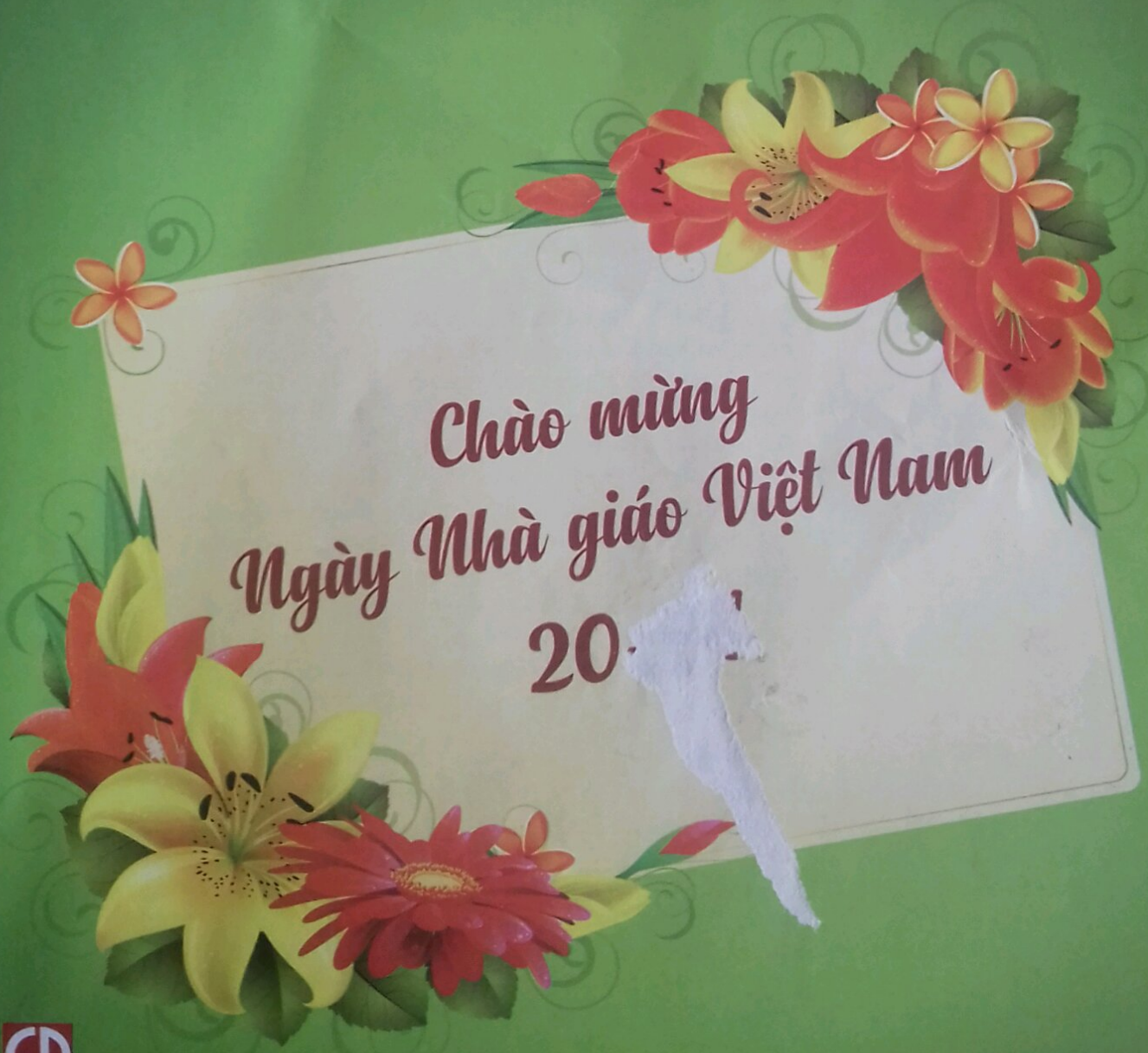
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2018
Số 497

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

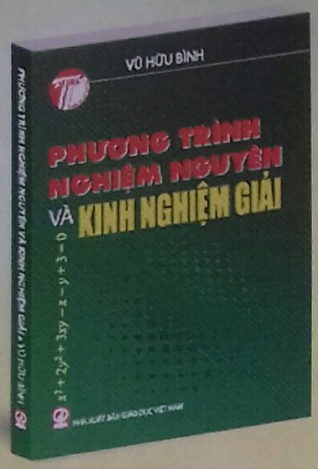
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

KHAI THÁC VÀ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 7

LƯƠNG MINH THẮNG

(GV PTDTBT THCS Trung Thượng, Quan Sơn, Thanh Hóa)

Trong trường phổ thông môn Toán có một vị trí rất quan trọng. Các kiến thức và phương pháp toán học là công cụ thiết yếu giúp học sinh học tốt các môn học khác, hoạt động có hiệu quả trong mọi lĩnh vực. Đồng thời môn Toán còn giúp học sinh phát triển những năng lực và phẩm chất trí tuệ; rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy tích cực, độc lập, sáng tạo; giáo dục cho học sinh tư tưởng đạo đức và thẩm mỹ của người công dân.

Hình học là môn học có vai trò thực tiễn rất cao giúp học sinh phát triển tư duy trực quan, năng lực phán đoán sáng tạo đồng thời rèn luyện tư duy lôgic và năng lực thẩm mỹ. Đó là những năng lực cần thiết cho cuộc sống.

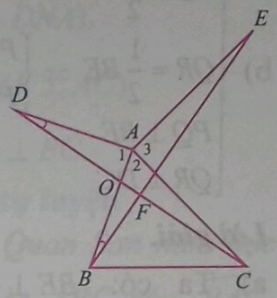
Việc khai thác các bài toán hình học rất mới lạ và khó đối với học sinh THCS đặc biệt là học sinh các lớp đầu cấp như khối 6,7. Nếu như chương trình học phân môn hình học ở khối 6 mới chỉ giúp học sinh phát triển năng lực ở mức đơn giản như tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc thì chương trình hình học 7 đòi hỏi mức độ tư duy cao hơn rất nhiều. Do đó các em học sinh gặp khó khăn trong việc nhận biết, hiểu và khai thác bài toán hình học một cách có hệ thống, có chiều sâu.

Trong bài viết này chúng tôi khai thác và mở rộng một bài tập trong sách bài tập Hình học 7.

Bài tập 46. (Trang 103, Sách bài tập Toán 7, Tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục) *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB (D khác phía C đối với AB), vẽ AE vuông góc và bằng AC (E khác phía B đối với AC). Chứng minh rằng:*

a) $DC = BE$. b) $DC \perp BE$.

Hướng dẫn lập sơ đồ chứng minh:



a) $\widehat{A_1} = \widehat{A_3} = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_3} + \widehat{A_2}$.

$$\begin{cases} AD = AB \text{ (gt)} \\ AC = AE \text{ (gt)} \\ \widehat{DAC} = \widehat{BAE} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = BE$.

b) DC lần lượt cắt AB và BE tại O và F, ta có sơ đồ chứng minh:

$$\begin{cases} \widehat{AOD} = \widehat{BOF} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \\ \widehat{ADO} = \widehat{OBF} \text{ (vì } \Delta ADC = \Delta ABE) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OFB} \Rightarrow DC \perp BE$.

Lời giải. a) Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_3} = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_3} + \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (1)

Mặt khác ta có $\begin{cases} AD = AB \text{ (gt)} \\ AC = AE \text{ (gt)} \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = BE$.

b) Ta có $\begin{cases} \widehat{AOD} = \widehat{BOF} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \\ \widehat{ADO} = \widehat{OBF} \text{ (vì } \Delta ADC = \Delta ABE) \end{cases}$

Mặt khác:

$\widehat{AOD} + \widehat{ADO} + \widehat{OAD} = \widehat{BOF} + \widehat{OBF} + \widehat{OFB} = 180^0$

nên $\widehat{OFB} = \widehat{OAD} = 90^0 \Rightarrow DC \perp BE$.

Các bài toán phát triển từ bài toán cơ bản

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC.*

a) *Từ B kẻ $BK \perp CD$ tại K. Chứng minh rằng ba điểm E, K, B thẳng hàng.*

b) *Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, EC. Chứng minh tam giác PQR là tam giác vuông cân.*

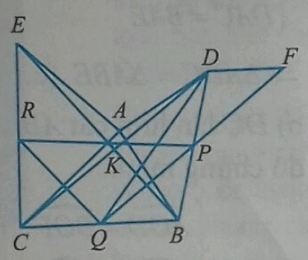
Hướng dẫn lập sơ đồ chứng minh:

a) $\begin{cases} BE \perp CD \\ BK \perp CD \end{cases} \Rightarrow$ ba điểm E, K, B thẳng hàng.

b) $\begin{cases} PQ = \frac{1}{2}DC \\ QR = \frac{1}{2}BE \\ PQ \perp BE \\ QR \perp DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PQ = QR \\ PQ \perp QR \end{cases} \Rightarrow \Delta PQR$ vuông cân.

Lời giải.

a) Ta có: $BE \perp CD$ (chứng minh như câu b) bài tập 46); $BK \perp CD$ (gt). Theo tiên đề Euclid thì ba điểm E, K, B thẳng hàng.



b) Trên tia QP lấy điểm F sao cho $PQ = PF$.

Xét ΔDPF và ΔBPQ ta có

$\begin{cases} PQ = PF \\ PD = PB \text{ (gt)} \\ \widehat{QPB} = \widehat{DPF} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \Delta DPF = \Delta BPQ$ (c.g.c)

$\Rightarrow DF = BQ = CQ$ (*) và $\widehat{BQP} = \widehat{DFP}$ (hai góc ở vị trí so le trong).

Do đó $DF \parallel BQ \Rightarrow \widehat{CQD} = \widehat{FDQ}$ (hai góc ở vị trí so le trong) (**)

Từ (*) và (**) suy ra

$\Delta CQD = \Delta FDQ$ (c.g.c) $\Rightarrow CD = QF \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{DQF} \Rightarrow PQ \parallel CD.$

Mặt khác $DC \perp BE \Rightarrow PQ \perp BE$ (1)

Chứng minh tương tự ta có:

$QR = \frac{1}{2}BE, QR \parallel BE \Rightarrow QR \perp DC$ (2)

Theo bài toán cơ bản ở trên dễ dàng chứng minh được $CD = BE \Rightarrow PQ = QR$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra tam giác PQR vuông cân tại Q.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN.*

a) *Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$.*

b) *Chứng minh rằng: $BN \perp CM$.*

c) *Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.*

(Đề thi học sinh giỏi cấp huyện Quan Hóa năm học 2017 - 2018).

Hướng dẫn lập sơ đồ chứng minh:

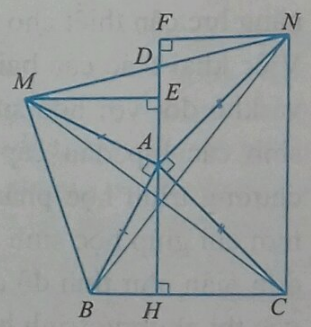
Câu a), b) chứng minh tương tự bài toán cơ bản ở trên.

Sơ đồ chứng minh câu c) như sau:

$\begin{cases} \Delta MEA = \Delta AHB \\ \Delta NFA = \Delta AHC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} FN = AH \\ ME = AH \end{cases} \Rightarrow FN = ME$

$\Rightarrow \Delta DEM = \Delta DFN \Rightarrow DM = DN \, (D \in MN).$

Lời giải. c) Giả sử AD cắt MN tại D. Từ M kẻ $ME \perp AD$ ($E \in AD$).



Từ N hạ đường vuông góc cắt tia AD tại F.

Xét ΔMEA và ΔAHB ta có: $MA = AB$ (gt)

$\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^0$ (gt)

$\widehat{EMA} + \widehat{EAM} = 90^0$ (theo cách vẽ trên)

Mà $\widehat{BAH} + \widehat{EAM} = 90^0$ (do $AM \perp AB$)

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{EMA} = \widehat{BAH} \\ \widehat{EAM} = \widehat{ABH} \end{cases} \Rightarrow \Delta MEA = \Delta AHB$ (g.c.g)

$\Rightarrow EM = AH$ (hai cạnh tương ứng).

Tương tự ta chứng minh được:

$\Delta NFA = \Delta AHC$ (g.c.g) $\Rightarrow FN = AH$ (hai cạnh tương ứng). Do đó $FN = EM$.

Xét ΔDEM và ΔDFN ta có: $\widehat{MED} = \widehat{NFD} = 90^0$ (theo cách vẽ trên).

Từ $\begin{cases} ME \perp AD \\ FN \perp AD \end{cases} \Rightarrow ME \parallel FN \Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{EMD}$

(hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta DEM = \Delta DFN$ (g.c.g) $\Rightarrow MD = ND$

(hai cạnh tương ứng).

Vậy D là trung điểm của MN.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm của DE kẻ tia MA cắt BC tại H. Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MA = MN$.*

a) *Chứng minh $AE \parallel DN$.*

b) *Chứng minh rằng $MH \perp BC$.*

c) *Kẻ $BK \perp AC$ ($K \in AC$). BK cắt AH tại I. Chứng minh rằng $CI \perp AB$.*

d) *Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và DN. Chứng minh rằng: $2PQ = BC$.*

Hướng dẫn lập sơ đồ chứng minh:

a) $\Delta MAE = \Delta MND \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MND} \Rightarrow AE \parallel DN$.

b) $\Delta DNA = \Delta ACB \Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{MAE}$

$\Rightarrow \widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^0 \Rightarrow MH \perp BC$.

c) $\begin{cases} BK \perp AC\ (K \in AC) \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow I$ là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow CI \perp AB$.

d) $\Delta DNA = \Delta ACB \Rightarrow AN = BC$.

Chứng minh như bài toán 1 $\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}BC$.

Lời giải. a) Xét ΔMAE và ΔMND ta có:

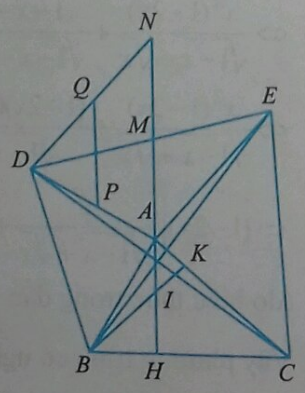
$MD = ME$ (gt)

$MA = MN$ (gt)

$\widehat{DMN} = \widehat{AME}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta MND$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MND}$ (hai góc tương ứng ở vị trí so le trong) $\Rightarrow AE \parallel DN$.



b) Ta có: $DN = AE$ (do $\Delta MAE = \Delta MND$)

mà $AE = AC$ (gt) nên $DN = AC$ (*)

và $AD = AB$ (gt). (**)

Mặt khác do $AE \parallel DN \Rightarrow \widehat{NDA} + \widehat{DAE} = 180^0$ (hai góc trong cùng phía)

$\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 360^0 - (\widehat{BAD} + \widehat{CAE}) = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{BAC}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) $\Rightarrow \Delta DNA = \Delta ACB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DNA} = \widehat{ACB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{ACB}$ (do $\widehat{MAE} = \widehat{DNA}$).

Mà $\widehat{MAE} + \widehat{HAC} = 90^0$ (vì $AE \perp AC$)

$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{HAC} = 90^0 \Rightarrow AH \perp BC$.

Một số bài tập tự luyện

Bài 1. (*Đề thi HSG huyện Quan Sơn năm học 2016 - 2017*). Cho tam giác ABC góc $\widehat{BAC}$ nhọn, $AB < AC$. Dựng ra phía ngoài các tam giác ABD vuông cân tại A và tam giác ACE vuông cân tại A. Chứng minh rằng

a) $DC = BE$ và DC vuông góc với BE.

b) $BD^2 + CE^2 = BC^2 + DE^2$.

c) Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của BC.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC. Kẻ đường cao AH vuông góc với BC tại H. Tia đối của tia AH cắt DE tại M. Các đường vuông góc DQ, ER lần lượt cắt tia AM tại Q và R.

a) Chứng minh rằng: $\Delta AHB = \Delta DQA$.

b) Chứng minh rằng: $\Delta AHC = \Delta ARE$.

c) Chứng tỏ M là trung điểm của cạnh DE.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^0$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB; AE vuông góc và bằng AC. Gọi H trung điểm của BC. Tia đối của tia AH cắt DE tại M. Lấy điểm A' trên tia đối của tia HA sao cho $HA = HA'$. (*Xem tiếp trang 15*)

MỘT ỨNG DỤNG HAY CỦA NHÂN LIÊN HỢP

HOÀNG TRỌNG TÀI
(GV THCS Mỹ Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Khi giải các bài toán về phương trình vô tỷ hoặc bài toán liên quan đến biểu thức có chứa căn thức học sinh thường gặp khó khăn và lúng túng đôi khi còn làm bài toán phức tạp thêm. Vì vậy qua một thời gian bồi dưỡng học sinh giỏi bản thân tôi thấy phương pháp "nhân liên hợp" giải quyết được rất nhiều bài toán khó đồng thời hình thành cho học sinh kỹ năng giải toán rất linh hoạt.

Bài toán 1. *Giải phương trình:*

$$(2+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=1. \qquad (1)$$

(Trích đề HSG Toán 9 huyện Can Lộc năm học 2013 - 2014).

Lời giải. ĐK: $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (2+x)(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=\sqrt{x^2+1}+x$

$\Leftrightarrow 2+x=\sqrt{x^2+1}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\sqrt{3}$ và $x=-\sqrt{3}$.

Bài toán 2. *Giải phương trình:*

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x^2+x-6})=5. \qquad (1)$$

(Trích đề HSG Toán 9 huyện Can Lộc năm học 2013 - 2014).

Lời giải. ĐK: $x \geq 2$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})\times$

$\times(1+\sqrt{x^2+x-6})=5(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{(x+3)(x-2)}=(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x-2}-1)=0 \Leftrightarrow x=-2$ (loại); $x=3$ (thỏa mãn ĐK). Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình trên.

Bài toán 3. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2+5x+7}=3. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $\left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-1}{4} \\ x \leq -1 \end{array}\right.$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow 6=3(\sqrt{4x^2+5x+7}-\sqrt{4x^2+5x+1})$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+7}-\sqrt{4x^2+5x+1}=2 \qquad (2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được phương trình sau:

$2\sqrt{4x^2+5x+7}=5 \Leftrightarrow 16x^2+20x+3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{8}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT đã cho có nghiệm là: $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{8}$.

Bài toán 4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $2 \leq x \leq 4$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)+(\sqrt{4-x}-1)=x^2-6x+9$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}-(x-3)\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)}-(x-3)\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{2(3-x)}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)(\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2})}-(x-3)\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(\dfrac{-2}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{4-x}+1)(\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2})}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn ĐK)

(vì $\dfrac{-3}{(\sqrt{x-2}+1)\sqrt{4-x}+1)\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}-1<0$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 5. *Giải phương trình:* $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$.

Lời giải. ĐK: $0<x\leq 1$. Khi đó ta có phương trình tương đương sau:

$(1+x^2)\sqrt{1-x}=(2x+x^2)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})+(\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x})=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{(1-2x)(2x^2+x+1)}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow (1-2x)\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

(do biểu thức trong dấu ngoặc lớn luôn dương).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 6. *Giải phương trình:*

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+2})+(\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(2x^2+1)(x+2)}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+$$

$$+\frac{2x^2-x-1}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2(x+1)}+\sqrt[3]{x+1)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1;\ x=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $x=1$ và $x=-\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài toán 7. *Giải phương trình:*

$$\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\le 12$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+24}-3+\sqrt{12-x}-3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+24)^2}+3\sqrt[3]{x+24}+9}+\frac{3-x}{\sqrt{12-x}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{12-x}-\sqrt[3]{(x+24)^2}-3\sqrt[3]{x+24}-6=0\ (*)\end{array}\right.$$

Kết hợp với phương trình ban đầu thì ta có

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+24)^2}+4\sqrt[3]{x+24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=-88\end{array}\right.$$

(thỏa mãn ĐK)

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$$x=-88\ ;\ x=-24;\ x=3.$$

Bài toán 8. *Giải phương trình:*

$$2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}.$$

Lời giải. ĐK: $\left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 10\end{array}\right.$. Ta đặt $a=\sqrt{x^2-7x+10}$;

$b=\sqrt{x^2-12x+20} \Rightarrow 2a-b=x \qquad (1)$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{x^2-7x+10}-(x+1)\right]=\sqrt{x^2-12x+20}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-18(x-1)}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}=\frac{-16(x-1)}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2} \quad (*)$$

Vì $\sqrt{x^2-7x+10}+x+1$ và $\sqrt{x^2-12x+20}+x+2$ luôn khác 0 nên ta có

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (thỏa mãn ĐK)} \\ \dfrac{9}{a+x+1}=\dfrac{8}{b+x+2}\ (2)\end{array}\right.$$

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a-b=x \\ 8a-9b=x+10\end{cases} \Rightarrow 5a=4x-5$$

thay biểu thức a vào đẳng thức trên ta được

$$5\sqrt{x^2-7x+10}=4x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{4} \\ x^2-15x+25=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15\pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu thì chỉ có nghiệm $x=\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1$ và $x=\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 9. *Cho x, y thỏa mãn*

$$(x+\sqrt{2018+x^2})(y+\sqrt{2018+y^2})=2018.$$

Tính giá trị của $S=x^{2019}+y^{2019}$.

Lời giải. Ta có

$$(x+\sqrt{2018+x^2})(\sqrt{2018+x^2}-x)=2018$$

$$(y+\sqrt{2018+y^2})(\sqrt{2018+y^2}-y)=2018.$$

Kết hợp giả thiết ta có

$$\begin{cases} y+\sqrt{2018+y^2}=\sqrt{2018+x^2}-x \\ x+\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}-y\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được: $x+y=-x-y \Leftrightarrow x=-y$

$\Rightarrow S=x^{2019}+y^{2019}=x^{2019}+(-x)^{2019}=0.$

Trên đây là một số bài toán mà chúng ta đã áp dụng phương pháp "nhân liên hợp" để giải, mong rằng qua những bài tập này các em sẽ có một tư duy mới trong học toán và giải toán. Chúc các em thành công!

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1.$
2. $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1.$
3. $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6.$
4. $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0.$
5. $2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{8+2x-x^2}=x.$
6. $\sqrt[3]{2x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}+2=3x.$
7. $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3.$
8. $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{16x^2-59x+149}=5-x.$
9. $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-x}.$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, NĂM HỌC 2018-2019

VÒNG 1

Câu 1. Ta có: a) Ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}-\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)^2}\right]:\frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}:\frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{-6\sqrt{x}-8}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}:\frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{-2\left(3\sqrt{x}+4\right)}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+4}=\frac{-2}{x-4}.$$

b) Với $x\in\mathbb{Z}$ và $P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\-2\,\vdots\,(x-4)\end{cases}$

$\Leftrightarrow x-4\in\{-2;-1;1;2\}\Leftrightarrow x\in\{2;3;5;6\}$.

Vậy có 4 giá trị x thỏa mãn: 2; 3; 5; 6.

Câu 2. a) Với $m=3$ thì (d): $y=-4x+1$.

Cho $y=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow A\left(\frac{1}{4};0\right)$;

$x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow B(0;1)$.

ΔAOB vuông tại O, nên:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{8}\text{ (đvdt)}.$$

Vậy diện tích ΔAOB bằng $\frac{1}{8}$ (đvdt).

b) ΔAOB cân tại O, do đó $OA=OB$.

Nếu $m=1\Rightarrow(d):y=-1$ không cắt trục Ox suy ra $m\neq1$.

Cho $x=0\Rightarrow y=\frac{1}{m-2}\Rightarrow B\left(0;\frac{1}{m-2}\right)$;

$y=0\Rightarrow x=\frac{1}{2(m-1)}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2(m-1)};0\right)$.

$$OA=OB\Leftrightarrow\left|\frac{1}{m-2}\right|=\left|\frac{1}{2(m-1)}\right|\Leftrightarrow\begin{cases}|m-2|=2|m-1|\\m\notin\{1;2\}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m-2=2(m-1)\\m-2=-2(m-1)\end{array}\right.\\m\notin\{1;2\}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{4}{3}\end{array}\right..$$

Vậy có 2 giá trị $m=0$ hoặc $m=\frac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. a) Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases}(x+3)^2+y=4\\(x+3)^4+5y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5(x+3)^2+5y=20\ (1)\\(x+3)^4+5y=16\ \ (2)\end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) vế với vế ta có

$$(x+3)^4-5(x+3)^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x+3)^2=1\\(x+3)^2=4\end{array}\right..$$

• Với $(x+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-4\end{array}\right.\Rightarrow y=3$ suy ra hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(-2;3),(-4;3)$.

• Với $(x+3)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.\Rightarrow y=0$ suy ra hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(-1;0)$, $(-5;0)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là

$(-2;3)$, $(-4;3)$, $(-1;0)$, $(-5;0)$.

b) ĐK: $x^2-x-2\neq0$, $x^2+3x-2\neq0$. Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) đã cho, suy ra

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{x-\frac{2}{x}-1}+\frac{3}{x-\frac{2}{x}+3}=1.$$

Đặt $x-\frac{2}{x}-1=t\Rightarrow(1)$ có dạng

$$\frac{1}{t}+\frac{3}{t+4}=1\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq0\\t\neq-4\\t^2=4\end{cases}\Leftrightarrow t=\pm2.$$

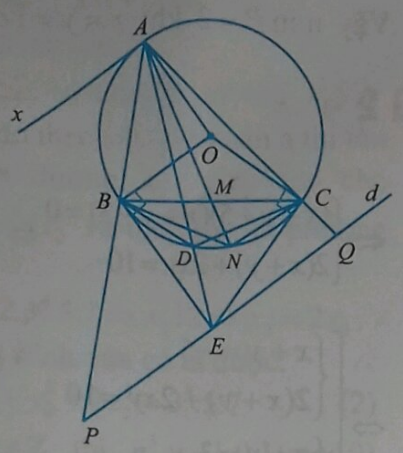
• Với $t=-2\Rightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

• Với $t=2\Rightarrow x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Vậy, phương trình (1) có nghiệm

$$x=1,\ x=-2,\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Câu 4. a) Do EB, EC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{OBE}=90^0$, $\widehat{OCE}=90^0$



Từ đó suy ra $\widehat{OBE}+\widehat{OCE}=90^0+90^0=180^0$ suy ra tứ giác $OBEC$ nội tiếp đường tròn. Ta có:

$$\widehat{EBD}=\widehat{BAD}\ \left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right) \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\widehat{BDE}=180^0-\widehat{BDA}\\ \widehat{EBA}=\widehat{DBA}+\widehat{BAD}=180^0-\widehat{BDA}\end{cases}\Rightarrow \widehat{BDE}=\widehat{EBA}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\Delta BDE\backsim\Delta ABE\Rightarrow\frac{EB}{AE}=\frac{ED}{EB}\Rightarrow EB^2=AE.ED.$$

b) Do Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{xAB}=\widehat{ACB}$ (3). Mặt khác $Ax\,//\,d\Rightarrow$ $\widehat{xAB}=\widehat{BPQ}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BPQ}=\widehat{ACB}$ (5).

Xét hai tam giác ABC và AQP có $\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{ACB}=\widehat{BPQ}$ (do (5)) suy ra tam giác ABC đồng dạng với tam giác AQP nên suy ra

$$\frac{AB}{AQ}=\frac{AC}{AP}\Leftrightarrow AB.AP=AC.AQ.$$

Do BE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{PBE}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}=\widehat{ACB}$, kết hợp với (5) ta được $\widehat{EBP}=\widehat{BPQ}\Rightarrow$ tam giác EBP cân tại E suy ra $EB=EP$ (6).

Chứng minh tương tự ta được tam giác ECQ cân tại E nên $EC=EQ$ (7). Mặt khác theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $EB=EC$. (8)

Từ (6), (7), (8) ta được E cách đều các đỉnh của tứ giác $BCQP$.

c) Theo kết quả phần b) ta có: tam giác ABC đồng dạng tam giác AQP suy ra $\frac{BC}{AC}=\frac{PQ}{AP}=\frac{2.PE}{AP}$ (9). Mặt khác tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\widehat{APQ}\Rightarrow$ tam giác ABD đồng dạng AEP suy ra $\frac{PE}{AP}=\frac{BD}{AD}$ (10)

Từ (9) và (10) ta được

$$\frac{BC}{AC}=2.\frac{BD}{AD}\Leftrightarrow\frac{2.MC}{AC}=2.\frac{BD}{AD}\Leftrightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{MC}\ (11)$$

Do tứ giác $ABDC$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{ACB}=\widehat{BDA}$ (12)

Từ (11) và (12) suy ra

$$\Delta ADB\backsim\Delta ACM\Rightarrow\widehat{BAD}=\widehat{NAC}.$$

Lại có

$$\widehat{BAD}=\widehat{BCD},\widehat{NAC}=\widehat{NBC}\Rightarrow\widehat{BCN}=\widehat{CBD}\ (13)$$

Mặt khác

$$\widehat{AND}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{NC}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}=\widehat{AMB}$$

$$\Rightarrow DN\,//\,BC \qquad (14)$$

Do đó từ (13) và (14) suy ra tứ giác $BCND$ là hình thang cân.

Câu 5. Đặt $x=\frac{a}{c};\ y=\frac{b}{c}\ (x,y>0)$. Khi đó ta có: $(a+b-c)^2=ab\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)^2=\frac{a}{c}.\frac{b}{c}$

$$\Leftrightarrow(x+y-1)^2=xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow|x+y-1|\le\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x+y\le 2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{|x+y-1|}{x+y}.$$

$$\ge\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{4}{2xy+x^2+y^2}+\frac{x+y-1}{x+y}$$

$$=\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}-\frac{1}{x+y}+1$$

$$=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{2-(x+y)}{(x+y)^2}+1 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có:

$$P\ge\frac{4}{2^2}+0+1=2.$$

Vậy $\min P=2$ khi $x=y=1\Leftrightarrow a=b=c$.

VÒNG 2

Câu 1. a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2-2mx+m-1=0$ (1)

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt

$$\Leftrightarrow m^2-m+1>0\Leftrightarrow\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0:\text{ đúng }\forall m\in\mathbb{R}.$$

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m-1\end{cases}$

$$A(x_1;x_1^2),B(x_2;x_2^2)\Rightarrow 2(x_1+x_2)+y_1y_2=0$$

$$\Leftrightarrow 4m+(m-1)^2=0\Leftrightarrow(m+1)^2=0\Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy $m=-1$ thì đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thỏa mãn đề bài.

b) ĐK: $\begin{cases}x\ge4\\-x^2+6x-1\ge0\end{cases}$. Bình phương hai vế phương trình ta được

$$2x-4+2\sqrt{x^2-4x}=-x^2+6x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x}-3=0.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x}$ $(t\ge0)$, PT có dạng:

$$t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\text{ (loại)}\end{array}\right..$$

Với $t=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x}=1\Leftrightarrow x^2-4x-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt5\\x=2-\sqrt5\text{ (loại)}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2+\sqrt5$.

c) Ta có $\begin{cases}x^2+y^2=5\\x+y+xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\x+y+xy=5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=5\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2+2(x+y)=15\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y+5)(x+y-3)=0\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=-5\\x+y=3\end{array}\right.\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-5\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\\\begin{cases}x+y=3\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\end{array}\right.$$

• TH1: $\begin{cases}x+y=-5\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-5\\xy=10\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-5-x\\x^2+5x+10=0\end{cases}\text{ (vô nghiệm).}$$

• TH2: $\begin{cases}x+y=3\\2(x+y)+2xy=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(1;2)$ và $(2;1)$.

Câu 2. a) Ta viết lại phương trình (1) dưới dạng: $x^3+2y^3+4z^3=2^7.3^4.5.7$

$$\Rightarrow x^3\vdots2\Rightarrow x=2x_1,x_1\in\mathbb{Z},$$

thay trở lại phương trình (1) ta được:

$$8x_1^3+2y^3+4z^3=2^7.3^4.5.7\Rightarrow2y^3\vdots4\Rightarrow y=2y_1,y_1\in\mathbb{Z}.$$

Tiếp tục thay trở lại (1) ta được:

$$8x_1^3+16y_1^3+4z^3=2^7.3^4.5.7\Rightarrow4z^3\vdots8\Rightarrow z=2z_1,z_1\in\mathbb{Z}.$$

Thay trở lại (1) ta được:

$$8x_1^3+16y_1^3+32z_1^3=2^7.3^4.5.7$$

$$\Leftrightarrow x_1^3+2y_1^3+4z_1^3=2^4.3^4.5.7.$$

Lý luận tương tự như trên ta được:

$$8x_2^3+16y_2^3+32z_2^3=2^4.3^4.5.7$$

$\Leftrightarrow x_2^3+2y_2^3+4z_2^3=2.3^4.5.7$ (2)

Như vậy ta được $x=4x_2, y=4y_2, z=4z_2$ $\Rightarrow x,y,z$ cùng chia hết cho 4.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1). Khi đó theo kết quả phần a thì tồn tại các số nguyên dương x_2,y_2,z_2 sao cho $x=4x_2, y=4y_2, z=4z_2$ và thay trở lại phương trình (1) ta được:

$x_2^3+2y_2^3+4z_2^3=2.3^4.5.7 \Rightarrow x_2 \vdots 2 \Rightarrow x_2=2x_3$,

thay trở lại phương trình vừa có ta được:

$$4x_3^3+y_2^3+2z_2^3=3^4.5.7 \quad (2)$$

Nhận xét: Với $n\in\mathbb{Z}$ thì $n^3\equiv -1,0,1 \pmod 9$.

Nếu cả ba số x_3,y_2,z_2 không cùng chia hết cho 3 thì trong ba số đó chỉ có nhiều nhất một số chia hết cho 3. Khi đó

$$\begin{aligned}4x_3^3+y_2^3+2z_2^3 &\equiv \pm4\pm1\pm2 \pmod 9\\ &\equiv \pm4\pm1 \pmod 9\\ &\equiv \pm1\pm2 \pmod 9\\ &\equiv \pm4\pm2 \pmod 9\end{aligned}$$

Ta nhận thấy không có trường hợp nào $4x_3^3+y_2^3+2z_2^3$ chia hết cho 9 vô lí.

Do đó cả ba số x_3,y_2,z_2 đều chia hết cho 3. Đặt $x_3=3x_4$, $y_2=3y_3$, $z_2=3z_3$, khi đó (2) trở thành

$4x_4^3+y_3^3+2z_3^3=105 \Rightarrow y_3^3<125 \Rightarrow y_3<5$, kết hợp với y_3 lẻ ta được $y_3\in\{1;3\}$. Thử trực tiếp ta thấy không thỏa mãn. Vậy không tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Bất đẳng thức viết lại thành

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\left(\frac{a}{c}\right)^2}\ge 1.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c} \Rightarrow x,y,z>0, xyz=1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2}\ge 1.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2)(1+y+y^2)+(1+y+y^2)(1+z+z^2)\\ &\qquad+(1+z+z^2)(1+x+x^2)\\ &\ge (1+x+x^2)(1+y+y^2)(1+z+z^2).\end{aligned}$$

Khai triển và sử dụng $xyz=1$, rút gọn ta được bất đẳng thức: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

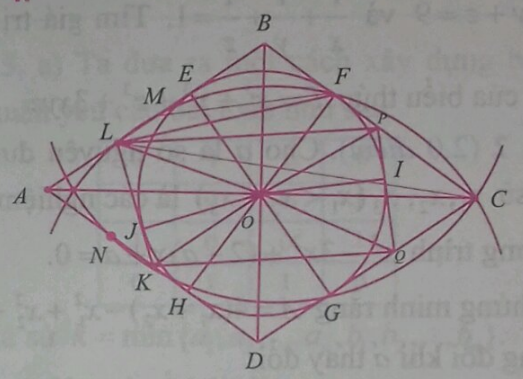
$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2yz+2zx$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz+z^2+x^2-2zx\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 4.



a) Theo tính chất tiếp tuyến ta có

$\widehat{LOJ}=\widehat{LOE}, \widehat{KOJ}=\widehat{KOH} \Rightarrow \widehat{LOK}=\frac{1}{2}\widehat{EOH}$

$=\frac{1}{2}(180^0-2.\widehat{BOE})=\frac{1}{2}[180^0-2.(90^0-\widehat{LBO})]=\widehat{LBO}.$

Do đó $\widehat{LOK}=\widehat{LBO}$ (1)

Ta có

$\widehat{DOL}=\widehat{LOK}+\widehat{KOD}=\widehat{LBO}+\widehat{BLO}$

$=\widehat{LOK}+\widehat{BLO} \Rightarrow \widehat{KOD}=\widehat{BLO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\Delta BLO \backsim \Delta DOK$ nên ta được:

$$\frac{BL}{OD}=\frac{OB}{DK} \Rightarrow BL.DK=OB.OD=OB^2.$$

b) Do bốn điểm C, F, L, M cùng nằm trên một đường tròn, nên $\widehat{BFM}=\widehat{BLC}$, suy ra $\Delta BFM \backsim \Delta BLC$,

do đó $BM.BL=BF.BC=BO^2$ (do tam giác BOC vuông ở O và $OF\perp BC$).

(Xem tiếp trang 11)

CÂU HỎI

Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. Không tồn tại m.

B. $\ln 26$.

C. $\ln 24$.

D. $\ln 9$.

TRẢ LỜI

Cách 1. Xét hàm số $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$ nên $f'(0) = \ln 24$. Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \ln 24,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \ln 24.$$

**** Điều kiện cần:*** Ta sẽ chỉ ra rằng, nếu $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, thì $m = \ln 24$.

Từ $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} \geq m \ (1), \forall x > 0;$$

$$\frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} \leq m \ (2), \forall x < 0.$$

Ở (1) ta cho $x \to 0^+$ ở hai vế và thu được $m \leq \ln 24$. Ở (2) ta cho $x \to 0^-$ ở hai vế và thu được $m \geq \ln 24$. Suy ra $m = \ln 24$. (*Đến đây chưa thể chọn ngay đáp án C, bởi vì đây mới là điều kiện cần, chưa phải điều kiện đủ, do trong câu hỏi còn đáp án A nên ta vẫn phải xét tiếp điều kiện đủ*).

**** Điều kiện đủ:*** Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $m = \ln 24$ thì $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = \ln 24$ ta xét hàm số $g(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 3 - x \ln 24$, có đạo hàm $g'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - \ln 24$, $g'(x) = 0$ khi $x = 0$, $g'(x) > 0$ khi $x > 0$, $g'(x) < 0$ khi $x < 0$. Vì thế $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Điều này chứng tỏ, nếu $m = \ln 24$ thì $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $2^x + 3^x + 4^x \geq 3 + mx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, khi và chỉ khi $m = \ln 24$. Chọn đáp án C.

Trong trường hợp tổng quát, cho số nguyên dương n và các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n + mx$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ là $m = \ln(a_1.a_2...a_n)$.

Cách 2. Trong bốn phương án trả lời A, B, C, D thì có ba phương án có giá trị m cụ thể. Ta sẽ thử với từng phương án đó. Nếu $m = \ln 9$ thì với $x = -\dfrac{1}{2}$ ta có $2^x + 3^x + 4^x < 3 + mx$ nên loại đáp án D. Nếu $m = \ln 26$ thì với $x = \dfrac{1}{100}$ ta có $2^x + 3^x + 4^x < 3 + mx$ nên loại đáp án B. Nếu $m = \ln 24$ ta xét hàm số $g(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 3 - x\ln 24$, có đạo hàm $g'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - \ln 24$, $g'(x) = 0$ khi $x = 0$, $g'(x) > 0$ khi $x > 0$, $g'(x) < 0$ khi $x < 0$. Vì thế $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Loại đáp án A và chọn C.

Cách 3. Nếu may mắn hơn, ta "tình cờ" thử ngay với giá trị $m = \ln 24$. Với $m = \ln 24$ ta xét hàm số $g(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 3 - x\ln 24$, có đạo hàm $g'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - \ln 24$, $g'(x) = 0$ khi $x = 0$, $g'(x) > 0$ khi $x > 0$, $g'(x) < 0$ khi $x < 0$. Vì thế $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn C.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ, NĂM HỌC 2018 – 2019

(Dành cho tất cả thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2,0 *điểm*). a) Cho a, b, c là 3 số thực đôi một khác nhau thỏa mãn

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=x\ (x\in\mathbb{R}).$$

Tính $P=xabc$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

Câu 2 (2,0 *điểm*). Cho a là số nguyên dương. Giả sử $x_1, x_2, x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ là các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+(2-a)x+a=0$.

a) Chứng minh rằng $A=4(x_1+x_2)-x_1^2+x_2^2+x_3^2$ không đổi khi a thay đổi.

b) Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n\ (n\in\mathbb{N})$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên lẻ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Câu 3 (2,0 *điểm*). a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2(y+3)=y(x^2-3)^2$.

b) Giải phương trình

$$x^2-2\sqrt{2x-1}=\frac{13x^2-28x+24}{2x+1}.$$

Câu 4 (3,0 *điểm*). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$, H là điểm cố định trên đoạn OA $(H\neq O, H\neq A)$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Gọi E là điểm thay đổi trên cung $\overset{\frown}{AC}$ $(E\neq A, E\neq C)$, F là điểm thay đổi trên cung $\overset{\frown}{BC}$ $(F\neq B, F\neq C)$, sao cho $\widehat{EHC}=\widehat{FHC}$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EHOF$ nội tiếp.

b) Gọi R' là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHOF$. Tính góc $\widehat{EHF}$ khi $R=R'$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Trung tâm thành phố Việt Trì có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 3 loại: Đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng. Vào dịp giỗ tổ Hùng Vương, người ta thực hiện việc thay bóng đèn theo quy luật sau: Mỗi lần tháo bỏ 2 bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng 2 bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi đến một lúc nào đó có thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều thuộc cùng một loại không?

(Dành cho thí sinh thi chuyên Tin; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2,0 *điểm*). a) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình

$$x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$T=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|.$$

b) Tìm các số thực dương x, y thỏa mãn

$$xy+3x+15=10\sqrt{(x-1)(y+2)}.$$

Câu 2 (2,0 *điểm*). a) Cho p, q là hai số nguyên tố; x, y là hai số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $x<p$, $y<q$. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}$ không thể nhận giá trị nguyên.

b) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2-4 dư $2x+3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2-4)$.

Câu 3 (2,0 *điểm*). a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+4xy-5=0\\ y^2-2y-x+2=0\end{cases}.$$

b) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases}(a+b)(c+d)=2\\ (a+c)(b+d)=3\\ (a+d)(b+c)=4\end{cases}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Câu 4 (3,0 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có M là trung điểm của BC; BE, CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở S. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF, AS với (O) $(P \neq A)$. Chứng minh rằng:

a) $MN \perp BF$.

b) $AB.CP = AC.BP$.

c) $\widehat{CAM} = \widehat{BAP}$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

LÊ BÁ VIỆT HÙNG

(Phòng GD Trung học, Sở GD&ĐT Phú Thọ)

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ) ***giới thiệu***

HƯỚNG DẪN ...

(Tiếp theo trang 9)

Theo kết quả phần a), $BO^2 = BL.DK$. Suy ra $BM = DK$. Từ đó, M và K đối xứng với nhau qua AC (3)

Chứng minh tương tự, cũng được N và L đối xứng với nhau qua AC (4)

Từ (3) và (4) suy ra $KMLN$ là một hình thang cân và do đó là tứ giác nội tiếp.

c) Do $BC \parallel DA$, $LP \parallel KQ \Rightarrow \widehat{BPL} = \widehat{DKQ}$

$$\Rightarrow \Delta BPL \backsim \Delta DKQ \Rightarrow \frac{BP}{DK} = \frac{BL}{DQ}.$$

Theo phần a), suy ra

$$BP.DQ = BL.DK = BO^2 \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{BO}{DQ} = \frac{DO}{DQ}$$

$$\Rightarrow \Delta BPO \backsim \Delta DOQ.$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{BP}{DO} = \dfrac{BP}{BO}$ (5)

Do

$$\widehat{POQ} = 180^0 - \widehat{BOP} - \widehat{DOQ}$$

$$= 180^0 - \widehat{BOP} - \widehat{BPO} = \widehat{OBP} = \widehat{QDO} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra: các tam giác BOP, OQP và DQO đôi một đồng dạng.

Do đó $\widehat{BPO} = \widehat{OPQ}$, $\widehat{PQO} = \widehat{OQD}$ (7)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của O trên BC, suy ra hai tam giác vuông OFP và OIP có chung cạnh huyền OP và $\widehat{FPO} = \widehat{IPO}$ (do (7)) $\Rightarrow OI = OF$, do $OI \perp PQ$, suy ra PQ tiếp xúc với (O).

Câu 5. a) Ta đưa ra một cách xây dựng bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

b) Giả sử $k = \min\{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n\}$. Xét dòng có đúng k số 1 là dòng m.

Xét k cột chứa các ô chứa số 1 của dòng m, mỗi cột như vậy sẽ chứa ít nhất k số 1 suy ra số số 1 trong k cột này $\geq k^2$.

Trong dòng m này có $n-k$ ô chứa số 0, xét $n-k$ cột chứa số 0 của dòng m này. Trong mỗi cột này có chứa ít nhất $n-k$ số 1 (vì tổng số số 1 trên hàng và cột chứa số 0 là $\geq n$, trong đó số số 1 trong hàng m lại bằng 1 suy ra mỗi cột chứa số 0 thuộc dòng m sẽ $\geq n-k$) nên số số 1 trong $n-k$ cột này $\geq (n-k)^2$.

Do đó $P \geq k^2 + (n-k)^2 = \dfrac{k^2}{1} + \dfrac{(n-k)^2}{1}$

$$\geq \frac{(k+n-k)^2}{2} = \frac{n^2}{2} \geq \left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Do đó $P \geq \left[\dfrac{n^2}{2}\right]$.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***giới thiệu***

CÔ LẬP BIẾN ĐỂ XÂY DỰNG HÀM ĐẶC TRƯNG TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LÊ VIẾT THẮNG
(Phòng GD&ĐT Kỳ Sơn, Nghệ An)

Hệ phương trình là một chủ đề hay và khó được sử dụng khai thác nhiều trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi đến cả những kỳ thi Đại học, Cao đẳng. Có nhiều cách để giải hệ phương trình đã được đề cập tới. Sau đây tôi xin trình bày kỹ thuật "cô lập biến xây dựng hàm đặc trưng trong giải hệ phương trình".

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2) \end{cases}$$

Phân tích. Nhìn vào hai phương trình của hệ ta thấy phương trình (1) xuất hiện hai căn thức là $\sqrt{x+2}$ và $\sqrt{2y+1}$. Liệu hai căn thức này có liên quan đến nhau?

Mặt khác phương trình thứ (2) xuất hiện dạng tam thức bậc hai nhưng việc phân tích Δ thành chính phương có vẻ không ổn! Vậy ta có thể dựa vào hai căn thức này để làm điểm tựa chăng? Thật vậy, ta sẽ tìm hàm đặc trưng bằng việc đưa phương trình (2) về sự cô lập giữa các biến: $x^2-2x=-2y^2-y+2$. Lúc này trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$(x+2)^2+\sqrt{x+2}-(x+2)$$
$$=(2y+1)^2+\sqrt{2y+1}-(2y+1).$$

Rõ ràng hàm đặc trưng đã xuất hiện, đó là:

$$f(t)=t^4+t-t^2.$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x\ge -2 \\ y\ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2-2x=-2y^2-y+2 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được:

$$(x+2)^2+\sqrt{x+2}-(x+2)$$
$$=(2y+1)^2+\sqrt{2y+1}-(2y+1) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t^4+t-t^2$. Ta có $f'(t)=4t^3-2t+1$.

Rõ ràng $f'(t)\ge \dfrac{9-2\sqrt{6}}{9}>0\ \forall t\in(0;+\infty)$, hàm số đồng biến nên

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow x=2y-1.$$

Thay vào phương trình (2) của hệ ta có:

$$6y^2-7y+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{1}{6} \end{array}\right..$$

Với $y=1\Rightarrow x=1$; với $y=\dfrac{1}{6}\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$. Các giá trị tìm được thỏa mãn ĐK.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{-2}{3}\right)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} y^3+3xy-17x+27=x^3-3x^2+13y & (1) \\ x^2+y^2+xy-6y-5x+10=0 & (2) \end{cases}$$

Phân tích. Nhìn thoáng qua thì phương trình (1) của hệ có dạng hàm bậc ba quen thuộc. Nhưng chỉ có điều sự xuất hiện của biểu thức $3xy$ làm mất đi sự độc lập giữa hai biến, vậy nên ta tìm cách làm mất đi biểu thức đó. Nhận thấy rằng trong phương trình (2) cũng xuất hiện biểu thức xy và đây chính là chìa khóa của vấn đề.

Lời giải. Lấy phương trình (1) trừ đi phương trình (2) đã nhân với 3 vế theo vế ta được phương trình:

$$y^3-3y^2+5y-3=x^3+2x$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^3+2(y-1)=x^3+2x.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$, do đó f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy phương trình tương đương với $x=y-1$. Thay vào một trong hai phương trình suy ra nghiệm tìm được là:

$$(x;y)=(1;2);\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right).$$

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}(y+1)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2} & (1)\\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2} & (2)\end{cases}.$$

Phân tích. Phương trình thứ (2) của hệ có xuất hiện hai căn thức trong đó một căn thức có sự độc lập là $\sqrt{x^2-2x+5}$ và căn thức còn lại không có sự độc lập. Tuy nhiên biểu thức trong căn $2x-4y+2$ lại có ẩn x bậc nhất. Ở phương trình (1) mặc dù có sự độc lập biến giữa hai vế của phương trình nhưng sự chênh lệch biến làm cho hệ phương trình trở nên "bí ẩn" hơn. Vậy ẩn x ở phương trình (1) và ẩn x biểu thức $2x-4y+2$ có sự liên hệ nào chăng? Liệu rằng dùng phép thế có phát huy được tác dụng?

Lời giải. ĐK: $2x-4y+2\geq 0$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2x=2y^2+4y-1+2y\sqrt{y^2+1}$, thế vào phương trình thứ (2) của hệ ta được:

$$x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2y^2+1+2y\sqrt{y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}=2\sqrt{(y+\sqrt{y^2+1})^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}=2(y+\sqrt{y^2+1})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}=2y+\sqrt{(2y)^2+4}\quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+4}$. Ta có

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}>0\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $(3)\Leftrightarrow x-1=2y\Leftrightarrow x=2y+1$. Thay vào (1) ta được: $(y+1)^2+y\sqrt{y^2+1}=2y+\dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow y\sqrt{y^2+1}=\frac{3}{2}-y^2$$

$$\Rightarrow y^2(y^2+1)=\frac{9}{4}-3y^2+y^4\Rightarrow 4y^2=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{9}{16}\Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{4}.$$

Với $y=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$; $y=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn ĐK). Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{-3}{4};\dfrac{-1}{2}\right)$.

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 & (1)\\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1} & (2)\end{cases}$$

Phân tích. Phương trình thứ (2) của hệ có hai biểu thức trong căn là $(4y^2+1)$ và (x^2+1) hé lộ hàm đặc trưng cần lập. Tuy nhiên chưa có sự độc lập giữa các biến khi ở vế trái còn nhân thêm một lượng x^2. Vậy ta có thể cô lập vế trá bằng việc chia cả hai vế cho x^2?

Lời giải. ĐK: $x\geq 0$. Nhận thấy rằng $x=0$ không phải là nghiệm của hệ nên ta chia cả hai vế của phương trình (2) cho x^2 ta được:

$$2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}.\quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$. Ta có

$$f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên $(3)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x}$.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6$$

$$\Leftrightarrow x+x^3+2(x^2+1)\sqrt{x}=6. \quad (4)$$

Nếu đặt ẩn phụ $z=\sqrt{x}$ ta sẽ đưa phương trình (4) về dạng bậc 6, việc xử lí nó không phải là việc dễ dàng. Đến đây dùng phương pháp hàm số cho thấy hiệu quả tối ưu. Xét hàm số $g(x)=x+x^3+2(x^2+1)\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Ta có

$$g'(x)=3x^2+1+4x\sqrt{x}+2\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}>0\ \forall x\geq 0.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. Nhận thấy $g(1)=6$ suy ra $x=1$ là nghiệm của phương trình (4). Với $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3 & (1)\\ x^2y-x+2=0 & (2)\end{cases}$$

Phân tích. Ta nhận thấy hệ phương trình trên có nét khá giống với hệ phương trình trong thí dụ 4, lúc này sự cô lập các ẩn phương trình được đặt lên hàng đầu. Phương trình (2) quá đơn giản nên việc tìm hàm số đặc trưng được ưu tiên hơn cho phương trình (1) bởi nó chứa nhiều phép biến đổi hơn. Vậy cô lập ẩn như thế nào để xuất hiện hàm đặc trưng? Nếu ta thực hiện phép khai triển ở vế trái của phương trình (1) thì sự phụ thuộc giữa các ẩn lại càng "gia tăng" hơn. Bởi vậy ta sẽ biến đổi như sau:

Lời giải. Rõ ràng $y=0$ không là nghiệm của (1) $\Rightarrow y\neq 0\Rightarrow \sqrt{4y^2+1}-1\neq 0$. Vậy

$$(1)\Leftrightarrow(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)\frac{4y^2}{\sqrt{4y^2+1}-1}=8x^2y^3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2=2x^2y(\sqrt{4y^2+1}-1).$$

Do $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia hai vế của phương trình trên cho x^2 ta được:

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{x^2}=2y\sqrt{4y^2+1}+y, \quad (3)$$

suy ra $y>0$. Các ẩn trong phương trình đã được cô lập nhưng hàm đặc trưng thì vẫn chưa xuất hiện... Phương trình (2) của hệ có vai trò gì chăng?

Ta có (2) $\Leftrightarrow\frac{2}{x^2}=-y+\frac{1}{x}$, suy ra $x>0$. Thay vào (3) ta có:

$$\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}+\frac{1}{x}=2y\sqrt{(2y)^2+1}+2y.$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t$. Làm tương tự như thí dụ 4 ta được hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(4;\frac{1}{8}\right)$.

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}(x+\sqrt{x^2+4})(y+\sqrt{y^2+1})=2 & (1)\\ 27x^6=x^3-8y+2 & (2)\end{cases}$$

Phân tích. Nếu thực hiện phép khai triển trong phương trình (1) thì sự ràng buộc giữa các ẩn lại khá rõ ràng. Nhận thấy rằng $y-\sqrt{y^2+1}\neq 0, \forall y\in\mathbb{R}$, do vậy ta có lời giải như sau:

Lời giải. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(x+\sqrt{x^4+4})=2(\sqrt{y^2+1}-y)$$

$$(\text{do } y-\sqrt{y^2+1}\neq 0,\ \forall y\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=-2y+\sqrt{(-2y)^2+4}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+4}$. Ta có:

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{t^2+4}+t}{\sqrt{t^2+4}}>\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) $\Leftrightarrow x=-2y$, thay vào (2) ta được: $27x^6=x^3+4x+2$ (3). Đến đây việc nhẩm nghiệm sẽ gặp rất nhiều khó khăn do đó hướng phân tích thành nhân tử để giải phương trình (3) có dấu hiệu khó khăn.

Nếu lấy căn bậc ba cả hai vế ta thấy rằng vế trái có bậc hai và biểu thức trong căn ở vế phải có bậc là ba cho phép ta nghĩ tới việc xây dựng hàm đặc trưng để giải quyết bài toán. Thật vậy:

$$(3) \Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3+4x+2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = x^3+4x+2+\sqrt[3]{x^3+4x+2} \ (4).$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$. Ta có:

$g'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \ \forall t$. Hàm số đồng biến nên

$$(4) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3+4x+2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \end{array}\right..$$

• Với $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{12}$;

• Với $x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{13}-1}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{12}\right); \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}; \dfrac{\sqrt{13}-1}{12}\right)$.

Việc cô lập ẩn ở các phương trình để tìm hàm đặc trưng trong các thí dụ trên tỏ ra hiệu quả trong việc giải các hệ phương trình mà cách thông thường khó có thể thực hiện được. Sau đây là một số bài tập áp dụng:

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}=1) \\ x\sqrt{x-2xy+1} = 4xy+6x+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5} = 3y+\sqrt{y^2+4} \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3-3x^2+2 = \sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2+8y} \end{cases}$

KHAI THÁC VÀ MỞ RỘNG ...

(Tiếp theo trang 3)

a) Chứng minh rằng: $\Delta AHC = \Delta A'HB$.

b) Chứng minh rằng: $\Delta EAD = \Delta ABA'$.

c) Chứng minh rằng: $AH \perp DE$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH. Ở miền ngoài của tam giác ABC ta vẽ các tam giác vuông cân ABE và ACF đều nhận A làm đỉnh góc vuông. Kẻ EM, FN cùng vuông góc với AH (M, N thuộc AH).

a) Chứng minh rằng: $EM + HC = NH$.

b) Chứng minh rằng: $EN \parallel FM$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$.

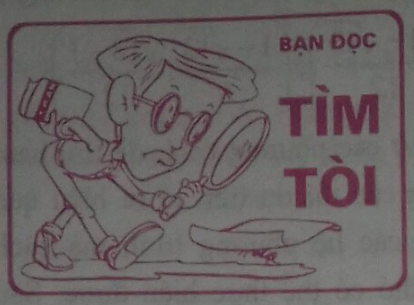
b) $EF = 2\,AM$.

c) $AM \perp EF$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng không chứa C có bờ AB, vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên tia đó lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ AC vẽ tia Ay vuông góc với AC. Trên tia đó lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Chứng minh rằng:

a) $DE = 2\,AM$.

b) $AM \perp DE$.



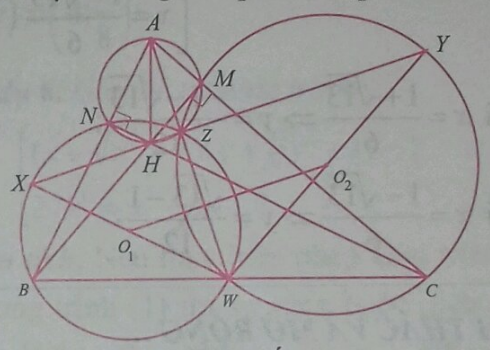
KHAI THÁC BÀI HÌNH HỌC IMO 2013

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)
TRƯƠNG THỊ THÚY VÂN
(GV trường ĐHSPKT Vĩnh Long)

Kỳ thi IMO 2013 diễn ra tại thành phố Santa Marta, Colombia từ ngày 18 tháng 07 năm 2013 đến ngày 28 tháng 07 năm 2013, có bài hình học ngày thi thứ hai khá thú vị. Đặc biệt, trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 492, Thầy *Trần Xuân Đáng*, giáo viên trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** có đưa ra 5 cách giải khá hay cho bài toán này. Tiếp tục khai thác bài toán này, chúng tôi xin gửi đến bạn đọc một hướng tiếp cận mới. Đó là xét bài toán trong một trường hợp đặc biệt, để từ đó chúng ta đi khai thác, tiếp cận tìm lời giải cho nhiều bài toán khác. Chúng ta bắt đầu từ bài toán IMO 2013.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H, và W là điểm trên cạnh BC, W nằm giữa B và C. Các điểm M và N theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Gọi w_1 là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN, và X là một điểm trên đường tròn w_1 sao cho WX là đường kính của đường tròn w_1. Tương tự, w_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM, và Y là một điểm nằm trên đường tròn w_2 sao cho WY là đường kính của đường tròn w_2. Chứng minh rằng X, Y và H thẳng hàng.*

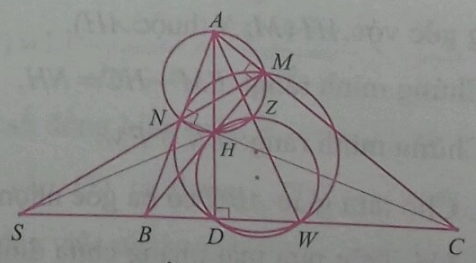
Lời giải. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn w_1 và w_2; Z là giao điểm thứ hai của hai đường tròn w_1 và w_2. Ta có tứ giác $BNMC$ nội tiếp nên $\overline{AB}.\overline{AN} = \overline{AC}.\overline{AM}$, suy ra ba điểm A, Z, W thẳng hàng và $AW \perp O_1O_2$, hay $AW \perp XY$. Mặt khác, theo định lý Miquel, Z nằm trên đường tròn đường kính AH nên $HZ \perp AW$. Dễ thấy, ba điểm Z, X, Y thẳng hàng nên ba điểm X, H, Y thẳng hàng. Bây giờ, đặc biệt hóa W là trung điểm của BC, chúng ta sẽ thu được những kết quả rất đẹp và bất ngờ.



***Nhận xét* 1.** Giả sử MN cắt BC tại S. Khi đó ba đường thẳng MN, HZ, BC đồng quy, hay năm điểm X, H, Z, Y, S thẳng hàng. Ta có bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H; W là trung điểm cạnh BC; các điểm M, N theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Gọi Z là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AH với AW. Giả sử MN cắt BC tại S. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, HZ, BC đồng quy.*

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có $M, N, D, W \in (J)$ với (J) là đường tròn Euler của tam giác ABC. Suy ra

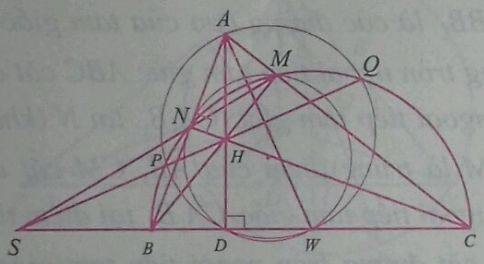
$$\mathcal{P}_{S/(J)} = \overline{SM}.\overline{SN} = \overline{SD}.\overline{SW} \Rightarrow \mathcal{P}_{S/(HW)} = \mathcal{P}_{S/(AH)}$$

mà trục đẳng phương của hai đường tròn (AH) và (HW) là HZ nên ta có điều phải chứng minh.

***Nhận xét* 2.** Gọi P, Q là giao điểm của hai đường tròn đường kính AW và đường tròn đường kính BC. Khi đó ba điểm H, P, Q thẳng hàng, hay bảy điểm X, H, Z, Y, S, Q, P thẳng hàng. Ta có bài toán sau:

Bài toán 3. (Đề thi HSG tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu 2011). *Cho H là trực tâm tam giác ABC không cân, $\widehat{BAC}$ là góc nhọn. Hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC theo thứ tự là N, M. Gọi W là trung điểm của BC; P, Q là giao điểm của hai đường tròn đường kính AW và BC. Chứng minh rằng ba điểm H, P, Q thẳng hàng và các đường thẳng BC, MN, PQ đồng quy.*

Lời giải.



Gọi S là giao điểm của MN và BC, D là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có

$$\mathcal{P}_{H/(BC)} = \overline{HM}.\overline{HB} = \overline{HD}.\overline{HA} = \mathcal{P}_{H/(AW)}.$$

Suy ra H nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BC và AW, hay H, P, Q thẳng hàng. Lại có

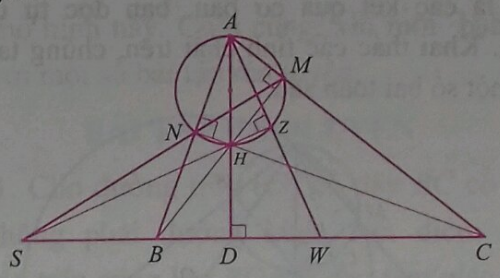
$$\mathcal{P}_{S/(BC)} = \overline{SB}.\overline{SC} = \overline{SM}.\overline{SN} = \overline{SD}.\overline{SW} = \mathcal{P}_{S/(AW)}$$

suy ra S nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BC và AW. Suy ra S, P, Q, H thẳng hàng, hay các đường thẳng BC, MN, PQ đồng quy.

***Nhận xét* 3.** Từ các bài toán khai thác trên, dễ thấy $SH \perp AW$. Ta có bài toán sau:

Bài toán 4. (MOSP 1995) *Cho tam giác ABC. Gọi D, M, N lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C; H là trực tâm tam giác ABC; W là trung điểm của BC; S là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Chứng minh rằng $SH \perp AW$.*

Lời giải.

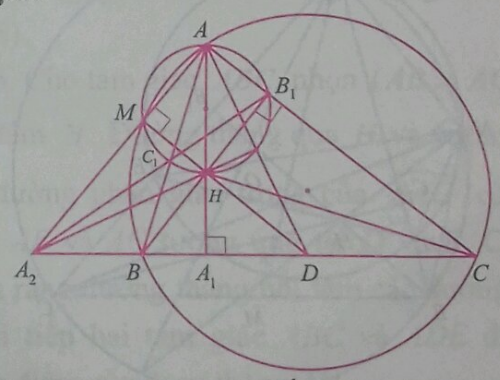


Theo bài 1, ta có $HZ \perp AW$. Theo bài 2, ta có ba điểm H, S, Z thẳng hàng nên $SH \perp AW$.

***Nhận xét* 4.** Theo bài toán 4, rõ ràng H là trực tâm của tam giác ASW. Ta có bài toán khai thác sau:

Bài toán 5. (USA TST 2012) *Cho tam giác ABC có chân các đường cao kẻ từ A, B, C đến các cạnh đối diện lần lượt là A_1, B_1, C_1. Gọi A_2 giao điểm của đường thẳng BC và B_1C_1. Các điểm B_2, C_2 được xác định tương tự. Giả sử D, K, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng vuông góc kẻ từ D đến AA_2, từ K đến BB_2, từ F đến CC_2 đồng quy.*

Lời giải.



Từ nhận xét trên, ta thấy các đường thẳng vuông góc kẻ từ D đến AA_2, từ K đến BB_2, từ F đến CC_2 đều đi qua điểm H nên ta có điều phải chứng minh.

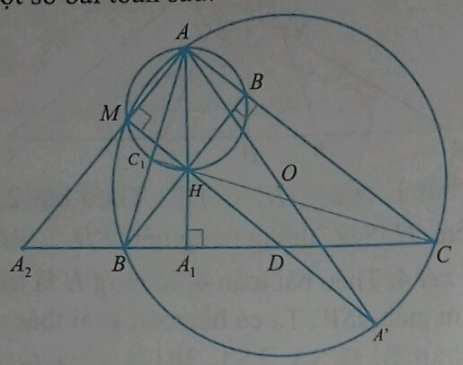
***Nhận xét* 5.** Từ bài toán 5, kéo dài tia HD cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm A' (như hình vẽ), ta thấy xuất hiện một số tính chất thú vị như sau:

a) AA' là đường kính của đường tròn (O).

b) Điểm M nằm trên đường tròn đường kính AH.

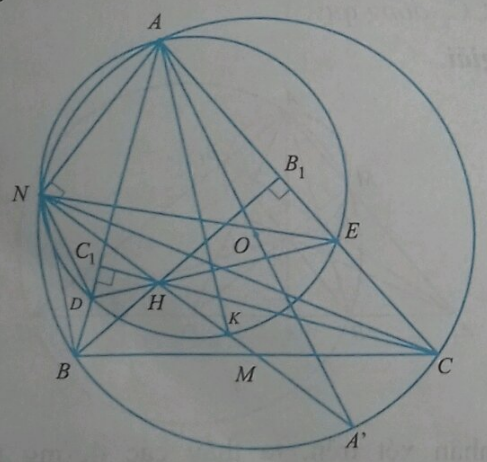
c) Ba điểm A_2, M, A thẳng hàng (M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCB_1C_1AA_2$).

Đây là các kết quả cơ bản, bạn đọc tự chứng minh. Khai thác các tính chất trên, chúng ta đến với một số bài toán sau:



Bài toán 6. (Viet Nam TST 2006) *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại K. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn BC.*

Lời giải.



Gọi (O), (w) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác ADE; N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và (W); B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của BH, CH với AC, AB; M là trung điểm BC. Ta có DE là phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ nên $\widehat{C_1HD} = \widehat{EHC} = \widehat{B_1HE}$. Suy ra, $\Delta C_1HD \backsim \Delta B_1HE$ (g.g), từ đó $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$, hay ΔADE cân tại A. Lại có $\Delta BND \backsim \Delta CNE (g.g)$ nên $\dfrac{ND}{NE} = \dfrac{DB}{EC}$. Mà $\Delta HDB \backsim \Delta HEC (g.g)$ nên $\dfrac{ND}{NE} = \dfrac{DB}{EC} = \dfrac{HD}{HE}$.

Suy ra NH là phân giác của $\widehat{DNE}$, hay NH đi qua K là điểm chính giữa của cung nhỏ DE.

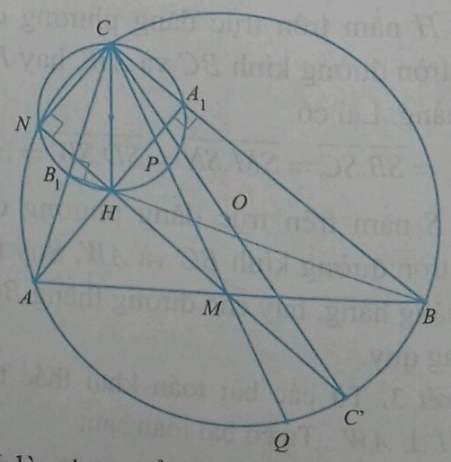
Mặt khác, tam giác ADE cân tại A nên AK là đường kính của đường tròn (W), hay $HN \perp NA$ và N, H, K thẳng hàng (1).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Khi đó $A'N \perp NA$, hay N, H, K, A' thẳng hàng.

Theo nhận xét 5, các điểm A', M, H, N thẳng hàng (2). Từ (1) và (2) suy ra KH đi qua trung điểm M của đoạn BC.

Bài toán 7. (Chọn Đội tuyển Quảng Ninh 2016) *Cho tam giác ABC nhọn không cân. Gọi AA_1, BB_1 là các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CA_1B_1 tại N (khác C). Gọi M là trung điểm của AB, CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CA_1B_1 tại điểm thứ hai là P, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $MP = MQ$.*

Lời giải.



Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính CH và (O). Kẻ đường kính CC' của (O). Theo nhận xét 5, ta có bốn điểm C', H, N, M thẳng hàng. Mặt khác

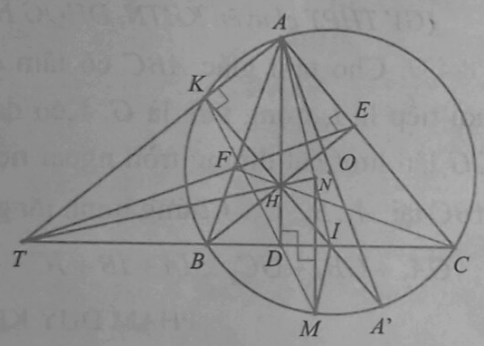
$$\left|\overline{MP}.\overline{MC}\right| = \left|\overline{MH}.\overline{MN}\right| = \left|\overline{MC'}.\overline{MN}\right|$$

$$= MQ.MC = \left|\mathcal{P}_{M/(O)}\right|.$$

Suy ra $MP.MC = MQ.MC$, hay $MP = MQ$.

Bài toán 8. (Viet Nam TST 2015) *Cho đường tròn (O) có dây BC cố định và không phải đường kính. Xét điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh BC, trực tâm tam giác ABC. Tia IH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và đường thẳng KD cắt lại đường tròn (O) tại M. Từ điểm M, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BC cắt AI tại điểm N. Chứng minh rằng điểm N luôn thuộc đường tròn cố định khi A thay đổi.*

Lời giải.



Gọi AD, BE, CF là ba đường cao trong tam giác ABC; T là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Theo nhận xét 5, ta có ba điểm T, K, A thẳng hàng và tam giác ATI có hai đường cao IK, AD đồng quy tại trực tâm H. Suy ra tứ giác $KAID$ nội tiếp nên $\widehat{AID} = \widehat{TKD}$. Mặt khác, $(TD, BC) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin ta có $\overline{DI}.\overline{DT} = \overline{DB}.\overline{DC} = \overline{DK}.\overline{DM}$. Suy ra, tứ giác $TKIM$ nội tiếp nên $\widehat{NID} = \widehat{TKD} = \widehat{DIM}$. Suy ra M đối xứng với N qua BC. Mặt khác, ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng trục, với trục đối xứng là BC nên cố định. Vậy, điểm N luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Rõ ràng trong bài hình học IMO 2013, khi đặc biệt hóa W là trung điểm của cạnh BC thì chúng ta thu được khá nhiều các bài toán liên quan đến mô hình này. Cuối cùng, xin mời bạn đọc đến với một số bài tập rèn luyện.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn (O) có dây BC cố định và không phải đường kính. Xét điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh BC, trực tâm tam giác ABC. Tia IH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và đường thẳng KD cắt lại đường tròn (O) tại M. Gọi J là giao điểm của hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Chứng minh rằng ba điểm A, M, J thẳng hàng.

Bài 2. (*IMO Shortlist* 2005). Cho ΔABC nhọn không cân có H là trực tâm; M là trung điểm BC. Gọi D, E nằm trên AB, AC sao cho $AE = AD$ và D, H, E thẳng hàng. Chứng minh rằng HM vuông góc với dây cung chung của (O), (ADE).

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn $(AB \neq AC)$ có trực tâm H. Đường thẳng qua H và vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại D và E. Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và ADE đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH.

Bài 4. (*HSG tỉnh Nghệ An* 2013) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi K là giao điểm của phân giác góc A của tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE (K khác A). Chứng minh rằng hai tam giác BHK và CHK có diện tích bằng nhau.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/497 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn:

$$1!+2!+3!+...+n!=p^2+q^2+5895,$$

trong đó p, q là hai số nguyên tố. Quy ước rằng $n!=1.2.3...n$.

ĐÀO CÁT NHƠN

(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/497 (Lớp 7). Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CK thỏa mãn điều kiện HMK là tam giác đều. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Bài T3/497. Giả sử n là một số nguyên dương sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư của $2^n+17^n+2018^{n^2}$ khi chia cho 11.

BÙI VĂN PHÚC

(GV THPT chuyên Hà Giang, Hà Giang)

Bài T4/497. Cho (O) và một dây BC cố định. A di động trên cung lớn BC, M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng hai đường cao MM' và NN' của ΔAMN, mỗi đường đi qua một điểm cố định.

PHẠM TUẤN KHẢI

(29, ngõ 67, đường Giáp Bát, Q. Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/497. Giải phương trình:

$$13x^2-5x-13=(16x-11)\sqrt{2x^2-3}.$$

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/497. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+5}+\sqrt{4y^2+5}=6|xy|\\ 2^{\frac{1}{x^8}+\frac{2}{y^4}}+2^{\frac{1}{y^8}+\frac{2}{x^4}}=16\end{cases}.$$

HUỲNH NGUYỄN LUÂN LƯU

(11 Dân Trí, P.6, Quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/497. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c,

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+$$
$$+\sqrt{\frac{2(a+b+c)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/497. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I, trọng tâm là G. Kéo dài AG, BG, CG lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

$$GA_2+GB_2+GC_2\ge IA+IB+IC.$$

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/497. Cho hàm số liên tục f, g: $[a,b]\to[a,b]$ thỏa mãn

$$f(g(x))=g(f(x))\quad\forall x\in[a,b];$$

a, b là các số thực hữu hạn. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm.

NGUYỄN KIM DOĂNG

(493/74 Cách Mạng Tháng 8, Phường 13, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/497. Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn $m^5n+2019$ và mn^5+2019 là hai lũy thừa ba của các số nguyên.

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T11/497. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, ..., 2019\}$ và $S_1, S_2, ..., S_{410}$ là các tập con của S sao cho với mọi phần tử $i \in S$, tồn tại đúng 40 tập hợp chứa i. Chứng minh rằng tồn tại các chỉ số $j, k, l \in \{1, 2, ..., 410\}$ đôi một phân biệt sao cho $|S_j \cap S_k \cap S_l| \le 1$.

VŨ HỒNG SƠN

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/497. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ với E là giao điểm của AC và BD. Hai đường tròn (EAD) và (EBC) cắt nhau tại F khác E. Trung trực của các đoạn thẳng BD, AC lần lượt cắt FB, FA theo thứ tự tại K, L. Chứng minh rằng KL chia đôi đoạn thẳng AB.

NGUYỄN VĂN LINH *(Hà Nội)*

Bài L1/497. Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số $f = 80$Hz, tốc độ truyền sóng là 1,6m/s. Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O. Biết $OA = 9$cm; $OB = 12$cm. Xác định số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/497. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$(V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại $\mathcal{P}_{max} = 45$W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là $u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$(V). Xác định điện dung của tụ điện.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/497 (For 6th grade). Find all positive integers n such that there exist prime numbers p, q satisfying

$$1! + 2! + 3! + ... + n! = p^2 + q^2 + 5895.$$

Notice that $n! = 1.2.3...n$.

Problem T2/497 (For 7th grade). Given an acute angle ABC with the altitude AH, the median BM, the angle bisector CK. Show that if HMK is an equilateral triangle then so is ABC.

Problem T3/497. Suppose that n is a positive integer so that $3^n + 7^n$ is divisible by 11. Find the remainder in the divison of $2^n + 17^n + 2018^{n^2}$ by 11.

Problem T4/497. Given a circle (O) and suppose that BC is a fixed chord of (O). Let A be a point moving on the major arc BC; and M, N respectively the midpoints of AB and AC. Show that each of the altitudes MM' and NN' of ΔAMN contains some fixed point.

Problem T5/497. Solve the equation

$$13x^2 - 5x - 13 = (16x - 11)\sqrt{2x^2 - 3}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/497. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+5} + \sqrt{4y^2+5} = 6|xy| \\ 2^{\frac{1}{x^8}+\frac{2}{y^4}} + 2^{\frac{1}{y^8}+\frac{2}{x^4}} = 16 \end{cases}.$$

Problem T7/497. Show that the following inequality holds for all positive numbers a, b, c

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{2}(ab + bc + ca) + \sqrt{\frac{2(a+b+c)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Problem T8/497. Given triangle ABC with the incenter I, the centroid G. There lines AG, BG, CG respectively intersect the circumcircle of ABC at A_2, B_2, C_2. Show that

$$GA_2 + GB_2 + GC_2 \ge IA + IB + IC.$$

(Xem tiếp trang 29)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/495 (Lớp 6). Chứng minh rằng không thể phân tích số $2^{9^{2018}}$ thành tổng của n số nguyên dương liên tiếp ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/495 (Lớp 7). Tìm mười hai chữ số tận cùng của số tự nhiên 5^{1040}.

HUỲNH THANH TÂM
(Cán Bộ Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/495. Giải các hệ phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $\begin{cases} 3a^2+2ab+3b^2=12 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (z-3)(x^2+y^2)-2xy=0 \\ x+y=z \end{cases}$.

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T4/495. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trong góc BAC vẽ các tia Ax, Ay sao cho $\widehat{CAx}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$; $\widehat{BAy}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ và tia Ax cắt tia phân giác góc ACB tại Q, tia Ay cắt cạnh BC tại K. Tìm tỉ số $\frac{AK}{AQ}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T5/495. Giải phương trình:

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+2x=5.$$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang, Hà Giang)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/495. Chứng minh rằng với các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz=1$ ta luôn có:

$$\left(\frac{x}{1+xy}\right)^2+\left(\frac{y}{1+zy}\right)^2+\left(\frac{z}{1+xz}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T7/495. Cho đa thức $P(x)=x^{2018}-ax^{2016}+a$, trong đó a là tham số thực. Biết rằng $P(x)$ có 2018 nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm x_0 của $P(x)$ thỏa mãn $|x_0| \leq \sqrt{2}$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T8/495. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA=SB=SC=a$, $AB=2a, BC=3a$. Đặt $SD=x$ $(0<x<a\sqrt{14})$. Tìm x theo a để tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T9/495. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(M-m)^3$$

trong đó $M=\max\{x,y,z\}$ và $m=\min\{x,y,z\}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/495. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_n=n+[\sqrt[3]{n}]$ với n là số nguyên dương và $[\sqrt[3]{n}]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\sqrt[3]{n}$. Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho các số hạng: $a_k; a_{k+1}; ...; a_{k+p}$ lập thành một dãy $p+1$ số tự nhiên liên tiếp trong đó $p=6015\times 2006+1$. Chứng minh rằng:

$$k>8.10^9+6.10^7.$$

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T11/495. Tìm số k nhỏ nhất sao cho trong tập con tùy ý gồm k phần tử của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 25\}$ luôn có 3 số tạo thành bộ ba Pythagoras.

VŨ ĐÌNH HÒA (*GV ĐHSP Hà Nội*)

Bài T12/495. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là chân đường cao đỉnh A, đường thẳng AO cắt BC tại D. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD cắt (O) tại M và N. Gọi X là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng $XA = XK$.

NGUYỄN THANH DŨNG

(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn*)

Bài L1/495. Một con lắc lò xo lí tưởng lò xo nhẹ có hệ số đàn hồi 10N/m, đầu trên gắn giá cố định, đầu dưới gắn vật nhỏ khối lượng 100g. Ở vị trí cân bằng, truyền cho vật vận tốc 20cm/s hướng xuống dưới. Coi rằng vật dao động điều hoà. Đặt một thấu kính mỏng có độ tụ $D = +10$dp sao cho trục chính của thấu kính nằm ngang và đi qua vị trí cân bằng của vật dao động. Quang tâm của thấu kính cách vị trí cân bằng 15cm. Chọn trục Ox thẳng đứng hướng lên, gốc toạ độ là vị trí cân bằng của vật, mốc thời gian là lúc lò xo dãn 9cm lần đầu tiên, kể từ khi vật bắt đầu dao động. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Xác định phương trình dao động của ảnh của vật trên Ox.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

Bài L2/495. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện có điện dung thay đổi được. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)(\text{V})$$

và điều chỉnh điện dung của tụ điện sao cho điện áp trên đoạn mạch AM không phụ thuộc vào biến trở. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là

$$u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(\text{V})$$

và công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch AB là $P = 90$ W. Xác định độ tự cảm của cuộn dây.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/495 (For 6th grade). Show that it is impossible to write $2^{9^{2018}}$ as a sum of n consecutive positive integers for any $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Problem T2/495 (For 7th grade). Find the last twelve digits of the number 5^{1040}.

Problem T3/495. Find integral solutions of the following systems of equations

a) $\begin{cases} 3a^2 + 2ab + 3b^2 = 12 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (z-3)(x^2+y^2) - 2xy = 0 \\ x + y = z \end{cases}$.

Problem T4/495. Given a right triangle ABC with the right angle A. In the angle $\widehat{BAC}$ draw the rays Ax, Ay such that $\widehat{CAx} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$; $\widehat{BAy} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. The ray Ax intersects the angle bisector of $\widehat{ACB}$ at Q, the ray Ay intersects BC at K. Compute the ratio $\frac{AK}{AQ}$.

Problem T5/495. Solve the equation

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 1}} + 2x = 5.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/495. Given real numbers x, y, z such that $xyz = 1$, show that

$$\left(\frac{x}{1+xy}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+zy}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+xz}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

(*Tiếp theo trang 45*)

Bài T1/493. *Tìm 2018 số sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng các số còn lại.*

Lời giải. Gọi 2018 số cần tìm là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2018}$. Đặt $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2018}$. Theo giả thiết mỗi số bằng bình phương của tổng các số còn lại nên 2018 số cần tìm đều là các số không âm.

Cách giải 1. Giả sử $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{2018}$ thì theo giả thiết $s - a_1 \ge s - a_2 \ge \ldots \ge s - a_{2018}$ do đó

$a_1 = (s - a_1)^2 \ge (s - a_2)^2 \ge \ldots \ge (s - a_{2018})^2 = a_{2018}$, tức là $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_{2018}$. Từ đó và điều giả sử thì $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2018} = a$, tức là $s = 2018a$. Thay vào $a_1 = (s - a_1)^2$ được $a = (2017a)^2 = 2017^2 a^2$, hay là $a(1 - 2017^2 a) = 0$.

Xảy ra hai trường hợp sau:

1) Nếu $a = 0$ thì tất cả 2018 số cần tìm đều bằng 0, thỏa mãn đề bài;

2) Nếu $a \ne 0$ thì có $2017^2 a = 1$, hay là mỗi số cần tìm đều bằng $a = \dfrac{1}{2017^2} = \dfrac{1}{4068289}$.

Cách giải 2. Đặt $a = a_1$ và b là một số tùy ý trong 2017 số còn lại. Từ giả thiết ta có $a = (s - a)^2$ và $b = (s - b)^2$.

Từ đó $a - b = (s - a)^2 - (s - b)^2 =$
$= (s - a - s + b)(s - a + s - b) = (b - a)(2s - a - b)$,
do đó $(b - a)(2s - a - b) + (b - a) = 0$, hay là

$$(b - a)(2s - a - b + 1) = 0 \qquad (*)$$

Do tất cả 2018 số đều không âm nên $2s - a - b \ge 0$ do đó $2s - a - b + 1 \ge 1$. Từ đó và (*) suy ra $b = a$ với b là một số tùy ý trong 2017 số còn lại, tức là 2018 số cần tìm đều bằng nhau và bằng a. Tiếp tục giải như ở cách 1, dẫn đến kết quả. ❐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Một số bạn thiếu lập luận rằng tất cả các số cần tìm đều không âm. Nhiều bạn kết luận là bài toán chỉ có nghiệm gồm 2018 số 0.

2) Các bạn giải đúng là: **Hà Nội:** *Nguyễn Phúc Hải*, 6A1, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Nghệ An:** *Trần Duy Thành Đạt*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

Bài T2/493. *Tính tổng:*

$$S = (1 + 2.3 + 3.5 + \ldots + 101.201) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2).$$

Lời giải. Biến đổi tổng trên thành như sau:

$$S = 1 + (2.3 + 1^2) + (3.5 + 2^2) + (4.7 + 3^2) + \ldots + (101.201 + 100^2).$$

Đặt $f(n) = n^3$, n là số tự nhiên. Khi đó ta có:

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1) + n^2.$$

Cho n lần lượt từ 0 đến 100 thì thu được:

$$S = f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + f(4) - f(3) + \ldots + f(101) - f(100)$$
$$= f(101) - f(0) = 101^3.$$ ❐

⊲***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 6A, *Thái Huyền Trang*, 6B, *Trương Công Cảnh*, *Trần Hồng Minh*, *Nguyễn Văn Thành Nam*, *Nguyễn Quốc Hiếu*, *Hoàng Thế Hiếu*, *Phạm Văn Quyền*, *Đặng Hữu Khanh*, *Nguyễn Thị Khánh Như*, *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 7A, *Nguyễn Công Phúc*, 7C, *Nguyễn Xuân Khoái*, 7D, *Nguyễn Phương Uyên*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hoàng Hưng*, *Lê Tuấn Tài*, *Huỳnh Hoàng Nguyên*, 6A, *Văn Nguyễn Tuyết Minh*, THCS Phạm Văn Đồng, *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn

Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Chính*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/493. *Tìm các cặp số nguyên dương m, n thỏa mãn* $n^3 - 5n + 10 = 2^m$. (1)

Lời giải. • Với $m \le 2$ thì từ (1) suy ra

$$n^3 - 5n + 10 = 2^m \le 4 \Rightarrow n^3 - 5n + 6 \le 0. \quad (2)$$

Mặt khác do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n^3 - 5n + 6 > 0$, điều này mâu thuẫn với (2). Vậy $m > 2$.

• Với $m = 3$ thì thay vào (1) ta có

$$n^3 - 5n + 10 = 8 \Leftrightarrow (n-2)(n^2 + 2n - 1) = 0.$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n^2 + 2n - 1 > 0$, suy ra $n - 2 = 0$ $\Leftrightarrow n = 2$.

• Với $m \ge 4$ thì biến đổi (1) thành

$$(n-2)(n^2 + 2n - 1) = 8(2^{m-3} - 1). \quad (3)$$

Nhận thấy

$$(n^2 + 2n - 1) - (n - 2) = n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$$

là số lẻ và $n \in \mathbb{N}^*$, nên hai số $n^2 + 2n - 1$ và $n - 2$ là hai số tự nhiên khác tính chẵn lẻ. Do đó từ (3) xảy ra hai khả năng

a) $\begin{cases} n - 2 = 8 \\ n^2 + 2n - 1 = 2^{m-3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ 2^{m-3} = 120 \end{cases}$.

Do 2^{m-3} là số tự nhiên có số tận cùng khác 0 nên $2^{m-3} \ne 120$. Vì vậy trường hợp này không xảy ra.

b) $\begin{cases} n - 2 = 2^{m-3} - 1 \\ n^2 + 2n - 1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{m-3} = n - 1 \\ n^2 + 2n - 9 = 0 \end{cases}$.

Do phương trình $n^2 + 2n - 9 = 0$ không có nghiệm tự nhiên nên trường hợp này cũng không xảy ra. Vậy có một cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn là $(m; n) = (3; 2)$. □

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, ta còn có thể xét các trường hợp của n $(n = 1;\ n \ge 2)$ trước, rồi mới xét m. Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Lương Hữu Khanh*, 7A, *Kiều Đình Hải*, 9A, THCS Lý Nhật Quang.

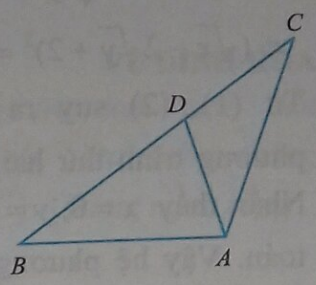
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/493. *Cho tam giác ABC (với* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$*) có* $3\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^0$. *Chứng minh rằng* $b + c \le \frac{5}{4}a$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $3\widehat{B} + 2\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

$\Leftrightarrow \widehat{A} = 2\widehat{B} + \widehat{C}$

$\Leftrightarrow 2\widehat{A} = \widehat{B} + 180^0$.



Vậy BC là cạnh lớn nhất trong tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Ta có

$$\widehat{DAC} = \widehat{A} - \widehat{DAB} = \frac{\widehat{B}}{2} + 90^0 - \left(90^0 - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = \widehat{B}.$$

Suy ra $\Delta CAD \backsim \Delta CBA$ (g.g). Ta có

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA} \Leftrightarrow b^2 = a(a - c)$$

$$\Leftrightarrow a(b + c) = a^2 - b^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow a(b + c) = \frac{5}{4}a^2 - \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 \le \frac{5}{4}a^2.$$

Do đó $b + c \le \frac{5}{4}a$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 2b$ và $b + c = \frac{5}{4}a$, hay $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. □

Nhận xét. 1) Nhiều bạn không chỉ ra trường hợp đẳng thức xảy ra. Một số bạn sử dụng định lý sin để đưa về bài toán lượng giác.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/493. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x} - y + 2 = 0 \\ x + 8y + 4\sqrt{x} - 8\sqrt{y} - 4\sqrt{xy} = 0 \end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x \ge 0$; $y \ge 0$. Phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với

$$x^2 + \sqrt{x} = y^2 + y - 2.$$

Ta có: $x^2+\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow y^2+y-2\ge 0$

$$\Rightarrow (y-1)(y+2)\ge 0 \Rightarrow y\ge 1 \qquad (1)$$

Mặt khác phương trình thứ hai có thể viết thành

$$(x+4y+4-4\sqrt{xy}+4\sqrt{x}-8\sqrt{y})+4(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2\sqrt{y}+2)^2=4(1-y)\ge 0 \Rightarrow y\le 1 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $y=1$. Thay $y=1$ vào phương trình thứ hai trong hệ, ta được $x=0$. Nhận thấy $x=0;\ y=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** • Bản chất của lời giải là từ điều kiện $x\ge 0;\ y\ge 0$ và phương trình thứ nhất suy ra $y\ge 1$; phương trình thứ hai suy ra $y\le 1$; từ đó có $y=1;\ x=0$.

• Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Ninh Thuận**: *Trương Thanh Minh*, 9/1 THCS Trương Định, TT Phước Dân, Ninh Phước; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 8A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa**: *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Phú Thọ**: *Nguyễn Công Hải*, *Đào Nhân Độ*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An**: *Lê Hải Phong*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/493. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a+b)^2+c^2}+\frac{1}{(b+c)^2+a^2}+\frac{1}{(c+a)^2+b^2}\le\frac{3}{5}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $0<a<3$ và

$$(b+c)^2+a^2=(3-a)^2+a^2=2(a-1)^2-2(a-1)+5$$
$$=2x^2-(2x-5),$$

trong đó $x=a-1,\ -1<x<2$.

Chú ý

$$[2x^2-(2x-5)](2x+5)=2x^2(2x+5)-(4x^2-25)$$
$$=2x^2(2x+3)+25\ge 25.$$

Vì $1<2x+3$ suy ra $\dfrac{1}{(b+c)^2+a^2}\le\dfrac{2x+5}{25}=\dfrac{2a+3}{25}$ (1)

Kết hợp với hai kết quả tương tự ta nhận được

$$\frac{1}{(a+b)^2+c^2}+\frac{1}{(b+c)^2+a^2}+\frac{1}{(c+a)^2+b^2}\le$$
$$\le\frac{2c+3}{25}+\frac{2a+3}{25}+\frac{2b+3}{25}=\frac{2(a+b+c)+9}{25}=\frac{3}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a-1=b-1=c-1=0 \Leftrightarrow a=b=c=1.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Bất đẳng thức (1) được suy ra từ kỹ thuật phân tích nhân tử lớp 8. Hoan nghênh các bạn học sinh sau đã tham gia và có lời giải đúng : **Hà Nội:** *Ngô Bảo An*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Ninh Thuận:** *Trương Thanh Minh*, 9/1, THCS Trương Định, Phước Dân, Ninh Phước.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/493. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x-1=\sqrt[4]{9+12y-6y^2} \\ y-1=\sqrt[4]{9+12x-6x^2} \end{cases}.$$

Lời giải. (*Của hầu hết các bạn*).

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x\ge 1, y\ge 1 \\ 9+12x-6x^2\ge 0 \\ 9+12y-6y^2\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, y\ge 1 \\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}+1\ge x,\ y\ge -\dfrac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}+1\ge x, y\ge 1.$$

Đặt $x-1=a,\ y-1=b$ với $\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ge a,b\ge 0$, ta thu được hệ phương trình tương đương với hệ ban đầu là $\begin{cases} a=\sqrt[4]{15-6b^2} \\ b=\sqrt[4]{15-6a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4=15-6b^2 \\ b^4=15-6a^2 \end{cases}.$

Trong trường hợp $a=b$, ta có phương trình tương đương hệ phương trình ban đầu là phương trình trùng phương $a^4=15-6a^2$ và nghiệm duy nhất thỏa mãn $\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ge a,b\ge 0$ là

$$a=b=\sqrt{2\sqrt{6}-3}.$$

Thay trở lại $x-1=a,\ y-1=b$ ta có nghiệm

$$x=y=1+\sqrt{2\sqrt{6}-3}.$$

Trong trường hợp $a\neq b$, đem trừ theo vế các phương trình của hệ cuối, ta được phương trình $a^4-b^4=6(a^2-b^2)\Leftrightarrow(a^2-b^2)(a^2+b^2-6)=0.$

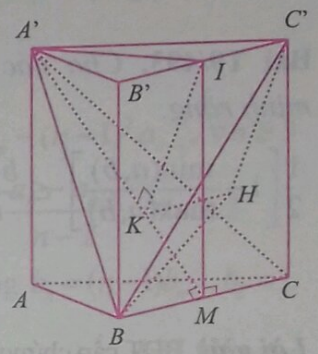
Ta thu được mâu thuẫn vì $a\neq b$ và do $\frac{\sqrt{10}}{2}\geq a,b\geq 0$ (vì thừa số thứ nhất của phương trình cuối khác 0, thừa số thứ hai không vượt quá -1). Tóm lại hệ phương trình có duy nhất một nghiệm $x=y=1+\sqrt{2\sqrt{6}-3}$. □

➢***Nhận xét.*** Rất đông các bạn có lời giải đúng. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh,* 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lai Gia Kỳ*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre, *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân; **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, 10A1, *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng; **Đồng Tháp:** *Võ Xuân Nghĩa*, *Đinh Thái Duy*, *Nguyễn Hoàng Phương Uyên*, *Nguyễn Xuân Huy*, *Ngô Bách Phương* 10T, *Huỳnh Tấn Phát*, *Đoàn Quanh Huy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai:** *Hoàng Minh Quyết*, 10A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Đặng Phương Anh*, *Trịnh Hoàng Anh*, *Bùi Tuấn Dũng*, *Phạm Thị Mai Thương*, *Phạm Đoàn Việt Hà*, *Trương Văn Linh*, *Nguyễn Minh Châu*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán, *Nguyễn Thanh Lâm*, *Bùi Văn Quyến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kon Tum:** *Phạm Hải Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Kon Tum; **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải*, 8A3, *Vũ Minh Khải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Nguyễn Hữu Nam*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Tiến Duy*, *Trương Công Đức*, *Nguyễn Minh Thảo*, *Trịnh Phương Thảo*, 10 Toán 2, *Trần Thị Kim Anh*, 11 Toán 1, *Nguyễn Hồ Anh Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Lê Mỹ Khánh*, 11T1, *Tô Lê Hiền Uyên*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10 A1, *Lê Anh Dũng*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/493. *Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Chứng minh rằng*

$$\sin\alpha\leq 2\sqrt{3}-3.$$



Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng $(A'BC)$; I, M theo thứ tự là trung điểm của $B'C'$, BC. Trong mặt phẳng $(A'IM)$ kẻ $IK\perp A'M$. Khi đó do $BC\perp IM, BC\perp A'M$, nên $BC\perp(A'IM)\Rightarrow BC\perp IK$.

Mặt khác $IK\perp A'M$, suy ra $IK\perp(A'BC)$.

Từ đó kết hợp với $B'C'\,//\,(A'BC)$ ta thấy $IK=C'H$. Gọi a là độ dài cạnh đáy, h là độ dài cạnh bên của lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có

$$IK=\frac{IA'.IM}{A'M}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot h}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+h^2}}=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$$

$$BC'=\sqrt{BC^2+CC'^2}=\sqrt{a^2+h^2}.$$

Từ đây $\sin\alpha=\sin\widehat{C'BH}=\frac{C'H}{BC'}=\frac{IK}{BC'}$

$$=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}.\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{(4h^4+3a^4)+7a^2h^2}}$$

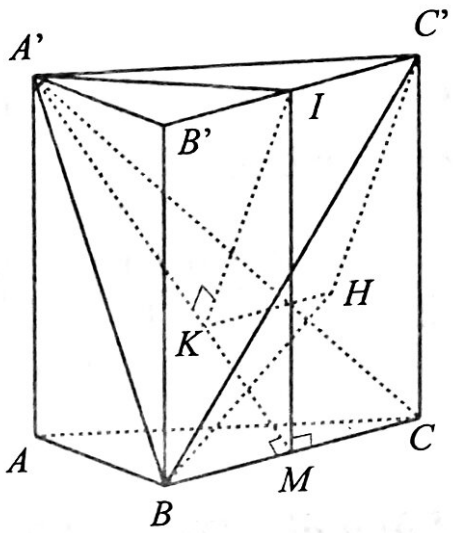
$$\leq\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2h^2\sqrt{3}+7a^2h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}=2\sqrt{3}-3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $4h^4=3a^4\Leftrightarrow h=a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$. □

➢***Nhận xét.*** Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ kết hợp với công cụ đạo hàm cũng đi đến điều

Bài T8/493. *Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Chứng minh rằng*

$$\sin\alpha \le 2\sqrt{3}-3.$$



Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng $(A'BC)$; I, M theo thứ tự là trung điểm của $B'C'$, BC. Trong mặt phẳng $(A'IM)$ kẻ $IK \perp A'M$. Khi đó do $BC \perp IM$, $BC \perp A'M$, nên $BC \perp (A'IM) \Rightarrow BC \perp IK$.

Mặt khác $IK \perp A'M$, suy ra $IK \perp (A'BC)$.

Từ đó kết hợp với $B'C' // (A'BC)$ ta thấy $IK = C'H$. Gọi a là độ dài cạnh đáy, h là độ dài cạnh bên của lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có

$$IK = \frac{IA'.IM}{A'M} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot h}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$$

$$BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = \sqrt{a^2+h^2}.$$

Từ đây $\sin\alpha = \sin\widehat{C'BH} = \dfrac{C'H}{BC'} = \dfrac{IK}{BC'}$

$$= \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}.\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{(4h^4+3a^4)+7a^2h^2}}$$

$$\le \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2h^2\sqrt{3}+7a^2h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} = 2\sqrt{3}-3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $4h^4 = 3a^4 \Leftrightarrow h = a\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$. ❐

cần chứng minh. Những bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Nguyễn Lê Huy*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Nhật Minh, Lê Thị Thúy Nga*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT Số 2 Phù Cát; **Vĩnh Long:** *Mai Quốc Khánh*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/493. *Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right]^2 \le \frac{b-a}{a}-\ln b+\ln a \le \frac{1}{2}\left[\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}-1\right]^2.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right]^2 \le \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a} \le \frac{1}{2}\left[\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)}-1\right]^2.$$

• Xét hàm số $f(x)=x-1-\ln x-\frac{1}{2}(1-x)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+1-x=-\frac{(x-1)^2}{x}\le 0\ \forall x>0$$

nên hàm f nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

• Xét hàm số $g(x)=x-1-\ln x-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có:

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^3}\ge 0\ \forall x>0$$

nên hàm g đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Xét hai trường hợp:

TH1: $a\ge b>0$. Khi đó $\frac{b}{a}\le 1$. Ta có:

$$f\left(\frac{b}{a}\right)\ge f(1)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \quad (1);$$

$$g\left(\frac{b}{a}\right)\le g(1)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \le \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \quad (3).$$

TH2: $b\ge a>0$. Khi đó $\frac{b}{a}\ge 1$. Ta có:

$$f\left(\frac{b}{a}\right)\le f(1)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \quad (4);$$

$$g\left(\frac{b}{a}\right)\ge g(1)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \le \frac{b}{a}-1-\ln\frac{b}{a}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 \quad (6).$$

Từ (3) và (6) ta có điều phải chứng minh. □

➢***Nhận xét.*** Điều quan trọng trong lời giải bài toán này là xác định được các hàm f và g, từ đó xét tính đồng biến của chúng để đưa ra các đánh giá cho trường hợp $a\ge b$ và $b\ge a$. Hầu hết các bạn tham gia có hướng giải như trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/493. *Tìm số dương k lớn nhất sao cho:*

$$a^2+b^2+c^2+k(a+b+c)\ge 3+k(ab+bc+ca) \quad (1)$$

đúng với mọi số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, **Bến Tre**).

Trước hết ta chứng minh: *Với mọi số dương a, b, c ta luôn có*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Thật vậy theo nguyên lý Dirichlet thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow c(a-1)(b-1)\ge 0$$

$$\Rightarrow 2abc \ge 2bc + 2ca - 2c.$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \ge 2(ab + c) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (c-1)^2 \ge 0$ (đúng). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy BĐT (2) được chứng minh.

Trở lại bài toán: Với mọi x dương, chọn $a = b = x$, $c = \frac{1}{x^2}$. Khi đó $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$2x^2 + \frac{1}{x^4} + k\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \ge 3 + k\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+1)^2(2x^2+1)}{x^4} \ge k\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow k \le \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2(x-1)} \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow k \le \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2(x-1)} = 2.$$

Tiếp theo ta chứng minh (1) đúng với $k = 2$.

Áp dụng (2) với $a, b, c > 0$, $abc = 1$ ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(ab + bc + ca) \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2(a + b + c) \ge 2.3\sqrt[3]{abc} = 6 \qquad (4)$$

Cộng (3) và (4) vế với vế ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) + 3 \ge 2(ab + bc + ca) + 6$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) \ge 3 + 2(ab + bc + ca).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng với các cách giải khác nhau đôi chút. Các bạn sau có lời giải tốt: **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Bá An*, 11C1, THPT Yên Định 2, Yên Định; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Minh Châu*, 10A1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Trịnh Phương Thảo*, 10A2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/493. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} x_2 = x_3 = 1 \\ (n+1)(n-2)x_{n+1} = (n^3 - n^2 - n)x_n - (n-1)^3 x_{n-1}, \forall n \ge 3 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho x_n là số nguyên.

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*). Ta viết lại (1) dưới dạng

$$\begin{cases} a_2 = 2,\ a_3 = 3 \\ (n-2)a_{n+1} = (n^2 - n - 1)a_n - (n-1)^2 a_{n-1}, \forall n \ge 3, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó $a_n = nx_n$, $n \ge 2$.

Để ý rằng

$$(n-2)a_{n+1} = (n^2 - n - 1)a_n - (n-1)^2 a_{n-1}, \forall n \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1} - a_n}{n-1} = (n-1)\frac{a_n - a_{n-1}}{n-2}, \ \forall n \ge 3$$

nên có thể viết (2) dưới dạng $b_n = (n-1)b_{n-1}$, $b_2 = 1$, trong đó $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n-1}$. Suy ra $b_n = (n-1)!$ nên

$$a_{n+1} - a_n = (n-1)b_n = (n-1) \times (n-1)! = n! - (n-1)!.$$

Do đó

$$a_n = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 2 + (n-1)! - 1! = 1 + (n-1)!.$$

Suy ra $x_n = \frac{a_n}{n} = \frac{1 + (n-1)!}{n}$, $\forall n \ge 2$.

Vậy nên $x_n \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{1 + (n-1)!}{n} \in \mathbb{Z}$. Theo định lý Willson thì $\frac{1 + (n-1)!}{n} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi n là số nguyên tố. Vậy x_n là số nguyên khi n là số nguyên tố. ❐

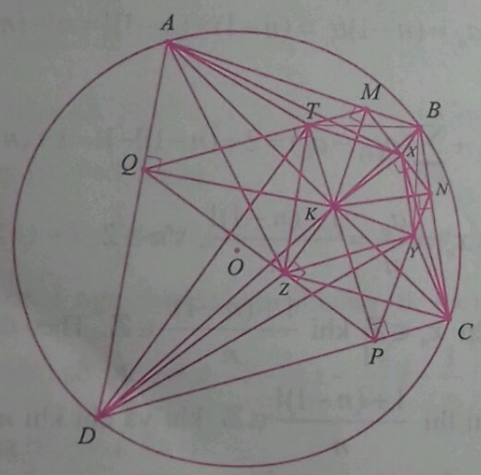
➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán về tính toán dãy số truy hồi có thuộc tính số học. Các bạn gửi đến Tòa soạn đều cho lời giải đúng theo cách đã nêu ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Minh Châu*, *Võ Thị Kim Anh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Công Đức*, 10T2, THPT

chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thanh Lâm*, 10T1, *Nguyễn Lê Huy*, *Đoàn Phú Thành*, 11A1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 12T, THPT chuyên Thăng Long; **Nam Định:** *Võ Minh Đức*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, *Lê Anh Dũng*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Mai Đức Thái*, 11 Toán 2, THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/493. *Cho tứ giác nội tiếp ABCD. K là giao điểm của AC và BD. M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu của K trên AB, BC, CD, DA. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của K trên MN, NP, PQ, QM. Chứng minh rằng diện tích của hai tứ giác AXCZ và BYDT là bằng nhau.*

Lời giải. (Theo bạn *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**).



Dễ thấy các bộ bốn điểm (A, K, M, Q), (M, K, X, T), (B, K, M, N) cùng thuộc một đường tròn. (1)

Theo giả thiết, $KM \perp MB$, $KX \perp MN$. (2)

Dễ thấy các tam giác KAD, KBC đồng dạng ngược hướng.

Từ đó, chú ý rằng $KQ \perp AD$, $KN \perp BC$, suy ra các tam giác KAQ, KBN đồng dạng ngược hướng. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned}(AB,TX) &\equiv (MA,MQ)+(TM,TX)\\ &\equiv (KA,KQ)+(KM,KX)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\ &\equiv (KA,KQ)+(MB,MN)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\ &\equiv -(KB,KN)+(KB,KN)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Do đó $AB \,//\, TX$. Điều đó có nghĩa là $S_{ATX} = S_{BTX}$.

Tương tự $S_{CXY} = S_{BXY}, S_{CYZ} = S_{DYZ}, S_{AZT} = S_{DZT}$.

Cộng vế với vế bốn đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}S_{AXCZ} &= S_{ATX} + S_{CXY} + S_{CYZ} + S_{AZT} + S_{XYZT}\\ &= S_{BTX} + S_{BXY} + S_{DYZ} + S_{DZT} + S_{XYZT} = S_{BYDT}\end{aligned}$$ ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán không khó, khá nhiều bạn tham gia giải.

2) Các bạn *Lê Thị Thu Sương*, 12T2, *Nguyễn Nhật Trung*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** có lời giải tương tự lời giải trên.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng nhưng không hay bằng lời giải trên: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; TP. Phúc Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Bảo An*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, TP. Hà Nội; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Công Thành*, 11T, THPT chuyên Bảo Lộc, TX. Bảo Lộc; **Vĩnh Long:** *Mai Quốc Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/493. *Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua một nguồn âm và ở khác phía so với nguồn âm. Biết mức cường độ âm tại A và tại trung điểm AB lần lượt là 60dB và 55bB. Xác định mức cường độ âm tại B.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của AB.

Do $L_A > L_M$ và A, B nằm về hai phía của nguồn âm O nên: $OM = \dfrac{OB - OA}{2}$ (1)

Mặt khác: $L_A - L_M = 20\log\dfrac{OM}{OA} = 5$;

GIẢI ĐÁP: PHẦNTHƯỞNG Được hay không?
(*Đề đăng trên TH&TT số* 491, *tháng* 5 *năm* 2018)

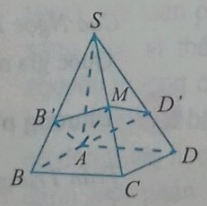
Phân tích. Lời giải của bạn *Phương Thảo* sai ở lập luận "Do $0 < x, y \le 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$, suy ra $y = \frac{x}{3x-1}$ với $\frac{1}{3} < x, y \le 1$" dẫn đến kết luận $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \le \frac{3}{2}$ là sai. Bạn *Phương Thảo* mặt dù biết vai trò x, y như nhau nhưng đã mắc hai lỗi sau:

1) Chỉ sử dụng điều kiện $x > 0, y > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$, suy ra $x > \frac{1}{3}, y > \frac{1}{3}$, rồi kết hợp với điều kiện ban đầu của x, y và kết luận $\frac{1}{3} < x, y \le 1$. Lỗi này là lỗi đánh giá không chặt.

2) Khi thử $x = \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$ thì không kiểm tra điều kiện của y (vì lúc này $y = 2$).

Lời giải đúng.

Làm như lời giải của bạn *Phương Thảo* đến $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.



Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$,

kết hợp với điều kiện $0 < x, y \le 1$ ta có $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Tương tự, ta cũng có $\frac{1}{2} \le y \le 1$.

Với $\frac{1}{2} \le x \le 1$, ta suy ra $\frac{1}{2} \le 3x - 1 \le 2$.

Đặt $t = 3x - 1$ thì $\frac{1}{2} \le t \le 2$. Khi đó:

$$\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = x + y = x + \frac{x}{3x-1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(3x - 1 + \frac{1}{3x-1}\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{2}{3}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{2}{3} \ge \frac{1}{3}.2.\sqrt{t.\frac{1}{t}} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Do $\frac{1}{2} \le t \le 2$ nên $(2t-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right) \le 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \le \frac{5}{2}$,

Suy ra $\frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{2}{3} \le \frac{3}{2}$.

Vậy khẳng định $\frac{4}{3} \le \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \le \frac{3}{2}$ là đúng.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng bài này.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG !

Trong giờ bài tập, thầy giáo đưa ra bài tập sau đây:

Tìm số thực a để hai phương trình (ẩn x)

$$x^2 - 3x - a - 2 = 0 \ (1), \quad x^2 + ax + 1 = 0 \ (2)$$

tương đương.

Bạn *Hương* xung phong lên bảng trình bày lời giải.

Lời giải của Hương như sau:

Hai phương trình $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ và $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ tương đương khi và chỉ khi hai bộ số (a_1, b_1, c_1) và (a_2, b_2, c_2) tỉ lệ. Do đó PT(1) tương đương với PT(2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3 = a \\ -a - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -3.$$

Vậy $a = -3$ là giá trị cần tìm.

Các bạn có đồng ý với kết quả này không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

suy ra $\log\frac{OM}{OA}=\frac{1}{4}$ hay $OM=\sqrt[4]{10}OA$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được:

$$OB=OA(1+2\sqrt[4]{10}) \quad (3)$$

Do đó: $L_A-L_B=20\log\frac{OB}{OA}$ (4)

Từ (3) và (4) ta tìm được:

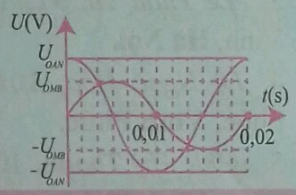
$$L_B=60-20\log(1+2\sqrt[4]{10})\approx 46,8 \text{ dB}$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Lê Như Minh*, *Đỗ Trung Thái*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/493. *Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, điện trở thuần R = 60 Ω và tụ điện. Gọi M và N là điểm nối giữa cuộn cảm với điện trở và điện trở với tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB điện áp xoay chiều có biểu thức*

$$u=U\sqrt{2}\cos\omega t \text{ (V)}$$



thì thấy điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN và điện áp ở hai đầu đoạn mạch MB biến thiên theo thời gian như đồ thị (hình vẽ). Hệ số công suất của mạch AB lúc đó là $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Xác định điện dung của tụ điện.*

Lời giải. Điện áp ở u_{AN} và u_{MB} dao động vuông pha với nhau: $\tan\varphi_{AN}.\tan\varphi_{MB}=1$

suy ra : $\frac{Z_L}{R}\cdot\frac{Z_C}{R}=1$ (1)

$U_{OAN}>U_{OMB}$ suy ra $Z_L>Z_C$.

$$k=\frac{R}{Z}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Z_L-Z_C}{R}\right)^2}}\Rightarrow Z_L-Z_C=R\sqrt{\frac{1}{k^2}-1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $Z_C^2+R\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}.Z_C-R^2=0$,

thay số: $Z_C=45\Omega\Rightarrow C=\frac{2.10^{-3}}{9\pi}(F)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng một bạn duy nhất có lời giải đúng bài ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Nhật Tiến*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 21)

Problem T9/497. Given continuous functions f, g: $[a,b]\to[a,b]$ such that

$$f(g(x))=g(f(x)) \quad \forall x\in[a,b];$$

where a, b are real numbers. Show that the equation $f(x)=g(x)$ has at least one solution.

TOWARD MATHEMMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/497. Find all pairs of integers (m, n) so that both $m^5n+2019$ and mn^5+2019 are cubes of integers.

Problem T11/497. Let $S=\{1, 2, 3, ..., 2019\}$ and suppose that $S_1, S_2,...,S_{410}$ are subsets of S such that for every $i\in S$, there exist exactly 40 of them containing i. Prove that there exist different indices $j, k, l\in\{1, 2, ..., 410\}$ such that $|S_j\cap S_k\cap S_l|\le 1$.

Problem T12/497. Given a cyclic quadrilateral $ABCD$ with E is the intersection between AC and BD. The circumcircles of EAD and EBC intersect at another point F (besides E). The perpendicular bisectors of BD, AC respectively intersect FB, FA at K, L. Show that KL goes through the midpoint of AB.

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN và VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM học 2017-2018

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2017-2018 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2017 đến tháng 8 năm 2018. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài khá sôi nổi. **Quảng Bình, Hà Nội, Lâm Đồng, Quảng Ngãi, Nam Định, Vĩnh Long, Thanh Hóa, Bến Tre, Quảng Nam, Vĩnh Phúc** là những tỉnh, thành phố có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về hai bạn: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.** Giải Nhất môn Vật lý thuộc về bạn: *Nguyễn Thị Diễm Ly*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.** Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2018-2019. Sau đây là danh sách **90** bạn đoạt giải Toán và **10** bạn đoạt giải Vật Lí năm học 2017-2018.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (2 giải)

1. *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa.**
2. *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**

☆ Giải Nhất (6 giải)

1. *Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.
2. *Tạ Nam Khánh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
3. *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre.**
4. *Võ Minh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng.**
5. *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, **Bến Tre.**
6. *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội.**

☆ Giải Nhì (13 giải)

1. *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**
2. *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**
3. *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh, **Hà Nội.**
4. *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
5. *Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
6. *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**
7. *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, **Phú Yên.**
8. *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
9. *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống, **Thanh Hóa.**
10. *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyên Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**
11. *Trần Tiến Mạnh*, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An.**
12. *Lê Trí Phú*, 12T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**
13. *Lê Thị Thu Sương*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

☆ Giải Ba (22 giải)

1. *Trịnh Đức Tuấn*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa.**

2. *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

3. *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

4. *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

5. *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài, **Bình Phước.**

6. *Thiều Đình Minh Hùng*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hoá, **Thanh Hóa.**

7. *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh.**

8. *Hoàng Kim Cả*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**

9. *Nguyễn Phúc Tăng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

10. *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình.**

11. *Lê Anh Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

12. *Vương Tùng Dương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

13. *Đỗ Minh Hiệp*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

14. *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

15. *Nguyễn Hùng Sơn*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh, **Nam Định.**

16. *Trần Hồng Quý*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

17. *Lê Hà Khiêm*, 11T1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An, **Quảng Nam.**

18. *Phan Quý Lộc*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

19. *Hoàng Mai Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang.**

20. *Phan Thanh Đại Dương*, 11T, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre.**

21. *Trần Minh Hiếu*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định, **Nam Định.**

22. *Nguyễn Trung Kiên*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

☆ Giải Khuyến khích (47 giải)

1. *Nguyễn Quốc Hiếu*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

2. *Nguyễn Trung Phú*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi.**

3. *Phạm Văn Quyền*, 7A,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

4. *Nguyễn Phương Uyên*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

5. *Đỗ Lê Trung*, 7A4, THCS Quang Trung, **Thanh Hóa.**

6. *Phạm Ngọc Trinh*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An.**

7. *Nguyễn Ngân Chi*, 7C, THPT Lý Thái Tổ, Trung Hòa, Cầu Giấy, **Hà Nội.**

8. *Ngô Quốc Bảo*, 8/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre, **Bến Tre.**

9. *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

10. *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh.**

11. *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

12. *Phạm Hiếu*, 10A, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng, **Đà Nẵng.**

13. *Hà Ngọc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

14. *Hoàng Quốc Khánh*, 10A1, THPT Đức Thọ, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

15. *Lê Ngọc Đức*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột, **Đăk Lăk.**

16. *Trần Vũ Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.**

17. *Bùi Khánh Vĩnh*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.**

18. *Nguyễn Nhật Hào*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

19. *Nguyễn Tuấn Lộc*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng.**

20. *Phạm Công Minh*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

21. *Huỳnh Tấn Phúc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**
22. *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
23. *Chu Ngọc Chiến*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
24. *Nguyễn Trung Hiếu*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
25. *Bùi Văn Quyến*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
26. *Trần Thiện Thu Uyên*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An, **Quảng Nam.**
27. *Đàm Thị Xuân Ý*, 10/1 THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**
28. *Vũ Ngọc Duy*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
29. *Vũ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành I, Thuận Thành, **Bắc Ninh.**
30. *Bùi Anh Vũ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
31. *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
32. *Dương Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
33. *Trần Lĩnh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long, **Vĩnh Long.**
34. *Võ Thanh Long*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.**
35. *Quách Minh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai.**
36. *Chu Thị Ngân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang, **Bắc Giang.**
37. *Bùi Khánh Phong*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**
38. *Lê Phương Thanh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**
39. *Nguyễn Hoàng Đức*, 12A, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**
40. *Trịnh Hoàng Hiệp*, 12A, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**
41. *Nguyễn Tấn Tài*, 12, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**
42. *Lê Hoàng Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang.**
43. *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 12 T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**
44. *Lê Tiến Đạt*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**
45. *Nguyễn Thanh Huyền*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**
46. *Nguyễn Minh Hiệu*, 12T, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai, **Lào Cai.**
47. *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

MÔN VẬT LÝ

☆ Giải Nhất (1 giải)

Nguyễn Thị Diễm Ly, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**

☆ Giải Nhì (3 giải)

1. *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách, **Hải Dương.**
2. *Lê Bá Quốc Minh*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
3. *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

☆ Giải Ba (6 giải)

1. *Châu Thị Tuyết Chi*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
2. *Huỳnh Hồng Thảo*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
3. *Phan Trần Hướng*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
4. *Đặng Nhật Minh*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
5. *Nguyễn Thanh Huyền*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**
6. *Phạm Thị Ngọc Lan*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (024) 35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 38

Problem. *Find the mean, mode, median and standard deviation of:*

5, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 3, 4, 5, 5.

Hence write down, without working further, the mean, mode, median and standard deviation of: 15, 12, 15, 11, 12, 11, 11, 11, 15, 13, 12, 13, 14, 15, 15.

Solution. We reorder the data first: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5.

Then the median is 3. The mean $\overline{x}=3$. The mode is 5.

Applying the formula for the standard deviation we get $sd(x)\approx 1.63$.

The second data is obtained from the first one by adding 10 to each number. Thus it is clear, without computing further, that the median is 13, the mean $\overline{x}=13$, the mode is 15. And it is also not difficult to see that the two sets of data have the same standard deviation (why ?).

Remark. The standard deviation is given by the formula $sd(x)=\sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$ where $\overline{x}$ is the mean of the given data. This number tells us how data deviate from their mean.

TỪ VỰNG

Mean	: giá trị trung bình
Mode	: số xuất hiện nhiều lần
Median	: trung vị
Standard deviation	: độ lệch chuẩn

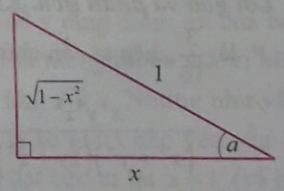
Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán. *Cho* $\cos a = x$, *trong đó a là góc nhọn. Tìm* $\tan a$ *theo x.*

Lời giải 1. Ta có $\tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}$. Mà $\sin^2 a+\cos^2 a=1$, hay $\sin^2 a=1-\cos^2 a$. Vì a là góc nhọn, nên $\sin a>0$, từ đó $\sin a=\sqrt{1-x^2}$. Vậy $\tan a=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Lời giải 2. (*Kỹ thuật giải tam giác*). Ta vẽ một tam giác vuông có độ dài cạnh góc vuông kề với góc a bằng x và độ dài cạnh huyền bằng 1. Theo định lý Pythagoras thì độ dài cạnh góc vuông đối diện với góc a bằng $\sqrt{1-x^2}$. Từ đó

$$\tan a=\frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$



Lưu ý. • Các kỹ thuật trên rất hữu ích khi tính tích phân một số hàm số lượng giác.

• Kỹ thuật thứ hai thường rất rõ ràng và có thể áp dụng với các góc trong trường hợp tổng quát. Và ở đó ta cần phải chú ý về dấu.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** *Bùi Văn Quyến, Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Xuân Thành Đạt*, 10 Toán 2, *Thái Đặng Trần Công*, 11T1, *Lê Như Minh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HÒ HẢI (*Hà Nội*)

BẤT ĐẲNG THỨC QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC DƯỚI GÓC NHÌN CỦA MỘT BỔ ĐỀ

NGUYỄN TUẤN ANH

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Bài viết nêu lên 3 vấn đề xoay quanh một bổ đề quen thuộc:

• Giới thiệu bổ đề với cách chọn m,k để áp dụng. Vì bổ đề khá chặt nên có nhiều bài viết xoay quanh nó, phần này người viết chỉ điểm lại với mục tiêu làm bật lên ý tưởng chọn m,k vận dụng bổ đề (xem mục 2).

• Với một số bài toán khi áp dụng bổ đề, ta sẽ thu được không chỉ một đánh giá mà rất nhiều đánh giá khác nhau, có nghĩa sẽ có nhiều lời giải cho cùng một bài toán (xem mục 1 và 3).

• Một số hướng vận dụng với những bài toán có giả thiết khác nhiều so với bổ đề (xem mục 3).

Tất cả các vấn đề trên sẽ được thể hiện thông qua các bài toán BĐT trong các kỳ Olympic với những lời giải mới.

1. Bài toán mở đầu

Thí dụ 1. (VMO – 2014) *Với x,y,z là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3}+\frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3}+\frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3}.$$

Lời giải và phân tích. Không khó để dự đoán GTLN của P là $\frac{3}{16}$, nên ta cần chứng minh:

$$\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3}+\frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3}+\frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3}\le\frac{3}{16}.$$

Trước tiên, ta có đánh giá:

$$\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3}\le\frac{x^3y^4z^3}{8(x^4+y^4)(z^3xy\sqrt{xy})}$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}}{8(x^4+y^4)}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{8\left[\left(\frac{x}{y}\right)^4+1\right]}.$$

Đánh giá tương tự cho hai đại lượng còn lại và đặt $a=\sqrt{\frac{x}{y}};b=\sqrt{\frac{y}{z}};c=\sqrt{\frac{z}{x}}$. Ta cần có:

$$\frac{a^3}{a^8+1}+\frac{b^3}{b^8+1}+\frac{c^3}{c^8+1}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3}-\frac{2a^3}{a^8+1}+\frac{4}{3}-\frac{2b^3}{b^8+1}+\frac{4}{3}-\frac{2c^3}{c^8+1}\ge1$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a^8-6a^3+4}{3(a^8+1)}+\frac{4b^8-6b^3+4}{3(b^8+1)}+\frac{4c^8-6c^3+4}{3(c^8+1)}\ge1,$$

với $a,b,c>0:abc=1$.

Sử dụng bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề: *Với x,y,z dương thỏa mãn $xyz=1$ và $m\in\mathbb{R}$ thì BĐT sau luôn đúng:*

$$\frac{1}{x^{2m}+x^m+1}+\frac{1}{y^{2m}+y^m+1}+\frac{1}{z^{2m}+z^m+1}\ge1\quad(*)$$

Chứng minh bổ đề: Sử dụng phép thế $x^m=\frac{bc}{a^2};y^m=\frac{ca}{b^2};z^m=\frac{ab}{c^2}$, bổ đề cần chứng minh được viết lại là: $\frac{a^4}{b^2c^2+a^2bc+a^4}+\frac{b^4}{c^2a^2+b^2ca+b^4}+\frac{c^4}{a^2b^2+c^2ab+c^4}\ge1.$

Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$\frac{a^4}{b^2c^2+a^2bc+a^4}+\frac{b^4}{c^2a^2+b^2ca+b^4}+\frac{c^4}{a^2b^2+c^2ab+c^4}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Kết hợp với BĐT quen thuộc $abc(a+b+c)\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, ta thu được:

$$\frac{a^4}{b^2c^2+a^2bc+a^4}+\frac{b^4}{c^2a^2+b^2ca+b^4}+\frac{c^4}{a^2b^2+c^2ab+c^4}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

$$\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ tức $x=y=z=1$. ■

Quay lại bài toán ta có:

$$\frac{4a^8-6a^3+4}{3\left(a^8+1\right)}\ge\frac{1}{a^{-6}+a^{-3}+1}=\frac{a^6}{a^6+a^3+1}$$

$$\Leftrightarrow a^{14}+4a^{11}-6a^9+4a^8-5a^6-2a^3+4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left(a^{12}+2a^{11}+3a^{10}+8a^9+13a^8+12a^7\right.$$

$$\left.+15a^6+18a^5+16a^4+14a^3+12a^2+8a+4\right)\ge 0.$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng, vậy nên:

$$\frac{4a^8-6a^3+4}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{4b^8-6b^3+4}{3\left(b^8+1\right)}+\frac{4c^8-6c^3+4}{3\left(c^8+1\right)}$$

$$\ge\frac{1}{a^{-6}+a^{-3}+1}+\frac{1}{b^{-6}+b^{-3}+1}+\frac{1}{c^{-6}+c^{-3}+1}\overset{(*)}{\ge}1.$$

Hay nói cách khác $P\le\frac{3}{16}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ tức $x=y=z$.

Do đó GTLN của P là $\frac{3}{16}$.

Nhận xét. Ngoài cách đánh giá trên, ta còn nhiều cách đánh giá khác nữa, chẳng hạn:

$$\frac{a^3}{a^8+1}+\frac{b^3}{b^8+1}+\frac{c^3}{c^8+1}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{4a^3}{3\left(a^8+1\right)}+1-\frac{4b^3}{3\left(b^8+1\right)}+1-\frac{4c^3}{3\left(c^8+1\right)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{3a^8-4a^3+3}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{3b^8-4b^3+3}{3\left(b^8+1\right)}+\frac{3c^8-4c^3+3}{3\left(c^8+1\right)}\ge 1.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{3a^8-4a^3+3}{3\left(a^8+1\right)}\ge\frac{1}{a^{-4}+a^{-2}+1}$.

$$\frac{a^3}{a^8+1}+\frac{b^3}{b^8+1}+\frac{c^3}{c^8+1}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{11}{6}-\frac{3a^3}{a^8+1}+\frac{11}{6}-\frac{3b^3}{b^8+1}+\frac{11}{6}-\frac{3c^3}{c^8+1}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{11a^8-18a^3+11}{6\left(a^8+1\right)}+\frac{11b^8-18b^3+11}{6\left(b^8+1\right)}+\frac{11c^8-18c^3+11}{6\left(c^8+1\right)}\ge 1.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{11a^8-18a^3+11}{6\left(a^8+1\right)}\ge\frac{1}{a^{-9}+a^{-\frac{9}{2}}+1}$.

$$\frac{a^3}{a^8+1}+\frac{b^3}{b^8+1}+\frac{c^3}{c^8+1}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{3}-\frac{8a^3}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{5}{3}-\frac{8b^3}{3\left(b^8+1\right)}+\frac{5}{3}-\frac{8c^3}{3\left(c^8+1\right)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{5a^8-8a^3+5}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{5b^8-8b^3+5}{3\left(b^8+1\right)}+\frac{5c^8-8c^3+5}{3\left(c^8+1\right)}\ge 1.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{5a^8-8a^3+5}{3\left(a^8+1\right)}\ge\frac{1}{a^{-8}+a^{-4}+1}$.

$$\frac{a^3}{a^8+1}+\frac{b^3}{b^8+1}+\frac{c^3}{c^8+1}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{11}{3}-\frac{20a^3}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{11}{3}-\frac{20a^3}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{11}{3}-\frac{20a^3}{3\left(a^8+1\right)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{11a^8-20a^3+11}{3\left(a^8+1\right)}+\frac{11b^8-20b^3+11}{3\left(b^8+1\right)}+\frac{11c^8-20c^3+11}{3\left(c^8+1\right)}\ge 1.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{11a^8-20a^3+11}{3\left(a^8+1\right)}\ge\frac{1}{a^{-20}+a^{-10}+1}$.

Có 3 vấn đề đặt ra là:

- Bằng cách nào để có các đánh giá đó (tách ghép biểu thức như thế nào là hợp lý và chọn đánh giá ra sao).
- Có bao nhiêu đánh giá như vậy.
- Với các bài toán có giả thiết khác đi sẽ áp dụng như thế nào.

Mời bạn đọc vào mục tiếp theo để có câu trả lời thông qua các bài toán.

2. Áp dụng trực tiếp bổ đề

Trước tiên ta sẽ đến với cách chọn đánh giá để sử dụng bổ đề.

Thí dụ 2 (Đăk Lăk, năm 2016 - 2017). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1.$$

Lời giải và phân tích. Để áp dụng được bổ đề ta sẽ chọn cùng lúc m,k với $k>0$ sao cho đánh giá sau luôn đúng:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2+x}+\frac{k}{3}-\frac{k}{x^{2m}+x^m+1}\ge 0.$$

Việc tìm chính xác miền giá trị của m,k để đánh giá trên luôn đúng là tương đối khó. Ta để ý rằng điểm rơi của bài toán là $x=1$, suy nghĩ tự nhiên ta mong muốn giá trị nhỏ nhất của vế trái là 0 đạt được khi $x=1$. Nhưng như vậy vẫn còn quá khó, thay vào đó ta sẽ giảm nhẹ yêu cầu là tìm m,k sao cho vế trái là hàm đạt cực trị tại $x=1$ (và hy vọng tại đó đạt GTNN) với sự hỗ trợ của công cụ đạo hàm. Cụ thể ta cần có:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2+x}+\frac{k}{3}-\frac{k}{x^{2m}+x^m+1}\right)'_{x=1}=0\Leftrightarrow\frac{1}{9}=\frac{-km}{3}\Leftrightarrow m=\frac{-1}{3k}.$$

Vậy ta cần chọn $k>0$ sao cho:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2+x}+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{x^{\frac{-2}{3k}}+x^{\frac{-1}{3k}}+1}.$$

• Cho $x \to +\infty$ ta cần có: $\frac{1}{3}+\frac{k}{3} \ge k \Leftrightarrow k \le \frac{1}{2}$.

• Cho $x \to 0^+$ ta cần có: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{k}{3} \ge 0 \Leftrightarrow k \ge \frac{1}{2}$.

Tóm lại $k=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm. Việc cuối cùng là ta kiểm tra đánh giá vừa thu được bằng phép biến đổi tương đương (điều này là cần thiết vì cách tìm trên chưa là điều kiện đủ, trong xuyên suốt bài viết, miền giá trị của k tìm được cũng mang ý nghĩa như vậy).

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{6} \ge \frac{1}{2\left(x^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+1\right)} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{2\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2 x}{2\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)(x+2)} \ge 0.$$

Tương tự cho các đánh giá còn lại, cộng theo vế ta được:

$$1-\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+1}+\frac{1}{y^{-\frac{4}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}+1}+\frac{1}{z^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+1}\right) \overset{\text{do}(*)}{\ge} \frac{1}{2}.$$

Bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Với cách làm trên, ta có thể xử lý các bài toán sau (trình bày chi tiết dành cho bạn đọc).

Thí dụ 3 (MEMO - 2012). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{16x^2+9}+\sqrt{16y^2+9}+\sqrt{16z^2+9} \ge 4(x+y+z)+3.$$

Hướng dẫn giải. Lập luận như thí dụ 2, ta được duy nhất $k=3$ và có đánh giá:

$$\sqrt{16x^2+9}-4x-1+\frac{3}{3} \ge \frac{3}{x^{\frac{8}{5}}+x^{\frac{4}{5}}+1}.$$

Đặt $a=\sqrt[5]{x}$, đánh giá trên được viết lại là:

$$\sqrt{16a^{10}+9} \ge \frac{3}{a^8+a^4+1}+4a^5 = \frac{4a^{13}+4a^9+4a^5+3}{a^8+a^4+1}$$

$$\Leftrightarrow 3a^4(a-1)^2\left(3a^{10}+6a^9+9a^8+4a^7+5a^6\right.$$
$$\left.+6a^5+7a^4+2a^2+4a+6\right) \ge 0.$$

Thí dụ 4 (India Postals 2015). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{x}{x+8}}+\sqrt{\frac{y}{y+8}}+\sqrt{\frac{z}{z+8}} \ge 1.$$

Hướng dẫn giải. Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt{\frac{x}{x+8}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \ge \frac{1}{x^{\frac{-8}{9}}+x^{\frac{-4}{9}}+1}.$$

Đặt $a=\sqrt[9]{x}$, đánh giá được viết lại là:

$$\frac{a^9}{a^9+8} \ge \frac{a^{16}}{\left(a^8+a^4+1\right)^2} \Leftrightarrow (a-1)^2.M \ge 0.$$

với $M=2a^{10}+4a^9+6a^8+8a^7+13a^6$
$$+10a^5+7a^4+4a^3+3a^2+2a+1.$$

Thí dụ 5 (JBMO - Macedonia TST 2013). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z} \ge 3.$$

Hướng dẫn giải. Sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{1+x}-1+\frac{k}{3} \ge \frac{k}{x^0+x^0+1} \ (k>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\sqrt{x}}{2(x+1)} \ge 0.$$

Thí dụ 6 (Olympic 30/4 - 2018). *Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{z^2-z+1} \ge x+y+z.$$

Hướng dẫn giải. Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2} \ge \frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1 \ge \frac{\left(2x^3+x^2+x+2\right)^2}{4\left(x^2+x+1\right)^2} \Leftrightarrow \frac{3\left(x^2-x\right)^2}{4\left(x^2+x+1\right)^2} \ge 0.$$

Và còn rất nhiều bài toán khác nữa với giả thiết $xyz=1$ có thể sử dụng bổ đề làm lời giải, phần này mời bạn đọc tiếp tục khám phá.

3. Một số hướng khai thác bổ đề qua các bài toán Olympic

Tiếp theo ta đến với một số hướng có thể khai thác để áp dụng bổ đề với các bài toán có giả thiết khác đi.

Hướng 1. Làm mạnh giả thiết bài toán.

Thí dụ 7 (Tuymaada MO 2014). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^3+1}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải và phân tích. Từ giả thiết ta thấy rằng $xyz \ge 1$ nên với mỗi x,y,z thỏa mãn giả thiết, tồn tại

$x' \le x : x'yz = 1$, kết hợp với $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ là hàm giảm ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x'^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+1}}.$$

Vậy nên ta cần có:

$$\frac{1}{\sqrt{x'^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+1}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{x'^3+1}} + \sqrt{\frac{2}{y'^3+1}} + \sqrt{\frac{2}{z'^3+1}} \le 3$$

Đến đây ta áp dụng cách làm như thí dụ 2 và tìm được $\frac{3}{2} \ge k \ge 3\sqrt{2} - 3$ cho đánh giá

$$1 - \sqrt{\frac{2}{x'^3+1}} + \frac{k}{3} \ge \frac{k}{x'^{\frac{-9}{2k}} + x'^{-\frac{9}{4k}} + 1}.$$

Điều này đồng nghĩa ta có thể có nhiều đánh giá khác nhau ứng với mỗi giá trị k cụ thể (chọn k không tốt sẽ khó kiểm chứng lại đánh giá) và ta chọn đánh giá ứng với $k = \frac{3}{2}$ để việc kiểm tra lại dễ dàng hơn: $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{x'^3+1}} \ge \frac{3}{2\left(x'^{-3} + x'^{-\frac{3}{2}} + 1\right)}$, đặt $a = \sqrt{x'}$. Ta cần có:

$$\frac{9(a^3+1)^2}{4(a^6+a^3+1)^2} \ge \frac{2}{a^6+1} \Leftrightarrow 9(a^3+1)^2(a^6+1) \ge 8(a^6+a^3+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^3-1)^2(a^6+4a^3+1) \ge 0.$$

Nhận xét. Với phép biến đổi tương đương ta có thể chọn một số đánh giá khác trong miền của k bên trên, bằng công cụ hàm số ta có được đánh giá tại biên còn lại của k:

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{x'^3+1}} \ge \frac{3(\sqrt{2}-1)}{x'^{-\frac{3+3\sqrt{2}}{2}} + x'^{-\frac{3+3\sqrt{2}}{4}} + 1}.$$

Thí dụ 8 (Bosnia and Herzegovina – TST 2015). *Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \le 3$, tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{y+1}{y(y+2)} + \frac{z+1}{z(z+2)}$.*

Hướng dẫn giải. Ta cũng làm mạnh giả thiết như thí dụ trên, tức ta sẽ chứng minh:

$$\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{y+1}{y(y+2)} + \frac{z+1}{z(z+2)} \ge 2$$

với $xyz = 1$. Sử dụng bổ đề trên với $k \ge 2$ cho đánh giá:

$$\frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{2}{3} + \frac{k}{3} \ge \frac{k}{x^{\frac{10}{3k}} + x^{\frac{5}{3k}} + 1}$$

chẳng hạn:

- $\frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \ge \frac{5}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1}$. Đặt $a = \sqrt[3]{x}$, ta cần:

$$\frac{a^3+1}{a^3(a^3+2)} + 1 \ge \frac{5}{a^2+a+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a^6+3a^5+a^4+2a^3+6a^2+3a+1)}{a^3(a^3+2)(a^2+a+1)} \ge 0.$$

- $\frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{2}{3} + \frac{10}{3} \ge \frac{10}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + 1}$, đặt $a = \sqrt[6]{x}$ ta cần:

$$\frac{a^6+1}{a^6(a^6+2)} + \frac{8}{3} \ge \frac{10}{a^2+a+1} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2.M}{3a^6(a^6+2)(a^2+a+1)} \ge 0.$$

Với M là đa thức bậc 12 với các hệ số dương.

Hướng 2. Mở rộng điều kiện của bổ đề

Ta thấy $y = \frac{1}{x^{2m} + x^m + 1}$ với $m > 0$ là một hàm giảm. Do đó $m > 0$ bổ đề không chỉ đúng với $xyz = 1$ mà còn đúng với các giả thiết sao cho $xyz \le 1$ (chẳng hạn $x + y + z = 3; xy + yz + zx = 3, \ldots$) tương tự với $m < 0$ thì bổ đề đúng với các giả thiết ràng buộc các biến x, y, z sao cho $xyz \ge 1$ (hiển nhiên ta đang xét với $x, y, z > 0$).

Thí dụ 9 (Nghệ An, năm 2011 - 2012). *Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz \le 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{x^2+x}{x^2+x+1}} + \sqrt[3]{\frac{y^2+y}{y^2+y+1}} + \sqrt[3]{\frac{z^2+z}{z^2+z+1}}$.*

Lời giải và phân tích. Ta chứng minh $P \le \sqrt[3]{18}$ tức

$$1 - \sqrt[3]{\frac{3(x^2+x)}{2(x^2+x+1)}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{3(y^2+y)}{2(y^2+y+1)}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{3(z^2+z)}{2(z^2+z+1)}} \ge 0.$$

Sử dụng đánh giá: $1 - \sqrt[3]{\frac{3(x^2+x)}{2(x^2+x+1)}} + \frac{k}{3} \ge \frac{k}{x^{\frac{1}{k}} + x^{\frac{1}{2k}} + 1}$

với $k \le \frac{3}{2}$, chẳng hạn chọn $k = \frac{1}{2}$ ta có đánh giá sau:

$$1 - \sqrt[3]{\frac{3(x^2+x)}{2(x^2+x+1)}} + \frac{1}{6} \ge \frac{1}{2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{7x^2+7x+4}{6(x^2+x+1)}\right]^3 \ge \frac{3(x^2+x)}{2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x-2)^2(19x^2+19x+16)}{216(x^2+x+1)^3} \ge 0.$$

Kết hợp với (*) ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 10 (China Northern MO 2006). *Với x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3, chứng minh rằng:*

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{y^2+9}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{z^2+9}{2z^2+(x+y)^2}\le 5.$$

Hướng dẫn giải. Với cách tìm m,k như thí dụ 2 ta được $k\le 1$ cho đánh giá: $\frac{5}{3}-\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{x^{\frac{2}{k}}+x^{\frac{1}{k}}+1}$

chẳng hạn:

- $\frac{5}{3}-\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{1}{3}\ge\frac{1}{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-1)^2(5x+3)}{3(x^2+x+1)(3x^2-6x+9)}\ge 0.$$

- $\frac{5}{3}-\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{1}{6}\ge\frac{1}{2(x^4+x^2+1)}$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2(9x^4-4x^3+7x^2-4x+6)\ge 0.$$

BĐT cuối hiển nhiên vì theo BĐT AM – GM, ta có:

$$3x^4+1\ge 4x^3;\ 2x^2+2\ge 4x.$$

Nhận xét. Không phải giá trị $k\le 1$ nào cũng sinh ra đánh giá đúng (chú ý phải kiểm tra lại đánh giá thu được ít nhất là bằng biến đổi tương đương). Ta có thể tìm một chặn dưới của k (điều kiện cần), để đánh giá

$$\frac{5}{3}-\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{x^{\frac{2}{k}}+x^{\frac{1}{k}}+1},$$

luôn đúng thì ít nhất vế trái phải dương, điều đó kéo theo:

$$\min_{x\in(0;+\infty)}\left(\frac{5}{3}-\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{k}{3}\right)>0\Leftrightarrow k>\frac{3\sqrt{2}-4}{2},$$

và điều này ta sẽ gặp lại ở một số bài toán phần bài tập đề nghị.

Thí dụ 11 (Olympic chuyên KHTN 2016). *Với x, y, z dương thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$, chứng minh rằng:* $\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}+\frac{y(y+1)}{(2y+1)^2}+\frac{z(z+1)}{(2z+1)^2}\le\frac{9}{16}$.

Lời giải. Ta đổi biến $x=\frac{a}{2};y=\frac{b}{2};z=\frac{c}{2}$, từ giả thiết bài toán ta được $abc\le 1$ và BĐT được viết lại là

$$\frac{a(a+2)}{(a+1)^2}+\frac{b(b+2)}{(b+1)^2}+\frac{c(c+2)}{(c+1)^2}\le\frac{9}{4}.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{3}{4}-\frac{a(a+2)}{(a+1)^2}+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{a^{\frac{3}{2k}}+a^{\frac{3}{4k}}+1}$ với $\frac{3}{4}\le k\le\frac{9}{8}$. Chẳng hạn ta chọn đánh giá ứng với $k=\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}-\frac{a(a+2)}{(a+1)^2}+\frac{1}{4}\ge\frac{3}{4(a^2+a+1)}\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2}{4(a+1)^2(a^2+a+1)}\ge 0.$$

Nhận xét. Bài toán thường được biết đến với lời giải là phép đổi biến có được từ điều kiện đặc biệt bài toán, cách làm như vậy chưa được tự nhiên, nhất là với bạn đọc chưa tiếp cận loại giả thiết này. Với lời giải trên cho thấy giả thiết ràng buộc bài toán: $xy+yz+zx+2xyz=1$, không đóng vai trò quan trọng, có thể thay bằng bất kỳ giả thiết nào sao cho $xyz\le\frac{1}{8}$. Chẳng hạn: $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\le\frac{3}{2^{2019}}$.

Hướng 3. Chuẩn hóa.

Với các BĐT thuần nhất ta có thể chuẩn hóa, vậy nên ta sẽ hướng đến cách chuẩn hóa $xyz=1$ để áp dụng bổ đề.

Thí dụ 12 (Dự bị - Yên Bái, năm 2015 - 2016). *Với x, y, z là các số thực dương, tìm GTLN của biểu thức:*

$$P=\frac{\sqrt{yz}}{x+3\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{zx}}{y+3\sqrt{zx}}+\frac{\sqrt{xy}}{z+3\sqrt{xy}}.$$

Hướng dẫn giải và phân tích. Dễ dàng đoán được GTLN của P là $\frac{3}{4}$. Ta chuẩn hóa $xyz=1$, và ta cần chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x+3\sqrt{\frac{1}{x}}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{y}}}{y+3\sqrt{\frac{1}{y}}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{z+3\sqrt{\frac{1}{z}}}$$

$$\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x^3}+3}+\frac{1}{\sqrt{y^3}+3}+\frac{1}{\sqrt{z^3}+3}\le\frac{3}{4}.$$

Áp dụng cách tìm m,k như thí dụ 2 ta được $\frac{1}{4}\le k\le\frac{3}{8}$ cho đánh giá: $\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{x^3}+3}+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{x^{\frac{-18}{32k}}+x^{\frac{-9}{32k}}+1}$.

Từ đó ta có một số đánh giá sau:

- $\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{x^3}+3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{8\left(x^{\frac{-3}{2}}+x^{\frac{-3}{4}}+1\right)}=\frac{3\sqrt{x^3}}{8\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[4]{x^3}+1\right)}$,

đặt $a=\sqrt[4]{x^3}$, ta cần:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3a^2}{8(a^2+a+1)}\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(3a+1)}{8(a^2+3)(a^2+a+1)}\ge 0.$$

- $\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{x^3}+3}+\frac{1}{12}\ge\frac{1}{4\left(x^{\frac{-9}{4}}+x^{\frac{-9}{8}}+1\right)}=\frac{\sqrt[4]{x^9}}{4\left(\sqrt[4]{x^9}+\sqrt[8]{x^9}+1\right)}$

đặt $a=\sqrt[8]{x}$, ta cần: $\frac{1}{4}-\frac{1}{a^{12}+3}+\frac{1}{12}\ge\frac{a^{18}}{4(a^{18}+a^9+1)}$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2a^{12}(a^2+a+1)^2(a^3+2)(a^9+3a^3+2)}{12(a^{12}+3)(a^{18}+a^9+1)}\ge 0.$$

Thí dụ 13 (IMO - 2001). *Với x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng:*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\ge 1.$$

Hướng dẫn giải. Ta chuẩn hóa $xyz=1$, sử dụng đánh giá:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{8}{x}}}\ge\frac{1}{x^{\frac{-8}{3}}+x^{\frac{-4}{3}}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^8}}{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^4}+1},\text{ đặt: } a=\sqrt[3]{x}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{a^6+\frac{8}{a^3}}}\ge\frac{a^5}{a^8+a^4+1}\Leftrightarrow(a-1)^2.M\ge 0,$$

với M là đa thức bậc 10 với hệ số dương.

Nhận xét. Chọn lũy thừa của biến để có một đánh giá tốt bằng công cụ đạo hàm, bài toán trên còn có 1 lời giải khá đẹp và quen thuộc dựa trên đánh giá:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}\ge\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{z^4}}.$$

Thí dụ 14 (Romania 1997). *Với x,y,z là các số thực dương, chứng minh rằng:*

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\ge 1\ge\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}.$$

Hướng dẫn giải. Ta chuẩn hóa $xyz=1$, ta sẽ sử dụng bổ đề chứng minh cho cả hai BĐT.

• $\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\ge 1.$

Sử dụng đánh giá: $\frac{x^2}{x^2+\frac{2}{x}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge\frac{1}{x^{-4}+x^{-2}+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2+\frac{2}{x}}\ge\frac{x^4}{x^4+x^2+1}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2x^3}{(x^4+x^2+1)(x^3+2)}\ge 0.$$

• $1\ge\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{zx}{y^2+2zx}+\frac{xy}{z^2+2xy}.$

Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{3}-\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{6}\ge\frac{1}{2(x^{-4}+x^{-2}+1)}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{6}\ge\frac{x^4}{2(x^4+x^2+1)}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2x^3}{2(x^3+2)(x^4+x^2+1)}\ge 0.$$

Hướng 4. Phân chia trường hợp

Ta sẽ phân tích ý tưởng phân chia trường hợp thông qua bài toán sau:

Thí dụ 15 (Gazeta Matematica, Seria A, 2004). *Với x,y,z là các số thực dương, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{x}{4x+5y}}+\sqrt{\frac{y}{4y+5z}}+\sqrt{\frac{z}{4z+5x}}\le 1.$$

Lời giải và phân tích. Bài toán tương đương với bài toán sau: $\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\sqrt{\frac{1}{4+5y}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}}\le 1.$

Với giả thiết $x,y,z>0: xyz=1$. Ta cũng thực hiện bước tìm m,k như trên và ta được giá trị $k=\frac{1}{2}$ duy nhất. Tuy nhiên BĐT: $\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\frac{1}{6}\ge\frac{1}{2\left(x^{\frac{-10}{9}}+x^{\frac{-5}{9}}+1\right)}$,

không hoàn toàn đúng, đơn giản ta có thể kiểm chứng với $x=2^9$: $\frac{2^5-1}{2^6}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2^{12}}}>\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{4+5.2^9}}+\frac{1}{6}=\text{VT}$

$$\ge\text{VP}=\frac{2^{10}}{2(2^{10}+2^5+1)}$$

$\Rightarrow(2^5-1)(2^{10}+2^5+1)\ge 2^{15}\Leftrightarrow 2^{15}-1\ge 2^{15}$ (vô lý).

Ta sẽ điều chỉnh lại để có thể áp dụng bổ đề, cụ thể ta sẽ áp dụng bổ đề (với k,m thích hợp nào đó) trong miền mà bổ đề đúng. Trường hợp còn lại sẽ được xử lý theo một hướng khác.

• **TH1:** $0<x,y,z\le 2: xyz=1$. Ta sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\frac{5}{18}\ge\frac{\frac{5}{6}}{x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+1}=\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{6\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}.$$

Thật vậy, đánh giá trên tương đương với:

$$\frac{-4\sqrt[3]{x^2}+11\sqrt[3]{x}+11}{18\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}\ge\sqrt{\frac{1}{4+5x}},\text{ đặt } a=\sqrt[3]{x}\text{ ta cần:}$$

$$\frac{-4a^2+11a+11}{18(a^2+a+1)}\ge\sqrt{\frac{1}{4+5a^3}}$$

$$\Leftrightarrow(-4a^2+11a+11)^2(4+5a^3)\ge 324(a^2+a+1)^2$$

$$\Leftrightarrow(a-1)^2(16a^5-56a^4-95a^3+56a^2+128a+32)\ge 0.$$

Mà $16a^5-56a^4-95a^3+56a^2+128a+32$

$$=16a(a-1)^4+8(a-1)^4+159\left(\frac{63}{50}-a\right)\left(a-\frac{1}{6}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{600}(-108804a^2+129118a+11061)>0.$$

BĐT cuối luôn đúng vì $a=\sqrt[3]{x}\le\sqrt[3]{2}$.

Đánh giá tương tự cho các biến còn lại ta được:

$$\frac{11}{6}-\left(\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\sqrt{\frac{1}{4+5y}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}}\right)$$

$$\ge\frac{5}{6}\left(\frac{1}{x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}+1}+\frac{1}{y^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}+1}+\frac{1}{z^{-\frac{2}{3}}+z^{-\frac{1}{3}}+1}\right)\ge\frac{5}{6}.$$

Bài toán được chứng minh trong trường hợp này.

• **TH2:** Tồn tại một giá trị lớn hơn 2. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là z khi đó $xy \le \frac{1}{2}$. Áp dụng BĐT quen thuộc sau:

"Với $a,b>0: ab \le 1$ thì BĐT sau luôn đúng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}\text{"}$$

ta được: $\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\sqrt{\frac{1}{4+5y}} \le 2\sqrt{\frac{1}{4+5\sqrt{xy}}} = 2\sqrt{\frac{1}{4+5\sqrt{\frac{1}{z}}}}$.

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$2\sqrt{\frac{1}{4+5\sqrt{\frac{1}{z}}}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}} \le 1.$$

Vế trái của BĐT chỉ còn 1 biến có thể xử lý bằng nhiều cách. Phần này mời bạn đọc hoàn thành.

Qua hai trường hợp trên bài toán được chứng minh.

Nhận xét.

• Kết quả $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ với $a,b>0: ab \le 1$ có thể chứng minh ngắn gọn như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le 2\sqrt{\frac{\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}}{2}} \le 2\sqrt{\frac{\frac{2}{1+ab}}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{1+ab}}.$$

Tuy nhiên, kết quả này vẫn đúng nếu $a,b>0: ab \le 2$, và khi đó ta có lời giải đẹp như sau: Giả sử $x \le y \le z$ ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\sqrt{\frac{1}{4+5y}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}} \le 2\sqrt{\frac{1}{4+5\sqrt{xy}}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{4+5\sqrt{\frac{1}{z}}}}+\sqrt{\frac{1}{4+5z}} \le 1.$$

• Ngoài cách chia trường hợp để sử dụng bổ đề như trên ta còn rất nhiều cách chia trường hợp khác, đơn cử: Với $0 \le x,y,z \le 2: xyz=1$ ta sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\frac{10}{27} \ge \frac{10}{9\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}+1\right)},$$

và với $0 \le x,y,z \le 4: xyz=1$ ta sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{4+5x}}+\frac{10}{3} \ge \frac{10}{x^{-\frac{1}{18}}+x^{-\frac{1}{36}}+1}.$$

Hướng 5. Kết hợp với các kỹ thuật phụ

Việc áp dụng một bổ đề nào đó để chứng minh một bài toán không riêng gì mảng BĐT, luôn chứa đựng những khó khăn nhất định, nhất là với các bài toán có giả thiết hoặc hình dáng khác nhiều so với bổ đề. Khi đó, việc đánh giá và sử dụng BĐT phụ,... là cần thiết, tất nhiên sẽ không có thang đo như thế nào là hợp lý cho nhóm kỹ thuật này.

Thí dụ 16 (Thanh Hóa, vòng 2 năm 2016 - 2017). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{(2xy+yz+zx)^2}+\frac{1}{(2yz+zx+xy)^2}+\frac{1}{(2zx+xy+yz)^2} \le \frac{3}{16x^2y^2z^2}.$$

Lời giải và phân tích. Ta thay $(x,y,z) \to \left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{(2x+y+z)^2}+\frac{1}{(x+2y+z)^2}+\frac{1}{(x+y+2z)^2} \le \frac{3}{16}.$$

Trước tiên ta thuần nhất hóa bài toán bằng cách vận dụng điều kiện của biến, BĐT tương đương với:

$$\frac{(x+y+z)^2}{(2x+y+z)^2}+\frac{(x+y+z)^2}{(x+2y+z)^2}+\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+2z)^2} \le \frac{3}{16}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Ta không cần để ý điều kiện ban đầu của biến, thay vào đó ta chuẩn hóa $x+y+z=3$. BĐT cần chứng minh là:

$$\frac{1}{x}-\frac{16}{(3+x)^2}+\frac{1}{y}-\frac{16}{(3+y)^2}+\frac{1}{z}-\frac{16}{(3+z)^2} \ge 0.$$

Áp dụng cách tìm m,k bên trên ta tìm được $k > -3\min\limits_{x>0}\left\{\frac{1}{x}-\frac{16}{(3+x)^2}\right\}$ cho đánh giá

$$\frac{1}{x}-\frac{16}{(3+x)^2}+\frac{k}{3} \ge \frac{k}{x^{\frac{3}{k}}+x^{\frac{3}{2k}}+1},$$

đơn cử, ta chọn đánh giá đơn giản sau ứng với $k=\frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{x}-\frac{16}{(3+x)^2}+\frac{1}{2} \ge \frac{3}{2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x^3+11x^2+16x+18)}{x(x+3)^2(x^2+x+1)} \ge 0.$$

Tương tự cho hai đánh giá còn lại, bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bước đổi biến $(x,y,z) \to \left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ thì BĐT trên là trở về bài A2 trong IMO Shorlist năm 2009 và thay giả thiết $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ thành $xyz=1$ thì bài toán trở thành bài tuyển đội tuyển Tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu năm 2016.

Thí dụ 17 (Quảng Bình, năm 2016). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x)=1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}.$$

Hướng dẫn giải. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}\ge 1.$$

Ta có đánh giá sau:

$$\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{xy}+1}$$

$$\ge\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{xy}+1}\ge\frac{x+y}{x+y+2}.$$

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ thì giả thiết bài toán trở thành $abc=1$ và BĐT cần chứng minh là $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\ge 1$. Sử dụng đánh giá: $\frac{a}{a+2}\ge\frac{1}{a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1}$, đặt $t=\sqrt[3]{a}$, ta cần:

$$\frac{t^3}{t^3+2}\ge\frac{t^4}{t^4+t^2+1}\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2t^3}{(t^3+2)(t^4+t^2+1)}\ge 0,$$

từ đó ta được GTNN của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Một bài giống dạng và có cách xử lý theo hướng bổ đề như bên trên:

(THTT T6/463) *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x)=1$, chứng minh rằng:*

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}\ge\sqrt{3}.$$

Tiếp theo, ta sẽ trở lại thí dụ 3 để thấy được việc sử dụng BĐT phụ một cách hợp lý thì cách sử dụng bổ đề sẽ hiệu quả và tự nhiên như thế nào.

Thí dụ 18 (MEMO - 2012). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{16x^2+9}+\sqrt{16y^2+9}+\sqrt{16z^2+9}\ge 4(x+y+z)+3.$$

Hướng dẫn giải. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{16x^2+9}-4x=\frac{9}{\sqrt{16x^2+9}+4x}$$

$$\ge\frac{9}{\frac{1}{2}\left(\frac{16x^2+9}{2x+3}+2x+3\right)+4x}=\frac{2x+3}{2x^2+2x+1}.$$

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{2x+3}{2x^2+2x+1}+\frac{2y+3}{2y^2+2y+1}+\frac{2z+3}{2z^2+2z+1}\ge 3.$$

Sử dụng đánh giá: $\frac{2x+3}{2x^2+2x+1}\ge\frac{3}{x^{\frac{8}{5}}+x^{\frac{4}{5}}+1}$, đặt $a=\sqrt[5]{x}$

ta cần: $\frac{2a^5+3}{2a^{10}+2a^5+1}\ge\frac{3}{a^8+a^4+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{a^4(a+1)(a-1)^2(2a^6+2a^5+4a^4-2a^3+2a^2-a+3)}{(a^8+a^4+1)(2a^{10}+2a^5+1)}\ge 0.$$

BĐT cuối luôn đúng vì:

$$2a^6+2a^5+4a^4-2a^3+2a^2-a+3$$

$$>4a^4-2a^3+2a^2-a+3>a^2(2a-1)^2+(a^2-a+3)>0.$$

Tương tự cho hai đánh giá còn lại, cộng theo vế, bài toán được chứng minh.

Thí dụ 19 (Tây Ninh - 2017). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+2y^3+6}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y^3+2z^3+6}}+\frac{1}{\sqrt[4]{z^3+2x^3+6}}\le\sqrt{3}.$$

Lời giải. Ta có BĐT quen thuộc sau:

$$(a+b+c)^4=\left((a+b+c)^2\right)^2\le\left(3(a^2+b^2+c^2)\right)^2$$

$$\le 3^3(a^4+b^4+c^4).$$

Áp dụng ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+2y^3+6}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y^3+2z^3+6}}+\frac{1}{\sqrt[4]{z^3+2x^3+6}}$$

$$\le\sqrt[4]{3^3\left(\frac{1}{x^3+2y^3+6}+\frac{1}{y^3+2z^3+6}+\frac{1}{z^3+2x^3+6}\right)}.$$

Theo BĐT Schwarz, ta lại có:

$$\frac{9}{x^3+2y^3+6}\le\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{y^3+2}.$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh: $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le 1.$

Sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{6}\ge\frac{1}{2(x^{-4}+x^{-2}+1)}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2x^3}{(x^4+x^2+1)(x^3+2)}\ge 0.$$

Kết hợp với bổ đề (*) ta được điều phải chứng minh.

Bài toán mở đầu cũng mang tinh thần của hướng khai thác này bạn đọc hãy xem lại để thấy đều đó. Kết lại hướng khai thác, ta đến với kỹ thuật phản chứng thông qua thí dụ sau:

Thí dụ 20 (RMO Mumbai 2016). *Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1$, chứng minh rằng: $xyz\le\frac{1}{8}$.*

Hướng dẫn giải. Ta đặt $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{2}$ giả thiết được viết lại là $\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}=1$ và ta cần chứng minh $abc \le 1$. Phản chứng rằng $abc > 1$. Sử dụng đánh giá:

$\frac{a}{2+a} \ge \frac{1}{a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1}$, đặt $t=\sqrt[3]{a}$, ta cần:

$\frac{t^3}{2+t^3} \ge \frac{t^4}{t^4+t^2+1} \Leftrightarrow \frac{t^3(t-1)^2}{(2+t^3)(t^4+t^2+1)} \ge 0$. Kết hợp với $y=f(a)=\frac{1}{a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1}$ là hàm tăng, ta được:

$$\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}$$
$$\ge \frac{1}{a^{\frac{-4}{3}}+a^{\frac{-2}{3}}+1}+\frac{1}{b^{\frac{-4}{3}}+b^{\frac{-2}{3}}+1}+\frac{1}{c^{\frac{-4}{3}}+c^{\frac{-2}{3}}+1} > 1.$$

Điều này là mâu thuẫn giả thiết. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. • Một số bài toán tương tự:

+ **(Viet Nam – 1998)** *Cho $n \ge 2$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn*

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+\cdots+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1} \ge 1998$.

+ **(Macedonia MO 2016)** *Với $x_1, x_2, ..., x_n (n \ge 3)$ là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{x_1^4+1}+\frac{1}{x_2^4+1}+\cdots+\frac{1}{x_n^4+1}=1$.

Chứng minh rằng: $x_1x_2...x_n \ge (n-1)^{\frac{n}{4}}$ *(với $n=4$ thì đây là đề* **Latvia – 2002***).*

Và tổng quát của nó: *Với $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}=1$, *chứng minh rằng:* $x_1x_2...x_n \ge (n-1)^n$.

Tất nhiên với tổng quát này bổ đề sẽ không giải quyết được vì bổ đề chỉ có 3 biến. Thế nhưng, một lần nữa ta thấy giả thiết $f(x,y,z)=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1$ không đóng vai trò quan trọng, có thể thay bằng nhiều hàm khác, chẳng hạn: $\frac{(2x)^{2018}}{2+(2x)^{2013}}+\frac{(2y)^{2018}}{2+(2y)^{2013}}+\frac{(2z)^{2018}}{2+(2z)^{2013}}=1$.

• Với kỹ thuật phản chứng kết hợp với bổ đề như trên, ta có lời giải cho bài toán **(China TST Training – 1990)**: *Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}=1$, *chứng minh rằng:* $xyz \le \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ngoài các hướng vận dụng bổ đề như trên, một suy nghĩ khá tự nhiên là mở rộng số lượng biến cho bổ đề. Điều này hoàn toàn có thể thực hiện, cụ thể: *Với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{n-1}+a_i^{n-2}+...+a_i+1} \ge 1.$$

Tuy nhiên, việc chứng minh kết quả trên không đơn thuần là áp dụng BĐT Schwarz dạng phân thức hoặc các phép biến đổi. Hơn nữa, việc vận dụng một cách "cơ học" như vậy, dẫn đến cách chọn đồng thời hai số m, k sẽ chứa nhiều phép tính phức tạp. Chính vì hai lý do trên, mà hướng khai thác mở rộng số lượng biến rất có thể làm mất đi vẻ đẹp thật sự của bài toán lẫn bổ đề và hơn hết là đi quá sâu vào thủ thuật tính toán, một điều không quá trọng yếu của việc học Toán. Dù vậy, người viết vẫn xin trình bày một số thí dụ áp dụng cho trường hợp $n=4$ để bạn đọc có hứng thú có thể tìm hiểu và khám phá (và sẽ không trình bày chi tiết chứng minh).

Thí dụ 21 (China - 2004). *Với x, y, z, t là các số thực dương có tích bằng 1, chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2} \ge 1.$$

Hướng dẫn giải. Sử dụng đánh giá:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \ge \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}.$$

Thí dụ 22 (Latvia - 2002). *Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+y^4}+\frac{1}{1+z^4}+\frac{1}{1+t^4}=1$, *chứng minh rằng:* $xyzt \ge 3$.

Hướng dẫn giải. Đổi biến $x=\sqrt[4]{3}a; y=\sqrt[4]{3}b; z=\sqrt[4]{3}c; t=\sqrt[4]{3}d$, biểu thức điều kiện được viết lại là:

$$\frac{1}{1+3a^4}+\frac{1}{1+3b^4}+\frac{1}{1+3c^4}+\frac{1}{1+3d^4}=1.$$

và ta cần chứng minh: $abcd \ge 1$. Sử dụng phản chứng kết hợp với đánh giá: $\frac{1}{1+3a^4} \ge \frac{1}{a^3+a^2+a+1}$.

5. Kết luận

Bổ đề với các hướng khai thác có nhiều ứng dụng cho nhiều dạng BĐT khác nhau. Tuy nhiên, vẫn còn một vấn đề mà bài viết chưa giải quyết được, đó là tìm chính xác điều kiện cần và đủ cho giá trị m, k trong cách mà ta áp dụng bổ đề. Bài viết hy vọng sẽ nhận được những cách xử lý khéo hơn từ bạn đọc. Cuối cùng, ta đến với bài toán đơn giản sau thay cho lời giải thích tại sao ta mạnh dạn chọn bổ đề làm cấu hình cho mỗi đánh giá.

Thí dụ 23 (BĐT Cauchy cho 3 biến). *Với x,y,z là các số thực dương, chứng minh rằng: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$.*

Lời giải. Chuẩn hóa $xyz=1$ và sử dụng đánh giá:

$$x-1+\frac{k}{3}\ge\frac{k}{x^{\frac{-6}{k}}+x^{\frac{-3}{k}}+1};(k\ge 3).$$

Chẳng hạn với $k=3$, ta cần có:

$$x\ge\frac{3x^2}{x^2+x+1}\Leftrightarrow\frac{x(x-1)^2}{x^2+x+1}\ge 0.$$

Áp dụng tương tự cho hai biến còn lại. Ta được:

$$x+y+z\ge 3\left(\frac{x^2}{x^2+x+1}+\frac{y^2}{y^2+y+1}+\frac{z^2}{z^2+z+1}\right)\ge 3.$$

Nhận xét. Bài giải đã khẳng định bổ đề được áp dụng với cách chọn khéo léo m,k có thể chứng minh được BĐT Cauchy cho 3 biến, một BĐT cổ điển được sử dụng để chứng minh nhiều BĐT khác (không có hiện tượng chứng minh xoay vòng ở đây vì bổ đề được chứng minh từ BĐT Schwarz là hệ quả của BĐT Bunyakovsky được chứng minh từ đẳng thức Lagrange).

5. Bài tập đề nghị

1 (*ĐH khối A - 2003*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z\le 1$, chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}\ge\sqrt{82}.$$

2 (*China Western MO 2004*). Với x,y,z là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$1<\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

3 (*Mediterranean MO - 2009*). Với x,y,z là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x^2+xy+y^2}+\frac{yz}{y^2+yz+z^2}+\frac{zx}{z^2+zx+x^2}\le\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{2y+z}+\frac{z}{2z+x}.$$

4 (*Irish MO - 2010*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$, chứng minh rằng:

$$xy+yz+zx\ge 9xyz.$$

5 (*Bulgaria MO 2013*). Với $x,y,z\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan x+\tan y+\tan z\le 3$, chứng minh rằng:

$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\ge 0.$$

6 (*Azerbaijan NMO 2015*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=\frac{1}{8}$, chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge\frac{15}{16}.$$

7 (*Chọn đội Olympic 30/4 – THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP.Hồ Chí Minh, năm 2018*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\max\left\{\frac{3}{4};\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{1+xy}\right\}.$$

8 (*Chọn đội Olympic 30/4 – THPT chuyên Phan Ngọc Hiển - Cà Mau, năm 2018*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=12$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$.

9 (*Mathematical communication*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:

$$(x^4+y^4)(y^4+z^4)(z^4+x^4)\ge(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3).$$

10 (*TH&TT – T9/460*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz\ge 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{x^4y^2z^2}{yz+1}+\frac{x^2y^4z^2}{zx+1}+\frac{x^2y^2z^4}{xy+1}\ge\frac{3}{2}.$$

12 (*AMM - 2016*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}+\sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}}+\sqrt{\frac{z+1}{z^2-z+1}}\le 3\sqrt{2}.$$

15 (*Crux Mathematicorum*). Với x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:

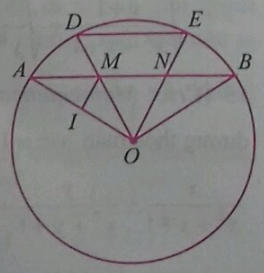
$$\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{y}{y^2+y+1}+\frac{z}{z^2+z+1}\le\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}.$$

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 18. *Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB không đi qua O. Trên dây cung AB lấy các điểm M và N sao cho $AM = MN = NB$. Các tia OM, ON cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AD}$ < sđ $\overset{\frown}{DE}$.*

Phân tích tìm lời giải. Bài toán không phải là khó đối với học sinh khá giỏi, tuy nhiên HS cũng gặp không ít khó khăn khi thực hiện giải bài toán. Vấn đề ở đây là công cụ để học sinh so sánh hai dây trong một đường tròn còn hạn chế, vì bài tập này nằm ngay sau bài "*Liên hệ giữa cung và dây*". Để so sánh sđ $\overset{\frown}{AD}$ và sđ $\overset{\frown}{DE}$ ta nghĩ đến việc so sánh hai góc ở tâm chắn hai cung đó ($\widehat{AOD}$ và $\widehat{DOE}$). Do đó ta nghĩ cách tạo ra hai góc bằng $\widehat{AOD}$ và $\widehat{DOE}$ rồi đưa về so sánh hai góc trong một tam giác. Hơn nữa giả thiết bài toán cho nhiều trung điểm, nên rất tự nhiên ta nghĩ ngay đến tính chất đường trung bình của tam giác. Cụ thể:

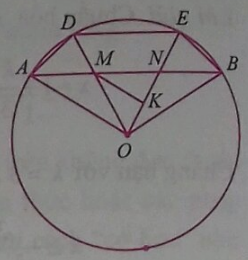
Cách 1. Vẽ $MI \parallel ON$ (I thuộc OA). Theo tính chất đường trung bình của tam giác, ta có:



$$MI = \frac{1}{2}ON;\ OI = \frac{1}{2}OA.$$

Mặt khác, vì M và N nằm trong $(O; R)$; A, B nằm trên $(O; R)$ nên $OA > ON \Rightarrow OI > MI$. Do đó $\widehat{IMO} > \widehat{MOI} \Rightarrow \widehat{DOE} > \widehat{DOA} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DE}$ > sđ $\overset{\frown}{AD}$.

Cách 2. Vẽ $MK \parallel OA$ (K thuộc ON). Theo tính chất đường trung bình của tam giác, ta có:



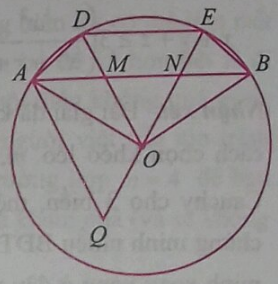
$$OK = \frac{1}{2}ON;\ MK = \frac{1}{2}OA.$$

Mà $OA > ON \Rightarrow MK > OK$.

$\Rightarrow \widehat{MOK} > \widehat{OMK} \Rightarrow \widehat{DOE} > \widehat{DOA}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DE}$ > sđ $\overset{\frown}{DA}$.

Cách 3. Gọi Q là điểm đối xứng với N qua O. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có $MO \parallel AQ$



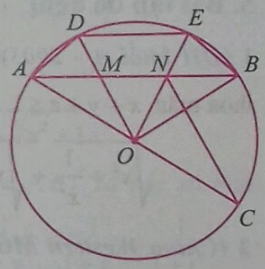
$\Rightarrow \widehat{AQO} = \widehat{DOE}$; $\widehat{QAO} = \widehat{AOD}$.

Vì $ON < OA$ mà $OQ = ON$

$\Rightarrow OQ < OA \Rightarrow \widehat{AQO} > \widehat{QAO}$

$\Rightarrow \widehat{DOE} > \widehat{AOD} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DE}$ > sđ $\overset{\frown}{DA}$.

Cách 4. Vẽ đường kính AC của $(O; R)$. Suy ra MO là đường trung bình của tam giác ANC



$\Rightarrow OM \parallel NC \Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{AOD}$

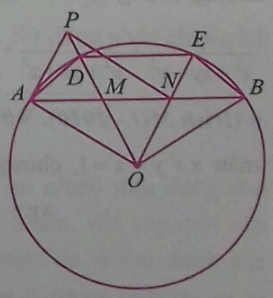
và $\widehat{ONC} = \widehat{DOE}$. Mà

$ON < OC \Rightarrow \widehat{NCA} < \widehat{ONC}$

$\Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{DOE} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AD}$ < sđ $\overset{\frown}{DE}$.

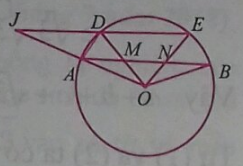
Bài toán cho các trung điểm nên ngoài việc sử dụng tính chất đường trung bình ta còn nghĩ đến việc vẽ thêm hình bình hành. Cụ thể:

Cách 5. Gọi P là điểm đối xứng với O qua M thì tứ giác $APNO$ là hình bình hành $\Rightarrow O, M, D, P$ thẳng hàng, $AP \parallel ON$ và $AP = ON$. Vì $ON < OA$ nên $AP < OA$



$\Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{APO} \Rightarrow \widehat{AOD} < \widehat{DOE} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AD}$ < sđ $\overset{\frown}{DE}$.

Ngoài việc so sánh hai cung thông qua so sánh hai góc ở tâm chắn hai cung đó, ta còn có thể so sánh số đo hai cung thông qua độ dài hai dây căng hai cung đó. Vả lại bài toán cho các trung điểm nên ta thử nghĩ đến một bổ đề về hình thang có hai cạnh bên không song song. Với cách nghĩ như thế ta có cách 6:



Cách 6. Gọi J là giao điểm của DE và OA. Vì $\Delta OAM = \Delta OBN$(c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta MNO$ cân tại O. Mà ΔODE cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ODE} \Rightarrow MN \,//\, DE.$

Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{AM}{DJ} = \frac{MN}{DE}\left(=\frac{OM}{OD}\right) \Rightarrow DJ = DE.$$

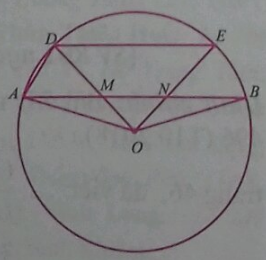
Ta lại có ΔADO cân tại O nên $\widehat{OAD}$ là góc nhọn $\Rightarrow \widehat{JAD}$ là góc tù

$\Rightarrow DJ > DA \Rightarrow DE > AD \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{DE} >$ sđ$\overset{\frown}{DA}$.

ĐÀO QUỐC CHUNG

(*GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An*)

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải nêu trên của tác giả đề toán: *Đào Quốc Chung*, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số lời giải tương tự Cách 3 và Cách 4 nêu trên của các bạn: *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi;** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế.** Bạn *Phùng Chí Tự* (GV THPT Anhxtanh, **Hà Nội**) đưa ra 3 cách giải, 2 cách giống cách 1 và cách 2 ở trên, cách thứ 3 như sau:



Cách 7. Ta có tam giác OAB cân ở O (vì $OA = OB$) $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

Lại có $AM = BN$ (giả thiết); $OA = OB$

$\Rightarrow \Delta OMA = \Delta ONB$ (c.g.c) $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AOM} = \widehat{BON} \\ OM = ON \end{cases}$

(góc và cạnh tương ứng).

Hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BON}$ phải cùng nhọn vì nếu chúng là góc vuông hoặc tù thì $\widehat{AOM} + \widehat{BON} \geq 180^0 \Rightarrow$ vô lý! (vì dây cung AB không đi qua O).

Nếu $\widehat{MON} \geq 90^0$ thì $\widehat{MON} > \widehat{AOM}$

$\Rightarrow \widehat{DOE} > \widehat{AOD} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AD} <$ sđ$\overset{\frown}{DE}$.

Nếu $\widehat{MON} < 90^0$, xét

$$S_{AOM} = \frac{1}{2}OA.OM.\sin\widehat{AOM}$$

$$S_{MON} = \frac{1}{2}ON.OM.\sin\widehat{NOM}.$$

Mà $S_{AOM} = S_{MON}$, nên

$$\frac{1}{2}OA.OM.\sin\widehat{AOM} = \frac{1}{2}ON.OM.\sin\widehat{NOM}$$

$\Rightarrow OA.\sin\widehat{AOM} = ON.\sin\widehat{NOM}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AOM} < \sin\widehat{NOM}$ (vì $ON < OA$).

$\Rightarrow \widehat{NOM} > \widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{DOE} > \widehat{AOD}$

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AD} <$ sđ$\overset{\frown}{DE}$.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 20 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.12.2018.

BÀI TOÁN 20. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức* $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$

PHÙ DU

(*GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 495, T9.2018.

Bài 26 (*Turkey TST 2012*). *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca ≤ 1. Chứng minh rằng*

$$a+b+c+\sqrt{3}\ge 8abc\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right).$$

Lời giải. Do $ab+bc+ca\le 1$ nên

$$\frac{1}{a^2+1}\le\frac{1}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{1}{(a+b)(a+c)}.$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2+1}\le\frac{1}{(a+b)(b+c)};\ \frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{(a+c)(b+c)}.$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+c^2b+cb^2\ge 6\sqrt[6]{(abc)^6}=6abc$$

$$\Leftrightarrow 9\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+c^2b+cb^2\right)+18abc$$

$$\ge 8\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+c^2b+cb^2\right)+24abc$$

$$\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$$

$$\le\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$\le\frac{2(a+b+c)}{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)}=\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\quad(1).$$

Ta sẽ chứng minh

$$a+b+c+\sqrt{3}\ge\frac{18.abc}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(a+b+c+\sqrt{3}\right)\ge 18abc.$$

Thật vậy, ta có: $(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$

và $\sqrt{3}(ab+bc+ca)$

$$\ge\sqrt{3}.\sqrt{(ab+bc+ca)}.(ab+bc+ca)$$

$$\ge\sqrt{3}.\sqrt{3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9abc.$$

Vậy $a+b+c+\sqrt{3}\ge\dfrac{18abc}{ab+bc+ca}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có

$$a+b+c+\sqrt{3}\ge 8abc.\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right).$$

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia đều giải đúng và có hướng giải như trên. Danh sách các bạn được khen là: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong. **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, Huyện Tư Nghĩa. **Thừa Thiên Huế**: *Lê Minh Thùy, Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1; *Trương Tiến Dũng, Lê Quang Quốc Phú, Nguyễn Đức Phát, Hồ Ngọc Hùng*, 10 Toán 2; *Nguyễn Hồ Anh Hưng, Lê Thị Thúy Nga, Võ Thị Hải Yến, Đoàn Thị Kim Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.12.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 28. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn abc(a + b + c) ≤ 3. Chứng minh rằng*

$$(a^5-2a+4)(b^5-2b+4)(c^5-2c+4)$$
$$\ge 9\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(*SV K61 ngành SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)

***Đính chính*:** Bài 27, mục: Du lịch ..., TH&TT số 496 (T10.2018),

trang 46, đã viết: ... $\dfrac{(x_1^2+x_1^2+x_1^2)^3}{(x_1^3+x_1^3+x_1^3)^2}\le 3$ ...

xin được sửa là: ... $\dfrac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}{(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^2}\le 3$ ...

Thành thật xin lỗi bạn đọc - TH&TT

GIẢI ĐÁP: ĐÚNG HAY SAI !

(*Đề đăng trên TH&TT số* 493, *tháng* 7 *năm* 2018)

Phân tích. Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình. Lời giải của bạn học sinh đó đã sai khi nhân lượng liên hợp $x+\sqrt{x+2}$ vào cả tử và mẫu mà không xét trường hợp lượng liên hợp này có thể bằng 0, dẫn tới nghiệm ngoại lai.

Lời giải đúng. ĐK: $x \geq -2$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ x^2-x-8=-\dfrac{2(x+6+2\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}+2} & (2) \end{array}\right..$$

$$(2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-x-2=-2\left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\right) \qquad (*)$$

Xét hai trường hợp:

• TH1: $x+\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x+2=(-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1: \text{ không thỏa mãn } (*).$$

• TH2: $x+\sqrt{x+2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-x-2=0 & (3) \\ (\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{x+2})=-2 & (4) \end{array}\right..$$

Khi đó giải như cũ, hệ (3), (4) có nghiệm $x = 2$ và $x=2(1-\sqrt{3})$. Vậy (1) có nghiệm: $x=2$, $x=2(1-\sqrt{3})$.

Nhận xét. Các bạn gửi về đều tìm đúng sai lầm và đưa ra cách giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Bùi Văn Quyến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, *Tôn Nữ Cát Vi, Đỗ Trung Thái, Nguyễn Đình Thông*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Sóc Trăng:** *Trần Vĩnh Phú*, 11A8, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc trăng. **Vĩnh Long:** *Lê Mỹ Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

KIHIVI

ĐƯỢC ĐIỂM 10 !

Sau khi học xong bài giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, thầy giáo cho một bài tập cho lớp 12A1 và yêu cầu các em về nhà suy nghĩ hôm sau tiết bài tập xung phong lên bảng giải, nếu đúng sẽ được điểm 10.

Bài toán. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn* $x^2-3y^2=1$.

Đặt $P=\dfrac{3y^2+12xy+x^2+1}{2xy+2x^2-1}$. *Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. *P có giá trị nhỏ nhất bằng –6 và P không có giá trị lớn nhất.*

B. *P không có giá trị nhỏ nhất và P không có giá trị lớn nhất.*

C. *P không có giá trị nhỏ nhất và P có giá trị lớn nhất bằng* 3.

D. *P có giá trị nhỏ nhất bằng –6 và P có giá trị lớn nhất bằng* 3.

Tiết bài tập hôm sau tại lớp 12A1, bạn *Mỹ Linh* đã xung phong giải bài toán trên. Dưới đây là lời giải của bạn *Mỹ Linh*.

Bài giải. Với $x^2-3y^2=1$, ta có

$$P=\frac{3y^2+12xy+x^2+1}{2xy+2x^2-1}=\frac{3y^2+12xy+x^2+x^2-3y^2}{2xy+2x^2-(x^2-3y^2)}$$

$=\dfrac{2x^2+12xy}{x^2+2xy+3y^2}$. Với $y=0$ thì $P=2$. Với $y \neq 0$, ta có: $P=\dfrac{2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+12\dfrac{x}{y}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\dfrac{x}{y}+3}$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}, t \in \mathbb{R}$. Khi đó

$P=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-8t^2+12t+36}{(t^2+2t+3)^2}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-3}{2}, t=3$.

Ta có BBT:

t	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	↘	-6	↗	3	↘	2

Từ BBT ta thấy:

$-6 \leq f(t) \leq 3 \ \forall t$.

$\Rightarrow \min f(t)=f(-3/2)$

$=-6$,

$\max f(t)=f(3)=3$

Mà $P=f(t) \Rightarrow \min P=-6, \max P=3$. Chọn đáp án **D**.

Sau khi giải xong cả lớp "ồ lên": *Mỹ Linh* 10 điểm rồi. ***Theo bạn, Mỹ Linh có được 10 điểm không?***

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT nguyễn Bỉnh Khiêm, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 497 (11.2018)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài thơ

BỎ DẤU NGOẶC - ĐẶT DẤU NGOẶC

Bỏ ngoặc đằng trước dấu trừ
Đổi dấu trong ngoặc từ từ viết ra.
Dấu cộng trước ngoặc thì ta
Không thay đổi dấu viết ra ngay liền.
Bạn ơi xin chớ lo phiền
Bỏ ngoặc, dấu đứng trước liền bỏ đi.
Quy tắc phải nhớ mọi khi
Vận dụng chính xác mỗi khi thực hành
Cộng, trừ phép toán tính nhanh
Nhóm trong dấu ngoặc rành rành bạn ơi.
Dấu trừ trước ngoặc đặt rồi
Trong ngoặc đổi dấu tuyệt vời nhớ ghi.
Dấu cộng trước ngoặc khó gì
Trong ngoặc không đổi dấu thì chẳng sai.
Chúc bạn học tập hăng say
Giải nhanh, tính đúng mọi bài toán xinh!

TRẦN TƯƠI
(GV THCS Huỳnh Thúc Kháng, H. Krông Pắc, Đắk Lắk)

Giải đáp: ĐỐ VUI T9.2018

CÁC HÌNH VUÔNG VỚI SỐ 2018

Hãy tìm 12 hình vuông với số đo các cạnh là các số nguyên liên tiếp sao cho tổng diện tích của 12 hình vuông đó bằng 2018.

Lời giải. Bạn đọc tự chứng minh các công thức sau bằng phương pháp quy nạp:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Gọi số đo cạnh hình vuông bé nhất là n với n là số nguyên dương, theo giả thiết có

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+11)^2 = 2018.$$

Từ đó, sử dụng các công thức S_n và S_n^2 ta được

$$2018 = 12n^2 + 2n(1 + 2 + 3 + \ldots + 11) + 1^2 + 2^2 + \ldots + 11^2$$

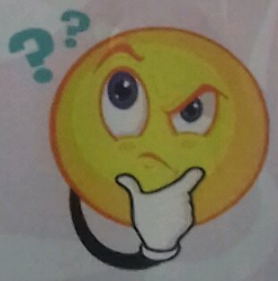
$$= 12n^2 + 11.12n + 2.11.23 = 12n^2 + 132n + 506,$$

suy ra $n^2 + 11n - 126 = 0$ hay $(n-7)(n+18) = 0$. Vì n là số nguyên dương nên $n = 7$. Vậy các cạnh hình vuông cần tìm là 12 số nguyên liên tiếp từ 7 đến 18 và ta có:

$$2018 = 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2.$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: **Điện Biên**: *Nguyễn Văn Bản*, THCS Thanh Yên; **Hưng Yên**: *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bến Tre**: *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*



ĐỐ VUI !

TÍNH NHIỆT ĐỘ

Bạn A: *Theo dự báo thời tiết thì gió mùa đã bắt đầu suy yếu nên nhiệt độ ngày mai sẽ tăng gấp đôi ngày hôm nay.*

Bạn B: *Trưa hôm nay nhiệt độ là* 3^0C (*độ Celsius*) *thì trưa ngày mai sẽ là mấy độ ?*

Bạn A: *Dễ ợt, trưa ngày mai nhiệt độ là* 6^0C.

Bạn B: *Thế tối hôm nay nhiệt độ là* 0^0C (*độ Celsius*) *thì tối ngày mai sẽ là mấy độ ?*

Bạn A: …

Các bạn hãy giúp bạn A trả lời và phân tích câu trả lời nhé!

Mời bạn đọc gửi lời giải bài đố vui này cho Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 5.12.2018.

VÂN KHANH
(Hà Nội)

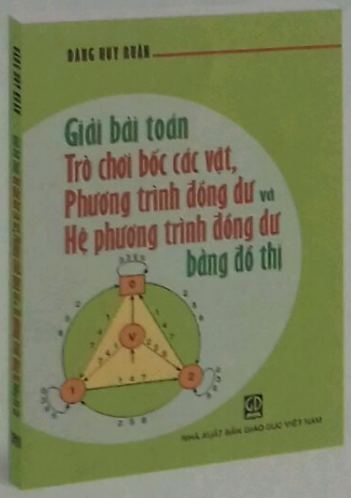
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng