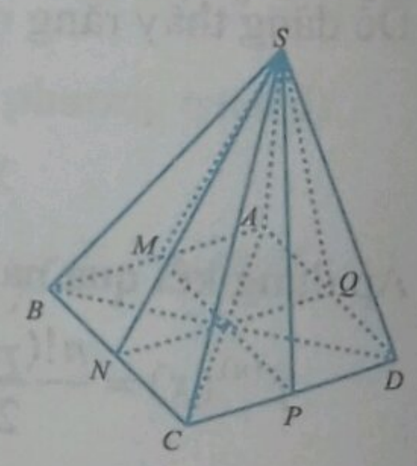
$$=...$$

$$=C_{99}^{10}+C_{99}^9=C_{100}^{10}.$$

Câu 38. Chọn **A.**

Dễ dàng kiểm tra được điểm A nằm trong khối cầu (S). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm O của (S) tới (P) là lớn nhất. Mà $d(O,(P))\le OA$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A là hình chiếu của O trên (P). Khi đó (P) sẽ nhận $\overrightarrow{OA}=(0,-1,2)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy $(P):0(x-0)-1(y+1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow y-2z+5=0.$

Câu 39. Chọn **D.**



Giả sử $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD, DA. Khi đó các mặt phẳng sau đây đều là mặt phẳng đối xứng của hình chóp: (SAC), (SBD), (SMP), (SNQ). Vậy có tất cả 4 mặt đối xứng.

Câu 40. Chọn **B.**

Số cách rút hai thẻ chẵn là C_{10}^2.

Số cách rút ra hai thẻ trong đó có một thẻ ghi số chia hết cho 4 còn thẻ kia ghi số lẻ là $C_5^1C_{10}^1$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{C_{10}^2+C_5^1C_{10}^1}{C_{20}^2}=\frac{1}{2}$.

Câu 41. Chọn **D.**

Theo một kết quả cơ bản của hình học vectơ ta có

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG}.$$

Bình phương hai vế ta được

$9SG^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\widehat{ASB} + 2bc\cos\widehat{BSC} + 2ca\cos\widehat{CSA}$
$= a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc.$

Từ đó $SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc}.$

Câu 42. Chọn **A.**

Đặt $\sqrt{4 - x^2} = t$ thì $x^2 = 4 - t^2$ và $0 \le t \le 2$. Hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = -t^2 + t + 4$.

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số này trên đoạn [0, 2] ta dễ dàng tìm được

$$\max_{-2\le x\le 2} y = \max_{0\le t\le 2} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4};$$

và $\min_{-2\le x\le 2} y = \min_{0\le t\le 2} f(t) = \min\{f(0), f(2)\} = 2.$

Từ đó $M + m = \frac{17}{4} + 2 = \frac{25}{4}.$

Câu 43. Chọn **C.**

Dễ thấy

$$\begin{cases}\sin^3 x \le \sin^2 x \\ \cos^5 x \le \cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = 1$ hoặc $\cos x = 1$. Do đó $M = \max_{x\in\mathbb{R}} y = 1$.

Tương tự

$$\begin{cases}\sin^3 x \ge -\sin^2 x \\ \cos^5 x \ge -\cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^5 x \ge -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = -1$ hoặc $\cos x = -1$. Do đó $m = \min_{x\in\mathbb{R}} y = -1$. Vậy $M - m = 2$.

Câu 44. Chọn **B.**

Đường thẳng AB có phương trình là

$$(2-a)x + (1+a)y - 2 - a^2 = 0.$$

Khoảng cách từ O tới đường thẳng AB bằng

$$h = \frac{2 + a^2}{\sqrt{(2-a)^2 + (1+a)^2}} = \frac{2 + a^2}{\sqrt{5 - 2a + 2a^2}}.$$

$$AB = \sqrt{(a+1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2a^2 - 2a + 5}.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot h \cdot AB = 1 + \frac{a^2}{2} \ge 1.$$

Diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $a = 0$.

Câu 45. Chọn **C.**

• TH1: Số tự nhiên đó không có chữ số 0. Khi đó ta chọn 5 chữ số từ các chữ số 1, 2, ..., 9 thì có C_9^5 cách. Có 2 cách sắp xếp các chữ số này theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần. Suy ra trường hợp này có $2C_9^5$ số.

• TH2: Số tự nhiên đó có chữ số 0. Khi đó 0 phải ở vị trí cuối cùng và các chữ số sẽ theo thứ tự giảm dần. Suy ra trường hợp này có C_9^4 số.

Như vậy có tất cả là $2C_9^5 + C_9^4$ số.

Câu 46. Chọn **B.**

Đặt $z = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+3i}{2} \Rightarrow 2z + 1 = 3i$

$\Rightarrow (2z+1)^2 = (3i)^2 \Rightarrow 2z^2 + 2z + 5 = 0.$

Điều này chứng tỏ z là một nghiệm (phức) của phương trình $2x^2 + 2x + 5 = 0$.

Từ đó suy ra $\min(a + b + c) = 2 + 2 + 5 = 9$.

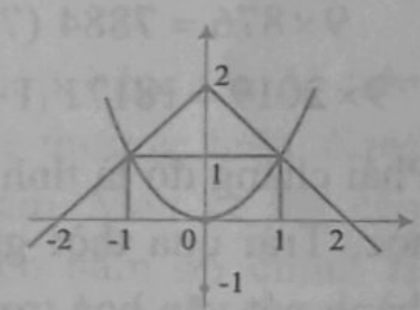
Câu 47. Chọn **C.**

Đặt $2^{\log_3 x} = t > 0$, phương trình trở thành

$$t^3 - 3t = m.$$

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $(0, +\infty)$ chúng ta dễ dàng thấy rằng phương trình có nhiều hơn một nghiệm (chính xác hơn là có hai nghiệm) khi và chỉ khi $-2 < m < 0$.

Câu 48. Chọn **C.**



Gọi S là diện tích của miền cần tính. Từ hình vẽ và do tính đối xứng ta có

$$S = 2\int_0^1 (2 - x - x^2)dx = \frac{7}{3}.$$

Câu 49. Chọn **C.**

Vì 2^k có 100 chữ số nên

$$10^{99} \le 2^k < 10^{100} \Leftrightarrow 99 \le k\lg 2 < 100 \Leftrightarrow \frac{99}{\lg 2} \le k < \frac{100}{\lg 2}$$

hay $329 \le k \le 332$. Tức là có 4 giá trị nguyên dương của k thỏa mãn.

Câu 50. Chọn **B.**

Áp dụng kết quả cơ bản $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{a^x} = \ln a$ ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)...(n^x-1)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}\cdots\frac{n^x-1}{x}\right)$$
$$= \ln 2 \ln 3 ... \ln n.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

BẠN CÓ BIẾT ?

NĂM 2019 TẢN MẠN VỀ SỐ 9

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

Từ xa xưa, quan niệm về con số may mắn đã hình thành trong suy nghĩ của con người. Nhiều nền văn hóa cổ đại coi số 9 là biểu tượng của sự hoàn hảo, gắn kết và tự do. Thật thú vị trong số học, số 9 cũng rất đặc biệt bởi nếu nhân với một số bất kỳ có một chữ số, tổng của hai số trong kết quả sẽ luôn là 9: Chẳng hạn: $9\times 2=18\ (1+8=9)$; $9\times 8=72\ (7+2=9)$. Nhân số 9 với một số có hai chữ số, cộng liên tiếp các chữ số trong kết quả tìm được ta có tổng bằng 9. Chẳng hạn:

$9\times 13=117\ (1+1+7=9)$; $9\times 98=882\ (8+8+2=18;$ $1+8=9)$. Nhân số 9 với các số khác, cộng liên tiếp các chữ số trong kết quả tìm được ta luôn được kết quả cuối cùng là số 9. Chẳng hạn:

$$9\times 876=7884\ (7+8+8+4=27;\ 2+7=9);$$

$$9\times 2019=18171\ (1+8+1+7+1=18;\ 1+8=9),\ldots$$

Phải chăng đó là tính "*vĩnh cửu*" của số 9 trong toán học. Trải qua thời gian, con số 9 may mắn đã trở thành nét văn hoá trong đời sống của nhiều quốc gia trên thế giới. Ý nghĩa của con số 9 không chỉ thể hiện trong bài trí phong thuỷ mà được ứng dụng vào rất nhiều thứ xung quanh cuộc sống: Ngày khai trương, số xe, số nhà, số điện thoại … Nhân dịp bước sang năm 2019 chúng ta cùng tìm hiểu ý nghĩa của số 9 xưa và nay ở một số quốc gia trên thế giới.

SỐ 9 THEO QUAN NIỆM PHƯƠNG ĐÔNG

Số 9 giữ vị trí quan trọng xuyên suốt lịch sử phát triển của các nước phương Đông, đặc biệt là trong kiến trúc và nghi lễ xưa ở Trung Quốc. Theo quan niệm xưa, số lẻ thuộc hành dương, số chẵn thuộc hành âm. Trong đó, 9 là số lớn trong dãy số dương nên còn được gọi là cực dương và chứa đựng nhiều ý nghĩa tốt lành. Trong tiếng Hoa, phát âm của số 9 trùng với âm tiết của từ "cửu" trong vĩnh cửu. Điểm qua một số công trình kiến trúc ở Trung Quốc, không khó để nhận ra dụng ý sâu xa liên quan đến số 9 được đội ngũ kiến trúc sư gửi gắm. Đó chính là quyền lực "chí cao vô thượng" của bậc đế vương trong xã hội xưa. Đại môn (cửa chính) của cung đình thường được trang trí bằng 81 chiếc núm đinh (9 dọc, 9 ngang); thạch môn (cửa làm bằng đá) của Địa cung ở Định Lăng, Bắc Kinh cũng chạm khắc 99 đinh đá lớn. Tử Cấm Thành có 9.999 gian phòng, điện Thái Hòa có mái lợp ngói lưu ly vàng, trang trí linh thú trên nóc là 9 giống rồng (người Trung Quốc có truyền thuyết Long sinh cửu phẩm). Thành lầu Thiên An Môn rộng 9 gian, sâu 5 gian (số 9 kết hợp với số 5 tượng trưng cho sự tôn nghiêm của thiên tử).

Không chỉ đi sâu vào kiến trúc, số 9 với ý nghĩa của sự trường cửu, vĩnh hằng, may mắn còn được áp dụng trong những nghi thức cung đình. Những dịp lễ lớn trong năm, hoàng cung nhà Thanh thường mở đại tiệc với số phẩm vật là 99, hay tổ chức đủ 81 (bằng 9 nhân 9) tiết mục biểu diễn với hàm ý cầu chúc may mắn, trường thọ cho bậc thiên tử.

Ngày nay, những dãy số hoặc con số được kết thúc bằng số 9 vẫn được ưa chuộng nhờ ý nghĩa may mắn, lâu dài. Ở Trung Quốc, ngày ăn mừng hay lễ ký kết hợp đồng đặc biệt thường được chọn sẽ có liên quan nhất định đến số 9, với mong muốn doanh nghiệp phát triển lâu dài, bền vững.

Số 9 cũng rất được bộ phận lớn người Việt ưa thích. Người nào sở hữu biển số xe "9 nước" sẽ được cho là may mắn. Trong những hoạt động có liên quan đến vận may như mua sắm vật dụng cá nhân hay khai trương cửa hàng, số 9 cũng được đặt trong danh sách ưu tiên. Nếu tinh ý một chút, bạn sẽ nhận ra còn khá nhiều điều thú vị liên quan đến số 9 ở Việt Nam. Theo truyền thuyết Sơn Tinh Thủy Tinh, lễ vật mà Vua Hùng tìm kiếm là voi chín ngà, gà chín cựa, ngựa chín hồng mao. Tháng 12 năm 1835 dưới triều Vua *Minh Mạng* cho đúc 9 đỉnh, sau

đó còn cho khắc nổi tên các đỉnh lên 9 miếng đồng để gắn vào thân các đỉnh đó. Chín đỉnh này tượng trưng cho sự thàng công, đồng thời biểu hiện sự kế thừa liên tục, lâu dài và tính bền vững của triều đại. Cửu Đỉnh đặt ở trước Hiển Lâm Các theo một hàng ngang, đối diện với Thế Miếu, phía nam hoàng thành Huế.


Cửu đỉnh trong Cố đô Huế

Lấy Cao đỉnh làm chuẩn, bên trái lần lượt là Nhân đỉnh, Anh đỉnh, Thuần đỉnh, Dụ đỉnh; bên phải lần lượt là Chương đỉnh, Nghị đỉnh, Tuyên đỉnh, Huyền đỉnh. Nhân đỉnh đối diện với án thờ Vua *Minh Mạng*, Chương đỉnh dối diện với án thờ Vua *Thiệu Trị*, Anh đỉnh đối diện với án thờ Vua *Tự Đức*, Nghị đỉnh đối diện với án thờ Vua *Kiến Phúc*, Thuần đỉnh đối diện với án thờ Vua *Đồng Khánh*, Tuyên đỉnh đối diện với án thờ Vua *Khải Định*, Dụ đỉnh đối diện với án thờ Vua *Hàm Nghi*, Huyền đỉnh đối diện với án thờ Vua *Duy Tân*.

Trong quan hệ họ hàng thì xếp thành 9 bậc (*cửu tộc*) gồm 4 đời trước, bản thân và 4 đời sau: Cao tổ (Kỵ); Tằng tổ (Cụ); Tổ phụ (Ông); Phụ thân (Cha); Tự kỷ (Bản thân); Nhi tử (Con); Tôn tử (Cháu); Tằng tôn (Chắt); Huyền tôn (Chút). Công lao cha mẹ được đúc kết thành chín chữ sinh thành (*Cửu tự cù lao*) gồm: Sinh (đẻ); Cúc (nâng đỡ); Phủ (vỗ về, vuốt ve); Súc (bú mớm); Trưởng (nuôi nấng); Dục (dạy dỗ); Cố (trông nom); Phục (tùy tính mà cảm hóa); Phúc (che trở). Triều đình phong kiến xưa phải lên 9 bậc mới tới nơi đặt ngai vàng của vua và chia các hàng quan lại làm chín bậc, cao nhất là nhất phẩm; thấp nhất là cửu phẩm…

Người Thái Lan rất thích con số 9 vì phát âm gần giống với chữ "phát triển". Theo quan niệm này nên cứ 6 tháng một lần, Sở Giao dịch đường bộ Thái Lan lại tổ chức bán đấu giá "Biển đăng ký xe may mắn", tất nhiên là với những biển có con số 9 thường được bán rất nhanh, rất được giá.

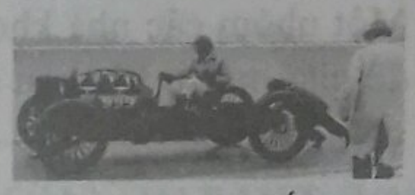
Ngược lại với Trung Quốc, Việt Nam hay Thái Lan người dân ở xứ Hoa Anh Đào rất kiêng số 4 và số 9 (vì cách phát âm số 4 giống với chữ "tử", số 9 trùng với chữ "kurushii" nghĩa là "đau khổ"). Thậm chí các khách sạn ở Nhật Bản còn không có các phòng mang số 4, 9 và 49.

SỐ 9 TRONG MẮT NGƯỜI PHƯƠNG TÂY

Trong "Cuốn nhật ký của vị tướng Tây Ban Nha" của *Hernan Cortés* đã ghi lại câu chuyện thú vị như sau: Vào thế kỷ XIV, Vua *Jecoco* của bộ lạc da đỏ Aztèque ở phía Bắc Mexico đã xây dựng một ngôi đền 9 tầng tượng trưng cho 9 tầng trời và cũng là 9 con đường mà linh hồn con người phải trải qua để đi đến nơi yên nghỉ vĩnh hằng. Điều này cũng giống như ở châu Á: Thế giới thiên đường là chín phương trời (cửu thiên) và thế giới âm phủ là 9 suối (cửu tuyền).

Với người Mỹ con số 9 được xem là con số may mắn và được ưa chuộng nhất. Số 9 tượng trưng cho sự tròn đầy, toàn vẹn của Trời và Đất. Có nhiều câu chuyện thú vị về những sản phẩm cao cấp gắn liền với số 9 mà giới đầu tư, kinh doanh hay nhắc đến.

Không phải ngẫu nhiên mà nhiều thương hiệu lớn lại chọn ngày 9 tháng 9 làm ngày ra mắt sản phẩm mới. Hãng Apple lừng danh mặc dù không mê tín nhưng vẫn tranh thủ ngày "Tam cửu" (9/9/2009) có một không hai để ra mắt sản phẩm máy nghe nhạc ipod mới. Năm 1904, *Henry Ford* đã đặt dấu mốc mang tính cách mạng cho ngành công nghiệp sản xuất xe hơi Hoa Kỳ với một model mang tên *Ford* 999. Ford đã tạo nên kỳ tích khi lái một chiếc xe lạ vượt qua một đặm trên hồ băng *St.Clair* với thời gian 39,4 giây. Đây được xem là kỷ lục tốc độ trên mặt đất tại thời điểm đó, biến thương hiệu *Ford Motor* trở thành cái tên đình đám. Mẫu xe đặt nền móng thay đổi toàn bộ cục diện năm đó chính là *Ford* 999 và đến nay vẫn được xem là biểu tượng may mắn của cả tập đoàn này.


Xe hơi ba số 9 "huyền thoại" của Ford

Sự ra đời của chiếc *Ford* 999 không chỉ giúp *Henry Ford* thiết lập kỷ lục mới trên đường đua năm 1904, mà còn giúp *Ford* trở thành thương hiệu được biết đến khắp Hoa Kỳ ngay sau đó.

Cùng thời điểm này, hãng phim *Focus Features* cũng cho ra mắt bộ phim hoạt hình mang tên "9" về số 9 lý thú này. Ngày 9.9.2009, hãng phim Focus Features đã giới thiệu một bộ phim hoạt hình mang tên "9" đến tín đồ điện ảnh toàn thế giới và gây tiếng vang vượt bậc. Bộ phim kể về hành trình cứu rỗi thế giới của một chú búp bê mang mã số 9, qua đó lồng ghép rất nhiều


"Bom tấn điện ảnh" mang số 9

Sự thành công của hai bộ phim "9" và "*Coraline*" trong cùng năm 2009 đã biến *Focus Features* trở

thành một thương hiệu mạnh trong lĩnh vực phim hoạt hình có yếu tố ly kỳ, giật gân. Từ sự thành công của "9", *Focus Features* đã chuyển hẳn hướng phát triển và đến nay được biết đến như một hãng phim chuyên tập trung vào các dòng phim hành động, khoa học viễn tưởng và kinh dị. Một lần nữa, số 9 lại phát huy sức mạnh thay đổi toàn bộ cục diện kinh doanh đầy ấn tượng của mình.

SỐ 9 KỲ DIỆU

Có bao giờ bạn thắc mắc tại sao các cửa hàng hay niêm yết giá bằng con số 9 như 99 nghìn thay vì 100 nghìn? Ở Việt Nam có những tờ báo ghi giá 3.900 đồng thay cho 4.000 đồng hay 29.900 đồng thay cho 30.000 đồng không ? Tờ báo *Giáo dục và Thời đại* số Tết Kỷ Hợi có giá bìa 49.900 đồng, tờ *Tiền Phong* số Tết Kỷ Hợi có giá bìa 59.000 đồng... Phải chăng con số 9 chứa ẩn điều gì kỳ diệu.

Tất cả những người bán hàng đều tin rằng, người mua sẽ thích thú hơn với những giá tiền được kết thúc bằng con số 9. Đó là lý do vì sao mà ở nhiều bảng giá ta vẫn thường thấy có sự hiện diện của con số 9 "kỳ diệu". Chẳng hạn, thay vì con số 2 triệu đồng chẵn cho dễ thanh toán, người bán lại thường niêm yết cái giá lẻ 1,999 triệu đồng. Điều tưởng chừng kỳ quặc này hoá ra lại có những luận chứng khoa học của nó.

Một nhóm các nhà khoa học Pháp đã quyết định tìm hiểu để giải mã sự kỳ diệu của con số 9 trong lĩnh vực thương mại. Theo đó, họ đã tiến hành thí nghiệm tại một cửa hàng bán bánh pizza ở một thành phố của Pháp trong vòng 6 tuần liên tiếp. Hai tuần đầu tiên, giá của các loại bánh đều được để chẵn (kết thúc bằng con số 0). Hai tuần tiếp theo, chỉ duy nhất có một loại bánh pizza được giảm từ 8,00 euro xuống còn 7,99 euro (kết thúc bằng con số 9). Hai tuần cuối cùng, tất cả các loại bánh khác đều được đồng loạt hạ giá xuống 1 đơn vị, có nghĩa là đều kết thúc với con số 9. Kết quả sau 6 tuần chờ đợi, khi một loại bánh được hạ xuống mức 7,99 euro, số lượng đơn đặt hàng cho loại bánh này tăng vọt lên đến 15% so với hai tuần đầu tiên; thế nhưng, đến khi tất cả các loại bánh đều hạ giá (với giá kết thúc bằng con số 9), số lượng đơn đặt hàng còn tăng lên cao hơn - từ 34,1% đến 35,9%.

Giải thích cho hiện tượng này, nhóm các nhà khoa học Pháp khẳng định: "Khi đi mua sắm, người mua thường chú ý nhiều hơn đến con số đầu tiên của giá mặt hàng. Nếu con số đó thấp hơn thì sẽ thu hút được người mua hơn. Vì thế, việc sử dụng các con số 9 ở cuối giá sẽ giúp hạ thấp con số đứng đầu những vẫn đảm bảo duy trì giá trị thực của mặt hàng đó".

Chiêm nghiệm về con số 9 chắc chắn còn nhiều điều thú vị khác nữa. Bước sang năm 2019 chúc các bạn có nhiều khám phá mới về số 9 kỳ diệu quanh ta.

ĐỀ THI THỬ SỨC SỐ 3

(*Tiếp theo trang* 33)

A. $F(x)=(x^2-3)e^x+C$.

B. $F(x)=(x^2+x+4)e^x+C$.

C. $F(x)=(x^2+3x-4)e^x+C$.

D. $F(x)=(x^2-3x+4)e^x+C$.

Câu 47. Cho ba mặt phẳng $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d,d' lần lượt cắt ba mặt phẳng này tại A,B,C và A',B',C' (B nằm giữa A và C, B' nằm giữa A' và C'). Giả sử $AB=5$, $BC=4$, $A'C'=18$. Tính độ dài hai đoạn thẳng $A'B',B'C'$.

A. $A'B'=10,B'C'=8$. **B.** $A'B'=8,B'C'=10$.

C. $A'B'=12,B'C'=6$. **D.** $A'B'=6,B'C'=12$.

Câu 48. Tại *Giải vô địch bóng đá Đông Nam Á 2018* (AFF Suzuki Cup 2018) có 10 đội tuyển tham dự, trong đó có đội tuyển Việt Nam và đội tuyển Malaysia. Ở vòng bảng, Ban tổ chức chia ngẫu nhiên 10 đội thành 2 bảng, bảng A và bảng B, mỗi bảng có 5 đội. Giả sử khả năng xếp mỗi đội vào mỗi bảng là như nhau. Tính xác suất để đội tuyển Việt Nam và đội tuyển Malaysia được xếp trong cùng một bảng.

A. $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{5}{9}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{1}{9}$

Câu 49. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ trên $\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong (C), ở đó a,b,c là các hằng số thực, $a\neq 0$. Điều kiện cần và đủ để (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ theo thứ tự tăng dần lập thành một cấp số cộng là

A. $\begin{cases} ab<0 \\ 9b^2=100ac \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ab<0, ac>0 \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} b\neq 0 \\ 9b^2=100ac \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ab>0 \\ 9b^2=100ac \end{cases}$.

Câu 50. Cho đoạn thẳng $AB=2^{100}$ (cm). Gọi M_1 là trung điểm của AB. Gọi M_{k+1} là trung điểm của M_kB ($k=1,2,...,99$). Tính độ dài đoạn thẳng M_1M_{100}.

A. $2^{99}-1$ (cm). **B.** $2^{97}+1$ (cm).

C. $2^{99}-2$ (cm). **D.** 2^{98} (cm).

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 41

Problem. *There are 9 cards: one card with number 1, one card with number 2,..., one card with number 9. Choose randomly two cards, one by one and without replacement, and then compute the sum of two numbers on them. Compute the probability that the sum is a 1- digit number.*

Solution. Consider the following table

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	3	4	5	6	7	8	9	
2	3	×	5	6	7	8	9		
3	4	5	×	7	8	9			
4	5	6	7	×	9				
5	6	7	8	9					
6	7	8	9						
7	8	9							
8	9								
9									

Notice that there are $9 \times 8 = 72$ ways to choose 2 cards. And from the table we see that the required probabilty is equal to $\frac{32}{72} = \frac{4}{9}$.

TỪ VỰNG

Card : thẻ

Table : bảng (số)

1 – digit number : số có một chữ số

Replacement : đặt trở lại

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Tìm giá trị trung bình, số xuất hiện nhiều lần, trung vị và độ lệch chuẩn của:* 5, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 3, 4, 5, 5. *Từ đó, không cần phải suy nghĩ nhiều hãy viết giá trị trung bình, số xuất hiện nhiều lần, trung vị và độ lệch chuẩn của:* 15, 12, 15, 11, 12, 11, 11, 11, 15, 13, 12, 13, 14, 15, 15.

Lời giải. Ta sắp xếp lại thứ tự của dãy dữ liệu thứ nhất: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5. Khi đó *trung vị* của dãy dữ liệu này là 3. *Giá trị trung bình* $\overline{x} = 3$. *Số xuất hiện nhiều lần* là 5. Áp dụng công thức tính độ lệch chuẩn ta có $sd(x) \approx 1.63$. Dãy dữ liệu thứ hai nhận được từ dữ liệu thứ nhất bằng cách cộng thêm 10 vào mỗi số hạng. Vì vậy, rõ ràng không cần tính toán nhiều ta thấy *trung vị* của dữ liệu thứ hai là 13, *giá trị trung bình* $\overline{x} = 13$, *số xuất hiện nhiều lần* là 15. Và không khó để nhận thấy rằng hai tập hợp dữ liệu nói trên có độ lệch chuẩn như nhau (tại sao?). □

Lưu ý. *Độ lệch chuẩn* của dữ liệu được tính bởi công thức $sd(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$

trong đó $\overline{x}$ là *giá trị trung bình* của dãy dữ liệu đã cho, đó là số cho biết độ lệch chuẩn của dãy dữ liệu so với giá trị trung bình của chúng.

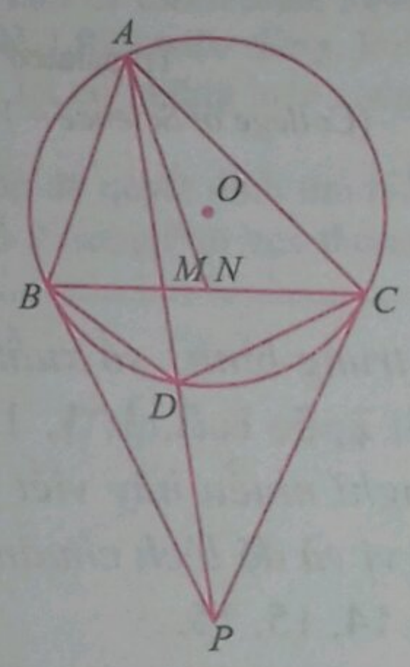
➢***Nhận xét.*** Các bạn *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre;** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh** có bài dịch đúng gửi về Tòa soạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 21. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại P. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.*

Cách 1. Gọi D là giao điểm khác A của AP và đường tròn (O). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm N sao cho $\widehat{CAN} = \widehat{BAD}$.



Ta có $\widehat{ACN} = \widehat{ADB}$, suy ra tam giác CAN đồng dạng với tam giác DAB (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{DA} = \dfrac{CN}{BD}$. (1)

Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{DAC}$ và $\widehat{ABN} = \widehat{ADC}$ nên tam giác ABN đồng dạng với tam giác ADC. Suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BN}{CD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CN}{BN} \cdot \dfrac{CD}{BD}$.

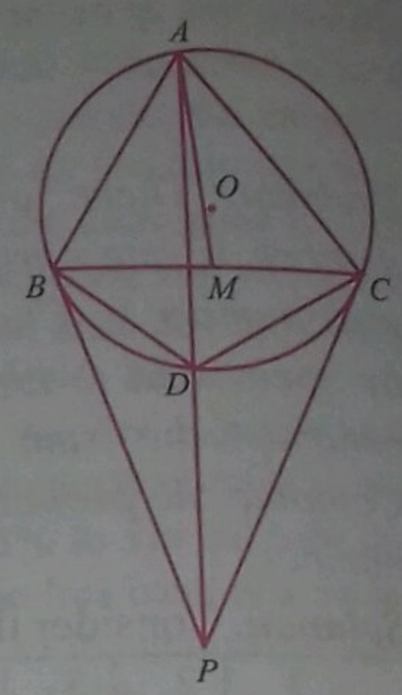
Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DBP}$, suy ra tam giác BAP đồng dạng với tam giác $DBP \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AP}{BP}$.

Tương tự có $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AP}{CP}$.

Vì $BP = CP$ nên $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BD}$

$\Rightarrow \dfrac{CN}{BN} = 1 \Rightarrow BN = CN$, hay N là trung điểm của đoạn thẳng BC, do đó $N \equiv M \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

Cách 2. Gọi D là giao điểm khác A của AP và đường tròn (O), khi đó $\widehat{BAD} = \widehat{DBP}$, suy ra tam giác BAP đồng dạng với tam giác DBP



$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{BP}.$$

Tương tự có $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AP}{CP}$.

Vì $BP = CP$ nên

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BD.$$

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có $AB.CD + AC.BD = AD.BC$

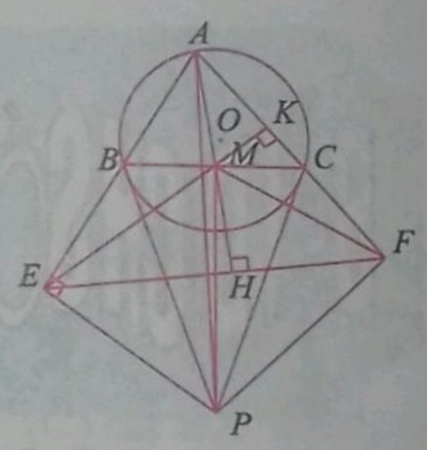
$\Rightarrow 2AC.BD = AD.BC \Rightarrow AC.BD = AD.CM$.

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CM}{BD}$.

Mặt khác $\widehat{ACM} = \widehat{ADB}$ nên $\Delta ADB \backsim \Delta ACM$, suy ra $\widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

Cách 3.

Kẻ $PE \perp AB$, $PF \perp AC$ $(E \in AB, F \in AC)$. Gọi K là giao điểm của EM và AC; H là giao điểm của AM và EF. Ta có $PB = PC$ nên tam giác PBC cân tại P. Vì M là trung điểm của BC nên $PM \perp BC$. Suy ra tứ giác $BMPE$ nội tiếp được trong một đường tròn dẫn đến $\widehat{BEM} = \widehat{BPM}$.



Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{PBC}$ nên

$$\widehat{BEM} + \widehat{BAC} = \widehat{BPM} + \widehat{PBC} = 90^0.$$

Suy ra $\widehat{EKA} = 90^0$ hay $EK \perp AK$ nên $EM \perp AF$. Tương tự $FM \perp AE$ suy ra M là trực tâm của tam giác AEF. Từ đó $AH \perp EF$ $\Rightarrow \widehat{HAF} + \widehat{HFA} = 90^0$. Mặt khác

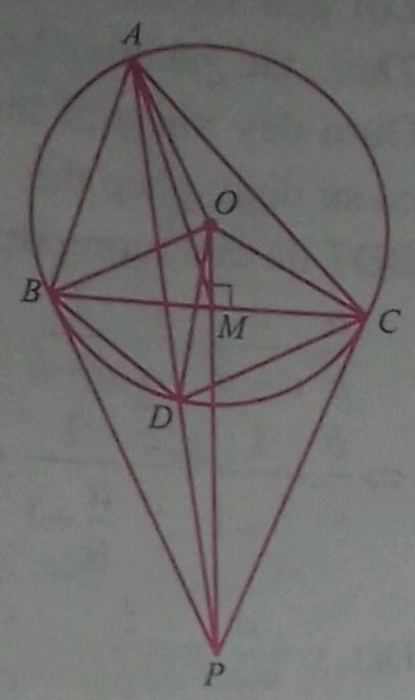
$$\widehat{PFE} + \widehat{HFA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HAF} = \widehat{PFE}.$$

Tứ giác $AEPF$ có $\widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^0$ nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp được trong một đường tròn. Suy ra $\widehat{BAP} = \widehat{PFE}$.

Mặt khác $\widehat{PFE} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

Cách 4.

Gọi D là giao điểm khác A của AP và đường tròn (O). Ta có $PB = PC$ suy ra tam giác PBC cân tại P. Mặt khác vì M là trung điểm của BC nên $PM \perp BC$. Ta có $OB = OC$ nên tam giác OBC cân tại O. Do M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$. Từ đó ba điểm O, M, P thẳng hàng và $OP \perp BC$. Tam giác OBP vuông tại B có $BM \perp OP$ nên



$$OB^2 = OM.OP \Rightarrow OA^2 = OM.OP \Rightarrow \frac{AO}{PO} = \frac{OM}{OA}.$$

Từ đó tam giác AOM đồng dạng với tam giác POA

$$\widehat{OMA} = \widehat{OAP} = \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{AOD})$$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - 2\widehat{ACD}) = 90^0 - \widehat{ACD}.$$

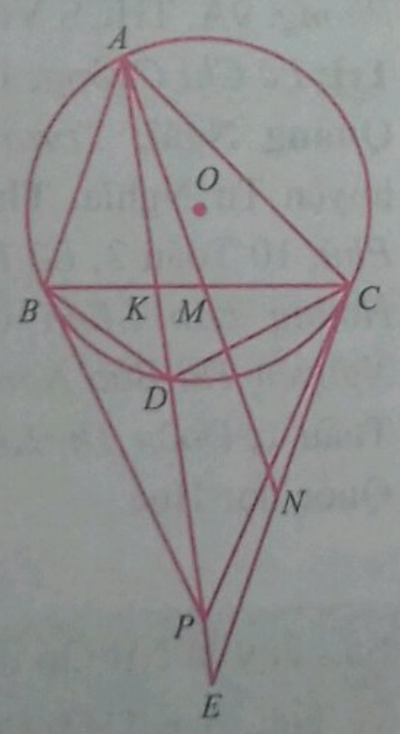
$$\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0 + \widehat{OMA} = 180^0 - \widehat{ACD} = \widehat{ABD}.$$

$$\Rightarrow \widehat{CAM} = 180^0 - \widehat{AMC} - \widehat{ACM}$$

$$= 180^0 - \widehat{ABD} - \widehat{ADB} = \widehat{BAD}.$$

Do đó $\widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

Cách 5. Gọi D là giao điểm khác A của AP và đường tròn (O); K là giao điểm của AD và BC. Ta có tam giác KBD đồng dạng với tam giác KCA suy ra $\frac{KB}{KA} = \frac{BD}{AC}$. (1)



Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DBP}$, suy ra tam giác BAP đồng dạng với tam giác DBP

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{BP}.$$

Tương tự có $\frac{AC}{CD} = \frac{AP}{CP}$. Vì $BP = CP$ nên

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}. \quad (2)$$

Ta có tam giác KBA đồng dạng với tam giác KCD nên $\frac{KA}{KC} = \frac{AB}{CD}$ (3). Từ (1), (2), (3)

$\Rightarrow \frac{KB}{KC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Kẻ đường thẳng đi qua C song song với AB cắt AD, AM theo thứ tự tại E, N. Ta có $\Delta MCN = \Delta MBA \Rightarrow CN = AB$.

Vì $AB \,//\, CE$ nên theo hệ quả của định lí Thales ta có $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{CE} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB}{CE}$. Từ đó

$$AC^2 = AB.CE \Rightarrow AC^2 = CN.CE \Rightarrow \frac{CN}{AC} = \frac{AC}{CE}.$$

Do đó tam giác CNA đồng dạng với tam giác $CAE \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{CEA}$. Mặt khác vì $AB \,//\, CE$ nên $\widehat{CEA} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAM}$.

Bằng cách tương tự bạn đọc có thể giải được bài toán sau:

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh rằng $\widehat{FDA} = \widehat{MDE}$.*

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 *Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

Nhận xét. Ngoài 5 cách giải nêu trên của tác giả *Trần Xuân Đáng*, Tòa soạn còn nhận được một số cách giải khác của bạn *Nguyễn Văn Luân*, GV THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương;** *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, h. Điện Biên, tỉnh **Điện Biên;** *Nguyễn Duy Phước*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh **Quảng Ngãi.** Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 23 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.3.2019.

BÀI TOÁN 23. *Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC; G là một điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường MG và CA cắt nhau tại D. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BCD.*

ĐẬU CÔNG NHO

(*GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 498, T12.2018.

Bài 29. (Olympic Moldova 1999) *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}.$$

Lời giải. Để chứng minh bài toán đề ra ta chứng minh bài toán tương đương:

$$D=\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}+\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\ge 0.$$

Do vai trò bình đẳng khi hoán vị vòng quanh các biến a, b, c nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử: $a=\max(a,b,c)$.

- Nếu $b\ge c$, khi đó:

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)}\ge\frac{a(b-c)}{a(a+b)};\frac{c(a-b)}{b(b+c)}\ge\frac{c(a-b)}{a(a+b)}$$

$$\Rightarrow D\ge\frac{a(b-c)}{a(a+b)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}+\frac{c(a-b)}{a(a+b)}=0$$

- Nếu $b\le c$, khi đó:

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)}\ge\frac{a(b-c)}{b(b+c)};\frac{b(c-a)}{a(a+b)}\ge\frac{b(c-a)}{b(b+c)}$$

$$\Rightarrow D\ge\frac{a(b-c)}{b(b+c)}+\frac{b(c-a)}{b(b+c)}+\frac{c(a-b)}{b(b+c)}=0$$

Vậy $D\ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. 1) Bài toán trên là một câu trong đề thi Olympic Moldova năm1999, có lời giải của đáp án khá dài và phải sử dụng nhiều đơn vị kiến thức. Lời giải trên khá ngắn gọn và khác với các lời giải đã có. Hơn nữa với cách giải như trên ta giải được bài toán mở rộng sau:

Cho ba số thực dương a,b,c và $\alpha,\beta>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\left(b^{\alpha}-c^{\alpha}\right)}{c\left(c^{\beta}+a^{\beta}\right)}+\frac{b\left(c^{\alpha}-a^{\alpha}\right)}{a\left(a^{\beta}+b^{\beta}\right)}+\frac{c\left(a^{\alpha}-b^{\alpha}\right)}{b\left(b^{\beta}+c^{\beta}\right)}\ge 0.$$

Lời giải và mở rộng bài toán trên của bạn *Lê Văn Thái*, tác giả gửi đề toán tới Tòa soạn.

Dưới đây xin giới thiệu một cách chứng minh khác có sử dụng phép thế.

BĐT đã cho tương đương với:

$$\frac{b}{c}.\frac{a}{c+a}+\frac{c}{a}.\frac{b}{a+b}+\frac{a}{b}.\frac{c}{b+c}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{c}.\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{c}{a}.\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{a}{b}.\frac{1}{\frac{b}{c}+1}\ge\frac{1}{\frac{c}{a}+1}+\frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1}{\frac{b}{c}+1}.$$

Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$ thì x, y, z dương và $xyz=1$.

BĐT trở thành:

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}\ge\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+$$
$$+x+y+z-3+(xy^2+yz^2+zx^2-3)\ge 0\ (1).$$

Theo BĐT Cauchy: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

$$xy^2+yz^2+zx^2\ge 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3.$$

Do đó (1) luôn đúng. BĐT đã cho được chứng minh.

2) Bài này có thể được giải bằng cách sử dụng các BĐT Bunyakovsky, BĐT Cauchy hay BĐT Schwarz. Tuy nhiên, lời giải của một số bạn theo những cách này vẫn còn dài. Khen ngợi các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thăng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Hải Dương:** *Phạm Thanh Phong*, 9A, THCS Võ Thị Sáu, TP. Hải Dương. **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, H. Cam Lộ. **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Quang Quốc Phú*, 10 Toán 2, *Lê Thị Minh Thùy*, *Nguyễn Đức Phát*, *Hoàng Bảo Minh Châu*, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, 10 Toán 1, *Đoàn Thị Kim Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 31. *Tìm giới hạn* $P=\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\left(6+\sqrt{35}\right)^n\right\},\forall n\in\mathbb{N}^*$, *trong đó* $\{x\}=x-[x]$ *với* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

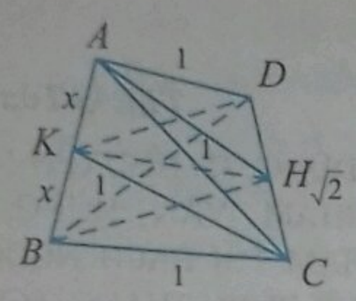
HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(*SV K61 ngành SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU? SỬA CHO ĐÚNG?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 496, *tháng* 10 *năm* 2018)

Phân tích và đáp án. Gọi H là trung điểm của CD, do các tam giác ACD và BCD vuông cân tại A nên $AH = BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Để tồn tại tứ diện $ABCD$ thì ta phải có:

$$0 < AB < AH + BH \quad \text{hay} \quad 0 < 2x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ không thể đạt giá trị lớn nhất.

Như vậy lời giải đã đưa ra không đúng trong việc việc xác định điều kiện của x $(0 < x < 1)$, dẫn tới kết luận diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là sai.

Nhận xét. Một số bạn đã phát hiện không đúng sai lầm và đưa ra lời giải sai. Tuy nhiên đa số các bạn đều phát hiện đúng sai lầm. Các bạn sau có lời giải đúng và gửi bài giải sớm đến Tòa soạn: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Ái Huyền Trang, Lê Thị Minh Thùy, Phạm Bá Hoàng*, 10 Toán 1, *Hồ Ngọc Hùng*, Nguyễn *Đức Phát, Trần Thị Mỹ Linh, Nguyễn Lê Hoàng Phương*, 10 Toán 2, *Đỗ Trung Thái, Lê Như Minh, Nguyễn Đình Thông*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

KIHIVI

ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ!

Trong giờ kiểm tra bài cũ môn Toán, thầy giáo *Hoàng Trung Dũng* đưa ra bài toán:

Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x) = 2\sin x - 3$.

Hai bạn học sinh lên bảng trình bày hai cách giải với hai đáp số như sau:

***Cách* 1.** Ta có: $f'(x) = 4\cos 2x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$f''(x) = -8\sin 2x = \begin{cases} -8 & \text{với } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 8 & \text{với } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

***Cách* 2.** Đặt $t = \sin 2x, -1 \le t \le 1$. Khi đó

$$f(t) = 2t - 3.$$

Ta có: $f'(t) = 2 > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1;1]$. Kéo theo hàm số $f(t)$ không có cực trị. Do đó hàm số $f(x)$ không có cực trị.

Theo bạn thì cách giải nào đúng? Và chỉ ra chỗ sai trong cách còn lại.

Nhóm tác giả:

HOÀNG TRUNG DŨNG - LÊ QUANG VŨ

CHU ĐỨC MINH - LÊ THẾ THÔNG

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 500 (2.2019)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

MỪNG XUÂN KỶ HỢI 2019

BÀI XƯỚNG

Tết này mừng bạn đón năm heo
Nhờ đức cần lao trải vượt nghèo
Năm tháng khó khăn dăm chú in
Sớm khuya tần tảo mấy áo bèo
Xy cương - áo rách, lề cần giữ
Văn hoá - gương đời, mẫu rọi theo
Vươn tới đoạn giàu bao khó nhọc
Nhân tâm, trí tuệ vững tay chèo.

ĐÀO TAM
(ĐHSP Vinh - 20/10/2018)

BÀI HỌA

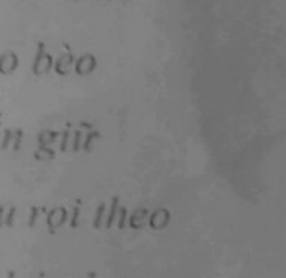
Giã từ 'cậu chó', đón 'chàng heo'
Quyết chí một phen để thoát nghèo
Đổi mới tư duy cùng kỹ thuật
Thay đi nồi cám với rau bèo
Thị trường lớn, bao điều cần học
Công nghệ xanh, lắm cái phải theo
Cả nước vươn mình, thời 'bốn chấm'
Bàn tay - khối óc hãy song chèo.

LÝ VĂN TOÁN
(ĐHSP Hà Nội - 15/12/2018)

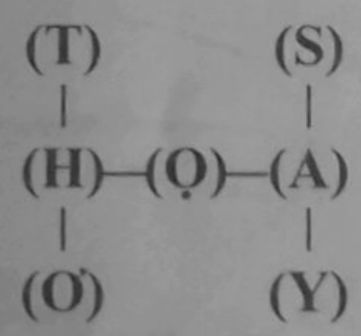
GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T12.2018

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH

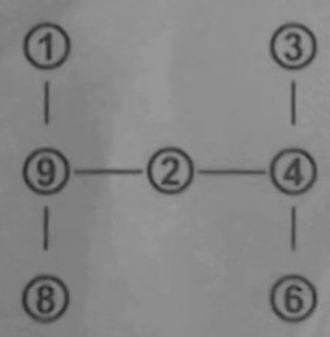
Bạn hãy điền các số 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9 vào các vòng tròn trong hình chữ H dưới đây sao cho tích ba số theo hàng ngang bằng tích ba số theo hàng dọc.



Lời giải. Đặt các chữ thay cho các chữ số 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9 như ở hình 1 với điều kiện là T.H.Ơ = H.Ọ.A = S.A.Y = k. Từ đó k^2.Ọ = T.H.Ơ.S.A.Y.Ọ = 1.2.3.4.6.8.9 = $2^7.3^4$, do vế trái có k^2 và số mũ của 2 ở vế phải là số lẻ nên chỉ xảy ra k^2.Ọ = $2(2^3.3^2)^2 = 8(2^2.3^2)^2$, do $1 \le$ Ọ ≤ 9 nên: hoặc Ọ = 2 và $k = 2^3.3^2$, hoặc Ọ = 8 và $k = 2^2.3^2$. Nếu Ọ = 8 và $k = 2^2.3^2$ = 1.4.9 thì k chỉ có một cách viết thành tích của 3 chữ số phân biệt (loại). Nếu Ọ = 2 và $k = 2^3.3^2$ = 72 = 1.8.9 = 2.4.9 = 3.4.6 thì k có ba cách viết thành tích của 3 chữ số. Chữ số có mặt trong hai cách viết là H = 9 và A = 4 (hoặc H = 4 và A = 9), lúc đó T.9.Ơ = S.4.Y = 72 nên (T; Ơ) = (1; 8) = (8; 1) và (S; Y) = (3; 6) = (6; 3). Khi cho H = 4 và A = 9 thì T.4.Ơ = S.9.Y = 72 nên (T; Ơ) = (3; 6) = (6; 3) và (S; Y) = (1; 8) = (8; 1). Trên hình 2 chỉ ra một nghiệm, khi lấy hình đối xứng với hình 2 qua trục đối xứng thẳng đứng hoặc trục đối xứng nằm ngang của hình chữ H ta được các nghiệm khác.



Hình 1



Hình 2

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải tổng quát trên, bạn *Đỗ Ngọc Ánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành, **Trà Vinh** đưa ra cách giải khác có ý tưởng như sau:

Nhận xét rằng, trong các số 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9 có ba số chia hết cho 3 là 3; 6; 9. Ta có: 6 = 3.2; 9 = 3.3. Như vậy số 6 và số 3 phải nằm trong cùng một hàng và số 9 phải nằm ở hai hàng. Gọi x là số chính giữa thì $9.x = 6.3 = 118$. Suy ra $x = 2$. Đến đây ta dễ dàng suy ra các số còn lại.

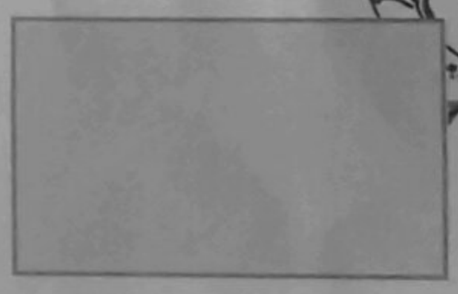
2) Ngoài bạn *Ánh*, các bạn sau có lời giải đúng: **Nghệ An:** *Nguyễn Xuân Khoa*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Phú Thọ:** *Đỗ Khánh Linh, Nguyễn Đức Vinh Quang, Triệu Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Thịnh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao. **Điện Biên:** *Nguyễn Văn Bản*, THCS Thanh Yên,; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, Khu phố 1, Phường 7, TP. Bến Tre; **Hà Tĩnh:** *Hồ Giang Châu*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy*, 10 Toán 1, *Hà Phương Hoàng Mai*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế, *Trần Đại Bảo Khanh*,10A7, THPT Hai Bà Trưng, TP. Huế.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

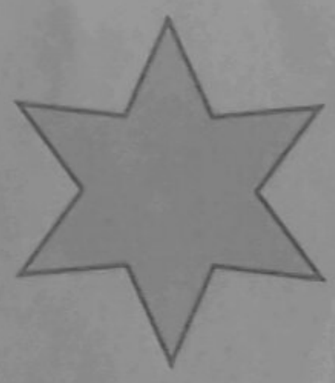
ĐỐ VUI !

BA HÌNH NGÔI SAO 6 CÁNH

Ba hình ngôi sao 6 cánh



Hình 1a



Hình 1b

Để trang trí nhân dịp năm mới, Bạn *Toàn* có tấm bìa hình chữ nhật với đường chéo bằng hai lần chiều rộng (hình 1a) và muốn cắt mảnh bìa này thành các mảnh rồi ghép tất cả các mảnh đó với nhau sao cho chúng không chờm lên nhau và khít nhau (không có khe hở giữa hai mảnh kề nhau) để tạo thành ba hình ngôi sao 6 cánh bằng nhau như hình 1b. Bạn hãy giúp bạn *Toàn* cắt ghép hình như thế với số mảnh được cắt ra càng ít càng tốt.

ĐAN QUỲNH *(Hà Nội)*

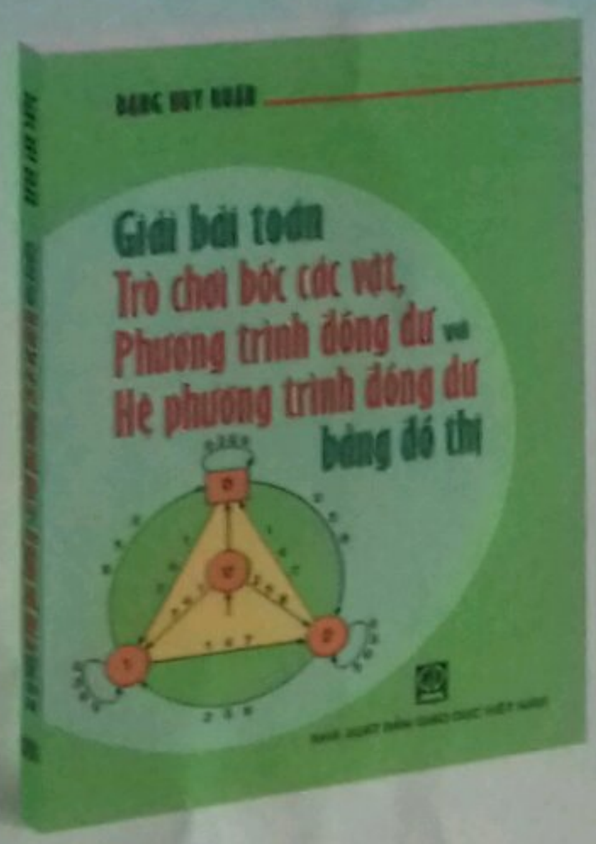
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

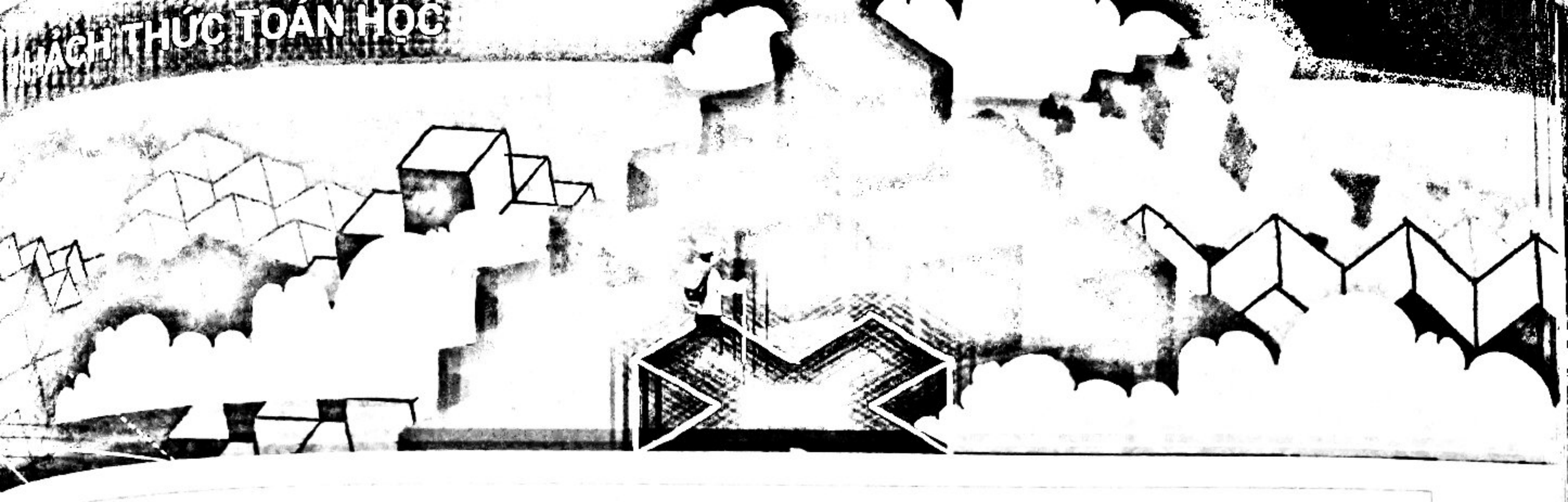
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT2M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.
- Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kỳ này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

Dành cho cấp THCS

P241. Cho M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC. Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên phân giác trong của góc $\angle BMA$; gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên phân giác trong của góc $\angle AMC$. Tia MA cắt đoạn DE tại điểm F. Hãy tính tỷ số $\frac{DF}{FE}$.

(Điểm Y được gọi là *hình chiếu vuông góc* của điểm X *trên đường thẳng* d, nếu Y nằm trên d và $XY \perp d$.)

A. Voidelevich (CH Belarus)

P242. Tìm tất cả các số thực a sao cho phương trình (ẩn x)

$$2x^3 - 15x^2 - (4a - 25)x + 10a = 0$$

có ba nghiệm thực đôi một phân biệt x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2 + 8x_2 + x_3^2 = 83.$$

Lưu Thị Thanh Hà (Kiên Giang)

P243. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho khi chia n cho 29, 41 và 59, ta sẽ được các số dư r_1, r_2 và r_3 thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ $r_1, r_2, r_3 > 0$;

2/ $r_1 + r_2 + r_3 = n$.

Lê Huy (Nam Định) st.

P244. Tìm tất cả các số nguyên dương $n < 24$, sao cho ta có thể phân chia tập hợp $\{n; n+1; \ldots; 24\}$ thành một số tập hợp con thỏa mãn điều kiện: trong mỗi tập hợp con đều tồn tại một số bằng tổng của tất cả các số còn lại trong tập hợp con ấy.

Hà Minh Thơ (Phú Thọ) st.

Dành cho cấp THPT

P245. Trên mặt phẳng, cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Với mỗi điểm M thuộc d, lấy điểm N trên mặt phẳng, sao cho AMN là một tam giác đều (thứ tự các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ). Hãy tìm tập hợp gồm tất cả các điểm N lấy được.

S. Mazanik (CH Belarus)

P246. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng, sao cho tại mỗi thời điểm, giá trị tuyệt đối của gia tốc của chất điểm không vượt quá $1m/s^2$. Biết rằng, trong quá trình chuyển động, chất điểm có thể thay đổi chiều chuyển động, và một giây sau thời điểm bắt đầu chuyển động, chất điểm quay trở về vị trí ban đầu. Chứng minh rằng, vận tốc của chất điểm ở nửa giây sau thời điểm bắt đầu chuyển động không vượt quá $0,25m/s$.

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P247. Cho a là số thực sao cho phương trình

$$x^3+ax^2+(a-3)x-1=0$$

có ba nghiệm thực (không nhất thiết đôi một khác nhau). Gọi ba nghiệm đó là x_1,x_2,x_3. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}=\sqrt{6-a-3\sqrt[3]{a^2-3a+9}}.$$

Trần Văn Lâm (Thái Nguyên)

P248. Tìm tất cả các hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau, với mọi số thực x:

1/ $\{f(x)\}\cdot\sin^2 x+\{x\}\cdot\cos f(x)\cdot\cos x=f(x)$;

2/ $f(f(x))=f(x)$.

($\{\alpha\}$ ký hiệu phần lẻ của số thực α.)

Lê Hoàng (Bình Định) st.

P249. Với mỗi số nguyên dương a, ký hiệu $S(a)$ là tổng các chữ số trong biểu diễn thập phân của a. Tìm tất cả các số nguyên dương n, sao cho hệ thức sau được thỏa mãn:

$$2(S(n))^3+7(S(n))^2+16=3n.$$

Nguyễn Tuấn Ngọc (Tiền Giang)

P250. Bạn Pi có n^2 chiếc kẹo ($n\in\mathbb{N}^*, n>2$), được đựng trong n chiếc hộp. Pi chọn ngẫu nhiên ba hộp và nếu tổng số kẹo trong ba hộp ấy là một số chia hết cho 3 thì Pi chuyển bớt từ hộp nọ sang hộp kia (nếu cần), sao cho ba hộp đó có số kẹo bằng nhau; trường hợp ngược lại (tức, tổng số kẹo có trong ba hộp là một số không chia hết cho 3), Pi chọn ba hộp khác, và lại thực hiện quy trình vừa nêu.

Tìm tất cả các số nguyên dương $n>2$, sao cho không phụ thuộc vào số kẹo có trong n hộp ở thời điểm ban đầu, nhờ việc thực hiện một số hữu hạn lần liên tiếp quy trình nêu trên, bạn Pi có thể làm cho số kẹo trong tất cả n hộp đều bằng nhau.

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P205. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ của (O), lấy điểm P tùy ý, không trùng với C,D. Đường thẳng AP lần lượt cắt BD và CD tại M và S. Đường thẳng BP lần lượt cắt AC và CD tại N và T. Đường tròn (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DMS tại điểm thứ hai Q (khác D), và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNT tại điểm thứ hai R (khác C). Gọi I là giao điểm của OP và CD; gọi J là giao điểm của DQ và CR. Chứng minh rằng tròn (DMS); gọi F là giao điểm thứ hai của BC và đường tròn (CNT).