



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
10 2018
Số 496

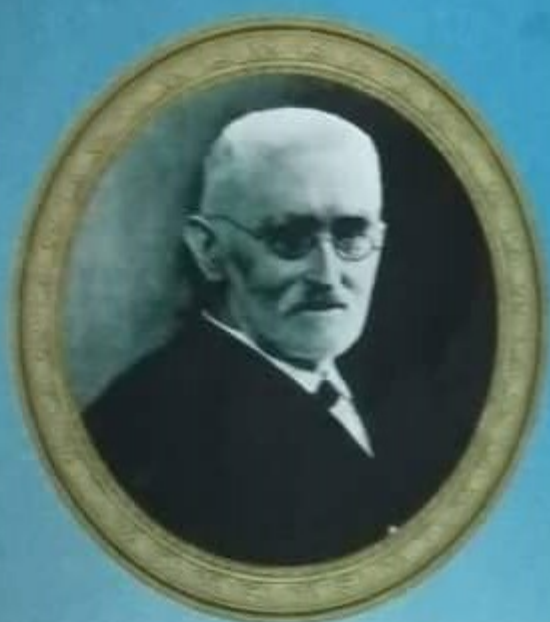
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

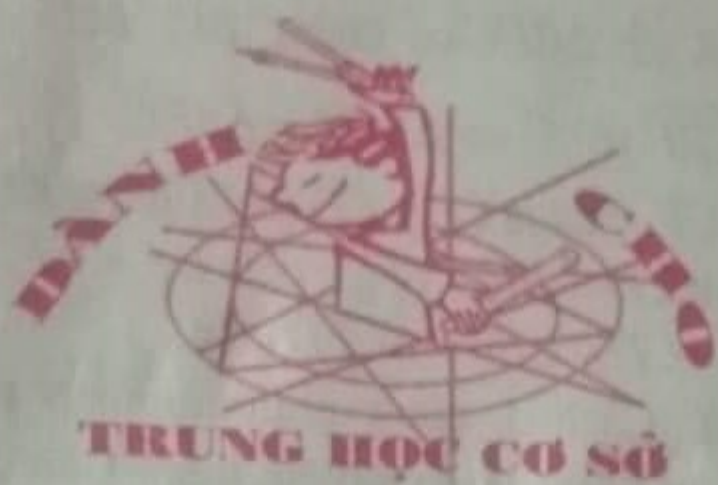
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Quảng trường thành phố cổ kính Braunschweig (CHLB Đức)
Quê hương nhà toán học **Richard Dedekind** (1831 - 1916)



SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 7

VŨ HỮU CHÍNH

(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Trong chương trình hình học lớp 7 có một số bài toán mà việc chứng minh trực tiếp dài phải kẻ thêm hình hoặc không chứng minh được. Do đó dựa vào việc đo đạc, dự đoán sau đó dùng phương pháp phản chứng để giải các bài toán đó. Phương pháp phản chứng là phương pháp chứng minh gián tiếp, giúp cho học sinh có tư duy trong toán học cũng như trong thực tế.

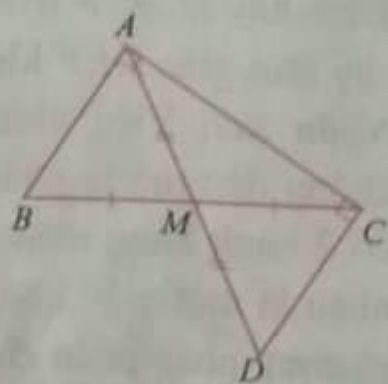
Các bước của phương pháp phản chứng:

- Bước 1: (Phủ định kết luận) Giả sử có điều trái với kết luận bài toán.
- Bước 2: (Đưa đến mâu thuẫn) Kết hợp điều giả sử với giả thiết bài toán ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.
- Bước 3: (Khẳng định kết luận) Vậy kết luận của bài toán là đúng.

I. DỰA VÀO KẾT LUẬN CỦA BÀI TOÁN PHỦ ĐỊNH KẾT LUẬN

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AM là đường trung tuyến. Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$.

Lời giải. Cách 1. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$. Khi đó $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MDC}$. Mà 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \parallel CD$, lại có $AB \perp AC \Rightarrow CD \perp AC$.



Xét $\triangle ACB$ và $\triangle CAD$ có AC chung, $AB = CD$, $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACB = \triangle CAD$ (c.g.c).

Suy ra: $BC = AD, AD = 2AM \Rightarrow BC = 2AM$.

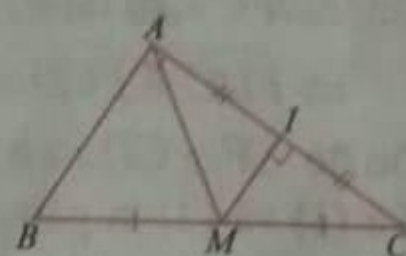
Cách 2. Gọi I là trung điểm của AC . Khi đó MI là đường trung bình $\triangle ABC \Rightarrow MI \parallel AB$, mà

$$AB \perp AC \Rightarrow MI \perp AC, IA = IC,$$

suy ra $\triangle AMC$ cân tại đỉnh M . Do đó

$$AM = MC = MB$$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$$



Cách 3. Giả sử $AM < \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM < MC = MB$.

Trong $\triangle AMC, AM < MC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{CAM}$.

Trong $\triangle AMB, AM < MB \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{BAM}$.

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{CAM} + \widehat{BAM} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{BAC}$, mà $\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} > 90^\circ$ (trái giả thiết). Lập luận tương tự giả sử $AM > \frac{1}{2}BC$ ta có $\widehat{BAC} < 90^\circ$ (trái giả thiết).

$$\text{Suy ra } AM = \frac{1}{2}BC.$$

Nhận xét. • Với cách giải 1 phải vẽ thêm hình, cách giải 2 phải hướng dẫn cho học sinh khá, giỏi về tính chất đường trung bình tam giác. Còn cách giải 3 không cần vẽ thêm hình mà vẫn lập luận giải được.

• Dựa vào cách 3, chứng minh bằng phản chứng, ta giải được bài toán sau:

Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM . Chứng minh:

a) $\widehat{BAC} > 90^\circ$ khi và chỉ khi $AM < \frac{1}{2}BC$.

b) $\widehat{BAC} < 90^\circ$ khi và chỉ khi $AM > \frac{1}{2}BC$.

Bài toán 2. Ở miền trong hình vuông $ABCD$ dựng tam giác AFB cân ở F có góc ở đáy là 15° . Chứng minh $\triangle CFB$ là tam giác đều.

Lời giải. Cách 1. Ta có $\triangle AFD = \triangle BFC$ (c.g.c) $\Rightarrow FD = FC = b$,

$$\widehat{AFD} = \widehat{BFC} = \alpha.$$

Gọi cạnh hình vuông là a .
 Giả sử $a > b$. (1)

Trong $\triangle AFD$ có

$$AD > DF \Rightarrow \widehat{AFD} > \widehat{DAF}$$

$$\Rightarrow \alpha > 75^\circ, \text{ lại có } \widehat{AFB} = 150^\circ \text{ nên}$$

$$\widehat{DFC} < 360^\circ - (75^\circ + 75^\circ + 150^\circ), \text{ hay } \widehat{DFC} < 60^\circ.$$

Xét $\triangle DFC$ cân tại F , $\widehat{DFC} < 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{FCD} > 60^\circ \Rightarrow \widehat{FDC} > \widehat{DFC}.$$

Do đó $CF > CD \Rightarrow b > a$. (2)

Từ (1) và (2) ta gặp điều mâu thuẫn. Lập luận tương tự với $a < b$ ta cũng gặp điều mâu thuẫn.

Vậy $a = b \Rightarrow \triangle CFD$ là tam giác đều.

Cách 2. Vẽ $\triangle AFK$ đều, với D, K cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AF . Ta có

$$\widehat{DAF} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAK} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ.$$

Xét $\triangle AKD$ và $\triangle AFB$ có

$$AK = AF, AD = AB,$$

$$\widehat{DAK} = \widehat{BAF} = 15^\circ \Rightarrow \triangle AKD = \triangle AFB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{AFB} = 150^\circ. \text{ Có}$$

$$\widehat{DKF} = 360^\circ - \widehat{AKF} - \widehat{AKD} = 360^\circ - 60^\circ - 150^\circ = 150^\circ$$

Xét $\triangle AKD$ và $\triangle FKD$ có DK chung, $AK = KF$,

$$\widehat{AKD} = \widehat{DKF} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AKD = \triangle FKD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DF = AD = CD$$

Lại có $\triangle AFD = \triangle BFC$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = CF$. Do đó $DF = CD = CF \Rightarrow \triangle CFD$ đều.

Cách 3. Vẽ $\triangle ABK$ đều với K và F nằm trên 2 nửa mặt phẳng bờ AB . Từ $FA = FB$, $KA = KB \Rightarrow FK$ là trung trực của đoạn thẳng AB

$$\Rightarrow FK \perp AB, FK \text{ là tia phân}$$

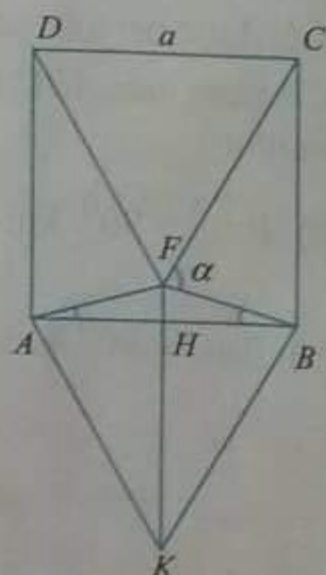
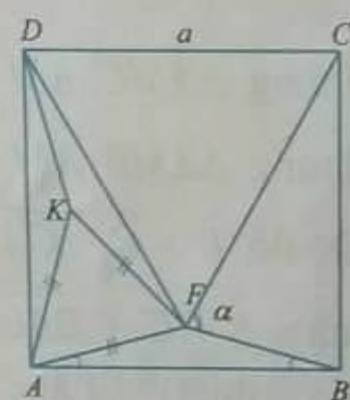
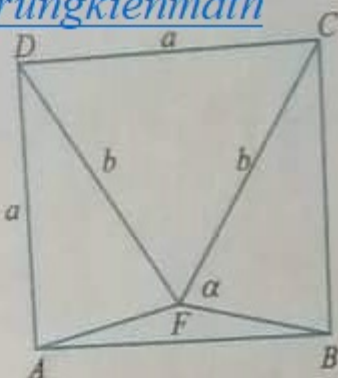
giác $\widehat{AFB}$ mà $\widehat{AFB} = 150^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BFK} = 150^\circ : 2 = 75^\circ.$$

$$\text{Lại có } \widehat{KBF} = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ.$$

$$\Rightarrow \triangle KBF \text{ cân tại } K$$

$$\Rightarrow KF = KB = CD.$$



Xét $\triangle BFK$ và $\triangle BFC$ có chung BF , $BC = BK$,

$$\widehat{KBF} = \widehat{CBF} = 75^\circ \Rightarrow \triangle BFK = \triangle BFC$$

$$\Rightarrow KF = CF. \text{ Suy ra } CF = CD \text{ (cùng bằng } KF).$$

$$\text{Lại có } \triangle AFD = \triangle BFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DF = CF.$$

$$\text{Vậy } DF = CD = CF \Rightarrow \triangle CFD \text{ đều.}$$

Nhận xét. Cách 1 dùng phương pháp phản chứng không cần phải vẽ thêm hình. Còn cách 2, cách 3 chứng minh trực tiếp phải vẽ thêm hình là các tam giác đều. Việc vẽ thêm hình là một việc khó đối với học sinh lớp 7. Do đó phương pháp phản chứng có tính ưu việt là không cần phải vẽ thêm hình.

Bài toán 3. Tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH , đường trung tuyến BI , đường phân giác CK cắt nhau tại ba điểm phân biệt D, E, F . Chứng minh $\triangle DEF$ không thể là tam giác đều.

Lời giải. Giả sử $\triangle DEF$

đều, ta có $\widehat{CDH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{HCD} = 30^\circ.$$

Từ CK là phân giác của

$$\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACD} = 30^\circ.$$

Ta có $\widehat{CFI} = \widehat{DFE} = 60^\circ$. Xét $\triangle CFI$ có

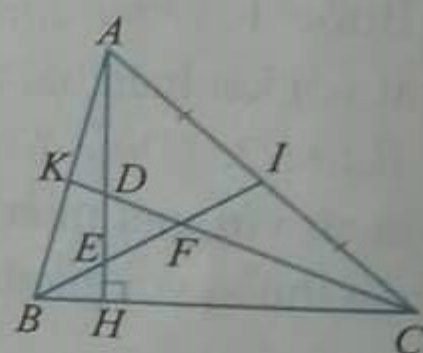
$$\widehat{CFI} = 60^\circ, \widehat{FCI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CIF} = 90^\circ$$

hay $BI \perp AC$. Tam giác ABC có BI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến. Suy ra $\triangle ABC$ cân tại đỉnh B mà $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Do đó $\triangle ABC$ đều. Từ đó AH, BI, CK đồng quy tại 1 điểm hay D, E, F trùng nhau. Trái với giả thiết, vậy tam giác DEF không đều.

Nhận xét. Việc chứng minh trực tiếp $\triangle DEF$ không đều tức là phải chứng minh $\triangle DEF$ không có 2 cạnh bằng nhau hoặc có 2 góc không bằng nhau là một việc khó. Cho nên học sinh sử dụng phương pháp phản chứng sẽ chứng minh được dễ dàng hơn.

Bài toán 4. Cho $\triangle ABC$ có hai đường phân giác BB' và CC' bằng nhau. Chứng minh $\triangle ABC$ cân.

Lời giải. Từ C' kẻ đường thẳng song song BB' , từ B' kẻ đường thẳng song song AB . Hai đường thẳng trên cắt nhau tại D . Ta có



$$BB' = C'D, BB' = CC' \Rightarrow C'D = CC'$$

$\Rightarrow \triangle CC'D$ cân tại C'

$\Rightarrow C'D = C'DC$. Do đó

$$\widehat{C}_2 + \widehat{C}_3 = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 \quad (1)$$

Giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$, mà

$$\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 > \widehat{C}_2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{C}_3 > \widehat{D}_2$. Xét $\triangle CB'D$ có

$\widehat{C}_3 > \widehat{D}_2 \Rightarrow CB' < DB'$ mà $DB' = BC' \Rightarrow CB' < BC'$.

Xét $\triangle BCC'$ và $\triangle CBB'$ có cạnh BC chung,

$$BB' = CC', CB' < BC' \Rightarrow \widehat{B}_1 < \widehat{C}_1$$

$\Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{ACB}$, trái với giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

Lập luận tương tự $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ cũng dẫn tới vô lý. Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, nên $\triangle ABC$ cân tại đỉnh A .

Nhận xét. Khác với bài toán 1, bài toán 2, Bài toán 4 không thể dùng cách chứng minh trực tiếp để giải quyết được. Trong bài toán 4 có sử dụng đến mối quan hệ giữa các góc trong 2 tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Bài toán 5. Cho điểm O nằm trong $\triangle ABC$. Gọi O_1, O_2, O_3 thứ tự là giao điểm các đường phân giác trong của các tam giác OAB, OAC, OBC . Biết khoảng cách từ O_1 và O_2 đến OA bằng khoảng cách từ O_3 đến OB .

a) Chứng minh nếu O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC thì $\triangle ABC$ đều.
b) Kết quả còn đúng khi O là trọng tâm $\triangle ABC$ hoặc O là trực tâm $\triangle ABC$.

Lời giải. a) Hạ

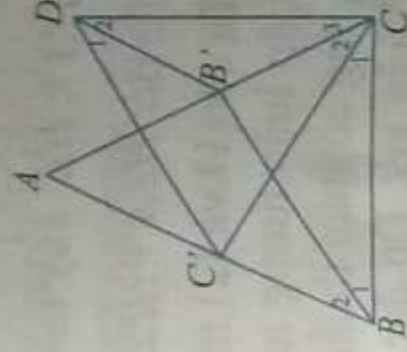
$$O_1I \perp OA, O_2I' \perp OA$$

$$\text{Ta có } \widehat{O_1AI} = \frac{1}{2}\widehat{BAO}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{CAO} = \widehat{O_2AI'}$$

Xét $\triangle O_1AI$ và $\triangle O_2AI'$ có

$$\begin{aligned} O_1I &= O_2I', \widehat{O_1AI} = \widehat{O_2AI'}, \widehat{O_1IA} = \widehat{O_2I'A} = 90^\circ \\ \Rightarrow \triangle O_1AI &= \triangle O_2AI' \Rightarrow AI = AI' \\ \Rightarrow I &\equiv I'. \text{ Suy ra } O_1, I, O_2 \text{ thẳng hàng.} \end{aligned}$$



Ta có khoảng cách từ O_1 đến các cạnh của $\triangle OAB$ bằng khoảng cách từ O_2 đến các cạnh $\triangle OAC$ bằng khoảng cách từ O_3 đến các cạnh $\triangle OBC$. Hạ $O_1K \perp OB, O_2H \perp OC$.
Lập luận tương tự có O_1, K, O_3 thẳng hàng
 O_2, H, O_3 thẳng hàng và $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.
 $\Rightarrow \triangle O_1O_2O_3$ đều. Do đó

$$\widehat{IO_1K} = \widehat{IO_2H} = \widehat{HO_3K} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle AOC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = AC,$$

$$\text{và } \triangle AOB = \triangle COB \Rightarrow AB = BC.$$

Suy ra $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

b) • Trường hợp O là trực tâm $\triangle ABC$.

Hạ $O_1E \perp AB, O_2F \perp AC$.

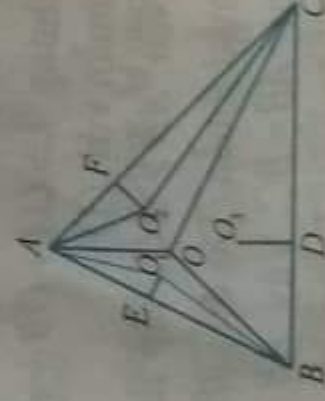
Ta có $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (góc

có cạnh tương ứng

vuông góc)

$$\Rightarrow \widehat{EBO_1} = \widehat{FCO_2},$$

$$O_1E = O_2F$$



Suy ra $\triangle BEO_1 = \triangle CFO_2 \Rightarrow BE = CF. \quad (1)$

Giả sử $AB < AC$ (2). Xét $\triangle AEO_1$ và $\triangle AFO_2$

có $O_1E = O_2F$. Do $BE = CF \Rightarrow AE < AF$,

$$\widehat{AEO_1} = \widehat{AFO_2} = 90^\circ$$

Suy ra $\widehat{EAO_1} > \widehat{FAO_2} \Rightarrow \widehat{BAO} > \widehat{CAO}$

Từ $AO \perp BC \Rightarrow \widehat{ABC} < \widehat{ACB} \Rightarrow AC < AB \quad (3)$

Ta thấy (2) và (3) mâu thuẫn với nhau, điều giả sử không xảy ra. Lập luận tương tự $AB > AC$ không xảy ra. Do đó $AB = AC$. Chứng minh tương tự có $AB = BC$.

Vậy $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

• Trường hợp O là trọng tâm $\triangle ABC$.

Giả sử AO cắt BC tại M

thì AM là đường trung

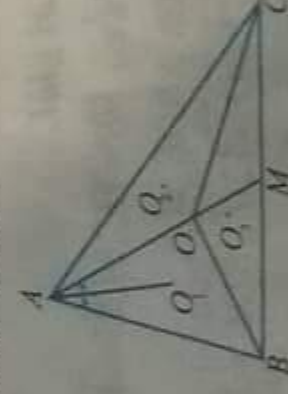
$$\text{tuyến } \triangle ABC.$$

$$S_{OBM} = S_{OCM},$$

$$S_{ABM} = S_{ACM}$$

$$\Rightarrow S_{ABM} - S_{OBM} = S_{ACM} - S_{OCM}$$

$$\Rightarrow S_{AOB} = S_{AOC} = S_{BOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$$



Gọi khoảng cách từ O_1 đến các cạnh $\triangle OAB$ bằng khoảng cách từ O_2 đến các cạnh $\triangle OAC$ bằng khoảng cách từ O_3 đến các cạnh $\triangle OBC$ là r . Ta có $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(OA + OB + AB)r = \frac{1}{2}(OA + OC + AC)r$$

$$= \frac{1}{2}(OB + OC + BC)r$$

$$\Rightarrow OA + OB + AB = OA + OC + AC$$

$$= OB + OC + BC \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } AB < AC \Rightarrow \widehat{M_1} < \widehat{M_2}$$

Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCM$ có $BM = CM$, OM chung, $\widehat{M_1} < \widehat{M_2} \Rightarrow OB < OC$, $AB < AC$, OA chung $\Rightarrow OA + OB + AB < OA + OC + AC$ (mâu thuẫn với (1)).

Nếu $AB > AC$, lập luận tương tự cũng dẫn tới mâu thuẫn. Do đó $AB = AC$. Chứng minh tương tự $AB = BC$. Vậy $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ đều. **Nhận xét.** Trong bài toán 5 phần a) có thể sử dụng phương pháp chứng minh gián tiếp là chứng minh $I \equiv I'$.

Trong bài toán 5 phần b) sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh. Trong quá trình chứng minh có sử dụng đến quan hệ giữa các cạnh góc của hai tam giác. Diện tích của hai tam giác.

II. DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ BÀI TOÁN, SAU ĐÓ SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Bài toán 6. Cho $\triangle ABC$ đều với đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa A , vẽ tia Dx sao cho $\widehat{BDx} = 15^\circ$, tia Dx cắt tia AB ở E . So sánh độ dài hai đoạn thẳng HD và HE .

Lời giải.

$$\text{Ta có } HB = HC, \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} = 120^\circ.$$

Xét $\triangle BDE$ có

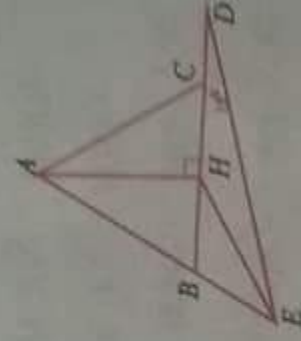
$$\widehat{EBD} = 120^\circ, \widehat{BDE} = 15^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BED} = 45^\circ \quad (1)$$

Giả sử $HD < HE$.

Xét $\triangle HDE$ có $HD < HE$

$$\Rightarrow \widehat{HED} < \widehat{HDE} = 15^\circ.$$



Do $HD = HA$ nên $HA < HE$. Xét $\triangle HAE$ có $HA < HE$ suy ra $\widehat{HEA} < \widehat{HAE} = 30^\circ$.

$$\text{Từ đó } \widehat{HEA} + \widehat{HED} < 30^\circ + 15^\circ \Rightarrow \widehat{BED} < 45^\circ \quad (2)$$

Ta có (1) và (2) mâu thuẫn.

Lập luận tương tự cho trường hợp $HD > HE$ ta cũng có mâu thuẫn. Vậy $HD = HE$.

Nhận xét. Đo đạc, dự đoán $HD = HE$. Bài toán trên là bài toán ngược của bài toán:

“Cho $\triangle ABC$ đều với đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $HA = HE$. Chứng minh rằng $\widehat{BDE} = 15^\circ$ ”.

Bài toán 7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

$$\widehat{ABC} = 50^\circ. \text{ Dựng } \triangle BCD \text{ với } \widehat{DCB} = \widehat{DBC} = 30^\circ$$

sao cho điểm D nằm ngoài $\triangle ABC$. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F . Tính số đo các góc $\widehat{AEF}$ và $\widehat{AFE}$.

Lời giải. Trong $\triangle DEF$ kẻ phân giác của các góc $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ chứng cắt nhau tại H . Ta có DH là phân giác của $\widehat{EDF}$. Lại có

$$\widehat{ACE} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 20^\circ.$$

$$\widehat{ABF} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{AFB} = 10^\circ$$

$$\widehat{EDF} = \widehat{BDC} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_3} = \widehat{D_4} = 60^\circ.$$

Giả sử $DH > DB$. Lấy $B' \in DH$ sao cho

$$DB' = DB \text{ mà } \widehat{D_1} = \widehat{D_3}, \text{ suy ra } \widehat{DEH} > \widehat{DEB} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DEF} > 40^\circ \Rightarrow \widehat{AEF} > 60^\circ > 40^\circ \quad (1)$$

Vì $DB = DC \Rightarrow DH > DC$, suy ra

$$\widehat{DFH} > \widehat{DFC} = 10^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DFE} > 20^\circ \Rightarrow \widehat{AFE} > 30^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{AFE} > 90^\circ$ (vô lí).

Nếu $DH < DB$ lập luận tương tự ta được

$$\widehat{AEF} + \widehat{AFE} < 90^\circ \quad (\text{vô lí}). \text{ Vậy phải có}$$

$DH = DB = DC$. Suy ra

$$\triangle DEH = \triangle DEB \Rightarrow \widehat{DEH} = \widehat{DEB} = 20^\circ$$

$$\text{Từ đó } \widehat{AEF} = 60^\circ, \widehat{AFE} = 30^\circ.$$

Nhận xét. Trong quá trình vẽ hình - đo đạc đúng, dự đoán $\widehat{AEF} = 60^\circ$, từ đó chứng minh $\widehat{DEF} = 40^\circ$. Bài toán trên là bài toán đảo của bài toán: "Cho ΔAFE vuông tại A , $\widehat{AEF} = 60^\circ$, lấy điểm C, B thứ tự thuộc cạnh AF, AE sao cho $\widehat{AEC} = 20^\circ$, $\widehat{AFB} = 10^\circ$. Tính các góc của ΔABC ".

Bài toán 8. Tam giác ABC có đường trung tuyến BM và phân giác CD cắt nhau tại K sao cho $KB = KC$, biết $\widehat{BAC} = 105^\circ$. Tính số đo $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.

Lời giải. Dựng $AH \perp BC$, nối H với M thì

$$MH = MA = MC. \text{ Khi đó}$$

$$\widehat{MHC} = \widehat{MCH} = 2\widehat{BCK},$$

theo giả thiết $KB = KC$

$$\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KCB}, \text{ do đó có } \widehat{MHC} = 2\widehat{KBC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{MHC} = \widehat{KBC} + \widehat{HMB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{HMB}$, hay ΔHBM cân tại $H \Rightarrow MH = HB$. Giả sử $HA > HB$ lúc đó

$$\widehat{ABH} > \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{BAH} < 45^\circ, \widehat{ABH} > 45^\circ.$$

Vì $\widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 105^\circ$, nên $\widehat{CAH} > 60^\circ$.

Có ΔAHM cân tại đỉnh $M \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{HAM} > 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{AMH} < 60^\circ$. Do đó $HA < MH = HB$ (mâu thuẫn). Lập luận tương tự nếu $HA < HB$ ta cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Vậy $HA = HB \Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân tại H . Suy ra $\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Nhận xét. Trong quá trình vẽ hình - đo đạc - dự đoán $\widehat{ABC} = 45^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ$, nên sẽ có tam giác vuông cân và tam giác vuông có góc nhọn 30° .

Bài toán trên là bài toán đảo của bài toán: "Cho $\Delta ABC, \widehat{BAC} = 105^\circ, \widehat{ABC} = 45^\circ$, đường trung tuyến BM và phân giác CD cắt nhau tại K . Chứng minh $KB = KC$ ".

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

Bài toán 9. Cho ΔABC vuông tại A , có $\widehat{ABC} = 75^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho đường thẳng đi qua D vuông góc với BD cắt cạnh BC tại E thỏa mãn $DE = 2.DA$. Tính số đo $\widehat{ADB}$.

Bài toán 10. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$.

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = 45^\circ$. Chứng minh rằng $EA = 2EB$.

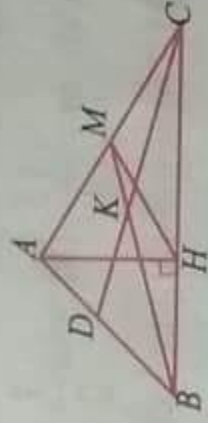
Bài toán 11. Cho ΔABC cân tại A . Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$, điểm N nằm giữa A và M . Chứng minh rằng $\widehat{ANB} < \widehat{ANC}$.

Bài toán 12. Tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường phân giác AD , trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} > 45^\circ$.

Bài toán 13. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 80^\circ, AB = AC$.

Lấy điểm D ở trong ΔABC sao cho $\widehat{DBC} = 20^\circ, \widehat{DCB} = 40^\circ$. Qua điểm D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt BC tại F . Lấy điểm E sao cho BD là trung trực của EF . Chứng minh rằng ΔADE đều.

Bài toán 14. Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 > 5c^2$. Chứng minh rằng c là cạnh nhỏ nhất của tam giác.



VÒNG 1

Câu 1. Ta có:

$$\frac{x + 2\sqrt{xy} + y + x - 2\sqrt{xy} + y}{(x - y) + 2x + 4y}$$

$$+ \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) - 5}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{5}{3}$$

Thu gọn biểu thức ta được

$$\frac{2}{3} + \frac{x + y - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{3},$$

do đó dẫn đến $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$ nên $x = y$. Vậy

$$\frac{x}{y} = 1.$$

Câu 2. a) ĐK: $x < 3$. Ta có:

$$x(x - 7) \left[1 + \frac{2x}{\sqrt{3 - x}} \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 7 \text{ (loại)} \\ 2x = -\sqrt{3 - x} \text{ với } x < 0. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của phương trình $2x = -\sqrt{3 - x}$ với $x < 0$ ta thu được:

$$4x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{3}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Như vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $S = \{0, -1\}$.

b) Do $y^2 - 5y + 8 = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$, nên phương trình xác định với mọi y . Từ phương trình thứ nhất ta có: $(x + 3)(x - y + 1) = 0$, do đó: $x = -3$ hoặc $x = y - 1$.

• TH1: $x = -3$ thay vào phương trình thứ hai

$$\text{có: } -4\sqrt{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2} + \frac{7}{4} = (y - 2)^2 \text{ (vô lý)}$$

• TH2: $x = y - 1$ khi đó thay vào phương trình thứ hai có: $(y - 2) \left[\sqrt{y^2 - 5y + 8} - (y - 2) \right] = 0$. Suy ra: $y = 2$ (nhận) hoặc

$$\sqrt{y^2 - 5y + 8} = y - 2, (y \geq 2) \Rightarrow y = 4 \text{ (nhận)}.$$

Như vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x; y) \in \{(1; 2), (3; 4)\}.$$

Câu 3. a) Ta có:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3m - 11) = 45 - 12m.$$

Từ đó để phương có nghiệm kép thì

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 45 - 12m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Với } m = \frac{15}{4} \text{ thì } x = \frac{1}{2}.$$

b) Theo giả thuyết kết hợp với định lý Viète ta

$$\text{có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2017x_1 + 2018x_2 = 2019 \end{cases}.$$

Từ đó ta tính

được: $x_1 = -1, x_2 = 2$. Kết hợp với $x_1 x_2 = 3m - 11$ ta tìm được $m = 3$. Như vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. a) Gọi số sào đưa hầu thu hoạch là $x > 0$. Khi đó ta có: Chi phí: $4000000x$ (đồng) thu được $2x$ (tấn dưa). Ta có phương trình:

$$30\% \cdot 2x \cdot 1500 \cdot 1000 + 70\% \cdot 2x \cdot 3500 \cdot 1000 = 9000000 + 4000000x.$$

Dẫn đến: $1800000x = 9000000$ nên $x = 5$ (sào), Ông A đã trồng 5 sào dưa hấu.

b)

Gọi $AB = b$ và $AD = a$ ($a > b > 0$), đơn vị (m).

Theo đề bài ta có diện tích khu vườn $DMNC$ là $2400 m^2$ và diện tích khu chuồng trại là $800 m^2$. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 120 \\ ab = 3200 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được: $a = 80$ (m), $b = 40$ (m). Kết hợp diện tích khu chuồng trại $AMNB$ là $800 m^2$ nên ta có độ dài cạnh $AM = 20$ (m), suy ra $MD = 60$ (m).

Ta có:

$$a^3 + b^3 \geq a + b \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 - 1) \geq 0 \quad (1)$$

Do $\begin{cases} a^2 - ab + b^2 > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \geq 1$ nên (1)

đúng. Vậy $a^3 + b^3 \geq a + b > 0$ và dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

b) Ta có $a+b > 0 \Rightarrow a, b$ không đồng thời âm $\Rightarrow ab < 0$ hoặc $a > 0, b > 0$.

• Nếu $ab < 0$ thì $a^2 - ab + b^2 > a^2 + b^2$.

Mà $a + b \geq 1$, do đó:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + b^2.$$

• Nếu $a > 0, b > 0$ thì

$$a^3 + b^3 \geq \frac{a^3 + b^3}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} \geq a^2 + b^2.$$

Vậy $a^3 + b^3 \geq a^2 + b^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$(a; b) = (0; 0), (1; 1), (0; 1), (1; 0).$$

c) Từ giả thiết $\Rightarrow x^3 + y^3 \geq 0; z^3 + t^3 \geq 0$.

$$\text{Nếu } x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow z^2 + t^2 = 0 \Rightarrow z = t = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0.$$

Nếu $z^3 + t^3 = 0$, tương tự ta có: $x = y = z = t = 0$.

$$\text{Nếu: } \begin{cases} x^3 + y^3 > 0 \\ z^3 + t^3 > 0 \end{cases} \text{ Từ giả thiết suy ra}$$

$$(x^3 + y^3) + (z^3 + t^3) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \quad (1)$$

$$\text{Theo câu b): } \begin{cases} x^3 + y^3 \geq x^2 + y^2 \\ z^3 + t^3 \geq z^2 + t^2 \end{cases}$$

Do (1) nên $(x; y), (z; t)$ là một trong các bộ $(1; 1); (1; 0); (0; 1)$. Vậy nghiệm phương trình: $(x, y, z, t) \in \{(0; 0; 0; 0), (1; 1; 1; 1), (1; 0; 0; 1), (0; 1; 1; 0), (0; 1; 0; 1), (1; 0; 1; 0)\}$.

Câu 3. a) Ta có:

$$2018 \equiv 1964 \pmod{3} \Rightarrow 2018^n \equiv 1964^n \pmod{3}$$

$$2032 \equiv 1984 \pmod{3} \Rightarrow 2032^n \equiv 1984^n \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A_n \equiv 3.$$

Ta lại có:

$$2018 \equiv 1984 \pmod{17} \Rightarrow 2018^n \equiv 1984^n \pmod{17}$$

$$2032 \equiv 1964 \pmod{17} \Rightarrow 2032^n \equiv 1964^n \pmod{17} \Rightarrow A_n \equiv 17.$$

Do $(3; 17) = 1$ nên $A_n \equiv 51, \forall n$.

$$\text{b) } A_n = 2018^n + 2032^n - 1964^n - 1984^n$$

• Ta xét các trường hợp của n để A_n chia hết

$$\text{cho } 5. \text{ Ta có: } A_n \equiv (-2)^n + 2^n - 2 \cdot (-1)^n \pmod{5}$$

Do đó nếu n lẻ thì $A_n \equiv 2 \pmod{5}$ (loại).

Nếu $n = 4k$ thì

$$A_n \equiv 2 \cdot 2^{4k} - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ (nhận).}$$

Nếu $n = 4k + 2$ thì

$$A_n \equiv 2 \cdot 2^{4k+2} - 2 \equiv 8 - 2 \equiv 6 \pmod{5} \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } A_n : 5 \Leftrightarrow n : 4$$

• Ta xét các trường hợp của n để A_n chia hết cho 9. Ta có:

$$A_n \equiv 2^n + (-2)^n - 2^n - 4^n \equiv 2^n - 4^n \pmod{9} \equiv 2^n(1 - 2^n) \pmod{9}$$

(do n chẵn).

$$\text{Vì } (2; 9) = 1 \text{ suy ra } 2^n - 1 : 9.$$

Xét $n = 3k, (k \in \mathbb{N})$. Ta có

$$A_n \equiv 2^{3k} - 1 \equiv (-1)^k - 1 \pmod{9}, \text{ suy ra: } k \text{ chẵn}$$

Xét $n = 3k + 1, (k \in \mathbb{N})$. Ta có:

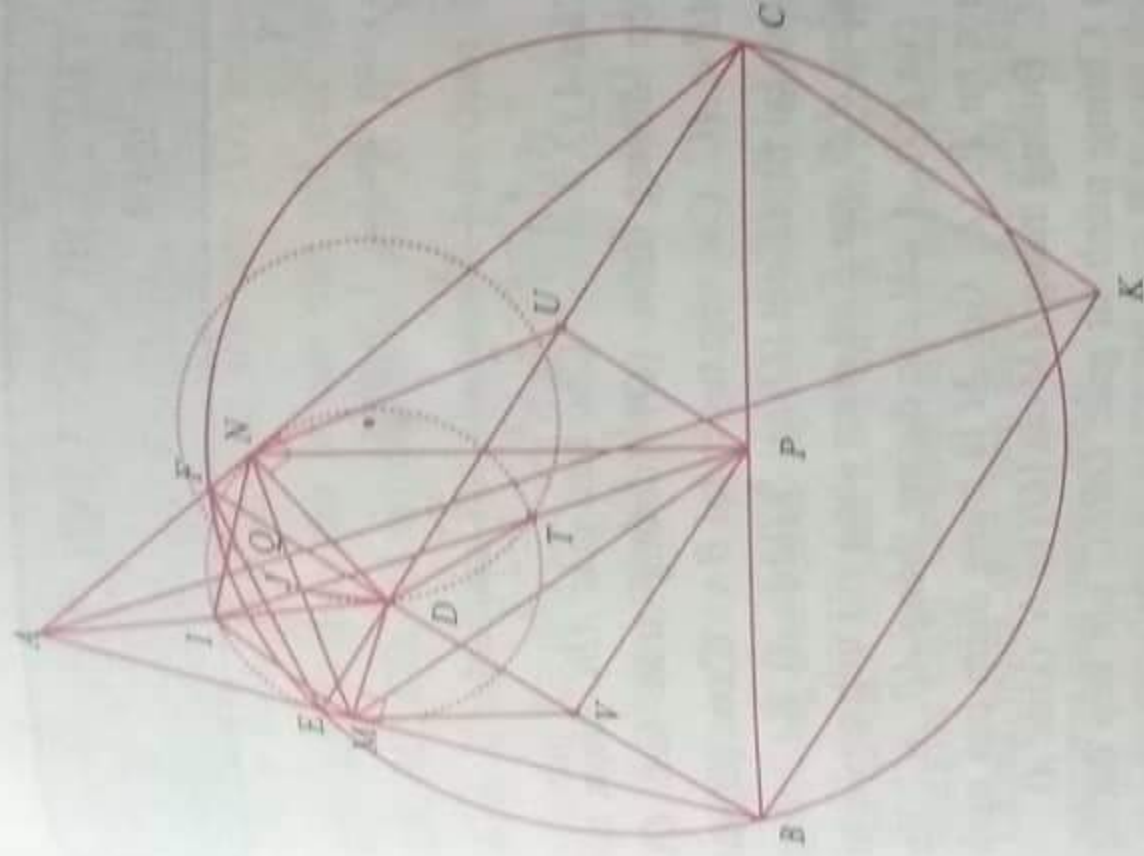
$$A_n \equiv 2^{3k+1} - 1 \equiv 2 \cdot (-1)^k - 1 \pmod{9} \pmod{9}$$

Xét $n = 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$. Ta có:

$$A_n \equiv 2^{3k+2} - 1 \equiv 4 \cdot (-1)^k - 1 \pmod{9} \pmod{9}$$

$$\text{Vậy } A_n : 45 \Leftrightarrow n : 12.$$

Câu 4.



a) Tứ giác BEFC nội tiếp nên $\widehat{DEF} = \widehat{DBC}$, $\widehat{DFE} = \widehat{DCB}$. Và BDCK là hình bình hành nên $\widehat{DBC} = \widehat{KCB}$, $\widehat{DCB} = \widehat{KBC}$. Do đó $\widehat{DEF} = \widehat{KCB}$, $\widehat{DFE} = \widehat{KBC}$, suy ra $\triangle KBC \sim \triangle DFE$.

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABK}$ và

$$\widehat{ABK} = \widehat{ABD} + \widehat{DBK} = \widehat{ACE} + \widehat{DCK} = \widehat{ACK}$$

$$(\text{do } \widehat{ABD} = \widehat{ACE}, \widehat{DBK} = \widehat{DCK}).$$

$$\text{Do } \triangle DEF \sim \triangle KCB \text{ nên } \frac{DE}{CK} = \frac{EF}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \triangle AEF \sim \triangle ACB \text{ nên } \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{DE}{CK} = \frac{AE}{AC}.$$

Xét $\triangle AED$ và $\triangle ACK$ có

$$\widehat{AED} = \widehat{ACK}, \frac{DE}{CK} = \frac{AE}{AC},$$

suy ra $\triangle AED \sim \triangle ACK$ (c.g.c).

b) Gọi Q là giao điểm của AK và MN. Ta có $\triangle DAE \sim \triangle KAC$ nên $\widehat{KAC} = \widehat{DAE}$ hay $\widehat{QAC} = \widehat{DAM}$. Tứ giác AMDN có

$\widehat{AMD} + \widehat{AND} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{DNM} = \widehat{DAM} = \widehat{QAN}$.

Mà $\widehat{DNM} + \widehat{MNA} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{QAN} + \widehat{MNA} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{AQN} = 90^\circ$. Vậy: $AK \perp MN$

c) Cách 1. Gọi P là trung điểm của BC; V, U lần lượt là trung điểm của DB, DC.

Ta có $MP = \frac{1}{2}AD = NI$, suy ra I thuộc trung

trục của MN. Ta có $MP = \frac{1}{2}BD$ ($\triangle DBM$

vuông tại M) và $PU = \frac{1}{2}DB$ (đường trung

bình). Suy ra $MP = PU$.

Tương tự thì ta có $PV = NU$. Ta có:

$$\widehat{MPD} = 2\widehat{MBD} = 2\widehat{NCD} = \widehat{NUD}$$

và $\widehat{DVP} = \widehat{DUP}$. Suy ra $\widehat{MVP} = \widehat{PUN}$.

Xét $\triangle MVP$ và $\triangle PUN$ có

$$MP = PU, PV = NU, \widehat{MVP} = \widehat{PUN}$$

$$\Rightarrow \triangle MVP = \triangle PUN \text{ (c.g.c.)}$$

Suy ra $PM = PN$. Do đó P thuộc trung trực của MN. Vậy I, P, J thuộc trung trực của MN nên I, P, J thẳng hàng hay IJ đi qua trung điểm P của BC.

d) Ta có tam giác $\triangle IMN$ cân tại I, $IJ \perp MN$ nên IT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle IMN$. Suy ra $\widehat{INT} = 90^\circ$. Suy ra $IJ \cdot IT = IN^2$ mà $IN = ID$, suy ra $IJ \cdot IT = ID^2$.

Như vậy $\triangle IDJ \sim \triangle ITD$ (c.g.c) nên $\widehat{IDJ} = \widehat{ITD}$. Từ đó ta có ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

(Xem tiếp trang 11)

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}+3}{x-4\sqrt{x}+4} \right] : \left[\frac{10}{\sqrt{x}-2} + 3 \right] \quad (x \geq 0, x \neq 4).$$

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,

cho đường thẳng $(d): y = \frac{2(1-m)}{m-2}x + \frac{1}{m-2}$ (m

là tham số khác 2). Giả sử (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A, B .

- a) Khi $m = 3$, tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB .

- b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho tam giác OAB cân.

Câu 3 (2,0 điểm). a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + y + 5 = 0 \\ (x+3)^4 + 5y = 16 \end{cases}$$

- b) Giải phương trình:

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} + \frac{3x}{x^2 + 3x - 2} = 1.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) (đường tròn tâm O), $AB < AC$. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại E ; AE cắt (O) tại D (khác A). Kẻ đường thẳng d đi qua E và song song với tiếp tuyến tại A của (O) , d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Đường thẳng AM cắt (O) tại N (khác A).

- a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ nội tiếp đường tròn và $EB^2 = ED \cdot EA$.

- b) Chứng minh $AB \cdot AP = AC \cdot AQ$ và điểm E cách đều các đỉnh của tứ giác $BCQP$.

- c) Chứng minh tứ giác $BCND$ là hình thang cân.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b-c)^2 = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (3,0 điểm). a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1 + 2x_2 + y_1 y_2 = 0$.

- b) Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = \sqrt{-x^2 + 6x - 1}.$$

- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$.

Câu 2 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!(1)$, trong đó x, y, z là ẩn và $9!$ là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9.

- a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4.

- b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1).

Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ ($AC > BD$). Đường tròn nội tiếp (O) của tứ giác $ABCD$ theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA tại các điểm E, F, G, H . Xét điểm K trên đoạn HA và điểm L trên đoạn AE sao cho KL tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $\widehat{LOK} = \widehat{LBO}$ và $BL \cdot DK = OB^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CFL cắt cạnh AB tại điểm M khác L và đường tròn ngoại tiếp tam giác CKG cắt cạnh AD tại điểm N khác K . Chứng minh rằng bốn điểm K, L, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

c) Lấy các điểm P, Q tương ứng trên các đoạn FC, CG sao cho LP song song với KQ . Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với (O).

Câu 5 (1,0 điểm). Một bảng hình vuông gồm có n hàng và n cột (n là một số nguyên dương).

HƯỚNG DẪN ...

Câu 5. a) Giả sử có một học sinh tham gia 4 nhóm A, B, C, D là x . Khi đó

$A = \{x, a, b\}, B = \{x, c, d\}, C = \{x, e, f\}, D = \{x, g, h\}$
 Vì các nhóm không có chung quá 1 thành viên nên các học sinh: a, b, c, d, e, f, g, h là khác nhau (vô lí vì chỉ có 8 học sinh tham gia).

b) Ta chứng minh lập được nhiều nhất là 8 nhóm. Thật vậy nếu có 9 nhóm, mỗi nhóm có 3 học sinh thì khi đó số lượt học sinh tham gia là $9 \cdot 3 = 27$ lượt tham gia.

(Tiếp theo trang 9)

Các hàng và cột được đánh số từ 1 đến n (các hàng đánh số từ trên xuống dưới và các cột đánh số từ trái qua phải). Ô vuông nằm trên hàng i , cột j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) của bảng gọi là ô (i, j) . Tại mỗi ô của bảng điền một số 0 hoặc 1 sao cho nếu ô (i, j) điền số 0, thì $a_i + b_j \geq n$, trong đó a_i là số số 1 trên dòng i và b_j là số số 1 trên cột j . Gọi P là tổng tất cả các số trong các ô của bảng hình vuông đã cho.

a) Xây dựng một bảng hình vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp $n=4$ và $P=8$.

b) Chứng minh rằng $P \geq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$, với $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ là phần nguyên của số $\frac{n^2}{2}$.

TRẦN MẠNH CƯỜNG
 (GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) giới thiệu

Mà chỉ có 8 học sinh nên theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất một học sinh có nhiều hơn hoặc bằng 4 lượt (mâu thuẫn do câu a).

(Một học sinh tham gia 1 nhóm tính là 1 lượt).
 Gọi 8 học sinh là a, b, c, d, e, f, g, h . Khi đó 8 nhóm học sinh được chia như sau:

$\{a, b, c\}; \{h, b, e\}; \{b, d, f\}; \{a, d, e\};$
 $\{h, c, f\}; \{c, e, g\}; \{a, f, g\}; \{h, d, g\}.$

NGUYỄN ĐỨC TÁN – NGUYỄN ANH HOÀNG
 (TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu



Dạy học phát triển phẩm chất, năng lực học sinh là vấn đề khó, đang thu hút sự tìm tòi nghiên cứu của đội ngũ giáo viên và các nhà nghiên cứu về phương pháp dạy học. Qua kinh nghiệm giảng dạy chúng tôi có xin trao đổi một ví dụ về dạy học phát triển phẩm chất năng lực của học sinh, trong khuôn khổ bài viết xin trao đổi cụ thể việc dạy một bài tập sách giáo khoa qua đó phát triển phẩm chất, năng lực cho học sinh; phương pháp giảng dạy này có thể áp dụng để dạy hầu hết các định lý, ví dụ và bài tập trong chương trình toán phổ thông.

Trong sách giáo khoa Đại số 10, phần “Bất đẳng thức và phương pháp chứng minh” có bài toán: Cho các số a, b không âm. Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2} \quad (*)$$

Lời giải. Ta có $(*) \Leftrightarrow 2(a^3+b^3) \geq (a^2+b^2)(a+b)$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

đúng với mọi a, b có tổng không âm.

Nhận xét 1. Nếu dừng lại ở đây thì môn toán thật đơn điệu, thật khô khan và khó đề tạo hứng thú học tập cho học sinh và lớn hơn là không thể giúp học sinh phát triển phẩm chất, năng lực! Vấn đề đặt ra là cần dạy cho học sinh điều gì qua bài toán cơ bản này? Giải bài toán bằng nhiều phương pháp chẳng? Đây là bài toán rất cơ bản, việc giải bài toán theo nhiều phương pháp là không khó, tuy nhiên các phương pháp khác nhau ở đây chủ yếu dựa trên các biến đổi cơ bản nên không đem lại nhiều kiến thức, kỹ năng cũng như tư duy cho học sinh. Từ bất đẳng thức $(*)$ có thể phát triển bài toán theo những hướng nào? Qua lời giải bài toán, ta thấy

DẠY HỌC PHÁT TRIỂN PHẨM CHẤT, NĂNG LỰC HỌC SINH QUA DẠY BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

VÕ HỮU HÀ
(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

bất đẳng thức không chỉ đúng với a, b không âm mà còn đúng với mọi a, b có tổng không âm. Từ đó gợi ý chúng ta đi tìm cách tổng quát hóa bài toán.

Kết quả 1. Với m, n là các số nguyên dương,

$$\text{ta có } \frac{a^m+b^m}{2} \cdot \frac{a^n+b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2} \quad (1)$$

- a) Nếu m, n cùng lẻ thì (1) đúng với mọi a, b ;
- b) Nếu m, n cùng chẵn thì (1) đúng với mọi a, b cùng dấu;
- c) Nếu m, n không cùng chẵn lẻ thì (1) đúng với mọi a, b có tổng không âm.

Thật vậy, ta có $(1) \Leftrightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0$.

- a) Với m, n cùng lẻ, ta có: $(a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0$ đúng.
- b) Với m, n cùng chẵn; a, b cùng dấu
- Giả sử

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^m \leq b^m \\ a^n \leq b^n \end{cases} \Rightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0.$$

- Giả sử $a \leq b \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq -b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^m \geq b^m \\ a^n \geq b^n \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0.$$

- c) Với m, n không cùng tính chẵn lẻ, giả sử $m=2m_1$ và $n=2n_1+1$, khi đó

$$\begin{aligned} & (a^m-b^m)(a^n-b^n) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a^{2m_1}+b^{2m_1})(a^{2m_1}-b^{2m_1})(a^{2n_1+1}-b^{2n_1+1}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a^{2m_1}+b^{2m_1})(a^{2m_1}+b^{2m_1}) \dots \end{aligned}$$

$$(a^{2m_1}+b^{2m_1})(a^{2m_1}-b^{2m_1})(a^{2n_1+1}-b^{2n_1+1}) \geq 0,$$

với $m_1=2m_{1+1}$

- Nếu có i với $i=1, 2, 3, \dots, k$ sao cho m_i lẻ thì bất đẳng thức đúng theo a)

Nếu m_i chẵn với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, k$ thì ta có

$$(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^m + b^m)(a^{m_2} + b^{m_2}) \dots$$

$$(a + b)(a - b)(a^{2m_1+1} - b^{2m_1+1}) \geq 0$$

bất đẳng thức đúng.

Kết quả 2. Cho các số a, b không âm và $n_i (i = 1, 2, \dots, k)$ là các số nguyên dương có tổng bằng n . Ta có

$$\frac{a^{n_1} + b^{n_1}}{2} \cdot \frac{a^{n_2} + b^{n_2}}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a^{n_k} + b^{n_k}}{2} \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad (2)$$

Nhận xét 2. Bài toán được tổng quát với biểu thức hai biến là a, b liệu bài toán có thể phát triển thành nhiều biến được không? Trước hết ta phát triển bất đẳng thức cho ba biến a, b, c !!!

Kết quả 3. Với m, n là các số nguyên dương, ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^m + b^m + c^m}{3} \cdot \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}}{3} \quad (3)$$

Nếu m, n cùng lẻ thì (3) đúng với mọi a, b, c ;

Nếu m, n cùng chẵn thì (3) đúng với mọi a, b, c cùng dấu;

Nếu m, n không cùng tính chẵn, lẻ thì (3) đúng với mọi a, b, c thỏa mãn $a + b, b + c, c + a$ không âm.

Kết quả 4. Cho các số thực a, b, c không âm và $n_i, i = 1, 2, \dots, k$ là các số nguyên dương có tổng bằng n . Ta có

$$\frac{a^{n_1} + b^{n_1} + c^{n_1}}{3} \cdot \frac{a^{n_2} + b^{n_2} + c^{n_2}}{3} \cdot \dots \cdot \frac{a^{n_k} + b^{n_k} + c^{n_k}}{3} \leq \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \quad (4)$$

Từ bất đẳng thức (4), cho $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, ta có bất đẳng thức $\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^n$, đây là một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng trong giải toán. Ta chứng minh được kết quả tổng quát sau đây.

Kết quả 5. Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_m$ không âm và $n_i, i = 1, 2, \dots, k$ là các số nguyên dương có tổng bằng n . Ta có

$$\frac{a_1^{n_1} + a_2^{n_1} + \dots + a_m^{n_1}}{m} \cdot \frac{a_1^{n_2} + a_2^{n_2} + \dots + a_m^{n_2}}{m} \cdot \dots \cdot \frac{a_1^{n_k} + a_2^{n_k} + \dots + a_m^{n_k}}{m} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}{m} \quad (5)$$

Từ (5), cho $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, ta được bất đẳng thức $\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}{m} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \right)^n$, đây là một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng trong giải toán.

Nhận xét 3. Trên đây là một số kết quả được phát triển trong trường hợp m, n nguyên dương, liệu có các kết quả tương tự đối với m, n là các số hữu tỷ hay không? Với suy nghĩ đó ta có.

Kết quả 6. Cho $a, b \geq 0$; r, s là các số hữu tỷ dương, ta có $\frac{a^r + b^r}{2} \cdot \frac{a^s + b^s}{2} \leq \frac{a^{r+s} + b^{r+s}}{2} \quad (6)$

Thật vậy, giả sử $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$, ta có

$$(6) \Leftrightarrow \frac{\frac{m}{n} + \frac{m}{n}}{2} \cdot \frac{\frac{p}{q} + \frac{p}{q}}{2} \leq \frac{\frac{m+p}{q} + \frac{m+p}{q}}{2}$$

Đặt $x = a^{\frac{m}{n}}, y = b^{\frac{m}{n}}$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{x^{mq} + y^{mq}}{2} \cdot \frac{x^{pq} + y^{pq}}{2} \leq \frac{x^{mq+pq} + y^{mq+pq}}{2}$$

đúng theo (1).

Nhận xét 4. Chúng ta có thể mở rộng với số mũ thực, tuy nhiên đây là chuyên đề dành cho lớp 10 nên chỉ dừng lại ở số mũ hữu tỷ.

Trở lại bài toán gốc $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$,

đây là bài toán đẹp, nhưng liệu đã tối ưu hay chưa, tức là có một bất đẳng thức khác đánh giá mạnh hơn bất đẳng thức đã cho hay không? Để giải quyết câu hỏi này, chúng ta thử "tối ưu hóa" bất đẳng thức gốc!

Từ lời giải bài toán gốc:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a + b}{2} \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0.$$

Do đó $(1 - \alpha)(a^2 - b^2)(a - b) \geq 0$, với $\alpha \in [0; 1]$ vẫn đúng, từ đó ta có

Kết quả 7. Cho các số thực a, b và $\alpha \in [0; 1]$ và m, n là các số nguyên dương. Ta có

$$\frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2} \geq \frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} + \frac{\alpha}{4} (a^m - b^m)(a^n - b^n) \quad (7)$$

- a) Nếu m, n cùng lẻ thì (7) đúng với mọi a, b ;
 b) Nếu m, n cùng chẵn thì (7) đúng với mọi a, b cùng dấu;
 c) Nếu m, n không cùng chẵn lẻ thì (7) đúng với mọi a, b có tổng không âm.

Nhận xét 5. Một hướng suy nghĩ khác, chúng ta xem xét mối liên hệ của các bất đẳng thức sau

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a + b}{2} \text{ và}$$

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2.$$

Vậy liên hệ giữa $\frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a + b}{2}$ và $\left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2$

là gì? Biểu thức nào lớn hơn? Cần lập một bất đẳng thức giữa hai biểu thức đó!

Kết quả 8. Cho các số thực không âm a, b . Ta

$$\text{có } \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a + b}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 \quad (8)$$

Thật vậy, bất đẳng thức $\Leftrightarrow a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2$

$$\Leftrightarrow a^2b(a-b) + ab^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow ab(a-b)^2 \geq 0.$$

Kết quả 9. Cho các số thực không âm a, b, c .

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a + b + c}{3} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^2 \quad (9)$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài tập 1. Vận dụng các kết quả thu được, hãy giải các bài toán sau:

1) Chứng minh rằng

$$\frac{a + b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdots \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}} + b^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2},$$

với $a, b \geq 0$ và n nguyên dương.

2) Chứng minh

$$\frac{a^5}{b} + \frac{b^5}{c} + \frac{c^5}{a} \geq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2,$$

với a, b, c là các số dương.

3) Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3}{b + c} + \frac{b^3 + c^3}{c + a} + \frac{c^3 + a^3}{a + b} \geq \frac{(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2}{4},$$

với a, b, c dương.

4) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^{10} + b^{10}}{a^6 + b^6}} + \sqrt{\frac{b^{10} + c^{10}}{b^6 + c^6}} + \sqrt{\frac{c^{10} + a^{10}}{c^6 + a^6}} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

5) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh

$$\text{rằng } \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$

6) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca + \frac{2017}{2018} \left[\frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{b} + \frac{(b^2 - c^2)(b - c)}{c} + \frac{(c^2 - a^2)(c - a)}{a} \right];$$

7) Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{c + a}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3} + 3},$$

với a, b, c dương, có tích bằng 1.

8) Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a^5 + b^5}{2a^3 + b^3}} + \sqrt{\frac{2b^5 + c^5}{2b^3 + c^3}} + \sqrt{\frac{2c^5 + a^5}{2c^3 + a^3}} \geq a + b + c.$$

Bài tập 2. Hãy tư duy theo hướng trên để phát triển các bài toán sau

1) Với các số thực a, b có tổng không âm. Ta có

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

2) Với các số thực dương a, b . Ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

3) Gọi AM là trung tuyến tam giác ABC và D là trung điểm đoạn AM . Chứng minh rằng

$$\text{a) } 2\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} = \overline{0}$$

$$\text{b) } 2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 4\overline{OD}, \text{ với } O \text{ là điểm tùy ý.}$$



CUỘC KHỦNG HOẢNG CĂN CỨ CỦA PHÉP TÍNH CÁC ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ Ở THẾ KỶ XVII

NGUYỄN THỦY THANH
(GV Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Vai trò của đại lượng vô cùng bé (VCB) trong toán học và ứng dụng toán học lớn đến mức mà người ta thường gọi sự nghiên cứu tính biến thiên của các đại lượng đó là Phép tính các VCB (PTVCB), Giải tích các VCB (GTVCB) hay Giải tích toán học. Để hiểu được lý do sâu xa của điều chúng ta hãy suy ngẫm luận điểm sau đây của F. Engels: “Trong tất cả những thành tựu lý luận chưa chắc đã có một thành tựu nào được mọi người xem là thắng lợi tối cao của trí óc con người như sự phát minh ra phép tính các đại lượng vô cùng bé vào nửa cuối thế kỷ XVII. Nếu như chúng ta đã gặp ở một nơi nào đó một thành tích thuần túy và hoàn toàn riêng của trí não con người thì nơi đó chính là ở đây.” (C. Marx và F. Engels, T.20, tr.768).

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN VÀ VI PHÂN DƯỚI DẠNG HÌNH HỌC

Ngay từ thế kỷ V tr.CN nhà triết học và toán học vĩ đại cổ Hy Lạp Democritus (460 – 370 tr.CN) đã đưa vào toán học khái niệm “nguyên tử hình học”. Người ta xem đoạn thẳng, diện tích, thể tích được cấu thành từ một số rất lớn nhưng hữu hạn các “nguyên tử” bất khả phân. Ông là nhà bác học đầu tiên đã sử dụng có kết quả phép chia các vật thể thành những lớp mỏng để tính thể tích của chúng. Đây cũng là nguồn gốc của khái niệm vô cùng bé ở cái thừa ban đầu... xa xưa đến tận thế kỷ XVII. Vào thời đó các VCB được quan niệm rất đơn giản và rõ ràng về cấu tạo: đó thường là các băng phẳng dài hay thể tích mà một số đo được lấy sao cho khi phân hoạch tiếp hình (vật thể) thì số đo đó dần vô hạn đến không.

Học thuyết nguyên tử của Democritus và của thầy ông là Leucippus chứa đựng một tư tưởng

cực kỳ sâu xa mà chỉ có Archimedes (287 – 212 tr.CN), nhà toán học vĩ đại nhất của thế giới cổ đại nhận ra và áp dụng. Đó chính là nguyên lý xấp xỉ: có thể thiết lập một hình xấp xỉ một hình cho trước bất kỳ với độ chính xác tùy ý gồm từ một số lớn những yếu tố cơ bản mà kích thước của chúng xem như đã biết. Từ đó xuất hiện cách xấp xỉ hình (vật thể) bởi hình hay vật thể bậc thang nội và ngoại tiếp do Archimedes đề ra để tính các đại lượng hình học. Bên cạnh đó ông cũng đã tận dụng “phương pháp vét kiệt” mà cơ sở của nó là bỏ đề sau đây: “Nếu từ đại lượng đã cho bớt đi hơn một nửa, còn lại bao nhiêu lại bớt đi hơn một nửa ... thì sau một số hữu hạn bước như vậy có thể đạt tới một lượng dư còn lại bé hơn một đại lượng cho trước bất kỳ (cùng loại) bé bao nhiêu tùy ý”. Cho dù phương pháp này còn có nhiều nhược điểm nhưng Viện sĩ (Viện HLKH Liên Xô) A. N. Kolmogorov (1903 - 1987) cho rằng: “người ta nhìn thấy ở Archimedes khả năng áp dụng các VCB một cách thoái mái và rất sâu rộng ..., và trong nhiều trường hợp các tính toán của Archimedes tương đương như áp dụng các tổng tích phân Darboux (1842 - 1917) và tìm giới hạn của chúng”.

Bên cạnh đó, trong toán học Cổ đại còn nghiên cứu những phương pháp khác có thể xem như là phương pháp vi phân. Chẳng hạn, trong tác phẩm “Về các đường xoắn ốc”, Archimedes đã giải bài toán tìm tiếp tuyến của đường xoắn ốc (mang tên ông). Trong thư gửi giám đốc thư viện Alexandria là Eratosthenes (276 – 194 tr.CN), Archimedes đã thông báo các kết quả và phương pháp mà ông đã sáng tạo ra. Tiếc thay, hơn hai nghìn năm sau (năm 1906) bức thư này

mới được tình cờ tìm thấy và do đó các nhà toán học thế kỷ XVII không được biết nội dung của nó. Thời đại Phục Hưng ở Châu Âu cũng là lúc người ta tìm cách phục hưng truyền thống và phương pháp Archimedes. Người ta cho rằng Archimedes là một trong số ít thiên tài mà sự sáng tạo của họ đã định hướng cho số phận của khoa học trong những thế kỷ sau và do đó cho cả nhân loại. Khi đề cập đến toán học thế kỷ XVII, Viện sĩ A. N. Kolmogorov cho rằng: “việc sử dụng một cách thành thạo các VCB trong các tác phẩm của P. Fermat (1601 - 1665), B. Pascal (1623 - 1662) và J. Wallis (1616 - 1703) chứng tỏ sự thành công triệt để trong việc giải các bài toán tính diện tích. Thế nghĩa là, thực chất dưới dạng hình học các nguyên lý của phép tính vi phân và phép tính tích phân đã được kiến tạo.”

Lịch sử toán học thế kỷ XVII có hai sự kiện đặc biệt đáng nhớ: “sự ra đời của tác phẩm Hình học (1637) của R. Descartes (1596 - 1650) và sự ra đời của chuyên luận Phương pháp mới về cực đại, cực tiểu và tiếp tuyến”. (Phương pháp mới ...) (1684) của G. Leibniz (1646 - 1716). Tác phẩm “Hình học” tuy chỉ dày 117 trang nhưng nó đã tạo ra một bước ngoặt trong toán học và đặc biệt, đây là lần đầu tiên đại lượng biến thiên (mang tên Descartes!) thâm nhập vào toán học. Nó tạo nên bước nhảy vọt có tính cách mạng trong khoa học nói chung. Nhờ đó, xuất hiện ngay khái niệm hàm (và phụ thuộc hàm) chiếm lĩnh vai trò như khái niệm đại lượng và khái niệm số trước đây.

Lần đầu tiên G. Leibniz phát hiện ra PTVCB và tiếp cận nó bằng con đường hình học nhờ các tam giác đặc trưng (dx, dy, dz) giữa những năm 1673 - 1676. Ông công bố thuật toán Phép tính vi phân mà ông thu được trong công trình “Phương pháp mới ...” (1684) ở Tạp chí Acta Eruditorum (AE) là tạp chí dành cho các nhà bác học. Tuy công trình chỉ vón vén sáu trang tạp chí nhưng ý nghĩa khoa học của nó đối với sự phát triển của PTVCB thật là to lớn. Tiếp theo đó là công trình “Về hình học sâu sắc”

(1686) cũng đăng trong AE, trong đó G. Leibniz trình bày thuật toán cơ bản của phép tính tích phân. Ở đây, lần đầu tiên xuất hiện ký hiệu tích phân và chỉ rõ đặc tính ngược nhau của các phép toán tích phân “ $\int$ ” và phép tính vi phân “ d ” mà theo lời ông: “... như tổng và hiệu hay lũy thừa và khai căn ... trong phép tính thông thường”.

Trước đó ít lâu (1665 - 1666), ở nước Anh, học trò của I. Barrow là I. Newton (1642 - 1727) đã đến với PTVCB bằng con đường cơ học và khám phá ra kết quả và phương pháp của mình trong thời gian tản cư về quê tránh nạn dịch hạch kinh hoàng ở Cambridge. Các kết quả và phương pháp đó được trình bày trong “phép tính fluxio” chỉ được xuất hiện năm 1736 sau khi I. Newton qua đời. Thông qua các kết quả thu được, có thể xem I. Newton và G. Leibniz đã hoàn tất công việc xây dựng thuật toán cho phép giải nhiều bài toán mà thoát nhìn khác nhau như tính diện tích miền cong, đường tiếp tuyến với đường cong bất kỳ, tìm cực đại và cực tiểu hàm sơ cấp và một số bài toán khác. Các thuật toán này được thừa nhận nhưng ngay tức khắc nó bị phê phán do xuất hiện những kết quả mâu thuẫn nhau. Đồng thời với đó là xuất hiện những nghịch lý mới do những luận chứng không thỏa đáng đối với những khái niệm và nguyên lý xuất phát mà trước hết là khái niệm cốt lõi: vô cùng bé là gì?

VÔ CÙNG BÉ VÀ CUỘC KHỦNG HOẢNG CĂN CỨ PTVCB Ở THẾ KỶ XVII

Nhà toán học Hoa Kỳ R. Courant và H. Robbins cho rằng PTVCB là kết quả của một quá trình tiến hóa lâu dài, không bắt đầu và cũng không kết thúc bởi I. Newton hoặc G. Leibniz nhưng hai ông đã nhận thức một cách sâu sắc mối liên hệ nội tại giữa hai phép tính tích phân và phép tính vi phân. Thành tựu vĩ đại của Newton và Leibniz là hai ông đã khám phá ra sự liên kết thống nhất của hai phép toán ngược nhau đó trong Định lý cơ bản của Giải tích. Đối với I. Newton, công trình “Các nguyên lý toán học của triết học tự nhiên” (1687) của

được Lagrange (1736 - 1813) đánh giá là "tác phẩm vĩ đại nhất của trí tuệ con người". Trong tác phẩm đó, lần đầu tiên ông trình bày trong tác phẩm của phép qua giới hạn và một phép hóa chung các phép qua giới hạn và giới là người đầu tiên đưa vào thuật ngữ "giới hạn" - times (tiếng Latinh). Tuy nhiên, ông đã không cho khái niệm giới hạn một định nghĩa nào hoặc một sự mô tả sơ bộ nào. Trong cuốn "Phương pháp fluxio và các chuỗi vô hạn" (Phương pháp ...) (1736) I. Newton gọi các đại lượng biến thiên liên tục là các *fluents* (từ chữ Latinh fluens - nghĩa là thông vận, phần tử lưu động, chảy) và được ký hiệu là $x, y, \dots$. Mọi thông vận đều có đối số chung là thời gian. Newton gọi vận tốc biến thiên của *fluents* là fluxio (thông lượng $\equiv$ đạo hàm!) và được ký

hiệu là $\dot{x}, \dot{y}, \dots$. Hai khái niệm chủ yếu trong "Phương pháp ..." là đạo hàm (*fluxio*) các cấp và tích phân như là nguyên hàm (*fluents*). Khái niệm quan trọng thứ ba trong "Phương pháp ..." là "moment" tương ứng như vi phân. Newton nói "đó là đại lượng rất bé" phát sinh như là số gia của một đại lượng và ông ký hiệu moment thời gian là "0" - đó là "lượng vô cùng

bé". I. Newton xem "moment fluxio" $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dots$ là đại lượng vô cùng bé. Trong nhiều tính toán ông đã sử dụng quy tắc bỏ qua các VCB mặc dù ông chưa minh định rõ ràng bản chất của ký hiệu "0": đó là zero? là VCB? Hay là những đại lượng hữu hạn? Ngoài ra người ta cũng thường lẫn lộn số gia VCB của hàm với phân chính (tức là vi phân) của nó. Đối với G. Leibniz khái niệm cơ bản của phép tính vi phân là các vi phân. Ông xem vi phân là đại lượng VCB. Ông đã dùng ký hiệu "d" (chữ cái đầu của từ differential - nghĩa là hiệu) để chỉ sự khác nhau vô cùng bé. Trong công trình "Phương pháp tiên của ông về PTVCB mà chủ yếu là trình bày các nguyên lý của phép tính vi phân. Trong công trình này xuất hiện các ký hiệu dx, dy ,

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ và điều kiện $dy=0$ để tìm cực trị

và $d^2y=0$ đối với điểm uốn. Hai năm sau, trong công trình của mình "Về hình học sâu sắc" (1686) trong AE G. Leibniz đưa ra khái niệm tích phân như là "tổng của một số vô hạn các số hạng VCB" dạng $f(x)dx$. Phép tính VCB của Leibniz cũng rơi vào tình trạng nghịch lý. Để trả lời trước sự công kích của những người phê phán PTVCB ông đề nghị thay "những đại lượng VCB" bởi "những đại lượng bé không so sánh được kiểu hạt bụi nhỏ so với quả đất hay quả đất so với bầu trời ..." Thậm chí trong AE (1689) ông còn khẳng định: "Các VCB không phải là những số thực mà là những số hư ảo nào đó nhưng lại tuân theo các quy tắc của số học thông thường. Chúng được đưa vào để việc tính toán được thuận lợi và ngắn gọn mà thôi". Cũng trong bài báo trên, Leibniz đã chứng minh rằng vi phân cấp cao so với vi phân cấp thấp hơn cũng giống như một điểm so với đường thẳng và rằng dx so với x cũng giống như một điểm so với quả địa cầu hay bán kính trái đất so với bán kính bầu trời. Đối với L. Euler (1707 - 1783) việc xem đại lượng VCB không bằng 0 (zero) là không thể tránh khỏi dẫn đến sự không chặt chẽ. Ông đề nghị xem các VCB là đúng bằng 0 để khi bỏ qua nó sẽ không dẫn đến bất cứ sai lầm nào (?). Trong các tính toán cả Newton, Leibniz và Euler đều áp dụng Nguyên lý bỏ qua các VCB. Tuy nhiên việc bỏ qua thiếu căn cứ đã đẩy Phép tính vi phân mà ý nghĩa của nó đối với sự phát triển của khoa học và kỹ thuật hoàn toàn không có gì phải nghi ngờ lại rơi vào tình trạng nghịch lý: để thu được cái kết quả chính xác bằng các phương pháp của nó cần phải xuất phát từ một khẳng định sai lầm là $A + \alpha = A$, trong đó A là đại lượng hữu hạn, α là đại lượng VCB. Các nhà toán học cũ đã phê phán gay gắt quan điểm về VCB thời bấy giờ. Nhà toán học Pháp M. Rolle (1652 - 1719) viết rằng: "phép tính mới là một mở những sai lầm tai hại". Cuộc tranh luận trong Viện HLKH Paris về PTVCB đã đến độ gay gắt buộc Viện HLKH phải cấm các thành viên bàn về đề tài đó, đặc biệt là giữa hai nhà

toán học M. Rolle và P. Varignon (1654-1722). Năm 1734, nhà triết học - giáo chủ người Anh G. Berkeley (1685 - 1753) đã công bố tác phẩm gây xôn xao dư luận "The Analyst" (1734). Người ta đánh giá rằng trong công trình này ông đã đưa ra một sự phê phán rất sâu sắc và đúng đắn đối với tình trạng PTVCB lúc bấy giờ. Đặc biệt, G. Berkeley đã phê phán việc bỏ qua các VCB một cách thiếu căn cứ và ông đã gọi "những VCB bị bỏ qua thiếu căn cứ đó là những bóng ma của những đại lượng đã yên nghỉ". Và, ông đã lạc quan một cách chính đáng rằng: "Tuy các nguyên lý của PTVCB còn ít được chứng minh nhưng các nhà toán học vẫn tin tưởng sâu sắc vào đó".

Vấn đề về đại lượng VCB đã tạo nên một cảnh tượng thật đặc biệt. Một mặt, tòa lâu đài của phép tính tích phân và phép tính vi phân được xây dựng mau chóng trong thế kỷ XVII và sự thành công là quá lớn lao, nhưng mặt khác gần như chưa có một khái niệm nào của nó có được một định nghĩa chính xác kể cả khái niệm VCB. Mặc dù vậy, đến năm 1696 đã xuất hiện cuốn sách giáo khoa đầu tiên của G. F. Hospital (1661 - 1704) - học trò của I. Bernoulli (1667 - 1748) - mang tên "Giải tích các VCB" (1696) trong đó có trình bày các quy tắc l'Hospital khử dạng vô định mà chúng ta đang sử dụng ngày nay. Bản chất của PTVCB được bàn luận rất nhiều nhưng cơ sở logic của nó thì vẫn còn "bí ẩn" vì trong nhiều trường hợp không một bên nào tham gia trong cuộc "luận chiến" có thể đề xuất một cái gì hợp lý ngoài một số lập luận lờ mờ, thiếu căn cứ và rất nghèo nàn. Nhà toán học và triết học lỗi lạc Pháp J. d'Alembert (1717-1783) đã có công hết sức to lớn khi ông nêu ra định nghĩa tổng quát về giới hạn trong bài báo "Giới hạn" của ông đăng trong tập 4 (1759) và tập 9 (1765) của Bộ Bách khoa toàn thư Pháp. Nikolas Bourbaki (bút danh của nhóm các nhà toán học Pháp từ năm 1939) nhận xét rằng: "Ở đây ... các nguyên lý của PTVCB không hàm chứa cái gì khác ngoài khái

niệm giới hạn". Đó chính là khởi nguồn để các tổ PTVCB trên cơ sở lý thuyết giới hạn. Công việc đó được các nhà toán học đầu thế kỷ XIX mà chủ yếu là O. Cauchy (1789 - 1857) hoàn thành. Vào thời đó Cauchy đã nổi tiếng như một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế giới. Nhờ dựa vào khái niệm giới hạn của d'Alembert, Cauchy đã xác lập được cơ sở thực sự cho việc xây dựng tiếp theo của PTVCB và xưa tan được mọi điều bí ẩn trong phép tính đó. Toàn bộ cơ sở đó được Cauchy trình bày trong "Giáo trình giải tích" (1821) và "Tóm tắt các bài giảng tại trường Bách Khoa hoàng gia" (1823). Trong các giáo trình này PTVCB được xây dựng trên một cơ sở mới dựa trên khái niệm chuyển qua giới hạn. Vậy rốt cuộc đại lượng vô cùng bé là gì? Trong trường hợp tổng hợp tổng quát: Đại lượng biến thiên được gọi là vô cùng bé trong một quá trình cho trước nếu trong quá trình đó có một thời điểm mà bắt đầu từ đó trở đi giá trị tuyệt đối của đại lượng đó luôn luôn bé hơn một số dương cho trước bất kỳ, bé bao nhiêu tùy ý. Xuất phát từ đây chúng ta xây dựng nên toàn bộ cơ sở luận lý của PTVCB: đầu tiên là khái niệm giới hạn.

Đại lượng không đổi a được gọi là giới hạn của đại lượng biến thiên α trong một quá trình cho nếu trong quá trình đó hiệu $\alpha - a$ là đại lượng vô cùng bé. Các đại lượng VCB thường gặp trong toán học là dãy số $a_n = f(n)$, nếu và hàm số $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$..., ở đây ta loại trừ trường hợp chẳng có gì thú vị khi đại lượng đồng nhất bằng không ($\equiv 0$). Trong những trường hợp này:

1) Đại lượng (dãy) a_n được gọi là dãy vô nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho thì $|a_n| < \varepsilon$.

2) Hàm $y = f(x)$ được gọi là hàm $x \rightarrow a$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x - a| < \delta\}$ thì $|f(x)| < \varepsilon$.

Chẳng hạn, đại lượng $a_n = \frac{1}{3^n - 2}$ là VCB trong quá trình $n \rightarrow \infty$. Thật vậy, cho trước số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý. Ta cần chỉ ra số hiệu $N(\varepsilon)$ ("thời điểm") sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ ("từ đó trở đi") thì $|a_n| = \frac{1}{3^n - 2} < \varepsilon$. Bất đẳng thức này

tương đương với $n > \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right)$ (*). Từ đó có

thể lấy $N(\varepsilon) = \left[\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right) \right]$, trong đó $[\theta]$ là

phần nguyên của số θ . Thật vậy, nếu $n > N(\varepsilon)$

thì $n \geq \left[\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right) \right] + 1 > \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right)$ và với

những giá trị n nào đó (*) thỏa mãn và

$$|a_n| = \frac{1}{3^n - 2} < \frac{1}{3^{\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right)} - 2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 \right) - 2} = \varepsilon.$$

Hay hàm $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ là hàm VCB khi $x \rightarrow 0$. Thật vậy, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x$. Cho số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý và đặt $\delta = \varepsilon$. Khi đó với $|x| < \delta$ thì $|\sin x| \leq |x| \leq \delta = \varepsilon$.

Với khái niệm VCB, O. Cauchy đã đi đến các khái niệm cốt lõi của PTVCB: đạo hàm là giới hạn của tỷ số hai số gia VCB; tích phân là giới hạn của tổng vô số các VCB; tổng của chuỗi là giới hạn của dãy các tổng riêng. Từ khái niệm VCB hết sức tinh vi đã toát ra một cách tự nhiên những kết quả tuyệt vời sau đây. Trước hết, đó là phép tách phần chính của hàm. Theo định nghĩa, hàm $\alpha(x)$ là phần chính của hàm $\beta(x)$ nếu khi $x \rightarrow a$ thì $\beta(x)$ biểu diễn được dưới dạng $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$, trong đó $o(\alpha(x))$ là VCB cấp cao hơn so với $\alpha(x)$ khi $x \rightarrow a$. Chẳng hạn, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) \neq 0$ thì vi phân $df(x)$ của nó là phần chính của số gia Δy vì $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

$$(\Delta x \rightarrow 0) \text{ và } \frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x} \rightarrow 0 (\Delta x \rightarrow 0).$$

Tiếp theo, người ta gọi phép thay tổng các VCB bởi phần chính của tổng đó là nguyên lý bỏ qua các VCB cấp cao hơn. Nói cách khác, nếu $\alpha(x), \beta(x)$ là những VCB khi $x \rightarrow a$ và $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \rightarrow a$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$, $x \rightarrow a$. Chẳng hạn trong ví dụ trên đây $\Delta y \sim df$. Đến đây, có thể xem Cauchy đã hoàn thành sứ mệnh đặt cơ sở cho PTVCB bằng việc luận giải nhiều vấn đề và nguyên lý đã từng là những tai họa đối với các nhà toán học từ thời Zenon (490 - 430 tr.CN) ở Cổ Hy Lạp.

Tuy nhiên, chẳng bao lâu sau người ta lại phát hiện rằng luận cứ của Cauchy vẫn còn có chỗ hổng và thậm chí là mâu thuẫn với một nghĩa nào đó. Vấn đề là khi trình bày lý thuyết giới hạn như là cơ sở của PTVCB. Cauchy đã căn cứ vào các tính chất của tập hợp số thực. Và ông đã luận giải số vô tỷ như là giới hạn của dãy số hữu tỷ. Như vậy, chính Cauchy đã rơi vào "vòng logic luẩn quẩn". Để thoát khỏi tình trạng này cần phải luận chứng tính liên tục của tập hợp số thực một cách khác độc lập với khái niệm giới hạn. Chỉ đến cuối thế kỷ XIX khó khăn này mới được vượt qua bởi R. Dedekind (1831 - 1916) trong công trình "Tính liên tục và số vô tỷ" (1872) của ông. Đây là sự kiện quan trọng nhất trong lịch sử luận lý PTVCB sau thời kỳ Cauchy. Phép tính các vô cùng bé là một phát minh hết sức tinh vi thuần túy do trí tuệ của con người sáng tạo ra. Nó đã từng rơi vào cuộc khủng hoảng về cơ sở kéo dài gần hai trăm năm và đã tạo ra cả một thời đại huy hoàng trong lịch sử phát triển tri thức của loài người. Nó mang lại cho con người khả năng mô tả bằng toán học quá trình phát triển đa dạng của lịch sử xã hội và của giới tự nhiên vận động trong sự liên hệ lẫn nhau của chúng.



MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ WOLSTENHOLME

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Định lý Wolstenholme là một trong những định lý rất hay của số học. Định lý này ít khi sử dụng trong các kỳ thi Olympic nhưng khi xuất hiện thì thường là các bài toán hay và khó. Trong quá trình giảng dạy đội tuyển chúng tôi nhận thấy học sinh rất lúng túng khi gặp phải các bài toán có liên quan đến định lý này. Do đó, qua bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu một số thí dụ tiêu biểu vận dụng định lý trong các bài toán Olympic tới các thầy cô và các em học sinh. Hy vọng bài viết sẽ mang đến nhiều điều bổ ích cho bạn đọc.

1. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Đồng dư hữu tỷ

a. Định nghĩa

- Cho $k, m \in \mathbb{Z}$ và phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó

$$\frac{a}{b} \equiv k \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv bk \pmod{m}.$$

Như vậy $\frac{a}{b} \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{m}$.

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{m} \Leftrightarrow ad \equiv bc \pmod{m}.$$

b. Tính chất

Tính chất 1. Với mọi số nguyên $i \in [1; p-1]$ thì tồn tại duy nhất số nguyên $j \in [1; p-1]$ sao cho $ij \equiv 1 \pmod{p}$ và j gọi là nghịch đảo của i theo modulo p .

Tính chất 2. Giả sử ta có

$$a_i b_i \equiv 1 \pmod{p} (a_i, b_i \in \mathbb{Z}), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ và}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{m}{q} \quad (m, q \in \mathbb{Z}, (m, q) = 1).$$

Thì $m \equiv q(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \pmod{p}$.

Chứng minh. Thật vậy, do $a_i b_i \equiv 1 \pmod{p}$ nên ta giả sử $a_i b_i = c_i p + 1 (c_i \in \mathbb{Z}), i = 1, 2, \dots, n$.

Ta có $a_i = \frac{c_i p + 1}{b_i}$, suy ra

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{c_1 p + 1} + \frac{b_2}{c_2 p + 1} + \dots + \frac{b_n}{c_n p + 1} = \frac{b_1(c_2 p + 1) \dots (c_n p + 1) + \dots + b_n(c_1 p + 1) \dots (c_{n-1} p + 1)}{\prod_{i=1}^n (c_i p + 1)}$$

Do $c_i p + 1 \equiv 1 \pmod{p}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ nên

$$\frac{m}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \equiv \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{\prod_{i=1}^n (c_i p + 1)}.$$

Như vậy $m \equiv q(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \pmod{p}$.

2. Định lý Lagrange

Nếu

$$f(x) = (x+1)(x+2) \dots (x+p-1) = x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} x + (p-1)!$$

thì các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ chia hết cho p , ở đây p là số nguyên tố lẻ.

Chứng minh. Trước hết ta nhắc lại tính chất quen thuộc sau: Nếu p là một số nguyên tố và $0 < i < p$ thì C_p^i chia hết cho p . Thật vậy, ta có

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}. \text{ Nhưng } (p, i) = 1, \forall i, 0 < i < p \text{ và}$$

C_p^i là một số nguyên nên suy ra C_p^i chia hết cho p . Ta có $f(x+1) = (x+2) \dots (x+p)$, suy ra

$$(x+p)f(x) = (x+1)f(x+1) \Rightarrow pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
& p a_1 x^{p-1} + \dots + p a_{p-2} x + p! = \\
& (x+1)^p + a_1 (x+1)^{p-1} + \dots + a_{p-2} (x+1)^2 \\
& + (x+1)(p-1)! - [x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + x(p-1)!] \\
& = (x+1)^p - x^p + a_1 [(x+1)^{p-1} - x^{p-1}] + \dots \\
& + a_{p-2} [(x+1)^2 - x^2] + (x+1-x)(p-1)!
\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số của $x^{p-2}, x^{p-3}, \dots, x$, ta được

$$p a_1 = C_p^2 + C_{p-1}^1 a_1$$

$$p a_2 = C_p^3 + C_{p-1}^2 a_1 + C_{p-2}^1 a_2$$

....

$$p a_{p-2} = C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-2} a_1 + \dots + C_2^1 a_{p-2}$$

Áp dụng tính chất đã nêu trên, từ đẳng thức thứ nhất có $p \mid a_1$. Tương tự $p \mid a_2, \dots, p \mid a_{p-2}$.

II. ĐỊNH LÝ WOLSTENHOLME

1. Nội dung định lý:

Với mọi số nguyên tố $p > 3$ và các số nguyên

m, n nguyên tố cùng nhau sao cho

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}, \text{ khi đó } m: p^2.$$

2. Các cách chứng minh.

Cách 1 (dựa vào định lý Lagrange).

Ta có $p a_{p-2} = C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-2} a_1 + \dots + C_2^1 a_{p-2}$. Thì

a_{p-2} là tổng của tích các số $1, 2, \dots, p-1$ lấy $p-2$ lần.

$$a_{p-2} = 1.2 \dots (p-2) + 2.3 \dots (p-1) + 3 \dots (p-1).1 + \dots$$

Ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{2 \dots (p-1) + 1.3 \dots (p-1) + \dots + 1.2 \dots (p-2)}{p-1}$$

Cho $x = -p$ vào đồng nhất thức trong định lý Lagrange ta được

$$(-1)^{p-1} (p-1)! = p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + \dots$$

$$+ a_{p-3} p^2 - a_{p-2} p + (p-1)!$$

Suy ra $a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \dots + a_{p-3} p$. Rõ ràng

$p^2 \mid p^{p-1}, \forall 1 < j < p-1, p > 3$ và do

$p \mid a_{p-1}, \forall 1 < i < p-1$, suy ra $p^2 \mid a_{p-2}, \forall p > 3$.

Định lý được chứng minh xong.

Cách 2 (dựa vào đồng dư hữu tỷ).

Trước tiên ta xét bổ đề sau

Bổ đề. Với mọi số nguyên tố $p > 3$ và các số nguyên m, n nguyên tố cùng nhau sao cho

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{m}{n}.$$

Khi đó $m: p$.

Chứng minh bổ đề. Theo tính chất 1, với mọi $i \in [1; p-1]$ thì tồn tại duy nhất $j \in [1; p-1]$ sao cho $i^2 j^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Kết hợp với tính chất 2 ta thấy, nếu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1)$$

thì $m \equiv n \sum_{i=1}^{p-1} i^2 \pmod{p}$. Mặt khác, ta có

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}$$

(do với $p > 3$ thì $(p, 6) = 1$). Vậy ta có $m: p$.

Trở lại chứng minh định lý: Ta có

$$\begin{aligned}
2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right) &= \left(1 + \frac{1}{p-1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2} \right) \\
&+ \dots + \left(\frac{1}{p-1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i} \right) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p}{i(p-i)}.$$

Do $(p, 2) = 1$ nên

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

tương đương với $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i(p-i)} \equiv 0 \pmod{p}$.

Lại có $p-i \equiv -i \pmod{p}$ nên

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i(p-i)} &\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{-i^2} \equiv 0 \pmod{p} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \equiv 0 \pmod{p}
\end{aligned}$$

và đây chính là bổ đề.

Hệ quả. Với mọi số nguyên tố $p > 3$ thì

$$\left(\frac{2p-1}{p-1} \right) \equiv 1 \pmod{p^3}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\binom{2p-1}{p-1} = \frac{(2p-1)!}{(p-1)!p!} = \frac{(p+1)(p+2)\dots(2p-1)}{(p-1)!}$$

Do đó

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3} \Leftrightarrow \binom{2p-1}{p-1} - 1 \equiv p^3 \pmod{p^3} \\ \Leftrightarrow \frac{(p+1)(p+2)\dots(2p-1) - (p-1)!}{(p-1)!} \equiv p^3 \pmod{p^3}$$

Do $((p-1)!, p) = 1$ nên ta sẽ chứng minh

$$p^3 \mid (p+1)(p+2)\dots(2p-1) - (p-1)!$$

Ta có

$$(p+1)(p+2)\dots(2p-1) - (p-1)!$$

$$= p^3 \cdot A + p^2(p-1)! \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(p-2)(p-1)} \right) + \\ + p(p-1)! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right)$$

Như vậy ta sẽ chứng minh

$$p^2 \mid (p-1)! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right)$$

$$\text{và } p \mid (p-1)! \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(p-2)(p-1)} \right).$$

Dễ thấy $p^2 \mid (p-1)! \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right)$ chính là

định lý Wolstenholme. Tiếp theo, ta chứng

$$\text{minh } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(p-2)(p-1)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Theo tính chất 1 thì với mọi $i, j \in [1; p-1]$ tồn tại duy nhất $i', j' \in [1; p-1]$ sao cho $i.i' \equiv j.j' \equiv 1 \pmod{p}$. Kết hợp với tính chất 2

cho ta: Nếu $\sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i \neq j}}^{p-1} \frac{1}{i.j} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1$)

thì $m \equiv n \sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i \neq j}}^{p-1} i.j \pmod{p}$. Lại có

$$\sum_{\substack{i=1, j=2 \\ i \neq j}}^{p-1} ij = \frac{(p-1)^2 p^2}{8} - 1^2 - 2^2 - \dots - (p-1)^2$$

$$= \frac{(p-1)^2 \cdot p^2}{8} - \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nhận xét. Kết quả trên còn có thể được phát biểu một cách tương đương thành

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

III. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. (Putnam 1996). Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3 và $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. Chứng minh

$$\text{rằng } \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Lời giải. Nhắc lại rằng

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1.2\dots i} \equiv 0 \pmod{p}, \forall 1 \leq i \leq p-1.$$

Lấy modulo p , vế phải sau khi chia cho p là

$$\text{đồng dư } \frac{(-1)\dots(-(i-1))}{1.2\dots i} = (-1)^{i-1} \frac{1}{i}.$$

Vì vậy, để chứng minh đồng dư, ta cần chỉ ra

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\text{Đề ý rằng } -\frac{1}{2i} \equiv \frac{1}{2i} + \frac{1}{p-i} \pmod{p}.$$

$$\text{Điều này cho phép ta thay thế tổng bởi } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

và đây chính là định lý Wolstenholme.

Thí dụ 2. Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{a}{b}, (a, b) = 1, \text{ thì } p^4 \mid ap - b.$$

Lời giải. Theo định lý Wolstenholme ta có

$$p^2 \mid (p-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \right).$$

$$\text{Vậy } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = p^2 \cdot \frac{x}{y}, (x, y) \in \mathbb{Z}, (y, p) = 1.$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} - \frac{1}{p} = p^2 \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow ap - b = p^3 \cdot \frac{bx}{y}$$

$$\text{Do } \frac{a}{b} = \frac{2.3\dots p + 1.3.4\dots p + \dots + 1.2.3\dots(p-1)}{p!}$$

và tử số của vế phải có dạng $mp + (p-1)!$. Vì vậy nó không chia hết cho p .

$$\text{Vậy } p \mid b \text{ và } p^4 \mid p^3 \cdot \frac{bx}{y} \Rightarrow p^4 \mid ap - b.$$

Thí dụ 3. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh

$$1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^{p-2} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Lời giải. Ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = - \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left((-1)^k \frac{1}{k^2} + (-1)^{p-k} \frac{1}{(p-k)^2} \right).$$

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra điều phải chứng

minh.

Thí dụ 4 (J28. Mathematical Reflections).

Cho p là số nguyên tố sao cho $p \equiv 1 \pmod{3}$ và

$$\text{đặt } q = \left[\frac{2p}{3} \right]. \text{ Nếu } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(q-1)q} = \frac{m}{n}$$

với $m, n \in \mathbb{Z}$, thì $p \mid m$.

Lời giải. Đặt $p = 3k + 1$ và $q = \left[\frac{2p}{3} \right] = 2k$. Khi

xét phương trình modulo p ta phải chứng minh

nó đồng dư với $0 \pmod{p}$. Ta có

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(q-1)q} \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}.$$

Bây giờ ta nhóm các phân số lại và thay

$$q = 2k, \text{ được } S = \sum_{i=1}^q \frac{1}{i} - 2 \sum_{i=1}^{q/2} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}.$$

Từ định lý Wolstenholme, ta có

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Bởi vì $-i \equiv p-i \pmod{p}$, nên suy ra

$$S = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2k+1}^{p-1} \frac{1}{p-i} \equiv 0 - \sum_{i=2k+1}^{3k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{3k+1-i} \\ \equiv 0 \pmod{p}.$$

Thí dụ 5 (O.264. Mathematical Reflections).

Cho $p > 3$ là một số nguyên tố. Chứng minh

rằng $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ nếu và chỉ nếu tử số của

$$\text{tổng } \sum_{k=2}^{(p-1)/2} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} \right) \text{ là một bội của } p.$$

Lời giải. Ta cần chỉ ra rằng

$$\sum_{k=2}^{(p-1)/2} \frac{H_{k-1}(1)}{k} = \frac{1}{2} \left((H_{(p-1)/2}(1))^2 - H_{(p-1)/2}(2) \right) \\ \equiv 2q^2 \pmod{p}$$

$$\text{Với } H_{k-1}(d) = 1 + \frac{1}{2^d} + \dots + \frac{1}{(k-1)^d}.$$

Từ đó, theo định lý Wolstenholme

$H_{p-1}(1) \equiv H_{p-1}(2) \equiv 0 \pmod{p}$ với số nguyên tố $p > 3$, suy ra

$$2q = \frac{2^p - 2}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{2k}$$

$$= H_{p-1}(1) - H_{(p-1)/2}(1) \equiv -H_{(p-1)/2}(1) \pmod{p}$$

và

$$H_{(p-1)/2}(2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \frac{1}{(p-k)^2}$$

$$\equiv \frac{1}{2} H_{p-1}(2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì vậy

$$\frac{1}{2} \left((H_{(p-1)/2}(1))^2 - H_{(p-1)/2}(2) \right) \equiv \frac{1}{2} ((-2q)^2 + 0) \\ \equiv 2q^2 \pmod{p}.$$

Thí dụ 6 (O.354. Mathematical Reflections).

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho biểu thức

$$\frac{p^2}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}}$$

là một số nguyên.

Lời giải. Để kiểm tra rằng biểu thức là một số nguyên với $p = 2, 3, 5, 7$. Ta chỉ ra rằng chỉ có những số nguyên tố như vậy thỏa mãn bài toán. Xét số nguyên tố $p \geq 11$. Đặt

$$H_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}, (a, b) = 1.$$

Theo định lý Wolstenholme có $p^2 \mid a$. Vì vậy

$$\frac{p^2}{H_{p-1}}$$

là một số nguyên khi $a = p^2$.

Nếu $p = 11$ thì $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ chia hết b . Vậy

$$1 < H_{10} \leq \frac{11^2}{8 \cdot 9 \cdot 7} < 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

(Xem tiếp trang 45)



- **BÀI T6/496.** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xy} \\ x + y + z = xy + \frac{8}{27}(x + y + z)^3 \end{cases}$$

TRẦN VĂN LÂM

(Thảo Viên Trẻ tại Tân Phú, TX. Phố Ym, Thái Nguyên)

- **BÀI T1/496 (Lớp 6).** Tìm số gồm ba chữ số sao cho số đó bằng 9 lần tổng bình phương các chữ số của nó.

CÁC LỚP THPT

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Dũng, Từ Nghĩa, Quảng Ngãi)

- **BÀI T2/496 (Lớp 7).** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Bên ngoài tam giác ABC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 15^\circ$. Chứng minh rằng tam giác ABD đều.

THAI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

- **BÀI T3/496.** Cho x, y, z là ba số không âm. Chứng minh rằng

$$(x + y)(x + y + z)^2 + yz(2x + y + z) + yz(2y + x + z) + y + z$$

CÀO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khánh, Vĩnh Long)

- **BÀI T4/496.** Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và tiếp tuyến At . Trên At lấy $AK = R$. Đường tròn tâm K bán kính R cắt AB ở I , đường tròn tâm B bán kính BI cắt (O) ở E . Từ BE cắt At ở C . Chứng minh rằng đường trung trực của BC là tiếp tuyến của (O) .

PHẠM TUẤN KHAI

(Đ. Ngô 67, Đường Giải Phẫu, Q. Hoàng Mai, Hà Nội)

- **BÀI T5/496.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y - 2x^2y) + y\sqrt{(xy + 1)(3 - xy)} = y^3 \\ (y^3(1 - x^2) + x) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{4 + (x^2 - y^2)^2}} \right) = x^2y^3 \end{cases}$$

TRẦN ANH TUẤN

(GV THCS Tân Phú, Lê Nhân, Hà Nội)

TRẦN VĂN LÂM

(Thảo Viên Trẻ tại Tân Phú, TX. Phố Ym, Thái Nguyên)

- **BÀI T7/496.** Giải phương trình $\log_2 x = \log_{10} x$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tân Giang)

- **BÀI T8/496.** Chứng minh tổng các bình phương không cách từ trung điểm một cạnh của tam giác đến trục tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó không phụ thuộc vào việc chọn trung điểm của cạnh nào trong tam giác.

NGUYỄN ĐẾ (Hải Phòng)

- **BÀI T9/496.** Với k là số nguyên dương cho trước, ta ký hiệu bình phương của tổng các chữ số của nó là $f_k(n)$. Đặt

$$f_{n+1}(k) = f_k(f_k(n)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Hãy tính $f_{1999}(2^{1999})$.

HOÀNG TIẾN TRUÔNG

(GV không chuyên X/R, Đại học Xây dựng Hà Nội)

THIÊN TÀI OLYMPIC TOÁN

- **BÀI T16/496.** Cho dãy số (x_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ được

$$\text{xác định bởi } x_1 = 0, x_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạnkhi $n \rightarrow +\infty$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

TRẦN XUÂN BÔNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

- **BÀI T11/496.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)(y) - \frac{1}{2}xy = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GFT 1107) Phó BG, Hà Nội - Hưng Yên

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

(112496) Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F.

NGUYỄN VĂN LINH (Hà Nội)

(112496) Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

(112496) Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

THE SECONDARY SCHOOL

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

(112496) Find 3-digit numbers so that each of them is 9 times the sum

âm tại A, B, C lần lượt là 40 dB, 35,9 dB và 30 dB. Biết khoảng cách giữa A và B là 30m. Xác định khoảng cách giữa B và C.

THANH LAM (Hà Nội)

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn

(112496) Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn



Bài T1.492. Cho tổng

$$M = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{120} + \dots$$

- a) Phần số $\frac{1}{15400}$ có là một số hạng của M không? Vì sao?

- b) Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của M

Lời giải. Ta thấy mẫu số của mỗi số hạng của M khi nhân với 6 đều là tích của ba số tự nhiên liên tiếp (*). Thực vậy,

$$10.6 = 3.4.5; 20.6 = 4.5.6; 35.6 = 5.6.7;$$

$$56.6 = 6.7.8; 84.6 = 7.8.9; 120.6 = 8.9.10.$$

- a) Ta xét xem mẫu số 15400 có thỏa mãn điều kiện (*) hay không. Ta có: $15400.6 = 92400$.

Với $a > 1$ thì

$$(a-1)^3 < (a-1)a(a+1) = a(a^2-1) = a^3 - a < a^3.$$

- Vì $4^3 = 64 < 92400 < 125^3 = 1562500$ nên 92400 chỉ có thể bằng $43.46.47 = 97290$, nhưng

điều này không xảy ra nên phần số $\frac{1}{15400}$

không là một số hạng của M

- b) Mẫu số của số hạng thứ bảy và thứ tám của theo thứ tự bằng $\frac{1}{6} (9.10.11) = 165$ và

$$(10.11.12) = 1320.$$

Bà tính tổng các phân số mà mẫu số là tích của số tự nhiên liên tiếp ra sẽ được đúng thế

$$\frac{1}{a(a-1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

với n là số dương.

Tổng 8 số hạng đầu tiên của M bằng

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{120} + \frac{1}{165} + \frac{1}{1320} \\ &= 6 \left(\frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{9.10.11} + \frac{1}{10.11.12} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{9.10} - \frac{1}{10.11} + \frac{1}{10.11} - \frac{1}{11.12} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{11.12} \right) = 3 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{11.12} \right) = \frac{3.10}{11.12} = \frac{5}{22} \end{aligned}$$

Vậy tổng 8 số hạng đầu tiên của M bằng $\frac{5}{22}$.

> Nhận xét. 1) Chú ý rằng với như dạng đây là không chính xác:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} = \dots = 6 \left(\frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots \right)$$

vì không thể nhân hay chia một số với một số hạng của một tổng gồm vô hạn số hạng, mà chỉ thực hiện được phép tính cho một tổng hữu hạn số hạng. Có thể viết biểu thức $M = \dots$ theo từng hàng.

2) Các bạn sau có lời giải của **Vinh Phúc: Từ Kim Sơn Tuấn, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Bắc Ninh; Nguyễn Lưu Hoàng, 6A, THCS Vũ Ninh, TP Bắc Ninh; Ngô An Phạm Ngọc Trách, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu, Nghệ An; Sơn, 6C, Nguyễn Công An, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Dõ Lương; Quảng Ngãi; Nguyễn Hoàng Hưng, Hoàng Anh Khôi, Lê Xuân Tài, 6A, Tân Nguyễn Tuyết Minh, 8B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.**

VINH HAI

Bài T2.492. Cho tam giác ABC có $AB < AC$.

Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực của cạnh BC tại điểm M . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC và BC . Chứng minh ba điểm H, K, K' thẳng hàng.

• Nếu $y + 13 < 0$ ta có

$$x^2 + 4x + 2y^2 = \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7x^2}{4} \geq 0.$$

Kết hợp với $y + 13$ chia hết cho $(x^2 + 4x + 2y^2)$,

ta có

$$y + 13 \leq -4x^2 + 4x + 2y^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y + \frac{2}{7}\right)^2 \leq \frac{90}{7} \leq 0$$

Điều này vô lý.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm nguyên (x, y) là $(-26, -13)$ và $(3, 1)$.

Nhận xét: Đa số các bài đầu giải đều hai cách trên,

nguyên đường các bạn sau có lời giải đúng: Hà Nội

Lê Ngọc Tung, SA, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Oai,

Phú Thọ: Nguyễn Công Hải, A3, THCS Lâm

Tham, Thanh Hóa; Đỗ Cao Bách Trung, 9B, THCS

Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; Bửu Trại Nghi Quốc

Bảo, 9/1, THCS Mỹ Hòa, TP Bắc Từ, Bình

Phước; Đặng Đức Văn, 8/11, THCS Tân Phú,

Bình Xuy.

BÀI 14.492. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường

tròn đường kính AC, điểm M trên AB sao cho

$AM = AB$. Các đường thẳng DM và BC cắt

nhau tại N. AN cắt đường tròn tại K. Gọi H là

ánh chiếu vuông góc của D trên AC. AH cắt

NH và CK lần lượt tại P và Q. Chứng minh:

$$\frac{1}{AP} = \frac{1}{AQ} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ}$$

Lời giải. Áp dụng hệ thức

lượng trong tam giác

vuông $\triangle DK^2$ ta có

$$AM^2 - AD^2 = AH \cdot AC,$$

$$\text{hay } \frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}$$

Tại đây ta

$$AM \cdot MC \propto AM \cdot MC \Leftrightarrow (x, g, c)$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{MC}{AM} \Rightarrow CH \cdot AM = CM^2$$

Ta có $\widehat{ADM} = \widehat{AMD} = \widehat{AMN} = \widehat{CMN} = \widehat{CND}$ (do

CH và CN đồng phẳng với 2 góc bằng nhau)

Suy ra $\triangle MCN$ cân tại C, ta có:

$$CN^2 = CD^2 = CH \cdot CA \text{ hay } \frac{CN}{CH} = \frac{CA}{CN}$$

Suy ra $\triangle CHN \sim \triangle CNA \Leftrightarrow \widehat{CHN} = \widehat{CNA}$

Mà $\widehat{CNA} = \widehat{CQB}$, nên $\widehat{CHN} = \widehat{CQB}$, suy ra ta

giải $HPQC$ nội tiếp. Do đó $AH \cdot AC = AP \cdot AQ$.

Vậy $AM^2 = AP \cdot AQ = (AM - MP)(AM + MQ)$

$$= AM^2 + AM(MQ - MP) - MP \cdot MQ$$

Suy ra $MP \cdot MQ = AM(MQ - MP)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} \quad \text{Do đó } \frac{1}{MP} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{MQ} \quad \square$$

Nhận xét: Chỉ có bạn Đỗ Cao Bách Trung, 9B, THCS

Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa, Thanh Hóa cho lời giải

đúng.

BÀI 14.492. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x + 2 = 2y \\ 3y^2 + 6y + 2 = 2z \\ 3z^2 + 6z + 2 = 2x \end{cases}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử

$x = \max(x, y, z) \Rightarrow x \geq y, x \geq z$. Suy ra:

$$3x^2 + 6x + 2 \geq 2y^2 + 6y + 2 \Rightarrow 2y^2 \geq 2x^2 \Rightarrow y \geq z$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 6y + 2 \geq 2z^2 + 6z + 2 \Rightarrow 2z^2 \geq 2x^2 \Rightarrow z \geq x$$

Kết hợp với giả thiết $x \geq y, x \geq z$ dễ dàng suy

ra $x = y = z$. Thay vào một phương trình trong

hệ, ta được

$$3x^2 + 6x + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 6x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 12x + 8 + 2(x^2 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 2(1 - x)^2 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{2}(1 - x)$$

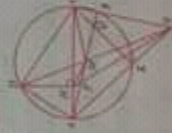
$$\Leftrightarrow x(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - \sqrt{4}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = y = z = \sqrt{2} - \sqrt{4}$$

Nhận xét: Lời giải của hai bạn có sai sót trong 1 số

trường hợp và giải phương trình



$x^2 + 4x + 2 = 0$. Trong một hệ phương trình đang

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

ta luôn có thể giả thiết

$$f(x) = g(x)$$

$x = \sin t, y = \cos t \Rightarrow x \geq y, x \geq z$. Nếu $f(x), g(x)$ là

hai hàm số cùng đồng biến (hoặc nghịch biến) thì ta

biết ngay là $x = y = z$.

Các bạn sau đây có bài giải từ Thanh Hòa

Trường THPT Yên Bái, THPT Nhật An, THPT

Hà Nội, THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THCS Trần Hưng Đạo, THPT Bắc Ninh, THPT

Đoàn Minh Xuân, THPT Bắc Ninh, THPT

Hà Nội, THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

Thanh Hóa.

NGUYỄN ANH DUNG

Bài 14-492. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x, y, z \geq 0$. Đặt $y = \sqrt{x+4}$ ta có

$x = y^2 - 4$ và hệ phương trình đã cho tương

đương với

$$\begin{cases} (y^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 + z^2 = 9 \\ (y^2 - 4) + (y^2 - 4) + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y^2 - 4)^2 + z^2 = 9 \\ (y^2 - 4) + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y^2 - 4)^2 + z^2 = 9 \\ (y^2 - 4) + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y^2 - 4)^2 + z^2 = 9 \\ (y^2 - 4) + z = 3 \end{cases}$$

Ta giải phương trình $y^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$. Hàm số

$$f(y) = y^2 + y^2 - 2y - 1$$
 có một cực trị

$$f'(y) = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$
 là

điểm cực trị duy nhất của hàm số.

Đặt $y = 2\cos \alpha$ với $\alpha \in (0, \pi)$, ta có

$$\begin{cases} 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 1 = 0 \\ 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 1 = 0$$

Đặt $u = \cos \alpha$, ta có $\sin \alpha > 0$. Nhân 2 vế

phương trình cuối với $\sin \alpha > 0$ ta được phương

trình tương đương sau $4u + \sin 2\alpha = 0$. Phương

trình này có 3 nghiệm $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ và $\frac{0\pi}{3}$.

nghe tiếng nhạc

$$2\cos \frac{2\pi}{7} + 2\cos \frac{4\pi}{7} + 2\cos \frac{6\pi}{7}$$

các giá trị này chỉ có $2\cos \frac{2\pi}{7} > 0$, như vậy hai

phương trình

$$(y-2)\left(y-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$x(y^2 + y^2 - 2y - 1) \leq 0$$

với $y = \sqrt{x+4} \geq 0$ có nghiệm $0 \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y = 2\cos \frac{2\pi}{7} \leq y \leq 2$$

Thấy với hai $x = y^2 - 4$ ta có nghiệm hệ phương trình đầu bài là

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 2\cos \frac{4\pi}{7} - 2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

> Nhận xét. Nhiều bạn chọn đi tìm các giá trị của

hệ phương trình. Các bạn sau đây xin giới thiệu

Vinh Phúc, Trần Văn Khánh, THPT Chuyên

Vinh Phúc, Trần Văn Khánh, THPT Chuyên

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

THPT Bắc Ninh, THPT Bắc Ninh, THPT

Lời giải. Nhận xét

$$a^{2m} + a^{2n} - a^{2m} - a^{2n} = a^{2m}(a^{2n} + 1) - a^{2n}(a^{2m} + 1) = a^{2m} - a^{2n}$$

$$= a^{2m}(a^{2n} - 1) - a^{2n}(a^{2m} - 1) = a^{2m} - a^{2n}$$

(*) nếu $a > 1$ thì $a^{2m} - 1 > 0, a^{2n} - 1 > 0$ thì

nếu $0 < a < 1$ thì $a^{2m} - 1 < 0, a^{2n} - 1 < 0$, cũng

thì thế này ta chỉ cần chỉ khi $a = 1$ hay ta

$$x^2 + x + 1 \geq a^{2m} + a^{2n} + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq a^{2m} + a^{2n} + 1$$

Tương tự $y^2 + y + 1 \geq a^{2m} + a^{2n} + 1$ và $z^2 + z + 1 \geq a^{2m} + a^{2n} + 1$

$$2 + x + 1 \geq a^{2m} + a^{2n} + 1 + (y + z) = a^{2m} + a^{2n} + 2$$

Do đó $P \geq \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1}$
 với $(x, y, z) > 0, xyz = 1$

Vì $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số thực
 dương τ, p, q thỏa mãn $x = \frac{p^2}{q^2}, y = \frac{q^2}{p^2}, z = \frac{p^2}{q^2}$

(ví dụ cho

$$x = 1, x = pq, y = \frac{q}{p} \Rightarrow p = \sqrt{\frac{x}{y}}, q = \sqrt{\frac{y}{x}})$$

Khi đó

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\frac{p^4}{q^4} + \frac{p^2}{q^2} + 1} = \frac{q^4}{p^4 q^2 + p^2 q^2 + q^4}$$

Tương tự

$$\frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{p^4}{q^4 r^2 + p^2 q^2 + p^4}$$

$$\frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{q^4}{r^2 p^2 + p^2 q^2 + q^4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai họ
 hai số thực dương ta có

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq \frac{p^4}{p^4 q^2 + p^2 q^2 + q^4} + \frac{q^4}{q^4 r^2 + p^2 q^2 + p^4} + \frac{p^4}{r^2 p^2 + p^2 q^2 + q^4} \geq \frac{p^4}{K}$$

trong đó

$$K = p^4 q^2 + p^2 q^2 + q^4 r^2 + q^4 r^2 + p^2 q^2 + p^4 + \frac{p^4 p^2 + p^2 q^2 + q^4}{2} + \frac{r^2 p^2 + q^4 r^2 + p^2 q^2 + p^4}{2} + \frac{p^4 q^2 + q^4 r^2 + p^2 q^2 + p^4}{2}$$

$$(p^4 + p^2 + q^4)^2 \quad (2)$$

Do (1), (2) ta suy ra $P \geq 1$. Đồng thời xảy ra
 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ
 nhất của P bằng 1. $\square$

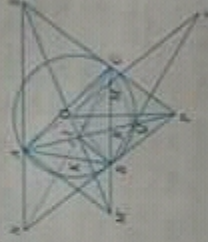
Nhận xét. Bài toán bổ đề trên cũng nhiều khi xuất
 hiện trong các bài toán. Các học sinh nên nhớ và lưu ý giải các

Hưng Yên, Nguyễn Thanh Lâm, Bùi Văn Quyết,
 Đoàn Phú Thành, 1011, THPT chuyên Hưng Yên,
 Vĩnh Phúc: Tạ Nam Khánh, Chu Thị Thanh, 1001, Lê
 Ngọc Hoa, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Thanh
 Hóa: Lê Phú Tâm, 1011, THPT chuyên Lam Sơn,
 Thừa Thiên Huế: Trương Công Đức, 1012, THPT
 chuyên Quốc học Huế; Đà Nẵng: Nguyễn Thanh Lâm,
 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; Bắc Trại: Nguyễn
 Văn Class, 12A8, THPT An Thôn, Mù Cày Nam; Đồng
 Tháp: Nguyễn Nhật Hào, 101, THPT chuyên Nguyễn
 Quang Diêu

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 18492. Cho tam giác ABC với nội tiếp đường
 tròn O . Các tiếp tuyến với đường tròn O
 tại B, C cắt nhau tại P . Đường thẳng qua A song
 song với BP cắt BC tại M . Đường thẳng qua A
 song song với BC cắt BP tại N . Gọi I là giao
 điểm của AP với EN . Chứng minh rằng AI
 đi qua B, I, C . C cũng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



Gọi R, Q lần lượt là giao điểm của AP với BC và
 đường tròn (O) , $T = AM \cap BQ$

Ta thấy $(AQRP) \sim (I)$ (thông điểm điều hòa
 hai), suy ra $B, (QRP) \sim (I)$. Cho ý rằng đường
 thẳng qua A, M, T song song với BP , nên theo tính
 chất của điểm điều hòa ta suy ra $MA = MT$. Gọi
 $K = AP \cap MN$ thì $KA = KB$, do đó KM là đường
 trung bình của $\triangle ABT$, dẫn đến $KA = KQ$
 $\Rightarrow KQ$ là đường trung bình của $\triangle ABQ$

$$f(x+y) = f(x) + y^{2m-1} = f(x) + y^{2m-1} f(x, y, y) = f(x, y, y)$$

Lời giải. (theo đa thức hàm)

$$(a) f(0) = a. \text{ Thay } x = -f(x) \text{ vào (1), ta thu}$$

$$\text{được } f(x^{2m}) = f(x) + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y. \quad (2)$$

Kết hợp (2) và (1), ta được

$$f(x+y) = f(x) + y^{2m-1} + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y \cdot y. \quad (3)$$

Thay $y=0$ vào (3), ta thu được

$$f(x+y) = f(x) + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y \cdot y. \quad (4)$$

Thay x bởi $x+y^{2m}$ vào (4) và kết hợp với (3), ta

$$\text{thu được } f(x+y^{2m}+y) = f(x+y) + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y \cdot y. \quad (5)$$

Trong (5) thay x bởi $x-f(x)$, ta được

$$f(x+y) = f(x+y^{2m}+y) - f(x) + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y \cdot y. \quad (6)$$

• Nếu suy ra $y^{2m}+y-f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ hay

$$f(y) = y^{2m} + y, \forall y \in \mathbb{R}$$

thì (4), suy ra

$$(x+y)^{2m} + y^{2m} = x^{2m} + y^{2m} + \frac{a}{2} \cdot y \cdot y \cdot y. \quad (7)$$

Suy ra tính hệ số ứng với y^{2m} trong (7), ta được

$$x=0, \text{ suy ra } f(x) = x^{2m} + x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại, ta thấy}$$

hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra

• Nếu suy ra $y^{2m}+y-f(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ thì khi tại

$$y_0 \text{ để } y_0^{2m}+y_0-f(y_0) \neq 0. \text{ Trong (6), thay}$$

$$y=y_0, \text{ ta được } f(x+y) = f(x+y^{2m}+y_0) + \frac{a}{2} \cdot y_0 \cdot y_0 \cdot y_0. \quad (8)$$

Trong (8), thay y bởi $y+y_0$ và kết hợp với (8), ta

$$\text{được } f(x+y^{2m}) = f(x+y_0+y^{2m}) + \frac{a}{2} \cdot y_0 \cdot y_0 \cdot y_0$$

$$\text{hay } f(x) = f(x+y_0+y^{2m}) - \frac{a}{2} \cdot y_0 \cdot y_0 \cdot y_0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Nhận xét rằng $f(x) = f(x+y_0+y^{2m}) - \frac{a}{2} \cdot y_0 \cdot y_0 \cdot y_0$ là đa thức

bậc 2017 nên miền giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$. Từ (9)

$$\text{ta có } f(x) \in \mathbb{R}. \text{ Thay vào (1) ta thu được } f(x+y) =$$

$$f(x) + y^{2m-1} \text{ của bài toán là } f(x) = 0 \text{ và}$$

$$y = y_0$$

• Mặt khác, đa thức hàm thỏa mãn điều kiện bài ra,

hàm này đây có bài giải đúng. Bài Trại Nguyễn

Trần Cảnh, 12A8, THPT An Thuận, Mỏ Cày Nam, Bù

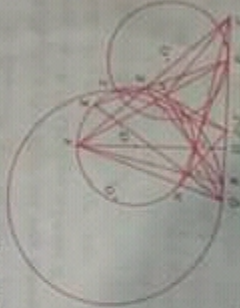
Định Nguyễn Duẩn Lâm, 12A2, THPT chuyên Lê

Quý Đức, Hưng Việt, Đại Văn Quán, HT, THPT chuyên Hùng Việt, Lâm Đồng; Tô Minh Quân, Anh, 13T, THPT chuyên Thăng Long, Quảng Ninh; Hồ Tuấn Huân, Nguyễn Hoài Phong, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, Huế; Võ Văn Thành, 10A1, Lê Anh Đồng, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẠU

Đạo 112.492. Cho tam giác ABC nhọn với các đường tròn (B), (C), ST là một đường thẳng song song với BC và cắt AB, AC tại S, T. Chứng minh rằng PT, QV cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải. (Thiên bực Lê Thị Thu Sương, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên - Huế)



Quý K là giao điểm của PT và QV, H là trực tâm của tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, (O_B), (O_C) là các đường tròn đi qua S, T và tiếp xúc với BC tại B', C' tại P, Q. M, N theo thứ tự là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại M, N. Để thấy AH là đường thẳng của (O). Do đó các điểm L, P, M, N cùng nằm

AH vuông góc với góc vuông. Vì vậy các bộ bốn điểm $(C, D, E, H), (B, D, F, H), (P, D, M, H)$ và (Q, D, N, H) cùng thuộc một đường tròn.

$$\text{Do đó } \overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AH} \cdot \overline{AD} = \overline{AM} \cdot \overline{AP};$$

$$\overline{AF} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AD} = \overline{AN} \cdot \overline{AQ}.$$

Điều đó có nghĩa là các bộ bốn điểm (C, E, P, M) và (B, F, Q, N) cũng thuộc một đường tròn (1).

Chú ý rằng AM tiếp xúc với (O) và bốn điểm D, H, M, P cũng thuộc một đường tròn, ta có

$$\begin{aligned} (MP, MD) &= (MP, MP) + (MH, MD) \\ &= (AM, MH) + (AH, AM) \pmod{\pi} \\ &= (AH, MH) = (DH, MH) \\ &= (DP, MP) = (PJ, PM) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó tam giác MNP cân tại J . Vậy

$$P_{JMN} = JM^2 = JP^2 = P_{JMN}^2.$$

Từ đó, chú ý rằng ST là trục đẳng phương chung của $(O), (O_1), (O_2)$, suy ra J thuộc ST .

Do đó $JP^2 = P_{JMN}^2 = P_{JMN}^2 = JQ^2$. Vậy

$$JM = JP = JQ \text{ Tương tự } J'N = J'P = J'Q.$$

Vậy $J = J'$ và $JM = JN = JP = JQ$. Từ đó suy ra J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPN . Kết hợp với $MN \perp AQ, HM \perp AP$, suy ra các bộ ba điểm (P, H, N) và (Q, H, M) thẳng hàng. Vậy

$$\overline{HM} \cdot \overline{HQ} = \overline{HM} \cdot \overline{HP} = \overline{HM} \cdot \overline{HC} \text{ Nếu các khác, bốn điểm } C, F, Q, M \text{ cũng thuộc một đường tròn (2).}$$

Từ (1) và (2), chú ý rằng các bộ bốn điểm (A, M, E, F) và (B, C, E, F) cũng thuộc một đường tròn, suy ra

$$\begin{aligned} (EA, EC) &= (EC, EP) = (MC, MP) \\ &= (ME, MP) + (MP, ME) \pmod{\pi} \\ &= (EC, EP) + (EP, EO) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (QC, BF) + (FB, QF) + (EF, EC) \pmod{\pi} \\ &= (BC, BF) + (FA, FK) + (BF, BC) \\ &= (FA, FK) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

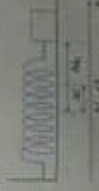
Do đó K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . $\square$

> Nhận xét. Người bạn Thu Sương, chỉ có bốn bạn tham gia giải bài toán này: **Vinh Phúc Lê Anh Dũng, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Phúc Yên; Bắc Ninh; 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; Thìn Thiên Huế; Nguyễn Nhật Trường, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; Lâm Đồng; 12A Minh Quốc, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.**

NGUYỄN MINH HẠ

Bài 1.1.492. Một con lắc lò xo gồm vật nhỏ có khối lượng $m = 0,03 \text{ kg}$ và độ cứng $k = 1,5 \text{ N/cm}$. Vật nhỏ được đặt yên tại vị trí cân bằng và được kéo xuống một đoạn 10 cm rồi thả ra. Hỏi số lần vật nhỏ gặp lại vị trí cân bằng là $n = 0,2$. Bỏ qua sức cản môi trường, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Xác định số lần khi vật nhỏ gặp lại vị trí cân bằng sau đó.

Lời giải.



O là vị trí cân bằng.
 N là vị trí mà lò xo không biến dạng.

Vật đặt yên tại lần đầu tiên tại vị trí O mà lực mà vật tác động với trục đàn hồi của lò xo, khi đó vật còn cách vị trí mà lò xo không biến dạng một đoạn Δl xác định bởi: $\Delta l = 10 \text{ cm}$.

$$\Rightarrow M = \frac{\Delta l}{k} = \frac{0,2 \cdot 0,03 \cdot 10}{1,5} = 0,04 \text{ m}.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 37

Problem. Compute $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} \right)$

Solution. We have $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^n}$. Thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{n}{2^n} &= \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2} - \frac{n+2}{2^n} \right) \end{aligned}$$



Therefore

$$\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) = \lim \left(\frac{2}{2} - \frac{n+2}{2^n} \right) = 2$$

TÍNH QÚC

Đưa

(do đây là số)

Therefore

(do đây là số)

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

Hint (online): Tìm hệ số của x^n trong khai triển của $(1+x+3x^2+4x^3)^n$.

Let's get it. Ta có $x^n = x.x.x.x.x = x.x.x.x.x^2 = x.x.x^2.x^2 = x^2.x^3$.

Điều đó có nghĩa là để viết x^n ta có thể chọn 5 trong 10 thừa số của

$(1+x+3x^2+4x^3)$ để sử dụng sự hiểu biết của x^2 qua x hoặc chọn

3 trong 10 thừa số của $(1+x+3x^2+4x^3)$ để sử dụng sự hiểu biết

của x^3 qua x và sau đó chọn 1 trong 7 thừa số còn lại của

$(1+x+3x^2+4x^3)$ để sử dụng x^2 ...

Số các số hạng có dạng $x.x.x.x.x$ là C_{10}^5 . Số các số hạng có dạng $x.x.x.x^2$ là $C_{10}^3 \times 3C_7^2$ (lưu ý rằng số 3 là của $3x^2$). Số các số hạng có dạng $x.x.x^2$ là $C_{10}^3 \times 4C_7^2$ (lưu ý rằng số 4 là của $4x^3$). Số các số hạng có dạng $x.x^2.x^2$ là $C_{10}^2 \times 3^2 C_8^2$ (lưu ý rằng số 3 là của $3x^2 \times 3x^2$). Số các số hạng có dạng $x^2.x^3$ là $3 \times C_{10}^2 \times 4C_8^1$ (lưu ý rằng số 3 là của $3x^2$ và số 4 là của $4x^3$). Cộng tất cả các số trên ta được kết quả là 8532.

> Nhóm ảnh. Các bạn sau có hai định đề, gửi bài về Tòa soạn kèm: **Hàng Yên; Đoàn Phú Thước; 11/1/2018**.
Tất cả chuyển: **Hàng Yên; Đoàn Phú Thước; Nguyễn Đức Thắng; 12/1/2018**.
Các bạn: **Hàng Yên; TP. Hải**

phần (khi số học)

Đã được đăng tải trên trang 8/2018 hàng năm (do là kỳ này)

16/05/2018 đã xuất bản... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ...

16/05/2018 đã xuất bản... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ...

16/05/2018 đã xuất bản... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ... (theo định nghĩa) ...

THAY.



XÁC ĐỊNH SỐ NGUYÊN TỐ BẰNG THUẬT TOÁN AKS

NGUYỄN MINH CHIAU
(SV DHHN, TP. HCM CH. MATH)

nguyên tố lớn là chủ đề được quan tâm hàng đầu của số học. Chính vì vậy, các thuật toán xác định một số nguyên dương có phải số nguyên tố hay không đã trở nên quan trọng.

Trong lý thuyết tính toán, một số nguyên tố n được gọi là nguyên tố mạnh nếu nó thỏa mãn điều kiện: $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ với mọi a nguyên tố cùng bậc với n . Thuật toán AKS là một thuật toán xác định một số nguyên tố có phải là nguyên tố mạnh hay không. Thuật toán này dựa trên việc kiểm tra tính đúng đắn của các đẳng thức đa thức modulo n . Nếu tất cả các đẳng thức đều đúng, thì n là một số nguyên tố mạnh. Ngược lại, nếu có ít nhất một đẳng thức sai, thì n không phải là số nguyên tố mạnh.

Thuật toán AKS có độ phức tạp thời gian là $O(\log^6 n)$, đây là một thuật toán đa thức đầu tiên để xác định một số nguyên tố có phải là nguyên tố mạnh hay không. Tuy nhiên, thuật toán này chỉ là một bước tiến trong việc tìm kiếm thuật toán xác định số nguyên tố hiệu quả hơn. Hiện nay, các thuật toán dựa trên giả thuyết Riemann vẫn là những thuật toán hiệu quả nhất để xác định số nguyên tố.

<https://tielun.hopto.org>

Thuật toán AKS là một thuật toán đa thức đầu tiên để xác định một số nguyên tố có phải là nguyên tố mạnh hay không. Thuật toán này dựa trên việc kiểm tra tính đúng đắn của các đẳng thức đa thức modulo n . Nếu tất cả các đẳng thức đều đúng, thì n là một số nguyên tố mạnh. Ngược lại, nếu có ít nhất một đẳng thức sai, thì n không phải là số nguyên tố mạnh.

Thuật toán AKS có độ phức tạp thời gian là $O(\log^6 n)$, đây là một thuật toán đa thức đầu tiên để xác định một số nguyên tố có phải là nguyên tố mạnh hay không. Tuy nhiên, thuật toán này chỉ là một bước tiến trong việc tìm kiếm thuật toán xác định số nguyên tố hiệu quả hơn. Hiện nay, các thuật toán dựa trên giả thuyết Riemann vẫn là những thuật toán hiệu quả nhất để xác định số nguyên tố.

Hội của 1, 4, 5, 6, ... Đây này không tự liên quan đến số học. Liên hệ số học với nguyên tố lớn hay không khi các bộ số của các số nguyên tố liên tiếp cũng không liên quan. Tuy nhiên, Euclid đã chứng minh được rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố, điều này được chứng minh bằng cách lấy các số nguyên tố đã biết và cộng chúng lại với nhau. Tập hợp $\mathbb{P}$ của số nguyên tố không chỉ quan trọng vì nó chứa vô hạn phần tử mà còn vì một số nguyên dương lớn hơn 1 đều chia được cho một số nguyên tố. Điều này cho thấy tầm quan trọng của số nguyên tố trong lý thuyết số.

2. Những thành tựu về số nguyên tố

- Người có ý nghĩa nhất trong toán học, số nguyên tố, là một trong những chủ đề quan trọng nhất trong toán học. Vì vậy, ngày nay có rất nhiều người nghiên cứu về số nguyên tố. Một trong những người nghiên cứu nổi bật nhất về số nguyên tố là Leonhard Euler. Ông đã chứng minh được rằng tổng nghịch đảo của các số nguyên tố phân kỳ. Điều này cho thấy tầm quan trọng của số nguyên tố trong lý thuyết số.

- Năm 1900, sau công trình của số nguyên tố, ông đã chứng minh được rằng tổng nghịch đảo của các số nguyên tố phân kỳ. Điều này cho thấy tầm quan trọng của số nguyên tố trong lý thuyết số.
- Năm 1900, sau công trình của số nguyên tố, ông đã chứng minh được rằng tổng nghịch đảo của các số nguyên tố phân kỳ. Điều này cho thấy tầm quan trọng của số nguyên tố trong lý thuyết số.

là của n không vượt quá $\sqrt{n}$. Định lý này đã giúp cho việc kiểm tra số nguyên tố thuận tiện hơn nhiều.

• Năm 1640, Fermat phát hiện ra định lý Fermat nhỏ (được chứng minh sau đó bởi Leibniz và Euler).

• Năm 1742, Christian Goldbach đưa ra giả thuyết Goldbach. Giả thuyết nêu rằng mọi số tự nhiên n đủ lớn hơn 2 đều viết được dưới dạng tổng 2 số nguyên tố trong 1 là thư gửi cho Euler. Bằng công nghệ hiện đại, các nhà khoa học đã chứng minh hai số đúng đến $n = 4 \cdot 10^8$, tuy nhiên, chưa có cách chứng minh bằng quá nêu dành cho hai số này.

• Vào đầu thế kỷ thứ 19, Legendre và Gauss đã đưa

$$\text{ra giả thuyết sau: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = \frac{1}{x}$$

(3.4)

• Vào cuối thế kỷ thứ 19, Jacques Hadamard và Charles Jean de la Vallée Poussin đã chứng minh được giả thuyết nêu trên của Legendre và Gauss dựa trên giả thuyết của Riemann. Định này giúp chứng tỏ hầu như các số nguyên tố rơi vào 1 dãy khi giá trị của chúng tăng lên. Một kết quả quan trọng được đưa ra vào thế kỷ thứ 19 là định lý Dirichlet về các số nguyên tố. Định lý này chứng tỏ 1 vài cấp số cộng chứa vô hạn số nguyên tố.

3. Các thuật toán xác định số nguyên tố

• Vì số nguyên tố mang tính ứng dụng cao, nhiều nhà toán học và tin học đã cố gắng xây dựng những thuật toán để xác định tính nguyên tố của một số nguyên dương n lớn (bài toán việc tìm của n từ 1 đến $\sqrt{n}$ vẫn còn không hiệu quả). Các thuật toán để kiểm tra tính nguyên tố của một số số nguyên dương đặc biệt hay gồm: phép thử của Fermat cho các số

Fermat (các số nguyên dương có dạng $2^k \cdot n - 1$) vào năm 1677, phép thử của Pratt năm 1876 (phép thử sử dụng thử p có dạng $42^k + 1$), Miller-Rabin (2.2.7) và các

phép thử khác. Phép thử của Pratt năm 1876 (phép thử sử dụng thử p có dạng $42^k + 1$) là một trong những phép thử đơn giản nhất để kiểm tra tính nguyên tố của một số nguyên dương n . Phép thử của Pratt năm 1876 (phép thử sử dụng thử p có dạng $42^k + 1$) là một trong những phép thử đơn giản nhất để kiểm tra tính nguyên tố của một số nguyên dương n . Phép thử của Pratt năm 1876 (phép thử sử dụng thử p có dạng $42^k + 1$) là một trong những phép thử đơn giản nhất để kiểm tra tính nguyên tố của một số nguyên dương n .

• Như vậy, ta thấy việc xác định tính nguyên tố của một số n là một vấn đề khó vì từ và các phép thử của các nhà toán học đầu thế kỷ đã được tính toán và của một số dựa trên một vài điều kiện đủ.

Tuy nhiên, như đã nói, vào những năm 70, khi số nguyên tố được biết rõ tính ứng dụng cao với nhiều ngành khoa học ngami toán, các thuật toán mới đã được phát triển để xác định tính nguyên tố của một số n lớn mà không có điều kiện ràng buộc nào. Để xác định một số n có phải là số nguyên tố một cách nhanh chóng và hiệu quả, các nhà toán học đã thiết kế ra những thuật toán khác nhau.

• Năm 1976, nhà toán học Miller đã đưa ra một thuật toán thỏa mãn yêu cầu trên, nhưng Miller không chứng minh được tính đúng đắn của nó.

• Năm 1983, Adleman, Pomerance và Rumely đưa ra một thuật toán xác định xem một số tự nhiên n có phải là số nguyên tố hay không? Tuy vậy, với các thuật toán tính toán chạy máy là $O(n^{1/4})$, với một vài số $n > 0$ rất nhỏ.

• Một hướng đi khác nhằm giải quyết nhu cầu xác định số nguyên tố là các thuật toán dựa trên số lý thuyết các số. Một loại các nhà toán học như Rabin (1980), Goldwasser & Kilian (1986) và Adleman & Huang (1992) đưa ra các thuật toán mà một bản huấn luyện khi không định một số là hợp lệ và với một độ đảm bảo được tính trước, thuật toán sẽ không định lại một số tự nhiên n có phải là số nguyên tố hay không? Tuy vậy, với các thuật toán này, máy tính vẫn chỉ cần số nguyên tố là 16 là số nguyên tố với độ đảm bảo là 99%.

6. Thuật toán AKS - thành công lớn trong lịch sử Toán - Tin

• Tháng 8 năm 2002, lịch sử chứng kiến một thành công khi nhà tin học Manindra Agrawal (Viện công nghệ Kanpur Ấn Độ) cùng với hai nhà toán học khác là Nitin Karmal và Nitin Saxena đã đưa ra một thuật toán để kiểm tra tính đúng đắn của các định thức của tính nguyên tố của những số rất lớn (vẫn còn bằng trên một số).

Thuật toán của các nhà tin học Ấn Độ (gọi là phép kiểm tra tính nguyên tố AKS) bắt nguồn từ định lý nhỏ của Fermat mà gần như đã có chứng cứ đầy đủ

ta cũng phải chứng, rằng nếu p là số nguyên số
 $p \nmid \text{ord}_2(n)$ với $\text{ord}_2(n)$ là bội nhỏ nhất của
 n sao cho $n \equiv 1 \pmod{2}$ hoặc tạo bởi nhân số
 n với số nguyên dương $n > 1$
 $n \equiv 1 \pmod{2}$ (a,b) $\in \mathbb{N}^*$, $a > 1, b > 1$, đưa ra: "hợp"

1. (a,b) $\in \mathbb{N}^*$ thì sao cho: $\text{ord}_2(n) > (\log_2 n)^2$
 $n > 1$ thì bỏ qua số n này)
 số $1 < (a,b) < n$ với một số a nào đó: $a \leq r$,

2. $a \leq r$, đưa ra: "nguyên số"

3. $a \leq r$, đưa ra: "nguyên số"

4. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

5. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

6. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

7. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

8. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

9. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

10. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

11. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

12. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

13. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

14. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

15. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

16. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

17. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

18. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

19. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

20. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

21. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

22. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

23. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

24. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

25. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

26. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

27. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

28. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

29. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

30. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

31. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

32. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

33. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

34. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

35. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

36. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

37. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

38. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

39. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

40. $a \leq 1$ dẫn $\lfloor \sqrt{\log_2 n} \rfloor$

$$G(x) = x^n - a, \quad G'(x) = P(x) - Q(x)$$

Chứng minh điều kiện này. Với n là số nguyên số, ta
 có: $G'_n(x) = (n-1)x^{n-1}$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^x x^{k+1} + (-1)^{n-1} x + a$$

Với $n = 2$, thì $G(x) = -2x + a^2 + a \Rightarrow G(x) = 2$

Với n lẻ, $G(x) = (1-a)^2 + a^2 + a \Rightarrow G(x) = 2$

(đang theo định lý Fermat nhỏ)

Chứng minh điều kiện này

Nhận xét: $G'_n(x) = 0 \pmod{a}$ ($x = \overline{1-a}$) $\Leftrightarrow x$ là số

nguyên số. Thật vậy, nếu n là số nguyên số thì luôn

thì $G'_n(x) = 0 \pmod{a}$ ($x = \overline{1-a}$)

Ngược lại, giả sử tồn tại x không phải số nguyên số

mà x vẫn có: $G'_n(x) = 0 \pmod{a}$ ($x = \overline{1-a}$). Khi đó,

ta gọi x là ước nguyên số (hệ kỳ) của n . Ta kí hiệu

$v_p(n)$ là số mũ đúng của p trong phân tích n và nếu

số nguyên tố p là ước

$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ (định lý Legendre)

$\frac{G'_n(x)}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!p!}$

Lúc này, $v_p((n-1)!) = \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor$ Ta chứng minh

$v_p((n-1)!) < v_p((n-p)!) + v_p(p!)$. Thật vậy, do p

chia hết n ta có:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor < \frac{n}{p^k} - \left\lfloor \frac{n-p}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{p^k} \right\rfloor$$

Tại $\left\lfloor \frac{n-p}{p^k} \right\rfloor = 1$. Ta chứng minh: $\left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor = 1$. Thật

vậy, do $\frac{n-1}{p^k} > \frac{n-p}{p^k}$ nên $\left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor \geq 1$

Giá trị $\left\lfloor \frac{n-1}{p^k} \right\rfloor = 1$ $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n-1}{p^k} < 2$ $\Leftrightarrow p^k \leq n-1 < 2p^k$

$\left\lfloor \frac{n-p}{p^k} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow p^k \leq (n-p) < 2p^k$ $\Leftrightarrow p^k \leq n-1 < 2p^k$

lý do p chia hết n . Như vậy, ta có

$$\left[\frac{n-1}{p} \right] = \left[\frac{n-p}{p} \right] \Rightarrow v_p(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n-1}{p^k} \right] < \frac{n}{p} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{n-p}{p^k} \right] + \left[\frac{p}{p^2} \right] = v_p(n-p) + v_p(p).$$

Như vậy, ta kết luận được $\frac{(n-1)!}{(n-p)!p!}$ không phải là số nguyên. Từ đó, ta suy ra điều giả sử là sai, vậy nhận xét được chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}(x-ay)^n &= x^n - a^n(\text{mod } n) \Leftrightarrow G(x) = n \\ \Leftrightarrow G(x) &= \sum_{i=1}^n C_n^i x^i (-a)^{n-i} + (-a)^n + a^n n \\ \Leftrightarrow C_n^k &= 0(\text{mod } n) \quad (k = \overline{1, n-1})\end{aligned}$$

và $(-a)^n + a^n = 0 \Leftrightarrow n$ là số nguyên tố (theo bổ đề).
Kết hợp 2 điều kiện, ta suy ra bổ đề 0 đúng. Tuy nhiên, để tăng tốc độ chạy máy, các nhà khoa học dựa vào một phương trình đồng dư khác:

(Định lý Fermat nhỏ cho đa thức, dạng yếu) Nếu n là số nguyên tố và a không phải là bội của n thì $(x-ay)^n = [x^n - a^n] \pmod{n}$ nghĩa là tồn tại một đa thức $f(x) = g(x) \pmod{h(x), n}$ nghĩa là tồn tại một đa thức $g(x)$ sao cho

$$f(x) - g(x) = q(x)h(x) \pmod{n},$$

Bổ đề 1. Nếu n là số nguyên tố, đa thức $h(x)$ bất kỳ thì $q(x)$ nguyên tố.

Chứng minh. Thật vậy, nếu n là số nguyên tố thì thuật toán không thể cho ra kết quả "loop số" ở bước 1 và bước 3. Theo bổ đề 0, thuật toán cũng không thể cho ra kết quả "loop số" ở bước 5. Như vậy, kết quả của thuật toán chỉ có thể là "nguyên tố" ở bước 4 hoặc bước 6.

Bổ đề 2. Đa thức $h(x)$ không phải của n số nguyên dương dẫn ra không nhỏ hơn 2^n ($n \geq 7$).

Chứng minh. Thật vậy, dĩ nhiên LCM_p là bội chung nhỏ nhất của n số nguyên dương đầu tiên ($n \geq 7$). Khi đó, ta tích phân:

$$h(x) = \sum_{i=1}^n x^i (-1)^{i-1} = \left[x^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i C_{n-1}^{i-1} \right]$$

$$\begin{aligned}&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} x^{n-i} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} \right] \\&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{n-1-m} (-1)^{n-1-m}}{m+1} \quad (m \leq n \text{ và } m \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Do LCM_p là bội chung nhỏ nhất của n số nguyên dương đầu tiên nên $S \cdot LCM_p$ là số nguyên. (1)

$$\text{Ta thấy rằng } S = \frac{1}{m C_m^m} \quad (2)$$

Từ 2 kết quả (1) và (2) ta có $m C_m^m | LCM_p$.

Vì vậy ta có $m C_m^m | LCM_p$, và

$$(2n+1)C_{2n}^{2n} = (n+1) C_{2n+1}^{2n+1} | LCM_{2n+1}$$

Dĩ nhiên $LCM_{2n} = m C_{2n}^{2n} | LCM_{2n+1} = (2n+1)C_{2n}^{2n}$.

Ta có $LCM_{2n} | LCM_{2n+1}$ nên ta có $(n+1) | (2n+1)$.

Do $(2n+1, n) = 1$ nên $n | 1$.

Như vậy ta có $(2n+1)C_{2n}^{2n} | LCM_{2n+1}$. Ta có:

$$(n+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i (2n+1)C_{2n}^{2n-i}$$

suy ra $LCM_{2n+1} \geq n \geq 4^n \geq 2^{n-2} \quad \forall n \geq 4$

Do $LCM_p | LCM_{2n+1}$ nên $LCM_{2n+1} \geq 2^{n-2} \quad \forall n \geq 4$.

Như vậy, ta đã chứng minh được $LCM_p \geq 2^n \quad \forall n \geq 9$.

Với $n = 8$, $LCM_8 = 840 \geq 256$

Với $n = 7$, $LCM_7 = 420 \geq 128$

Như vậy ta đã chứng minh được bổ đề 2.

Bổ đề 3: Với mọi số nguyên dương $m \geq 1$, hàm số

$$r = \max \left\{ \left\lfloor \log_2 m \right\rfloor \right\} \text{ với } \log_2 m = \log_2 m^+$$

Chứng minh:

Thật vậy, Với $m = 2, x = 3$ thì $\log_2 m = \log_2 m^+$.

Với $m \geq 2$ thì $\left\lfloor \log_2 m \right\rfloor \geq 1$. Nếu ta đặt

$$B(m) = \left\lfloor \log_2 m \right\rfloor \text{ thì } LCM_{B(m)} \geq 2^{B(m)}$$

Nếu r là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho r không chia hết T_r , trong đó

$$T_n = \sum_{d|n} \log_2 B(n/d) \prod_{d|n} n^{d-1}$$

là số nguyên dương nhỏ nhất không chia hết cho $(r, n) = 1$. Thật vậy, nếu $(r, n) > 1$ thì xét

Khi đó ta cũng có r' không chia hết T_n .

Chứng minh với giả thiết r nhỏ nhất. Như vậy $(r, n) = 1$ nên $\log_2 r, n$. Từ giả thiết r nhỏ nhất T_n , ta có $\log_2 n > (\log_2 n)^2$

$$r \geq 2, 3, 4, \text{ ta có: } T_n < 2^{B(n)}$$

$$r \geq 5, \text{ ta có:}$$

$$T_n \leq n^{\left(\log_2 B(n) - \frac{1}{2} \log_2 n \log_2 n \log_2 n\right)}$$

$$n^{\left(\log_2 B(n) - \frac{1}{2} \log_2 n\right)} + \frac{1}{2} (\log_2 n)^2 (\log_2 n)^2 + 1$$

$$n^{\left(\log_2 \log_2 n\right)} + \frac{1}{2} (\log_2 n)^2 (\log_2 n)^2 + 1$$

$$\log_2 n + \frac{1}{2} (\log_2 n)^2 (\log_2 n)^2 + 1$$

$$\frac{1}{2} \log_2 n - \frac{1}{2} (\log_2 n) \log_2 n$$

$$+ \frac{1}{2} (\log_2 n)^2 (\log_2 n)^2 + 1 = (\log_2 n)^3$$

$$\text{Vậy, ta có:}$$

$$T_n \leq n^{\log_2 n} < n^{\log_2 n} = (2^{\log_2 n})^{\log_2 n} \leq 2^{B(n)}$$

$$\text{Trong mọi trường hợp, } T_n < 2^{B(n)} \leq LCM_{n \leq n}$$

$$\text{tức, nghĩa là } T_n \text{ không thể chia hết cho một số}$$

$$\text{tên bằng từ 1 đến } B(n), \text{ từ đó suy ra tồn tại một}$$

$$\text{mối liên hệ giữa } T_n \text{ và } p \text{ không chia hết } T_n. \text{ Do } r \text{ là}$$

$$\text{mối liên hệ nhỏ nhất không chia hết } T_n \text{ nên}$$

$$(r, n) = 1$$

$$\text{chứng minh xong bộ đề 3.}$$

$$\text{Để chứng minh thuật toán AKS, ta thấy rằng nếu thuật}$$

$$\text{toán này kết quả "nguyên tố" ở bước 4 thì chắc}$$

$$\text{chắc là nguyên tố. Thật vậy, giả sử ngược lại,}$$

$$\text{thì kết quả cho ra ở bước 4 là "nguyên tố" mà } n$$

$$\text{không phải là số nguyên tố. Tuy nhiên, lúc này thuật toán phải cho}$$

$$\text{ra kết quả là "hợp số" do bước 3 đã kiểm}$$

$$\text{tra, chứng của nó tất cả các số nguyên}$$

$$\text{nhỏ hơn } n \text{ và } r \text{ (mình hiểu), từ đó ta suy ra}$$

Để tiện cho việc chứng minh, ta sẽ trình bày thuật toán AKS cho ra kết quả "nguyên tố" ở bước 4. Do $\log_2 n > 1$ nên tồn tại ước nguyên tố p của n sao cho $\log_2 p > 1$. Do ta có kết quả "nguyên tố" ở bước 4 nên $p > r$ (nếu $p \leq r$ và $p < n$ thì thuật toán AKS cho ra kết quả ở bước 3, còn nếu $p = n$ thì thuật toán cho ra kết quả ở bước 4). Tiếp theo ta đặt $t = \lfloor \sqrt[p]{(r+1) \log_2 n} \rfloor$

Do thuật toán không cho ra kết quả "hợp số" ở bước 3, ta có:

$$\begin{aligned} (x+n)^a &= x^a + a(\log_2 x^{-1}, n) (a = \overline{0}, t) \\ &\Rightarrow (x+n)^a = x^a + a(\log_2 x^{-1}, p) \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x+n)^t = x^t + a(\log_2 x^{-1}, p) \text{ (nhân sai t)}$$

$$\Rightarrow (x+n)^t = x^t + a(\log_2 x^{-1}, p)$$

Định nghĩa. Xét đa thức $P(x)$ và số tự nhiên m . Ta nói m là số "trung" đối với $P(x)$ modulo m nếu

$$[P(x)]^m = P(x^m) \pmod{m}$$

Như vậy, ta có thể thấy cả $\frac{m}{p}$ và p là số "trung"

đối với $x + a$ modulo (x^{-1}, p) khi $0 \leq a \leq t$.

Để dễ dàng, ta sẽ nói m là số "trung" đối với

$P(x)$ modulo m nếu m cũng là số "trung" đối với

$P(x)$ modulo n .

Chứng minh. Thật vậy, theo định nghĩa về số

"trung" thì ta có:

$$\begin{aligned} [P(x)]^m &= P(x^m) \pmod{m} \\ &= [P(x)]^m + [P(x^m)]^m \pmod{m} \\ &= [P(x)]^m + P(x^m) \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } [P(x)]^m = P(x^m) \pmod{m}$$

$$\Rightarrow [P(x)]^m = P(x^m) \pmod{m}$$

$$\text{và } [P(x^m)]^m = P(x^{m^2}) \pmod{m}$$

$$\text{ta có: } [P(x)]^m = P(x^m) \pmod{m}$$

$$\text{Như vậy, ta cũng có thể nói } m \text{ là số "trung" đối với } P(x)$$

$$\text{modulo } n$$

Quảng cáo

$$\|v\|_{V^0}^2 = \|v\|_{V^1}^2 + \|v\|_{V^2}^2 + \dots$$

$$[\alpha v]^T = (\alpha v^T)^T$$

$$= [P(x)K(x)]'' = P(x)''K(x) + 2P(x)'K(x) + P(x)K(x)''$$

Sheng xing, ta ci an sheng ta shi "young" di yi
 pin (A1) modulu.

TABLE 4. *Continued*

$$I = \left\{ \left[\frac{a}{p} \right] p' \mid p' \neq 0 \right\} \quad \text{also is an "ideal" of } R$$

$$P = \left[\begin{array}{c} P^0(x) + P^1(x) + 2P^2(x) + 2P^3(x) + P^4(x) + P^5(x) + P^6(x) + P^7(x) + P^8(x) + P^9(x) + P^{10}(x) + P^{11}(x) + P^{12}(x) + P^{13}(x) + P^{14}(x) + P^{15}(x) + P^{16}(x) + P^{17}(x) + P^{18}(x) + P^{19}(x) + P^{20}(x) + P^{21}(x) + P^{22}(x) + P^{23}(x) + P^{24}(x) + P^{25}(x) + P^{26}(x) + P^{27}(x) + P^{28}(x) + P^{29}(x) + P^{30}(x) + P^{31}(x) + P^{32}(x) + P^{33}(x) + P^{34}(x) + P^{35}(x) + P^{36}(x) + P^{37}(x) + P^{38}(x) + P^{39}(x) + P^{40}(x) + P^{41}(x) + P^{42}(x) + P^{43}(x) + P^{44}(x) + P^{45}(x) + P^{46}(x) + P^{47}(x) + P^{48}(x) + P^{49}(x) + P^{50}(x) + P^{51}(x) + P^{52}(x) + P^{53}(x) + P^{54}(x) + P^{55}(x) + P^{56}(x) + P^{57}(x) + P^{58}(x) + P^{59}(x) + P^{60}(x) + P^{61}(x) + P^{62}(x) + P^{63}(x) + P^{64}(x) + P^{65}(x) + P^{66}(x) + P^{67}(x) + P^{68}(x) + P^{69}(x) + P^{70}(x) + P^{71}(x) + P^{72}(x) + P^{73}(x) + P^{74}(x) + P^{75}(x) + P^{76}(x) + P^{77}(x) + P^{78}(x) + P^{79}(x) + P^{80}(x) + P^{81}(x) + P^{82}(x) + P^{83}(x) + P^{84}(x) + P^{85}(x) + P^{86}(x) + P^{87}(x) + P^{88}(x) + P^{89}(x) + P^{90}(x) + P^{91}(x) + P^{92}(x) + P^{93}(x) + P^{94}(x) + P^{95}(x) + P^{96}(x) + P^{97}(x) + P^{98}(x) + P^{99}(x) \end{array} \right]$$

$(\bmod x^n - 1, p)$. Bây giờ ta sẽ tìm hiểu tiếp các một số M sao cho nếu định lý của Fermat cho đúng thì M sao cho nếu định lý này đúng thì M là đúng với mọi số nguyên a không vượt quá M thì ta biết được rằng a là số nguyên số (0) đây là số chỉ ra $M = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$ hay, v.v. Bây giờ ta sẽ lấy dạng 2 tiếp theo của định lý và chúng ta sẽ thấy rằng 2 tiếp theo

The key is to use $Q = [x \bmod r] + s/r$ as d

$|c| = 1$. The condition $\log_2 \alpha > \log_2 \alpha^2$ means in our case that there is a $t > (\log_2 \alpha)^2$. (That is, the α^t is not prime to α .) Since f takes $L = \alpha^t$ mod α to 0, it follows that α^t is not prime to α .

Tiếp theo là chỉ cần cho ε bằng 10 thì được $\left[\log_2 n \right]^{10}$ và ta được $\left[\log_2 n \right]^{10} + 1$ phần tử của dãy mà ta cần.

Nếu $\mathcal{F}_p = \{\mathcal{F}_p^1, \mathcal{F}_p^2, \dots, \mathcal{F}_p^p\} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p\}$. Do p là số nguyên tố nên $\mathcal{F}_p$ cũng là một không gian vector trên $\mathcal{F}$ với các phép toán $+$ và $\cdot$. Ta xét $\mathcal{F}_p = \{\mathcal{F}_1\}$ là tập hợp các đa thức thuộc $\mathcal{F}$ sao cho $\mathcal{F}_p \cdot \mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_p$. Một bộ đôi $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_p)$ được gọi là một cặp đôi p -đồng nhất nếu $\mathcal{F}_p$ là một không gian vector trên $\mathcal{F}$ và $\mathcal{F}_p \cdot \mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_p$.

Chứng minh: Giả sử $\overline{a(x)} = \overline{a(x) \cdot 1} = \overline{a(x) \cdot \phi(x)}$ thì suy ra $\phi(x)$ không chia hết $a(x)$ mà $\phi(x) \cdot a(x) = 1$. Khi đó tồn tại các hàm $\psi(x), \theta(x) \in P[x]$ sao cho $\psi(x)\phi(x) + \theta(x)a(x) = 1$
 $\Rightarrow \psi(x)\phi(x) + \theta(x)a(x) = 1$
 suy $\overline{\psi(x)} = 0$, suy $\overline{\psi(x)}\phi(x) = 1$. Vậy $\overline{a(x)}$ nghịch đảo trong $P_n[x]/\phi(x)$. Vậy $P_n[x]/\phi(x)$ là một trường.

Định nghĩa. Xét đa thức bất kỳ $f(x) \in \mathbb{Z}_q[x]$

non che $L(x)$ sia tale che $x^2 - 1$ non dividing alcun fatto che
da cui $x^2 - 1 \nmid (x - a)$. Una sola, la si ha $L(x)$ in
 $\Phi_2(x)$

Quay trở lại bài toán, với $\Phi_r(x)$. Ta thấy với $(r, p) = 1$, thì ta có thể phân tích $\Phi_r(x)$ thành tích của các nhân bất khả quy với bậc nhỏ hơn p trong $\mathbb{F}_p$.

Gọi $h(x)$ là một đa thức nào vậy thì ta luôn nhận được $h(x) \equiv 1 \pmod{p}$ và ta có một trường con

$$K = \mathbb{F}_p[h(x)/h(x)].$$

File No. 2: 134

$$V = \{f(x) \text{ mod } m(x), p(x) \mid f(x) \in \mathbb{F}_q[x] \subseteq \mathbb{F}_q[x]/(m(x))\}$$
and let π_i , for $i = 1, \dots, n$, be $\{g \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}) : g(\gamma_i) = 1\}$ and $\pi_{i,j} = \pi_i \otimes \pi_j$.

Cheng-ming, Hsu, for the class above. P. 17 P. 18

where $\mathbf{m}$ is the vector of means and $\mathbf{C}$ is the covariance matrix.

tuần các nhà số. Lưu ý, do mỗi nhà số n có n (các

© 1999 by John Wiley & Sons, Inc.

Country: United States of America

Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Find $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ and $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
$$\text{where } \mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{v}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

It is not easy to check $|H| \geq 2^n$.

Đặc tính kỹ thuật máy K-10 như sau:

© 1999 by the American Psychological Association

1. The first step is to identify the problem or goal. This involves understanding the current situation and what needs to be achieved.

1997 to 2001 (1997 to 2001) and 1997 to 2001

phần F . Theo bổ đề 4 và 5, ta có với mỗi phần tử a thuộc F thì:

$$f_1(x)^r = g_1(x^r) \pmod{x^r - 1, p}$$

$$f_2(x)^r = g_2(x^r) \pmod{h(x), p} \text{ (do } h(x) \text{ chia hết}$$

1)

a với a thay nếu đặt $w(x) = f_1(x) - g_1(x)$ thì ta

$x^r \pmod{p}$ đều là nghiệm của $w(x)$ trong trường

trên: $G = \{x \pmod{p} \mid x \in F\}$ nên mọi $x^r \pmod{p}$ ($x \in G$)

là nghiệm của $w(x)$. Như vậy, ta suy ra được

ở a ít nhất r nghiệm phân

$a(x) \pmod{h(x), p}$ nên ta có thể nói x là nghiệm

$a(x)$ trong trường F . Nhưng do $h(x)$ chia hết

$f_2(x)$ nên ta có thể suy ra x là một nghiệm của bất

chỉ thức $x^r, x^2, \dots, x^r$ đối với khác nhau. Do đó,

với $x^r, x^2, \dots, x^r$ đối một phần bất tương F . Tuy

nh, nói x khác không có thể không quá r

trong đó có nhiều hơn r nghiệm phân biệt. Như

thì $f_1(x) = g_1(x)$ tại không ít hơn r giá trị (vô lý

trên trường F) và $g_1(x)$ là 2 đa thức khác nhau

hơn $F[x]$. Từ đây ta suy ra điều giả sử là sai

và đây phải chứng minh. Với: $|P| \geq |P| - 2$.

$$M \in K, \text{ nếu } a = p^k (k \in \mathbb{N}^*) \text{ thì } |P| \leq p^k$$

$$\text{Ông minh. Type } f_1 = \left(\frac{a}{p} \right)^r p^r (p \leq a, p \leq p) \text{ và}$$

$$f_2 = \left(\frac{a}{p} \right)^r p^r \text{ (do } |P| \leq p^k \text{)}$$

$$a, p^k \in \mathbb{N}^* \text{ nên } 2 \text{ phần tử bất kỳ của } f_1 \text{ đối một}$$

$$a \pmod{p} \text{ và } p^k \pmod{p} \text{ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2}$$

$$a_1, a_2 \pmod{p} \text{ phân biệt của } f_1 \text{ sao cho}$$

$$a_1 \pmod{p} \text{ và } p^k \pmod{p} \text{ Xảy một đa thức } g(x) \text{ bất kỳ được}$$

$$g(x) x^r = g(x^r) \pmod{x^r - 1, p}$$

$$f_1(x)^r = g(x^r) \pmod{x^r - 1, p}$$

$$a_1 \pmod{p} \text{ và } p^k \pmod{p} \text{ và } a_2 \pmod{p}$$

$$a_1 \pmod{p} \text{ và } p^k \pmod{p} \text{ và } a_2 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (g(x))^r = (g(x)^r) \pmod{x^r - 1, p}$$

$$\Rightarrow (g(x))^r = (g(x)^r) \pmod{h(x), p} \pmod{x^r - 1}$$

Từ đây ta có $g(x) \pmod{h(x), p}$ là một nghiệm của

đa thức $h(x) = x^r - a^r$ trong trường F . Như vậy,

$h(x)$ có ít nhất $|P|$ nghiệm. Tuy nhiên,

$\deg(h(x)) = \max\{r_1, r_2\} \leq p^k$ và do $h(x)$ là một đa

thức khác không nên $|P| \leq p^k$. Do bất đẳng thức

đang viết mà số nghiệm đúng $r \geq p^k$ nên

$$|P| \leq p^k$$

Quay trở lại bài toán, ta chứng minh nếu thuật toán

AKS cho ra kết quả "nguyên tố" thì n là số nguyên

thật.

Thật vậy, ta cần: $|P| \leq p^k$ với $\forall k$. Do $r \geq \log_2 n^2$

$$\text{nên } r \geq \sqrt{n} \log_2 n$$

Chọn d là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn $\sqrt{n} \log_2 n$

thì $2^d > n^2$ nên nếu ta cho a bằng n thì

$$\sqrt[n]{n^2} \log_2 n \leq \sqrt[n]{2^d} \log_2 n \leq \sqrt[n]{n^2} \log_2 n$$

thì ta có: $|P| \leq n^2$. Theo bổ đề 8, ta có

$n = p^k (k > 0)$, chúng ta có $k \leq 1$ do thuật toán AKS

đã cho kết quả ngay từ bước 1. Vì vậy, $k = 1$ và n là

số nguyên tố. Điều này đã hoàn thành việc chứng

minh tính đúng đắn của thuật toán AKS.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Wikipedia contributors, Prime number, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 3 Aug 2018, Web, 23 Aug 2018.
- [2] Vũ Thanh Hòa, Thuật toán xác định số nguyên tố với thời gian đa thức - Một nghiên cứu trong lịch sử toán học Việt Nam (The Art of Prime Number Testing, 2003).
- [3] Maunika Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena, PRIMES is in P, Department of Computer Science & Engineering, Indian Institute of Technology Kharagpur, 2002.
- [4] Fred Akshic, Primality Testing in Polynomial Time (D, 2017).



BÀI TOÁN 17. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi K là trung điểm của AH , I là giao điểm của EF và AD . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

Cách giải 1. Gọi M là điểm đối xứng của H qua D . Ta có $BHM = BMH$.

$BHM = KHE$ (đối đỉnh)
và $KHE = KEB$ ($KE \perp BH$)

Do đó $BMH = KEB \Rightarrow$

Tứ giác $BMEK$ nội tiếp

$\Rightarrow KBE = KME = ICE$ ($MEEC$ là tứ giác nội tiếp)
Nên $CI \perp KB$ mà $KD \perp BC$ nên I là trực tâm của tam giác KBC .



Cách giải 2. Ta có

$KA = KE \Rightarrow \angle KAE = \angle KEA$ cân

tại $K \Rightarrow \angle KEA = \angle DAC$ mà

$\angle BFG = \angle BEG = 90^\circ$ nên

tứ giác $BCEP$ nội tiếp

đường tròn tâm J là

trung điểm của BC .

$\angle KCB = \angle KEC$ cân tại J

$\Rightarrow \angle KCB = \angle KED \Rightarrow \angle KEA + \angle BEC = \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle EIJ = 90^\circ$. Từ đó KE là tiếp tuyến của đường

tròn D . Gọi N là giao điểm của KC và đường tròn

OH . Ta có $KE \perp EN$ và $KN \perp KC$.

$\angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNE = \angle KNC$ cân tại N

$\Rightarrow \angle KNI = \angle KDI = 90^\circ \Rightarrow IN \perp KC$.

Mà khác $\angle BNC = 90^\circ \Rightarrow BN \perp KC$. Ta có B, I, N thẳng hàng. Vậy I là trực tâm của tam giác KBC .

Cách giải 3. Từ K kẻ thêm

đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$AEHF \Rightarrow \angle ECK = \angle EFH = \angle EKI$

$\angle ECK \sim \angle EKI$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

$\Rightarrow \frac{EK}{EI} = \frac{EK}{EI} \Rightarrow EI \perp KC$

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . B là giao điểm của AC và EH , C là giao điểm của AE và FH , I là giao điểm của AH và EF , K là trung điểm của AH . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

NGUYỄN ĐỨC TÂN (TP. Hồ Chí Minh)

Nhận xét. Người ta cách giải trên của tác giả đề toán Nguyễn Đức Tân, Tòa soạn không nhận được thêm lời giải nào của các bạn gửi về.

LÊ MẠI (Hà Nội)

Mình xin bạn gửi lời giải Bài toán 19 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí THTH.TT trước ngày 30/11/2013.

ĐỀ TÀI 19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

ĐÁP ÁN: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CÁCH GIẢI: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

CHỨNG MINH: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng EF đi qua O và song song với BC . Đường thẳng AD đi qua O và song song với BC . Đường thẳng EF và AD cắt nhau tại I . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC .

THAI NHẬT PHƯƠNG

ICP THICE Nguyễn Văn Tiến, Cao Nghĩa, Cao

Bình, Khanh Hòa

1) $p \geq 5$ thì có hai số nguyên tố q_1, q_2 sao cho $\frac{p+1}{2} \leq q_1 < q_2 < p-1$. Do $2^q q_1 | h$, ta có

$$1 < H_{p-1} \leq \frac{p!}{2q_1 q_2} < \frac{p!}{2(p+1)^2} < 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

2) Cũng vậy, nếu $p \geq 5$ thì tồn tại $m \geq 5$ sao cho $2^m \leq p-1 < 2^{m+1}$. Theo định lý Jordan (bổ đề Bertrand), tồn tại số nguyên q sao cho $\frac{p+1}{2} \leq q < p-1$. Do $2^m q | h$, ta có

$$\begin{aligned} 1 < \log_2 H_{p-1} &\leq \log_2 \frac{p!}{2^m q} < \frac{p!}{2^m q} < \frac{(2^{m+1})!}{2^{m+1} (p+1)^2} \\ &< 4 + \frac{1}{16} < 4,07. \end{aligned}$$

Sơ luận dẫn này hoàn tất chứng minh, q.e.d. Đây là bài toán khó, có sự kết hợp của các quan trọng. Về bộ đề Herbrand và các bài xem ở số 432 tháng 6 năm 2013 in Tập 1b TH&TT.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1) Cho $p \geq 3$ là số nguyên tố. Chứng minh

$$\left(\frac{p!}{2} \right)_{p-1} \equiv 2^{p-1} \pmod{p^2}.$$

2) Giả sử p là số nguyên tố lớn hơn h , thì

$$\left(\frac{2p}{3} \right)_{p-1} \equiv m, n \in \mathbb{Z}, \text{ thỏa mãn}$$

$$\frac{m}{n} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{p}.$$

Chứng minh rằng $p \nmid m$.

3) Cho p là số nguyên tố n là số nguyên dương cho $n \geq p$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{p!}{2} \right)_{p-1} \equiv \left(\frac{n+2p}{2p} \right) - \left(\frac{n+p}{2p} \right) \text{ chia hết cho}$$

4) 222. Mathematical Reflections. Với mỗi

số nguyên dương k , đặt $T_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2}$. Tìm tất cả

n sao cho $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \equiv 0 \pmod{p}$.

5. (O54. Mathematical Reflections). Cho $p = 2q + 1$ là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p chia hết sự số của $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2}$, ở đây tổng được lấy trên tất cả các cặp có thứ tự (i, j) .

6. (HPT chuyên KHTN, HNGQ Hà Nội năm 2010). Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{(4n+2)n^2}{(n+1)^2} a_n + \frac{3n+1}{(n+1)^2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho a_n là một số nguyên dương.

7. (APMO 2006). Cho $p \geq 5$ là số nguyên tố và r là số các cách đặt p con cờ Đám lên một bàn cờ kích thước $p \times p$ sao cho không có trường hợp tất cả p con cờ đó cùng hàng (nhưng được phép cùng cột). Chứng tỏ rằng r chia hết cho p^2 . Ở đây, ta giả sử tất cả các con cờ tham gia cùng nhau.

8. (Junggeun, 1952). Với mọi số nguyên tố

$$p > 3 \text{ thì } \left(\frac{ap}{bp} \right) \equiv \left(\frac{a}{b} \right) \pmod{p^2}, \text{ với mọi}$$

$a, b \in \mathbb{N}^*$.

9. (Jacquard, 1952). Với mọi p nguyên tố $p \geq 5$ và với mọi số nguyên dương $m > n$, ta

$$\left(\frac{ap}{bp} \right) \equiv \left(\frac{m}{n} \right) \pmod{p^2}, \text{ trong đó } r \text{ là lũy thừa}$$

của p trong biểu thức $p^r \mid m(m-n)$.

10. (Morley, 1895). Với mọi số nguyên tố

$$p \geq 5, \text{ thì } (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{\frac{p-1}{2}} \right) \equiv 4^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Tài liệu tham khảo

- 1) Tập chỉ Toán học và Tuổi trẻ
- 2) Tập chỉ Mathematical Reflections
- 3) Đại số và Hình học



Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 494, TB 2018.

Bài 25. Tìm tất cả các ước số nguyên tố p của

$$A = 2^{2^p} - 1.$$

biết $p \leq 9000$.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Nếu $2^n - 1, 2^m - 1$ đều chia hết cho số nguyên tố p , mà n là số nguyên dương nhỏ nhất thì m chia hết cho n .

Chứng minh bổ đề. Giả sử $m = nr + r$ với r, r là các số nguyên dương, $0 < r < n$. Ta có:

$$2^n - 1 = 2^{nr} - 1 = 2^{(2^n - 1)} - 1 = 2^r - 1. \quad (1)$$

Vì r là số nguyên dương nhỏ nhất nên $m \leq n$.

Dựa vào đẳng thức:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \quad (a \neq b)$$

suy ra $(2^n - 1) \mid (2^r - 1)$.

Theo giả thiết $(2^n - 1) \mid p$ nên từ (1) ta đi đến:

$$(2^n - 1) \mid p$$

Theo giả thiết n là số nguyên dương nhỏ nhất

để $(2^n - 1) \mid p$, kết hợp với $0 < r < n$ suy ra

$r = 0$. Từ đó ta thu được: $m = nr$ (2).

Từ (2) suy ra $m \mid n$. Bổ đề được chứng minh.

Quay lại bài toán: Giả sử p là ước nguyên tố

của $A = 2^{2^p} - 1$ ($p \leq 9000$).

Các $m = 2017$. Gọi n là số nguyên dương nhỏ

nhất mà $(2^n - 1) \mid p \Rightarrow p$ là số nguyên tố lẻ.

Theo bổ đề ta có: $m = 2017 \mid n$.

Nhưng do 2017 là số nguyên tố nên $n = 2017$ ($n \neq 1$ vì nếu $n = 1$ thì $2^n - 1 = 1 \nmid p$).

Do p là số nguyên tố lẻ, nên theo định lý

Fermat nhỏ ta có: $(2^{2^p} - 1) \mid p$ (3)

Từ (3) và áp dụng bổ đề với $m = p - 1, n = 2017$,

ta có $p - 1 = 2017r$ (r là số nguyên tố lẻ nên

$p = 4034r + 1$, với số nguyên dương).

Do $p \leq 9000$ nên $4034r + 1 \leq 9000$, suy ra:

$$4034r \leq 8999 \quad (4)$$

Do r nguyên dương nên từ (4) suy ra r có thể là 1, 2.

- Nếu $r = 1 \Rightarrow p = 4034r + 1 = 4035$ (không là nguyên tố)

- Nếu $r = 2 \Rightarrow p = 4034r + 1 = 8069$ là số

nguyên tố thỏa mãn bài toán.

Tóm lại, chỉ có một ước số nguyên tố $p \leq 9000$

của $A = 2^{2^p} - 1$ là số 8069.

Nhận xét. Đa số các hạn tham gia giải bài này có lời

giải đúng. Hạn Lê Thị Thu Trang, 11 Trần 2, THPT

chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế, còn có

những xét: Nếu p là số nguyên tố thì một ước nguyên

số của số $2^n - 1$ đều có dạng $2kp + 1, k \in \mathbb{N}^*$.

Người hạn Song, các hạn sau có lời giải về Lê Thị

Thủy Ngọc, 11T1, Nguyễn Đình Thưởng, Đỗ Trung

Đào, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa

Thiên Huế.

NGUYỄN HOÀNG (10/10)

Bài này là bài tập đề nghị. Bài được lấy lại từ bài về Tập hợp TH&TT trong ngày 30/11/2018.

ĐẠI TẬP HIF NGHI

Bài 27. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng

minh rằng: $\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}$.

HOÀNG CHU (10/10)

