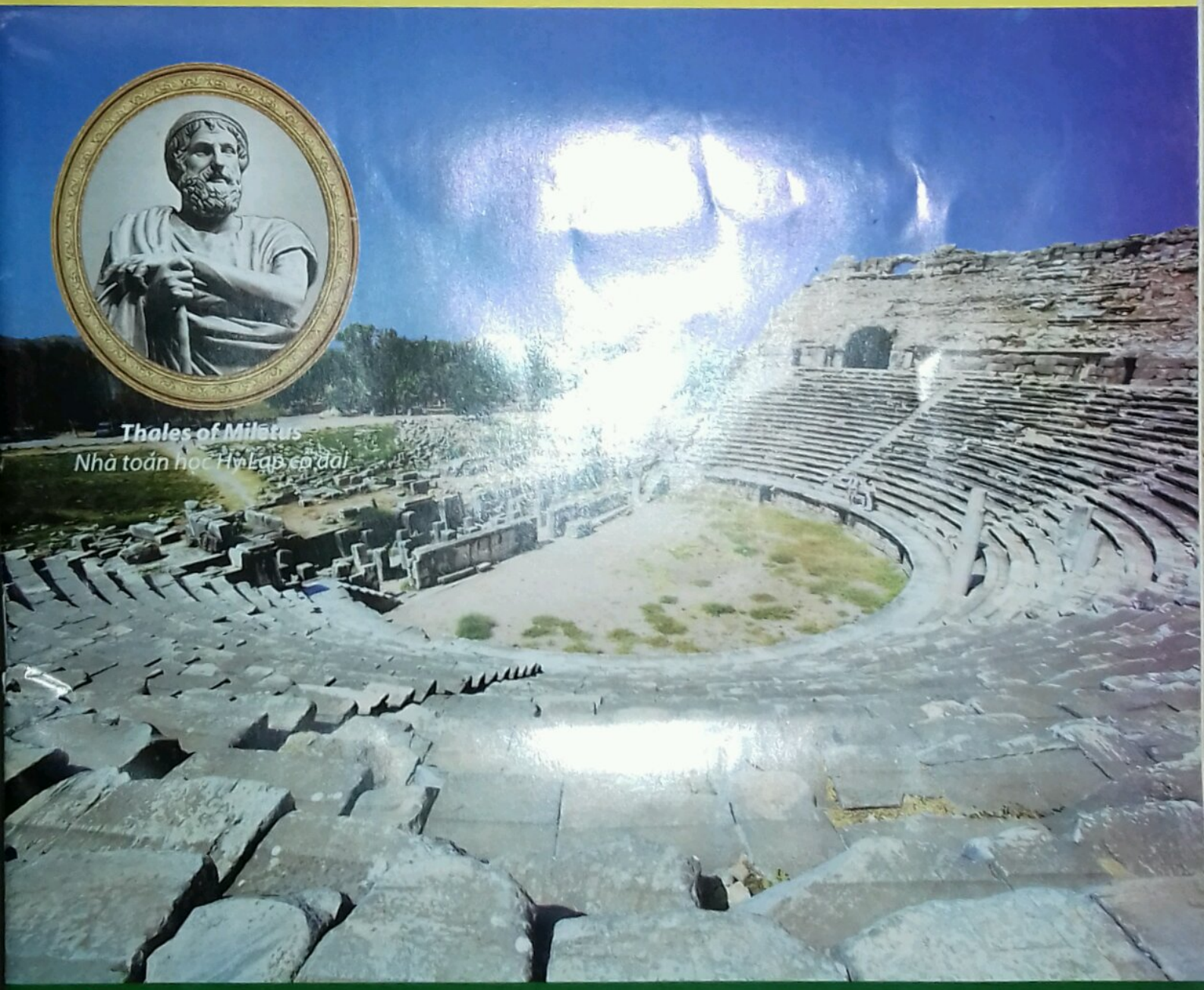
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2019
Số 499

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà hát Miletus

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

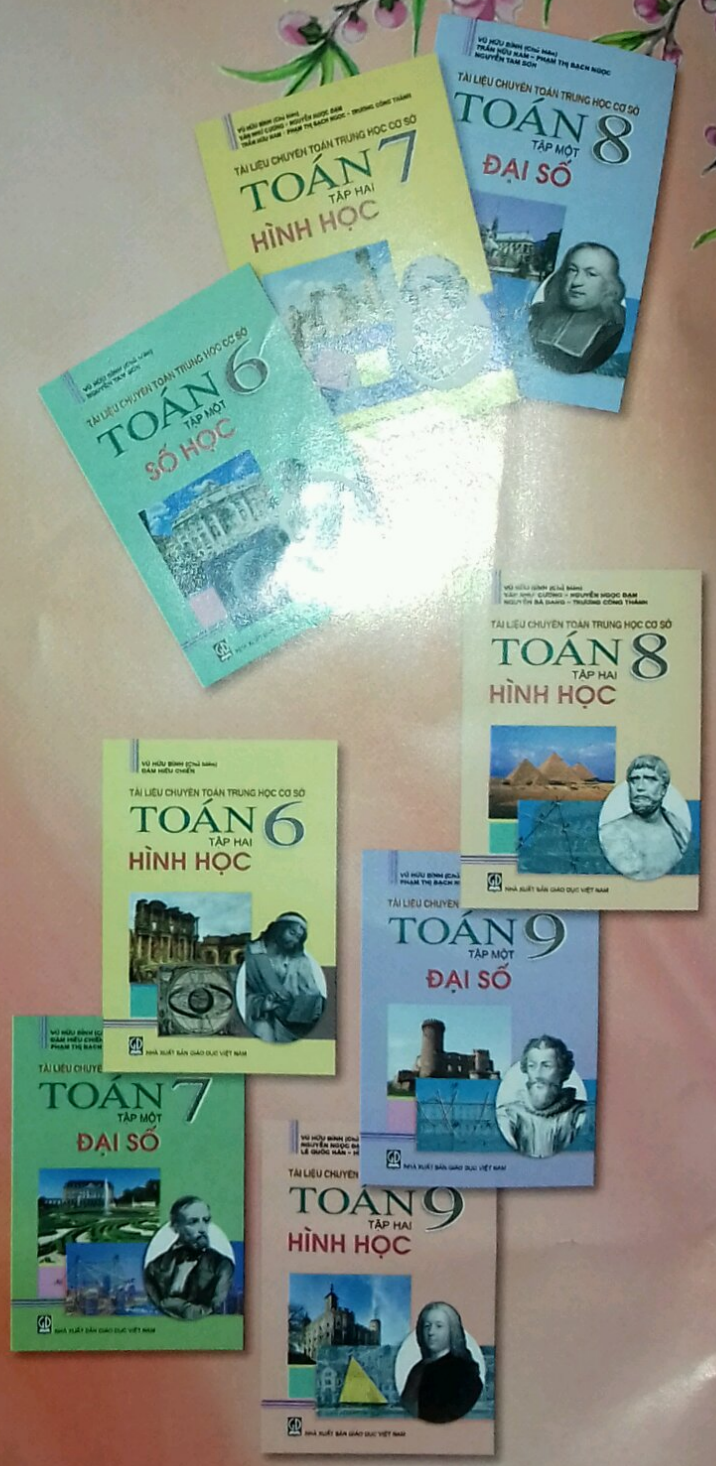
Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần *Hướng dẫn giải* cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGƯT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.



Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

XUNG QUANH BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9, TỈNH PHÚ YÊN, NĂM HỌC 2017 - 2018

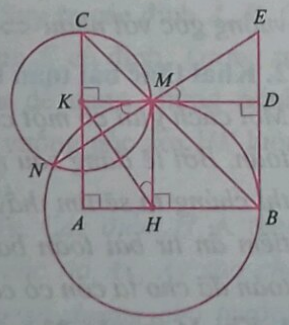
ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Đinh Tiên Hoàng, An Cư, Tuy An, Phú Yên)

Với nhiều năm giảng dạy và trực tiếp bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi (HSG) môn Toán, chúng tôi nhận thấy rằng: đa số các em thường hay thỏa mãn khi giải ra một bài tập nào đó (đặc biệt là bài Toán thi HSG) mà ít chịu tìm tòi, nghiên cứu, khai thác, … để tìm ra nhiều điều thú vị còn tiềm ẩn từ bài toán ban đầu. Vì vậy khi dạy cho học sinh (đặc biệt là dạy bồi dưỡng HSG), chúng tôi thường đưa ra nhiều ý tưởng khác nhau xung quanh từ bài toán ban đầu để các em thấy được những kết quả thú vị khác. Chúng ta hãy bắt đầu từ bài toán sau

Bài toán *(Trích đề thi chọn HSG Tỉnh Phú Yên, năm học 2017 – 2018) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M chuyển động trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC. Vẽ các đường tròn (H; HM) và (K; KM).*

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau.

b) Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (H) và (K). Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. a) Không mất tính tổng quát, giả sử $MK < MH$ (trường hợp $MK > MH$ thì chứng minh tương tự).

Xét ΔMHK có:

$$MH - MK < HK < MH + MK.$$

Suy ra (H) và (K) cắt nhau.

b) • ***Cách* 1.** Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt KM tại D, cắt NM tại E.

Xét ΔKMH và ΔEDM có: $MH = MD$;

$\widehat{KMH} = \widehat{EDM} = 90^0$; $\widehat{KHM} = \widehat{EMD}$ $(= \widehat{NMK})$.

Suy ra $\Delta KMH = \Delta EDM$ (g. c. g) $\Rightarrow MK = DE$

$\Rightarrow BE = BD + DE = HB + AH = AB$ (không đổi).

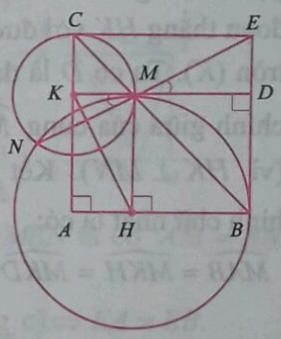
Do đó BE không đổi, hay MN luôn đi qua điểm cố định E.

Nhận xét: *Xung quanh bài toán này, chúng tôi nhận thấy có nhiều điều thú vị sau.*

1. Tìm nhiều lời giải khác nhau

• *Câu* a) *tuy đơn giản nhưng để làm được thì học sinh phải nhớ được bất đẳng thức liên hệ giữa đoạn nối tâm và giá trị tuyệt đối của hiệu hai bán kính, tổng độ dài hai bán kính (có thể các em sẽ quên bất đẳng thức hiệu hai bán kính).*

• *Từ câu* a), *ta có* $HK \perp MN$. *Đến đây thì chúng ta có rất nhiều sự lựa chọn lời giải cho câu* b). *Cụ thể ta có các cách giải khác nhau sau:*

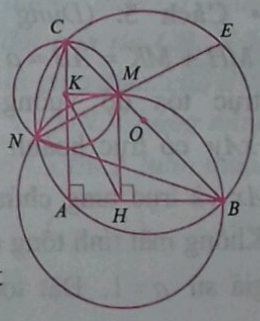


• ***Cách* 2.** Dựng hình vuông $ABEC$ thì điểm E cố định. Ta sẽ chứng minh MN đi qua E. Thật vậy, gọi D là giao điểm của KM và BE. Từ các hình vuông $ABEC$, $MHBD$ và các hình chữ nhật $AHMK$, $ABDK$. Ta có

$MH = MD$; $MK = DE$; $\widehat{KMH} = 90^0 = \widehat{EDM}$

$\Rightarrow \Delta KMH = \Delta EDM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{EMD}$, kết hợp với $\widehat{KHM} = \widehat{KMN}$ (cùng phụ với $\widehat{NMH}$) $\Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{DME}$. Suy ra ba điểm N, M, E thẳng hàng (do ba điểm K, M, D thẳng hàng). Điều này chứng tỏ đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định E.



• ***Cách* 3.** Dựng đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC thì đường tròn (O) cố định và có đường kính là cạnh BC. Gọi E là giao điểm của MN với (O) (E nằm trên nửa mặt

phẳng bờ BC không chứa điểm N). Ta sẽ chứng minh điểm E cố định. Thật vậy, dễ thấy các góc $\widehat{MNB}$, $\widehat{MNC}$ là các góc nhọn nên ta có:

$$\widehat{ENB} = \widehat{MNB} = \frac{1}{2}\widehat{MHB} = 45^0;$$

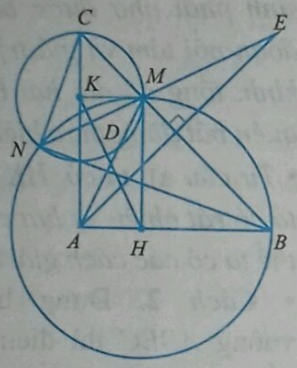
$$\widehat{ENC} = \widehat{MNC} = \frac{1}{2}\widehat{MKC} = 45^0$$

$$\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{ENB} + \widehat{ENC} = 90^0.$$

Suy ra điểm N thuộc đường tròn (O) đường kính BC. Do đó: sđ $\overset{\frown}{BE} = 2\widehat{ENB} = 2.45^0 = 90^0$

$\Rightarrow$ E là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$. Suy ra điểm E cố định.

• ***Cách 4.*** Gọi E là điểm đối xứng của điểm A qua cạnh BC thì điểm E cố định. Bây giờ ta sẽ chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua E. Thật vậy, gọi D là giao điểm của đoạn thẳng HK với đường tròn (K). Ta có D là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{MN}$ đối với đường tròn (K) (vì $HK \perp MN$). Kết hợp với tứ giác $AHMK$ là hình chữ nhật ta có:



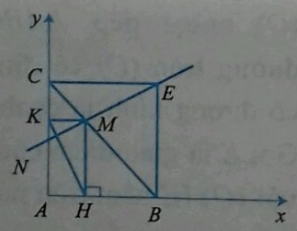
$$\widehat{MAB} = \widehat{MKH} = \widehat{MKD} = \text{sđ } \overset{\frown}{MD}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{MDN} = \widehat{MCN}.$$

Lại có: $\widehat{ABM} = 45^0 = \widehat{MNC}$.

Từ đó suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{CMN} \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMN}$ (vì A và E đối xứng nhau qua BC nên $\widehat{AMB} = \widehat{BME}$), do đó ba điểm N, M, E thẳng hàng. Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định E.

• **Cách 5.** (*Dùng phương pháp đại số*). Vì $MH + MK = AB = a$ (không đổi), nên ta lập hệ trục tọa độ vuông góc xAy có trục hoành chứa Ax và trục tung chứa Ay. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Đặt tọa độ điểm các điểm $B(1;0)$, $C(0;1)$. Do đó, nếu $H(m;0)$ thì $K(0;1-m)$; $M(m;1-m)$, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$.



Khi đó phương trình đường thẳng HK có dạng:

$$y = -\frac{1-m}{m}x + 1 - m.$$

$\Rightarrow$ PT đường thẳng MN (đường thẳng (Δ_m) đi qua M và vuông góc với đường thẳng HK) là:

$$y = \frac{m}{1-m}x + \frac{1-2m}{1-m}$$

$\Leftrightarrow m(x+y-2) + (1-y) = 0$, với $m \neq 0$; $m \neq 1$.

Vậy họ đường thẳng (Δ_m) đi qua M và vuông góc với đường thẳng HK luôn đi qua điểm cố định E có tọa độ là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 1 - y \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Chú ý. *Khi vận dụng phương pháp này, chúng ta cần biết rằng:*

• *Phương trình họ đường thẳng (Δ_m) có dạng $m.f(x,y) + h(x,y) = 0$. Khi đó họ đường thẳng (Δ_m) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là nghiệm của hệ PT* $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases}$.

• *Hai đường thẳng $(d): y = ax + b$, $(d'): y = a'x + b'$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.a' = -1$.*

2. Khai thác bài toán ban đầu

Mỗi cách giải có một có một hướng phát triển bài toán. Bởi lẽ đằng sau những cách giải khác nhau thì chúng ta sẽ tìm thấy nhiều kết quả thú vị đang tiềm ẩn từ bài toán ban đầu. Chẳng hạn, từ bài toán đã cho ta còn có các bài toán sau:

1. Khi M chuyển động trên cạnh BC. Chứng minh rằng:

a) $AN \parallel HK$.

b) Điểm N luôn chuyển động trên một đường cố định.

c) Các tiếp tuyến tại B, C (của các đường tròn (H), (K)) và đường thẳng MN đồng quy tại một điểm.

d) Tích $EM.EN$ không đổi (với E là điểm cố định mà đường thẳng MN luôn đi qua).

e) Các đường thẳng HN, KN lần lượt là tiếp tuyến của các đường tròn $(K;KM),(H;HM)$.

2. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC để độ dài các đoạn thẳng MN lớn nhất, HK nhỏ nhất?

3. Tính số đo góc $\widehat{ANB}$?

4. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn (O), $(K; KM)$, $(H; HM)$ cùng đi qua một điểm.

5. Gọi I là giao điểm của HK và MN. Tìm quỹ tích của điểm I khi M chuyển động trên cạnh BC.

Gợi ý.

• Từ cách 3, ta có lời giải cho các câu: 1a, 1b, 1e, 2, 3, 4.

• Từ cách 1, ta có lời giải cho các câu: 1c, 1d.

• Từ cách 4, ta có lời giải cho câu 5.

3. Xây dựng các bài toán khác nhau từ bài toán ban đầu

Ta nhận thấy rằng chu vi hình chữ nhật $AHMK$ bằng $2AB$ (không đổi) và $MN \perp HK$. Từ đó ta có các bài toán sau:

Bài 1. *Cho góc vuông xAy. Một hình chữ nhật AHMK có chu vi không đổi, còn các cạnh AH, AK thay đổi nhưng luôn nằm trên các tia Ax, Ay. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với HK luôn đi qua một điểm cố định.*

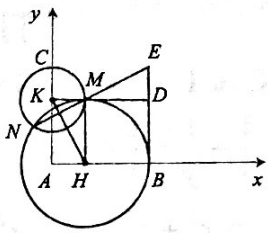
Gợi ý. Đặt $AH + AK = a$ (không đổi). Dựng hình vuông $ABEC$ có cạnh bằng a và hai đỉnh B, C lần lượt thuộc hai tia Ax, Ay. Suy ra các đỉnh A, B, C cố định. Từ đó suy ra điểm E cố định. Tương tự như bài toán ban đầu, ta dễ dàng chứng minh đường thẳng đi qua M và vuông góc với HK luôn đi qua một điểm cố định E.

Bài 2. *Cho góc vuông xAy. Các điểm H, K theo thứ tự chuyển động trên các tia Ax, Ay sao cho $AH + AK = a$ (a là hằng số dương cho trước). Dựng các đường tròn $(H;AK)$ và $(K;AH)$.*

a) *Chứng minh hai đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau.*

b) *Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn (H) và (K). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

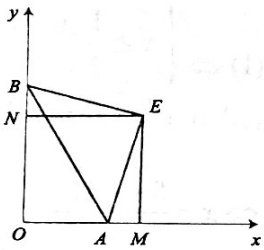
Hướng dẫn. a) Chứng minh tương tự như câu a) của bài toán ban đầu.



b) Gọi B là giao điểm của đường tròn (H) và tia Ax. Ta có $AB = AH + HB = a$ (không đổi). Suy ra điểm B cố định. Dựng đường thẳng vuông góc với AB tại B, cắt MN, KM lần lượt tại E, D. Chứng minh tương tự như bài toán ban đầu, ta được $BE = AB = a$ (không đổi). Do đó BE không đổi, suy ra điểm E cố định. Vậy MN luôn đi qua điểm cố định E.

Bài 3. *Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B lần lượt chuyển động trên hai tia Ox, Oy sao cho $OA + OB = a$ (a là hằng số dương cho trước). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.*

Hướng dẫn. Trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON = \frac{a}{2}\cdot$ Khi đó các điểm M, N cố định. Dựng hình vuông $OMEN$, ta có điểm E cố định. Hơn nữa, từ $OA + OB = a$ và kết hợp với hình vuông $OMEN$ ta có $AM = BN$. Từ đó



$$\Delta AME = \Delta BNE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EA = EB.$$

Vậy đường trung trực của đoạn thẳng AB luôn đi qua điểm cố định E.

4. Đưa ra bài toán để khai thác

Các bạn hãy giải bài toán sau với những ý tưởng: giải bằng nhiều cách, khai thác bài toán, xây dựng các bài toán khác nhau từ bài toán ban đầu.

Bài toán. *Cho tam giác ABC vuông cân tại B, M là trung điểm AC. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Gọi Cx là tia đối của tia CB, N là điểm bất kỳ thuộc Cx. Gọi E là giao điểm của d và AN, F là giao điểm của BE và MN. Chứng minh rằng khi N chuyển động trên Cx thì F luôn thuộc một đường cố định.*

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ TĨNH, NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. Từ giả thiết suy ra x, y, z khác 0, ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow (x+y)z=xy \Leftrightarrow xy-xz-yz=0,$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2+2(xy-xz-yz)$$
$$=(x+y-z)^2.$$

Vậy $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+y-z)^2}=|x+y-z|$ là số hữu tỷ.

Câu 2. a) ĐK: $x \geq -2$. Khi đó ta có:

$$4x^2-3x-2=\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+\frac{1}{4}=x+2+\sqrt{x+2}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-1=\sqrt{x+2} & (1) \\ 2x=-\sqrt{x+2} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x=\frac{5 \pm \sqrt{41}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{41}}{8}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2-x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{33}}{8}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{\frac{5+\sqrt{41}}{8}; \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right\}.$$

b) ĐK: $x, y \neq 0$, $x, y \neq 2$. Khi đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)=-4 \\ \frac{1}{(x-1)^2-1}+\frac{1}{(y-1)^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x-1=a \\ y-1=b \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} a.b=-4 \\ \frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b=-4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=-4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=-2 \\ a=-2, b=2 \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.
- $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-2 \\ y-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.

Nghiệm (x, y) của hệ là $(3,-1)$; $(-1,3)$.

Câu 3. a) PT (1) có $\Delta'=m^2+2m+1=(m+1)^2 \geq 0$ với mọi m. Suy ra (1) luôn có 2 nghiệm với mọi m. Khi đó

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=-1-2m \end{cases} \Rightarrow 2x_1x_2+1=-4m-1.$$

Ta có $x_1^2-2mx_2+1-2m$

$=(x_1^2+2mx_1-1-2m)-2m(x_1+x_2)+2$

$=-2m(x_1+x_2)+2=-2m(-2m)+2=4m^2+2.$

Suy ra

$$P=\frac{2x_1x_2+1}{x_1^2-2mx_2+1-2m}=\frac{2(-1-2m)+1}{4m^2+2}=\frac{-4m-1}{4m^2+2}$$

$$P=\frac{-4m-1}{4m^2+2}=\frac{4m^2-4m+1}{4m^2+2}-1=\frac{(2m-1)^2}{4m^2+2}-1 \geq -1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=\frac{1}{2}$. Khi đó GTNN của P bằng -1.

b) Ta có:

$x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y \Rightarrow xy+z=(1-x)(1-y)$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{(1-x)(1-y)}}$$
$$=\sqrt{\frac{y}{1-x}.\frac{x}{1-y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1-x}+\frac{x}{1-y}\right)$$

Vậy suy ra $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1-x}+\frac{x}{1-y}\right)$. (1)

Tương tự $\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-y}+\frac{y}{1-z}\right)$ (2)

$\sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-z}+\frac{z}{1-x}\right)$ (3)

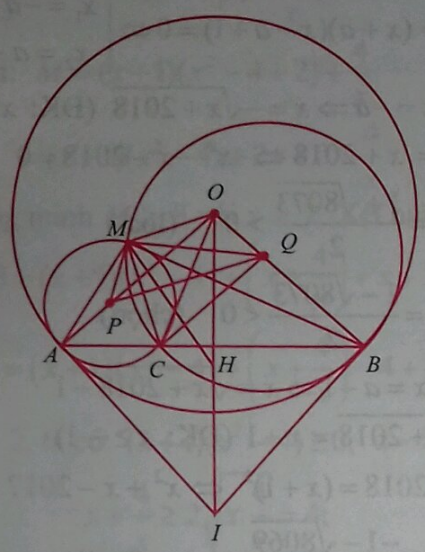
Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta có

$$\text{VT} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{1-x}+\frac{x+z}{1-y}+\frac{x+y}{1-z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1-x}+\frac{1-y}{1-y}+\frac{1-z}{1-z}\right)=\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 4.



Đính chính. Đề bài xin được sửa là: … $(O \notin AB)$...; … Đường tròn tâm P đi qua C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, …

Thành thật xin lỗi bạn đọc. TH&TT.

a) Dễ thấy AI, BI lần lượt là tiếp tuyến của (P) và (Q). Ta có

$\widehat{AMC}=\widehat{CAI}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ của (P))

$\widehat{BMC}=\widehat{CBI}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ của (Q))

Do $IA=IB$ nên ΔIAB cân tại I suy ra

$$\widehat{IAB}=\widehat{IBA} \Rightarrow \widehat{AMC}=\widehat{BMC}$$

Vậy MC là phân giác của góc $\widehat{AMB}$.

Ta có:

$$\widehat{AMB}=\widehat{AMC}+\widehat{CMB}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}=180^0-\widehat{AIB}$$

$\Rightarrow \widehat{AMB}+\widehat{AIB}=180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AMBI$ là tứ giác nội tiếp. Dễ thấy tứ giác $AIBO$ nội tiếp đường tròn đường kính OI, suy ra các điểm A, I, B, O, M thuộc đường tròn đường kính OI.

b) Ta có $\widehat{MPO}=2\widehat{MAO}$; $\widehat{MQO}=2\widehat{MBO}$.

Mặt khác $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}$ (tứ giác $MABO$ nội tiếp). Suy ra $\widehat{MPO}=\widehat{MQO}$. Vậy tứ giác $MOQP$ nội tiếp.

Gọi H là trung điểm OI, khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các điểm A, I, B, O, M, suy ra $\widehat{MHO}=2\widehat{MAO}$. Mặt khác

$$\widehat{MPO}=2\widehat{MAO} \Rightarrow \widehat{MPO}=\widehat{MHO}.$$

Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MOQP$. Do H cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn đi qua hai điểm O, H cố định. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ thuộc trung trực của đoạn OH.

Câu 5. Tồn tại số chính phương b thỏa mãn $S_n \le b < S_{n+1}$ khi và chỉ khi trong $\left[\sqrt{S_n};\sqrt{S_{n+1}}\right)$ tồn tại một số nguyên. Ta chứng minh

$$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n} \ge 1 \qquad (1)$$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{S_{n+1}} \ge \sqrt{S_n}+1 \Leftrightarrow S_{n+1} \ge S_n+2\sqrt{S_n}+1$

$\Leftrightarrow S_n+a_{n+1} \ge S_n+2\sqrt{S_n}+1 \Leftrightarrow a_{n+1} \ge 2\sqrt{S_n}+1.$

Theo giả thiết $a_1<a_2<a_3<...<a_n<...$ là những số nguyên dương và không có hai số nào liên tiếp, suy ra: $a_n \le a_{n+1}-2$;

$a_{n-1} \le a_{n+1}-2.2$;

$a_{n-2} \le a_{n+1}-2.3$;

……..

$a_1 \le a_{n+1}-2.n$

Suy ra

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n \le n.a_{n+1}-2(1+2+...+n)$$
$$=n.a_{n+1}-n(n+1).$$

Suy ra $S_n \le n.a_{n+1}-n(n+1)$. (2)

Ta chứng minh $a_{n+1} \ge 2\sqrt{n.a_{n+1}-n(n+1)}+1$ (3)

$(3) \Leftrightarrow a_{n+1}-1 \ge 2\sqrt{n.a_{n+1}-n(n+1)}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2-2a_{n+1}+1 \ge 4[n.a_{n+1}-n(n+1)]$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2-2a_{n+1}(2n+1)+(2n+1)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a_{n+1}-2n-1)^2 \ge 0.$

Từ (2) và (3) ta suy ra $a_{n+1} \ge 2\sqrt{S_n}+1$.

Suy ra (1) đúng, ta có đpcm.

NGUYỄN THẾ ANH

(GV THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh) ***giới thiệu***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH, NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. 1) $n^6-2n^4+n^2=n^2(n^4-2n^2+1)$

$=n^2(n^2-1)^2=n^2(n-1)^2(n+1)^2=[n(n-1)(n+1)]^2.$

Với n nguyên thì $n(n-1)(n+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và cho 3, do đó tích chia hết cho 6.

Suy ra $[n(n-1)(n+1)]^2$ chia hết cho 36.

Vậy $n^6-2n^4+n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Xét tổng:

$$x+y+z=(a+b+c)^2-9ab+(a+b+c)^2-9bc+(a+b+c)^2-9ac$$

$$=3(a+b+c)^2-9(ab+bc+ca)$$

$$=3[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$$

$$=3[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)]$$

$$=\frac{3}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)]$$

$$=\frac{3}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0 \text{ (vì } a\neq b\neq c).$$

Suy ra: $x+y+z>0$ (1). Do đó ít nhất một trong ba số x, y, z dương. Thật vậy nếu cả ba số x, y, z đều nhỏ hơn hoặc bằng 0 thì tổng $x+y+z\leq 0$ (điều này trái với (1)).

Câu 2. 1) Từ phương trình đã cho tương đương

$\Leftrightarrow 2x^2+xy+x-2xy-y^2-y+9y-9=13$

$\Leftrightarrow 2x^2-xy+x-y^2+8y-15-7=0$

$\Leftrightarrow (2x^2+xy-5x)+(-2xy-y^2+5y)+(6x+3y-15)=7$

$\Leftrightarrow x(2x+y-5)-y(2x+y-5)+3(2x+y-5)=7$

$\Leftrightarrow (2x+y-5)(x-y+3)=7.$

Ta có bảng sau:

$x-y+3$	1	7	-1	-7
$2x+y-5$	7	1	-7	-1
x	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	-2	-2
y	$\frac{16}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	8

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là $(x,y)=(-2,2)$ và $(x,y)=(-2,8)$.

2) ĐK: $x\geq -2018$. Khi đó ta có

$$(1)\Leftrightarrow x^2+x+\sqrt{x+2018}=x+2018.$$

Đặt $a=\sqrt{x+2018}$ $(a\geq 0)$, ta có:

$$x^2+x+a=a^2\Leftrightarrow (x^2-a^2)+(x+a)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x-a+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-a \\ x_2=a-1 \end{array}\right..$$

• Với $x=-a\Rightarrow x=-\sqrt{x+2018}$ (ĐK: $x\leq 0$)

$\Rightarrow x^2=x+2018\Leftrightarrow x^2-x-2018=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=\dfrac{1+\sqrt{8073}}{2}>0 & \text{(loại)} \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{8073}}{2}<0 & \text{(chọn)} \end{array}\right..$$

• Với $x=a-1\Rightarrow x=\sqrt{x+2018}-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2018}=x+1$ (ĐK: $x\geq -1$)

$\Rightarrow x+2018=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x-2017=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=\dfrac{-1-\sqrt{8069}}{2}<-1 & \text{(loại)} \\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{8069}}{2} & \text{(chọn)} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{8073}}{2};x_2=\frac{-1+\sqrt{8069}}{2}.$$

Câu 3. 1) $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)\leq 0$

$\Leftrightarrow a^2-2a(b+c)+(b+c)^2+(b-c)^2-(b+c)^2\leq 0$

$\Leftrightarrow [a-(b+c)]^2-4bc\leq 0\Leftrightarrow |a-(b+c)|\leq 2\sqrt{bc}$

$\Rightarrow a\leq(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\Leftrightarrow apq\leq(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2.pq$ (do $pq\geq 0$).

Do $p+q+r=0$ nên $r=-(p+q)$. Từ đó:

$apq+bqr+crp\leq(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2pq+r(bq+cp)$

$=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2pq-(p+q)(bq+cp)$

$=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2pq-bpq-bq^2-cpq-cp^2$

$=pq[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-b-c]-(bq^2+cp^2)$

$=2\sqrt{b}.\sqrt{c}.pq-(bq^2+cp^2)$

$=-(\sqrt{b}q+\sqrt{c}p)^2\leq 0.$

2) Ta có: $M=(a+b+1)[(a+b)^2-2ab]+\dfrac{4}{a+b}\cdot$

Thay $ab=1$ ta có:

$$M=(a+b+1)[(a+b)^2-2]+\frac{4}{a+b}\cdot$$

Đặt $x=a+b$, với $a,b>0$ ta có:

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow a+b\geq 2\Rightarrow x\geq 2.$$

Khi đó: $M=(x+1)(x^2-2)+\dfrac{4}{x}$ (ĐK: $x\geq 2$).

Biến đổi: $M=(x+1)(x^2-4+2)+\dfrac{4}{x}$

$$=(x+1)(x^2-4)+2x+2+\frac{4}{x}\cdot$$

Ta chứng minh $M\geq 8$ với $x\geq 2$. Xét hiệu:

$$M-8=(x+1)(x^2-4)+\left(x+\frac{4}{x}\right)+x+2-8$$

$$=(x+1)(x^2-4)+\left(x+\frac{4}{x}\right)-4+(x-2)$$

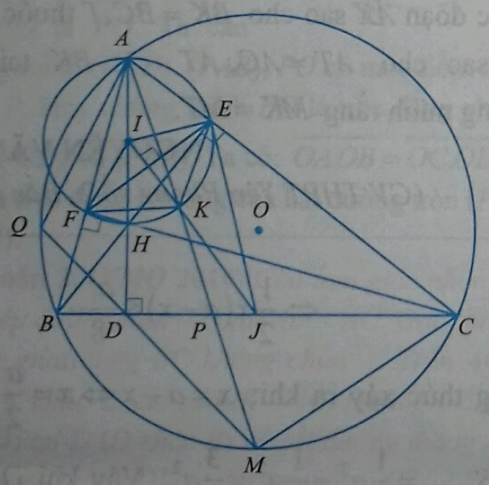
Với $x\geq 2$, ta có: $(x+1)(x^2-4)\geq 0$; $x-2\geq 0$.

$$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{4}{x}}=4;$$

Do đó: $M-8\geq 0\Leftrightarrow M\geq 8$; $M=8$ khi $x=2$ $\Leftrightarrow a+b=2$ và $ab=1\Leftrightarrow a=b=1$.

Vậy GTNN của M bằng 8.

Câu 4.



1) a) • $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BH}{BC}\Leftrightarrow BH.BE=BD.BC.$ (1)

• $\Delta CAD \backsim \Delta CBE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CB}=\dfrac{CD}{CE}\Leftrightarrow CA.CE=CD.BC$

$\Leftrightarrow CA.CE.BD=CD.(BC.BD).$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $CA.CE.BD=CD.BH.BE.$

Vậy $AC.BD.CE=BE.CD.BH.$

b) Ta có: $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn có tâm J, đường kính BC.

Mặt khác, đường tròn tâm I ngoại tiếp tứ giác $AFHE$ và đường tròn tâm J ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ có chung dây EF nên đường nối tâm IJ là trung trực của EF, ta có $K\in IJ$ nên

$$KE=KF\Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{KE}=\text{sđ}\overset{\frown}{KF}\Rightarrow \widehat{EAK}=\widehat{FAK}$$

$$\Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{CM}=\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\Rightarrow \text{sđ}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CM})=\text{sđ}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BM}).$$

Ta có:

$$\widehat{APB}=\frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CM});\ \widehat{ACM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ABM}.$$

Do đó $\widehat{APB}=\widehat{ACM}$. (1)

Vì tứ giác $AQMC$ nội tiếp nên

$$\widehat{ACM}+\widehat{AQM}=180^0. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{APB}+\widehat{AQM}=180^0$. Vậy tứ giác $AQDP$ nội tiếp.

2) a) Đặt $AB=AC=a$ $(a>0)$, $BD=AE=x$ $(0\leq x\leq a)$. Khi đó $AD=a-x$.

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ADE ta có: $DE^2=AD^2+AE^2=(a-x)^2+x^2$

Áp dụng BĐT Bunyacovsky ta có:

$$(1^2+1^2)[(a-x)^2+x^2]\geq[(a-x)+x]^2$$

$$\Leftrightarrow (a-x)^2+x^2\geq\frac{a}{2}\Leftrightarrow DE^2\geq\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow DE\geq\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a-x=x\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}\cdot$ Khi đó D, E là trung điểm của AB, AC. Vậy khi D, E là trung điểm của AB, AC thì DE có giá trị nhỏ nhất và bằng $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot$

b) Ta có: $S_{BDEC}=S_{ABC}-S_{ADE}$. Do đó S_{BDEC} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi S_{ADE} đạt giá trị lớn nhất.

(Xem tiếp trang 8)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BẮC NINH
NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1 (4 *điểm*). 1) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}},\text{ với } x\ge 2.$$

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3};B=x^7+\frac{1}{x^7}.$$

Câu 2 (4 *điểm*). 1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\ 4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}.$$

Câu 3 (3,5 *điểm*). 1) Tìm tất cả các số nguyên dương m,n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a,b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Câu 4 (6 *điểm*). Cho tam giác ABC cân tại $A\left(\widehat{BAC}>90^0\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B,I,E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (2,5 *điểm*). 1) Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\ne 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao, X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

(*Tiếp theo trang 7*)

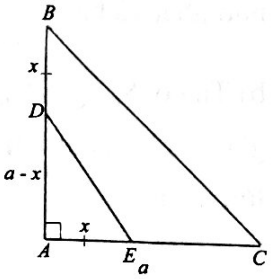
b) Ta có:

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}x.(a-x).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$x(a-x)\le\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x(a-x)\le\frac{a^2}{4}$$



$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x(a-x)\le\frac{a^2}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $x=a-x\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$. Khi đó $S_{BDEC}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2$. Vậy khi D, E là trung điểm của AB, AC thì S_{BDEC} có giá trị nhỏ nhất và bằng $\frac{3}{8}a^2$.

BÙI VĂN CHI
(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BẮC NINH
NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1 (*4 điểm*). 1) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}},\text{ với } x\ge 2.$$

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức:

$$A=x^3+\frac{1}{x^3};B=x^7+\frac{1}{x^7}.$$

Câu 2 (*4 điểm*). 1) Cho phương trình $x^2+(m^2+1)x+m-2=0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2+y=xy+4\\ 4x^2-24x+35=5\left(\sqrt{3y-11}+\sqrt{y}\right)\end{cases}.$$

Câu 3 (*3,5 điểm*). 1) Tìm tất cả các số nguyên dương m,n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m.

2) Cho tập A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a,b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Câu 4 (*6 điểm*). Cho tam giác ABC cân tại $A\left(\widehat{BAC}>90^0\right)$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm nằm trên cạnh BC $(BM>CM)$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, ED cắt BC tại N.

1) Chứng minh rằng $MA.MD=MB.MC$ và $BN.CM=BM.CN$.

2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD. Chứng minh rằng ba điểm B,I,E thẳng hàng.

3) Khi $2AB=R$, xác định vị trí của M để $2MA+AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (*2,5 điểm*). 1) Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và $xy+yz+zx\ne 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\le\frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}.$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao, X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK=BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT=AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK=MT$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

(*Tiếp theo trang 7*)

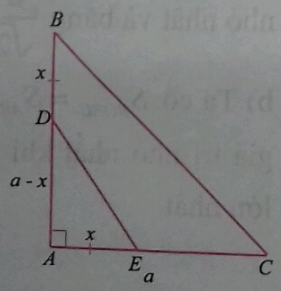
b) Ta có:

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}x.(a-x).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$x(a-x)\le\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x(a-x)\le\frac{a^2}{4}$$



$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x(a-x)\le\frac{a^2}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $x=a-x\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$. Khi đó $S_{BDEC}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2$. Vậy khi D, E là trung điểm của AB, AC thì S_{BDEC} có giá trị nhỏ nhất và bằng $\frac{3}{8}a^2$.

BÙI VĂN CHI
(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)
giới thiệu

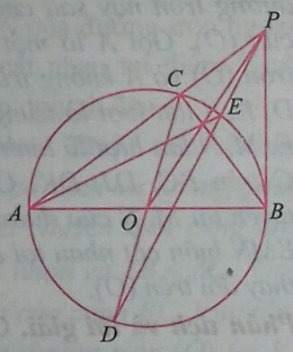
PHÉP NGHỊCH ĐẢO QUA CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC THI OLYMPIC VIỆT NAM

LÊ ANH DŨNG

(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Phép nghịch đảo là một công cụ hay trong việc giải các bài toán hình học thi Olympic. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày các bài hình thi Olympic của Việt Nam dưới góc nhìn của phép nghịch đảo. Chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau

Bài toán 1. (*VMO* 2011) *Cho đường tròn (O) đường kính AB. P là một điểm trên tiếp tuyến của (O) tại B; (P khác B). Đường thẳng AP cắt (O) lần thứ hai tại C. D là điểm đối xứng với C qua O. Đường thẳng DP cắt (O) lần thứ hai tại E. Chứng minh rằng AE, BC, PO đồng quy tại M.*



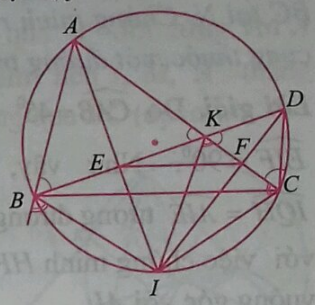
Lời giải. Xét phép nghịch đảo f tâm P phương tích $k = \mathcal{P}_{P/(O)}$. Khi đó qua f thì A biến thành C, E thành D; giữ nguyên B; ảnh của AE là đường tròn (PCD); ảnh của BC là đường tròn (PAB); ảnh của PO là PO. Ta cần chứng minh (PCD), (PAB), PO có một điểm chung khác P. Hay chứng minh PO là trục đẳng phương của (PCD) và (PAB). Ta có: $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OC}.\overline{OD}$ nên PO là trục đẳng phương của hai đường tròn (PCD), (PAB).

Bài toán 2. (*VMO* 2014) *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với AB < AC. Gọi I là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho IK = IC. Đường thẳng BK cắt (O) tại D (D khác B) và cắt đường thẳng AI tại E. Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F.*

a) *Chứng minh rằng* $EF = \frac{1}{2}BC$.

b) *Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P (P khác B). Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm đoạn thẳng AD.*

Lời giải. a) Ta chứng minh AI là trung trực của BK; ID là trung trực của KC. Thật vậy có



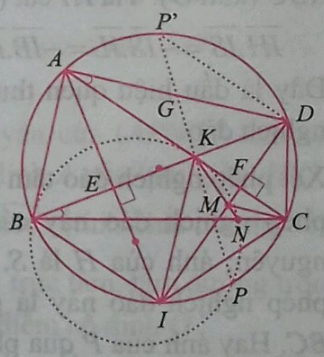
$\widehat{ICK} = \widehat{IKC}$ (ΔIKC cân).

Mà $\widehat{AKI} = 180^0 - \widehat{IKC}$,

$\widehat{ABI} = 180^0 - \widehat{ICK}$

nên $\widehat{ABI} = \widehat{AKI}$. Từ đó dễ thấy $\Delta ABI = \Delta AKI$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AK$. Do đó AI là trung trực của BK.

$\widehat{DCK} = \widehat{ABD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) $= \widehat{AKB}$ (do AI là trung trực của BK) $= \widehat{DKC}$. Suy ra ID là trung trực của KC. Vậy EF là đường trung bình của tam giác KBC nên $EF = \frac{1}{2}BC$.



b) Ta nhận thấy $(BPNK)$ tiếp xúc với AC. Thật vậy, ta có: $\widehat{MKC} = \widehat{MCK}$ (ID là trung trực của KC) $= \widehat{CAD}$ (so le trong) $= \widehat{DBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$).

Vậy $(BPNK)$ tiếp xúc với AC. Xét phép nghịch đảo tâm K, phương tích $k = \overline{KA}.\overline{KC}$. Đường tròn (BKP) biến thành đường thẳng $P'D$; AC giữ nguyên. Suy ra $P'D \parallel AC$. Mà K là trực tâm tam giác ADI nên P' đối xứng với K qua trung điểm của AD. Hay PP' đi qua trung điểm AD.

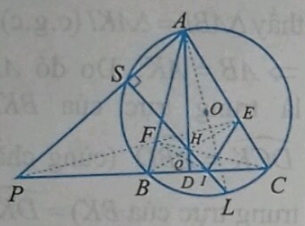
Các bài toán chọn đội tuyển (TST): TST 2013, TST 2012, TST 2015 của Việt Nam cùng chung một mô hình phép nghịch đảo: trực tâm và trung điểm một cạnh.

Bài toán 3. (*Việt Nam TST 2013*) *Cho tam giác ABC nhọn không cân có góc A bằng 45^0. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. Gọi I là trung điểm của BC; đường thẳng IF cắt PH tại Q.*

a) *Chứng minh rằng $\widehat{IQH} = \widehat{AIE}$.*

b) *Gọi K là trực tâm của tam giác AEF và (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. Đường thẳng CK cắt (J) tại G, đường thẳng IG cắt (J) tại M, đường thẳng JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh rằng các điểm G, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. Do $\widehat{CAB} = 45^0$ nên dễ dàng chứng minh $\widehat{EIF} = 90^0$. Như vậy, yêu cầu chứng minh $\widehat{IQH} = \widehat{AIE}$ tương đương với việc chứng minh HP vuông góc với AI.



Một tính chất rất quen thuộc của trực tâm H, trung điểm I của BC là: nếu L là điểm đối xứng với H qua I thì AL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (tâm O). Tia HI cắt (ABC) tại S. Khi đó

$$\overline{IH}.\overline{IS} = -\overline{IS}.\overline{IL} = -\overline{IB}.\overline{IC} = IB^2 = IE^2 = IF^2.$$

Đây là dấu hiệu quen thuộc cho ta sử dụng phép nghịch đảo.

Xét phép nghịch đảo tâm I, phương tích IB^2. Qua phép nghịch đảo này các điểm F, E, C, B giữ nguyên; ảnh của H là S. Suy ra, ảnh của P qua phép nghịch đảo này là giao điểm của (IEF) và BC. Hay ảnh của P qua phép nghịch đảo này là D (do (FEI) là đường tròn Euler của ΔABC nên nó đi qua D). Suy ra, tứ giác PSHD nội tiếp. Suy ra, $\widehat{PSH} = 90^0$. Suy ra, A, S, P thẳng hàng. Vậy H là trực tâm tam giác API, suy ra $HP \perp AI$.

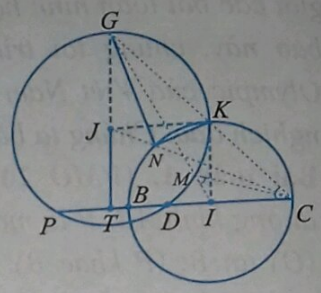
b) Do $\widehat{CAB} = 45^0$ nên các tam giác BAE, AFC vuông cân. Suy ra $EO \perp AB; FO \perp AC$. Suy ra K trùng O. Vậy tam giác KBC vuông cân tại K. Gọi T là trung điểm PD thì do $(DPBC) = -1$, nên theo hệ thức Maclaurin có $CB.CT = CD.CP = CK.CG$ $\Rightarrow$ tứ giác GTBK nội tiếp, do $\widehat{BKG} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{GTD} = 90^0$ hay $GT \perp PD$. ΔJPD cân tại J nên $JT \perp PD \Rightarrow$ G, J, T thẳng hàng. Do D là ảnh của P qua phép nghịch đảo tâm I, phương tích IB^2 nên $\overline{IP}.\overline{ID} = IB^2 = IK^2$. Suy ra IK là tiếp tuyến của (J) $\Rightarrow JK \perp IK$. Mà $\widehat{IKC} = 45^0$ nên $\widehat{JKG} = 45^0$ và $\widehat{JGK} = 45^0$. Mặt khác, ta có $\widehat{KNC} = \widehat{KBC} = 45^0 = \widehat{JGK}$ nên tứ giác GJNK nội tiếp. Suy ra $\widehat{GNJ} = \widehat{GKJ} = 45^0$. (1). Ta cũng có

$$\overline{IM}.\overline{IG} = \overline{ID}.\overline{IP} = IC^2$$

nên tam giác IMC đồng dạng với tam giác ICG. Do đó,

$$\widehat{IMC} = \widehat{ICG} = 45^0 = \widehat{GNJ}$$

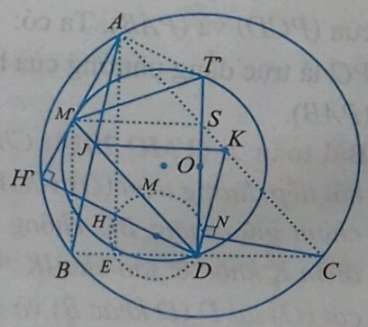
$$\Rightarrow \widehat{GMC} = \widehat{GNC} = 135^0.$$



Vậy bốn điểm G, N, M, C cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 4. (*TST Việt Nam 2012*) *Trên mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn này sao cho BC không là đường kính của (O). Gọi A là một điểm di động trên đường tròn (O) và A không trùng với hai điểm B, C. Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại điểm T cố định khi điểm A thay đổi trên (O).*

Phân tích và lời giải. Gọi H là trực tâm ΔABC. Đường tròn (EMN) chính là đường tròn đường kính HD. Mô hình bài toán, gợi ý cho ta ta xét phép nghịch đảo ω, tâm D, phương tích DB^2. Gọi H′ là giao điểm của tia DH và (ABC); M′ là giao điểm của DM và AH′; S là giao điểm của DO và AC. Ta đã biết, qua ω ảnh của H là H′; ảnh của đường tròn đường kính HD là đường thẳng qua H′ và vuông góc với DH′ nên là đường thẳng AH′; ảnh của M là M′; ảnh của tiếp tuyến với đường tròn đường kính HD tại M là đường tròn ($\mathscr{C}$) qua M′, D và tiếp xúc với AH′.



Ta sẽ chứng minh đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua một điểm cố định T'. Dự đoán, T' nằm trên DO. Quan sát hình vẽ ta dự đoán O là trung điểm DT' hay $AHDT'$ là hình bình hành.

$\widehat{M'T'D} = \widehat{H'M'D}$ (do $H'A$ là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$))

$= \widehat{M'AC}$ (do $DM' \parallel AC$).

Suy ra tứ giác $AT'SM'$ nội tiếp, như vậy để chứng minh $AT' \parallel HD$ ta chứng minh $\widehat{M'ST'} = 90^0$ (và do đó $\widehat{T'AM'} = 90^0$). Do B giữ nguyên và M' là ảnh của M qua phép nghịch đảo ω nên $\widehat{M'BD} = \widehat{DMB} = 90^0$.

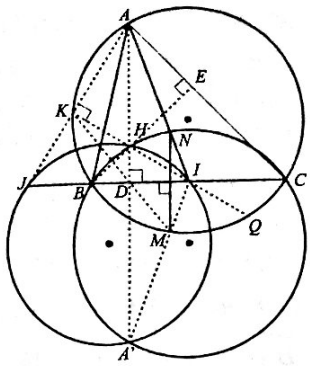
Xét hai tam giác vuông $M'BD$ và SDC có $BD = DC$ và $\widehat{M'DB} = \widehat{SCD}$ (do $DM' \parallel SC$) nên chúng bằng nhau. Suy ra $M'B = SD$ hay $\widehat{M'ST'} = 90^0$. Tương tự, ảnh của tiếp tuyến với đường tròn đường kính HD tại N cũng đi qua T'. Vậy các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại điểm T cố định là ảnh của T' qua phép nghịch đảo ω.

Bài toán 5. (*TST Việt Nam* 2015) *Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không phải đường kính. Xét điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và AB < AC. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh BC, trực tâm tam giác ABC. Tia IH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và đường thẳng KD cắt lại đường tròn (O) tại M. Từ điểm M, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BC cắt AI tại điểm N.*

a) *Chứng minh rằng điểm N luôn thuộc đường tròn cố định khi A thay đổi.*

b) *Đường tròn tiếp xúc với AK ở A và đi qua N cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi J là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AJ luôn đi qua một điểm cố định.*

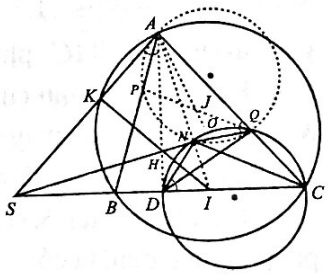
Phân tích và lời giải. a) Ta chỉ ra N thuộc đường tròn (HBC) là đường tròn đối xứng với (O) qua BC. Như vậy ta cần chứng minh N, M đối xứng qua BC. IH cắt (O) ở Q. Khi đó I là trung điểm HQ. AK cắt BC tại J. Suy ra $IH.IK = IK.IQ = IB.IC = IB^2 = IE^2$ do đó K thuộc đường tròn đường kính AH. Suy ra $\widehat{AKH} = 90^0$, suy ra H là trực tâm tam giác AJI. Xét phép nghịch đảo $N_I^{IB^2}$ tâm I, phương tích $IB^2 = IH.IK = ID.IJ$. Qua phép nghịch đảo này, H biến thành K; D thành J. Suy ra KD biến thành (HIJ); $(ABC) \equiv (KBC)$ thành (HBC); M thành giao hai đường tròn (JHI) và (HBC). Ta đã biết (HBC), (HIJ) đều đi qua A' đối xứng với A qua BC (tính chất trực tâm) nên I, M, A' thẳng hàng. Suy ra M, N đối xứng qua BC (đpcm).



b) M, N đối xứng qua BC nên

$IN.IA = IM.IA'$

do đó A là ảnh của N qua phép nghịch đảo. Đường tròn ($APNQ$) tiếp xúc với AK cho ta



$\widehat{AQN} = \widehat{SAI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$) $= \widehat{NDI}$ (tính chất phép nghịch đảo). Vậy tứ giác $DNQC$ nội tiếp. Quan sát ta thấy QD là tiếp tuyến của ($APNQ$). Thật vậy $\widehat{NQD} = \widehat{NCI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{ND}$) $= \widehat{IAC}$ (tính chất phép nghịch đảo).

Tương tự DP là tiếp tuyến của ($APNQ$). Suy ra AD là đường đối trung đỉnh A của tam giác APQ. Suy ra, $\widehat{JAQ} = \widehat{DAP} = \widehat{HAC}$ (tính chất đường đối trung) $= \widehat{OAC}$ (tính chất trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp). Suy ra AJ qua điểm cố định O.

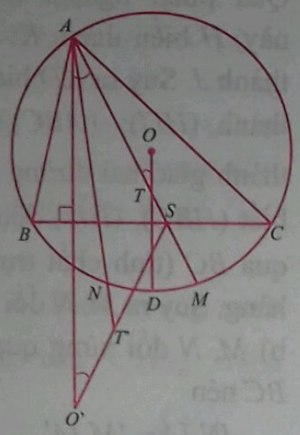
Phép nghịch đảo đối xứng là một công cụ hữu hiệu trong các bài toán liên quan đến đường phân giác. Ta xét các bài toán sau:

Bài toán 6. (*VMO* 2016) *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung BC không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N (N khác A).*

a) *Chứng minh rằng* $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

b) *Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.*

AI, MI, NI cắt lại (O) lần lượt tại D, E, F. Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của DF với AM và DE với AN. Đường tròn đi qua P và tiếp xúc với AD tại I cắt DF tại H (H khác D); đường tròn đi qua Q và tiếp xúc với AD tại I cắt DE tại K (K khác D). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tiếp xúc với BC.

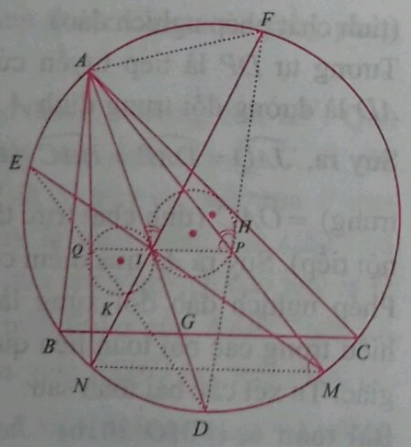


Lời giải. a) Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ tức là ta chứng minh AM biến thành AN qua phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ sau đó đối xứng qua đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ phù hợp. Kí hiệu K' là ảnh của K qua phép này. ω thay đổi B, C cho nhau và biến BC thành (ABC). O' là điểm đối xứng với A qua BC. AM cắt BC tại S. Theo tính chất về góc qua phép nghịch đảo, ta có

$$(O'A, O'T') = -(AT, OT) = -(AT, AO').$$

Suy ra $O'T'$ đi qua S. Vậy N là giao điểm của (AOT) và (ABC) nên N' là giao của $O'T'$ và BC. Suy ra $N' \equiv S$, suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

b) Như ta đã biết $DI = DB = DC$ nên D là tâm nghịch đảo thích hợp. Xét phép nghịch đảo tâm D, phương tích $DI^2 = DB^2 = DC^2$. Qua phép nghich đảo này thì B, C, I cố định; G trên BC biến thành A trên (ABC); K thành Q; H thành P; (GHK) thành (AQP). Như vậy ta cần chứng minh (APQ) tiếp xúc với (ABC) cũng là (AMN). Hay chứng minh $QP \parallel MN$. Ta có

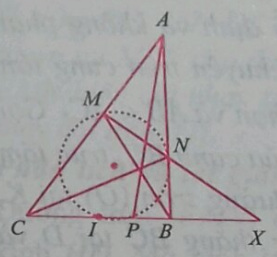


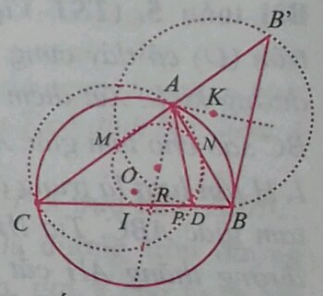
$$\widehat{AIF} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{ND} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AF}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{MD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AF}\right) = \widehat{APF}.$$

Suy ra tứ giác $AIPF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AFI} = \widehat{AMN}$, do đó $PQ \parallel MN$.

Bài toán 7. (*TST Việt Nam 2016 ý b*) *Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} < \widehat{ACB} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Lấy D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Trên phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ và trên tia AC lần lượt lấy các điểm K và M sao cho $KB = KD = KM$, trên phân giác ngoài $\widehat{BAC}$ và trên tia AB lần lượt lấy các điểm L và N sao cho $LC = LD = LN$. Đường tròn đi qua M, N và trung điểm I của BC cắt BC tại $P (P \neq I)$. Chứng minh rằng BM, CN, AP đồng quy.*

Lời giải. 1) Trước hết ta tách cấu trúc hình ra. Rõ ràng, nếu MB, CN, AP đồng quy thì có tứ giác toàn phần. Như vậy, $(C, B, P, X) = -1$ mà I là trung điểm BC nên theo hệ thức Maclaurin thì $XP.XI = XB.XC$ mà $XP.XI = XM.XN$ do đó $XM.XN = XB.XC$ hay tứ giác $BCMN$ nội tiếp.



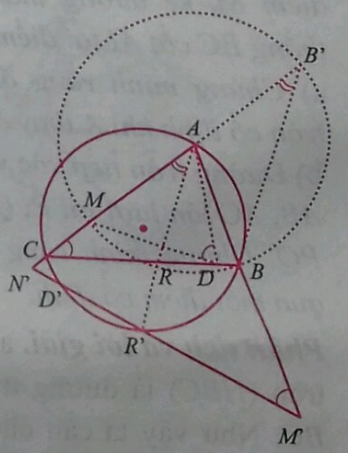


2) Dữ kiện $KM = KB = KD$ rất khó sử dụng, ta thay đổi giả thiết này? AK là phân giác ngoài, nên đối xứng B qua AK được B': B' thuộc AC và

$KB' = KB = KD = KM$

hay tứ giác $MDBB'$ nội tiếp. Vậy

$$\widehat{MDC} = \widehat{MB'B} = \frac{1}{2}\widehat{MAB} = \widehat{MAR}$$



(R là giao điểm của đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ với BC) do đó tứ giác $MADR$ nội tiếp và

(*Xem tiếp trang 15*)

Một trong những mặt thể hiện của học thuyết triết học của ông là những quan điểm được phát biểu dưới dạng danh ngôn nhắc nhở đến đạo lý của đời người hay những quan điểm biểu hiện sự cải biến độc đáo từ đạo lý cuộc đời đến triết học. Ông đã đưa ra những danh ngôn nổi tiếng răn dạy cách cư xử của con người. Ví như: "Không nên làm đẹp bởi cái nhìn bên ngoài dễ thấy mà hãy làm đẹp mình bằng công việc; Anh chăm lo bố mẹ anh thế nào thì con cái anh sẽ đối xử với anh như vậy; Hãy học và học cái gì tốt nhất …"

Từ triết lý cuộc sống, *Thales* chuyển sang triết lý lý trí như sau

"*Cái gì già hơn tất cả? Trời, vì nó không sinh ra. Cái gì lớn hơn tất cả? – Không gian, vì nó bao bọc mọi cái của thế giới. Cái gì đẹp hơn tất cả? – Vũ trụ vì nó là công trình sáng tạo của Trời. Cái gì anh minh hơn cả? – Thời gian vì nó sẽ khám phá ra hết thảy. Cái gì là chung hơn mọi cái? – Niềm hy vọng vì mọi người đều có, kể cả ai không có bạn bè. Cái gì có hại nhất? – Thói hư vì khi nó xuất hiện thì mọi cái trở nên trì trệ tù hãm. Cái gì nhanh hơn hết thảy? – Ý nghĩ vì nó diễn ra một mạch không có khắc dừng. Cái gì mạnh hơn tất cả? – Cái tất yếu vì nó chi phối và khắc phục mọi thứ. Cái gì khó nhất? – Hiểu được chính mình. Cái gì dễ nhất? – Đưa ra lời khuyên người khác. Cái gì lợi nhất? – phẩm hạnh vì nhờ nó mọi cái khác có thể tìm thấy cho mình chỗ ứng dụng và trở nên có lợi …*"

THALES LÀ NHÀ TOÁN HỌC LỖI LẠC

Ông là nhà toán học đầu tiên của Cổ Hy Lạp. Bước tiến khổng lồ được thực hiện trong toán học Hy Lạp là ở tư tưởng về phương pháp chứng minh suy diễn. Nhà toán học và triết học *Proclus* (410 – 485) cho rằng việc chứng minh các định lý hình học đầu tiên là thuộc về nhà triết học *Thales*. Nếu đúng *Thales* đã đưa phương pháp suy diễn vào trong toán học thì cần phải thừa nhận rằng bắt đầu từ thời điểm đó toán học ở Hy Lạp đã phát triển với tốc độ hết sức nhanh. *Thales* đã chứng minh

i) *Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.*

ii) *Các góc vuông đều bằng nhau.*

iii) *Các góc đáy của tam giác cân là bằng nhau.*

iv) *Hai tam giác bằng nhau nếu có một cặp cạnh và hai cặp góc kề tương ứng bằng nhau.*

v) *Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.*

Thành tựu đặc biệt quan trọng và nó có vai trò cốt lõi trong hình học là định lý mang tên ông về "các đường song song và cát tuyến". Đó là Định lý.

vi) *Nếu trên một trong hai đường thẳng ta đặt liên tiếp một số đoạn thẳng bằng nhau và qua các đầu mút của chúng ta kẻ những đường thẳng song song với nhau cắt đường thẳng thứ hai thì chúng xác định trên đường thẳng thứ hai những đoạn thẳng bằng nhau.*

Theo nhà toán học *Proclus* thì định lý này được chứng minh vào thế kỷ VI tr. CN. Thật đáng tiếc là chúng ta không biết gì về cách chứng minh các kết quả trên đây của *Thales*. Nhưng cũng theo lời *Proclus* thì người ta cũng dự đoán là: "*Khi thì Thales nghiên cứu vấn đề một cách tổng quát, khi thì ông xem xét vấn đề một cách trực giác*". Tầm quan trọng của định lý này thật là lớn lao: ngay trong đời sống hàng ngày, khi xây dựng các tòa cao ốc, đường sá hay kênh mương người ta không thể nào né tránh việc áp dụng định lý *Thales* mà con người đã tìm ra nó hơn hai nghìn năm trước …

Với tư duy độc đáo của một nhà toán học, *Thales* còn nghĩ ra cách đo chiều cao của Kim tự tháp và những vật thể đứng nói chung theo bóng của chúng trên mặt đất. Hoàn toàn có thể là phép đo đó được tiến hành vào thời điểm ban ngày khi chiều dài của bóng cây sào thẳng đứng bằng chiều dài của chính nó. Cũng rất có thể là phép đo đó được tiến hành trên cơ sở tri thức về sự đồng dạng của các tam giác.

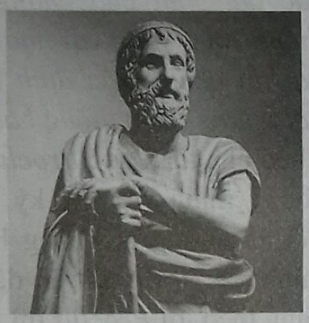
Muôn vạn đời sau phải mang ơn *Thales* bởi ông là người đầu tiên đưa phép chứng minh vào trong khoa học mà đặc biệt là toán học. Ngày nay người ta biết được rằng nhiều quy tắc toán

NHÀ BÁC HỌC LỖI LẠC, BẬC ĐẠI HIỀN TRIẾT THALES

NGUYỄN THỦY THANH
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Nền khoa học Hy Lạp được đặt nền móng bởi trường phái Ionian vào nửa đầu thế kỷ VII tr.CN. Nhà sáng lập ra trường phái đó chính là "người đã sinh ra nền khoa học Hy Lạp". Đó là *Thales* – một thương nhân, nhà hoạt động chính trị, nhà triết học, nhà thiên văn học và nhà toán học.

Thales sống ở thành phố Miletos, một thuộc địa giàu có của Hy Lạp ở vùng Tiểu Á. Theo đa số các nhà nghiên cứu lịch sử thì *Thales* sống vào khoảng (624 – 547 tr. CN) giữa hai kỳ Olympic 35 và 58 tại vùng Ionian nằm ở vùng Tiểu Á, nơi được xem là "cái nôi của triết học" ở Cổ Hy Lạp.



Nhà toán học Hy Lạp Thales
(khoảng 624 TCN - 547 TCN)

NHÀ BÁC HỌC ĐA TÀI

Ông là một kỹ sư, một thương gia. Ông nghiên cứu Toán học và Thiên văn học ở Ai Cập và Babylon cổ đại. Ông chu du qua nhiều nước và ông đã tận dụng các chuyến đi này để mở rộng tầm nhìn và học hỏi thêm tri thức khoa học.

Thales là nhà bác học đa tài và một nhà tư tưởng lớn. Ông đã sáng tạo ra một số dụng cụ thiên văn. Theo bản đề án thiết kế của ông, tại Miletos người ta đã xây dựng một số công trình kiến trúc: hệ thống mương dẫn nước bằng đá, đài thiên văn và các đồng hồ mặt trời ở Quảng trường trung tâm.

Năm 603 tr. CN, ở xứ Ai Cập (nơi có con sông Nil hung dữ) *Thales* đã quan sát được hiện tượng nhật thực toàn phần. Và, ông cũng đã giải thích được nguyên nhân gây nên sự hung dữ của sông Nil là những đợt gió mậu dịch, còn gọi là tín phong.

Thales cũng đã học thiên văn ở Babylon, một đế chế huy hoàng trong lịch sử nhân loại. Khi trở về quê hương Melitos, ông đã được tôn là Hoàng đế thiên văn của xứ Hy Lạp. Người ta cho rằng *Thales* là nhà thiên văn học vĩ đại nhất thời cổ đại. Thật vậy, *Thales* là người đầu tiên hiểu được rằng nhật thực diễn ra là do Mặt Trăng che khuất Mặt Trời và lần đầu tiên trong lịch sử khoa học *Thales* đã tiên đoán được nhật thực toàn phần xảy ra vào ngày 23 tháng 5 năm 585 tr. CN ở xứ Ionian. Đồng thời ông đã ghi nhận độ dài một năm nhờ sự dịch chuyển của các vì sao trên trời và độ dài đó là 365 ngày đêm …

THALES LÀ NHÀ TRIẾT HỌC

Theo *Aristoteles* (384 – 322 tr. CN) – người khổng lồ của mọi thời đại – thì "*Thales là người nghiên cứu triết học đầu tiên*", là người sáng lập nên trường phái Miletos.

Là một triết gia, *Thales* đi tìm khởi nguyên của thế giới: Theo ông, nguồn gốc của thế giới là *nước*! Người ta nhắc lại lời ông nói rằng: "*nước là khởi nguyên và là kết thúc của mọi cái …*". *Thales* phân biệt linh hồn với cơ thể. Ông coi linh hồn là vật chất. Theo ông linh hồn là nguồn gốc làm cho tất cả mọi hiện tượng tự nhiên vận động. Khi không lý giải được vấn đề gì ông lại đổ tại linh hồn. Chẳng hạn, không lý giải được từ tính của nam châm hay không giải thích được vì sao khi chà xát hổ phách (nhựa cây đã hóa thạch) với vải hoặc len lại phát ra điện, ông khẳng định chúng có linh hồn!

Aristoteles truyền lại rằng: *Thales đã nghĩ rằng "tất cả đều ngập linh hồn" và như vậy "linh hồn có trong mọi vật"*.

học đã được khám phá sớm hơn nhiều so với ở Hy Lạp. Tuy nhiên hầu như tất cả các khám phá đó là bằng con đường kinh nghiệm. Việc chứng minh tính đúng đắn của một mệnh đề nào đó một cách lôgic chặt chẽ dựa trên cái nguyên lý chung (được thừa nhận như những chân lý đích thực) đã được sáng tạo ra bởi người Hy Lạp. Nét đặc biệt mới, hoàn toàn đặc trưng của toán học Hy Lạp là bước chuyển tuần tự nhờ chứng minh từ mệnh đề này đến mệnh đề kia. Nhờ đó mà toán học hình thành như một khoa học đặc biệt. Nó sở hữu một phương pháp đặc trưng – phương pháp chứng minh suy diễn. Phương pháp đó đã định đoạt sự phát triển của toán học cho đến tận ngày nay.

Thales là một nhà triết học, một nhà toán học và một nhà thiên văn học. Không phải ngẫu nhiên mà người Hy Lạp cổ đại tôn ông là *một trong bảy nhà hiền triết nổi danh* của thời kỳ cổ đại và ông được tôn vinh ở vị trí đứng đầu – một bậc đại hiền sĩ!

Nhà triết học *Platon* (428 – 348 tr.CN) kể rằng một đêm trăng vừa sáng, vừa xa, vừa rộng với đầy sao, người hầu già dẫn ông ra chiêm ngưỡng sự huyền ảo của trời sao. Do ông bước thấp bước cao vị Hoàng Đế Thiên văn này đã bị sẩy chân xuống hố … Đáp lại lời cầu cứu của ông người hầu già đã bông đùa với ông một cách trìu mến trong đêm: "*Ôi, ngài Thales yêu quý! Đã không đủ sức quan sát cái dưới chân mình thì sao lại còn ham muốn biết cái vời vợi của trời cao …*"

Nhà bác học vĩ đại và nhà hiền triết *Thales* đã ra đi vào cõi vĩnh hằng "nơi không có cả cội nguồn lẫn sự kết thúc" (như ông đã từng nói) một cách đột ngột khi ông đang xem biểu biễn điền kinh trong một kỳ Olympic ở Melitos, Hy Lạp. Có lẽ ông ra đi bởi chứng đột quỵ. Một số người khẳng định rằng ông bị ngạt thở do đám đông dẫm đạp lúc ra về … Khi rời khán đài nhiều người cứ ngỡ rằng ông đang chìm vào giấc ngủ …

Thi thể ông được an táng ở một cánh đồng. Trên phần mộ của ông người ta khắc dòng chữ: "*Phần mộ này bé bao nhiêu thì niềm vinh quang của vị Hoàng Đế trong Vương quốc các nhà Thiên văn học về các vị tinh tú càng vĩ đại bấy nhiêu.*"

Cho dù chỉ với những tư liệu ít ỏi mà các nhà lịch sử khoa học khôi phục một cách gián tiếp, muôn đời sau vẫn không mảy may nghi ngờ mà vẫn luôn luôn tôn kính nhà bác học đa tài – bậc đại hiền triết *Thales*. *Thales* xứng đáng được người đời sau gọi là

"*Nhà triết học đầu tiên*"
"*Nhà toán học đầu tiên*"
"*Nhà thiên văn học đầu tiên*"

của nhân loại!.

PHÉP NGHỊCH ĐẢO…

(*Tiếp theo trang* 12)

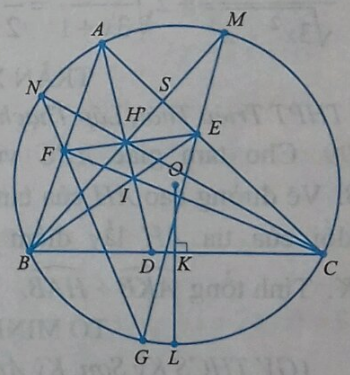
$$\widehat{MDA} = \widehat{ADC} - \widehat{MDC} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{ACB}.$$

Xét phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ sau đó đối xứng qua A. Kí hiệu X' là ảnh của X qua phép này. Các tứ giác $MADR, NACD$ nội tiếp nên D', R', M', N' thẳng hàng. Theo tính chất phép biến hình nghịch đảo đối xứng thì $\widehat{BM'R'} = \widehat{ADM} = \widehat{ACB}$, suy ra tứ giác $N'CBM'$ nội tiếp, dẫn đến tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

Bài toán 8. (***TST Việt Nam 2016 bài 3, ý a***) *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động trên cung BC của (O). Các phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Đường tròn qua D tiếp xúc với OA tại A cắt (O) tại G. GE, GF cắt (O) lần thứ hai tại M, N. BM cắt CN tại H. Chứng minh AH đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Gọi $H = AD \cap EF$ thì theo tính chất tứ giác toàn phần: $(A,I,H,D) = -1$. Giả sử $BM \cap AD = H'$, ta sẽ chứng minh $(A,I,H',D) = -1$. Thật vậy có

$$(A,I,H',D) = B(A,I,H',D) = (A,E,S,C)$$
$$= M(A,E,S,C) = M(A,G,B,C).$$



Vậy ta chỉ cần chứng minh $ABGC$ là tứ giác điều hòa. Xét phép biến hình ω: thực hiện phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB.AC$ sau đó đối xứng qua AD. Đường tròn qua AD tiếp xúc với AO biến thành đường thẳng qua L (điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ không chứa A) và song song với đường cao kẻ từ đỉnh A (là OL). Suy ra ảnh của G là K. Do đó, AG là đường đối trung kẻ đỉnh A và do đó $ABGC$ là tứ giác điều hòa. Tương tự, CN đi qua H'. Vậy $H' \equiv H$ hay AH đi qua L.

Qua 8 bài thi ở trên, chúng ta có thể thấy được phần nào vẻ đẹp của phép nghịch đảo. Hy vọng nhận được sự trao đổi thêm của bạn đọc.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/499 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $x^y + y^x = 100$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/499 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE. Gọi J và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và E trên đường thẳng BC. Chứng minh tam giác AJK vuông cân.

ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T3/499. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+x^3}} + 2\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \frac{3}{2}.$$

TRẦN XUÂN HÒA

(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T4/499. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 2AB$. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AH = 2AK$. Tính tổng $\widehat{AKB} + \widehat{HAB}$.

TÔ MINH THƯƠNG

(GV THCS Kỳ Sơn, Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Bài T5/499. Cho các số thực x, y thỏa mãn $y - 2x + 4 < 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 - 4y + \frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/499. Tìm các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz = 4 \\ \left(\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{y^9}+\dfrac{1}{z^9}\right)(1+2xyz) = 9 \end{cases}.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/499. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}$.

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/499. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm đường tròn nội tiếp là I. M là trung điểm của AI. K thuộc BC sao cho $IK \perp IO$. Q thuộc (O) sao cho $AQ \parallel IK$. QM cắt BC tại H. G thuộc AK sao cho $HG \parallel QI$. QK cắt (O) tại L khác Q. Chứng minh rằng $\widehat{GIK} = \widehat{IAL}$.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/499. Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt

$$A_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right].$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $\dfrac{n^6-1}{A_n}$ là một số chính phương. Trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/499. Ta gọi "*vết*" của một tam giác là tỷ số giữa độ dài cạnh ngắn nhất và độ dài cạnh dài nhất của tam giác đó. Với một hình vuông có cạnh bằng 2019 đơn vị dài, tồn tại hay không số nguyên dương n và cách phân hoạch hình vuông này thành n hình tam giác thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) Không có tam giác nào có cạnh dài hơn cạnh của hình vuông.

ii) Tổng tất cả các "*vết*" của n tam giác thu được không vượt quá $\dfrac{n^2+6n-9}{n^2}$.

PHẠM BẮC PHÚ

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/499. Cho dãy số $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ xác định bởi

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n(n+1)}.\frac{u_n}{u_n^2+n};\ \forall n = 1,2....$$

a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Tìm $\left[\dfrac{\sqrt{2018}}{u_{2018}}\right]$, (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

NGUYỄN DUY LIÊN

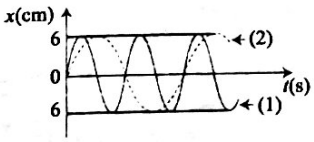
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T12/499. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm M, N thuộc đoạn BC và các điểm P, Q theo thứ tự thuộc các đoạn CA, AB sao cho $MNPQ$ là hình vuông. Các đường tròn nội tiếp các tam giác APQ, BQM, CPN theo thứ tự tiếp xúc với PQ, QM, PN tại X, Y, Z. Chứng minh rằng $AX \perp YZ$.

NGUYỄN MINH HÀ

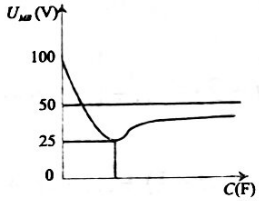
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/499. Đồ thị li độ theo thời gian của chất điểm 1 (đường 1) và chất điểm 2 (đường 2) như hình vẽ, tốc độ cực đại của chất điểm 2 là 4π (cm/s). Không kể thời điểm $t = 0$, thời điểm hai chất điểm có cùng li độ lần thứ 5 là bao nhiêu?



THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/499. Cho mạch điện xoay chiều AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Đoạn mạch AM chỉ có điện trở thuần R; đoạn mạch MB gồm cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r mắc nối tiếp với tụ điện có điện dung C thay đổi được. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi, tần số f = 50Hz. Khi tăng dần điện dung C từ 0 đến ∞, người ta thu được đồ thị liên hệ giữa điện áp hiệu dụng U_{MB} và điện dung C như hình bên. Điện trở r của cuộn dây có giá trị bằng bao nhiêu?



VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/499 (For 6th grade). Find positive integers x, y such that $x^y + y^x = 100$.

Problem T2/499 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC. Outside the triangle, we construct two isosceles right triangles with the right angles A ABD and ACE. Let J and K respectively be the perpendicular projections of D and E on BC. Prove that AJK is an isosceles right triangle.

Problem T3/499. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+x^3}} + 2\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \frac{3}{2}.$$

Problem T4/499. Given a right triangle ABC with the right angle A and $AC = 2AB$. Let AH be an altitude of ABC. On the opposite ray of AH choose the point K such that $AH = 2AK$. Find the sum $\widehat{AKB} + \widehat{HAB}$.

Problem T5/499. Given real numbers x, y satisfying $y - 2x + 4 < 0$. Find the minimum value of the expression

$$P = x^2 - 4y + \frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}.$$

FOR HIGH SCHOOL

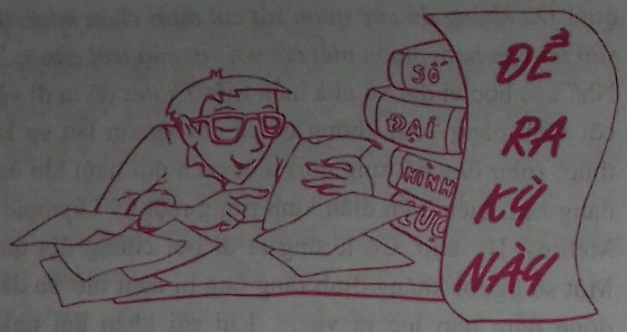
Problem T6/499. Find all positive numbers x, y, z satisfying

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz = 4 \\ \left(\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{y^9}+\dfrac{1}{z^9}\right)(1+2xyz) = 9 \end{cases}.$$

Problem T7/499. Given positive numbers a, b, c such that $a^3+b^3+c^3 = 3$. Find the minimum value of the expression $M = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}$.

Problem T8/499. Let ABC be inscribed in a circle (O) and assume that I is the incenter of ABC. Assume that M is the midpoint of AI. Choose K on BC such that $IK \perp IO$. Choose Q on (O) such that $AQ \parallel IK$. Suppose that QM intersects BC at H. Choose G on AK such that $HG \parallel QI$. QK

(Xem tiếp trang 26)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/499 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $x^y + y^x = 100$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/499 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE. Gọi J và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và E trên đường thẳng BC. Chứng minh tam giác AJK vuông cân.

ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T3/499. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+x^3}} + 2\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \frac{3}{2}.$$

TRẦN XUÂN HÒA

(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T4/499. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = 2AB$. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AH = 2AK$. Tính tổng $\widehat{AKB} + \widehat{HAB}$.

TÔ MINH THƯƠNG

(GV THCS Kỳ Sơn, Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Bài T5/499. Cho các số thực x, y thỏa mãn $y - 2x + 4 < 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 - 4y + \frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/499. Tìm các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz = 4 \\ \left(\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{y^9}+\dfrac{1}{z^9}\right)(1+2xyz) = 9 \end{cases}.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/499. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}$.

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/499. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm đường tròn nội tiếp là I. M là trung điểm của AI. K thuộc BC sao cho $IK \perp IO$. Q thuộc (O) sao cho $AQ \parallel IK$. QM cắt BC tại H. G thuộc AK sao cho $HG \parallel QI$. QK cắt (O) tại L khác Q. Chứng minh rằng $\widehat{GIK} = \widehat{IAL}$.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/499. Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt

$$A_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right].$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $\dfrac{n^6-1}{A_n}$ là một số chính phương. Trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/499. Ta gọi "*vết*" của một tam giác là tỷ số giữa độ dài cạnh ngắn nhất và độ dài cạnh dài nhất của tam giác đó. Với một hình vuông có cạnh bằng 2019 đơn vị dài, tồn tại hay không số nguyên dương n và cách phân hoạch hình vuông này thành n hình tam giác thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) Không có tam giác nào có cạnh dài hơn cạnh của hình vuông.

ii) Tổng tất cả các "*vết*" của n tam giác thu được không vượt quá $\dfrac{n^2+6n-9}{n^2}$.

PHẠM BẮC PHÚ

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/499. Cho dãy số $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ xác định bởi

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n(n+1)}.\frac{u_n}{u_n^2+n};\ \forall n = 1,2....$$

a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Tìm $\left[\dfrac{\sqrt{2018}}{u_{2018}}\right]$, (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x).

NGUYỄN DUY LIÊN

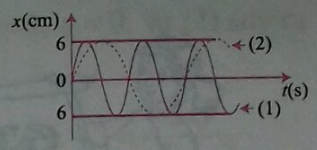
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T12/499. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm M, N thuộc đoạn BC và các điểm P, Q theo thứ tự thuộc các đoạn CA, AB sao cho $MNPQ$ là hình vuông. Các đường tròn nội tiếp các tam giác APQ, BQM, CPN theo thứ tự tiếp xúc với PQ, QM, PN tại X, Y, Z. Chứng minh rằng $AX \perp YZ$.

NGUYỄN MINH HÀ

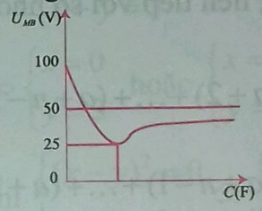
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/499. Đồ thị li độ theo thời gian của chất điểm 1 (đường 1) và chất điểm 2 (đường 2) như hình vẽ, tốc độ cực đại của chất điểm 2 là 4π (cm/s). Không kể thời điểm $t = 0$, thời điểm hai chất điểm có cùng li độ lần thứ 5 là bao nhiêu?



THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/499. Cho mạch điện xoay chiều AB gồm hai đoạn mạch AM và MB mắc nối tiếp. Đoạn mạch AM chỉ có điện trở thuần R; đoạn mạch MB gồm cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r mắc nối tiếp với tụ điện có điện dung C thay đổi được. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi, tần số f = 50Hz. Khi tăng dần điện dung C từ 0 đến ∞, người ta thu được đồ thị liên hệ giữa điện áp hiệu dụng U_{MB} và điện dung C như hình bên. Điện trở r của cuộn dây có giá trị bằng bao nhiêu?



VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/499 (For 6th grade). Find positive integers x, y such that $x^y + y^x = 100$.

Problem T2/499 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC. Outside the triangle, we construct two isosceles right triangles with the right angles A ABD and ACE. Let J and K respectively be the perpendicular projections of D and E on BC. Prove that AJK is an isosceles right triangle.

Problem T3/499. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+x^3}} + 2\sqrt{\frac{x}{3x+1}} = \frac{3}{2}.$$

Problem T4/499. Given a right triangle ABC with the right angle A and $AC = 2AB$. Let AH be an altitude of ABC. On the opposite ray of AH choose the point K such that $AH = 2AK$. Find the sum $\widehat{AKB} + \widehat{HAB}$.

Problem T5/499. Given real numbers x, y satisfying $y - 2x + 4 < 0$. Find the minimum value of the expression

$$P = x^2 - 4y + \frac{4(x^2-4y)}{(y-2x+4)^2}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/499. Find all positive numbers x, y, z satisfying

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xyz = 4 \\ \left(\dfrac{1}{x^9}+\dfrac{1}{y^9}+\dfrac{1}{z^9}\right)(1+2xyz) = 9 \end{cases}.$$

Problem T7/499. Given positive numbers a, b, c such that $a^3+b^3+c^3 = 3$. Find the minimum value of the expression $M = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}$.

Problem T8/499. Let ABC be inscribed in a circle (O) and assume that I is the incenter of ABC. Assume that M is the midpoint of AI. Choose K on BC such that $IK \perp IO$. Choose Q on (O) such that $AQ \parallel IK$. Suppose that QM intersects BC at H. Choose G on AK such that $HG \parallel QI$. QK

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/495. *Chứng minh rằng không thể phân tích số $2^{9^{2018}}$ thành tổng của n số nguyên dương liên tiếp ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).*

Lời giải. Giả sử số $s = 2^{9^{2018}}$ bằng tổng của n số nguyên dương liên tiếp với số nhỏ nhất là $a+1$, tức là

$$s = (a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n-1)+(a+n) \quad (1)$$

thì viết tổng

$$s = (a+n)+(a+n-1)+\ldots+(a+2)+(a+1) \quad (2)$$

rồi cộng hai đẳng thức (1) và (2) theo từng vế được

$$2s = (a+1+a+n)+(a+2+a+n-1)$$
$$+\ldots+(a+n-1+a+2)+(a+n+a+1),$$

hay là $2.2^{9^{2018}} = n(2a+n+1)$.

Nếu n là số chẵn, tức là $n = 2m$ thì $2a+n+1 = 2a+2m+1$ là số lẻ. Như vậy hoặc n hoặc $2a+n+1$ là số lẻ lớn hơn 1. Do đó $2.2^{9^{2018}} = 2^{9^{2018}+1}$ có ước lẻ lớn hơn 1, điều này vô lý vì $2.2^{9^{2018}}$ là số chẵn. Vậy không thể phân tích số $s = 2^{9^{2018}}$ thành tổng của n số nguyên dương liên tiếp. ❐

➢***Nhận xét.*** Một số bạn không đọc kĩ đề bài nên chỉ xét trường hợp số s bằng tổng của n số nguyên dương liên tiếp đầu tiên từ 1 đến n. Các bạn có lời giải đúng là: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Quảng Ngãi:** *Văn Nguyễn Tuyết Minh*, 6B, *Lê Tuấn Tài*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/495. *Tìm mười hai chữ số tận cùng của số tự nhiên 5^{1040}.*

Lời giải. Ta có

$$x^2 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2 = (x+y)(x-y). \quad (*)$$

Ta cũng có nhận xét: số 1024 là số lớn nhất không vượt quá 1040 mà viết được dưới dạng lũy thừa của 2, cụ thể $1024 = 2^{10}$.

Sử dụng đẳng thức (*) và nhận xét trên ta có biến đổi như sau:

$$5^{1040} - 5^{16} = 5^{16}(5^{1024}-1) = 5^{16}[(5^{512})^2 - 1]$$
$$= 5^{16}(5^{512}+1)(5^{512}-1) = \ldots =$$
$$= 5^4.5^{12}(5^{512}+1)(5^{256}+1)(5^{128}+1)(5^{64}+1)\times$$
$$\times(5^{32}+1)(5^{16}+1)(5^8+1)(5^4+1)(5^2+1)(5^2-1) \quad (1)$$

Với n là số tự nhiên thì 5^n là số tự nhiên lẻ. Do đó 5^n+1 là số tự nhiên chẵn hay $(5^n+1) \vdots 2$.

Suy ra

$$(5^{512}+1)(5^{256}+1)(5^{128}+1)(5^{64}+1)\times$$
$$\times(5^{32}+1)(5^{16}+1)(5^8+1)(5^4+1)(5^2+1) \vdots 2^9 \quad (2)$$

Ta thấy $(5^2-1) \vdots 2^3$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra:

$$(5^{512}+1)(5^{256}+1)(5^{128}+1)(5^{64}+1)\times$$
$$\times(5^{32}+1)(5^{16}+1)(5^8+1)(5^4+1)(5^2+1)(5^2-1) \vdots 2^{12}.$$

Do đó

$$5^{12}(5^{512}+1)(5^{256}+1)(5^{128}+1)(5^{64}+1)\times$$
$$\times(5^{32}+1)(5^{16}+1)(5^8+1)(5^4+1)(5^2+1)(5^2-1) \vdots 10^{12} \quad (4).$$

Từ (1) và (4) suy ra $(5^{1040} - 5^{16}) \vdots 10^{12}$ hay 5^{1040} và 5^{16} có 12 chữ số tận cùng giống nhau. Bằng cách tính trực tiếp ta được $5^{14} = 6\,103\,515\,625$.

Vậy $5^{16} = 152\,587\,890\,625$.

Vậy số tự nhiên 5^{1040} có mười hai chữ số tận cùng là 152 587 890 625. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng là: **Hà Nội:** *Lai Thị Thúy Hằng*, 7B, THCS Phan Huy Chú, Đống Đa; *Nguyễn Đức Minh*, 7B, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Ngân*, 7B, *Phạm Trọng Toàn*, *Nguyễn Công Phúc*, *Hoàng Thế Hiếu*, *Bùi Nhật Đăng*,

Nguyễn Mai Lương, Dương Trọng Nguyên, Thái Huyền Trang, Lê Thiệp Sang, Nguyễn Công An, Nguyễn Tất Tú, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/495. *Giải các hệ phương trình nghiệm nguyên sau:*

a) $\begin{cases} 3a^2+2ab+3b^2=12 & (1) \\ a^2+b^2=c^2 & (2) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (z-3)(x^2+y^2)-2xy=0 & (1) \\ x+y=z & (2) \end{cases}$.

Lời giải. a) *Cách* 1. Nhận thấy

$4c^2=4(a^2+b^2)=(a^2+b^2-2ab)+(3a^2+2ab+3b^2)$

$=(a-b)^2+12\ge 12$ nên $c^2\ge 3$.

$2c^2=2(a^2+b^2)=(3a^2+2ab+3b^2)-(a^2+b^2+2ab)$

$=12-(a+b)^2\le 12$ nên $c^2\le 6$.

Suy ra $3\le c^2\le 6$, mà $c\in\mathbb{Z}$ nên $c^2=4$ $\Leftrightarrow c=\pm 2$. Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} ab=0 \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$ xảy ra các khả năng:

i) $\begin{cases} a^2=4 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ b=0 \end{cases}$; ii) $\begin{cases} a=0 \\ b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\pm 2 \end{cases}$

Vậy hệ có 8 nghiệm nguyên $(a;\ b;\ c)$ là (2; 0; 2), (2; 0; –2), (–2; 0; 2), (–2; 0; –2), (0; 2; 2), (0; 2; –2), (0; –2; 2), (0; –2; –2).

Cách 2. Coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn a: $3a^2+2ba+3b^2-12=0$ có $\Delta'=-8b^2+36\le 36$. Để (1) có nghiệm nguyên thì Δ' phải là số chính phương. Do đó $b^2=0$ hoặc $b^2=4$.

• Với $b^2=0$ thì $b=0$ từ (1) suy ra $a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$. Thay vào (2) tìm được $c=\pm 2$.

• Với $b^2=4$ thì $b=\pm 2$ từ (1) suy ra $a=0$. Thay vào (2) tìm được $c=\pm 2$. Từ đó tìm được kết quả như trên.

b) Từ (1) suy ra $(z-3)(x^2+y^2)=2xy$

• Nếu $x^2+y^2=0$ thì $x=0,\ y=0$; từ (2) suy ra $z=0$.

• Nếu $x^2+y^2\ne 0$ thì ta có $z-3=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Từ $(x-y)^2\ge 0$ và $(x+y)^2\ge 0$ suy ra

$-(x^2+y^2)\le 2xy\le x^2+y^2$, nên $-1\le\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\le 1$.

Do đó

$-1\le z-3\le 1\Leftrightarrow 2\le z\le 4$, mà $z\in\mathbb{Z}$ nên $z\in\{2;3;4\}$.

- Với $z=2$ thì $\begin{cases} (x+y)^2=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

- Với $z=3$ thì $\begin{cases} xy=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$.

- Với $z=4$ thì $\begin{cases} (x-y)^2=0 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên $(x,\ y,\ z)$ là (0; 0; 0), (3; 0; 3), (0; 3; 3), (2; 2; 4). ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán giải hệ phương trình tìm nghiệm nguyên có ba ẩn với hai phương trình, ta cần lập luận để tìm trước giá trị của 1 ẩn, sau đó tìm tiếp hai ẩn còn lại. Đa số các bạn tham gia đều cho kết quả đúng, tuy nhiên lập luận còn quá dài dòng. Ở câu b) ta có thể làm cách khác như sau: Từ $(z-3)(x^2+y^2)=2xy$, xét hai trường hợp $xy=0$, hoặc $xy\ne 0$; trường hợp $xy\ne 0$; sử dụng tính chất chia hết để dẫn đến $x=y$ hoặc $x=-y$.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Kim Ngọc Yến Nhi*, 9A3, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An:** *Trần Thanh Mai*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Phương Uyên, Đặng Hữu Khanh*, 8A, *Lê Quang Huy*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

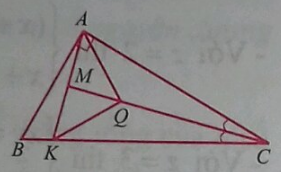
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/495. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Trong góc BAC vẽ các tia Ax, Ay sao cho* $\widehat{CAx}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$; $\widehat{BAy}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ *và tia Ax cắt tia phân giác góc ACB tại Q, tia Ay cắt cạnh BC tại K. Tìm tỉ số* $\frac{AK}{AQ}$.

Lời giải. Ta có

$$\widehat{KAC}=90^0-\widehat{BAK}=90^0-\frac{\widehat{C}}{2}=\widehat{B}+\frac{\widehat{C}}{2}=\widehat{AKC}.$$

Suy ra ΔACK cân tại C và CM là trung trực của cạnh AK. Vì $Q\in CM$ nên



$$QA=QK \qquad (1)$$

Mặt khác

$$\widehat{KAQ}=90^0-\widehat{BAK}-\widehat{CAQ}=90^0-\frac{\widehat{C}}{2}-\frac{\widehat{B}}{2}=45^0.$$

Kết hợp với (1), suy ra ΔAQK vuông cân tại Q. Do đó $\frac{AK}{AQ}=\sqrt{2}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Khá đông các bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết cho lời giải đúng. Các bạn có tên dưới đây cho lời giải gọn và tốt. **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trần Phương Mai*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ; *Phạm Đình Tâm*, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Oanh, Kim Ngọc Yến Nhi, Nguyễn Vũ Ngọc Linh, Nguyễn Thị Thu Nga*, 9A3, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Lê Văn Quang Trung, Nguyễn Quốc Nguyên Chương, Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Thanh Nguyên*, 9B, *Thái Huyền Trang*, 7C, *Nguyễn Văn Thành Nam, Lê Hoài Sơn, Nguyễn Văn Chung, Đặng Hữu Khanh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Thiên Ngân*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Thọ:** *Chử Lê Phương Linh*, 7A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Duy Anh, Thạch Đức Tùng*, 9A, THCS Cao Mai, Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/495. *Giải phương trình:*

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+2x=5.$$

Lời giải. ĐK: $x\neq\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho có thể viết thành

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+2x-1=4. \qquad (1)$$

Lưu ý $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

• Nếu $2x-1<0$ thì $VT(1)<0$, phương trình không thỏa mãn.

• Nếu $2x-1>0$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương, ta được

$$VT(1)=\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+(2x-1)\geq 4(x^2-2x+2)\geq 4=VP(1).$$

Do đó phương trình được thỏa mãn khi

$$\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}=2x-1=1\Leftrightarrow x=1.$$

Thử lại $x=1$ thỏa mãn bài toán. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. ❐

➢***Nhận xét.*** Có thể giải bài toán bằng cách biến đổi phương trình như sau:

$$PT\Leftrightarrow 27.\frac{x^2-2x+2}{2x-1}=(5-2x)^3;$$

với điều kiện $x\neq\frac{1}{2}$, sau khi biến đổi ta được

$$PT\Leftrightarrow (x-1)^2(16x^2-96x+179)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Nhiều bạn giải theo cách trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Phú Thọ:** *Phùng Đăng Dương*, 8C, THCS Văn Lang, TP.Việt Trì, *Nguyễn Sơn Tùng, Nguyễn Công Hùng*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Nghệ An:** *Kiều Đình Hải*, 9A, *Nguyễn Quế*

Nguyên Chương, 9B, *Đặng Hữu Khanh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/495. *Chứng minh rằng với các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$ và xy, yz, zx khác -1 ta luôn có*

$$\left(\frac{x}{1+xy}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+yz}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+zx}\right)^2 \geq \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Lời giải. *Cách* 1. Từ giả thiết $xyz = 1$, ta luôn có thể đặt: $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, x = \frac{c}{a}$. Khi đó (1) trở thành:

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}.\frac{a}{b}}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2c^2}{(ab+cb)^2} + \frac{b^2c^2}{(ba+ca)^2} + \frac{a^2b^2}{(ac+bc)^2} \geq \frac{3}{4}. \quad (2)$$

Áp dụng BĐT $(m+n)^2 \leq 2(m^2+n^2)$ ta có:

$$\text{VT}(2) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{a^2c^2}{a^2b^2+c^2b^2} + \frac{b^2c^2}{b^2a^2+c^2a^2} + \frac{a^2b^2}{a^2c^2+b^2c^2}\right]. \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Nesbitt cho các số dương a^2b^2, c^2b^2, a^2c^2 ta có:

$$\frac{a^2c^2}{a^2b^2+c^2b^2} + \frac{b^2c^2}{b^2a^2+c^2a^2} + \frac{a^2b^2}{a^2c^2+b^2c^2} \geq \frac{3}{2}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng, do đó (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Cách 2. Cũng lập luận như cách 1, ta có:

$$\frac{a^2c^2}{(ab+cb)^2} + \frac{b^2c^2}{(ba+ca)^2} + \frac{a^2b^2}{(ac+bc)^2} \geq \frac{3}{4}. \quad (2)$$

Đặt $m = ac, n = ab, p = bc$. Khi đó (2) trở thành:

$$\left(\frac{m}{n+p}\right)^2 + \left(\frac{n}{m+p}\right)^2 + \left(\frac{p}{m+n}\right)^2 \geq \frac{3}{4}. \quad (5)$$

Từ BĐT Schwarz và các kết quả quen thuộc:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,$$

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), \text{ ta có:}$$

$$\text{VT}(5) = \frac{m^4}{(mn+mp)^2} + \frac{n^4}{(nm+np)^2} + \frac{p^4}{(pm+pn)^2}$$

$$\geq \frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{2m^2n^2+2n^2p^2+2p^2m^2+2mnp^2+2npm^2+2pmn^2}$$

$$\geq \frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{4m^2n^2+4n^2p^2+4p^2m^2} \geq \frac{3(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)}{4(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)} = \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Ngoài hai cách giải trên, các bạn cũng đưa ra nhiều cách giải khác như sử dụng các BĐT Cauchy, Bunyakovsky, …. Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Phùng Ngọc Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Vĩnh Phúc:** *Chu Thị Thanh*, *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Tiến Thành*, *Bùi Văn Quyến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 10A4, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Lê Phú Tuấn*, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đăng Đức*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Hồ Giang Châu*, *Phạm Thị Mai Phương*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Tư Thành Nhân*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, H. Cam Lộ; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Quang Quốc Phú*, 10 Toán 2, *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Nguyễn Nhật Minh*, *Nguyễn Thị Thu Nga*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Trà Vinh:** *Vương Trí Quốc*, 11A1.2, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/495. *Cho đa thức $P(x) = x^{2018} - ax^{2016} + a$, trong đó a là tham số thực. Biết rằng $P(x)$ có 2018 nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm x_0 của $P(x)$ thỏa mãn $|x_0| \leq \sqrt{2}$.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ giả thiết, suy ra $P(\pm 1)=1$. Giả sử các nghiệm thực của đa thức $P(x)$ là $u_1, u_2, ..., u_{2018}$, tức là

$$P(x)=(x-u_1)(x-u_2)...(x-u_{2018}).$$

Khi đó $P(1)=(1-u_1)(1-u_2)...(1-u_{2018})=1$

và $P(-1)=(1+u_1)(1+u_2)...(1+u_{2018})=1$.

Suy ra

$$P(1)P(-1)=(1-u_1^2)(1-u_2^2)...(1-u_{2018}^2)=1. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra tồn tại chỉ số $k\in\{1,2,...,2018\}$ sao cho $u_k^2-1\le 1 \Leftrightarrow |u_k|\le\sqrt{2}$ hay nghiệm $x_0:=u_k$ thỏa mãn điều kiện $|x_0|\le\sqrt{2}$. ❐

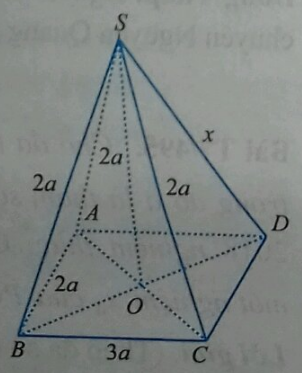
➢***Nhận xét.*** Một số bạn sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh. Để ý rằng, từ giả thiết đa thức $P(x)$ có 2018 nghiệm thì đã suy ra ngay được $a=0$. Vì nếu $a\ne 0$ thì đa thức đã cho có không quá 4 nghiệm thực (theo nguyên lý Descartes).

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Thừa Thiên Huế:** *Đặng Minh Vũ*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10T2, *Nguyễn Quang Vinh*, 10T1, THPT chuyên Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, *Lê Anh Dũng*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/495. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, $SA=SB=SC=2a$, $BC=3a$. Đặt $SD=x\ (0<x<a\sqrt{17})$. Tìm x theo a để tích AC.SD đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Áp dụng công thức đường trung tuyến cho hai tam giác SAC và SBD ta có



$$SO^2=\frac{SA^2+SC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}$$

$$=4a^2-\frac{AC^2}{4}$$

$$SO^2=\frac{SB^2+SD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}=\frac{4a^2+x^2}{2}-\frac{BD^2}{4}.$$

Suy ra $4a^2-\frac{AC^2}{4}=\frac{4a^2+x^2}{2}-\frac{BD^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{AC^2}{4}=\frac{4a^2-x^2}{2}+\frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AC^2=8a^2-2x^2+BD^2$$

$$\Leftrightarrow 2AC^2=8a^2-2x^2+(AC^2+BD^2)$$

$$\Leftrightarrow 2AC^2=8a^2-2x^2+2(AB^2+BC^2)$$

$$\Leftrightarrow AC^2=17a^2-x^2 \Leftrightarrow AC=\sqrt{17a^2-x^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta được

$$AC.SD=(\sqrt{17a^2-x^2}).x\le\frac{(17a^2-x^2)+x^2}{2}=\frac{17a^2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $17a^2-x^2=x^2$ $\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{34}}{2}$. Do đó tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{17a^2}{2}$ khi $x=\frac{a\sqrt{34}}{2}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Một số bạn còn tính toán nhầm giá trị lớn nhất của tích $AC.SD$. Hai bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/495. *Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(M-m)^3$ trong đó $M=\max\{x,y,z\}$ và $m=\min\{x,y,z\}$.*

Lời giải. Do vai trò của x, y, z trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó $P=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(M-m)^3$

$$=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(x-z)^3\le xy+yz+zx+\frac{1}{4}(x-z)^3$$

$$(\text{vì } 0\le x-z\le 1 \text{ và } \frac{2}{9}<\frac{1}{4})$$

$$= xy + yz + zx + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}[(x-y)+(y-z)]^2 + (x-z)^2\right)$$

$$\le xy + yz + zx + \frac{1}{6}\cdot[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

(vì $2(a^2+b^2)-(a+b)^2 = (a-b)^2 \ge 0$)

$$= \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{1}{3}.$$

Vậy $P = \frac{1}{3}$ khi và chỉ khi

$$x - z = 0,\ x - y = y - z \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{3}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng đơn giản, có các biến đổi cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Ngân Chi*, 8C, THCS Lý Thái Tổ; **Hưng Yên:** *Bùi Văn Quyến, Đoàn Phú Thành, Nguyễn Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Vinh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lê Hoàng Duy, Nguyễn Phúc Thịnh, Trần Đoàn Minh Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/495. *Cho dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_n = n + [\sqrt[3]{n}]$ với n là số nguyên dương và $[\sqrt[3]{n}]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\sqrt[3]{n}$. Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho các số hạng: $a_k; a_{k+1}; ...; a_{k+p}$ lập thành một dãy $p+1$ số tự nhiên liên tiếp trong đó $p = 6015\times 2006 + 1$. Chứng minh rằng:*

$$k > 8.10^9 + 6.10^7.$$

Lời giải. (Theo lời giải của bạn *Nguyễn Quốc Hiệu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**).

Ta có $a_m > a_{m-1}$ (dễ thấy). Do $a_k; ...; a_{k+p}$ là $p+1$ số tự nhiên liên tiếp nên

$$a_k + p = a_{k+p} \Rightarrow [\sqrt[3]{k+p}] = [\sqrt[3]{k}] = A.$$

Vậy $\begin{cases} A^3 \le k \\ k + p < (A+1)^3 \end{cases} \Rightarrow (A+1)^3 - p > A^3$

$$\Leftrightarrow A(A+1) > 2005\times 2006 \Leftrightarrow (A+2006)(A-2005) > 0$$

$$\Rightarrow A > 2005 \Leftrightarrow [\sqrt[3]{k}] > 2005$$

$$\Rightarrow k > 2005^3 > 8.10^9 + 6.10^7.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng. Lời giải tốt bao gồm các bạn: **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thái Nguyên:** *Phan Quang Đạt*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Ngô Bảo An*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hữu Nam, Đỗ Cao Bách Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/495. *Tìm số k nhỏ nhất sao cho trong tập con tùy ý gồm k phần tử của tập hợp {1, 2, …, 25} luôn có 3 số tạo thành bộ ba Pythagore.*

Lời giải. Chúng ta giải bài toán bằng những bước sau:

1. Trước hết ta xác định tất cả bộ số Pythagore không vượt quá 25. Bộ số Pythagore cơ bản có dạng $p^2+q^2, p^2-q^2, 2pq$ với $(p, q) = 1$ và $p^2+q^2 \le 25$. Sau khi có các bộ cơ bản này, chúng ta lấy các bội của p, q sẽ được tất cả các bộ còn lại. Các bộ Pythagore không vượt quá 25 là do các bộ cơ bản (p,q) sau : (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3) và (3, 4).

Ứng với (1, 2) và (1, 3) có 5 bộ là (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (15, 20, 25).

Ứng với (1, 4) là (8, 15, 17).
Ứng với (2, 3) là (12, 5, 13).
Ứng với (3, 4) là (24, 7, 25).
Có tất cả 8 bộ như vậy.

2. Ta thấy $k > 21$, vì trong 21 số $\{1, 2, .., 25\} - \{5, 8, 12, 25\}$ không có 3 số nào tạo thành bộ số Pythagore, vì tất cả các bộ số Pythagore kể trên đều có một số không có mặt trong 21 số này.

3. Ta chứng minh $k = 22$. Trước hết thấy có 4 bộ Pythagore đôi một không có phần tử chung là {3, 4, 5}, (6, 8, 10), (12, 16, 20) và (7, 24, 25). Như vậy trong tập hợp A tùy ý gồm 22 số tùy ý của tập hợp {1, 2, .., 25} luôn chứa ít nhất một bộ Pythagore này. Ngược lại, nếu trong A không có 4 bộ Pythagore rời nhau kể trên, thì mỗi bộ Pythagore kể trên phải có ít nhất một số không có mặt trong A, và dẫn đến vô lý là có ít nhất $4 + 22 = 26$ số trong {1, 2, ..., 25}. ❐

➢***Nhận xét.*** Có ít bạn giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải đúng: **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T12/495. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là chân đường cao đỉnh A, đường thẳng AO cắt BC tại D. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD cắt (O) tại M và N. Gọi X là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng XA = XK.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC, H là hình chiếu của A trên BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Khi đó

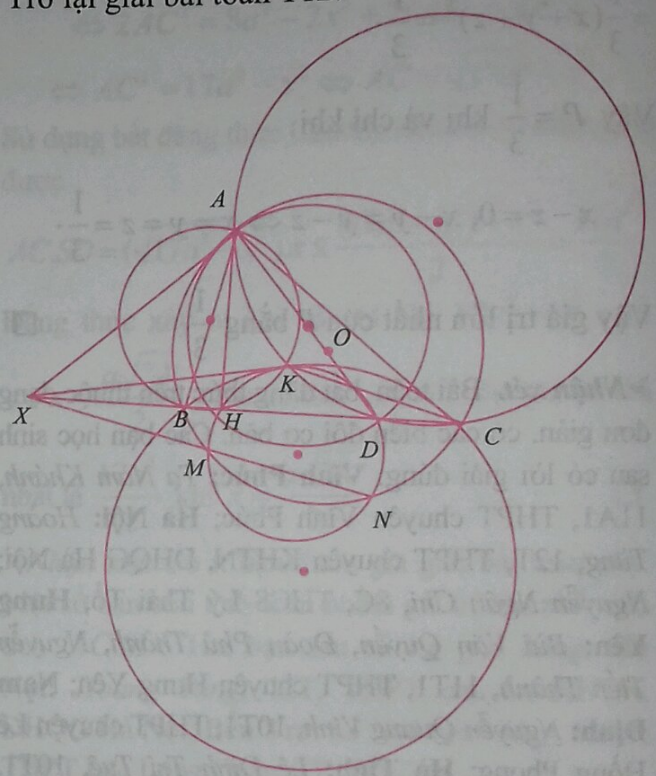
$$(AH, AB) \equiv -(AO, AC) \pmod{\pi}.$$

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thuộc đường thẳng BC (M, N khác B, C). Khi đó các đường tròn (ABC), (AMN) tiếp xúc với nhau tại A khi và chỉ khi

$$(AM, AB) \equiv -(AN, AC) \pmod{\pi}.$$

Phép chứng minh các bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.



Dễ thấy $\overline{XB}.\overline{XC} = \overline{XM}.\overline{XN} = \overline{XH}.\overline{XD}$. Do đó

$$\mathcal{P}_{X/(O)} = \mathcal{P}_{X/(AHD)}; \mathcal{P}_{X/(KBC)} = \mathcal{P}_{X/(KHD)}. \quad (1)$$

Theo bổ đề 1,

$$(AD, AC) \equiv (AO, AC) \equiv -(AH, AB) \pmod{\pi}.$$

Do đó, theo bổ đề 2, các đường tròn (O), (AHD) tiếp xúc với nhau tại A. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AX tiếp xúc với (O) tại A.

Theo bổ đề 1, chú ý rằng các bộ bốn điểm (A, B, H, K) và (A, C, D, K) cùng thuộc một đường tròn, ta có

$$(KH, KB) \equiv (AH, AB) \equiv -(AO, AC)$$
$$\equiv -(AD, AC) \equiv -(KD, KC) \pmod{\pi}.$$

Do đó theo bổ đề 2, các đường tròn (KBC), (KHD) tiếp xúc với nhau tại K. (3)

Từ (1) và (3) suy ra AK tiếp xúc với (KBC) tại K. Vậy $XA^2 = XB.XC = XK^2$. Điều đó có nghĩa là $XA = XK$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này dễ nhưng số bạn tham giải không nhiều, một vài bạn giải quá dài.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Hà Nội**: *Nguyễn Bảo An*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Lê Xuân Hoàng*, 10T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Nhật Minh*, *Phan Phước Minh*, 11T, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/495. *Một con lắc lò xo lí tưởng lò xo nhẹ có hệ số đàn hồi* 10N/m, *đầu trên gắn giá cố định, đầu dưới gắn vật nhỏ khối lượng* 100g. *Ở vị trí cân bằng, truyền cho vật vận tốc* 20cm/s *hướng xuống dưới. Coi rằng vật dao động điều hoà. Đặt một thấu kính mỏng có độ tụ* $D = +10$dp *sao cho trục chính của thấu kính nằm ngang và đi qua vị trí cân bằng của vật dao động. Quang tâm của thấu kính cách vị trí cân bằng* 15cm. *Chọn trục Ox thẳng đứng hướng lên, gốc toạ độ là vị trí cân bằng của vật, mốc thời gian là lúc lò xo dãn* 9cm *lần đầu tiên, kể từ khi vật bắt đầu dao động. Lấy* $g = 10\text{m/s}^2$. *Xác định phương trình dao động của ảnh của vật trên Ox.*

Lời giải. Tần số góc của dao động:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}.$$

Biên độ: $A = \dfrac{v}{\omega} = 2\,\text{cm}.$

Độ dãn của lò xo khi vật ở vị trí cân bằng:

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = 10\text{cm}.$$

Mốc thời gian $x_0 = -1\text{cm}$ và $v < 0$. Suy ra: $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Thấu kính có $f = 10$ cm cho ảnh thật:

• Ảnh thật dao động điều hoà với biên độ $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{d'}{d} = \dfrac{f}{d-f} = 2$, vật $A' = 4$cm.

• Vì ảnh thật chuyển động ngược chiều với vật, suy ra pha của ảnh ngược với pha của vật:

$$\varphi_0' = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

Vậy phương trình dao động của vật là:

$$x = 4\cos\left(10t - \frac{\pi}{3}\right)\text{(cm)}.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng hai bạn: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên**: *Bùi Văn Quyến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, đã có lời giải đúng bài ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/495. *Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện có điện dung thay đổi được. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều*

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)\text{(V)}$$

và điều chỉnh điện dung của tụ điện sao cho điện áp trên đoạn mạch AM không phụ thuộc vào biến trở. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là $u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$(V) *và công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch AB là* $P = 90$W. *Xác định độ tự cảm của cuộn dây.*

Lời giải. Điện áp hiệu dụng giữa 2 điểm A, M:

$$U_{AM} = I.Z_{AM} = \frac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{1+\frac{Z_C(Z_C-2Z_L)}{R^2+Z_L^2}}}.$$

Để điện áp này không phụ thuộc vào R thì $Z_C = 2Z_L$, khi đó:

$$U_{AB} = U_{AM} = 120\,\text{V};\ Z_{LC} = Z_L = R\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

Công suất tiêu thụ của mạch: $P = \frac{U^2R}{R^2+Z_{LC}^2} = 90.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $R = 120\Omega;\ Z_L = 40\sqrt{3}\Omega.$

Suy ra: $L = \frac{Z_L}{\omega} \approx 0,22\text{H}.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Như Minh, Hà Phương Hoàng Mai*, 12 Toán 2, *Phan Nhật Tiến, Trần Huy Quý*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Đính chính. Trên TH&TT số 498 (T12.2018), bài T9/498 (Trang 18) đã viết: $...a+b+c+2=2abc$, đề nghị sửa thành: $...a+b+c+2=abc$

Chân thành xin lỗi bạn đọc. TH&TT.

PROBLEMS...

(*Tiếp theo trang 17*)

intersects (O) at L, other than Q. Show that $\widehat{GIK} = \widehat{IAL}$.

Problem T9/499. For each natural number n, let

$$A_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right],$$

(the notation $[x]$ denotes the maximal integer which does not exceed x). Find all natural numbers n such that $\frac{n^6-1}{A_n}$ is a perfect square.

TOWARDS MATHEMMTICAL OLYMPIAD

Problem T10/499. We call the trace of a triangle the ratio between the length of its shortest side and the length of its longest side. Given a square with the side equals 2019 length units. Does there exist a positive integer n and a decomposition of this square into n triangles satisfying both following conditions

i) Any side of any of these triangles is less than and equal the side of the square,

ii) The sum of all the traces of these n triangles does not exceed $\frac{n^2+6n-9}{n^2}$.

Problem T11/499. The sequence $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ is determined as follows

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n(n+1)}.\frac{u_n}{u_n^2+n};\ \forall n = 1,2....$$

a) Find $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Find $\left[\frac{\sqrt{2018}}{u_{2018}}\right]$, (where $[x]$ denotes the maximal integer which does not exceed x).

Problem T12/499. Given an acute triangle ABC. The points M, N are on the line segment BC and the points P, Q respectively are on the line segments CA, AB such that $MNPQ$ is a square. The incircles of APQ, BQM, CPN are respectively tangent to PQ, QM, PN at X, Y, Z. Prove that $AX \perp YZ$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TRỊNH BA
(GV THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh)

Phương pháp hệ số bất định dùng để giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khá hiệu quả. Đặc biệt là dành cho các học sinh chưa học đạo hàm, chưa có công cụ mạnh để khảo sát sự biến thiên của hàm số, chưa biết các phương pháp tiếp tuyến, hàm lồi, ... để đánh giá hàm đại diện thì hệ số bất định là phương pháp khá đơn giản để tiếp cận bài toán, ngay cả với các em học sinh trung học cơ sở. Bài viết trình bày 2 cách tiếp cận:

• Thứ nhất là tìm hệ số bất định dựa vào dự đoán dấu đẳng thức xảy ra kết hợp với việc tách nhân tử, bằng phương pháp biến đổi tương đương, đưa về bất đẳng thức đúng (các dạng bình phương); Ở đây, tác giả vận dụng sơ đồ Hoone để tách nhân tử được tiện lợi.

• Thứ hai là tìm hệ số bất định trong việc áp dụng các bất đẳng thức thông dụng như BĐT trung bình cộng - trung bình nhân (BĐT Cauchy), BĐT Schwarz, ... thông qua việc phân tích, xử lí dấu "=" xảy ra ... Từ đó có sự thêm bớt, tách ghép các số hạng một cách phù hợp để đi đến lời giải đúng.

1. Sử dụng hệ số bất định để tìm bất đẳng thức đúng.

Ý tưởng. Dùng hệ số bất định, kết hợp với biến đổi tương đương (đưa về bình phương đúng), thông qua sơ đồ Hoocne để tìm một bất đẳng thức đúng dùng để đánh giá biểu thức đại diện và giả thiết của bài toán.

Nhắc lại sơ đồ Hoocne (Horner 1786 – 1837) để tính các hệ số của đa thức thương và dư của phép chia

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \text{ cho } (x-a)$$

như sau:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
a	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	....	b_1	b_0

trong đó:
$$b_n=a_n$$
$$b_{n-1}=a.b_n+a_{n-1}$$
$$b_{n-2}=a.b_{n-1}+a_{n-2}$$
$$...$$
$$b_0=a.b_1+a_0.$$

Khi đó: $f(x)=(x-a).g(x)+r$, với thương là $g(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+...+b_1$, và dư là $r=b_0$.

Nếu $x=a$ là một nghiệm của $f(x)$ thì $r=b_0=0$.

Thí dụ 1. (Trích đề thi HOMC 2015). *Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2\le 12$. Xác định GTLN của biểu thức*

$$M=4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4).$$

Lời giải. Ta có $x^2(x-2)^2\ge 0$ với mọi số thực x. Bất đẳng thức này được viết lại $4x^3-x^4\le 4x^2$. Suy ra : $(4a^3-a^4)+(4b^3-b^4)+(4c^3-c^4)+(4d^3-d^4)$

$$\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)=48.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$(a,b,c,d)\in\{(2,2,2,0),(2,2,0,2),(2,0,2,2),(0,2,2,2)\}.$$

Do đó $\max M=48$.

Bình luận. Trong bài toán trên, ta thấy mấu chốt của lời giải là xuất phát từ bất đẳng thức đúng $x^2(x-2)^2\ge 0$, với mọi số thực x. Tại sao lại tìm ra bất đẳng thức đó? Ta thấy M có dạng $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$ với $f(x)=4x^3-x^4$. Trong khi giả thiết lại cho $a^2+b^2+c^2+d^2\le 12$. Như vậy nếu ta muốn tìm $\max M$ thì ta cần đánh giá $f(x)$ theo kx^2, với k là hệ số phù hợp cần tìm. Nếu để ý ta có thể viết lại

$$f(x)=4x^3-x^4=-(x^4-4x^3)$$
$$=-(x^4-4x^3+4x^2)+4x^2\le 4x^2,$$

tức là $k=4$ là giá trị của hệ số bất định k mà ta muốn tìm. Ở trên, nhờ công thức $f(x)$ gần với khai triển của một bình phương tổng nên ta dễ dàng thêm bớt số hạng cần thiết. Một cách cụ thể hơn, ta cần tìm số thực k sao cho $4a^3-a^4\le ka^2,\forall a\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2-4a+k)\ge 0,\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow k=4.$$

Thực ra bất đẳng thức này đúng với mọi số thực $k\ge 4$ nhưng ta chọn $k=4$ để đảm bảo dấu "=" xảy ra.

Thí dụ 2. (Trích đề thi HOMC 2014). *Cho $a_1, a_2, ..., a_9 \geq -1$ và $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$. Xác định GTLN của biểu thức $M = a_1 + a_2 + ... + a_9$.*

Lời giải. Với $a \geq -1$, ta có $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Suy ra $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1$.

Do đó

$$3(a_1 + a_2 + ... + a_9) \leq 4(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3) + 9 = 9.$$

Vậy $M \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi

$$a_1, a_2, ..., a_9 \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Ví dụ, ta chọn $a_1 = -1, a_2 = a_3 = ... = a_9 = \frac{1}{2}$, thì $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$ và $M = a_1 + a_2 + ... + a_9 = 3$. Do đó $\max M = 3$.

Bình luận. Lời giải trên xuất phát từ một bất đẳng thức đúng là $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, từ đó suy ra đánh giá $3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1$. Vậy làm sao tìm được bất đẳng thức này? Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a_1 + a_2 + ... + a_9$, với điều kiện của giả thiết là $a_1, a_2, ..., a_9 \geq -1$ và $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$ thì ta phải tìm một đánh giá có dạng $a \leq ma^3 + n$, với m, n là hằng số phù hợp, sau đó lần lượt thay a bằng các số $a_i, i = \overline{1,9}$ và cộng các bất đẳng thức đó lại với nhau. Vấn đề là tìm hệ số m, n như thế nào? Ta cần tìm số m, n sao cho

$$a \leq ma^3 + n \Leftrightarrow ma^3 - a + n \geq 0, \forall a \geq -1. \quad (1)$$

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = -1$, có nghĩa $a = -1$ là một nghiệm của vế trái, hay $f(-1) = 0$, với $f(a) = ma^3 - a + n$. Ta dùng sơ đồ Hoocne để tính $f(a)$ và để phân tích vế trái thành nhân tử như sau:

	m	0	-1	n
-1	m	$-m$	$m-1$	$-m+n+1$

Từ đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (a+1)(ma^2 - ma + m - 1) \geq 0, \forall a \geq -1$$

$$\Rightarrow m(a+1)\left(a^2 - a + \frac{m-1}{m}\right) \geq 0, \forall a \geq -1. \quad (2)$$

Muốn có bất đẳng thức cuối luôn đúng ta cần tìm số m dương sao cho

$$\begin{cases} \frac{m-1}{m} = \frac{1}{4} \\ -m + n + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức cần tìm là

$$a \leq \frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1.$$

Bất đẳng thức này đúng vì nó tương đương với $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ (nhờ ta phân tích ở (2)).

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Phân tích. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3$, với $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Ta cần đánh giá $f(x)$ với $mx^2 + n$. Cụ thể là tìm hai hằng số m, n sao cho $f(x) \geq mx^2 + n$. Hay

$$\frac{1}{2-x} \geq mx^2 + n \Leftrightarrow 1 \geq (2-x)(mx^2 + n)$$

$$(\text{vì } a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a, b, c < 2)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2mx^2 + 2n - mx^3 - nx$$

$$\Leftrightarrow mx^3 - 2mx^2 + nx - 2n + 1 \geq 0.$$

Ta thấy, dấu "=" ở bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra khi $a = b = c = 1$, nên ta dự đoán dấu bằng ở bất đẳng thức cuối xảy ra khi $x = 1$. Và để tìm 2 số m, n sao cho bất đẳng thức cuối đúng, ta cần biến đổi bất đẳng thức đó tương đương $(x-1)^2(px+q) \geq 0$. Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích thành nhân tử như sau:

	m	$-2m$	n	$-2n+1$
1	m	$-m$	$n-m$	$-m-n+1$
1	m	0	$n-m$	$-2m+1$

Ta cần có:

$$\begin{cases} -m - n + 1 = 0 \\ 1 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $(x-1)^2 . \frac{1}{2}x \geq 0$, đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{2-x} \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, với mọi x thỏa mãn $0 < x < 2$. (*)

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương $(x-1)^2.x \geq 0$, đúng với mọi x thỏa mãn $0 < x < 2$. Do a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên $0 < a, b, c \leq \sqrt{3} < 2$.

Áp dụng (*) cho a, b, c ta có:

$$\frac{1}{2-a} \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2-b} \geq \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2-c} \geq \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) và thay $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho a, b, c là 3 số thực thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức*

$$P = \sqrt{2+x^4} + \sqrt{2+y^4} + \sqrt{2+z^4}.$$

Phân tích. Ta cần tìm hai hệ số m, n sao cho

$$\sqrt{2+x^4} \geq mx + n, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Nếu $mx + n < 0$ thì BĐT (1) hiển nhiên đúng.

Nếu $mx + n \geq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 2 + x^4 \geq (mx+n)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - m^2x^2 - 2mnx + 2 - n^2 \geq 0.$$

Ta cần phân tích

$$x^4 - m^2x^2 - 2mnx + 2 - n^2 = (x-1)^2\left(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\geq 0}\right).$$

Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích nhân tử ta được:

	1	0	$-m^2$	$-2mn$	$2-n^2$
1	1	1	$1-m^2$	$1-m^2-2mn$	$3-m^2-n^2-2mn$
1	1	2	$3-m^2$	$4-2m^2-2mn$	

Ta cần có

$$\begin{cases} 3 - m^2 - n^2 - 2mn = 0 \\ 4 - 2m^2 - 2mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+n)^2 = 3 \\ m^2 + mn = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n = \pm\sqrt{3} \\ m(m+n) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} n = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ m = \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Chọn $(m;n) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Khi đó ta được bất đẳng thức $\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2 + 2x + \frac{5}{3}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thật vậy, nếu $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng.

Nếu $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$ thì

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2 + 2x + \frac{5}{3}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy (2) được chứng minh.

Áp dụng (2) với x, y, z ta có:

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

$$\sqrt{2+y^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

$$\sqrt{2+z^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall z \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều (3), (4), (5) ta được

$$P = \sqrt{2+x^4} + \sqrt{2+y^4} + \sqrt{2+z^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.3 + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Vậy $\min P = 3\sqrt{3}$ khi $x = y = z = 1$.

Sau đây ta xét 2 thí dụ về bài toán không có điều kiện ràng buộc cho các biến như các thí dụ trên. Nhưng nếu biểu thức cho trong đề bài có tính thuần nhất thì ta có thể đặt ra điều kiện ràng buộc như các bài toán trên.

Cho biểu thức $f(a,b,c)$ thỏa mãn tính chất $f(ta, tb, tc) = t^\alpha f(a,b,c), \forall t \in \mathbb{R}$ thì ta nói f có tính thuần nhất. Khi đó, không mất tổng quát ta chỉ cần xét bài toán thỏa mãn điều kiện $a + b + c = k$ hay $abc = k$.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta có bất đẳng thức*

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2}\le 8.$$

Phân tích. Đây là bất đẳng thức thuần nhất theo 3 biến số a, b, c nên không mất tổng quát ta giả sử $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le 8.$$

Vế trái của bất đẳng thức có dạng:

$$f(a)+f(b)+f(c),\ \text{với}\ f(x)=\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}.$$

Như vậy ta cần đánh giá

$$f(x)=\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le mx+n,$$

với m,n là 2 hệ số thích hợp. Chú ý rằng ta chỉ cần chứng minh bất này đúng với mọi số thực x thỏa mãn $0\le x\le 3$ và dự đoán dấu "=" xảy ra tại $x=1$.

Khi đó $f(x)=\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le mx+n$

$\Leftrightarrow (3+x)^2\le (mx+n)(3x^2-6x+9)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9\le 3mx^3-6mx^2+9mx+3nx^2-6nx+9n$

$\Leftrightarrow 3mx^3+(-6m+3n-1)x^2+(9m-6n-6)x+9n-9\ge 0.$

Ta cần phân tích vế trái ở dạng $(x-1)^2(px+q)\ge 0$ và chứng minh bất đẳng thức này luôn đúng với mọi x thỏa mãn $0\le x\le 3$. Dùng sơ đồ Hoocne phân tích vế trái ta có:

	$3m$	$-6m+3n-1$	$9m-6n-6$	$9n-9$
1	$3m$	$-3m+3n-1$	$6m-3n-7$	$6m+6n-16$
1	$3m$	$3n-1$	$6m-8$	

Ta cần có $\begin{cases}6m+6n-16=0\\6m-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4}{3}\\n=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Như vậy ta có bất đẳng thức sau đúng với mọi x thỏa mãn $0\le x\le 3$: $\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

Lời giải. Vì bất đẳng thức đã cho có tính thuần nhất nên không mất tính tổng quát ta xem $a+b+c=3$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le 8.\quad(1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\ \text{với mọi}\ 0\le x\le 3\quad(2)$$

Thật vậy $\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(4x+3)\ge 0,\forall x: 0\le x\le 3.$

Vậy (2) đúng. Áp dụng (2) cho các số không âm a,b,c với $a+b+c=3$ ta được

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}\le\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\quad(3)$$

$$\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}\le\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}\quad(4)$$

$$\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}\quad(5)$$

Cộng (3), (4), (5) vế theo vế ta được

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}$$
$$\le\frac{4}{3}(a+b+c)+4=8.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy (1) được chứng minh.

Thí dụ 6. (Japan 1997 – Olympic 30/4 lớp 11 năm 2006). *Chứng minh rằng với các số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}.\quad(1)$$

Phân tích. Vì vế trái của bất đẳng thức (1) có tính thuần nhất theo 3 biến a, b, c nên ta chỉ cần chứng minh (1) trong điều kiện $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}.\quad(2)$$

Ta thấy (2) có dạng $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{6}{5}$ với

$$f(x)=\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}$$

Ta cần tìm 2 số m,n sao cho

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le mx+n\Leftrightarrow x(3-x)$$
$$\le(mx+n)(2x^2-6x+9)$$

$\Leftrightarrow 3x-x^2\le 2mx^3-6mx^2+9mx+2nx^2-6nx+9n$

$\Leftrightarrow 2mx^3+(-6m+2n+1)x^2+(9m-6n-3)x+9n\ge 0.\quad(3)$

Ta thấy dấu đẳng thức trong (2) xảy ra khi $a=b=c=1$ nên dấu đẳng thức trong (3) xảy ra khi $x=1$. Do đó, để chứng minh (3) đúng, ta cần phân tích (3) dưới dạng $(x-1)^2(px+q)\ge 0$ và chứng minh bất đẳng thức này đúng với mọi x thỏa mãn $0<x<3$. Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích nhân tử ta có

1	$2m$	$-6m+2n+1$	$9m-6n-3$	$9n$
1	$2m$	$-4m+2n+1$	$5m-4n-2$	$5m+5n-2$
1	$2m$	$-2m+2n+1$	$3m-2n-1$	

Ta cần tìm m,n sao cho $\begin{cases}5m+5n-2=0\\3m-2n-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{9}{25}\\n=\dfrac{1}{25}\end{cases}$

Vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\dfrac{9}{25}x+\dfrac{1}{25}$, $\forall x: 0<x<3$.

Lời giải. Vì vế trái của bất đẳng thức (1) có tính thuần nhất theo 3 biến *a*, *b*, *c* nên ta chỉ cần chứng minh (1) với điều kiện $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}. \quad (2)$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25},\ \forall x: 0<x<3 \quad (4)$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25x(3-x)\le(2x^2-6x+9)(9x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi *x* dương. Do đó (4) được chứng minh. Áp dụng (4) với a,b,c là 3 số dương ta có:

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}\le\frac{9}{25}a+\frac{1}{25} \quad (5)$$

$$\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}\le\frac{9}{25}b+\frac{1}{25} \quad (6)$$

$$\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{9}{25}c+\frac{1}{25} \quad (7)$$

Cộng (5), (6), (7) vế theo vế ta được:

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}.$$

Vậy (2) đúng, nên (1) được chứng minh.

Ngoài ra phương pháp hệ số bất định còn được dùng kết hợp với những bất đẳng thức thông dụng khác như BĐT Cauchy hay BĐT Schwarz để giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Ta xem các thí dụ sau

2. Sử dụng hệ số bất định trong việc áp dụng các bất đẳng thức thông dụng.

Ý tưởng. Thêm hệ số phù hợp để đảm bảo dấu "=" trong các bất đẳng thức được áp dụng xảy ra.

Thí dụ 7. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}\quad \text{với } x>y>0$$

Ta xem lời giải sau:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=x+(x-y)+y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{x(x-y)y\frac{1}{xy(x-y)}}=4.$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=x-y=y=\frac{1}{xy(x-y)}.$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên không có đẳng thức xảy ra. Lời giải trên đã sai.

• Bây giờ ta ta thêm hằng số $k, 0<k<2$, vào để khắc phục tình huống trên như sau

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=kx+(2-k)(x-y)+(2-k)y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

và tìm *k* bằng cách xét đến dấu đẳng thức xảy ra khi áp dụng BĐT Cauchy là

$$kx=(2-k)(x-y)=(2-k)y=\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\Rightarrow k=\frac{2}{3}, x=\sqrt[4]{6},\ y=\frac{\sqrt[4]{6}}{2}.$$

Từ đây ta có lời giải đúng như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}(x-y)+\frac{4}{3}y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}\sqrt[4]{6}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt[4]{6}; y=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{2}$. Vậy $\min A=\dfrac{8}{3}\sqrt[4]{6}$.

Bài toán 8. (Trích đề thi Olympic 30/4, 1996, lớp 10) *Chứng minh rằng với $0\le x\le 1$ ta có bất đẳng thức $x(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2})\le 16$.*

Phân tích. Vì ở lớp 10, học sinh chưa được học đạo hàm nên không thể khảo sát được sự biến thiên của hàm số ở vế trái của bất đẳng thức được. Do đó, ta áp dụng các bất đẳng thức để đánh giá vế trái. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}\le 16.$$

Lúc này ta thấy có thể dùng BĐT Cauchy để đánh giá từ tích sang tổng. Một vấn đề khó khăn đặt ra là ta chưa biết khi nào dấu "=" xảy ra; Việc tìm dấu đẳng thức xảy ra cũng gặp khó khăn khi phải đi giải phương trình vô tỉ $9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=16$.

Bây giờ ta thêm vào 2 số dương m và n như sau

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}.$$

Khi đó, áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}\le\frac{9}{2m}(m^2x^2+1+x^2)$$

$$\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}\le\frac{13}{2n}(n^2x^2+1-x^2)$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}$$

$$\le\frac{9}{2m}(m^2x^2+1+x^2)+\frac{13}{2n}(n^2x^2+1-x^2).$$

Ta cần tìm 2 số dương m,n sao cho vế phải của bất đẳng thức cuối không phụ thuộc vào x, đồng thời tồn tại x để dấu "=" xảy ra và tổng các số hạng tự do ở vế phải bằng 16. Vậy ta có hệ sau:

$$\begin{cases}\frac{9}{2}m+\frac{9}{2m}+\frac{13}{2}n-\frac{13}{2n}=0\\ m^2x^2=1+x^2\\ n^2x^2=1-x^2\\ \frac{9}{2m}+\frac{13}{2n}=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9\left(m+\frac{1}{m}\right)+13\left(n-\frac{1}{n}\right)=0\\ \left(m^2-1\right)x^2=1\\ \left(n^2+1\right)x^2=1\\ 9\frac{n}{m}=32n-13\end{cases}$$

Vì tồn tại x nên từ $(m^2-1)x^2=1$ và $(n^2+1)x^2=1$ suy ra $m^2-1=n^2+1$ hay $m^2+1=n^2+3$ và

$$9\left(m+\frac{1}{m}\right)+13\left(n-\frac{1}{n}\right)=0\Leftrightarrow 9\frac{m^2+1}{m}=13\frac{1-n^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow 9\frac{n}{m}\left(m^2+1\right)=13-13n^2.$$

Thay $m^2+1=n^2+3$ và $9\frac{n}{m}=32n-13$ vào đẳng thức cuối ta được

$$(32n-13)(n^2+3)=13-13n^2$$

$$\Leftrightarrow 8n^3+24n-13=0$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(4n^2+2n+13)=0$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1}{2}.$$

Với $n=\frac{1}{2}$, thay vào $m^2+1=n^2+3$ ta được $m^2=\frac{9}{4}\Rightarrow m=\frac{3}{2}$. Khi đó, đẳng thức xảy ra tại

$$x^2=\frac{1}{m^2-1}=\frac{1}{n^2+1}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ta có lời giải cho bài toán như sau:

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=6.\frac{3x}{2}.\sqrt{1+x^2}+26.\frac{x}{2}.\sqrt{1-x^2}$$

$$\le 3\left(\frac{9}{4}x^2+1+x^2\right)+13\left(\frac{x^2}{4}+1-x^2\right)=16$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{9x^2}{4}=1+x^2\\ \frac{x^2}{4}=1-x^2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Thí dụ 9. *Cho các số thực $x, y, z>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}.$$

Phân tích. Ta áp dụng BĐT Schwarz như sau để giải bài toán trên:

Với x,y,z là các số thực tùy ý và a,b,c là các số thực dương, ta có: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$,

Chú ý dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Ta xem lời giải sau. Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{\sqrt{2}x+y+z};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+\sqrt{2}y+z};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{2}z}\ge\frac{9}{x+y+\sqrt{2}z}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9P$$

$$\Rightarrow 9P\le\frac{1}{\sqrt{2}}.1+2.1=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P\le\frac{2}{9}+\frac{1}{9\sqrt{2}}.$$

Do đó max $P=\frac{2}{9}+\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Lời giải trên mắc sai lầm vì ta không thể tìm được giá trị của x,y,z thỏa để dấu "=" xảy ra. Chú ý ta cần thêm hệ số k vào số hạng $\frac{1}{\sqrt{2}x}$ như sau: $\frac{k^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(k+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$

Và dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$ (vì biểu thức P có tính đối xứng đối với x,y,z). Mà dấu bằng trong bất đẳng thức cuối xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{k}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow k=\sqrt{2}.\\ x=y=z=3\end{cases}$$

Từ đó ta có lời giải cho bài toán trên như sau:

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\sqrt{2}+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}=\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{x+\sqrt{2}y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}z}\ge\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{x+y+\sqrt{2}z}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\left(\sqrt{2}+2\right)^2P$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{\sqrt{2}+2}.$$

Vậy max $P=\frac{1}{\sqrt{2}+2}$. khi $x=y=z=3$.

Thí dụ 10. *Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}.$$

Lời giải. Áp dụng giả thiết để biến đổi biểu thức P như sau: $x+yz=z-y-1+yz=(z-1)(1+y)$

$$y+zx=z-x-1+xz=(z-1)(1+x)$$

$$z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1).$$

Do đó: $(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2=(x+1)^3(y+1)^3(z-1)^2$.

Cũng từ giả thiết $x+y+1=z$ suy ra $z-1=x+y$.

Khi đó $(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2=(x+1)^3(y+1)^3(z-1)^2$

$$=(x+1)^3(y+1)^3(x+y)^2.$$

Như vậy

$$P=\frac{x^3y^3}{(x+1)^3(y+1)^3(x+y)^2}\le\frac{x^3y^3}{(x+1)^3(y+1)^3 4xy}$$

$$=\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(x+1)^3=\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\right)^3\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.1}\right)^3=\frac{27}{4}x^2;$$

$$(y+1)^3=\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+1\right)^3\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{y}{2}.\frac{y}{2}.1}\right)^3=\frac{27}{4}y^2.$$

Suy ra: $P\le\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}\le\frac{x^2y^2}{\frac{27}{4}x^2.\frac{27}{4}y^2.4}=\frac{4}{729}.$

Vậy max $P=\frac{4}{729}$ khi $x=y=2;z=5$.

Bình luận. Khi biến đổi đến $P\le\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}$, ta cần đánh giá $\frac{x^2}{(x+1)^3}\le k$, với k là hằng số nào đó. Hay ta cần tìm số k sao cho $(x+1)^3\ge kx^2$, đến đây thì đơn giản vì ta cần có dấu "=" xảy ra tại $x=2$ (do dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức trước đó). Như vậy, ta có $(2+1)^3=k.2^2\Rightarrow k=\frac{27}{4}$.

Do đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$(x+1)^3\ge\frac{27}{4}x^2\Leftrightarrow\left(\frac{x+1}{3}\right)^3\ge\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1}{3}\right)^3\ge\frac{x^2}{4}.$$

BĐT cuối đúng do BĐT Cauchy.

(*Xem tiếp trang* 39)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

1D	2C	3B	4A	5D	6B	7C	8A	9B	10D
11B	12C	13A	14D	15B	16C	17A	18D	19B	20A
21C	22D	23B	24A	25C	26D	27B	28A	29C	30D
31B	32A	33C	34D	35A	36B	37C	38D	39A	40B
41D	42B	43A	44D	45B	46C	47A	48D	49C	50B

Câu 1. Chọn **D.**

Từ đồ thị, có $\frac{b}{d} = y(0) < 0$ và $d < 0$ suy ra $b > 0$.

Lại có $y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a-1} < 0$. Suy ra $a > 1$.

Đường tiệm cận ngang $y = \frac{a-1}{c-1} > 0$, nên $c > 1$.

Câu 2. Từ công thức

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 160\pi = \pi r^2.10 \Rightarrow r = 4.$$

$$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.4.10 = 80\pi.$$

Câu 3. Chọn **B.**

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = (-5;3), \vec{v} = \overrightarrow{M'M''} = (7;4)$

Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (2;7)$.

Câu 4. Chọn **A.**

Ta có $f(x) = 2^x(2^{-x} + 5) = 1 + 5.2^x$.

Suy ra nguyên hàm của $f(x)$ là $x + 5\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$.

Câu 5. Chọn **D.**

Ta có PT hoành độ giao điểm

$$x^4 - 4x^2 - 3 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = x^2$ ta được PT $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2)

Vì (2) có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên (1) có hai nghiệm phân biệt. Vậy số giao điểm của hai đồ thị đã cho là 2.

Câu 6. Chọn **B.**

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì MN là đoạn vuông góc chung của chúng.

$$d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 7. Chọn **C.**

Vì $C \in d \Rightarrow C(5+3t; -1-2t)$.

Ta có: $CA^2 = (9+3t)^2 + (-3-2t)^2$

$CB^2 = (3+3t)^2 + (-7-2t)^2$.

Từ $CA = CB \Rightarrow t = -\frac{8}{5} \Rightarrow C\left(\frac{1}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Câu 8. Chọn **A.**

Với $a = 3, b = 3, c = 1$: Ta có

$$a + \frac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c} = 3 + \frac{\log_3 7 - 3}{\log_3 2 + 1} = \frac{3\log_3 2 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1}$$

$$= \frac{\log_3 56}{\log_3 6} = \log_6 56.$$

Câu 9. Chọn **B.**

Câu 10. Chọn **D.**

Số gạch các hàng lần lượt từ trên xuống dưới tạo thành một cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$, $u_{500} = 500$.

Số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là

$$S_{500} = \frac{500}{2}(u_1 + u_{500}) = 125250.$$

Câu 11. Chọn **B.**

Ta có $x = 2$ và $x = 3$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho vì PT $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$ và hai nghiệm này không là nghiệm của tử thức. Ngoài ra bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận.

Câu 12. Chọn **C.**

Ta có

$\overrightarrow{AB} = (0;2;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;1;2)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; m+2; n)$.

A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 5(-3) + 1.(m+2) + 2.n = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 2n = 13.$$

Câu 13. Chọn **A.**

Ta có $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 4i$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2i)(1+4i)}{1^2 + 4^2} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

Vậy phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ là $\frac{14}{17}$.

Câu 14. Chọn **D.**

Gọi x (đồng), y (đồng), z (đồng), theo thứ tự là giá tiền của đồng hồ, đôi giày và máy tính bỏ túi. Điều kiện: x, y, z dương. Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=420000 \\ x+z=570000 \\ y+z=750000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=870000 \\ x+y=420000 \\ x+z=570000 \\ y+z=750000 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=120000, y=300000, z=450000.$

Câu 15. Chọn **B.**

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $a>0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Ta thấy $g(0)>0$ và $g(1)<0$ nên PT $g(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y=|f(x)-2019|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu 16. Chọn **C.**

Kẻ $AH\perp SB$ $(H\in SB)$.

Vì $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH.$

Mà $AH\perp SB$ nên $AH\perp(SBC)$.

Do đó $d(A;(SBC))=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}$

$$=\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 17. Chọn **A.**

BPT đã cho tương đương với

$(3+\sqrt{8})^{-2x}\ge(3+\sqrt{8})^{x^2}\Leftrightarrow -2x\ge x^2\Leftrightarrow x^2+2x\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le x\le 0$. Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 18. Chọn **D.**

Ta có: $b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2)$

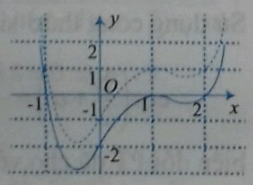
$\Leftrightarrow b^3-c^3=a^2(b-c)\Leftrightarrow b^2+bc+c^2=a^2$

$\Leftrightarrow b^2+bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow \cos A=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{A}=120^0$.

Câu 19. Chọn **B.**

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$. Do đó đồ thị của hàm số $g'(x)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $f'(x)$ đi xuống 1 đơn vị.

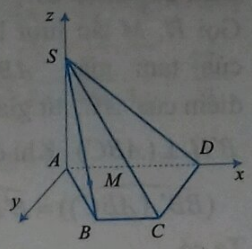


Quan sát đồ thị $g'(x)$, ta thấy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x=-1$.

Do đó $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1\in(-2;\ 0)$.

Câu 20. Chọn **A.**

Đặt hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A(0;0;0)\equiv O$, $D(2a;0;0)$, $S(0;0;a\sqrt{3})$, $B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.



Phương trình

$$SB:\frac{2x}{a}=\frac{2y}{a\sqrt{3}}=\frac{z-a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}.$$

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)\in SB\Rightarrow \begin{cases} y_0=\sqrt{3}x_0 \\ z_0=a\sqrt{3}-2\sqrt{3}x_0 \end{cases}$.

Mặt khác $AM\perp DM\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM}=0\Rightarrow x_0=\dfrac{3a}{8}$

(loại nghiệm $x_0=\dfrac{a}{2}$ vì khi đó $M\equiv B$ và $AB\not\perp BD$). Khi đó $M\left(\dfrac{3a}{8};\dfrac{3a\sqrt{3}}{8};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta lại có $\overrightarrow{SM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB}\Rightarrow \dfrac{SM}{SB}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 21. Chọn **C.**

Ta có $z(z-1)+i^2(z-7)=2\Leftrightarrow z^2-2z+5=0$

$\Leftrightarrow z=1-2i$ hoặc $z=1+2i$.

• $z=1-2i\Rightarrow \omega=\dfrac{1-i}{1+i}=-i\Rightarrow|\omega|=1$.

• $z=1+2i\Rightarrow \omega=\dfrac{1+3i}{1-3i}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\Rightarrow|\omega|=1$.

Vậy cả hai trường hợp thì $|\omega|=1$.

Câu 22. Chọn **D.**

Từ yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=-m+1>0 \\ S=\dfrac{2(m-1)}{m}>0 \\ P=\dfrac{m-1}{m}>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow m<0.$$

Câu 23. Chọn **B.**

$y'=3x^2+8(m-2)x-7=0$ luôn có hai nghiệm x_1,x_2 trái dấu. Khi đó x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số.

$$|x_1|-|x_2|=-4\Leftrightarrow -x_1-x_2=-4\Leftrightarrow \frac{-8(m-2)}{3}=4\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Câu 24. Chọn **A.**

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm $P(-1;-1),\forall m$.

Hạ $AH\perp\Delta$ $(H\in\Delta)$. Khi đó $d(A;\Delta)=AH\le AP$

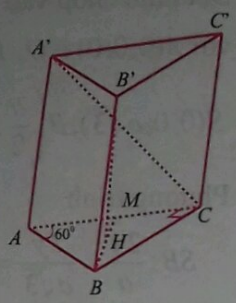
$\Rightarrow d_{\max}=AP=2\sqrt{10}$ và đường thẳng Δ trong trường hợp này có phương trình

$$3(x-5)+(y-1)=0\Leftrightarrow 3x+y-16=0.$$

Câu 25. Chọn **C.**

Gọi H, M lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và trung điểm của AC, từ giả thiết suy ra $B'H \perp (ABC)$. Khi đó

$$(\widehat{BB',(ABC)}) = \widehat{B'BH} = 60^0.$$



Ta có

$$BH = BB'\cos 60^0 = a, B'H = \sqrt{BB'^2 - BH^2} = a\sqrt{3},$$

$$BM = \frac{3}{2}BH = \frac{3a}{2}.$$

Đặt $AC = x > 0$ thì $BC = AC\tan 60^0 = x\sqrt{3}$,

$AB = 2x, BM = \dfrac{x\sqrt{13}}{2}$. Từ đó có $x = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

$$V = \frac{1}{3}B'H.S_{ABC} = \frac{1}{6}B'H.AC.BC = \frac{9a^3}{26}.$$

Câu 26. Chọn **D.**

Không gian mẫu $C_{12}^5 = 792$.

Gọi A là biến cố cần tìm xác suất; B là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có thầy *Xuân* nhưng không có cô *Hạ*; C là biến cố chọn được hội đồng gồm 3 thầy, 2 cô trong đó có cô *Hạ* nhưng không có thầy *Xuân*.

Xác suất để sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy *Xuân* hoặc cô *Hạ* nhưng không có cả hai là

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{1.C_6^2.C_4^2}{C_{12}^5} + \frac{1.C_6^3.C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{170}{792} = \frac{85}{396}.$$

Câu 27. Chọn **B.**

Đặt lên tấm bìa hình dạng tam giác vuông là ABC, $AB = c$ và $AC = b$. Khối sinh ra gồm hai khối nón:

• Khối nón 1 có đỉnh B, đường cao BH và bán kính đáy bằng AH.

• Khối nón 2 có đỉnh C, đường cao CH và bán kính đáy bằng AH.

Vậy thể tích của khối tròn xoay là:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2(BH + CH) = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AB.AC}{BC}\right)^2.BC = \frac{1}{3}\pi\frac{AB^2.AC^2}{BC} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Câu 28. Chọn **A.**

Ta có $f(x) = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k.(-1)^k.x^k + x^2\sum_{i=0}^{10} C_{10}^i.(2x)^i$

hay $f(x) = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.(-1)^k.x^{k+1} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i.2^i.x^{i+2}$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển ứng với $k = 4$ và $i = 3$ là $C_5^4 + 8C_{10}^3 = 965$.

Câu 29. Chọn **C.**

Gọi $M(x_M; y_M; 0), N(x_N; 0; z_N), P(0; y_P; z_P)$.

Vì M là trung điểm của AN nên

$M\left(\dfrac{9+x_N}{2}; -\dfrac{3}{2}; \dfrac{4+z_N}{2}\right)$. Do $z_M = 0 \Rightarrow z_N = -4$.

Lại có N là trung điểm của MP nên

$N\left(\dfrac{x_M}{2}; \dfrac{2y_P - 3}{4}; \dfrac{z_P}{2}\right)$. Do $\begin{cases} y_N = 0 \\ z_N = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_P = \dfrac{3}{2} \\ z_P = -8 \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x_M = \dfrac{9+x_N}{2} \\ x_N = \dfrac{x_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 6 \\ x_N = 3 \end{cases}$. Khi đó $N(3; 0; -4)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 9 = 2(3-9) \\ y_B + 3 = 2(0+3) \\ z_B - 4 = 2(-4-4) \end{cases}$

$$\Rightarrow B(-3; 3; -12) \Rightarrow ab + bc + ca = -9.$$

Câu 30. Chọn **D.**

Giả sử $M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Đặt $L = MF_1.MF_2 + OM^2$

$$= \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}x\right) + x^2 + y^2$$

$$= a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + x^2 + y^2$$

$$= a^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2$$

$$= a^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$$

Câu 31. Chọn **B.**

Sử dụng công thức $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

biến đổi PT đã cho về $\cos 2x(\cos 2x + 2) = 0$.

Giải PT trên ta được nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Các nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ là $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm của PT là $S = 4\pi$.

Câu 32. Chọn A.

Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}=B+C$$

Mà $B=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1\right)}=\frac{a}{3}$

và $C=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x(1+\sqrt{1-bx})}=\frac{b}{2}$.

Theo giả thiết có $\begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2\\ a+3b=9\end{cases}\Leftrightarrow a=3,b=2.$

Dựa vào các phương án A, B, C, D ta chọn A.

Câu 33. Chọn C.

HPT đã cho tương đương với $\begin{cases}x+y=a\\ xy=a^2-3\end{cases}$.

HPT có nghiệm khi $S^2\ge 4P\Leftrightarrow a^2\ge 4(a^2-3)$

$$\Leftrightarrow a^2\le 4\Leftrightarrow -2\le a\le 2.$$

Ta có $F=a^2+2a-3=(a+1)^2-4\ge -4$.

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=-1$ hay $(x=1,y=-2)$ hoặc $(x=-2,y=1)$.

Câu 34. Chọn D.

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;3)$ và đi qua điểm $N(-3;1;-4)$; (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm $I(-1;-1;-1)$ của MN và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-4;-5;-2)$.

PT $(P):-4(x+1)-5(y+1)-2(z+1)=0$

$$\Leftrightarrow 4x+5y+2z+11=0.$$

Suy ra $a+2b+3c=4+2.5+3.2=20$.

Câu 35. Chọn A.

ĐK: $n\ge 3,n\in\mathbb{N}^*$.

Từ $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{2.2}{n(n-1)}+\frac{14.2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow n^2-7n-18=0\Rightarrow n=9.$$

Với $n=9$ ta có:

$$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k2^{9-k}.(-3)^k.x^{18-3k}.$$

Từ yêu cầu bài toán $\Rightarrow 18-3k=6\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng cần tìm là: $2^5.3^4.C_9^4=326592$.

Câu 36. Chọn B.

Biến đổi E và thu gọn lại ta được

$$E=\frac{9}{8}+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\right)+\left(\frac{b}{4a}+\frac{c}{4b}+\frac{a}{4c}\right)$$

Ta có: $E\ge\frac{9}{8}+3\sqrt[3]{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{2c}\cdot\frac{c}{2a}}+3\sqrt[3]{\frac{b}{4a}\cdot\frac{c}{4b}\cdot\frac{a}{4c}}=\frac{27}{8}$.

Vậy $\min E=\frac{27}{8}\in\left(3;\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 37. Chọn C.

BPT đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)x\ge\frac{(a+b+c)^2}{abc}\Leftrightarrow(a+b+c)x\ge(a+b+c)^2.\ (1)$$

Với $a+b+c>0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow x\ge a+b+c$.

Với $a+b+c<0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow x\le a+b+c$.

Với $a+b+c=0$ thì (1) có tập nghiệm $S=\mathbb{R}$.

Câu 38. Chọn D.

$M\in d\Rightarrow M(-1+2t;\ t;\ 2+t)$. Vì A là trung điểm của đoạn MN nên $N(5-2t;-2-t;4-t)$;

$N\in(P)\Rightarrow 5-2t-2-t-2(4-t)+8=0\Rightarrow t=3$.

$\Rightarrow M(5;3;5),N(-1;-5;1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-6;-8;-4)$.

PT đường thẳng $\Delta:\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{2}$.

Câu 39. Chọn A.

PT hoành độ giao điểm $\frac{x}{1-x}=x-m$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2-mx+m=0\quad(x\ne 1).$$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 là $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>4\end{array}\right.$ (*)

Gọi $A(x_1;x_1-m),B(x_2;x_2-m)$ là các giao điểm của chúng. Từ giả thiết ta có:

$$\cos 60^0=\left|\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\right|=\frac{\left|x_1x_2+(x_1-m)(x_2-m)\right|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\sqrt{x_2^2+(x_2-m)^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\left|2x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2\right|}{\sqrt{2g(x_1)+m^2-2m}\sqrt{2g(x_2)+m^2-2m}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{\left|2m-m^2+m^2\right|}{\sqrt{m^2-2m}\sqrt{m^2-2m}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=6\end{array}\right.\ (\text{do}(*)).$$

Câu 40. Chọn B.

Gọi a,R lần lượt là cạnh của hình vuông, bán kính đáy của hình trụ. Mảnh đất hình vuông có diện tích bằng $81m^2$ nên $a^2=81\Rightarrow a=9\ (m)$.

Khi đó $2x+2R=a\Leftrightarrow R=\frac{9-2x}{2}>0$.

Thể tích của khối trụ $V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{9-2x}{2}\right)^2x$

$$=\frac{\pi}{4}(81x-36x^2+4x^3).$$

Xét hàm số $f(x)=81x-36x^2+4x^3$ trên $\left(0;\frac{9}{2}\right)$.

Ta có $f'(x)=81-72x+12x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{9}{2}\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, có

$$\max_{x\in\left(0;\frac{9}{2}\right)}f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=54.$$

Vậy thể tích lớn nhất V của ao mà ông *An* cần đào là

$$\frac{\pi}{4}.54=13,5\pi\ (m^3).$$

Câu 41. Chọn **D.**

$(P)\,//\,(Q)\Rightarrow(P):x-2y+z+m=0\ (m\neq-5)$

Mặt cầu có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.

Đường tròn giao tuyến có bán kính $r=3$.

$$d(I;(P))=\sqrt{15-9}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|1-2+m|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$\Leftrightarrow m=7$ hoặc $m=-5$ (loại).

Câu 42. Chọn **B.**

BPT tương đương với $f(x)=(a+1)x+4a-3>0$.

Để $a(x+4)>3-x,\forall x\in[-2;1]\Leftrightarrow\begin{cases}f(-2)>0\\f(1)>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-5>0\\5a-2>0\end{cases}\Leftrightarrow a>\frac{5}{2}.$$

Mà $a<6$ và $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{3;4;5\}$.

Câu 43. Chọn **A.**

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{19}{2};\ 2;\ \frac{15}{2}\right)$. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|=\left|2\overrightarrow{IM}\right|=2\left|\overrightarrow{IM}\right|.$$

Biểu thức đã cho nhỏ nhất $\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow I$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxz)

$$\Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2};\ 0;\ \frac{15}{2}\right).$$

Câu 44. Chọn **D**

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}\right)dx=\pi\int_0^1\left(5-\frac{4(x+1)e^x}{xe^x+1}\right)dx$$

$$=\pi\left(5x-4\ln(xe^x+1)\right)\Big|_0^1=\pi[5-4\ln(e+1)].$$

Do đó $a-2b=5-2(-4)=13$.

Câu 45. Chọn **B**

Ta có $\int_{-1}^{1}f(-x)dx+2019\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}2^xdx.$

Đặt $t=-x\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(-x)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}f(x)dx.$

Do đó ta có

$$2020\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^{1}\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{3}{4040\ln 2}.$$

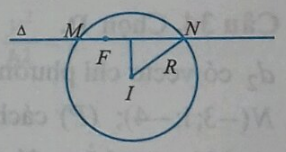
Câu 46. Chọn **C.**

Đường tròn (γ) có tâm $I(0;\ 1)$, bán kính $R=2$.

PT tiếp tuyến Δ là

$$y=y'(1)(x-1)+y(1)=(4-4m)(x-1)+1-m.$$

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4};0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ).



Giả sử Δ cắt (γ) tại M và N. MN nhỏ nhất

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)=IF$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow\vec{u}.\overrightarrow{IF}=0\Leftrightarrow m=\frac{13}{16}\Rightarrow a+b=13+16=29,$$

trong đó $\overrightarrow{IF}=\left(\frac{3}{4};-1\right)$ và $\vec{u}=(1;4-4m)$ là một VTCP của Δ.

Câu 47. Chọn **A.**

Ta có:

$4=4^x+2^y\geq2\sqrt{2^{2x}.2^y}\Leftrightarrow4\geq2^{2x+y}\Leftrightarrow2x+y\leq2.$

$P=2\left[(2x)^3+y^3\right]+16x^2y^2+20xy$

$=2(2x+y)[(2x+y)^2-6xy]+16x^2y^2+20xy$

$\leq4(4-6xy)+16x^2y^2+20xy$

$\Rightarrow P\leq16+2(2xy)^2+4xy(2xy-1)$ (*).

Mà $2xy\leq\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2\leq1$ nên (*) $\Rightarrow P\leq18$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$ và $y=1$.

Vậy GTLN của P bằng 18.

Câu 48. Chọn **D.**

Ta có $6=\int_1^{e^6}\frac{f(\ln\sqrt{x})}{x}dx=2\int_1^{e^6}f(\ln\sqrt{x})d(\ln x)$

$\Rightarrow 6=2\int_0^3 f(x)dx\Rightarrow\int_0^3 f(x)dx=3.$

$2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)\sin 2xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)d(\cos^2 x)\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=2.$

$\int_1^3(f(x)+2)dx=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx+2x\Big|_1^3=3-2+4=5.$

Câu 49. Chọn **C.**

Đặt $u=\log_3(x-3)$, PT đã cho trở thành

$$(m-1)u^2+(m-5)u+m-1=0.\quad(*)$$

PT đã cho có nghiệm trên $\left[\frac{10}{3};6\right]\Leftrightarrow$ PT (*) có nghiệm trên $[-1;1]\Leftrightarrow m=\frac{u^2+5u+1}{u^2+u+1}$ có nghiệm trên $[-1;1]$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{u^2+5u+1}{u^2+u+1}$ trên đoạn $[-1;1]$, từ đó tìm GTNN, GTLN của $f(u)$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là $-3,\frac{7}{3}$. Từ ycbt cho ta $-3\le m\le\frac{7}{3}$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m để PT có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{10}{3};6\right]$.

Câu 50. Chọn **B.**

Ta có $|z_1|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+2)^2=1.$

Đặt $\begin{cases}x-2=\cos t\\y+2=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$. Khi đó

$|z_2|=\sqrt{(2+\cos t)^2+(-2+\sin t)^2}$

$=\sqrt{9+4(\cos t-\sin t)}=\sqrt{9+4\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\le\sqrt{9+4\sqrt{2}}.$

Do đó z_2 có mô đun lớn nhất khi

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{7\pi}{4}\in[0;2\pi]$$

$$z_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i.$$

Vậy phần ảo của số phức cần tìm là $-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH...

(Tiếp theo trang 33)

MỘT SỐ BÀI LUYỆN TẬP

1. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. (*Poland* 1996). Chứng minh rằng nếu $x,y,z\ge\frac{-3}{4}$ và $x+y+z=1$ thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\le\frac{9}{10}$$

3. (*Rusia* 2002). Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$.

4. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{9}{10}.$$

5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

6. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}$.

7. (*Hồng Kông* 1997). Cho 3 số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng $\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\le\frac{3+\sqrt{3}}{9}$.

8. Cho $a,b,c,d>0$ có $ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$.

9. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R.

10. a) Tìm tất cả các giá trị của p sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c>0$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}.$$

b) (*IMO* 2001) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực dương ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{1+\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}+1$ D. $2\sqrt{2}-1$

Câu 2. Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SN bằng

A. $\frac{a}{4}$ B. $\frac{a}{\sqrt{17}}$ C. $\frac{a}{17}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 3. Hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}-3x^2+6x$ đạt giá trị lớn nhất khi x bằng

A. -1 B. 0 C. 1 D. Một giá trị khác

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9+99+...+\overbrace{99...9}^{n}}{10^n}$ bằng

A. 0 B. 1 C. $\frac{10}{9}$ D. $\frac{10}{81}$

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có các góc tại đỉnh O đều bằng 90^0 và $OA=a, OB=b, OC=c$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện. Thể tích của khối tứ diện $GABC$ bằng

A. $\frac{abc}{6}$ B. $\frac{abc}{8}$ C. $\frac{abc}{4}$ D. $\frac{abc}{24}$

Câu 6. Một cuộc họp có sự tham gia của 5 nhà Toán học trong đó có 3 nam và 2 nữ, 6 nhà Vật lý trong đó có 3 nam và 3 nữ và 7 nhà Hóa học trong đó có 4 nam và 3 nữ. Người ta muốn lập một ban thư kí gồm 4 nhà khoa học với yêu cầu phải có đủ cả ba lĩnh vực (Toán, Lý, Hóa) và có cả nam lẫn nữ. Nếu mọi người đều bình đẳng như nhau thì số cách lập một ban thư kí như thế là

A. 1575 B. 1440 C. 1404 D. 171

Câu 7. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ bằng

A. 13051 B. 13050 C. 13049 D. 13048

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(a,b,c)$. Gọi A, B, C theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz), (zOx), (xOy). Trọng tâm của tam giác ABC là

A. $G\left(\frac{-a+b+c}{3},\frac{a-b+c}{3},\frac{a+b-c}{3}\right)$

B. $G\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$

C. $G\left(\frac{2a}{3},\frac{2b}{3},\frac{2c}{3}\right)$

D. $G\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right)$

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3-x\right|+m$ với m là một tham số thực. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 10. Một nhóm học sinh gồm 6 bạn nam và 4 nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. M là một điểm bất kì bên trong tứ diện. Tổng khoảng cách từ M tới các mặt của khối tứ diện là

A. Một đại lượng phụ thuộc vị trí của M B. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 12. Cho $\tan x=m$. Giá trị của $\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^3 x-\cos x}$ bằng

A. 0 B. $\frac{m}{m^2+1}$

C. $\dfrac{m^2-1}{2m^2-m+1}$ D. $\dfrac{m^2+1}{2m^2+m+1}$

Câu 13. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình chóp tứ giác là

A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 14. Cho tứ diện $SABC$ có trọng tâm G. Một mặt phẳng qua G cắt các tia SA, SB và SC theo thứ tự tại A', B' và C'. Đặt $\dfrac{SA'}{SA}=m$, $\dfrac{SB'}{SB}=n$, $\dfrac{SC'}{SC}=p$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng

A. $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}=4$

B. $\dfrac{1}{mn}+\dfrac{1}{np}+\dfrac{1}{pm}=4$

C. $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=4$

D. $m+n+p=4$

Câu 15. Giá trị của tổng

$$1+2^2C_{99}^2+2^4C_{99}^4+\ldots+2^{98}C_{99}^{98}$$

bằng

A. $\dfrac{3^{99}}{2}$ B. $\dfrac{3^{99}+1}{2}$ C. 3^{99} D. $\dfrac{3^{99}-1}{2}$

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 90^0

Câu 17. Bất phương trình

$$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)\le 2$$

có tập nghiệm là

A. $(1,16]$ B. $[16,+\infty)$ C. $(0,16]$ D. $(2,16]$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=1$ và $u_n=u_{n-1}+n$ với mọi $n\ge 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^2}$ bằng

A. 0 B. 1 C. 2 D. $\dfrac{1}{2}$

Câu 19. Cho z là một số phức khác 0. Miền giá trị của $\dfrac{|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|}{|z|}$ là

A. $[2,+\infty)$ B. $[\sqrt{2},2]$ C. $[2,4]$ D. $[2,2\sqrt{2}]$

Câu 20. Hàm số

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\cdots+(x-n)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. $\dfrac{n+1}{2}$ B. $\dfrac{n}{2}$ C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $\dfrac{n-1}{2}$

Câu 21. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{-2}$ là

A. $-11x+5y+7z-1=0$ B. $11x-5y-7z+1=0$

C. $-11x+5y+7z+1=0$ D. $-11x+5y+7z+11=0$

Câu 22. Cho $\log_{27}|a|+\log_9 b^2=5$ và $\log_{27}|b|+\log_9 a^2=7$. Giá trị của $|a|-|b|$ bằng

A. 0 B. 1 C. 27 D. 702

Câu 23. Điều kiện cần và đủ để

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+m^2-9m+4=0$$

là phương trình của một mặt cầu là

A. $m>0$ B. $m<-1$ hoặc $m>10$

C. $-1\le m\le 10$ D. $-1<m<10$

Câu 24. Trên giá sách có 20 cuốn sách. Số cách lấy ra 3 cuốn sách sao cho giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy là

A. C_{16}^3 B. A_{16}^3 C. C_{20}^3 D. A_{20}^3

Câu 25. Một hình lăng trụ có tổng số đỉnh và số cạnh bằng 200 thì có số đỉnh là

A. 100 B. 80 C. 60 D. 40

Câu 26. Giá trị của tổng $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\ldots+\dfrac{1}{i^{2019}}$ (ở đó $i^2=-1$) bằng

A. 0 B. i C. -1 D. i

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Giá trị của $f^{(n)}(0)$ bằng

A. 0 B. 1 C. $\dfrac{n!(1+(-1)^n)}{2}$ D. $\dfrac{-n!(1+(-1)^n)}{2}$

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$$

là

A. một đoạn thẳng

B. một đường thẳng

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 40

Problem. *In an probability experiment, we have two events A and B with* $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}$, *and* $P(A'\cap B')=\frac{3}{5}$. *Find* $P(A\cap B)$.

Solution. We have

$$P(A\cup B)=1-P[(A\cup B)']$$
$$=1-P(A'\cap B')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

Since $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

Therefore $P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{12}-\frac{2}{5}=\frac{11}{60}$.

Remark. A' is the complement of the event A.

TỪ VỰNG

Probability	: xác suất
Experiment	: phép thử
Event	: biến cố
Complement	: phần bù, đối

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Tính* $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}\right)$.

Lời giải. Ta có $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$. Vì vậy

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{n}{2^n}=\left(\frac{2}{2^0}-\frac{3}{2^1}\right)+\left(\frac{3}{2^1}-\frac{4}{2^2}\right)+...+\left(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}\right)=\frac{2}{2^0}-\frac{n+2}{2^n}.$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}\right)=\lim\left(\frac{2}{2^0}-\frac{n+2}{2^n}\right)=2.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Thừa Thiên Huế:** *Huỳnh Lê Phương Hằng, Nguyễn Nhật Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

☞

Câu 43. Kí hiệu M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\cos^5 x$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy cho hai điểm $A(1, a)$ và $B(-a, 2)$. Diện tích tam giác OAB có thể đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 45. Số các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần là

A. A_{10}^5 **B.** C_{10}^5 **C.** $2C_9^5+C_9^4$ **D.** $2C_9^5$

Câu 46. Giả sử $\frac{1+2i}{1-i}$ là một nghiệm (phức) của phương trình $ax^2+bx+c=0$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Thế thì $a+b+c$ nhỏ nhất bằng

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Câu 47. Điều kiện của tham số m để phương trình $8^{\log_3 x}-3x^{\log_3 2}=m$ có nhiều hơn một nghiệm là

A. $m<-2$ **B.** $m>2$

C. $-2<m<0$ **D.** $-2<m<2$

Câu 48. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=x^2$ và $y=2-|x|$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 49. Số các giá trị nguyên dương của k thỏa mãn 2^k có 100 chữ số khi viết trong hệ thập phân là

A. 10 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)....(n^x-1)}{x^{n-1}}$ bằng

A. $\ln(n!)$ **B.** $\ln 2\ln 3...\ln n$

C. $n!$ **D.** $2+3+...+n$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 18. Bài toán. (*Olympic Canada 2002*) *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng:* $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c.$ (*)

Lời giải. ***Cách 1.*** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\ge 3a\ (1);\quad \frac{b^3}{ca}+c+a\ge 3b\ (2);$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\ge 3c\quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\ge 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số, ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a^6b^3c^3}{a^2b^3c^3}}=4a.$$

Tương tự $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4b;$

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+\frac{c^3}{ab}\ge 4c.$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta có:

$$4\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)\ge 4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có: $\frac{a^3}{bc}+\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\ge 3a,$

tương tự

$$\frac{b^3}{ca}+\sqrt{ca}+\sqrt{ca}\ge 3b;\quad \frac{c^3}{ab}+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\ge 3c.$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 3(a+b+c)-2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

$$\ge 3(a+b+c)-(a+b+b+c+c+a)$$

$$=a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 4. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+a\ge 2\frac{a^2}{\sqrt{bc}};\ \frac{b^3}{ca}+b\ge 2\frac{b^2}{\sqrt{ca}};\ \frac{c^3}{ab}+c\ge 2\frac{c^2}{\sqrt{ab}}.$$

Cộng các BĐT lại ta có

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2\left(\frac{a^2}{\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\right)-(a+b+c)$$

$$\ge 2\left(\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\right)-(a+b+c)$$

$$\ge 2\cdot\frac{2(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}-(a+b+c)$$

$$=a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương liên tiếp 2 lần ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}\ge 2.\sqrt{\frac{a^3b^3}{abc^2}}=2\frac{ab}{c}.$$

Tương tự: $\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2.\frac{bc}{a};\ \frac{a^3}{bc}+\frac{c^3}{ab}\ge 2.\frac{ac}{b}.$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c. \qquad (**)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương, ta có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2.\sqrt{\frac{ab.bc}{ca}}=2b.$

Tương tự: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 2c;\ \frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\ge 2a.$

Cộng các bất đẳng thức lại ta có (**) luôn đúng, ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 6. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2$$
$$+2[(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2$$
$$+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 7. Đặt ẩn phụ và biến đổi bất đẳng thức về dạng cơ bản. Đặt $\frac{a}{bc}=x;\frac{b}{ca}=y;\frac{c}{ab}=z$ với $x,y,z>0$. Bất đẳng thức đưa về

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\ge\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ liên tiếp, ta có:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$
$$\ge\sqrt{xy}.\sqrt{yz}+\sqrt{yz}\sqrt{zx}+\sqrt{zx}\sqrt{xy}$$
$$\ge\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

PHÙ DU

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Nhận xét. Ngoài 7 cách giải trên của tác giả *Phù Du*, Tòa soạn còn nhận được một số cách giải tương tự như các cách đã giới thiệu trong bài của tác giả *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh **Quảng Ngãi.** Xin giới thiệu thêm một số cách giải nữa của tác giả *Trương Quang An*.

Cách 8. Áp dụng BĐT Schwarz, ta có

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3abc}.$$

Ta cần chứng minh BĐT

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3abc(a+b+c).$$

Thật vậy

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c).$$

Vậy $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 22 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28.2.2019.

BÀI TOÁN 22. *Trên đường tròn tâm O bán kính R cho 5 điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự đó sao cho $AB=BC=DE=R$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AE. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của chu vi tam giác BMN.*

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 497, T11.2018. Thành thật xin lỗi bạn đọc vì đề bài đã đánh máy nhầm $abc(a+b+c)\le 3$, nhưng đúng ra là như sau

Bài 28 (*Romania 2017*). *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $abc(a+b+c)=3$. *Chứng minh rằng*

$$\left(a^5-2a+4\right)\left(b^5-2b+4\right)\left(c^5-2c+4\right)\ge 9\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có

$$a^5-2a+4-(a^3+2)=a^5-a^3-2a+2$$
$$=(a-1)^2(a^3+2a^2+2a+2)\ge 0,\forall a>0$$
$$\Rightarrow a^5-2a+4\ge a^3+2,\ \forall a>0.$$

Tương tự: $b^5-2b+4\ge b^3+2,\ \forall b>0;$

$c^5-2c+4\ge c^3+2,\ \forall c>0.$

Suy ra: $\left(a^5-2a+4\right)\left(b^5-2b+4\right)\left(c^5-2c+4\right)$

$$\ge (a^3+2)(b^3+2)(c^3+2).\quad (1)$$

Mặt khác theo BĐT Holder ta có:

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$$
$$=(a^3+1^3+1^3)(b^3+1+1)(c^3+1+1)$$
$$\ge (a.1.1+b.1.1+c.1.1)^3=(a+b+c)^3.\quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\left(a^5-2a+4\right)\left(b^5-2b+4\right)\left(c^5-2c+4\right)\ge (a+b+c)^3.\quad (3)$$

Theo BĐT Cauchy và từ BĐT quen thuộc $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$, ta có:

$$(a+b+c)^6=\left[(a+b+c)^2\right]^3$$
$$=[a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)]^3$$
$$\ge 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)$$
$$=27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$$
$$\ge 27(a^2+b^2+c^2).3abc(a+b+c)$$
$$=27(a^2+b^2+c^2).3.3=243(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Rightarrow (a+b+c)^3\ge 9\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.\quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\left(a^5-2a+4\right)\left(b^5-2b+4\right)\left(c^5-2c+4\right)\ge 9\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a-1=b-1-c-1=0 \\ a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Nhận xét. Lời giải trên và ý tưởng của đáp án bài toán là giống nhau. Bạn *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã phát hiện ra nhầm lẫn ở đề bài và đưa ra lời giải đúng. Hơn nữa bạn *Châu* còn đã chứng minh bài toán đúng với cả $abc(a+b+c)\ge 3$. Tuy nhiên trong chứng minh cách tìm BĐT(1) của bạn *Châu* còn dài.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

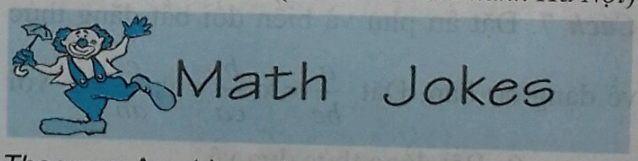
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28.2.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 30. *Cho lục giác đều ABCDEF có cạnh bằng 1. Từ một điểm M nằm trong lục giác vẽ các đoạn thẳng tới các đỉnh lục giác tạo ra 6 tam giác. Chứng minh rằng với mọi điểm M thì 6 tam giác ấy luôn có 2 tam giác có chu vi lớn hơn hoặc bằng 3.*

PHÙNG CHÍ TỰ

(*GV THPT Anhxtanh Hà Nội*)



Theorem: A cat has nine tails.

Proof: No cat has eight tails. Since one cat has one more tail than no cat, it must have nine tails.

****

"*Students nowadays are so clueless*," the math professor complains to a colleague, "*Yesterday, a student came to my office hours and wanted to know if General Calculus was a Roman war hero …*"

GIẢI ĐÁP: PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG !

(*Đề đăng trên TH&TT số 495, tháng 9 năm 2018*)

Phân tích. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Do đó, lời giải của bạn Hương còn thiếu trường hợp cả hai phương trình (1), (2) cùng vô nghiệm (khi đó không nhất thiết các hệ số tương ứng của chúng tỉ lệ).

Lời giải đúng. Hai phương trình

$$x^2-3x-a-2=0 \ (1), \quad x^2+ax+1=0 \ (2)$$

tương đương khi và chỉ khi hai bộ số $(1;-3;-a-2)$ và $(1;a;1)$ tỉ lệ hoặc cả hai phương trình cùng vô nghiệm. Ta xét các trường hợp sau đây.

- TH1: Các hệ số tương ứng của hai phương trình tỉ lệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3=a \\ -a-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=-3.$$

- TH2: Cả hai phương trình cùng vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3)^2-4(-a-2)<0 \\ a^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17+4a<0 \\ a^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\dfrac{17}{4} \\ -2<a<2 \end{cases}$$

(hệ này vô nghiệm). Vậy $a=-3$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải chính xác. Danh sách các bạn là: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Bùi Văn Quyến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Ngọc Hùng*, 10 Toán 2, *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Tôn Nữ Cát Vy, Đỗ Trung Thái, Nguyễn Đình Thông, Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Sóc Trăng:** *Trần Vĩnh Phú*, 11A8, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc Trăng.

KIHIVI

AI ĐÚNG!

Trong phần ôn tập về Tổ hợp - Xác suất có bài toán:

"Thầy Hoàng Ngọc Hiền trao thưởng cho các bạn học sinh lớp 11A15 đạt kết quả cao trong kì thi Kiểm tra chất lượng lần 1, phần thưởng gồm 7 quyển sách môn Toán giống nhau, 8 quyển sách môn Vật lí giống nhau, 9 quyển sách môn Hóa học giống nhau. Số học sinh được nhận thưởng là 12 bạn, trong đó có bạn Hùng và bạn Hậu, mỗi bạn được nhận ngẫu nhiên đúng 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách trao thưởng cho các bạn học sinh sao cho Hùng và Hậu nhận được phần thưởng giống nhau?"

Bạn *Hạnh* và *Phúc* có lời giải đầu tiên cho bài toán này.

Lời giải của bạn Hạnh: Số phần thưởng là 12, mỗi phần thưởng gồm 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Gọi x là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí, y là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học, z là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Ta có $x+y+z=12, x+y=7, x+z=8, y+z=9$. Tính được $x=3, y=4, z=5$. Có C_3^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí; có C_4^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học; có C_5^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Vậy có $C_3^2+C_4^2+C_5^2=19$ cách trao thưởng sao cho *Hùng* và *Hậu* nhận được phần thưởng giống nhau.

Lời giải của bạn Phúc: Số phần thưởng là 12, mỗi phần thưởng gồm 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Gọi x là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí, y là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học, z là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Ta có $x+y+z=12, x+y=7, x+z=8, y+z=9$. Tính được $x=3, y=4, z=5$. Ta xét 3 trường hợp sau đây.

- Có C_3^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí. Có $\dfrac{10!}{4!.5!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại.
- Có C_4^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học. Có $\dfrac{10!}{3!.2!.5!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại.
- Có C_5^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Có $\dfrac{10!}{3!.4!.3!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại.

Vậy có $C_3^2.\dfrac{10!}{4!.5!}+C_4^2.\dfrac{10!}{3!.2!.5!}+C_5^2.\dfrac{10!}{3!.4!.3!}=60900$ cách trao thưởng sao cho *Hùng* và *Hậu* nhận được phần thưởng giống nhau.

Theo bạn, lời giải của bạn nào đúng? Lời giải của bạn thế nào!

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 499 (1.2019)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

NGÀY XUÂN NÓI CHUYỆN ĐỐI ĐÁP THƠ TÀI HOA, HÓM HỈNH

Chuyện kể rằng: Một lần *Hồ Xuân Hương* hỏi vay *Chiêu Hổ* 5 quan tiền. *Chiêu Hổ* nhận lời. Nhưng sau đó chỉ gửi *Hồ Xuân Hương* 1800 đồng (3 quan tiền). *Hồ Xuân Hương* liền làm một bài thơ để trách *Chiêu Hổ* về thói "quậy" không giữ lời hứa:

Sao nói rằng năm lại có ba ?

Trách người quân tử hẹn sai ra !

Bao giờ thong thả lên chơi nguyệt

Nhớ hái cho xin nắm lá đa !

Xuân Hương "*... xin nắm lá đa*" là ý nói: *Chiêu Hổ* nói sai, khi lên nhà *Xuân Hương* sẽ lấy lá lót tay dắt ra, không tiếp. Nhưng vì có chú ý từ trước để nhằm vào sơ hở của "*Bà chúa thơ nôm*" (Nhà thơ *Xuân Diệu* đặt), đã không cụ thể khi hỏi vay nên *Chiêu Hổ* hóm hỉnh có bài thơ họa lại:

Rằng giám thì năm lại có ba!

Bởi người thục nữ tính không ra !

Ừ rồi thong thả lên chơi nguyệt

Cho cả cành đa lẫn củ đa !

Chiêu Hổ rất tài tình dùng hình ảnh của cây đa, mà chính Xuân hương đã dùng trong bài thơ và dùng thật bỡn cợt hóm hỉnh độc nhất vô nhị. Theo *Lê Quý Đôn* viết trong "*Vân đài loại ngữ*" thì tiền tệ nước ta lúc đó tính là: Mỗi tiền có 36 đồng, gọi là "sử tiền", mỗi tiền có 60 đồng, gọi là "cổ tiền". "Sử tiền" còn có tên riêng gọi là "tiền quý". Như vậy khi hỏi vay *Chiêu Hổ* 5 quan, *Hồ Xuân Hương* đã không nói rõ vay 5 quan "tiền quý". Còn *Chiêu Hổ*, thừa hiểu *Xuân Hương* hỏi vay 5 quan "tiền quý", nhưng cố tình đưa cho vay 5 quan "tiền giám", tức 5 quan = 50 (tiền) x 36 đồng = 1800 đồng; tính ra " tiền quý" là 600 đồng (1 quan) thì chỉ có 3 quan, để "chọc" *Hồ Xuân Hương*. Và vì vậy, mới có được bài thơ nôm có ý "nỡm" rất hóm, rất vui, rất hay, và nổi tiếng từ đó đến nay, bài thơ

làm người đọc mê say, nhớ mãi về ông cha ta đã sáng tạo ra những đồng tiền, và cũng rắc rối nếu không giỏi tính toán.

NGUYỄN TIẾN BÌNH *(Hà Nội)*

GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T11.2018

TÍNH NHIỆT ĐỘ

Bạn A: Theo dự báo thời tiết thì gió mùa đã bắt đầu suy yếu nên nhiệt độ ngày mai sẽ tăng gấp đôi ngày hôm nay.

Bạn B: Trưa hôm nay nhiệt độ là 3^0 C (độ Celsius) thì trưa ngày mai sẽ là mấy độ ?

Bạn A: Dễ ợt, trưa ngày mai nhiệt độ là 6^0 C.

Bạn B: Thế tối hôm nay nhiệt độ là 0^0 C (độ Celsius) thì tối ngày mai sẽ là mấy độ ?

Bạn A: ...

Hãy giúp bạn A trả lời và phân tích câu trả lời.

Lời giải. Câu trả lời là: Tối ngày mai nhiệt độ chắc chắn sẽ là trên 0^0 C (độ Celsius).

Phân tích:

• Do gió mùa đã bắt đầu suy yếu nên nhiệt độ tối mai sẽ tăng lên so với tối nay nên nhiệt độ tối mai là trên 0^0 C. Ta không thể lấy kết quả của phép nhân $2.0 = 0^0$ (độ C), đó là do đã đặt nhiệt độ ở mức độ 0 độ C.

Nếu đặt nhiệt độ khi nước bắt đầu đóng băng là a độ với $a > 0$ vào tối nay thì tính được nhiệt độ tối mai là $2.a$ độ. Chẳng hạn, nếu ta lập thang nhiệt độ mới bằng cách đặt nhiệt độ khi nước bắt đầu đóng băng là 2^0 (hoặc $1,5^0$) thì theo thang nhiệt độ này, nhiệt độ tối mai là 4^0 (hoặc 3^0).

Nếu vào tối nay nhiệt độ là 32^0 F (độ Fahrenheit với 0^0 C = 32^0 F) thì nhiệt độ tối mai là 64^0 F, tức là hơn 17^0 C một chút. *Ghi chú*: Công thức đổi nhiệt độ giữa độ Celsius và độ Fahrenheit như sau: x^0 C = y^0 F khi và chỉ khi $9x = 5(y - 32)$.

• Khi nói về việc tăng, giảm nhiệt độ người ta thường dùng tăng theo

nghĩa công [illegible] làm đi [illegible]

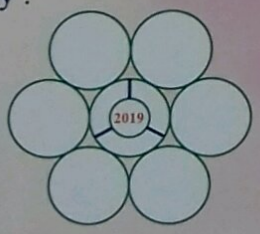
"nhiệt độ ngày mai sẽ *tăng gấp đôi* ngày hôm nay", vì việc "tăng gấp đôi" thường dùng để tính toán mà không phản ánh đúng sự tăng, giảm nhiệt độ thực tế.

Hoan nghênh bạn *Nguyễn Văn Bản*, GV Trường THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên** đã có câu trả lời đúng.

VĂN KHANH *(Hà Nội)*

ĐỐ VUI CHÀO NĂM MỚI 2019

Chào đón năm mới 2019, bạn *Kỳ* đố bạn *Hợi* điền 6 số tự nhiên phân biệt nhỏ hơn 340 vào sáu vòng tròn phía ngoài và 3 số tự nhiên vào ba phần của hình vành khăn của một hình hoa (hình vẽ) sao cho chúng có các tính chất sau đây :



1) tổng sáu số trong các vòng tròn bằng tổng ba số ở hình vành khăn và bằng 2019,

2) tổng hai số trong hai vòng tròn kề nhau bằng số nằm trong hình vành khăn nếu hình vành khăn có cung tròn tiếp xúc với hai vòng tròn đó, và tổng hai số này bằng tổng hai số trong hai vòng tròn kề nhau khác nhưng không kề với hai vòng tròn ban đầu.

Bạn hãy nhanh chóng giúp bạn *Hợi* điền số để cùng đón năm mới nhé, chú ý rằng nếu từ một cách điền số ta quay 120^0 quanh tâm của hình tròn trung tâm cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ mà trùng với một cách điền số khác thì hai cách điền số đó được coi là một nghiệm.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TP. ĐÀ NẴNG
Địa chỉ: 771 Nguyễn Hữu Thọ, P. Khuê Trung, Q. Cẩm Lệ, TP. Đà Nẵng
Điện thoại: (0236).3787877 - Fax: (0236).3787368

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT1M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{1+\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}+1$ **D.** $2\sqrt{2}-1$

Câu 2. Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SN bằng

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{17}}$ **C.** $\frac{a}{17}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Câu 3. Hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}-3x^2+6x$ đạt giá trị lớn nhất khi x bằng

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** Một giá trị khác

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9+99+...+\overbrace{99...9}^{n}}{10^n}$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{10}{9}$ **D.** $\frac{10}{81}$

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có các góc tại đỉnh O đều bằng 90^0 và $OA=a, OB=b, OC=c$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện. Thể tích của khối tứ diện $GABC$ bằng

A. $\frac{abc}{6}$ **B.** $\frac{abc}{8}$ **C.** $\frac{abc}{4}$ **D.** $\frac{abc}{24}$

Câu 6. Một cuộc họp có sự tham gia của 5 nhà Toán học trong đó có 3 nam và 2 nữ, 6 nhà Vật lý trong đó có 3 nam và 3 nữ và 7 nhà Hóa học trong đó có 4 nam và 3 nữ. Người ta muốn lập một ban thư kí gồm 4 nhà khoa học với yêu cầu phải có đủ cả ba lĩnh vực (Toán, Lý, Hóa) và có cả nam lẫn nữ. Nếu mọi người đều bình đẳng như nhau thì số cách lập một ban thư kí như thế là

A. 1575 **B.** 1440 **C.** 1404 **D.** 171

Câu 7. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ bằng

A. 13051 **B.** 13050 **C.** 13049 **D.** 13048

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(a,b,c)$. Gọi A, B, C theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz), (zOx), (xOy). Trọng tâm của tam giác ABC là

A. $G\left(\frac{-a+b+c}{3},\frac{a-b+c}{3},\frac{a+b-c}{3}\right)$

B. $G\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$

C. $G\left(\frac{2a}{3},\frac{2b}{3},\frac{2c}{3}\right)$

D. $G\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right)$

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3-x\right|+m$ với m là một tham số thực. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 10. Một nhóm học sinh gồm 6 bạn nam và 4 nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. M là một điểm bất kì bên trong tứ diện. Tổng khoảng cách từ M tới các mặt của khối tứ diện là

A. Một đại lượng phụ thuộc vị trí của M **B.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 12. Cho $\tan x=m$. Giá trị của $\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^3 x-\cos x}$ bằng

A. 0 **B.** $\frac{m}{m^2+1}$

C. $\dfrac{m^2-1}{2m^2-m+1}$ D. $\dfrac{m^2+1}{2m^2+m+1}$

Câu 13. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình chóp tứ giác là

A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 14. Cho tứ diện $SABC$ có trọng tâm G. Một mặt phẳng qua G cắt các tia SA, SB và SC theo thứ tự tại A', B' và C'. Đặt $\dfrac{SA'}{SA}=m$, $\dfrac{SB'}{SB}=n$, $\dfrac{SC'}{SC}=p$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng

A. $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}=4$

B. $\dfrac{1}{mn}+\dfrac{1}{np}+\dfrac{1}{pm}=4$

C. $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=4$

D. $m+n+p=4$

Câu 15. Giá trị của tổng

$$1+2^2C_{99}^2+2^4C_{99}^4+\ldots+2^{98}C_{99}^{98}$$

bằng

A. $\dfrac{3^{99}}{2}$ B. $\dfrac{3^{99}+1}{2}$ C. 3^{99} D. $\dfrac{3^{99}-1}{2}$

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 90^0

Câu 17. Bất phương trình

$$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)\le 2$$

có tập nghiệm là

A. $(1,16]$ B. $[16,+\infty)$ C. $(0,16]$ D. $(2,16]$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=1$ và $u_n=u_{n-1}+n$ với mọi $n\ge 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^2}$ bằng

A. 0 B. 1 C. 2 D. $\dfrac{1}{2}$

Câu 19. Cho z là một số phức khác 0. Miền giá trị của $\dfrac{\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|}{|z|}$ là

A. $[2,+\infty)$ B. $[\sqrt{2},2]$ C. $[2,4]$ D. $[2,2\sqrt{2}]$

Câu 20. Hàm số

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\cdots+(x-n)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. $\dfrac{n+1}{2}$ B. $\dfrac{n}{2}$ C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $\dfrac{n-1}{2}$

Câu 21. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{-2}$ là

A. $-11x+5y+7z-1=0$ B. $11x-5y-7z+1=0$

C. $-11x+5y+7z+1=0$ D. $-11x+5y+7z+11=0$

Câu 22. Cho $\log_{27}|a|+\log_9 b^2=5$ và $\log_{27}|b|+\log_9 a^2=7$. Giá trị của $|a|-|b|$ bằng

A. 0 B. 1 C. 27 D. 702

Câu 23. Điều kiện cần và đủ để

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+m^2-9m+4=0$$

là phương trình của một mặt cầu là

A. $m>0$ B. $m<-1$ hoặc $m>10$

C. $-1\le m\le 10$ D. $-1<m<10$

Câu 24. Trên giá sách có 20 cuốn sách. Số cách lấy ra 3 cuốn sách sao cho giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy là

A. C_{16}^3 B. A_{16}^3 C. C_{20}^3 D. A_{20}^3

Câu 25. Một hình lăng trụ có tổng số đỉnh và số cạnh bằng 200 thì có số đỉnh là

A. 100 B. 80 C. 60 D. 40

Câu 26. Giá trị của tổng $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\ldots+\dfrac{1}{i^{2019}}$ (ở đó $i^2=-1$) bằng

A. 0 B. i C. -1 D. i

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Giá trị của $f^{(n)}(0)$ bằng

A. 0 B. 1 C. $\dfrac{n!(1+(-1)^n)}{2}$ D. $\dfrac{-n!(1+(-1)^n)}{2}$

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$$

là

A. một đoạn thẳng

B. một đường thẳng

C. một đường tròn

D. một elip

Câu 29. Số $a > 0$ thỏa mãn $\int_a^2 \frac{1}{x^3+x}dx = \ln 2$ là

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{4}$

Câu 30. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2+(4-2m)x-6}{2(x+9)}$ cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất khi m bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1

Câu 31. Thể tích khối trụ nội tiếp một mặt cầu có bán kính R không đổi có thể đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}R^3$ B. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}R^3$

C. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3$ D. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3$

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$. Giá trị của

$$f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{99}{100}\right)$$

bằng

A. 49 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{99}{2}$ D. 50

Câu 33. Gieo một con súc sắc năm lần liên tiếp. Xác suất để tích các số chấm xuất hiện ở năm lần gieo đó là một số tự nhiên có tận cùng bằng 5 là

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{211}{7776}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{486}$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho hai điểm $A(3, 2, 1)$ và $B(-1, 4, -3)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (xOy) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất là

A. $M(-5, 1, 0)$ B. $M(5, 1, 0)$

C. $M(5, -1, 0)$ D. $M(-5, -1, 0)$

Câu 35. Hình vuông nội tiếp elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ thì có diện tích bằng

A. $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ B. $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

C. a^2+b^2 D. $|ab|$

Câu 36. Cho $\tan x - \tan y = 10$ và $\cot x - \cot y = 5$. Giá trị của $\tan(x-y)$ là

A. 10 B. -10 C. $-\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{10}$

Câu 37. Giá trị của tổng $C_9^9 + C_{10}^9 + ... + C_{99}^9$ bằng

A. C_{100}^9 B. C_{99}^{10} C. C_{100}^{10} D. 2^{99}

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $A(0, -1, 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình của (P) là

A. $y-2z+5=0$ B. $-y+2z+5=0$

C. $y-2z-5=0$ D. $x-y+2z-5=0$

Câu 39. Số mặt đối xứng của một hình chóp tứ giác đều là

A. 0 B. 1. C. 2 D. 4

Câu 40. Một túi đựng 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 tới 20. Rút ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Xác suất để tích của hai số ghi trên hai tấm thẻ rút được là một số chia hết cho 4 bằng

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 41. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $\widehat{BSC}=120^0$, $\widehat{CSA}=90^0$, $\widehat{ASB}=60^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Độ dài đoạn SG bằng

A. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$

B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-bc}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-ca}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-bc}$

Câu 42. Kí hiệu M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2+\sqrt{4-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{25}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. $\frac{15}{4}$

☞

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 40

Problem. *In an probability experiment, we have two events A and B with* $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}$, *and* $P(A'\cap B')=\frac{3}{5}$. *Find* $P(A\cap B)$.

Solution. We have

$$P(A\cup B)=1-P[(A\cup B)']$$
$$=1-P(A'\cap B')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

Since $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

Therefore $P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{12}-\frac{2}{5}=\frac{11}{60}$.

Remark. A' is the complement of the event A.

TỪ VỰNG

Probability	: xác suất
Experiment	: phép thử
Event	: biến cố
Complement	: phần bù, đối

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 37

Bài toán. *Tính* $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}\right)$.

Lời giải. Ta có $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$. Vì vậy

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{n}{2^n}=\left(\frac{2}{2^0}-\frac{3}{2^1}\right)+\left(\frac{3}{2^1}-\frac{4}{2^2}\right)+...+\left(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}\right)=\frac{2}{2^0}-\frac{n+2}{2^n}.$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}\right)=\lim\left(\frac{2}{2^0}-\frac{n+2}{2^n}\right)=2.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Thừa Thiên Huế:** *Huỳnh Lê Phương Hằng, Nguyễn Nhật Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

☞

Câu 43. Kí hiệu M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x+\cos^5 x$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy cho hai điểm $A(1, a)$ và $B(-a, 2)$. Diện tích tam giác OAB có thể đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 45. Số các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần là

A. A_{10}^5 **B.** C_{10}^5 **C.** $2C_9^5+C_9^4$ **D.** $2C_9^5$

Câu 46. Giả sử $\frac{1+2i}{1-i}$ là một nghiệm (phức) của phương trình $ax^2+bx+c=0$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Thế thì $a+b+c$ nhỏ nhất bằng

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Câu 47. Điều kiện của tham số m để phương trình $8^{\log_3 x}-3x^{\log_3 2}=m$ có nhiều hơn một nghiệm là

A. $m<-2$ **B.** $m>2$

C. $-2<m<0$ **D.** $-2<m<2$

Câu 48. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=x^2$ và $y=2-|x|$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 49. Số các giá trị nguyên dương của k thỏa mãn 2^k có 100 chữ số khi viết trong hệ thập phân là

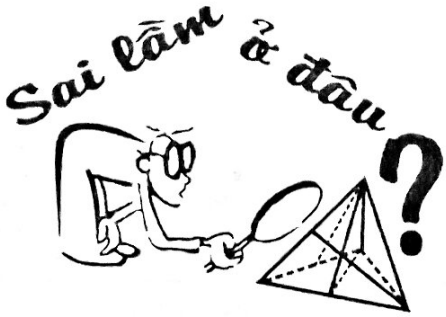
A. 10 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)....(n^x-1)}{x^{n-1}}$ bằng

A. $\ln(n!)$ **B.** $\ln 2\ln 3...\ln n$

C. $n!$ **D.** $2+3+...+n$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG !

(*Đề đăng trên TH&TT số* 495, *tháng* 9 *năm* 2018)

Phân tích. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Do đó, lời giải của bạn Hương còn thiếu trường hợp cả hai phương trình (1), (2) cùng vô nghiệm (khi đó không nhất thiết các hệ số tương ứng của chúng tỉ lệ).

Lời giải đúng. Hai phương trình

$$x^2-3x-a-2=0 \ (1), \quad x^2+ax+1=0 \ (2)$$

tương đương khi và chỉ khi hai bộ số $(1;-3;-a-2)$ và $(1;a;1)$ tỉ lệ hoặc cả hai phương trình cùng vô nghiệm. Ta xét các trường hợp sau đây.

• TH1: Các hệ số tương ứng của hai phương trình tỉ lệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3=a \\ -a-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=-3.$$

• TH2: Cả hai phương trình cùng vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3)^2-4(-a-2)<0 \\ a^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17+4a<0 \\ a^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\dfrac{17}{4} \\ -2<a<2 \end{cases}$$

(hệ này vô nghiệm). Vậy $a=-3$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải chính xác. Danh sách các bạn là: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Bùi Văn Quyến*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Ngọc Hùng*, 10 Toán 2, *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Tôn Nữ Cát Vy, Đỗ Trung Thái, Nguyễn Đình Thông, Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Sóc Trăng:** *Trần Vĩnh Phú*, 11A8, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc Trăng.

KIHIVI

AI ĐÚNG!

Trong phần ôn tập về Tổ hợp - Xác suất có bài toán:

"Thầy Hoàng Ngọc Hiền trao thưởng cho các bạn học sinh lớp 11A15 *đạt kết quả cao trong kì thi Kiểm tra chất lượng lần* 1, *phần thưởng gồm* 7 *quyển sách môn Toán giống nhau,* 8 *quyển sách môn Vật lí giống nhau,* 9 *quyển sách môn Hóa học giống nhau. Số học sinh được nhận thưởng là* 12 *bạn, trong đó có bạn Hùng và bạn Hậu, mỗi bạn được nhận ngẫu nhiên đúng* 2 *quyển sách thuộc* 2 *môn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách trao thưởng cho các bạn học sinh sao cho Hùng và Hậu nhận được phần thưởng giống nhau?"*

Bạn *Hạnh* và *Phúc* có lời giải đầu tiên cho bài toán này.

Lời giải của bạn Hạnh: Số phần thưởng là 12, mỗi phần thưởng gồm 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Gọi x là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí, y là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học, z là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Ta có $x+y+z=12, x+y=7, x+z=8, y+z=9$. Tính được $x=3, y=4, z=5$. Có C_3^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí; có C_4^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học; có C_5^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Vậy có $C_3^2+C_4^2+C_5^2=19$ cách trao thưởng sao cho *Hùng* và *Hậu* nhận được phần thưởng giống nhau.

Lời giải của bạn Phúc: Số phần thưởng là 12, mỗi phần thưởng gồm 2 quyển sách thuộc 2 môn khác nhau. Gọi x là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí, y là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học, z là số phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Ta có $x+y+z=12, x+y=7, x+z=8, y+z=9$. Tính được $x=3, y=4, z=5$. Ta xét 3 trường hợp sau đây.

- Có C_3^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Vật lí. Có $\dfrac{10!}{4!.5!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại.

- Có C_4^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Toán và 1 quyển sách môn Hóa học. Có $\dfrac{10!}{3!.2!.5!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại.

- Có C_5^2 cách trao cho *Hùng* và *Hậu* phần thưởng gồm 1 quyển sách môn Vật lí và 1 quyển sách môn Hóa học. Có $\dfrac{10!}{3!.4!.3!}$ cách trao 10 phần thưởng còn lại cho 10 bạn còn lại. Vậy có $C_3^2.\dfrac{10!}{4!.5!}+C_4^2.\dfrac{10!}{3!.2!.5!}+C_5^2.\dfrac{10!}{3!.4!.3!}=60900$ cách trao thưởng sao cho *Hùng* và *Hậu* nhận được phần thưởng giống nhau.

Theo bạn, lời giải của bạn nào đúng? Lời giải của bạn thế nào!

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

TRỊNH BA

(GV THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh)

Phương pháp hệ số bất định dùng để giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khá hiệu quả. Đặc biệt là dành cho các học sinh chưa học đạo hàm, chưa có công cụ mạnh để khảo sát sự biến thiên của hàm số, chưa biết các phương pháp tiếp tuyến, hàm lồi, ... để đánh giá hàm đại diện thì hệ số bất định là phương pháp khá đơn giản để tiếp cận bài toán, ngay cả với các em học sinh trung học cơ sở. Bài viết trình bày 2 cách tiếp cận:

• Thứ nhất là tìm hệ số bất định dựa vào dự đoán dấu đẳng thức xảy ra kết hợp với việc tách nhân tử, bằng phương pháp biến đổi tương đương, đưa về bất đẳng thức đúng (các dạng bình phương); Ở đây, tác giả vận dụng sơ đồ Hoone để tách nhân tử được tiện lợi.

• Thứ hai là tìm hệ số bất định trong việc áp dụng các bất đẳng thức thông dụng như BĐT trung bình cộng - trung bình nhân (BĐT Cauchy), BĐT Schwarz, ... thông qua việc phân tích, xử lí dấu "=" xảy ra ... Từ đó có sự thêm bớt, tách ghép các số hạng một cách phù hợp để đi đến lời giải đúng.

1. Sử dụng hệ số bất định để tìm bất đẳng thức đúng.

Ý tưởng. Dùng hệ số bất định, kết hợp với biến đổi tương đương (đưa về bình phương đúng), thông qua sơ đồ Hoocne để tìm một bất đẳng thức đúng dùng để đánh giá biểu thức đại diện và giả thiết của bài toán.

Nhắc lại sơ đồ Hoocne (Horner 1786 – 1837) để tính các hệ số của đa thức thương và dư của phép chia

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \text{ cho } (x-a)$$

như sau:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
a	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	....	b_1	b_0

trong đó:
$$b_n=a_n$$
$$b_{n-1}=a.b_n+a_{n-1}$$
$$b_{n-2}=a.b_{n-1}+a_{n-2}$$
$$...$$
$$b_0=a.b_1+a_0.$$

Khi đó: $f(x)=(x-a).g(x)+r$, với thương là $g(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+...+b_1$, và dư là $r=b_0$.

Nếu $x=a$ là một nghiệm của $f(x)$ thì $r=b_0=0$.

Thí dụ 1. (Trích đề thi HOMC 2015). *Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2\le 12$. Xác định GTLN của biểu thức*

$$M=4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4).$$

Lời giải. Ta có $x^2(x-2)^2\ge 0$ với mọi số thực x. Bất đẳng thức này được viết lại $4x^3-x^4\le 4x^2$. Suy ra : $(4a^3-a^4)+(4b^3-b^4)+(4c^3-c^4)+(4d^3-d^4)$
$$\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)=48.$$

Đẳng thức xảy ra khi
$(a,b,c,d)\in\{(2,2,2,0),(2,2,0,2),(2,0,2,2),(0,2,2,2)\}$.

Do đó $\max M=48$.

Bình luận. Trong bài toán trên, ta thấy mấu chốt của lời giải là xuất phát từ bất đẳng thức đúng $x^2(x-2)^2\ge 0$, với mọi số thực x. Tại sao lại tìm ra bất đẳng thức đó? Ta thấy M có dạng $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$ với $f(x)=4x^3-x^4$. Trong khi giả thiết lại cho $a^2+b^2+c^2+d^2\le 12$. Như vậy nếu ta muốn tìm $\max M$ thì ta cần đánh giá $f(x)$ theo kx^2, với k là hệ số phù hợp cần tìm. Nếu để ý ta có thể viết lại

$$f(x)=4x^3-x^4=-(x^4-4x^3)$$
$$=-(x^4-4x^3+4x^2)+4x^2\le 4x^2,$$

tức là $k=4$ là giá trị của hệ số bất định k mà ta muốn tìm. Ở trên, nhờ công thức $f(x)$ gần với khai triển của một bình phương tổng nên ta dễ dàng thêm bớt số hạng cần thiết. Một cách cụ thể hơn, ta cần tìm số thực k sao cho $4a^3-a^4\le ka^2,\forall a\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2-4a+k)\ge 0,\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow k=4.$$

Thực ra bất đẳng thức này đúng với mọi số thực $k\ge 4$ nhưng ta chọn $k=4$ để đảm bảo dấu "=" xảy ra.

Thí dụ 2. (Trích đề thi HOMC 2014). *Cho* $a_1, a_2, ..., a_9 \geq -1$ *và* $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$. *Xác định GTLN của biểu thức* $M = a_1 + a_2 + ... + a_9$.

Lời giải. Với $a \geq -1$, ta có $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Suy ra $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1$.

Do đó

$$3(a_1 + a_2 + ... + a_9) \leq 4(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3) + 9 = 9.$$

Vậy $M \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi

$$a_1, a_2, ..., a_9 \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Ví dụ, ta chọn $a_1 = -1, a_2 = a_3 = ... = a_9 = \frac{1}{2}$, thì $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$ và $M = a_1 + a_2 + ... + a_9 = 3$. Do đó $\max M = 3$.

Bình luận. Lời giải trên xuất phát từ một bất đẳng thức đúng là $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, từ đó suy ra đánh giá $3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1$. Vậy làm sao tìm được bất đẳng thức này? Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a_1 + a_2 + ... + a_9$, với điều kiện của giả thiết là $a_1, a_2, ..., a_9 \geq -1$ và $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_9^3 = 0$ thì ta phải tìm một đánh giá có dạng $a \leq ma^3 + n$, với m, n là hằng số phù hợp, sau đó lần lượt thay a bằng các số $a_i, i = \overline{1,9}$ và cộng các bất đẳng thức đó lại với nhau. Vấn đề là tìm hệ số m, n như thế nào? Ta cần tìm số m, n sao cho

$$a \leq ma^3 + n \Leftrightarrow ma^3 - a + n \geq 0, \forall a \geq -1. \quad (1)$$

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = -1$, có nghĩa $a = -1$ là một nghiệm của vế trái, hay $f(-1) = 0$, với $f(a) = ma^3 - a + n$. Ta dùng sơ đồ Hoocne để tính $f(a)$ và để phân tích vế trái thành nhân tử như sau:

	m	0	-1	n
-1	m	$-m$	$m-1$	$-m+n+1$

Từ đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (a+1)(ma^2 - ma + m - 1) \geq 0, \forall a \geq -1$$

$$\Rightarrow m(a+1)\left(a^2 - a + \frac{m-1}{m}\right) \geq 0, \forall a \geq -1. \quad (2)$$

Muốn có bất đẳng thức cuối luôn đúng ta cần tìm số m dương sao cho

$$\begin{cases} \frac{m-1}{m} = \frac{1}{4} \\ -m + n + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức cần tìm là

$$a \leq \frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a \leq 4a^3 + 1, \forall a \geq -1.$$

Bất đẳng thức này đúng vì nó tương đương với $(a+1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ (nhờ ta phân tích ở (2)).

Thí dụ 3. *Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Phân tích. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3$, với $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Ta cần đánh giá $f(x)$ với $mx^2 + n$. Cụ thể là tìm hai hằng số m, n sao cho $f(x) \geq mx^2 + n$. Hay

$$\frac{1}{2-x} \geq mx^2 + n \Leftrightarrow 1 \geq (2-x)(mx^2 + n)$$

$$(\text{vì } a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a, b, c < 2)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2mx^2 + 2n - mx^3 - nx$$

$$\Leftrightarrow mx^3 - 2mx^2 + nx - 2n + 1 \geq 0.$$

Ta thấy, dấu "=" ở bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra khi $a = b = c = 1$, nên ta dự đoán dấu bằng ở bất đẳng thức cuối xảy ra khi $x = 1$. Và để tìm 2 số m, n sao cho bất đẳng thức cuối đúng, ta cần biến đổi bất đẳng thức đó tương đương $(x-1)^2(px+q) \geq 0$. Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích thành nhân tử như sau:

	m	$-2m$	n	$-2n+1$
1	m	$-m$	$n-m$	$-m-n+1$
1	m	0	$n-m$	$-2m+1$

Ta cần có:

$$\begin{cases} -m - n + 1 = 0 \\ 1 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $(x-1)^2 . \frac{1}{2}x \geq 0$, đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{2-x} \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, với mọi x thỏa mãn $0 < x < 2$. (*)

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương $(x-1)^2.x \geq 0$, đúng với mọi x thỏa mãn $0 < x < 2$. Do a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên $0 < a,b,c \leq \sqrt{3} < 2$.

Áp dụng (*) cho a,b,c ta có:

$$\frac{1}{2-a} \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2-b} \geq \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2-c} \geq \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) và thay $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho a,b,c là 3 số thực thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức*

$$P = \sqrt{2+x^4} + \sqrt{2+y^4} + \sqrt{2+z^4}.$$

Phân tích. Ta cần tìm hai hệ số m,n sao cho

$$\sqrt{2+x^4} \geq mx + n, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Nếu $mx + n < 0$ thì BĐT (1) hiển nhiên đúng.

Nếu $mx + n \geq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 2 + x^4 \geq (mx+n)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - m^2x^2 - 2mnx + 2 - n^2 \geq 0.$$

Ta cần phân tích

$$x^4 - m^2x^2 - 2mnx + 2 - n^2 = (x-1)^2\left(\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\geq 0}\right).$$

Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích nhân tử ta được:

	1	0	$-m^2$	$-2mn$	$2-n^2$
1	1	1	$1-m^2$	$1-m^2-2mn$	$3-m^2-n^2-2mn$
1	1	2	$3-m^2$	$4-2m^2-2mn$	

Ta cần có

$$\begin{cases} 3 - m^2 - n^2 - 2mn = 0 \\ 4 - 2m^2 - 2mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+n)^2 = 3 \\ m^2 + mn = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n = \pm\sqrt{3} \\ m(m+n) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} n = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ m = \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Chọn $(m;n) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Khi đó ta được bất đẳng thức $\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2 + 2x + \frac{5}{3}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Thật vậy, nếu $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng.

Nếu $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$ thì

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2 + 2x + \frac{5}{3}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy (2) được chứng minh.

Áp dụng (2) với x, y, z ta có:

$$\sqrt{2+x^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

$$\sqrt{2+y^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall y \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

$$\sqrt{2+z^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall z \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều (3), (4), (5) ta được

$$P = \sqrt{2+x^4} + \sqrt{2+y^4} + \sqrt{2+z^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.3 + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Vậy $\min P = 3\sqrt{3}$ khi $x = y = z = 1$.

Sau đây ta xét 2 thí dụ về bài toán không có điều kiện ràng buộc cho các biến như các thí dụ trên. Nhưng nếu biểu thức cho trong đề bài có tính thuần nhất thì ta có thể đặt ra điều kiện ràng buộc như các bài toán trên.

Cho biểu thức $f(a,b,c)$ thỏa mãn tính chất $f(ta,tb,tc) = t^\alpha f(a,b,c), \forall t \in \mathbb{R}$ thì ta nói f có tính thuần nhất. Khi đó, không mất tổng quát ta chỉ cần xét bài toán thỏa mãn điều kiện $a + b + c = k$ hay $abc = k$.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta có bất đẳng thức*

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2}\le 8.$$

Phân tích. Đây là bất đẳng thức thuần nhất theo 3 biến số a, b, c nên không mất tổng quát ta giả sử $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le 8.$$

Vế trái của bất đẳng thức có dạng:

$$f(a)+f(b)+f(c),\ \text{với}\ f(x)=\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}.$$

Như vậy ta cần đánh giá

$$f(x)=\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le mx+n,$$

với m,n là 2 hệ số thích hợp. Chú ý rằng ta chỉ cần chứng minh bất này đúng với mọi số thực x thỏa mãn $0\le x\le 3$ và dự đoán dấu "=" xảy ra tại $x=1$.

Khi đó $f(x)=\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le mx+n$

$\Leftrightarrow (3+x)^2\le (mx+n)(3x^2-6x+9)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9\le 3mx^3-6mx^2+9mx+3nx^2-6nx+9n$

$\Leftrightarrow 3mx^3+(-6m+3n-1)x^2+(9m-6n-6)x+9n-9\ge 0.$

Ta cần phân tích vế trái ở dạng $(x-1)^2(px+q)\ge 0$ và chứng minh bất đẳng thức này luôn đúng với mọi x thỏa mãn $0\le x\le 3$. Dùng sơ đồ Hoocne phân tích vế trái ta có:

	$3m$	$-6m+3n-1$	$9m-6n-6$	$9n-9$
1	$3m$	$-3m+3n-1$	$6m-3n-7$	$6m+6n-16$
1	$3m$	$3n-1$	$6m-8$	

Ta cần có $\begin{cases}6m+6n-16=0\\6m-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4}{3}\\n=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Như vậy ta có bất đẳng thức sau đúng với mọi x thỏa mãn $0\le x\le 3$: $\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

Lời giải. Vì bất đẳng thức đã cho có tính thuần nhất nên không mất tính tổng quát ta xem $a+b+c=3$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le 8.\quad(1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\ \text{với mọi}\ 0\le x\le 3\quad(2)$$

Thật vậy $\dfrac{(3+x)^2}{3x^2-6x+9}\le\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(4x+3)\ge 0,\forall x:0\le x\le 3.$

Vậy (2) đúng. Áp dụng (2) cho các số không âm a,b,c với $a+b+c=3$ ta được

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}\le\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\quad(3)$$

$$\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}\le\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}\quad(4)$$

$$\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}\le\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}\quad(5)$$

Cộng (3), (4), (5) vế theo vế ta được

$$\frac{(3+a)^2}{3a^2-6a+9}+\frac{(3+b)^2}{3b^2-6b+9}+\frac{(3+c)^2}{3c^2-6c+9}$$
$$\le\frac{4}{3}(a+b+c)+4=8.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy (1) được chứng minh.

Thí dụ 6. (Japan 1997 – Olympic 30/4 lớp 11 năm 2006). *Chứng minh rằng với các số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}.\quad(1)$$

Phân tích. Vì vế trái của bất đẳng thức (1) có tính thuần nhất theo 3 biến a, b, c nên ta chỉ cần chứng minh (1) trong điều kiện $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}.\quad(2)$$

Ta thấy (2) có dạng $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{6}{5}$ với

$$f(x)=\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}$$

Ta cần tìm 2 số m,n sao cho

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le mx+n\Leftrightarrow x(3-x)$$
$$\le(mx+n)(2x^2-6x+9)$$

$\Leftrightarrow 3x-x^2\le 2mx^3-6mx^2+9mx+2nx^2-6nx+9n$

$\Leftrightarrow 2mx^3+(-6m+2n+1)x^2+(9m-6n-3)x+9n\ge 0.\quad(3)$

Ta thấy dấu đẳng thức trong (2) xảy ra khi $a=b=c=1$ nên dấu đẳng thức trong (3) xảy ra khi $x=1$. Do đó, để chứng minh (3) đúng, ta cần phân tích (3) dưới dạng $(x-1)^2(px+q)\ge 0$ và chứng minh bất đẳng thức này đúng với mọi x thỏa mãn $0<x<3$. Dùng sơ đồ Hoocne để phân tích nhân tử ta có

1	$2m$	$-6m+2n+1$	$9m-6n-3$	$9n$
1	$2m$	$-4m+2n+1$	$5m-4n-2$	$5m+5n-2$
1	$2m$	$-2m+2n+1$	$3m-2n-1$	

Ta cần tìm m,n sao cho $\begin{cases}5m+5n-2=0\\3m-2n-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{9}{25}\\n=\dfrac{1}{25}\end{cases}$

Vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\dfrac{9}{25}x+\dfrac{1}{25}$, $\forall x: 0<x<3$.

Lời giải. Vì vế trái của bất đẳng thức (1) có tính thuần nhất theo 3 biến a, b, c nên ta chỉ cần chứng minh (1) với điều kiện $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}. \quad (2)$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25},\ \forall x: 0<x<3 \quad (4)$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2}\le\frac{9}{25}x+\frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25x(3-x)\le(2x^2-6x+9)(9x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi x dương. Do đó (4) được chứng minh. Áp dụng (4) với a,b,c là 3 số dương ta có:

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}\le\frac{9}{25}a+\frac{1}{25} \quad (5)$$

$$\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}\le\frac{9}{25}b+\frac{1}{25} \quad (6)$$

$$\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{9}{25}c+\frac{1}{25} \quad (7)$$

Cộng (5), (6), (7) vế theo vế ta được:

$$\frac{a(3-a)}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b(3-b)}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c(3-c)}{c^2+(3-c)^2}\le\frac{6}{5}.$$

Vậy (2) đúng, nên (1) được chứng minh.

Ngoài ra phương pháp hệ số bất định còn được dùng kết hợp với những bất đẳng thức thông dụng khác như BĐT Cauchy hay BĐT Schwarz để giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Ta xem các thí dụ sau

2. Sử dụng hệ số bất định trong việc áp dụng các bất đẳng thức thông dụng.

Ý tưởng. Thêm hệ số phù hợp để đảm bảo dấu "=" trong các bất đẳng thức được áp dụng xảy ra.

Thí dụ 7. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}\quad \text{với } x>y>0$$

Ta xem lời giải sau:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=x+(x-y)+y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{x(x-y)y\frac{1}{xy(x-y)}}=4.$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=x-y=y=\frac{1}{xy(x-y)}.$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên không có đẳng thức xảy ra. Lời giải trên đã sai.

• Bây giờ ta ta thêm hằng số $k, 0<k<2$, vào để khắc phục tình huống trên như sau

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=kx+(2-k)(x-y)+(2-k)y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

và tìm k bằng cách xét đến dấu đẳng thức xảy ra khi áp dụng BĐT Cauchy là

$$kx=(2-k)(x-y)=(2-k)y=\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\Rightarrow k=\frac{2}{3}, x=\sqrt[4]{6},\ y=\frac{\sqrt[4]{6}}{2}.$$

Từ đây ta có lời giải đúng như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$A=2x+\frac{1}{xy(x-y)}=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}(x-y)+\frac{4}{3}y+\frac{1}{xy(x-y)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}\sqrt[4]{6}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt[4]{6}; y=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{2}$. Vậy $\min A=\dfrac{8}{3}\sqrt[4]{6}$.

Bài toán 8. (Trích đề thi Olympic 30/4, 1996, lớp 10) *Chứng minh rằng với $0\le x\le 1$ ta có bất đẳng thức $x(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2})\le 16$.*

Phân tích. Vì ở lớp 10, học sinh chưa được học đạo hàm nên không thể khảo sát được sự biến thiên của hàm số ở vế trái của bất đẳng thức được. Do đó, ta áp dụng các bất đẳng thức để đánh giá vế trái. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}\le 16.$$

Lúc này ta thấy có thể dùng BĐT Cauchy để đánh giá từ tích sang tổng. Một vấn đề khó khăn đặt ra là ta chưa biết khi nào dấu "=" xảy ra; Việc tìm dấu đẳng thức xảy ra cũng gặp khó khăn khi phải đi giải phương trình vô tỉ $9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=16$.

Bây giờ ta thêm vào 2 số dương m và n như sau

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}.$$

Khi đó, áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}\le\frac{9}{2m}(m^2x^2+1+x^2)$$

$$\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}\le\frac{13}{2n}(n^2x^2+1-x^2)$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{9}{m}.mx.\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{n}.nx.\sqrt{1-x^2}$$
$$\le\frac{9}{2m}(m^2x^2+1+x^2)+\frac{13}{2n}(n^2x^2+1-x^2).$$

Ta cần tìm 2 số dương m,n sao cho vế phải của bất đẳng thức cuối không phụ thuộc vào x, đồng thời tồn tại x để dấu "=" xảy ra và tổng các số hạng tự do ở vế phải bằng 16. Vậy ta có hệ sau:

$$\begin{cases}\frac{9}{2}m+\frac{9}{2m}+\frac{13}{2}n-\frac{13}{2n}=0\\ m^2x^2=1+x^2\\ n^2x^2=1-x^2\\ \frac{9}{2m}+\frac{13}{2n}=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9\left(m+\frac{1}{m}\right)+13\left(n-\frac{1}{n}\right)=0\\ \left(m^2-1\right)x^2=1\\ \left(n^2+1\right)x^2=1\\ 9\frac{n}{m}=32n-13\end{cases}$$

Vì tồn tại x nên từ $(m^2-1)x^2=1$ và $(n^2+1)x^2=1$ suy ra $m^2-1=n^2+1$ hay $m^2+1=n^2+3$ và

$$9\left(m+\frac{1}{m}\right)+13\left(n-\frac{1}{n}\right)=0\Leftrightarrow 9\frac{m^2+1}{m}=13\frac{1-n^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow 9\frac{n}{m}\left(m^2+1\right)=13-13n^2.$$

Thay $m^2+1=n^2+3$ và $9\frac{n}{m}=32n-13$ vào đẳng thức cuối ta được

$$(32n-13)(n^2+3)=13-13n^2$$
$$\Leftrightarrow 8n^3+24n-13=0$$
$$\Leftrightarrow (2n-1)(4n^2+2n+13)=0$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{1}{2}.$$

Với $n=\frac{1}{2}$, thay vào $m^2+1=n^2+3$ ta được $m^2=\frac{9}{4}\Rightarrow m=\frac{3}{2}$. Khi đó, đẳng thức xảy ra tại

$$x^2=\frac{1}{m^2-1}=\frac{1}{n^2+1}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ta có lời giải cho bài toán như sau:

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$9x\sqrt{1+x^2}+13x\sqrt{1-x^2}=6.\frac{3x}{2}.\sqrt{1+x^2}+26.\frac{x}{2}.\sqrt{1-x^2}$$
$$\le 3\left(\frac{9}{4}x^2+1+x^2\right)+13\left(\frac{x^2}{4}+1-x^2\right)=16$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{9x^2}{4}=1+x^2\\ \frac{x^2}{4}=1-x^2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Thí dụ 9. *Cho các số thực x, y, z > 0 thỏa mãn* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1$. *Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}.$$

Phân tích. Ta áp dụng BĐT Schwarz như sau để giải bài toán trên:

Với x,y,z là các số thực tùy ý và a,b,c là các số thực dương, ta có: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$,

Chú ý dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Ta xem lời giải sau. Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{\sqrt{2}x+y+z};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+\sqrt{2}y+z};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{2}z}\ge\frac{9}{x+y+\sqrt{2}z}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9P$$

$$\Rightarrow 9P\le\frac{1}{\sqrt{2}}.1+2.1=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P\le\frac{2}{9}+\frac{1}{9\sqrt{2}}.$$

Do đó $\max P=\frac{2}{9}+\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Lời giải trên mắc sai lầm vì ta không thể tìm được giá trị của x,y,z thỏa để dấu "=" xảy ra. Chú ý ta cần thêm hệ số k vào số hạng $\frac{1}{\sqrt{2}x}$ như sau: $\frac{k^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(k+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$

Và dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$ (vì biểu thức P có tính đối xứng đối với x,y,z). Mà dấu bằng trong bất đẳng thức cuối xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{k}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow k=\sqrt{2}.\\ x=y=z=3\end{cases}$$

Từ đó ta có lời giải cho bài toán trên như sau:

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\sqrt{2}+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}=\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{x+\sqrt{2}y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}z}\ge\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{x+y+\sqrt{2}z}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\left(\sqrt{2}+2\right)^2P$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{\sqrt{2}+2}.$$

Vậy $\max P=\frac{1}{\sqrt{2}+2}$. khi $x=y=z=3$.

Thí dụ 10. *Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}.$$

Lời giải. Áp dụng giả thiết để biến đổi biểu thức P như sau: $x+yz=z-y-1+yz=(z-1)(1+y)$

$$y+zx=z-x-1+xz=(z-1)(1+x)$$

$$z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1).$$

Do đó: $(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2=(x+1)^3(y+1)^3(z-1)^2$.

Cũng từ giả thiết $x+y+1=z$ suy ra $z-1=x+y$.

Khi đó $(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2=(x+1)^3(y+1)^3(z-1)^2$

$$=(x+1)^3(y+1)^3(x+y)^2.$$

Như vậy

$$P=\frac{x^3y^3}{(x+1)^3(y+1)^3(x+y)^2}\le\frac{x^3y^3}{(x+1)^3(y+1)^3 4xy}$$

$$=\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(x+1)^3=\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\right)^3\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.1}\right)^3=\frac{27}{4}x^2;$$

$$(y+1)^3=\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+1\right)^3\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{y}{2}.\frac{y}{2}.1}\right)^3=\frac{27}{4}y^2.$$

Suy ra: $P\le\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}\le\frac{x^2y^2}{\frac{27}{4}x^2.\frac{27}{4}y^2.4}=\frac{4}{729}.$

Vậy $\max P=\frac{4}{729}$ khi $x=y=2;z=5$.

Bình luận. Khi biến đổi đến $P\le\frac{x^2y^2}{(x+1)^3(y+1)^3 4}$, ta cần đánh giá $\frac{x^2}{(x+1)^3}\le k$, với k là hằng số nào đó. Hay ta cần tìm số k sao cho $(x+1)^3\ge kx^2$, đến đây thì đơn giản vì ta cần có dấu "=" xảy ra tại $x=2$ (do dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức trước đó). Như vậy, ta có $(2+1)^3=k.2^2\Rightarrow k=\frac{27}{4}$.

Do đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$(x+1)^3\ge\frac{27}{4}x^2\Leftrightarrow\left(\frac{x+1}{3}\right)^3\ge\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1}{3}\right)^3\ge\frac{x^2}{4}.$$

BĐT cuối đúng do BĐT Cauchy.

(*Xem tiếp trang 39*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TP. ĐÀ NẴNG
Địa chỉ: 771 Nguyễn Hữu Thọ, P. Khuê Trung, Q. Cẩm Lệ, TP. Đà Nẵng
Điện thoại: (0236).3787877 - Fax: (0236).3787368

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT1M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng