# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2018 Số 494

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre


Chào mừng Đội tuyển Olympic Toán Quốc tế của Việt Nam đoạt Huy chương IMO 2018

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI
# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

## *Bộ sách* TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
## CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.

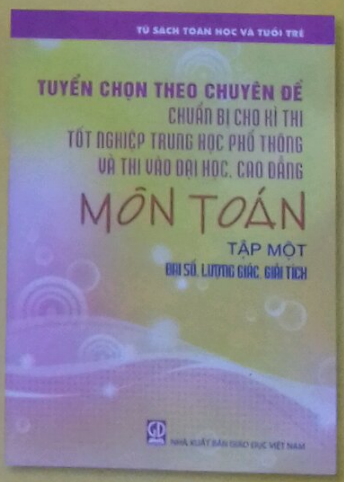

200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng


200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

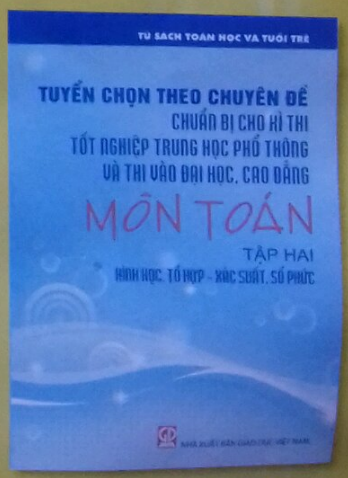
## *Bộ sách* TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
## CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.




260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng




240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

**Mọi chi tiết xin liên hệ:**

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**
187B, Giảng Võ, Hà Nội
- ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com


# MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

**VŨ HỒNG PHONG**
*(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)*

**Nội dung bất đẳng thức như sau**

Cho $t$, $m$, $g$, $h$ là các số thực thỏa mãn $t \le m$; $g \le h$ và $0 < (m+g)(m+h)$. Khi đó:

$$\frac{t+g}{m+g} \le \frac{t+h}{m+h}. \qquad (*)$$

***Chứng minh.*** Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{t+g}{m+g} - \dfrac{t+h}{m+h} \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(t+g)(m+h)-(t+h)(m+g)}{(m+g)(m+h)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{th+mg-mh-tg}{(m+g)(m+h)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(m-t)(g-h)}{(m+g)(m+h)} \le 0$$

(luôn đúng). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = m$ hoặc $g = h$.

Sau đây là một số ứng dụng của bất đẳng thức (*). Đặc biệt việc kiểm tra điều kiện $0 < (m+g)(m+h)$ trong các thí dụ xin dành cho bạn đọc.

**Ứng dụng 1. Chứng minh bất đẳng thức**

**Thí dụ 1.** *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{3x^3+xy^2}{3x^2+2xy+3y^2} + \frac{3y^3+yz^2}{3y^2+2yz+3z^2} + \frac{3z^3+zx^2}{3z^2+2zx+3x^2} \ge \frac{x^2+y^2}{2x+2y} + \frac{y^2+z^2}{2y+2z} + \frac{z^2+x^2}{2z+2x}.$$

***Lời giải.*** Ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2xy$.

Áp dụng BĐT(*) với

$$t = 2x^2 < m = 2x^2+2xy+2y^2$$

và $\qquad g = 2xy \le h = x^2+y^2,$

ta có:

$$\frac{3x^2+y^2}{3x^2+2xy+3y^2} = \frac{2x^2+x^2+y^2}{2x^2+2xy+2y^2+x^2+y^2}$$

$$\ge \frac{2x^2+2xy}{2x^2+2xy+2y^2+2xy} = \frac{2x(x+y)}{2(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}.$$

Do đó $\dfrac{3x^2+y^2}{3x^2+2xy+3y^2} \ge \dfrac{x}{x+y}$.

Nhân hai vế của BĐT trên với $x$ ta được

$$\frac{3x^3+xy^2}{3x^2+2xy+3y^2} \ge \frac{x^2}{x+y}. \qquad (1)$$

Đẳng thức của (1) xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Tương tự ta có

$$\frac{3y^3+yz^2}{3y^2+2yz+3z^2} \ge \frac{y^2}{y+z}. \qquad (2)$$

$$\frac{3z^3+zx^2}{3z^2+2zx+3x^2} \ge \frac{z^2}{z+x}. \qquad (3)$$

Cộng vế với vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\frac{3x^3+xy^2}{3x^2+2xy+3y^2} + \frac{3y^3+yz^2}{3y^2+2yz+3z^2} + \frac{3z^3+zx^2}{3z^2+2zx+3x^2} \ge P \qquad (4)$$

với $P = \dfrac{x^2}{x+y} + \dfrac{y^2}{y+z} + \dfrac{z^2}{z+x}$.

Xét $Q = \dfrac{y^2}{x+y} + \dfrac{z^2}{y+z} + \dfrac{x^2}{z+x}$

Ta có:

$$P - Q = \frac{x^2-y^2}{x+y} + \frac{y^2-z^2}{y+z} + \frac{z^2-x^2}{z+x}$$

$$= x - y + y - z + z - x = 0.$$

$$P + Q = \frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x}.$$

Suy ra

$$P = Q = \frac{x^2+y^2}{2x+2y} + \frac{y^2+z^2}{2y+2z} + \frac{z^2+x^2}{2z+2x} \qquad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra

$$\frac{3x^3+xy^2}{3x^2+2xy+3y^2}+\frac{3y^3+yz^2}{3y^2+2yz+3z^2}+\frac{3z^3+zx^2}{3z^2+2zx+3x^2}$$
$$\geq \frac{x^2+y^2}{2x+2y}+\frac{y^2+z^2}{2y+2z}+\frac{z^2+x^2}{2z+2x}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

**Thí dụ 2.** *Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a(2+3bc)}{2+a^2+2bc}}+\sqrt{\frac{b(2+3ca)}{2+b^2+2ca}}+\sqrt{\frac{c(2+3ab)}{2+c^2+2ab}}$$
$$\leq \sqrt{3(a+b+c)}. \quad (1)$$

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT Bunyakovsky dạng

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\leq\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}$$

ta được:

$$\text{VT}(1)=\sqrt{a}.\sqrt{\frac{2+3bc}{2+a^2+2bc}}+\sqrt{b}.\sqrt{\frac{2+3ca}{2+b^2+2ca}}$$
$$+\sqrt{c}.\sqrt{\frac{2+3ab}{2+c^2+2ab}}\leq\sqrt{(a+b+c).H} \quad (2)$$

với $H=\frac{2+3bc}{2+a^2+2bc}+\frac{2+3ca}{2+b^2+2ca}+\frac{2+3ab}{2+c^2+2ab}$.

Ta có $\frac{2+3bc}{2+a^2+2bc}=\frac{3}{2}.\frac{4+6bc}{6+3a^2+6bc}$.

Do $(b-c)^2\geq 0\Rightarrow 6bc\leq 3(b^2+c^2)$. Lại có $4<6+3a^2$.

Áp dụng BĐT(*) với $t=4; m=6+3a^2$ và $g=6bc; h=3(b^2+c^2)$. Ta được

$$\frac{4+6bc}{6+3a^2+6bc}\leq\frac{4+3b^2+3c^2}{6+3a^2+3b^2+3c^2}$$
$$\Rightarrow\frac{2+3bc}{2+a^2+2bc}\leq\frac{4+3b^2+3c^2}{4+2a^2+2b^2+2c^2} \quad (3)$$

Tương tự

$$\frac{2+3ca}{2+b^2+2ca}\leq\frac{4+3c^2+3a^2}{4+2a^2+2b^2+2c^2} \quad (4)$$
$$\frac{2+3ab}{2+c^2+2ab}\leq\frac{4+3a^2+3b^2}{4+2a^2+2b^2+2c^2} \quad (5)$$

Cộng vế với vế (3), (4), (5) ta được

$$H\leq\frac{12+6a^2+6b^2+6c^2}{4+2a^2+2b^2+2c^2}=3 \quad (6)$$

Từ (2) và (6) suy ra $\text{VT}(1)\leq\sqrt{3(a+b+c)}$.

**Ứng dụng 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất**

**Thí dụ 3.** *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $0\leq a,b,c\leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{5+a}{7+b+c}+\frac{5+b}{7+c+a}+\frac{5+c}{7+a+c}.$$

***Lời giải.*** Áp dụng BĐT(*)

- Với $t_1=4+a<6+b+c=m_1$; $g_1=a\leq 1=h_1$

ta được: $\frac{4+a+a}{6+b+c+a}\leq\frac{4+a+1}{6+b+c+1}$ (1)

- Với $t_2=5+a<7+b+c=m_2$; $g_2=0\leq a=h_2$

ta được: $\frac{5+a+0}{7+b+c+0}\leq\frac{5+a+a}{7+b+c+a}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{4+2a}{6+a+b+c}\leq\frac{5+a}{7+b+c}\leq\frac{5+2a}{7+a+b+c} \quad (3)$$

Tương tự

$$\frac{4+2b}{6+a+b+c}\leq\frac{5+b}{7+c+a}\leq\frac{5+2b}{7+a+b+c} \quad (4)$$
$$\frac{4+2c}{6+a+b+c}\leq\frac{5+c}{7+a+b}\leq\frac{5+2c}{7+a+b+c} \quad (5)$$

Cộng vế với vế (3), (4), (5) ta được:

$$2\leq P\leq\frac{15+2(a+b+c)}{7+a+b+c}$$

Do $a,b,c\geq 0$ nên có: $a+b+c\geq 0$ suy ra

$$\frac{15+2(a+b+c)}{7+a+b+c}=2+\frac{1}{7+a+b+c}\leq 2+\frac{1}{7}.$$

Vậy $\max P=\frac{15}{7}\Leftrightarrow a=b=c=0$;

$\min P=2\Leftrightarrow a=b=c=1$.

**Ứng dụng 4. So sánh các số**

**Thí dụ 4.** *So sánh 2 số $\frac{6}{10^6}$ và*

$$L=\frac{2^2+1}{2^2+3.2+4}.\frac{3^2+1}{3^2+3.3+4}\cdots\frac{98^2+1}{98^2+3.98+4}.$$

***Lời giải.***

Với $k\geq 2$ thì $t=k^2-1<k^2+3k+2=m$. Áp dụng BĐT (*) với $g=0<2=h$ ta được:

$$\frac{k^2+1}{k^2+3.k+4}=\frac{k^2-1+2}{k^2+3.k+2+2}$$

$$>\frac{k^2-1+0}{k^2+3.k+2+0}=\frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k-1}{k+2} \quad (1)$$

Thay $k$ lần lượt bằng 2, 3,.., 98 vào (1) rồi nhân vế với vế các BĐT đó lại được

$$L>\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{97}{100}=\frac{1.2.3}{98.99.100}>\frac{6}{10^6}.$$

Ngoài ra sử dụng BĐT(*) với

$$t=k^2<k^2+3k+3=m \text{ và } g=1<k=h.$$

ta có $\dfrac{k^2+1}{k^2+3.k+4}=\dfrac{k^2+1}{k^2+3.k+3+1}$

$$<\frac{k^2+k}{k^2+3.k+3+k}=\frac{k}{k+3}.$$

Suy ra

$$L<\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}\cdots\frac{98}{101}=\frac{2.3.4}{99.100.101}=\frac{2}{83325}.$$

**Ứng dụng 5. Giải phương trình, hệ phương trình**

**Thí dụ 5.** *Giải phương trình*

$$\frac{x^2+x+\frac{4}{x^2}}{3x^2+4x+4+\frac{4}{x^2}}+\frac{3x^2+x-8+\frac{8}{x^2}}{4x^2+4x+\frac{8}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

***Lời giải.*** ĐK: $x\neq 0$. PT đã cho tương đương với:

$$\frac{x+4+\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}{2x^2+4x+8+\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}+\frac{x^2+x+2\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}{2x^2+4x+8+2\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}=\frac{1}{2} \quad (1)$$

Ta có $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$

$$\Rightarrow t_1=x+4<2x^2+4x+8=m_1.$$

Mà $h_1=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2\geq 0=g_1$

Tương tự $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$

$$\Rightarrow t_2=x^2+x<2x^2+4x+8=m_2.$$

Lại có $h_2=2\left(x-\frac{2}{x}\right)^2\geq 0=g_2$.

Áp dụng BĐT(*) ta có:

$$\text{VT}(1)\geq\frac{x+4}{2x^2+4x+8}+\frac{x^2+x}{2x^2+4x+8}=\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}h_1=g_1\\h_2=g_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=0\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{2}$.

**Thí dụ 6.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ \left(\dfrac{2+4yz}{3+4yz-2x^2+x^4}\right)^2+\left(\dfrac{1-8x^4z^2+16z^4}{1+8x^4z^2+16z^4}\right)^2=1\end{cases}.$$

***Lời giải.*** Dễ thấy $z=0$ không thỏa mãn hệ PT đã cho. Xét $z\neq 0$ và do $x^2+y^2+z^2=1$ nên PT thứ hai của hệ PT đã cho trở thành:

$$\left(\frac{2x^2+2(y+z)^2}{1+x^4+2(y+z)^2}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{8z^2}+2z^2-x^4}{\frac{1}{8z^2}+2z^2+x^4}\right)^2=1 \quad (1)$$

Do $(x^2-1)^2\geq 0\Rightarrow t_1=2x^2\leq 1+x^4=m_1$.

Mà $h_1=2(y+z)^2\geq 0=g_1$. Áp dụng BĐT(*) được: $\dfrac{2x^2+2(y+z)^2}{1+x^4+2(y+z)^2}\geq\dfrac{2x^2}{1+x^4}\geq 0.$ (2)

Do $x^4\geq 0$ nên $t_2=-x^4\leq x^4=m_2$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$h_2=\frac{1}{8z^2}+2z^2\geq 2\sqrt{\frac{1}{8z^2}.2z^2}=1=g_2.$$

Áp dụng BĐT(*) được:

$$\frac{\frac{1}{8z^2}+2z^2-x^4}{\frac{1}{8z^2}+2z^2+x^4}\geq\frac{1-x^4}{1+x^4}. \quad (3)$$

Do $x^2 = 1 - y^2 - z^2 \le 1 \Rightarrow x^4 \le 1$. Vì thế $\frac{1-x^4}{1+x^4} \ge 0$.

Từ (2) và (3) suy ra

$$VT(1) \ge \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2 + \left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^2 = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 = 1 + x^4 \text{ hoặc } 2(y+z)^2 = 0 \cdot \quad \text{(I)} \\ -x^4 = x^4 \text{ hoặc } \frac{1}{8z^2} = 2z^2 \end{cases}$$

Hệ PT(I) có 6 nghiệm $(x; y; z)$ là:

$$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right); \left(0; \frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right);$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right); \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

và đó cũng là tất cả các nghiệm của hệ PT đã cho.

***Chú ý.*** Nếu $t \ge m$; $g \le h$ và $0 < (m+g)(m+h)$ thì ta có $\frac{t+g}{m+g} \ge \frac{t+h}{m+h}$. Các ứng dụng của bất đẳng thức này cũng tương tự BĐT(*).

## BÀI TẬP

**Bài 1.** Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{x^2(1-yz)}{(y-z)^2 + \sqrt{1+3x^2}} + \frac{y^2(1-zx)}{(z-x)^2 + \sqrt{1+3y^2}} + \frac{z^2(1-xy)}{(x-y)^2 + \sqrt{1+3z^2}}.$$

**Bài 2.** Cho $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh

$$\frac{x^5 + yz}{x^3 + y + z} + \frac{y^5 + zx}{y^3 + z + x} + \frac{z^5 + xy}{z^3 + x + y} \le 1 + xy + yz + zx.$$

**Bài 3.** Cho biểu thức

$$P = \frac{2.1+1}{1^3 + 1^2 + 1} + \frac{2.2+1}{2^3 + 2^2 + 1} + \ldots + \frac{2.n+1}{n^3 + n^2 + 1}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{2n}{n+1} \le P < \frac{3n}{n+1}$.

**Bài 4.** So sánh hai số $\frac{1}{2}$ và

$$\frac{1}{2^3 - 2 - 1} + \frac{1}{3^3 - 3 - 1} + \ldots + \frac{1}{99^3 - 99 - 1}.$$

**Bài 5.** Giải phương trình

a) $\frac{x^2 + 6 + 14\sqrt{x-1}}{x^2 + x + 7 + 14\sqrt{x-1}} = \frac{2x^2 + 2x + 4}{x^2 + 7x}$.

b) $\frac{2x^2 + x + 1 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{3x^2 - x + 5 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} + \frac{x^2 + 4 + \sqrt{8x^2 + 8x + 4}}{3x^2 + 5 + \sqrt{8x^2 + 8x + 4}} = 1.$

**Bài 6.** Tìm các số thực dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ \frac{x + (y-8z)^2}{x + y + (y-8z)^2} + \frac{y^2 z + (z-x)^2}{1 + y^2 z + (z-x)^2} = 1 \end{cases}.$$

**Bài 7.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \frac{b^2 + c^2 + 2b}{(b+1)^2 + (c+1)^2} + \frac{c^2 + a^2 + 2c}{(c+1)^2 + (a+1)^2}.$$

**Bài 8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 2 \\ \frac{1 + x^4}{7 + \sqrt{2x^8 + 2y^8}} + \frac{1 + y^4}{7 + \sqrt{2x^8 + 2y^8}} = \frac{4 + z^4}{9} \end{cases}.$$

*Đính chính*: Trên Tạp chí số 493, T7.2018, ở trang 11, cột trái:

dòng 14 đã viết: $p \ge 1$, cần sửa thành $p = 1$;

dòng 17 đã viết: $x + y + z \ge 1$, cần sửa thành $x + y + z = 1$ thì bài toán 5 mới đúng.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

# SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN

**NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN**

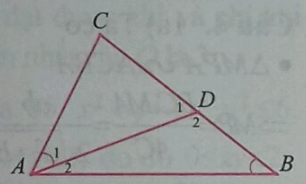
*(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)*

Có nhiều con đường để tạo ra một bài toán mới. Khi gặp một bài toán hay, nhiều bạn làm toán chắc cũng thắc mắc như tôi: Tại sao họ lại nghĩ ra được bài toán đó nhỉ? Ở bài viết này tôi xin nêu một cách (con đường) đề xuất các bài toán mới từ một bài toán đơn giản. Ta hãy bắt đầu từ bài toán sau:

**BÀI TOÁN MỞ ĐẦU.** *Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{CAD} = \widehat{B}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD theo các cạnh của tam giác ABC, với quy ước BC = a, AC = b, AB = c.*

***Lời giải.*** Ta có $\Delta CAD \backsim \Delta CBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} = \frac{AD}{AB}$$




$$\Rightarrow AD = \frac{CA.AB}{CB} = \frac{bc}{a} \quad (1)$$

$$\Rightarrow CD = \frac{CA^2}{CB} = \frac{b^2}{a} \quad (2) \quad \text{và} \quad BD = a - \frac{b^2}{a}. \quad (3)$$

Bây giờ ta sẽ đề xuất các bài toán mới dựa vào tam giác *ADB* nếu biết quan hệ về các cạnh của tam giác này.

1) Cho tam giác *ADB* cân tại *D* $\Leftrightarrow \widehat{A_2} = \widehat{B}$ $\Leftrightarrow \widehat{A} = 2\widehat{B}$. Khi đó từ các kết quả (1), (2) và (3) ta có:

$$DA = DB \Leftrightarrow \frac{bc}{a} = a - \frac{b^2}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc.$$

Từ đó ta có bài toán quen thuộc sau:

**BÀI TOÁN 1.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có: $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.*

2) Cho tam giác *ADB* cân tại *B*

$$\Leftrightarrow \widehat{A_2} = 90^0 - \frac{\widehat{B}}{2} \Leftrightarrow \widehat{A_2} + \widehat{A_1} = 90^0 - \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{B}.$$

Hay $\widehat{A} = 90^0 + \frac{\widehat{B}}{2}$. Khi đó:

$$BD = BA \Leftrightarrow a - \frac{b^2}{a} = c \Leftrightarrow a^2 = b^2 + ac.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

**BÀI TOÁN 2.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có: $\widehat{A} = 90^0 + \frac{\widehat{B}}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + ac$.*

(Chú ý rằng: $\widehat{A} = 90^0 + \frac{\widehat{B}}{2} \Leftrightarrow 3\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^0$).

Để ý rằng tam giác *ADB* không thể cân tại *A*, vì khi đó $\widehat{D_2} = \widehat{B} = \widehat{A_1}$ là điều không thể có được!

3) Bây giờ cho tam giác *ADB* vuông tại *A*, nghĩa là $\widehat{A_2} = 90^0$ hay $\widehat{A} = 90^0 + \widehat{B}$. Khi đó

$$BD^2 = BA^2 + AD^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2 = c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

Từ đó ta có bài toán sau:

**BÀI TOÁN 3.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có:*

$$\widehat{A} = 90^0 + \widehat{B} \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

4) Cho tam giác *ADB* vuông tại *D*. Khi đó $\widehat{A} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{A_2} = 90^0$, ta gặp lại định lý Pythagore quen thuộc. Để ý rằng tam giác *ADB* không thể vuông tại *B*, vì khi đó góc *A* sẽ là góc tù!

5) Bây giờ từ kết quả bài toán 1, cho tam giác *ADB* có $\widehat{A_2} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{A} = 3\widehat{B}$, khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$BD^2 = AD^2 + AD.AB \Leftrightarrow \left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{bc^2}{a}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 = bc^2(b + a) \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) = bc^2.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

**BÀI TOÁN 4.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có: $\widehat{A} = 3\widehat{B} \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) = bc^2$.*

6) Cho tam giác *ADB* có $\widehat{B} = 2\widehat{A_2} \Leftrightarrow \widehat{A} = \frac{3}{2}\widehat{B}$.

*(Xem tiếp trang 9)*

# *Hướng dẫn giải* ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2018-2019

## VÒNG 1

*Đính chính.* Trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Hà Nội (số 493, trang 8):

- Câu 1 (vòng 1): đã viết: $P=....\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{...}$,

xin được sửa là: $P=....\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{...}$.

- Câu 1 (vòng 2): đã viết

$$P=\sqrt{x^2+y^2-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+2+xy},$$

xin được sửa là:

$$P=\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2(x^2+1)(y^2+1)}+2+xy}.$$

Thành thật xin lỗi bạn đọc. TH&TT.

**Câu 1.** 1) Ta có

$$P=\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\left[(x+1)-\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+(x-1)\right]}\times$$
$$\times\frac{2x\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(2x-\sqrt{x+1}\sqrt{x-1})}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{x+1}(2x-\sqrt{x+1}\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$$
$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-(x-1)}=\sqrt{x+1}.$$

2) $P=x-1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow x^2-3x=0$ (do $x>1$)

$\Leftrightarrow x=0$ (loại) hoặc $x=3$.

**Câu 2.** Đặt $a=5000$. Khi đó theo giả thiết:

• Số sản phẩm sản xuất được trong năm 2016 là

$$a-\frac{ax}{100}=a\left(1-\frac{x}{100}\right)=b.$$

• Số sản phẩm sản xuất được trong năm 2017 là

$$b-\frac{bx}{100}=a\left(1-\frac{x}{100}\right)^2.$$

Theo giả thiết ta có phương trình

$$a\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=\frac{49a}{100}\Leftrightarrow\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=\frac{49}{100}.$$

$\Leftrightarrow x=170$ (loại) hoặc $x=30$ (thỏa mãn).

**Câu 3.** 1) *Cách* 1. Ta có $x_0^3-x_0-1=0$ (1)

Nếu $x_0<0\Rightarrow x_0^3\le 0\Rightarrow x_0=x_0^3-1\le -1\Rightarrow x_0^2\ge 1$

$\Rightarrow 0\ge x_0(x_0^2-1)=1$ (vô lý). Vậy $x_0>0$.

*Cách* 2. Ta có $x_0^3-x_0-1=0\Leftrightarrow x_0^3=x_0+1$.

$\Leftrightarrow x_0^3+x_0^2+x_0=(x_0+1)^2$

$\Leftrightarrow x_0(x_0^2+x_0+1)=(x_0+1)^2$. (2)

Từ (2), chú ý rằng $x_0^2+x_0+1>0$, suy ra $x_0>0$.

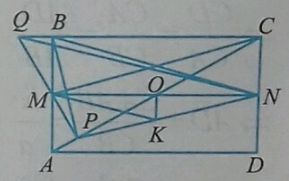
2) Từ giả thiết, ta có

$2x_0^2+3x_0+2=(x_0+1)^2+x_0^2+x_0^3=x_0^6+x_0^2+x_0^3$

$=x_0^2(x_0^4+x_0+1)=x_0^2(x_0^4+x_0^3)=x_0^5(x_0+1)=x_0^8$.

Vậy $M=\dfrac{x_0^2-1}{x_0^3}.x_0^4=x_0^3-x_0=1$.

**Câu 4.** 1a) Ta có




• $\Delta MPA\backsim\Delta CBA$

$\Rightarrow MP=\dfrac{BC.MA}{AC}=\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

• $\Delta MPA\backsim\Delta MBQ$

$\Rightarrow MQ=\dfrac{MA.MB}{MP}=\dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$.

Suy ra $PQ=MP+MQ=\dfrac{2a^2b+b^3}{2a\sqrt{a^2+b^2}}$.

*Nhận xét.* Ta có $\Delta PQC\backsim\Delta BAC$, suy ra $PQ=\dfrac{BA}{CA}.CQ$, từ đó ta cũng tính được $PQ$.

b) Dễ thấy các điểm $B$, $P$, $N$, $M$, $C$ cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $BMNC$, suy ra $\widehat{BPN}=90^0$. Mà $\widehat{BNP}=\widehat{BCP}$ nên $\Delta NPB$ đồng dạng $\Delta CBA$, suy ra $\dfrac{BP}{AB}=\dfrac{PN}{BC}\Leftrightarrow a.BP=b.PN$.

2) Gọi $O=AC\cap MN$. Ta có $O$ là trung điểm của $AC$ và $MN$. Kẻ $OK\,//\,CD$ ($K$ thuộc $PN$), suy ra $OK\perp MN$, nên $\Delta MKN$ cân tại $K$, suy ra $\widehat{MNK}=\widehat{NMK}$. (1)

Lại có, do $OM\,//\,BC$ và $OK\,//\,CD$ nên

$\frac{PM}{MQ}=\frac{PO}{OC}=\frac{PK}{KN}\Rightarrow MK\,//\,QN\Rightarrow \widehat{NMK}=\widehat{QNM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MNP}=\widehat{MNK}=\widehat{MNQ}$.

**Câu 5.** Nếu với mọi $i\in\{1;\,2;\,...;\,9\}$, $x_i\neq 0$, $x_i\neq 1$, và $x_i\neq -1$ thì $(1+x_i)(1-x_i)=1-x_i^2<0$ với mọi $i\in\{1;2;...;9\}$. Suy ra

$$0\le x^2=(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_9).$$
$$.(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_9)<0.$$

(vô lý). Suy ra tồn tại $i$ sao cho $x_i=0$ hoặc $x_i=1$ hoặc $x_i=-1$. Khi đó $P=0$.

## VÒNG 2

**Câu 1.** Đặt $S=x+y$, $T=xy$. Ta có

$S+T+1=2\Rightarrow S+T=1$, $x^2+y^2=S^2-2T$,

$(x^2+1)(y^2+1)=x^2y^2+x^2+y^2+1=T^2+S^2-2T+1$

$=S^2+(T-1)^2$.

Từ giả thiết ta có $S+T=1$, suy ra

$$(x^2+1)(y^2+1)=2S^2.\text{ Do đó}$$
$$P=\sqrt{S^2-2T-2S+2}+T=S+T=1.$$

**Câu 2.** Ta có

$$Q^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$=6+(2xy-x^2y^2)+(2yz-y^2z^2)+(2zx-z^2x^2)$$
$$=9-(xy-1)^2-(yz-1)^2-(zx-1)^2\le 9.$$

Do đó $Q\le 3$. Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Vậy giá trị lớn nhất của $Q$ là 3.

Mặt khác, từ giả thiết ta có $x^2+y^2+x^2y^2\le 6$. Suy ra $x^2y^2+2xy\le 6\Rightarrow (xy+1)^2\le 7$, do đó $0\le xy<2$. Tương tự, $0\le yz<2$, $0\le zx<2$. Suy ra

$$2xy-x^2y^2\ge 0,\ 2yz-y^2z^2\ge 0,\ 2zx-z^2x^2\ge 0.$$

Do đó $Q^2\ge 6$, hay $Q\ge\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt{6}, y=z=0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q$ là $\min Q=\sqrt{6}$.

**Câu 3.** 1) Giả sử $\frac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}\in\mathbb{Z}$

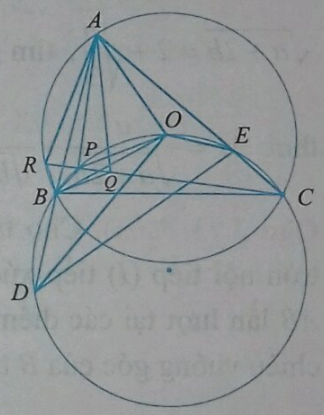
$$\Rightarrow\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\frac{2ab}{a^2+b^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2ab\ge a^2+b^2\Rightarrow a=b,\text{ vô lý.}$$

2) Giả sử $A$ và $B$ đồng thời là số chính phương. Suy ra tồn tại $m,n\in\mathbb{N}$ sao cho $A=m^2$ và $B=n^2$. Từ đó $m^2+n^2=4ab\,\vdots\,4$. Suy ra $m$, $n$ đồng thời là các số chẵn. Vậy $a$, $b$ phải cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu $a$, $b$ cùng lẻ thì $a^2-b^2\,\vdots\,4$, và do đó $m^2=b^2-a^2+2ab$ là số chẵn không chia hết cho 4, vô lý.
- Nếu $a$, $b$ cùng chẵn, đặt $a=2c$, $b=2d$. Khi đó $(c+d)^2-2c^2$ và $(c+d)^2-2d^2$ đồng thời là số chính phương. Suy ra $c$, $d$ cùng chẵn. Tiếp tục quá trình này, suy ra $a$ và $b$ cùng chia hết cho $2^k$ với $k\in\mathbb{N}$ tùy ý, mâu thuẫn. Vậy ít nhất một trong hai số $A$, $B$ không phải là số chính phương.

**Câu 4.** a) Ta có




$\widehat{PQB}=\widehat{OPC}=\widehat{OBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{OEC}$). Mặt khác, $O$ là trung điểm cung $BC$ nên

$$\widehat{OBC}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}$$
$$=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BPQ}.$$

Vậy $\widehat{PQB}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BPQ}$. Suy ra $\widehat{PBQ}=\widehat{PQB}\Rightarrow$ $\Delta PBQ$ cân tại $P$. Suy ra $PB=PQ$.

b) Tứ giác $OECB$ nội tiếp nên $\widehat{AEO}=\widehat{OBC}$. Mặt khác $\widehat{OBC}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}=90^0-\widehat{A}$. Suy ra $\widehat{AEO}+\widehat{BAC}=90^0$ hay $EO\perp AB$. Tương tự $DO\perp AC$. Suy ra $O$ là trực tâm tam giác $ADE$.

c) Kéo dài $PC$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai $R$. Do $\widehat{BRC}=\widehat{BAC}=90^0-\widehat{BQR}$, suy ra $\Delta BQR$ vuông tại $B$. Đặc biệt, $P$ là trung điểm $QR$. Mặt khác $AP\perp PC\Rightarrow\Delta AQR$ cân tại $A$. Lại có

$$\widehat{AQP}=\widehat{ARQ}=\widehat{ABC}\Rightarrow\widehat{PAQ}=90^0-\widehat{ABC}=\widehat{OAC}.$$

(Xem tiếp trang 9)

# ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2018 – 2019

## VÒNG 1

*(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)*

**Câu 1** *(3,5 điểm)*. 1) Giải phương trình

$$x^2 - x + 2\sqrt{x^3+1} = 2\sqrt{x+1}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + y^2 = 1 + y \\ x^2 + 2y^2 + 2xy = 4 + x \end{cases}.$$

**Câu 2** *(2,5 điểm)*. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(x+y)(3x+2y)^2 = 2x + y - 1.$$

2) Với $a$, $b$ là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a+2b} = 2 + \sqrt{\frac{b}{3}}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}}$.

**Câu 3** *(3 điểm)*. Cho tam giác $ABC$ có đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc với các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt tại các điểm $D$, $E$, $F$. Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên đường thẳng $DE$, $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $DF$.

1) Chứng minh rằng hai tam giác $BKM$ và $DEF$ đồng dạng.

2) Gọi $L$ là hình chiếu vuông góc của $C$ trên đường thẳng $DF$, $N$ là trung điểm của đoạn thẳng $DE$. Chứng minh rằng hai đường thẳng $MK$ và $NL$ song song.

3) Gọi $J$, $X$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $KL$, $ID$. Chứng minh rằng đường thẳng $JX$ vuông góc với đường thẳng $EF$.

**Câu 4** *(1 điểm)*. Trên mặt phẳng cho hai điểm $P$, $Q$ phân biệt. Xét 10 đường thẳng nằm trong mặt phẳng trên thỏa mãn các tính chất sau:

1) Không có hai đường thẳng nào song song hoặc trùng nhau.

2) Mỗi đường thẳng đi qua $P$ hoặc $Q$, không có đường thẳng nào đi qua cả $P$ và $Q$.

Hỏi 10 đường thẳng trên có thể chia mặt phẳng thành tối đa bao nhiêu miền? Hãy giải thích.

## VÒNG 2

*(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)*

**Câu 1** *(3,5 điểm)*. 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 + 7(x+1)(y+1) = 31 \end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$9 + 3\sqrt{x(3-2x)} = 7\sqrt{x} + 5\sqrt{3-2x}.$$

**Câu 2** *(2,5 điểm)*. 1) Cho $x$, $y$ là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

2) Cho $a_1, a_2, ...., a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn

$$1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_{50} \le 50 \text{ và } a_1 + a_2 + ... + a_{50} = 100.$$

Chứng minh rằng từ các số đã cho ta có thể chọn được một vài số có tổng bằng 50.

**Câu 3** *(3 điểm)*. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn $(O)$ có $CD$ song song với $BE$. Hai đường chéo $CE$ và $BD$ cắt nhau tại $P$. Điểm $M$ thuộc đoạn thẳng $BE$ sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{PAE}$. Điểm $K$ thuộc đường thẳng $AC$ sao cho $MK$ song song với $AD$, điểm $L$ thuộc đường thẳng $AD$ sao cho $ML$ song song với $AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $KBC$ lần lượt cắt $BD$, $CE$ tại

$Q$, $S$ ($Q$ khác $B$, $S$ khác $C$).

1) Chứng minh rằng ba điểm $K$, $M$, $Q$ thẳng hàng.

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác $LDE$ lần lượt cắt $BD$, $CE$ tại $T$, $R$ ($T$ khác $D$, $R$ khác $E$). Chứng minh rằng năm điểm $M$, $S$, $Q$, $R$, $T$ cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQR$ tiếp xúc với đường tròn $(O)$.

**Câu 4** (1*điểm*). Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le 2.$$

**NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG**

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*) ***giới thiệu***

---

***HƯỚNG DẪN GIẢI ...***

(*Tiếp theo trang 7*)

Vậy $\widehat{PAO}=\widehat{QAC}$.

**Câu 5.** 1) Vì 45 = 1 + 2 + ... + 9 nên ta có thể xây dựng tình huống chia 45 người vào 9 nhóm: Nhóm 1 có 1 người, nhóm 2 có 2 người, ..., nhóm 9 có 9 người thỏa mãn các điều kiện:

• Những người trong cùng một nhóm thì đôi một không quen nhau.

• Một người bất kì thì quen với tất cả những người khác nhóm với người đó.

Như thế, số cặp quen nhau trong cuộc họp là

$$\frac{45.44}{2}-\left(\frac{2.1}{2}+\frac{3.2}{2}+...+\frac{9.8}{2}\right)=870.$$

2) Giả sử có $a_0$ người mà mỗi người quen với đúng 0 người khác; có $a_1$ người mà mỗi người quen với đúng 1 người khác; ... ; có $a_{44}$ người mà mỗi người quen với đúng 44 người khác.

Dễ thấy $a_0 + a_1 + ... + a_{44} \le 45$ và $a_k \le 45 - k$.

Ta có

$$S=\frac{1}{2}(0.a_0+1.a_1+...+44.a_{44})=\frac{1}{2}(1.a_1+2.a_2+...+44.a_{44})$$

$$=\frac{1}{2}\left[a_{44}+(a_{44}+a_{43})+...+(a_{44}+a_{43}+...+a_1)\right]$$

$$\le\frac{1}{2}\left[1+(1+2)+...+(1+2+...+9)+...+\underbrace{(45+45+...+45)}_{35\text{ số}}\right]=870.$$

**NGUYỄN THANH HỒNG**

(*GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội*) ***giới thiệu***

***SÁNG TẠO ...***

(*Tiếp theo trang 5*)

Khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$AD^2 = BD^2 + BD.AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2c^2}{a^2}=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^2+\left(a-\frac{b^2}{a}\right)c$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2=(a^2-b^2)^2+ac(a^2-b^2)$$

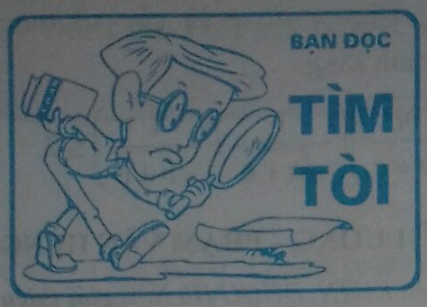
$$\Leftrightarrow b^2c^2=(a^2-b^2)(a^2-b^2+ac).$$

Từ đó ta có bài toán sau:

**BÀI TOÁN 5.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có:*

$$\widehat{A}=\frac{3}{2}\widehat{B}\Leftrightarrow b^2c^2=(a^2-b^2)(a^2-b^2+ac).$$

Tương tự như vậy, dựa vào kết quả bài toán 4, ta cho tam giác $ADB$ có $\widehat{A_2}=3\widehat{B}$ hoặc $\widehat{B}=3\widehat{A_2}$, ... ta lại nhận được các bài toán mới với các kết quả phức tạp hơn. Cứ dựa vào kết quả đã có đối với tam giác $ABC$, đem áp dụng vào tam giác $ADB$ ta lại có một bài toán mới. Đây là một cách tạo ra các bài toán mới từ một bài toán đã biết, rất mong các bạn tham khảo, vận dụng. Chúc các bạn thành công!




# TỔNG QUÁT MỘT BÀI TOÁN TRONG KỲ THI OLYMPIC HÌNH HỌC SHARYGIN 2017

**TRẦN QUANG HÙNG**
*(Hà Nội)*

Trong Kỳ thi Olympic Hình học Sharygin năm 2017 vòng cuối cùng, tác giả *Trần Quang Hùng* có đề xuất bài toán như sau:

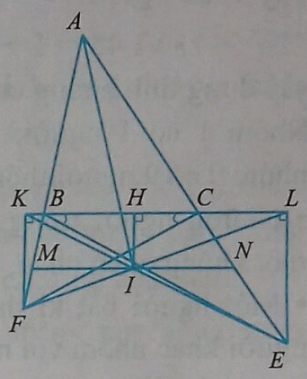
**Bài toán 1** (Bài toán 8.8 Olympic Hình học Sharygin 2017 vòng cuối cùng). *Cho hình vuông ABCD, và P là một điểm nằm trên cung nhỏ CD của đường tròn ngoại tiếp hình vuông. Các đường thẳng PA, PB cắt các đường chéo BD, AC lần lượt tại các điểm K, L. Các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của K, L trên CD, và Q là giao điểm của KN và ML. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi đoạn thẳng AB.*

Đây là bài toán cuối của ngày thi thứ 2 dành cho học sinh lớp 8. Được xem là bài thi khó nhất trong ngày. Bài toán được đề nghị một lời giải rất ngắn gọn và đẹp bởi nhà hình học người Nga *Alexey Zaslavsky*. Ông là một trong những người sáng lập ra cuộc thi *Olympic Hình học Sharygin*. Dựa trên bổ đề được đề xuất trong lời giải. Tác giả *Trần Quang Hùng* đã đề xuất một bài toán tổng quát hơn trên lục giác nội tiếp cùng với bổ đề tổng quát hơn như sau:

**Bài toán 2** (Mở rộng). *Cho lục giác ABCDEF nội tiếp có $AB = CD = EF$ và $BC = DE$. P là một điểm di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp lục giác. PC, PD lần lượt cắt AE, FB tại M, N; K, L theo thứ tự là hình chiếu của M, N lên cạnh AF; ML cắt NK tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi đoạn thẳng CD.*

Chúng ta cũng đưa ra một bổ đề tổng quát hơn cho lời giải, ý tưởng chính trong bổ đề này vẫn bắt nguồn từ bổ đề của *Alexey Zaslavsky*.

**Bổ đề.** *Cho tam giác ABC có các điểm E, F lần lượt nằm trên đường thẳng CA, AB sao cho BE, CF cắt nhau trên đường trung trực của cạnh BC. L, K theo thứ tự là hình chiếu của E, F trên BC. EK cắt FL tại I. Chứng minh rằng đường thẳng AI chia đôi đoạn thẳng BC.*




***Lời giải.*** Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ trên $BC$. Đường thẳng qua $I$ song song với $BC$ cắt $AE$, $AF$ lần lượt tại $N$, $M$. Ta thấy

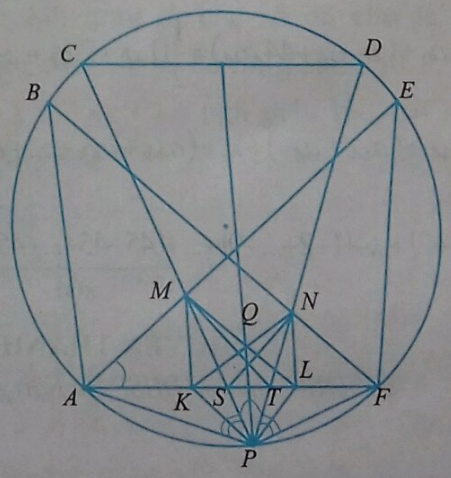
$$\frac{IM}{BL} = \frac{FI}{FL} = \frac{KI}{KE} = \frac{IH}{LE}.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\dfrac{IN}{CK} = \dfrac{IH}{KF}$.

Từ đó chú ý hai tam giác vuông $CKF$ và $BLE$ đồng dạng (g.g) nên

$$\frac{IM}{IN} = \frac{BL}{CK} \cdot \frac{KF}{LE} = \frac{BL}{LE} \cdot \frac{KF}{CK} = 1.$$

Do $I$ là trung điểm của $MN$ nên đường thẳng $AI$ chia đôi đoạn thẳng $BC$. Bổ đề được chứng minh.



***Lời giải bài toán 2.*** Giả sử $PC$, $PD$ cắt $AF$ lần lượt tại $S$, $T$. Do $CD = EF$ nên $\widehat{CPD} = \widehat{EAF}$, suy tứ giác $PTMA$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $PSNF$ nội tiếp. Do đó

$$\widehat{MTS} = \widehat{MPA} = \widehat{NPF} = \widehat{NSF},$$

Ta suy ra $SN$, $TM$ cắt nhau trên trung trực của $ST$. Áp dụng bổ đề trên cho tam giác $PST$ dễ suy ra đường thẳng $PQ$ chia đôi đoạn thẳng $ST$, hay $PQ$ chia đôi đoạn thẳng $CD$. Ta hoàn thành việc chứng minh bài toán 2.

***Nhận xét.*** Việc mở rộng bổ đề và bài toán có một ý nghĩa khá thú vị. Phép chứng minh bổ đề trên chỉ cần sử dụng kiến thức hình học lớp 8. Mặt khác một trường hợp riêng của bài toán mở rộng trên là trường hợp hình thang cân nội tiếp đường tròn với ba cạnh bằng nhau. Đó cũng là một bài toán thú vị. Sau đây là một khai thác mô hình này của bạn *Đỗ Xuân Long*, một học trò của tác giả.

**Bài toán 3** (Phát triển). *Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp có $AB = CD = EF$ và $BC = DE$. $P$ là một điểm di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp lục giác. $PC$, $PD$ lần lượt cắt $AE$, $FB$ tại $M$, $N$; $K$, $L$ theo thứ tự thuộc các cạnh $AB$, $EF$ sao cho $MK \parallel NL \parallel AF$; $PC$, $PD$ lần lượt cắt $AF$ tại $S$, $T$; $KS$ cắt $LT$ tại $Q$. Chứng minh rằng đường thẳng $PQ$ chia đôi đoạn thẳng $CD$.*

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn *Nguyễn Tiến Dũng*, cũng là một học trò của tác giả.

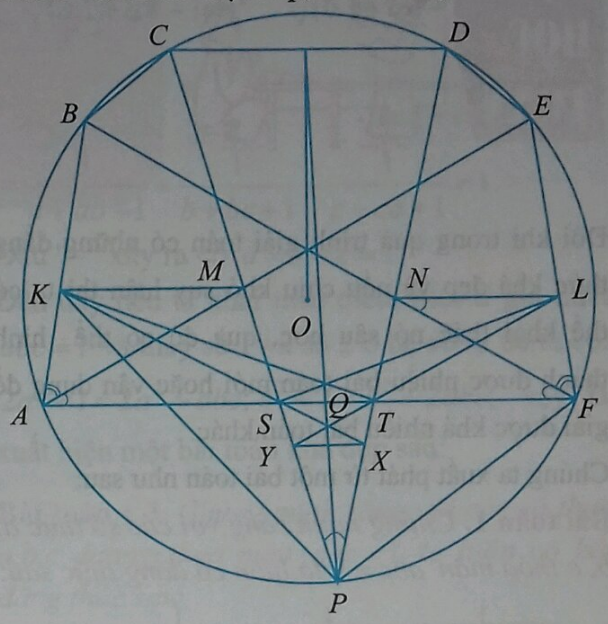
***Lời giải.*** Giả sử $KS$, $LT$ lần lượt cắt $PD$, $PC$ tại $X$, $Y$. Ký hiệu $[ABC]$ là diện tích có hướng của $\Delta ABC$. Dễ thấy

$$\frac{XP}{XT} = \frac{[KSP]}{[KST]} = \frac{[KSP]}{[KSM]} \cdot \frac{[KSM]}{[KST]} = \frac{SP}{SM} \cdot \frac{KM}{ST}.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\frac{YP}{YS} = \frac{TP}{TN} \cdot \frac{LN}{TS}.$$

Chú ý rằng $\Delta AMK \backsim \Delta FNL$. Từ các tứ giác $AMTP$ và $FNSP$ nội tiếp, ta thu được:




$$\frac{TN}{NF} = \frac{ST}{SP} \Rightarrow SP.TN = NF.ST;$$

$$\frac{SM}{MA} = \frac{ST}{TP} \Rightarrow TP.SM = MA.ST.$$

Từ đó

$$\frac{XP}{XT} : \frac{YP}{YS} = \frac{SP.TN}{TP.SM} \cdot \frac{MK}{NL} = \frac{NF}{MA} \cdot \frac{MA}{NF} = 1.$$

Do đó $\frac{XP}{XT} = \frac{YP}{YS}$ nên $XY \parallel ST$ (theo định lý Thales đảo) ta suy ra đường thẳng $PQ$ chia đôi đoạn thẳng $ST$ hay $PQ$ chia đôi đoạn thẳng $CD$.

***Nhận xét.*** Với bài toán tổng quát trên lục giác nội tiếp (Bài toán 3), các bạn hoàn toàn có thể thu được các trường hợp riêng đẹp trên hình thang cân và hình vuông. Trên cấu hình của bài toán trong kỳ thi Olympic Hình học Sharygin năm 2017 về hình vuông và bài tổng quát cho lục giác nội tiếp $ABCD$ thỏa mãn $AB = CD = EF$ và $BC = DE$, vẫn còn nhiều chi tiết có thể khai thác được, các bạn hãy tìm tòi thêm cho mình các bài toán hay.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

# HÌNH THÀNH HỆ THỐNG BÀI TOÁN TỪ MỘT ĐẲNG THỨC

**CAO TIẾN TRUNG**
(*GV THPT Đô Lương 2, Nghệ An*)

Đôi khi trong quá trình giải toán có những đẳng thức khá đẹp và nếu chịu khó suy luận thì ta có thể khai thác nó sâu hơn, qua đó có thể hình thành được nhiều bài toán mới hoặc vận dụng để giải được khá nhiều bài toán khác.

Chúng ta xuất phát từ một bài toán như sau:

**Bài toán 1.** *Chứng minh rằng với các số thực a, b, c thỏa mãn $abc=1$ ta luôn có đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}=1.$$

***Lời giải***. Ta có:

$$\frac{1}{b+bc+1}=\frac{a}{ab+abc+a}=\frac{a}{a+ab+1}$$

$$\frac{1}{c+ca+1}=\frac{ab}{abc+abca+ab}=\frac{ab}{a+ab+1}.$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}$$

$$=\frac{1}{a+ab+1}+\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{a+ab+1}=1.$$

***Nhận xét***. Lần đầu tiên nhìn thấy bài toán này học sinh sẽ cảm thấy có nhiều điểm khá thú vị. Thứ nhất về mặt giả thiết của bài toán rất phổ biến trong phần bất đẳng thức đó là điều kiện $abc=1$ tạm coi như tối giản trong các bài tập bất đẳng thức có điều kiện. Vẻ đẹp của bài toán thu hút đặc biệt ở đẳng thức có vế trái không quá gọn cũng không quá phức tạp và kết quả vế phải lại vô cùng đẹp đẽ và rất bất ngờ ... bằng 1, nếu không đặt bút chắc chẳng mấy ai thấy ngay.

## Hình thành ý tưởng và định hướng triển khai

Một ý tưởng mới có thể vận dụng bài toán này cho một số bài tập liên quan đến giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của bất đẳng thức có điều kiện. Vì điểm mấu chốt cuối cùng của bài toán cực trị là làm sao để từ biểu thức chứa biến đưa về so sánh được với một hằng số mà hằng số này lại bất ngờ xuất hiện sau một biểu thức ít ai nghĩ là có thể gọn đẹp được thế. Với lí do đó chúng ta sẽ xây dựng một số bài toán theo hai hướng. Trong hệ thống bài toán này phần đầu ta phát triển xây dựng theo hướng biến đổi, sáng tạo bài toán mới như hướng 1 còn phần sau là soi lại các kết quả phần trước vào giải một số bài toán thường gặp như hướng 2 đã nói ở trên.

*Hướng* 1. Đi tìm bài toán mới nhờ biến đổi bài toán gốc. Dựa vào điều kiện bài toán (giả thiết) và biểu thức trong kết luận để chế biến tạo bài toán mới

*Hướng* 2. Mở rộng hệ thống bài toán thông qua khai thác ứng dụng bài toán gốc vào giải các bài toán tương tự. Sưu tầm các bài toán, các đề thi có giả thiết hoặc biểu thức cần biến đổi có dạng gần gũi với đẳng thức đó rồi biến đổi để quay về bài toán gốc hoặc sử dụng hướng giải mới như các bài toán của hệ thống đã đề cập trước đó.

## Hướng 1. Đi tìm bài toán mới nhờ biến đổi bài toán gốc

*Phân tích ban đầu*: Có 3 điểm mấu chốt trong đặc điểm bài toán để ta triển khai hướng 1:

- Giả thiết $abc=1$.
- Đẳng thức

$$\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}=1.$$

• Cả giả thiết và kết luận đều là các đẳng thức không đồng bậc nên sẽ không phát triển được bằng phương pháp ngược của chuẩn hóa (là phương pháp đồng bậc hóa) để mở rộng dạng toán sang bất đẳng thức không có điều kiện. Vì thế tất cả các bài toán sau này hầu như chỉ áp dụng cho đẳng thức và bất đẳng thức có điều kiện.

Với giả thiết $abc=1$ trên ta sửa thành bài toán sau:

**Bài toán 1.1.** *Cho $\alpha,\beta,\lambda$ là các số thực thỏa mãn $\alpha+\beta+\lambda=0$ và số thực $x>0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^{\alpha}+x^{\alpha+\beta}+1}+\frac{1}{x^{\beta}+x^{\beta+\lambda}+1}+\frac{1}{x^{\lambda}+x^{\lambda+\alpha}+1}=1.$$

Để giải bài toán này chỉ cần đặt $a=x^{\alpha}; b=x^{\beta}; c=x^{\lambda}$ là ta hoàn toàn đưa về được bài toán 1. Tiếp tục quan sát biểu thức $a+ab+1$ sửa lại thành $a.1+a.b+1.1$ và vận dụng bất đẳng thức Bunyakovsky:

$$(a.1+a.b+1.1)^2\le(a^2+a^2+1^2)(1^2+b^2+1^2)$$
$$=(2a^2+1)(b^2+2)$$

thì ta có được bài toán sau:

**Bài toán 1.2.** *Chứng minh rằng với các số thực $a,b,c$ dương thỏa mãn $abc=1$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{\sqrt{(2a^2+1)(b^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2b^2+1)(c^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2c^2+1)(a^2+2)}}\le 1.$$

***Lời giải.*** Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho biểu thức dưới dấu căn ta có

$$\frac{1}{\sqrt{(2a^2+1)(b^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2b^2+1)(c^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2c^2+1)(a^2+2)}}$$
$$\le\frac{1}{\sqrt{(a.1+a.b+1.1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(b.1+b.c+1.1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(c.1+c.a+1.1)^2}}$$
$$=\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}=1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Đến đây nếu ta khai thác thêm một tí giả thiết $abc=1$ và thay số 1 và số 2 ở hệ số tự do ta có: $2a^2+1=2a^2+abc; b^2+2=b^2+2abc$, vậy là xuất hiện một bài toán khá đẹp sau:

**Bài toán 1.3.** *Chứng minh rằng với các số thực $a,b,c$ dương thỏa mãn $abc=1$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\sqrt{\frac{a}{(2b+ac)(c+2ab)}}+\sqrt{\frac{b}{(2c+ab)(a+2bc)}}+\sqrt{\frac{c}{(2a+bc)(b+2ac)}}\le 1.$$

***Lời giải:*** Biến đổi vế trái ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{(2b+ac)(c+2ab)}}+\sqrt{\frac{b}{(2c+ab)(a+2bc)}}+\sqrt{\frac{c}{(2a+bc)(b+2ac)}}$$
$$=\sqrt{\frac{abc}{(2b^2+abc)(c^2+2abc)}}+\sqrt{\frac{abc}{(2c^2+abc)(a^2+2abc)}}+\sqrt{\frac{abc}{(2a^2+abc)(b^2+2abc)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2b^2+1)(c^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2c^2+1)(a^2+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2a^2+1)(b^2+2)}}.$$

Đến đây việc chứng minh là của bài toán 1.2.

Quay lại bài toán 1.2 với biểu thức $\sqrt{(2a^2+1)(b^2+2)}$ nếu quan sát dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$ thì đây chính là điểm rơi của BĐT Cauchy: $\sqrt{(2a^2+1)(b^2+2)} \le \dfrac{b^2+2a^2+3}{2}$.

Tương tự như vậy cho các biểu thức còn lại, ta có bài toán:

**Bài toán 1.4.** *Chứng minh rằng với các số thực a,b,c dương thỏa mãn $abc=1$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.$$

***Lời giải 1.*** (*Dựa theo hướng suy luận trên*). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}$$
$$\le \frac{1}{2\sqrt{(2b^2+1)(a^2+2)}}+\frac{1}{2\sqrt{(2c^2+1)(b^2+2)}}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(2a^2+1)(c^2+2)}}.$$

Phần còn lại là của bài toán 1.2.

***Lời giải 2.*** (*Áp dụng BĐT Cauchy làm xuất hiện đẳng thức trong bài toán* 1).

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$a^2+2b^2+3=a^2+b^2+b^2+1+2$$
$$\ge 2ab+2b+2=2(b+ab+1);$$
$$b^2+2c^2+3=b^2+c^2+c^2+1+2$$
$$\ge 2bc+2c+2=2(c+bc+1);$$
$$c^2+2a^2+3=c^2+a^2+a^2+1+2$$
$$\ge 2ca+2a+2=2(a+ca+1).$$

Như vậy, ta có:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+ab+1}+\frac{1}{c+cb+1}+\frac{1}{a+ac+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

***Nhận xét.*** Từ bài toán 1.2 sang 1.4 ta đã tạo nên bài toán mới nhờ một tính chất bắc cầu đơn giản $A \le B \le C$ với $A, B, C$ là các biểu thức và khi ta có bài toán $A \le B$ rõ ràng ta có thể thay $C$ vào $B$ sẽ có bài toán mới $A \le C$ và chỉ việc chứng minh bài toán trung gian $C \ge B$ là xong. Chẳng hạn người ta xoay quanh các mối quan hệ thứ tự

$$3\sqrt[3]{(abc)^2} \le ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} \le a^2+b^2+c^2$$

nên khi có giả thiết liên quan biểu thức nhỏ như $abc=k$ thì chỉ cần thay $ab+bc+ca$ hoặc $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ vào vế lớn hơn là tạo ra bài toán khác. Đây là một kĩ thuật mà nhiều người đã ứng dụng để sáng tạo nên những bài toán mới.

Bây giờ ta có thể khai thác giả thiết để chuyển dạng biểu thức ở kết luận bằng cách:

Với $a,b,c>0$ và $abc=1$ ta có thể thay bằng các bộ số $\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}$ hay $\dfrac{1}{\sqrt{a}};\dfrac{1}{\sqrt{b}};\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ hoặc $\dfrac{x}{y};\dfrac{y}{z};\dfrac{z}{x}$ hay các bộ số có tích bằng 1. Chẳng hạn khi chọn bộ $\dfrac{1}{\sqrt{a}};\dfrac{1}{\sqrt{b}};\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ thay vào bài toán 1.4 ta có bài toán khá hay sau (đủ để nhiều bạn phải đau đầu nhưng cũng hứng thú giải vì hình thức khá hấp dẫn):

**Bài toán 1.5.** *Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{ab}{2a+b+3ab}+\frac{bc}{2b+c+3bc}+\frac{ca}{2c+a+3ca}.$$

***Lời giải.*** Ở mỗi phân số ta chia cả tử và mẫu cho tử thức sẽ có:

$$P=\frac{1}{\frac{2}{b}+\frac{1}{a}+3}+\frac{1}{\frac{2}{c}+\frac{1}{b}+3}+\frac{1}{\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+3}$$

Đặt $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}};y=\dfrac{1}{\sqrt{b}};z=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ thì ta có

$$x,y,z>0 \text{ và } xyz=1.$$

Khi đó

$$P=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}.$$

Rõ ràng việc còn lại thì ta sẽ giải quyết đơn giản theo bài toán 1.4.

Cũng chỉ cần một thao tác nhân thêm ta sẽ có bài toán tương tự:

**Bài toán 1.6.** *Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{2ab+ac+3}+\frac{1}{2ac+bc+3}+\frac{1}{2bc+ab+3}.$$

***Lời giải.*** Chỉ cần chia cả tử và mẫu cho $abc$ sẽ có $P=\dfrac{1}{\frac{2}{c}+\frac{1}{b}+3}+\dfrac{1}{\frac{2}{b}+\frac{1}{a}+3}+\dfrac{1}{\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+3}.$

Đến đây ta có thể làm như bài 1.5.

***Nhận xét.*** Một điều đáng tiếc như đã phân tích đầu tiên là ở chỗ đẳng thức

$$\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}=1$$

có mẫu số của các phân thức ở vế trái là các đa thức có thể hoán vị vòng quanh nhưng không đẳng cấp vì, chẳng hạn không thể biến đổi $a$; $ab$ và số 1 về đồng bậc được cho dù có vận dụng giả thiết $abc=1$ bằng mọi cách. Nên các bài toán đó không vận dụng được cho những bài toán dạng gần giống biểu thức trên với $a$, $b$, $c$ tùy ý (không có điều kiện) vì khi đó không thể ứng dụng kiểu chuẩn hóa $abc=1$ để đưa về những bài toán của chúng ta. Chính điều đó đã hạn chế đi một phần phát triển của bài toán 1.

Vậy làm sao khắc phục hạn chế đó? ta có thể không đưa được về bài toán không có điều kiện thì ta có thể phát triển sang dạng $abc=k$ nào đó khác số 1, thậm chí tìm cách chuyển đổi ẩn mà vẫn là các biểu thức ba biến không đối xứng. Sau đây là một biến đổi đầy sáng tạo:

**Bài toán 1.7.** *Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $abc=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{2a+b+6}+\frac{1}{2b+c+6}+\frac{1}{2c+a+6}.$$

***Phân tích.***

- Giả thiết và hình thức thật gần gũi với những bài toán trên.
- Giả thiết $abc=8$ có liên quan gì đến $abc=1$ và nếu các bài toán trên dấu "=" xảy ra là $a=b=c=1$ thì đây là $a=b=c=2$, vậy ta chọn cách đặt ẩn nào đây?
- Liệu đặt $a=2x$, $b=2y$, $c=2z$ có được không? nếu đặt như thế biểu thức dưới mẫu vẫn là bậc nhất các biến $x$, $y$, $z$, làm sao xuất hiện $x+xy+1$ được?
- Quan sát mẫu thức có dạng của bài toán 1.4 nhưng khác nhau về bậc, vậy ta có thể đặt $a=2x^2$; $b=2y^2, c=2z^2$.

***Lời giải.*** Đặt $a=2x^2$; $b=2y^2, c=2z^2$ với $x,y,z>0$ thì $xyz=1$. Ta có:

$$P=\frac{1}{4x^2+2y^2+6}+\frac{1}{4y^2+2z^2+6}+\frac{1}{4z^2+2x^2+6}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\right)\le\frac{1}{4}$$

(theo bài toán 1.4).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z=1$. Vậy $P$ đạt giá trị lớn nhất khi $a=b=c=2$.

Bây giờ ta sẽ tiếp tục với một bài toán có sự đột phá mà giả thiết và biểu thức khác xa về mặt hình thức với các bài toán trên.

**Bài toán 1.8.** *Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $c=8ab$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4}.$$

***Phân tích.*** Quả đúng là một bài toán nhìn rất hóc búa nhưng thật gọn đẹp. Với bài toán này một số bạn có thể suy nghĩ đến các phương pháp dồn biến rồi xét hàm hoặc những con đường phức tạp khác. Tuy nhiên trên cơ sở bài toán 1 và những bài toán áp dụng trên ta có thể giải quyết bài toán này khá nhanh gọn.

***Lời giải.*** Đặt $x^2=2a;\ y^2=2b;\ z^2=\frac{2}{c}$ với $x,y,z>0$. Khi đó ta có $x^2y^2z^2=\frac{8ab}{c}=1$ hay $xyz=1$. Ta có

$$P=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4}$$

$$=\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{1}{4b+3+\frac{2}{c}}+\frac{1}{2a+3+\frac{4}{c}}$$

$$=\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2}$$

(theo bài toán 1.4).

Vậy $\max P=\frac{1}{2}$ khi $a=b=\frac{1}{2},\ c=2$.

Như vậy với sự sáng tạo trong cách biến đổi và cách giải ta hoàn toàn có thể phát triển những bài toán rất cơ bản sang những bài toán khó mà vẫn hay và không mất phần thú vị.

**Hướng 2. Mở rộng hệ thống bài toán thông qua khai thác ứng dụng bài toán gốc vào giải các bài toán tương tự**

Nhiều lúc quá trình tự sáng tạo của chúng ta không thể tổng quát hết và khai thác hết được những nét đa dạng của vấn đề đang phát triển. Vai trò của việc sưu tầm các bài toán cùng dạng hoặc nếu có thể: cố gắng đưa các bài toán đã gặp về hệ thống những bài toán có cách giải tương tự sẽ giúp ta bổ sung thêm nhiều bài toán trong hệ thống bài tập của mình. Chính điều này đã phát huy hết những ứng dụng của các kết quả ta vừa tìm, thông qua đó hình thành tư duy "*quy lạ về quen*" và hình thành quan điểm "*sáng tạo để ứng dụng*". Với bài toán trên dựa vào đặc điểm giả thiết và dạng các biểu thức ở kết luận ta đi tìm các bài tập liên quan, sau đây là một bài toán cùng dạng:

**Bài toán 1.9.** *Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}$.

***Lời giải.*** Ta có $(a+1)^2+b^2+1=a^2+b^2+2a+2$

$$\ge 2ab+2a+2=2(a+ab+1).$$

Tương tự cho các biểu thức còn lại ta có

$$P=\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

**Bài toán 1.10.** *Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}\le 1.$$

***Phân tích.*** Nhìn giả thiết và biểu thức 3 biến khiến ta liên tưởng đến bài toán trên. Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Làm sao xuất hiện $a+ab+1$? làm sao để khử $a^5$ và $-a^2$? Ở đây $a^5$ nằm ở mẫu thì có thể đánh giá theo chiều $\ge$ từ $a^5$ đưa được về $a$ nhưng vẫn còn $-a^2$ ngược chiều với chiều $\ge$, vậy ta tìm cách biến đổi đưa $a^5$ về $a^2$ để khử $-a^2$. Ta có:

$$a^5+1+a\ge 3a^2 \quad \text{và} \quad a^2+1\ge 2a.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1$.

***Lời giải.*** Ta có

$$a^5-a^2+3ab+6=a^5+a+1-a^2-a+3ab+5$$

$$\ge 3a^2-a^2-a+3ab+5$$

$$=2(a^2+1)-a+3ab+3\ge 3a+3ab+3=3(a+ab+1).$$

Làm tương tự cho các biểu thức còn lại, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{a+ab+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+bc+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+ca+1}}\right)$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}\right)}=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cùng một ý tưởng này ta có thể áp dụng cách giải trên cho một số đề thi trong thời gian qua.

**Bài toán 1.11.** *(Đề thi GV giỏi THPT Diễn Châu, 3.2010). Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\frac{1}{\sqrt{a^5+b^2+ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5+c^2+bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5+a^2+ca+6}}$.

Không rõ ý tưởng và lời giải của đáp án bài toán này như thế nào nhưng cách đây mấy năm có một đồng nghiệp đã hỏi tôi và khi đó ban đầu việc tìm ra lời giải vẫn khó khăn, đến khi xây dựng hệ thống bài toán này tôi đã tìm ra lời giải tương tự bài toán 1.10 vẫn là phân tích dựa vào dự đoán dấu bằng xảy ra và đưa về bài toán 1 như sau.

***Lời giải.*** Ta có:

$$a^5+b^2+ab+6=a^5+a+1-a+b^2+ab+5$$
$$\ge 3a^2+b^2+ab-a+5$$
$$=a^2+b^2+2a^2+2+ab-a+3$$
$$\ge 2ab+4a+ab-a+3=3(a+ab+1).$$

Tương tự cho các biểu thức còn lại ta có:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^5+b^2+ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5+c^2+bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5+a^2+ca+6}}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{a+ab+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+bc+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+ca+1}}\right)$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{c+ca+1}\right)}=1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy $P$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $a=b=c=1$. Cùng dạng nhưng biến đổi "xa" hơn một chút ta có bài toán sau:

**Bài toán 1.12.** *Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu*

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab-a+5}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc-b+5}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca-c+5}}.$$

***Lời giải.*** Ta có:

$a^2+ab-a+5=(a-1)^2+ab+a+4\ge ab+a+4$, dấu "=" xảy ra khi $a=1$. Suy ra:

$$\frac{1}{a^2+ab-a+5}\le\frac{1}{a+ab+4}=\frac{1}{(a+ab+1)+3}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{3}\right);$$

dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=1\\a+ab+1=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1.$

Tương tự cho các biểu thức còn lại:

$$\frac{1}{b^2+bc-b+5}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+bc+1}+\frac{1}{3}\right)$$

và $$\frac{1}{c^2+ca-c+5}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+ca+1}+\frac{1}{3}\right).$$

Từ đó ta có:

$$P^2=\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+ab-a+5}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc-b+5}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca-c+5}}\right)^2$$

$$\le\frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{a+ab+1}+\frac{1}{b+bc+1}\frac{1}{c+ca+1}+1\right)\right)=\frac{3}{2}.$$

Suy ra $P\le\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

$$\le 3\left(\frac{1}{a^2+ab-a+5}+\frac{1}{b^2+bc-b+5}+\frac{1}{c^2+ca-c+5}\right)$$

Suy ra $P\le\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

*(Xem tiếp trang 39)*


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/494 (Lớp 6).** Tìm các số tự nhiên $m$, $n$ và số nguyên tố $p$ thỏa mãn mỗi đẳng thức sau:

1) $p^m + p^n = p^{m+n}$;

2) $p^m + p^n = p^{mn}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

**Bài T2/494 (Lớp 7).** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $AC$, $BC$. Gọi $O$ là giao điểm của $CM$ và $PN$. $I$ là giao điểm của $AO$ và $BC$. $D$ là giao điểm của $MI$ và $AC$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AI$, $BD$, $MP$ đồng quy.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

**Bài T3/494.** Giải phương trình

$$\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1} = \frac{2x}{x^2+1} - 2.$$

TẠ MINH HIẾU
(*GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc*)

**Bài T4/494.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AH$ là đường cao. Trên tia đối của tia $HA$ lấy điểm $D$ bất kỳ $(D \neq H)$. Qua $D$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BD$, cắt đường thẳng $AC$ tại $E$. Gọi $K$ là hình chiếu của $E$ trên $AH$. Chứng minh $DK$ có độ dài không đổi khi $D$ di động trên tia đối của tia $HA$ $(D \neq H)$.

BÙI VĂN CHI
(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

**Bài T5/494.** Cho các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $T = \sqrt{4+5x} + \sqrt{4+5y}$.

VŨ VĂN LIÊM
(*Cẩm Xá, Mỹ Hào, Hưng Yên*)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/494.** Tìm điều kiện của $a$, $b$ để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = (a-y)(a+y+2) \\ y^2 = (b-x)(b+x+2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất, biết $a > b \geq -1$.

TRẦN HÀ TUẤN ANH
(*SV* 10T, *khoa Tin học, CĐSP Tuyên Quang*)

**Bài T7/494.** Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b(2a-b)}{a(b+c)} + \frac{c(2b-c)}{b(c+a)} + \frac{a(2c-a)}{c(a+b)} \leq \frac{3}{2}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

**Bài T8/494.** Cho $A$, $B$, $C$ là ba góc của tam giác $ABC$ không vuông. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin A}{\tan B} + \frac{\sin B}{\tan C} + \frac{\sin C}{\tan A} \geq \frac{3}{2}.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
(*SV* K61, *SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)

**Bài T9/494.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x, y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 = x^2 + 72xy + y^2$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(*Số nhà 5, ngách 7, ngõ 136, Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/494.** Với mọi số nguyên $n$, chứng minh rằng số

$$a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

là số chính phương.

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

**Bài T11/494.** Một lớp có $n$ học sinh, tham gia vào $n-1$ câu lạc bộ. Chứng minh rằng có thể chọn ra một tập hợp khác rỗng các bạn học sinh sao cho trong mỗi câu lạc bộ, đều có một số chẵn các bạn học sinh được chọn ra tham gia.

VŨ HỒNG SƠN
(*GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ*)

**Bài T12/494.** Cho hình vuông $ABCD$. $P$ là điểm bất kì trên cạnh $AB$. Gọi $(I_1)$, $(I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác $ADP$, $CBP$. $DI_1$, $CI_2$ cắt $AB$ lần lượt tại $E$, $F$. Đường thẳng qua $E$ song song với $AC$ cắt $BD$ tại $M$, đường thẳng qua $F$ song song với $BD$ cắt $AC$ tại $N$. Chứng minh rằng $MN$ là tiếp tuyến chung của $(I_1)$ và $(I_2)$.

NGUYỄN VĂN LINH (*Hà Nội*)

**Bài L1/494.** Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường $h$. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường $2h$. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường $h$ rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần gần đúng bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

**Bài L2/494.** Đoạn mạch điện $AB$ gồm hai đoạn mạch $AM$ và $MB$ nối tiếp nhau. Trên đoạn $AM$ chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn $MB$ chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu $A$, $B$ một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch $AB$ đạt cực đại $\mathcal{P}_{max} = 45$ W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch $AM$ có biểu thức là

$$u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\text{(V)}.$$

Điện dung của tụ có giá trị là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/494 (For 6th grade).** Find all natural numbers $m$, $n$ and primes $p$ satisfying each of the following equalities

1) $p^m + p^n = p^{m+n}$;

2) $p^m + p^n = p^{mn}$.

**Problem T2/494 (For 7th grade).** Given a triangle $ABC$. Let $M$, $N$, and $P$ respectively be the midpoints of $AB$, $AC$, and $BC$. Let $O$ be the intersection between $CM$ and $PN$, $I$ be the intersection between $AO$ and $BC$, and $D$ be the intersection between $MI$ and $AC$. Show that $AI$, $BD$, $MP$ are concurrent.

**Problem T3/494.** Solve the equation

$$\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1} = \frac{2x}{x^2+1} - 2.$$

**Problem T4/494.** Given a right triangle $ABC$ with the right angle $A$. Let $AH$ be the altitude. On the opposite ray of the ray $HA$ pick an arbitrary point $D$ $(D \neq H)$. Through $D$ draw the line perpendicular to $BD$. That line intersects $AC$ at $E$. Let $K$ be the perpendicular projection of $E$ on $AH$. Show that $DK$ has a fixed length when $D$ varies.

**Problem T5/494.** Given real numbers $x$, $y$ such that $x^2 + y^2 = 1$. Find the minimum and maximum values of the expression

$$T = \sqrt{4+5x} + \sqrt{4+5y}.$$

## FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/494.** Find conditions on $a$, $b$ besides $a > b \geq -1$ so that the system

(*Xem tiếp trang 42*)


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/494 (Lớp 6).** Tìm các số tự nhiên $m$, $n$ và số nguyên tố $p$ thỏa mãn mỗi đẳng thức sau:

1) $p^m + p^n = p^{m+n}$;

2) $p^m + p^n = p^{mn}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

**Bài T2/494 (Lớp 7).** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $AC$, $BC$. Gọi $O$ là giao điểm của $CM$ và $PN$. $I$ là giao điểm của $AO$ và $BC$. $D$ là giao điểm của $MI$ và $AC$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AI$, $BD$, $MP$ đồng quy.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

**Bài T3/494.** Giải phương trình

$$\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1} = \frac{2x}{x^2+1} - 2.$$

TẠ MINH HIẾU

(*GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc*)

**Bài T4/494.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $AH$ là đường cao. Trên tia đối của tia $HA$ lấy điểm $D$ bất kỳ $(D \neq H)$. Qua $D$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BD$, cắt đường thẳng $AC$ tại $E$. Gọi $K$ là hình chiếu của $E$ trên $AH$. Chứng minh $DK$ có độ dài không đổi khi $D$ di động trên tia đối của tia $HA$ $(D \neq H)$.

BÙI VĂN CHI

(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

**Bài T5/494.** Cho các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $T = \sqrt{4+5x} + \sqrt{4+5y}$.

VŨ VĂN LIÊM

(*Cẩm Xá, Mỹ Hào, Hưng Yên*)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/494.** Tìm điều kiện của $a$, $b$ để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = (a-y)(a+y+2) \\ y^2 = (b-x)(b+x+2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất, biết $a > b \geq -1$.

TRẦN HÀ TUẤN ANH

(*SV* 10T, *khoa Tin học, CĐSP Tuyên Quang*)

**Bài T7/494.** Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b(2a-b)}{a(b+c)} + \frac{c(2b-c)}{b(c+a)} + \frac{a(2c-a)}{c(a+b)} \leq \frac{3}{2}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

**Bài T8/494.** Cho $A$, $B$, $C$ là ba góc của tam giác $ABC$ không vuông. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin A}{\tan B} + \frac{\sin B}{\tan C} + \frac{\sin C}{\tan A} \geq \frac{3}{2}.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(*SV* K61, *SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)

**Bài T9/494.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x, y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 = x^2 + 72xy + y^2$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(*Số nhà 5, ngách 7, ngõ 136, Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/494.** Với mọi số nguyên $n$, chứng minh rằng số

$$a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

là số chính phương.

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số* 2, *Bắc Ninh*)

**Bài T11/494.** Một lớp có $n$ học sinh, tham gia vào $n-1$ câu lạc bộ. Chứng minh rằng có thể chọn ra một tập hợp khác rỗng các bạn học sinh sao cho trong mỗi câu lạc bộ, đều có một số chẵn các bạn học sinh được chọn ra tham gia.

VŨ HỒNG SƠN

(*GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ*)

**Bài T12/494.** Cho hình vuông $ABCD$. $P$ là điểm bất kì trên cạnh $AB$. Gọi $(I_1)$, $(I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác $ADP$, $CBP$. $DI_1$, $CI_2$ cắt $AB$ lần lượt tại $E$, $F$. Đường thẳng qua $E$ song song với $AC$ cắt $BD$ tại $M$, đường thẳng qua $F$ song song với $BD$ cắt $AC$ tại $N$. Chứng minh rằng $MN$ là tiếp tuyến chung của $(I_1)$ và $(I_2)$.

NGUYỄN VĂN LINH (*Hà Nội*)

**Bài L1/494.** Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường $h$. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường $2h$. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường $h$ rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần gần đúng bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

**Bài L2/494.** Đoạn mạch điện $AB$ gồm hai đoạn mạch $AM$ và $MB$ nối tiếp nhau. Trên đoạn $AM$ chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn $MB$ chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu $A$, $B$ một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch $AB$ đạt cực đại $\mathcal{P}_{max} = 45$ W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch $AM$ có biểu thức là

$$u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{(V)}.$$

Điện dung của tụ có giá trị là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

# PROBLEMS IN THIS ISSUE

## FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/494 (For 6th grade).** Find all natural numbers $m$, $n$ and primes $p$ satisfying each of the following equalities

1) $p^m + p^n = p^{m+n}$;

2) $p^m + p^n = p^{mn}$.

**Problem T2/494 (For 7th grade).** Given a triangle $ABC$. Let $M$, $N$, and $P$ respectively be the midpoints of $AB$, $AC$, and $BC$. Let $O$ be the intersection between $CM$ and $PN$, $I$ be the intersection between $AO$ and $BC$, and $D$ be the intersection between $MI$ and $AC$. Show that $AI$, $BD$, $MP$ are concurrent.

**Problem T3/494.** Solve the equation

$$\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1} = \frac{2x}{x^2+1} - 2.$$

**Problem T4/494.** Given a right triangle $ABC$ with the right angle $A$. Let $AH$ be the altitude. On the opposite ray of the ray $HA$ pick an arbitrary point $D$ $(D \neq H)$. Through $D$ draw the line perpendicular to $BD$. That line intersects $AC$ at $E$. Let $K$ be the perpendicular projection of $E$ on $AH$. Show that $DK$ has a fixed length when $D$ varies.

**Problem T5/494.** Given real numbers $x$, $y$ such that $x^2 + y^2 = 1$. Find the minimum and maximum values of the expression

$$T = \sqrt{4+5x} + \sqrt{4+5y}.$$

## FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/494.** Find conditions on $a$, $b$ besides $a > b \geq -1$ so that the system

(*Xem tiếp trang 42*)


**Bài T1/490.** *Cho số tự nhiên a nguyên tố cùng nhau với 210. Biết rằng khi chia a cho 210 thì có số dư r thỏa mãn $1 < r < 120$. Chứng minh rằng r là số nguyên tố.*

***Lời giải.*** Theo giả thiết có $a = 210k + r$ với $1 < r < 120$ và $(210, a) = 1$. Giả sử $r$ có ước số nguyên tố $p$ và $r = ps$ với số nguyên dương $s$, ta sẽ chứng minh rằng $p \geq 11$.

Nếu số nguyên tố $p < 11$ và là ước của $r$ thì $p$ chỉ có thể là một trong các số 2, 3, 5, 7 mà $210 = 2.3.5.7$ nên $p$ là ước của 210, do đó $p$ là ước của $210k + r = a$, suy ra $p$ là ước số chung của $a$ và 210, nhưng $(210, a) = 1$ nên điều này không xảy ra, suy ra $p \geq 11$. Từ đó và $r = ps$ thì $11s \leq r < 120 < 121$ nên $1 \leq s < 11$. Nếu $s$ có ước số nguyên tố $q \leq s$ thì $q$ cũng là ước của $r$ nên theo chứng minh trên thì $q \geq 11$, điều này không xảy ra. Vậy $s = 1$ và $r = p$ là số nguyên tố với $11 \leq r < 120$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Sau khi suy ra $p \geq 11$, một số bạn khác nêu ra đầy đủ các số $r$ không là bội của một trong các số 2, 3, 5, 7 là 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97; 101; 103; 107; 109; 113 và các số này đều là số nguyên tố. Cách này dài hơn lập luận nêu trong lời giải trên.

2) Các bạn sau có lời giải đúng, lập luận đầy đủ. **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 6B, THCS Đông Cửu, Thanh Sơn; **Nghệ An:** *Phạm Viết Thịnh, Lê Thiệp Sang*, 6A, *Bùi Duy Huy Hoàng, Phạm Xuân Bình Dương, Thái Huyền Trang*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hoàng Hưng*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

**VIỆT HẢI**

**Bài T2/490.** *Cho a, b, c, d khác 0 thỏa mãn:*

$$b^2 = ac;\ c^2 = bd;\ b^3 + 27c^3 + 8d^3 \neq 0.$$

*Chứng minh rằng:* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$.

***Lời giải.*** Theo giả thiết $a, b, c, d \neq 0$ nên ta có

$$b^2 = ac \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{b}\ (1) \text{ và } c^2 = bd \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{c}\quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{3b}{3c} = \dfrac{2c}{2d}$. Suy ra

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{3b}{3c}\right)^3 = \left(\frac{2c}{2d}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{27b^3}{27c^3} = \frac{8c^3}{8d^3} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}.\ ❐$$

⋖***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Nghệ An:** *Nguyễn Công An, Lê Thiệp Sang, Phạm Viết Thịnh, Phạm Đào Đan Lê*, 6A, *Hoàng Tuấn Thúc, Lê Tiến Bảo Long, Bùi Duy Huy Hoàng, Phan Văn Anh Tài, Phạm Văn Trà, Nguyễn Thái Hà, Trần Thị Hào, Nguyễn Thị Ngân, Phan Thị Hoa, Nguyễn Công Phúc*, 6B, *Nguyễn Thị Thanh Hằng, Phạm Văn Quyền, Nguyễn Phương Uyên, Nguyễn Quốc Hiếu, Nguyễn Văn Thành Nam, Lê Hoài Sơn, Nguyễn Đình Thủy, Hoàng Thế Hiếu*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Thúy Hằng, Phạm Ngọc Trinh*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Khối 1, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa:** *Trịnh Duy Đạt, Nguyễn Thị Hiền Diệu, Nguyễn Thanh Tiến, Trần Văn Quân*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 7A, *Võ Diệp Toàn Lộc, Điệp Diệu Châu*, 7B, *Đỗ Thị Như Nguyệt*, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi; **Nam Định:** *Trịnh Hải Tiến*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Phú Thọ:** *Hà Thị Yên*, 7A, THCS

Đông Cửu, Thanh Sơn; *Hà Minh Ngọc*, 7A, THCS Nguyễn Bích Quang, Tam Nông; *Quách Thị Thảo*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 7A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Nguyễn Ngân Chi*, 7C, THCS Lý Thái Tổ, Cầu Giấy.

**NGUYỄN THỊ TRƯỜNG**

**Bài T3/490.** *Tìm tất cả các nghiệm tự nhiên x, y, z của phương trình* $3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5$.

***Lời giải.*** Ta có

$$3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5$$
$$\Leftrightarrow yz(3x-5) + (3x-5) = -3z$$
$$\Leftrightarrow (5-3x)(yz+1) = 3z \quad (1)$$

***Cách 1.*** Do $x, y, z$ là số tự nhiên nên

• Nếu $x \geq 2$ thì $5 - 3x < 0$, và $yz + 1 \geq 1$ nên vế trái của (1) là số âm, vế phải của (1) là số tự nhiên. Điều này vô lí. Vậy $x < 2$, mà $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 0$ hoặc $x = 1$.

• Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra

$$5(yz+1) = 3z \Leftrightarrow z(3-5y) = 5 \quad (2)$$

Do $y, z \in \mathbb{N}$ nên $3 - 5y \in \mathbb{Z}$, kết hợp với (2) ta có $3 - 5y \in \mathbb{N}$. Nhận thấy 5 = 5.1 và (3 – 5y) không chia hết cho 5, nên chỉ xảy ra trường hợp

$$\begin{cases} z = 5 \\ 3 - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \text{(loại, vì } y \notin \mathbb{N}).$$

• Với $x = 1$, thì từ (2) suy ra

$$2(yz+1) = 3z \Leftrightarrow z(3-2y) = 2 \quad (3)$$

Do $y, z \in \mathbb{N}$ nên $3 - 2y \in \mathbb{Z}$, kết hợp với (3) ta có $3 - 2y \in \mathbb{N}$. Nhận thấy 2 = 2.1 và 3 –2y là số lẻ nên chỉ xảy ra trường hợp

$$\begin{cases} z = 2 \\ 3 - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{(thỏa mãn } y, z \in \mathbb{N}).$$

Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên duy nhất là $(x; y; z) = (1; 1; 2)$.

***Cách 2.*** Do $y, z \in \mathbb{N}$ nên $yz + 1 \in \mathbb{N}^*$, $3z \in \mathbb{N}$.

Từ (1) suy ra $5 - 3x = \dfrac{3z}{yz+1}$; do $5 - 3x \in \mathbb{Z}$ nên $3z \vdots (yz+1) \Rightarrow 3yz \vdots (yz+1)$, mà

$$3yz = 3(yz+1) - 3 \Rightarrow 3 \vdots (yz+1).$$

Vậy $yz + 1 \in \{1; 3\}$.

• Với $yz + 1 = 1 \Leftrightarrow yz = 0$ thì $y = 0$ hoặc $z = 0$.

+ Với $y = 0$ thì thay vào (1) ta có

$3(x+z) = 5 \Rightarrow x + z = \dfrac{5}{3}$ (không thỏa mãn với $x, z \in \mathbb{N}$).

+ Với $z = 0$ thì thay vào (1) ta có

$$3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (loại, vì } x \notin \mathbb{N}).$$

• Với $yz + 1 = 3 \Leftrightarrow yz = 2$ thì $y = 1$; $z = 2$ hoặc $y = 2$, $z = 1$.

+ Với $y = 1$, $z = 2$ thì thay vào (1) tìm được $x = 1$ (thỏa mãn).

+ Với $y = 2$, $z = 1$ thì thay vào (1) tìm được $x = \dfrac{4}{3}$ (loại, vì $x \notin \mathbb{N}$).

Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên duy nhất là $(x; y; z) = (1; 1; 2)$. ❐

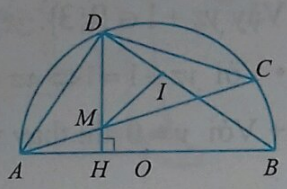
➢ ***Nhận xét.*** Đa số các bạn đều giải theo một trong hai cách trên. tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Hoàng Công Hiếu*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Nghệ An:** *Phạm Văn Quyền*, 7A, *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT Dân lập Lương Thế Vinh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải, Hà Minh Nhật*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T4/490.** *Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, bán kính OD vuông góc với AB. C là*

*một điểm chạy trên cung $\overset{\frown}{BD}$. AC cắt OD ở M. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMC luôn nằm trên một đường thẳng cố định.*

***Lời giải.*** Ta xét bài toán tổng quát hơn:




*Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. H là điểm cố định trên đoạn OA. Điểm D trên nửa đường tròn sao cho DH ⊥ AB. C là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{DB}$. AC cắt DH tại M. Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMC luôn nằm trên một đường thẳng cố định.* Ta có:

$$\widehat{MDI}=90^0-\widehat{DCM}=90^0-\widehat{DCA}$$
$$=90^0-\widehat{DBA}=\widehat{MDB} \quad (1)$$

Hơn nữa, $\widehat{DCM}<90^0$ nên $I$ và $C$ nằm cùng phía so với $DM$. Kết hợp với (1), suy ra $D, I, B$ thẳng hàng. Vậy $I$ luôn thuộc đường thẳng $DB$ cố định.

Bài toán ban đầu là trường hợp riêng của bài toán trên khi $H$ trùng $O$. ❐

➤***Nhận xét.*** 1) Ta có $\widehat{DCM}=\widehat{DBA}=\widehat{ADH}$ suy ra $AD$ là tiếp tuyến của đường tròn $(I)$. Mà $DB \perp AD$, nên $I \in DB$.

2) Đây là bài toán không khó và khá quen thuộc. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT Dân lập Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Phương Nam*, 9A7, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Mai Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Ninh Thuận:** *Trương Thanh Minh*, 9/1, THCS Trương Định, Ninh Phước; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/490.** *Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^3+y^3=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=x^2+y^2+\frac{9}{x+y}.$$

***Lời giải.*** ĐK: $x+y\neq 0$.

Vì $x, y$ không thể đồng thời bằng 0, nên

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0.$$

Do đó

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2\Rightarrow x+y>0.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có

- $x^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$;
- $y^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{y^3.1.1}=3y$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=1$.

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên và lưu ý giả thiết $x^3+y^3=2$, ta được

$$6=x^3+y^3+4\geq 3(x+y)\Rightarrow 0<x+y\leq 2. \quad (1)$$

Mặt khác ta luôn có $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$. (2)

(dễ thấy bất đẳng thức này tương đương với $(x-y)^2\geq 0$). Sử dụng (1), (2) và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$P=x^2+y^2+\frac{9}{x+y}\geq\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+y}+\frac{1}{x+y}$$
$$\geq 3.\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{2}.\frac{4}{x+y}.\frac{4}{x+y}}+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy $\min P=\frac{13}{2}$ khi $x=y=1$. ❐

➤***Nhận xét.*** Điều quan trọng của bài toán là từ giả thiết $x^3+y^3=2$ suy ra $0<x+y\leq 2$; sau đó tách $P$ và sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương để suy ra kết quả. Có thể áp dụng bất đẳng thức $4(x^3+y^3)\geq(x+y)^3$ (bạn đọc tự chứng

minh) để có $x+y\le 2$. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/1, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT Dân lập Lương Thế Vinh.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T6/490.** *Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2}+\frac{1}{b^5+c^5+a^2}+\frac{1}{c^5+a^5+b^2}\le 1.$$

***Lời giải.*** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4a^5+b^5\ge 5\sqrt[5]{(a^5)^4.b^5}=5a^4b. \quad (1)$$

Tương tự: $a^5+4b^5\ge 5ab^4$. (2)

Cộng theo vế (1) với (2) và sử dụng $abc=1$ ta có

$$\Leftrightarrow a^5+b^5\ge ab(a^3+b^3)$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5\ge \frac{a^3+b^3}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^2\ge \frac{a^3+b^3+c^3}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^5+b^5+c^2}\le \frac{c}{a^3+b^3+c^3}. \quad (3)$$

Ta thu được các bất đẳng thức tương tự (3) bằng cách hoán vị $a,b,c$ với nhau và cộng lại theo vế, ta thu được bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2}+\frac{1}{b^5+c^5+a^2}+\frac{1}{c^5+a^5+b^2}\le \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

Để kết thúc chứng minh, ta chỉ cần chứng minh $a+b+c\le a^3+b^3+c^3$ khi $abc=1$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $a^3+1+1\ge 3a$, và tương tự $b^3+1+1\ge 3b$, $c^3+1+1\ge 3c$. Cộng theo vế các bất đẳng thức này, ta có $a^3+b^3+c^3+6\ge 3(a+b+c)$. Mặt khác, cũng từ BĐT Cauchy ta có

$$a+b+c\ge 3\Rightarrow 2(a+b+c)\ge 6,$$

và từ đó suy ra $a+b+c\le a^3+b^3+c^3$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt gửi tới Tạp chí: **Đăk-Lăk:** *Nguyễn Trần Thiện Nhâm*, 10, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Yên Phong; **Phú Thọ:** *Lê Na*, 10E, THPT Yên Lập; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi*, THCS Lý Thái Tổ, Cầu Giấy, *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, *Chu Thị Thanh*, *Trần Hồng Quý*, *Tạ Nam Khánh*, *Hà Ngọc Khánh*, 10A1, *Đỗ Minh Hiệp*, *Lê Anh Dũng*, *Vương Tùng Dương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, *Nguyễn Đình Lân*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thanh Lâm*, *Bùi Văn Quyến*, *Chu Ngọc Quyến*, *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, *Nguyễn Lê Huy*, *Nguyễn Thị Hương Giang*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Huy*, *Đỗ Thiên Ân*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Phước:** *Lương Ngọc Chung*, 10 Toán, THPT chuyên Quang Trung; **Đồng Tháp:** *Phạm Công Minh*, *Huỳnh Tấn Phúc*, *Nguyễn Nhật Hào*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 10 Toán, *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn*, 9C, THCS Phan Đình Phùng; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa; **Quảng Ngãi:** *Trần Nguyễn Quy*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; **Bình Dương:** *Nguyễn Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Hùng Vương; **Gia Lai:** *Hoàng Minh Quyết*, 10A1, THPT Nguyễn Chí Thanh; ***Nghệ An:*** *Phùng Lê*

*Anh Quân*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** *Phạm Anh Đức*, 9B, *Nguyễn Duy Hùng*, 9E, THCS Trần Mai Ninh; **Thái Bình:** *Đặng Minh Đức*, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, *Trương Công Đức*, 10 Toán 2, *Nguyễn Hồ Anh Hưng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định:** *Vũ Minh Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T7/490.** *Xác định số nguyên dương a, b sao cho*

$$\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}} = a\cos\frac{\pi}{b} \quad (1).$$

***Lời giải. Cách 1.*** Đặt $u=\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}}$.

Khi đó ta có: $[(u^2-8)^2-32]^2=768$.

Đặt $x=\frac{u}{4}$, khi đó: $\left[(16x^2-8)^2-32\right]^2=768$

$$\Leftrightarrow 2[2(2x^2-1)^2-1]^2-1=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $x^2<1$. Đặt $x=\cos t$, khi đó (2) trở thành: $\cos 8t=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó VT(1) = $u=4x=4\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right)$ với giá trị $k$ nguyên nào đó ta cần tìm.

Gọi $c_k=\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}\right)$. Dễ thấy rằng

- Với $k=1$ suy ra $c_1<\cos\frac{\pi}{4}$, do đó

$$u=4c_1<2\sqrt{2}=\sqrt{8}<u: \text{ vô lý.}$$

- Với $k\in\{2,3,4,5\}$ suy ra $c_k<0$. Do đó

$$u=4c_k<0<u: \text{ vô lý.}$$

- Với $k=6$ suy ra $c_6<\cos\frac{\pi}{4}$, do đó

$$u=4c_6<2\sqrt{2}=\sqrt{8}<u: \text{ vô lý.}$$

- Với $k=7$ suy ra $c_7<\cos\frac{\pi}{6}$, do đó

$$u=4c_7<2\sqrt{3}=\sqrt{8+\sqrt{16}}<u: \text{ vô lý.}$$

Vậy $k=0$ và $\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}}=4\cos\frac{\pi}{24}$ hay $(a, b)=(4, 24)$.

***Cách 2.*** Ta có: $\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}}=\sqrt{8+\sqrt{32+16\sqrt{3}}}$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}=\sqrt{8+4\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)}}$$

$$=2\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{12}}}=2\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$=2\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{24}}=4\cos\frac{\pi}{24}.$$

Từ đó có: $a\cos\frac{\pi}{b}=4\cos\frac{\pi}{24}$ (3) $\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=24\end{cases}$.

Ta sẽ chứng minh cặp số $(a; b)=(4; 24)$ là duy nhất thỏa mãn bài toán. Thật vậy, giả sử tồn tại cặp $(a_0, b_0)$ khác cặp $(a, b)=(4, 24)$ thỏa mãn bài toán. Ta suy ra $a_0\neq 4$, $b_0\neq 24$.

TH1: $a_0\le 3, a_0\in\mathbb{Z}^+$. Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{b_0}=\frac{4\cos\frac{\pi}{24}}{a_0}\ge\frac{4\cos\frac{\pi}{24}}{3}>1: \text{ vô lý.}$$

TH2: $a_0\ge 5, a_0\in\mathbb{Z}^+$. Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{b_0}=\frac{4\cos\frac{\pi}{24}}{a_0}\le\frac{4\cos\frac{\pi}{24}}{5}<\cos\frac{\pi}{5}.$$

Trong khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ hàm $y=\cos x$ nghịch biến nên $\frac{\pi}{b_0}>\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow b_0<5\Rightarrow b_0\in\{1;2;3;4\}$.

Thử với: $b_0=1$ thì $a_0<0$; $b_0=2$ không thỏa mãn (3); $b_0=3$ và $b_0=4$ thì $a_0\notin\mathbb{Z}^+$. Vậy chỉ tồn tại duy nhất cặp nghiệm $(a; b)=(4; 24)$ thỏa mãn bài toán. ❐

➢***Nhận xét.*** Cách thứ nhất thuộc về tác giả bài toán. Đa số các bạn đều giải theo cách thứ hai nhưng chỉ biến đổi đến đẳng thức (3) rồi kết luận ngay $a=4$, $b=24$. Kết luận như vậy là đúng song chưa đủ, bởi

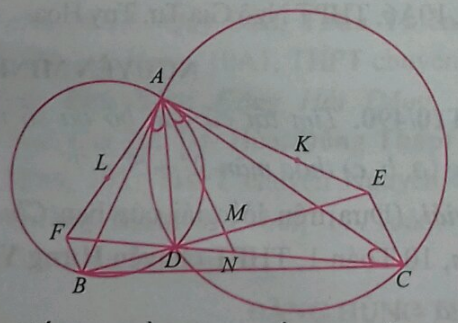
vì (3) có thể có các cặp nghiệm $(a; b)$ khác! Chỉ một số ít các bạn chứng minh chặt chẽ là (3) chỉ có nghiệm duy nhất là cặp số $(a ; b) = (4 ; 24)$. Ngoài ra, cũng có một số bạn đưa ra cách giải khác nhưng lời giải khá dài. Xin nêu tên các bạn có lời giải tương đối đầy đủ bài này:

**Vĩnh Phúc:** *Trần Hồng Quý*, 10A1, *Bùi Anh Vũ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Gia Lai:** *Hoàng Minh Quyết*, 10A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa. **Đồng Tháp:** *Phạm Công Minh*, 10T, *Nguyễn Đức An*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T8/490.** *Cho tam giác ABC có đường tròn (K) đi qua A, C tiếp xúc với AB; đường tròn (L) đi qua A, B và tiếp xúc với AC. (K) cắt (L) tại D khác A. AK, AL lần lượt cắt DB, DC tại E, F. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BE, CF. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.*

***Lời giải. Cách 1.***




Từ giả thiết của đề bài ta thấy $AB$ tiếp xúc với đường tròn $(K)$ tại $A$, $AC$ tiếp xúc với đường tròn $(L)$ tại $A$. Trong tam giác vuông $FAC$ có

$$NA = NC = \frac{CF}{2} \Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{NCA} \qquad (1)$$

Mặt khác, do $AB$ tiếp xúc với đường tròn $(K)$ tại $A$, nên $\widehat{NCA} = \widehat{DCA} = \widehat{BAD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn $(K)$) (2)

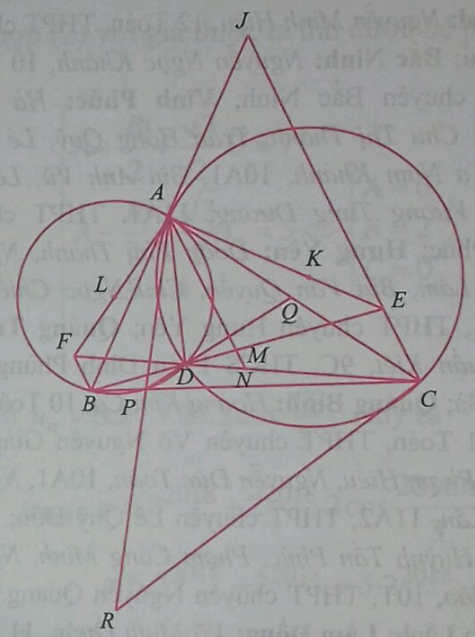
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{NAC}$, hay $AD$ và $AN$ là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{BAC}$ (3)

Tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{BAM} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$, hay $AD$ và $AM$ là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{BAC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm $A, M, N$ thẳng hàng.

***Cách 2.*** Giả sử đường tròn $(L)$ cắt $BC$ tại $P$ khác $B$. $PD$ cắt $AC$ tại $Q$ thì $\widehat{QPC} = \widehat{DAB} = \widehat{DCA}$.

Do đó $\Delta QCD \backsim \Delta QPC$, nên $QC^2 = QD.QP = QA^2$.




Gọi $J$ là điểm đối xứng với $B$ qua $A$ và $R$ là điểm đối xứng với $A$ qua $P$. Do hai tam giác $CPA$ và $CAB$ đồng dạng, nên hai tam giác $CRA$ và $CJB$ đồng dạng. Từ đó chú ý tam giác $JBE$ cân tại $E$ nên $\widehat{BJC} = \widehat{ARC} = \widehat{APQ} = \widehat{ABD} = \widehat{BJE}$.

Suy ra $C, E, J$ thẳng hàng, mà $A$ là trung điểm $BJ$ do đó $AM \parallel CE$. Tương tự $AN \parallel BF$. Lại có

$$\widehat{CFA} = 90^0 - \widehat{ACF} = 90^0 - \widehat{BAD} = \widehat{DAE}.$$

Tương tự có $\widehat{AED} = \widehat{DAF}$. Từ đó hai tam giác $AFD$ và $EAD$ đồng dạng (g.g). Vậy $DF.DE = DA^2 = DB.DC$ ($\Delta BAD \backsim \Delta ACD$(g.g)).

Từ đây ta thấy $\frac{DB}{DE}=\frac{DF}{DC}$ nên $BF \parallel CE$, suy ra $A, M, N$ thẳng hàng. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Dễ thấy $\Delta ABD \backsim \Delta CAD$ (g.g) suy ra $\frac{d(D,AB)}{d(D,AC)}=\frac{AB}{AC}$, nên $AD$ chứa đường đối trung của $\Delta ABC$. Từ đó đường thẳng qua ba điểm $A, M, N$ sẽ chia đôi đoạn thẳng $BC$.

2) Số bài gửi về Tòa soạn khá nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Mai Đức Thái*, 10 Toán 2, *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lào Cai:** *Nguyễn Minh Hiệu*, 12 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Hà Ngọc Khánh*, *Chu Thị Thanh*, *Trần Hồng Quý*, *Lê Ngọc Hoa*, *Tạ Nam Khánh*, 10A1, *Bùi Anh Vũ*, *Lê Anh Dũng*, *Vương Tùng Dương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, *Nguyễn Thanh Lâm*, *Bùi Văn Quyến*, *Chu Ngọc Chiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 10 Toán, *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, *Nguyễn Danh Lân*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Tấn Phúc*, *Phạm Công Minh*, *Nguyễn Nhật Hào*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Đồng Nai:** *Dương Hải Đăng*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/490.** *Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực thỏa mãn: $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge a^4+b^4+c^4$.*

*Chứng minh rằng:*

$$|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|+|a+b+c| = (|a|+|b|+|c|).$$

***Lời giải.*** Nếu ta thay bộ ba số $(a, b, c)$ bằng một trong các bộ ba số $(\pm a, \pm b, \pm c)$ thì cả hai giả thiết, kết luận của bài toán không thay đổi và vai trò của các số $a$, $b$, $c$ trong bài toán là như nhau. Do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$. Từ giả thiết ta có

$$0\ge a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$
$$=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$$
$$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(a^2+b^2-2ab-c^2).$$

Kết hợp với $a\ge b\ge c\ge 0$ ta suy ra $c\ge a-b$ hay $b+c\ge a$. Do đó

$$|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|+|a+b+c|$$
$$=b+c-a+c+a-b+a+b-c+a+b+c$$
$$=2(a+b+c)=2(|a|+|b|+|c|).$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán giá trị tuyệt đối trên thuộc loại cơ bản, nhưng có những ý hay. Các bạn học sinh lớp 10 sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Hà Ngọc Khánh*, *Tạ Nam Khánh*, *Lê Ngọc Hoa*, *Trần Hồng Quý*, *Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thanh Lâm*, *Bùi Văn Quyến*, *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phùng Lê Anh Quân*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Công Đức*, *Lê Thị Thu Sương*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa.

**NGUYỄN MINH ĐỨC**

**Bài T10/490.** *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a, b, c)$ thỏa mãn $2^a+5^b=7^c$.* (1)

***Lời giải.*** (Dựa trên lời giải của bạn *Chu Ngọc Chiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**).

• Xét $a=1$

- Nếu $b=1$ thì (1) trở thành $7^c=7\Rightarrow c=1$. Vậy $(a; b; c)=(1; 1; 1)$ là nghiệm của (1).

- Nếu $b>1$ thì (1) trở thành $2+5^b=7^c$ (2)

Vì $5^b\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 7^c\equiv 3 \pmod 4$

$$\Leftrightarrow (-1)^c\equiv -1 \pmod 4.$$

Vậy $c$ lẻ. Đặt $c=2k+1$ $(k\ge 0)$. Khi đó (2) trở thành $2+5^b=7.49^k\equiv 7(-1)^k \pmod{25}$. Vì $b>1$

nên $5^b \equiv 0 \pmod{25}$. Vậy $7(-1)^k \equiv 2 \pmod{25}$. Không xảy ra với mọi $k$ (chẵn hay lẻ).

• Xét $a > 1$. Ta có $2^a + 5^b = 7^c \Rightarrow 7^c \equiv 1 \pmod 4$ (vì $2^a \equiv 0 \pmod 4$) $\Rightarrow (-1)^c \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow c$ chẵn. Đặt $c = 2k$, $(k \geq 1)$; khi đó (1) trở thành

$$2^a + 5^b = 49^k \qquad (3)$$

Suy ra $(-1)^a + (-1)^b \equiv 1 \pmod 3$. Vậy $a$, $b$ đều lẻ. Vì $a > 1$ nên $a \geq 3$ vậy $2^a \equiv 0 \pmod 8$. Khi đó (3) trở thành

$$5^b \equiv 49^k \pmod 8 \Rightarrow 5^b \equiv 1 \pmod 8.$$

Do $b$ lẻ nên $5^b \equiv 5 \pmod 8$. Vậy ta có mâu thuẫn. Vậy $(a; b; c) = (1; 1; 1)$ là bộ số duy nhất thỏa mãn đề bài. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài này được khá nhiều bạn tham gia giải. Tất cả đều có lời giải đúng với nhiều cách giải (dài hay ngắn) khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Hưng Yên:** *Bùi Văn Quyền*, 10A1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hồ Anh Hưng*, 10A1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự; Tuy Hòa; **Đồng Tháp:** *Phạm Công Minh*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T11/490.** *Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi:*

$u_1 = 14, u_2 = 20, u_3 = 32, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n + 8u_{n-1}$

*với $n \geq 2$. Chứng minh rằng: $u_{2018} = 5.2^{2018}$.*

***Lời giải.*** (*Dựa theo ý tưởng của đa số các bạn đã học lý thuyết phương trình sai phân tuyến tính*).

***Cách 1.*** Nhận xét rằng, từ giả thiết ta thấy dãy đã cho có phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda - 8 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm

$$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1 \mp \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \mp i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy dãy đã cho có dạng

$$u_n = A.2^n + 2^n\left(B\cos\frac{n\pi}{3} + C\sin\frac{n\pi}{3}\right), A, B, C \in \mathbb{R},$$

$$n \in \mathbb{N}^*. \qquad (2)$$

Kết hợp (2) với giả thiết, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} A + \dfrac{B}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}C = 7 \\ A - \dfrac{B}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}C = 5 \\ A - B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 2 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Do đó $u_n = 6.2^n + 2^n.2\cos\dfrac{n\pi}{3}$. Suy ra

$$u_{2018} = 6.2^{2018} + 2^{2018}.2\cos\frac{2018\pi}{3}$$

$$= 6.2^{2018} - 2^{2018} = 5.2^{2018}.$$

***Cách 2.*** (*phương pháp quy nạp*).

Xét $u_n = 2^n v_n$, ta có $v_1 = 7, v_2 = 5, v_3 = 4$. Thế vào hệ thức đã cho, ta thu được

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}$$

$$v_{n+2} - v_{n+1} + v_n = v_{n+1} - v_n + v_{n+1}$$
$$= \ldots = v_3 - v_2 + v_1 = 6.$$

Từ đây, bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được dãy $(v_n)$ tuần hoàn chu kỳ 6 nên $v_{2016+2} = v_2 = 5$. Do đó

$$u_{2018} = v_{2018}.2^{2018} = v_2.2^{2018} = 5.2^{2018}. \quad ❐$$

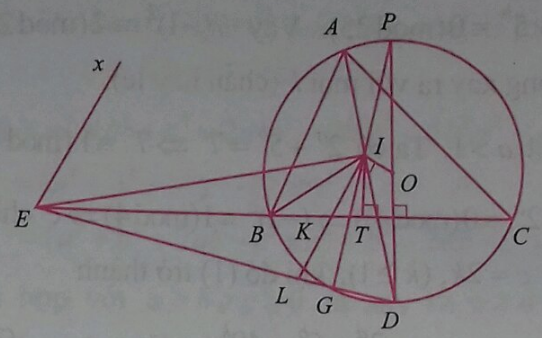
➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán quen thuộc tính toán dãy sai phân tuyến tính bậc 3. Các bạn gửi đến đều cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Vũ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Doãn Liên*, 11A2, *Phan Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Tháp:** *Phạm Công Minh*, *Nguyễn Phúc Tăng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Mai Đức Thái*, 10T2, *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Ngô Bảo An*, 9A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hưng Yên:** *Nguyễn Lê Huy*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Trọng Đức Huy*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nghệ An:** *Phạm Đại Pháp*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Đinh Viết Ty*, 11T, THPT Đô Lương; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Huy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Ngọc Duy*, *Bùi Anh Vũ*, *Đỗ Minh Hiệp*, *Vương Tùng Dương*, 11A1, *Chu Thị Thanh*, *Trần Hồng Quý*, *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/490.** *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D là giao điểm thứ hai của AI và (O). E là giao điểm của BC và đường thẳng đi qua I vuông góc AI. K, L theo thứ tự là giao điểm của BC, DE và đường thẳng đi qua I vuông góc với OI. Chứng minh rằng: KI = KL.*

***Lời giải.*** Gọi $G$, $P$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $DE$, $GI$ với đường tròn $(O)$. Kẻ $Ex \parallel IK$, $IT \perp BC$ $(T \in BC)$. Ta có

$$\widehat{EIB} = \widehat{AIB} - 90^0 = 90^0 + \frac{\widehat{ACB}}{2} - 90^0 = \widehat{BCI}.$$




Suy ra $EI$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\Delta BIC \Rightarrow EI^2 = EB.EC = EG.ED$. Lại vì $\Delta EID$ vuông tại $I$, nên $IG \perp ED$, suy ra $D$, $O$, $P$ thẳng hàng, dẫn đến $DP \perp BC \Rightarrow DP \parallel IT$.

Kết hợp với $OD = OP$ ta thấy $I(TODP) = -1$ (tính chất của *chùm điều hòa*). Mặt khác $EK$, $Ex$, $EI$, $EL$ lần lượt vuông góc với $IT$, $IO$, $ID$, $IP$, suy ra $E(KxIL) = I(TODP) = -1$, mà $IL \parallel Ex$, nên $KI = KL$. ❐

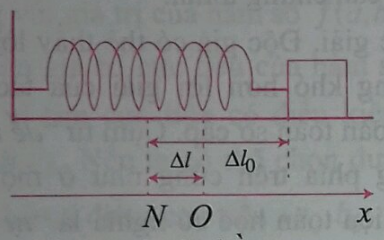
➢***Nhận xét.*** Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều sử dụng tính chất của *chùm điều hòa* để chứng minh $KI = KL$, tương tự như lời giải trên. Những bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Hà Nội:** *Mai Đức Thái*, 10 Toán 2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Hà Ngọc Khánh*, 10A1, *Bùi Anh Vũ*, *Lê Anh Dũng*, *Vũ Ngọc Duy*, *Vương Tùng Dương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Vũ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Thuận Thành; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, *Nguyễn Danh Lân*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Phước:** *Lương Ngọc Chung*, 10 Toán, THPT chuyên Quang Trung; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **TP. Hồ Chí**

**Minh:** *Trần Vũ Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài L1/490.** *Một con lắc lò xo gồm vật nhỏ có khối lượng $m = 0,03$ kg và lò xo có độ cứng $k = 1,5$ N/m. Vật nhỏ được đặt trên giá đỡ cố định nằm ngang dọc theo trục của lò xo. Hệ số ma sát trượt giữa giá đỡ và vật nhỏ là $\mu = 0.2$. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị dãn một đoạn $\Delta l_0 = 15$ cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy $g = 10\,\text{m/s}^2$. Xác định tốc độ lớn nhất vật nhỏ đạt được trong quá trình dao động.*

***Lời giải.***




*O là vị trí cân bằng*
*N là vị trí mà lò xo không biến dạng*

Vật đạt vận tốc lớn nhất tại vị trí $O$ mà lực ma sát cân bằng với lực đàn hồi của lò xo, khi đó vật còn cách vị trí mà lò xo không biến dạng một đoạn $\Delta l$ xác định bởi: $\mu mg = k\Delta l$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,2.0,03.10}{1,5} = 0,04\,\text{m}.$$

Công của lực ma sát trên đoạn $\Delta l_0 - \Delta l$ đo bằng độ giảm cơ năng khi vật đi từ vị trí ban đầu tới vị trí cân bằng nói trên:

$$-\mu mg(\Delta l_0 - \Delta l) = \frac{mv_{max}^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2} - \frac{k\Delta l_0^2}{2}.$$

Thay số : $-0,2.0,03.10(0,15 - 0,04)$

$$= \frac{0,03v_{max}^2}{2} + \frac{1,5.0,04^2}{2} - \frac{1,5.0,15^2}{2}.$$

Suy ra: $v = 0,7778$ m/s = 77, 78 cm/s. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn có tên dưới đây đã có lời giải đúng bài ra kì này: **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Hương Giang*, 11 Toán 1, *Bùi Văn Quyến*, *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**

**Bài L2/490.** *Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu dân cư bằng đường dây truyền tải một pha. Nếu điện áp tại nơi truyền tải tăng từ U lên 2U thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ công suất điện tăng từ 93 hộ lên 120 hộ. Coi rằng công suất điện truyền đi từ trạm phát không đổi, công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân như nhau và không đổi. Hệ số công suất trên đường truyền tải không đổi. Khi tăng điện áp tại nơi truyền tải lên 3U thì số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là bao nhiêu?*

***Lời giải.*** Gọi công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân là $\mathcal{P}_1$.

Công suất hao phí khi truyền tải: $\Delta\mathcal{P} = R\dfrac{\mathcal{P}^2}{U^2}$

Lúc đầu, điện áp $U$:

$$\mathcal{P} = \Delta\mathcal{P} + 93\mathcal{P}_1 \qquad (1)$$

Khi điện áp tăng $2U$:

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{P}}{4} + 120\mathcal{P}_1 \qquad (2)$$

Khi điện áp tăng $3U$, số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là $x$:

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{P}}{9} + x\mathcal{P}_1 \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\Delta\mathcal{P} = 36\mathcal{P}_1$ và $x = 125$. Vậy khi điện áp truyền đi là $3U$, trạm cung cấp đủ điện năng cho 125 hộ. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải bài Vật lý này về Tòa soạn.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**


# PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

**M. GORELOV** (*CHLB Nga*) **HOÀNG NGỰ HUẤN**

(*GV Đại học Mỏ Địa Chất, Hà Nội*)

(*Biên dịch từ KBAHT, số 5 – 6, 2015*)

Ý tưởng lần mà đầu tiên được *Lagrange* sử dụng trong "*cơ học giải tích*" (năm 1788) thì vào thời điểm hiện tại là một trong những ý tưởng trọng tâm của lĩnh vực lý thuyết lớn bao trùm các ngành quy học toán học, lý thuyết các quá trình tối ưu, toán kinh tế, một vài lĩnh vực của hình học, giải tích và vật lý. Lý thuyết này rất là khó, nhưng bản thân ý tưởng ban đầu của *Lagrange* lại hoàn toàn sơ cấp và rất hữu ích khi giải nhiều bài toán Olympic. Đây chính là nội dung của bài báo này.

## Ý TƯỞNG CƠ BẢN

Chúng ta sẽ bắt đầu từ ví dụ.

**Bài toán 1** (*M*1067). *Chứng minh rằng, với các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2=1$, *ta có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

***Lời giải.*** Dễ thấy: $\frac{a}{1-a^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{18}\frac{(3a+2\sqrt{3})(3a-\sqrt{3})^2}{1-a^2}\ge 0$$

với $0\le a\le 1$. Cộng BĐT này với hai BĐT tương tự:

$$\frac{b}{1-b^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(b^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\ge 0$$

và $$\frac{c}{1-c^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(c^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\ge 0.$$

Khi đó ta thu được BĐT

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}-$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2-1)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ge 0$$

đúng với mọi *a*, *b*, *c* thuộc [0;1). Do *a*, *b*, *c* thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$, nên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán được giải. Độc giả có thể thấy lời giải nêu trên không khó hơn lời giải của tác giả. Ngoài ra nó hoàn toàn sơ cấp. Cụm từ "*dễ thấy*" được sử dụng phía trên cũng như ở mọi nơi trong các tài liệu toán học có nghĩa là "*tự kiểm tra*". Kiểm tra đẳng thức tương ứng trên thực tế là không khó: chỉ cần nhân nó với nhân tử chung và phá ngoặc. Thực sự thì chỉ còn một điều kiện không hiểu là từ đâu ra biểu thức lạ lùng như sau

$$\frac{a}{1-a^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ?$$

Thông thường những thủ thuật kiểu như thế này người ta cho là không cần thiết phải giải thích cho học sinh. Còn bây giờ chúng tôi sẽ trình bày phương pháp cho phép tìm những lời giải tương tự.

Xin được bắt đầu với bài toán vừa giải xong. Nó sẽ được giải nếu chúng ta tìm được giá trị cực tiểu của hàm số

$$f(a,b,c)=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

với điều kiện *a*, *b*, *c* không âm và thỏa mãn đẳng thức $g(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-1=0$. Để tránh nhầm lẫn, chúng ta sẽ gọi giá trị cực tiểu

của hàm số $f$ trên tập những giá trị $a$, $b$, $c$ không âm là cực tiểu, còn giá trị cực tiểu của $f$ với điều kiện bổ sung $g=0$ là cực tiểu có điều kiện. Nếu không có điều kiện $g=0$ thì giá trị cực tiểu của $f$ có thể được tìm thấy bằng các phương pháp quen thuộc. Và như vậy đẳng thức $g=0$ chính là một trở ngại. Phương pháp sau cho phép vượt qua nó.

Lấy một giá trị $\lambda$ nào đó và xét hàm số $L(a,b,c;\lambda)=f(a,b,c)+\lambda g(a,b,c)$. Cụ thể là lấy giá trị $\lambda$ nào thì cần phải xác định. Chú ý là với mọi giá trị $a$, $b$, $c$ thỏa mãn điều kiện $g(a,b,c)=0$, giá trị của hàm số $L(a,b,c;\lambda)$ trùng với giá trị của hàm số $f(a,b,c)$. Chúng ta thử tìm giá trị cực tiểu của hàm số $L(a,b,c;\lambda)$ thay vì tìm cực tiểu có điều kiện của hàm số $f(a,b,c)$. Nếu ta có thể chọn được tham số $\lambda$ sao cho tại điểm cực tiểu $(a_0,b_0,c_0)$ của hàm số $L(a,b,c;\lambda)$ đẳng thức $g(a_0,b_0,c_0)=0$ đúng, khi đó đương nhiên chúng ta tìm được giá trị cực tiểu có điều kiện của $f$.

Trên thực tế, trong lời giải nêu trên của bài toán 1, giá trị $\lambda=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ được sử dụng mà không giải thích tại sao nó được tìm ra. Chúng ta sẽ giải thích làm thế nào được tìm được giá trị $\lambda$ này. Đối với các hàm $f$ và $g$ đang xét, thì hàm $L$ có thể viết dưới dạng tổng của ba số hạng.

$$L(a,b,c;\lambda)=\left[\frac{a}{1-a^2}+\lambda\left(a^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\left[\frac{b}{1-b^2}+\lambda\left(b^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\left[\frac{c}{1-c^2}+\lambda\left(c^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Mỗi một số hạng là một hàm số của một trong các biến $a$, $b$, $c$, vì thế tại điểm cực tiểu của hàm số $L(a,b,c;\lambda)$ mỗi số hạng cũng phải là cực tiểu. Tức là đạo hàm của hàm số

$$l(a;\lambda)=\frac{a}{1-a^2}+\lambda\left(a^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

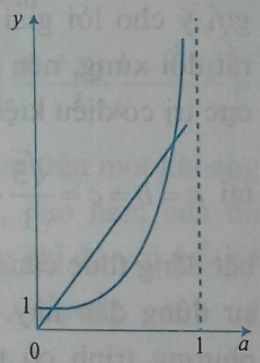
tại điểm $a$ tương ứng phải bằng 0, tức là phải thỏa mãn điều kiện $l'(a;\lambda)=\frac{1+a^2}{(1-a^2)^2}+2\lambda a=0.$

Tương tự, hai đẳng thức $\frac{1+b^2}{(1-b^2)^2}+2\lambda b=0$ và $\frac{1+c^2}{(1-c^2)^2}+2\lambda c=0$ cũng phải thỏa mãn. Về nguyên tắc, ba phương trình này cùng với phương trình $a^2+b^2+c^2=1$ là đủ để tìm bốn ẩn $a$, $b$, $c$ và $\lambda$. Sự thực là hệ phương trình thu được là rất khó. Nhưng may mắn là ta chỉ cần tìm một giá trị của $\lambda$. Vì vậy nên chọn một nghiệm "tốt" của hệ. Mà nghiệm tốt chính là nghiệm tương ứng với điểm cực tiểu của hàm số $L(a,b,c;\lambda)$. Lại có điểm cực tiểu đạo hàm đổi dấu từ "–" sang "+".

Đồ thị hàm số

$$y=\frac{1+a^2}{(1-a^2)^2}$$

ở hình bên (đồ thị này là "chính xác", nhưng để dễ nhìn thì tỷ lệ trên trục hoành và trục tung được chọn khác nhau). Dễ thấy, nó cắt đường thẳng $y=-2\lambda a$ nhiều nhất tại hai điểm, ngoài ra nếu số điểm cắt là hai, thì nghiệm "tốt" nằm ở bên phải. Vì thế tại nghiệm "tốt" có $a=b=c$. Nếu kể tới đẳng thức $a^2+b^2+c^2=1$, chúng ta thu được $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

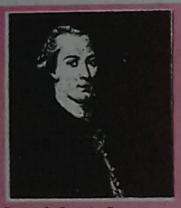



Thế giá trị thu được của $a$ vào phương trình $\frac{1+a^2}{(1-a^2)^2}+2\lambda a=0$, tìm được $\lambda=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Còn lại là giá trị cực tiểu của hàm

$L\left(a,b,c;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ một cách trung thực. Bản chất đại số của bài toán đã được sử dụng trong quá trình thực hiện trên. Tuy thế vẫn có thể làm theo phương pháp thông thường với sự giúp đỡ của đạo hàm.

**Bài tập 1.** Hãy thực hiện điều đó.

Sơ đồ lập luận trên mang tên *phương pháp nhân tử Lagrange*. Hàm số $L(a,b,c;\lambda)$ được gọi là *hàm Lagrange* của bài toán cực tiểu có điều kiện đang khảo sát, còn tham số $\lambda$ được gọi là *nhân tử Lagrange*.



Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)

*Nhà toán học, cơ học và thiên văn học người Pháp gốc Italia. Ông là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất thế kỷ thứ 17 có những đóng góp quan trọng vào sự phát triển của toán giải tích, lý thuyết số và lý thuyết sác xuất thống kê. Thế nhưng những công trình quan trọng nhất của ông lại thuộc lĩnh vực mà ý tưởng mà chúng ta đang thảo luận đóng vai trò trọng tâm, then chốt.*

Chú ý là công thức của bài toán 1 chứa đựng lời gợi ý cho lời giải của nó. Thực tế thì bài toán rất đối xứng, nên hoàn toàn lôgic khi giả sử là cực trị có điều kiện của hàm $f(a,b,c)$ đạt được tại $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Bằng cách thế trực tiếp vào bất đẳng thức cần chứng minh có thể nhận thấy sự đúng đắn này. Khi đó lời giải "tốt"của hệ phương trình có thể tìm được mà không cần dùng tới hình vẽ. Những lời gợi ý như thế này là cần thiết và nên sử dụng.

Xin lưu ý là trong lời giải của bài toán đã cho chúng ta đã sử dụng điều kiện đủ của giá trị cực tiểu (nếu tìm được giá trị $\lambda$ thích hợp, thì bài toán được giải). Có thể chỉ ra một lớp rộng các bài toán mà điều kiện đủ kiểu như trên không hiệu quả với nó. Vấn đề này lại vượt ra ngoài khuôn khổ của bài báo. Chúng ta chỉ giới hạn ở việc trình bày những điều kiện đó làm việc như thế nào qua các ví dụ. Tất cả những lời giải được trình bày dưới đây sẽ gồm ba phần:

(1) lập bài toán tối ưu;

(2) phân tích;

(3) chứng minh.

Phần thứ hai có thể không cần viết vào "giấy trắng", giống như đã làm ở trên. Vì thế ở bước này có thể tự do làm những việc sau: chỉ tìm kiếm một vài nghiệm, đoán mò ra các nghiệm này, suy luận thông minh … Trong phần thứ nhất, những suy nghĩ, định hướng tốt đóng vai trò rất rõ rệt. Thế nhưng trong phần thứ ba tất cả phải tuyệt đối chặt chẽ. Để tránh việc hiểu nhầm, đầu mỗi phần sẽ được đanh số đặt trong ngoặc tròn.

## BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

Bất đẳng thức này được *Otto Holder* tìm ra vào năm 1889 nhưng mang tên *Jensen*. Bất đẳng thức đúng đối với hàm lồi bất kỳ. Trong bài toán dưới đây chúng ta sẽ chứng minh nó đối với lớp hàm hẹp hơn một chút.

**Bài toán 2.** *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trong một khoảng mở (hữu hạn hoặc vô hạn) và đạo hàm của nó không tăng. Chứng minh rằng, khi đó với mọi số $x_1, x_2, ..., x_k$ thuộc khoảng này có bất đẳng thức:*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k} \le f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right).$$

***Lời giải.***

(1) Trong bài toán này không có những ràng buộc phức tạp. Nhưng đôi khi cần phải chủ động tạo ra chúng, sau đó loại chúng đi bằng phương pháp nhân tử Lagrange. Trò chơi này là hữu ích, nếu bài toán thu được trở nên dễ hơn, ví dụ như nó có thể chia nhỏ ra dẫn đến việc khảo sát các hàm số một biến số. Cố định một số bất kỳ $s$ từ khoảng khảo sát và xét bài toán cực đại hóa đại lượng $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)$ với điều kiện ràng buộc $x_1+x_2+...+x_k-ks=0$. Nếu giá trị cực đại cần tìm đạt được tại $x_1=x_2=...=x_k=s$, thì bất đẳng thức được

chứng minh với mọi giá trị $x_1, x_2, ..., x_k$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_k = ks$. Và bởi vì $s$ là tùy ý nên từ đây suy ra tính đúng đắn của bất đẳng thức đã cho với mọi $x_1, x_2, ..., x_k$.

(2) Hàm Lagrange của bài toán tối ưu hóa đã cho có dạng

$$L(x_1, x_2, ..., x_k; \lambda) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k) + \lambda(x_1 + x_2 + ... + x_k - ks)$$

$$= [f(x_1) + \lambda(x_1 - s)] + [f(x_2) + \lambda(x_2 - s)] + ... + [f(x_k) + \lambda(x_k - s)].$$

Chúng ta quan tâm tới giá trị của nhân tử Lagrange $\lambda$ mà tương ứng với nó giá trị cực đại của hàm số $L(x_1, x_2, ..., x_k; \lambda)$ đạt được tại $x_1 = x_2 = ... = x_k = s$, hay cũng chính là giá trị cực đại của hàm số $l(x; \lambda) = f(x) + \lambda(x - s)$ đạt được tại $x = s$. Để có được điều này thì điều kiện cần là đạo hàm của hàm số đã cho tại $x = s$ bằng không, tức là $f'(s) + \lambda = 0$. Từ đây suy ra $\lambda = -f'(s)$.

(3) Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(s)(x - s)$. Từ tính đơn điệu của đạo hàm của hàm số $f(x)$, suy ra đạo hàm $g'(x) = f'(x) - f'(s)$ của hàm $g(x)$ không âm với $x \le s$ và không dương với $x \ge s$. Và đây chính là điều kiện đủ để tại điểm $x = s$ hàm $g(x)$ có cực đại. Vì thế giá trị cực đại của hàm số $g(x)$ bằng $g(s)$, tức là với mọi giá trị $x$ bất đẳng thức $g(x) \le g(s)$ được thỏa mãn. Cụ thể là $g(x_i) \le g(s)$ với $i = 1, 2, ..., k$. Cộng các bất đẳng thức này lại chúng ta thu được bất đẳng thức

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k) - f'(s)(x_1 + x_2 + ... + x_k - ks) \le kf(s).$$

Đúng với tất cả các giá trị của biến thuộc khoảng đang xét. Thế có nghĩa là với $x_1 + x_2 + ... + x_k = ks$ bất đẳng thức sau là đúng

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k) = kf(s).$$

Và vì $s$ là tùy ý nên suy ra bất đẳng thức Jensen đúng với mọi giá trị của biến mà chúng ta đang quan tâm. Bất đẳng thức Jensen có rất nhiều trường hợp riêng quan trọng. Tuy nhiên giải chúng bằng phương pháp nhân tử Lagrange không quá dài hơn so với việc đưa chúng về bất đẳng thức Jensen.

*Là kỹ sư, nhà toán học người Đan Mạch. Ông phần lớn là tự học và chưa bao giờ đảm nhận các chức vụ hàn lâm, đặc biệt toán học chỉ là môn mà ông nghiên cứu khi công việc chính rảnh rỗi. Jensen là người đầu tiên bắt đầu nghiên cứu một cách hệ thống các hàm số lồi. Bất đẳng thức nổi tiếng của mình được công bố vào năm 1906.*

*Johan Ludwig William Valdemar Jensen* (1859 - 1925)

## BÀI TẬP

**2.** Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trên một khoảng mở (hữu hạn hoặc vô hạn), đạo hàm của nó không giảm. Chứng minh rằng khi đó với mỗi số $x_1, x_2, ..., x_k$ có đẳng thức sau

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k)}{k} \ge f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}\right).$$

**3.** Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trên một khoảng mở (hữu hạn hoặc vô hạn), đạo hàm của nó không tăng. Chứng minh rằng khi đó với mỗi số $x_1, x_2, ..., x_k$ và mọi số dương tùy ý $p_1, p_2, ..., p_k$ có bất đẳng thức sau

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + ... + p_k f(x_k) \le$$

$$\le (p_1 + p_2 + ... + p_k) f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_k x_k}{p_1 + p_2 + ... + p_k}\right).$$

**4.** (*Olympic Saint – Peterburg*, 1980). Tổng của bốn số dương $a$, $b$, $c$, $d$ bằng 1. Chứng minh rằng $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

**5.** (*BĐT Cauchy*). Chứng minh rằng với mọi số không âm $a_1, a_2, ..., a_k$, bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}.$$

*Là nhà toán học người Pháp. Ông được biết đến với những công trình rất đặc sắc ở những lĩnh vực rất khác nhau của toán học: từ lý thuyết số tới hình học rồi cơ học. Nhưng phần lớn công sức của mình ông dành cho việc hệ thống hóa những kiến thức đạt được cho tới thời bấy giờ. Đặc biệt vào năm 1821 ông cho xuất bản cuốn sách "Giáo trình giải tích của Trường bách khoa hoàng gia", trong đó có công bố chứng minh bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Cách chứng minh này cho tới nay vẫn được sử dụng rộng rãi nhất.*

*Augustin - Louis Cauchy*
(1789 - 1857)

**6.** (*Ky Phan*). Chứng minh rằng với mọi số không âm $a_1, a_2, ..., a_k$ thuộc đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}}{\sqrt[k]{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_k)}} \le \frac{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}}{\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+...+(1-a_k)}{k}}.$$

*Nhà toán học sinh ra ở Trung Quốc, làm việc ở Pháp, Mỹ và Đài Loan đã thu được các kết quả quan trọng trong nhiều lĩnh vực thuộc cả toán lý thuyết và lẫn ứng dụng.*

*Ky Phan* (1914 - 2010)

**7.** Chứng minh rằng với các số không âm $a, b, c$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

**8.** Giả sử $\alpha, \beta, \gamma$ là các góc của tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \le \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

**9.** (*Olympic của trường phổ thông 239 thuộc Saint – Peterburg*, 2001). Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_k$, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(1+\frac{1}{a_1(1+a_1)}\right)\left(1+\frac{1}{a_2(1+a_2)}\right)...\left(1+\frac{1}{a_k(1+a_k)}\right) \ge$$

$$\ge \left(1+\frac{1}{p(1+p)}\right)^k, \text{ với } \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} = p.$$

**10.** (*Ban giám khảo Olympic Quốc tế*, 1998). Giả sử $a_1, a_2, ... a_k$ là các số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + ... + \frac{1}{1+a_k} \ge \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}}.$$

**11.** (*Olympic Saint – Peterburg*, 2012). Cho trước các số dương $a, b, c, d$. Biết rằng

$$\frac{2}{a^3+1} + \frac{2}{b^3+1} + \frac{2}{c^3+1} + \frac{2}{d^3+1} = 2,$$

chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \ge 0.$$

**12.** Giả sử $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + ... + \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2 \ge \frac{(k^2+1)}{k}.$$

## BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Trong nửa đầu của thế kỷ trước giải tích toán học ở một mức độ rất cao đã chuyển sang ngôn ngữ của hình học. Trong bối cảnh đó bất đẳng Holder và bất đẳng thức Minkowski được chứng minh và đóng vai trò rất quan trọng. Kết quả của Holder (năm 1889) có thể được phát biểu như sau.

**Bài toán 3.** *Giả sử các số p và q dương và thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Chứng minh rằng khi đó với mọi số không âm* $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ *có bất đẳng thức đúng sau:*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k \le$$

$$\le (a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + ... + b_k^q)^{\frac{1}{q}}.$$

***Lời giải.*** (1) Bất đẳng thức cần chứng minh không có gì thay đổi, nếu nhân tất cả các số $b_1, b_2, ..., b_k$ với cùng một số dương. Vì thế có thể coi[1] là $b_1^q + b_2^q + ... + b_k^q = 1$. Chúng ta sẽ coi $b_1, b_2, ..., b_k$ là các tham số (tùy ý, nhưng không cố định). Cũng cùng những lý do đó[2] có $a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p = 1$. Bài toán được giải nếu chúng ta chứng minh được với những điều kiện đã nêu thì $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k \le 1$. Để làm được điều này thì chỉ cần tìm giá trị cực đại của hàm số $f(a_1, a_2, ..., a_k) = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k$ với điều kiện ràng buộc $a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p - 1 = 0$.

(2) Hàm Lagrange của bài toán này có dạng

$$L(a_1, a_2, ..., a_k; \lambda) =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k + \lambda(a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p - 1)$$
$$= (a_1b_1 + \lambda a_1^p) + (a_2b_2 + \lambda a_2^p) + ... + (a_kb_k + \lambda a_k^p) - \lambda.$$

Giá trị cực đại của hàm số này đạt được, khi giá trị của các hàm số $l_i(a_i; \lambda) = a_ib_i + \lambda a_i^p$ với $(i = 1, 2, ..., k)$ là cực đại. Đạo hàm của hàm $l_i(a_i; \lambda)$ bằng $b_i + \lambda p a_i^{p-1}$ và bằng không tại một điểm duy nhất $a_i = \left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p-1}} b_i^{\frac{1}{p-1}}$. Thay các giá trị này vào điều kiện ràng buộc của bài toán tối ưu, ta thu được

$$\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(b_1^{\frac{p}{p-1}} + b_2^{\frac{p}{p-1}} + ... + b_k^{\frac{p}{p-1}}\right) = 1.$$

Từ đẳng thức $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, có $\frac{p}{p-1} = q$, vì vậy phương trình tìm được sẽ có dạng

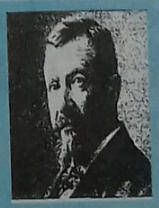
$$\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^q (b_1^q + b_2^q + ... + b_k^q) = 1,$$

và nếu tính tới giả thiết vừa tạo nên thì $\left(-\frac{1}{\lambda p}\right)^q = 1$. Từ đó có $\lambda = -\frac{1}{p}$ và $a_i = b_i^{\frac{1}{p-1}} = b_i^{\frac{q}{p}}$.

(3) Xét hàm số $g_i(a_i) = a_ib_i - \frac{1}{p}a_i^p$. Đạo hàm của nó là $b_i - a_i^{p-1}$ bằng không tại duy nhất một điểm $a_i = b_i^{\frac{1}{p-1}}$. Từ điều kiện $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ có $p > 1$, vì vậy đạo hàm là giảm và tại điểm này nó đổi dấu từ dương sang âm. Điều này là đủ để khẳng định tại điểm đã chỉ ra hàm số có giá trị cực đại. Suy ra, tại điểm cực đại, điều kiện $a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p - 1 = 0$ được thỏa mãn, và giá trị lớn nhất cần tìm của biểu thức $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k$ bằng

$$b_1^{\frac{1}{p-1}}b_1 + b_2^{\frac{1}{p-1}}b_2 + ... + b_k^{\frac{1}{p-1}}b_k =$$
$$= b_1^{\frac{p}{p-1}} + b_2^{\frac{p}{p-1}} + ... + b_k^{\frac{p}{p-1}} = b_1^q + b_2^q + ... + b_k^q = 1.$$

Đây là điều phải chứng minh



*Otto Ludwig Holder*
(1859 - 1937)

*Nhà toán học Đức, chuyên gia trong lĩnh vực đại số và giải tích. Thế nhưng tiếng vang lớn nhất mà ông có được là nhờ bất đẳng thức đã cho.*

## BÀI TẬP

**13.** Hãy tìm chính kết quả đã cho bằng cách cực tiểu hóa giá trị của $a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p$ với điều

---

[1] *Trường hợp tất cả các biến bằng không cần phải nói riêng, nhưng nó là dễ thấy. Ràng buộc này, về nguyên tắc, không cần đưa vào, nhưng nó có ưu điểm là làm đơn giản các công thức.*

[2] *Ràng buộc này là bắt buộc, ngược lại thì cực đại là không tồn tại. Lưu ý là trong trường hợp này hạn chế này được đưa vào hơi khác một chút so với khi chứng minh bất đẳng thức Jensen.*

kiện ràng buộc $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k = 1$.

**14.** Giả sử một trong hai số $p$ và $q$ là âm và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng khi đó với các số không âm tùy ý $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2 ..., b_k$, bất đẳng thức sau là đúng

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k \geq$$
$$\geq (a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + ... + b_k^q)^{\frac{1}{q}}.$$

**15.** (*Bất đẳng thức Cauchy – Bunyakovsky*, 1821). Chứng minh rằng với các số thực bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ bất đẳng thức sau đúng

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2} \times$$
$$\times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2}.$$

*Viktor Yakovlevich Bunyakovsky*
(1804 - 1889)

*Nhà toán học Nga gốc Ucraina, từng là phó chủ tịch Viện Hàn lâm Nga. Ông chủ yếu là nghiên cứu lý thuyết số và lý thuyết xác suất, trong số đó có cả những ứng dụng của xác suất. Ông cũng dành nhiều quan tâm cho sự phát triển giáo dục ở Nga với vai trò vừa là nhà sư phạm vừa đảm nhận các chức vụ hành chính khác nhau. Bất đẳng thức được trích dẫn ở trên được Cauchy chứng minh vào năm 1821. Sau đó vào năm 1829 Bunyakovsky chứng minh bất đẳng thức tương tự dạng tích phân.*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

*25 năm sau nhà toán học người Đức Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921) cũng thu được chính kết quả này. Chính vì thế trong các tài liệu của các nước phương Tây cả hai bất đẳng thức được mang tên Cauchy - Schwarz. Ở Nga cả hai bất đẳng thức nêu trên và các biến thể tương tự và các dạng tổng quát hóa của chúng được gọi là bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky.*

**16.** (*Bất đẳng thức Minkowski*, 1896). Giả sử $p > 1$. Chứng minh rằng với các số $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ không âm, bất kỳ, bất đẳng thức sau là đúng

$$\left[(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + ... + (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq (a_1^p + a_2^p + ... + a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p + ... + b_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

*Nhà toán học Đức đã thành công trong việc thống nhất hình học với lý thuyết số và vật lý. Ông là một trong những người thầy của Einstein.*

*Hermann Minkowski*
(1864 - 1909)

**17.** Chứng minh rằng với các số $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ không âm tùy ý, bất đẳng thức sau là đúng

$$\left[(a_1 + b_1).(a_2 + b_2)...(a_k + b_k)\right]^{\frac{1}{k}} \geq$$
$$\geq (a_1a_2...a_k)^{\frac{1}{k}} + (b_1b_2...b_k)^{\frac{1}{k}}.$$

**18.** (*Olympic Saint - Peterburg*, 1993). Chứng minh rằng với các số $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a_1b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2b_2}{a_2 + b_2} + ... + \frac{a_kb_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A + B},$$

ở đó $A = a_1 + a_2 + ... + a_k$, $B = b_1 + b_2 + ... + b_k$.

**19.** Các số dương $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$ thỏa mãn điều kiện

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)^3 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2.$$

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + ... + \frac{a_k^3}{b_k} \geq 1$.

**20 .** (*M*1193). Chứng minh bất đẳng thức

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq$$
$$\geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z),$$

với các số $a, b, c, x, y, z$ bất kỳ.

## CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Nhiều ví dụ trong đó việc sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange đưa các bài toán hình học tới các bài toán cực tiểu, cực đại. Sau đây là một trong những ví dụ như vậy.

**Bài toán 4.** *Tứ giác ngoại tiếp đường tròn bán kính 1 có diện tích $S_1$. Nối các điểm tiếp xúc của nó với đường tròn ta thu được tứ giác có diện tích là $S_2$. Giá trị nhỏ nhất có thể của tổng $S_1+S_2$ là giá trị nào?*

***Lời giải.***

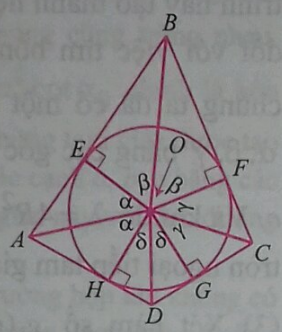
(1) Giả sử $ABCD$ là tứ giác lớn, còn $EFGH$ là tứ giác nhỏ, $O$ là tâm của đường tròn. Ký hiệu

$\widehat{AOE}=\widehat{AOH}=\alpha,$

$\widehat{BOF}=\widehat{BOE}=\beta,$

$\widehat{COG}=\widehat{COF}=\gamma,$

$\widehat{DOH}=\widehat{DOG}=\delta.$




Khi đó $S_1=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta$

và $S_2=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta).$

Như vậy bài toán dẫn tới tìm giá trị cực tiểu của hàm số $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=2\tan\alpha+2\tan\beta+2\tan\gamma+$

$+2\tan\delta+\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta.$

Các góc $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ có mối liên hệ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ và vì đường tròn nội tiếp với tứ giác $ABCD$ chứ không phải là ngoại tiếp nên tất cả các góc đều thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) Hàm Lagrange của bài toán tối ưu đã cho là

$L(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=2\tan\alpha+2\tan\beta+2\tan\gamma+2\tan\delta+$

$+\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta+\lambda(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\pi)=$

$=(2\tan\alpha+\sin 2\alpha+\lambda\alpha)+(2\tan\beta+\sin 2\beta+\lambda\beta)+$

$+(2\tan\gamma+\sin 2\gamma+\lambda\gamma)+(2\tan\delta+\sin 2\delta+\lambda\delta)-\lambda\pi.$

Giả sử $l(\alpha;\lambda)=2\tan\alpha+\sin 2\alpha+\lambda\alpha$, khi đó

$$l'(\alpha;\lambda)=\frac{2}{\cos^2\alpha}+2\cos 2\alpha+\lambda$$

$$=2\left(\frac{2}{\cos^2\alpha}+2\cos^2\alpha\right)+\lambda-2.$$

Phương trình $\frac{1}{t}+2t=2-\lambda$ tùy thuộc vào $\lambda$ trên khoảng (0; 1) có thể có hoặc là một nghiệm hoặc là hai nghiệm. Tương ứng với nó, phương trình $l'(\alpha;\lambda)=0$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ có một hoặc hai nghiệm. Trường hợp thứ nhất thì nghiệm cho điểm cực tiểu của hàm số $l(\alpha;\lambda)$. Trong trường hợp thứ hai thì nghiệm lớn hơn tương ứng với điểm cực tiểu địa phương, còn nghiệm nhỏ hơn tương ứng với điểm cực đại của hàm số $l(\alpha;\lambda)$. Với trường hợp này thì giá trị nhỏ nhất có thể đạt được hoặc tại điểm tới hạn đầu tiên hoặc là ở bên trái của đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Nhưng dù sao đi nữa, để hàm $L(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ có giá trị cực tiểu thì điều kiện cần là $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. Nếu tính tới điều kiện đã cho ta thu được $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\pi}{4}$. Tức là $\lambda=-4$.

(3) Xét hàm số $g(x)=2\tan x+\sin 2x-4x+\pi$.

Đạo hàm $g'(x)=2\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos^2 x\right)-6$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{\pi}{4}$, và tại điểm này nó chuyển dấu từ trừ sang cộng. Đó là điều kiện đủ để tại điểm $x=\frac{\pi}{4}$ hàm này có cực tiểu. Vì vậy

$$g(x)=2\tan x+\sin 2x-4x+\pi\geq 3=g\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Thay $x$ trong bất đẳng thức bằng $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ và cộng lại, chúng ta sẽ thu được $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\geq 12$, tức là $S_1+S_2\geq 6$. Kết quả trên là một trường hợp của bài toán được đưa ra bởi *I. F. Sharygin*.

**Bài toán 5.** *Đa giác ngoại tiếp đường tròn bán kính 1 có diện tích là $S_1$. Nối các điểm tiếp xúc của cạnh đa giác với đường tròn lại thu được*

*đa giác có diện tích là $S_2$. Giá trị nhỏ nhất có thể của tổng $S_1+S_2$ là bao nhiêu?*

Còn bây giờ thì tôi không nhịn được khi trích dẫn bài báo "*Những kiệt tác hình học của Sharygin*" (Báo Kvant $N_0$ 1 năm 2016) của *V. Protasov* và *V. Tikhomirov*, trong đó có bài toán đã cho với đoạn trích: "*thật đáng tiếc chúng tôi không biết tác giả cũng như cách giải khác của bài toán này*". Bây giờ thì công cụ để giải bài toán này đã có! Chúng tôi nhường lại cho độc giả đi tìm kiếm "*sự ngọt ngào*" của bài toán này.

*Igor Fedorovich Sharygin*
(1937 - 2004)
*Nhà toán học, nhà sư phạm và nhà phổ cập khoa học Nga.*

**Bài toán 6.** *Giả sử a, b, c, S tương ứng là các cạnh và diện tích của một tam giác nhọn nào đó, còn $\alpha, \beta$ và $\gamma$ là các góc của một tam giác nhọn khác. Chứng minh rằng*

$$a^2\cot\alpha+b^2\cot\beta+c^2\cot\gamma\geq 4S,$$

*và đẳng thức chỉ xảy ra chỉ trong trường hợp hai tam giác là đồng dạng.*

***Lời giải.***

(1) Coi *a, b, c* là cho trước, còn các góc $\alpha, \beta, \gamma$ là biến số và sẽ tìm giá trị cực tiểu của hàm số $a^2\cot\alpha+b^2\cot\beta+c^2\cot\gamma$. Từ giả thiết, ta có đẳng thức $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

(2) Hàm Lagrange của bài toán đã cho có dạng

$$L(\alpha,\beta,\gamma;\lambda)=$$
$$=a^2\cot\alpha+b^2\cot\beta+c^2\cot\gamma+\lambda(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$
$$=(a^2\cot\alpha+\lambda\alpha)+(b^2\cot\beta+\lambda\beta)$$
$$+(c^2\cot\gamma+\lambda\gamma)-\lambda\pi.$$

Xét hàm số $l_1(\alpha;\lambda)=a^2\cot\alpha+\lambda\alpha$. Tại điểm cực tiểu của nó đạo hàm $l'_1(\alpha;\lambda)=-\dfrac{-a^2}{\sin^2\alpha}+\lambda$ phải bằng không. Tương tự ta có các đẳng thức $-\dfrac{b^2}{\sin^2\beta}+\lambda=0$ và $-\dfrac{c^2}{\sin^2\beta}+\lambda=0$. Cùng với điều kiện ràng buộc của bài toán các phương trình này tạo thành hệ phương trình rất phức tạp đối với việc tìm bốn ẩn $\alpha, \beta, \gamma$ và $\lambda$. Nhưng chúng ta đã có một gợi ý: chúng ta muốn có $\alpha, \beta, \gamma$ bằng các góc của tam giác có cạnh *a,b, c*. Và khi đó $\lambda=4R^2$, với *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có các cạnh *a, b, c*.

(3) Xét hàm số $g_1(\alpha)=a^2\cot\alpha+4R^2\alpha$. Đạo hàm của nó $g'_1(\alpha)=-\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}+4R^2$ bằng không tại các điểm $\alpha_0+2\pi k$ và $\pi-\alpha_0+2\pi k$, với $\alpha_0=\arcsin\dfrac{a}{2R}$ là góc đối diện với cạnh *a* của tam giác có các cạnh *a, b, c*, còn *k* là số nguyên. Trong số đó chỉ có $\alpha=\alpha_0$ là rơi vào khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và tại nó đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương. Điều này là đủ để kết luận tại điểm này giá trị cực tiểu đạt được. Tương tự có thể xác lập được rằng, giá trị cực tiểu của các hàm số $g_2(\beta)=b^2\cot\beta+4R^2\beta$, $g_3(\gamma)=b^2\cot\gamma+4R^2\gamma$, lần lượt đạt được tại $\beta=\beta_0$ và $\gamma=\gamma_0$, ở đó $\beta_0$ và $\gamma_0$ là hai góc còn lại của tam giác có các cạnh *a, b* và *c*. Như vậy là giá trị nhỏ nhất của hàm $L(\alpha,\beta,\gamma;R^2)$ trên toàn miền xác định đạt được tại một điểm duy nhất $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, $\gamma=\gamma_0$ và điểm này thỏa mãn điều kiện ràng buộc của bài toán.

Tức là nó trùng với giá trị cực tiểu có điều kiện và bằng

$$a^2\cot\alpha_0 + b^2\cot\beta_0 + c^2\cot\gamma_0 + \lambda(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0-\pi) =$$
$$= a^2\cot\alpha_0 + b^2\cot\beta_0 + c^2\cot\gamma_0.$$

Khi thỏa mãn điều kiện giới hạn của bài toán thì giá trị của các hàm số $a^2\cot\alpha_0 + b^2\cot\beta_0 + c^2\cot\gamma_0$ và $L(\alpha,\beta,\gamma;R^2)$ trùng nhau, thế có nghĩa là giá trị cực tiểu có điều kiện của chúng cũng trùng nhau. Cuối cùng thì để để ý rằng $a^2\cot\alpha_0$ chính là bốn lần diện tích của một trong những tam giác được tạo ra khi chia nhỏ tam giác có các cạnh $a$, $b$, $c$ bằng các đoạn thẳng nối đỉnh của tam giác này với tâm đường tròn ngoại tiếp của nó.

Kết quả trên cũng đúng với trường hợp khi không có giả thiết là các tam giác phải nhọn. Hơn nữa nó cũng có thể thu được bằng phương pháp nhân tử Lagrange. Duy chỉ có các điều kiện đủ ở trường hợp tổng quát là không hiệu quả (nghĩ xem vì sao?), lúc này cần phải có điều kiện cần và chứng minh sự tồn tại của giá trị cực tiểu. Vấn đề này đòi hỏi phải có một chủ đề thảo luận riêng.

## BÀI TẬP

**21.** (*M* 716). Từ điểm $P$ nằm trong tam giác cho trước $ABC$ hạ các đường vuông góc $PA_1, PB_1, PC_1$ xuống các đường thẳng $BC$, $AC$ và $AB$. Với những điểm $P$ nào nằm trong tam giác $ABC$ thì đại lượng $\frac{BC}{PA_1}+\frac{CA}{PB_1}+\frac{AB}{PC_1}$ nhận giá trị nhỏ nhất.

**22.** Chứng minh rằng, trong đa số tất cả các đa giác ngoại tiếp đường tròn cho trước thì đa giác đều có diện tích nhỏ nhất.

**23.** Chứng minh rằng, trong đa số tất cả các đa giác nội tiếp đường tròn cho trước, đa giác đều có chu vi lớn nhất.

**24.** Giả sử $a$, $b$, $c$ là các cạnh của tam giác nhọn, $\alpha,\beta,\gamma$ tương ứng là các góc của tam giác đã cho. Chứng minh rằng

$$bc\cos\alpha + ca\cos\beta + ab\cos\gamma \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

**25.** Chứng minh rằng, trong số tất cả các tứ giác với các cạnh cho trước, tứ giác nội tiếp có diện lớn nhất.

**26.** (*M*1439). Độ dài các cạnh của tam giác bằng $a$, $b$ và $c$, độ dài các trung tuyến hạ xuống chúng tương ứng là $m_a, m_b$ và $m_c$. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$.

*Gợi ý.* Coi các số hạng ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là biến và tìm mối liên hệ giữa chúng.

---

## *HÌNH THÀNH ...*

(*Tiếp theo trang* 17)

Vậy $P$ nhận giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{\frac{3}{2}}$ khi $a=b=c=1$.

**1.** Cho các số thực $a$, $b$, $c$ dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{1}{\sqrt{a^7-2a^3+ab+3}}+\frac{1}{\sqrt{b^7-2b^3+bc+3}}+\frac{1}{\sqrt{c^7-2c^3+ca+3}}.$$

***Hướng dẫn.***

$$a^7-2a^3+ab+3=(a^7+a+a)-2a^3+ab-2a+3$$
$$\ge 3a^3-2a^3+ab-2a+3$$
$$=(a^3+1+1)+ab-2a+1 \ge a+ab+1.$$

**2.** (*Olympic Bà Rịa – Vũng Tàu* 30.4.2015) Cho các số thực $a$, $b$, $c$ dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b+6}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c+6}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a+6}} \le 1.$$

Cũng có thể từ những bài toán của chúng ta các bạn lại khai thác thêm nhiều điều ở bài toán dạng gần giống như sau:

**3.** Cho ba số dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \le 1.$$

# KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 59 – NĂM 2018

**LÊ ANH VINH**
(*Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam*)

## I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 59 năm 2018 (IMO 2018) được tổ chức từ ngày 03/7 đến ngày 14/7/2018, tại Cluj-Napoca, Romania. Dự thi IMO 2018 có 594 học sinh, trong đó có 60 học sinh nữ, thuộc 107 Quốc gia và Vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Nguyễn Quang Bin, Trương Mạnh Tuấn* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia **Hà Nội**), *Trần Việt Hoàng, Trịnh Văn Hoàn* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**), *Phan Minh Đức* (HS lớp 11, Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**) và *Đỗ Hoàng Việt* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**). Đoàn do *PGS. TS. Lê Anh Vinh*, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Bộ GD&ĐT làm Trưởng đoàn và *TS. Lê Bá Khánh Trình*, Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh làm Phó trưởng đoàn; *PGS. TS. Vũ Thế Khôi,* Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên C (Quan sát viên đi cùng học sinh) có: TS. *Nguyễn Duy Kha*, Trưởng phòng Khảo thí, Cục Quản lý chất lượng, Bộ GD&ĐT, thầy *Phạm Tuấn Hùng*, Trưởng phòng Trung học, Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, thầy *Đoàn Thái Sơn*, Hiệu trưởng Trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, thầy *Bùi Tuấn Ngọc*, Trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, thầy *Vũ Hải Sâm*, Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường ĐHKHTN, Đại học Quốc gia Hà Nội, thầy *Nguyễn Đình Huy*, Tổ trưởng Tổ Toán – Tin, Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp. Lễ Khai mạc IMO 2018 đã được tổ chức vào hồi 10h00 ngày 08/07/2018, và lễ Bế mạc IMO 2017 đã được tổ chức vào hồi 15h00 ngày 13/7/2017, với sự hiện diện của Ngài *Klaus Iohannis*, Tổng thống Romania.

## II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2018 tiếp tục được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như các kì IMO gần đây (IMO 2013 – IMO 2017). Cụ thể, từ các bài toán thuộc danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm đề thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình; từ đó, Hội đồng xây dựng các tổ hợp 4 bài toán gồm 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình và có đầy đủ cả 4 phân môn, rồi biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong Danh sách bài đề xuất và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, Bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Hình học, Bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Đại số, Bài 3 là bài khó thuộc phân môn Tổ hợp, Bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Tổ hợp, Bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Số học và Bài 6 là bài khó thuộc phân môn Hình học. Các bài toán trong đề thi IMO 2018 được đề xuất tương ứng bởi Hy Lạp, Slovakia, Iran, Armenia, Mông Cổ và Ba Lan. Một điều đáng lưu ý là Bài 3 của đề thi IMO năm nay là trường hợp cụ thể của một bài toán được đề

xuất bởi *Martin Gardner* từ năm 1977 trên Tạp chí khoa học thường thức *Scientific American*. Tuy nhiên, cả Ban tổ chức kì thi và Hội đồng các Trưởng đoàn đều không biết đến bài toán của *Martin Gardner* khi lựa chọn bài toán này trong đề thi chính thức của kì thi IMO 2018.

Dưới đây là phương án tiếng Việt của **Đề thi IMO 2018**:

***Ngày thi thứ nhất* (9/7/2018)**

(*Thời gian làm bài*: 4h30', *mỗi bài tối đa 7 điểm*)

**Bài 1.** Cho $\Gamma$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn $ABC$. Các điểm $D$ và $E$ lần lượt nằm trong các đoạn thẳng $AB$ và $AC$ sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của $BD$ và $CE$ cắt các cung nhỏ $AB$ và $AC$ của $\Gamma$ tại các điểm $F$ và $G$ tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng $DE$ và $FG$ song song với nhau.

**Bài 2.** Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại các số thực $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ thỏa mãn $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ và $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Bài 3.** *Tam giác phản – Pascal* là một bảng tam giác đều chứa các số sao cho, ngoại trừ các số ở hàng dưới cùng, mỗi số là giá trị tuyệt đối của hiệu của hai số ở ngay dưới nó. Ví dụ, bảng số dưới đây là một tam giác phản – Pascal với bốn hàng và chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến 10.

4

2 6

5 7 1

8 3 10 9

Tồn tại hay không một tam giác phản – Pascal với 2018 hàng và chứa tất cả các số từ 1 đến $1+2+...+2018$?

***Ngày thi thứ hai* (10/7/2017)**

(*Thời gian làm bài*: 4h30', *mỗi bài tối đa 7 điểm*)

**Bài 4.** Một *vị trí* là một điểm $(x, y)$ trên mặt phẳng sao cho $x$ và $y$ là các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 20. Lúc đầu, tất cả 400 vị trí đều trống. *Ánh* và *Bảo* lần lượt đặt các viên đá với *Ánh* là người đi trước. Trong mỗi lượt đi của mình, *Ánh* đặt một viên đá màu đỏ vào một vị trí trống sao cho khoảng cách giữa hai vị trí bất kì được đặt đá màu đỏ sẽ khác $\sqrt{5}$. Trong mỗi lượt đi của mình, *Bảo* đặt một viên đá màu xanh vào một trí trống bất kì (vị trí được đặt viên đá màu xanh có thể ở bất kì khoảng cách nào đến các vị trí đã được đặt đá). Hai bạn sẽ dừng lại khi một trong hai người không thể tiếp tục đặt được các viên đá. Tìm giá trị lớn nhất của $K$ sao cho *Ánh* luôn có thể đặt được ít nhất $K$ viên đá mà không phụ thuộc vào khoảng cách đặt đá của *Bảo*.

**Bài 5.** Cho $a_1, a_2, \ldots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $N > 1$ sao cho với mọi $n \geq N$, số

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $M$ sao cho $a_m = a_{m+1}$ với mọi $m \geq M$.

**Bài 6.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $AB.CD = BC.DA$. Điểm $X$ nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ và $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Chứng minh rằng $\widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180^0$.

## III. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2018, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ **31** đến **42** điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ **25** đến **30** điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ **16** đến **24** điểm.

Theo đó, tại IMO 2018 có 289 học sinh được trao Huy chương; gồm: 48 học sinh được trao HCV, trong đó có 2 học sinh đạt điểm tuyệt đối 42/42 là *Agnijo Banerjee* (Vương quốc Anh) và *James Lin* (Mỹ); 98 học sinh được trao HCB và 143 học sinh được trao HCĐ. Cả 6 thí sinh của

Đoàn Việt Nam đều đã hoàn thành tốt bài thi của mình và đạt được kết quả cao, trong đó 1 em được trao HCV, 2 em được trao HCB và 3 em được trao HCĐ. Kết quả chi tiết của các học sinh Đoàn Việt Nam như bảng dưới.

Với tổng điểm 148, Đoàn Việt Nam đứng thứ 20 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2018. Danh sách mười đoàn xếp hạng cao nhất tại kì thi IMO 2018: Mỹ (212 điểm), Nga (201 điểm), Trung Quốc (199 điểm), Ukraina (186 điểm), Thái Lan (183 điểm), Đài Loan (179 điểm), Hàn Quốc (177 điểm), Singapore (175 điểm), Ba Lan (174 điểm), Indonesia (171 điểm).

| Stt | Họ và Tên | Điểm thi | | | | | | | HC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Tổng | |
| 1 | *Nguyễn Quang Bin* | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0 | **35** | **Vàng** |
| 2 | *Phan Minh Đức* | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | **29** | **Bạc** |
| 3 | *Trịnh Văn Hoàn* | 7 | 5 | 0 | 7 | 7 | 0 | **26** | **Bạc** |
| 4 | *Trương Mạnh Tuấn* | 7 | 7 | 0 | 0 | 6 | 2 | **22** | **Đồng** |
| 5 | *Trần Việt Hoàng* | 7 | 7 | 0 | 2 | 1 | 2 | **19** | **Đồng** |
| 6 | *Đỗ Hoàng Việt* | 7 | 7 | 0 | 2 | 1 | 0 | **17** | **Đồng** |

***PROBLEMS...***

*(Tiếp theo trang 19)*

$$\begin{cases} x^2 = (a-y)(a+y+2) \\ y^2 = (b-x)(b+x+2) \end{cases}$$

has unique solution.

**Problem T7/494.** Given positive real numbers $a$, $b$, $c$. Prove that

$$\frac{b(2a-b)}{a(b+c)} + \frac{c(2b-c)}{b(c+a)} + \frac{a(2c-a)}{c(a+b)} \le \frac{3}{2}.$$

**Problem T8/494.** Let $A$, $B$, and $C$ denote the angles of a triangle $ABC$ $\left(A,B,C \ne \frac{\pi}{2}\right)$. Show that $\frac{\sin A}{\tan B} + \frac{\sin B}{\tan C} + \frac{\sin C}{\tan A} \ge \frac{3}{2}$.

**Problem T9/494.** Find all pairs of positive integers $(x; y)$ satisfying

$$x^3 + y^3 = x^2 + 72xy + y^2.$$

**TOWARDS MATHEMMATICAL OLYMPIAD**

**Problem T10/494.** For any integer $n$, show that

$$a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

is a perfect square.

**Problem T11/494.** A class has $n$ students attending $n-1$ clubs. Show that we can choose a group of at least two students so that, for each club, there are an even number of students in that group attend it.

**Problem T12/494.** Given a square $ABCD$ and $P$ is an arbitrary point on the side $AB$. Let $(I_1)$, $(I_2)$ respectively be the incircles of $ADP$, $CBP$. Assume that $DI_1$, $CI_2$ intersect $AB$ respectively at $E$, $F$. The line through $E$ which is parallel to $AC$ intersects $BD$ at $M$ and the line through $F$ which is parallel to $BD$ intersects $AC$ at $N$. Show that $MN$ is a common tangent to $(I_1)$ and $(I_2)$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

*(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)*

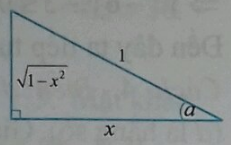
# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 35

***Problem.*** *Given that* $\cos a = x$, *where* $a$ *is an acute angle. Find* $\tan a$ *in terms of* $x$.

***Solution* 1.** We have $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$. But $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\sin^2 a = 1 - x^2$. But since $a$ is an acute angle, $\sin a > 0$, and hence $\sin a = \sqrt{1-x^2}$. Thus $\tan a = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

***Solution* 2.** (*Solving triangle*). We draw a right triangle with an acute angle $a$, the length of the adjacent side is equal to $x$ and the hypotenuse 1. By Pythagoras' theorem, the opposite is equal to $\sqrt{1-x^2}$. Hence




$$\tan a = \frac{opp}{adj} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

***Remarks.***

• The above techniques are very useful when computing some trigonometric integrations.

• The second technique is usually very clear and can be applied with the angles in the general case too. And in that we maybe need to notice more carefully about the sign.

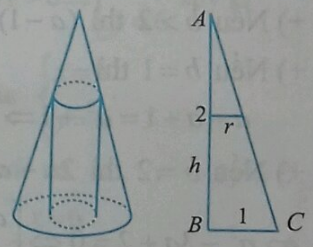
### TỪ VỰNG

| | |
|---|---|
| *Acute angle* | : góc nhọn |
| *Solving triangle* | : kỹ thuật giải tam giác (tìm sin, cos, tan, … khi biết một trong các giá trị đó) |
| *Adjacent side* | : cạnh kề |
| *Hypotenuse* | : cạnh huyền |
| *Trigonometric* | : lượng giác (tính từ) |
| *Integration* | : tích phân |
| *Adjust* | : điều chỉnh |
| *Sign* | : dấu |

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)


***Bài toán.*** *Cho khối nón đứng, đáy là hình tròn với chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 1. Một khối trụ đứng, đáy là hình tròn nội tiếp trong hình nón đó. Hỏi khi nào thì hình trụ có thể tích lớn nhất?*




***Lời giải.*** Gọi độ dài đường cao của hình trụ là $h$. Khi đó bán kính đáy của hình trụ sẽ là $r = 1 - \dfrac{h}{2}$ (sử dụng định lý Thales, xem hình vẽ). Từ đó thể tích của khối trụ sẽ là $V(h) = h.S_{\text{đáy}} = h.\pi.\left(1 - \dfrac{h}{2}\right)^2$. Vì $h + \left(1 - \dfrac{h}{2}\right) + \left(1 - \dfrac{h}{2}\right) = 2 =$ hằng số, ta thấy $V(h)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h = 1 - \dfrac{h}{2}$ hay $h = \dfrac{2}{3}$ (sử dụng BĐT Cauchy). ❐

***Lưu ý.*** Ta có thể sử dụng công cụ đạo hàm để tìm điểm cực đại (địa phương) của đồ thị hàm số $V(h) = h.\pi.\left(1 - \dfrac{h}{2}\right)^2$.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm hơn cả: **Hà Nội:** *Trần Phương Nhật Chung*, 10A6, THPT Thường Tín; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, *Trần Thị Phương Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Tôn Nữ Cát Vy*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

**HỒ HẢI** (*Hà Nội*)

# NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

**BÀI TOÁN 15.** *Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn:* $(x+y)^2 = 3(xy+x+y)$.

***Lời giải.*** $(x+y)^2 = 3(xy+x+y)$. (*)

***Cách 1.*** *Sử dụng tính chất chia hết.*

Vì $x$, $y$ có vai trò như nhau nên có thể giả sử $x \ge y \ge 0$.

• Nếu $y=0$ thì $x=0$ hoặc $x=3$.

• Xét $x \ge y > 0$.

Từ (*) $\Rightarrow (x+y)^2 \vdots 3 \Rightarrow (x+y) \vdots 3$ và $(x+y)^2 \vdots 9$ $\Rightarrow (xy+x+y) \vdots 3 \Rightarrow xy \vdots 3$. Do đó $x \vdots 3$ và $y \vdots 3$.

Đặt $x=3a$, $y=3b$ $(a, b \in \mathbb{N}^*, a \ge b)$. Phương trình (*) trở thành $(3a+3b)^2 = 3(9ab+3a+3b)$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 3ab+a+b \Rightarrow ab+a+b = a^2+b^2 \ge 2ab$

$\Rightarrow ab \le a+b \Rightarrow (a-1)(b-1) \le 1$.

+) Nếu $b>2$ thì $(a-1)(b-1)>1$. (loại)

+) Nếu $b=1$ thì

$$a+a+1 = a^2+1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow x=6,\ y=3.$$

+) Nếu $b=2$ thì $2a+a+2 = a^2+4$

$$\Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \text{ (loại)} \\ a=2 \end{array}\right. \Rightarrow x=y=6.$$

Vậy các bộ $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (0; 3), (3; 0), (6; 3), (3; 6), (6; 6).

***Cách 2.*** *Tìm điều kiện để phương trình bậc 2 có nghiệm.*

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^2-(y+3)x+y^2-3y=0$.

Phương trình bậc hai theo $x$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (y+3)^2-4(y^2-3y) \ge 0$

$$\Leftrightarrow y^2-6y-3 \le 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 \le 12$$

$$\Leftrightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Từ đó $x$ tương ứng bằng 0 hoặc 3; $2+\sqrt{6}$ (loại); $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ (loại); 0 hoặc 6; $\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$ (loại); $4\pm\sqrt{6}$ (loại); 3 hoặc 6. Vậy các bộ $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (0; 3), (3; 0), (6; 3), (3; 6), (6; 6).

***Cách 3.*** *Biến đổi về dạng* $A^2 = B \ge 0$.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^2-(y+3)x = 3y-y^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2x.\frac{y+3}{2}+\left(\frac{y+3}{2}\right)^2 = 3y-y^2+\left(\frac{y+3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y+3}{2}\right)^2 = \frac{-3y^2+18y+9}{4} \ge 0$$

$\Rightarrow y^2-6y-3 \le 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 \le 12$.

Đến đây ta tiếp tục giải như cách 2.

***Cách 4.*** *Biến đổi về dạng* $A^2+B^2+C^2=d$ ($d$ *là hằng số*). Giả sử $x \ge y \ge 0$

• Nếu $y=0$ thì $x=0$, $x=3$.

• Xét $x \ge y > 0$ phương trình (*) tương đương với $2(x+y)^2-6(xy+x+y)+18=18$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-3)^2+(y-3)^2=18$.

Kết hợp với điều kiện thì ta có các trường hợp:

*Trường hợp* 1: $0^2+3^2+3^2=18$

a) Nếu $x-y=0$ thì $x-3=3$, $y-3=3 \Leftrightarrow x=y=6$.

b) Nếu $x-y=3$ thì $x-3=3, y-3=0 \Leftrightarrow x=6, y=3$.

*Trường hợp* 2: $(\pm1)^2+(\pm1)^2+4^2=18$

a) Nếu $x-y=1$ thì $y-3=\pm1, x-3=4$ (không thỏa mãn).

b) Nếu $x-y=4$ thì $x-3=1, y-3=\pm1$ (không thỏa mãn).

Các bộ $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (0; 3), (3; 0), (6; 3), (3; 6), (6; 6).

***Cách 5.*** *Sử dụng bất đẳng thức.*

Giả sử $x \ge y \ge 0$.

PT(*) $\Leftrightarrow xy+3(x+y) = x^2+y^2 \ge 2xy$

$\Rightarrow xy-3(x+y) \le 0 \Leftrightarrow (x-3)(y-3) \le 9$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $y$ bằng 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Đến đây tiếp tục giải như cách 2.

***Cách 6.*** *Sử dụng bất đẳng thức với biến đổi khác.*

Giả sử $x \ge y \ge 0$.

$$\text{PT(*)} \Leftrightarrow xy+\frac{9}{2} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$$

• Nếu $y=0$ thì $x=0$; $x=3$.

• Nếu $y=1$ thì $x^2-4x-2=0 \Rightarrow x=2+\sqrt{6}$ (loại).

• Nếu $y \geq 2$ thì $x-\frac{3}{2}>0,\ y-\frac{3}{2}>0$. Do đó

$$xy+\frac{9}{2}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow (x-3)(y-3) \leq 9 \Rightarrow y \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Đến đây tiếp tục giải như cách 2.

*Cách 7. Đặt ẩn phụ.*

Đặt $x=3-z,\ y=3-t$ ($z, t \in \mathbb{Z}$ và $z, t \leq 3$).

Phương trình (*) trở thành

$$(6-z-t)^2=3[(3-z)(3-t)+6-z-t]$$

$$\Leftrightarrow z^2+t^2-zt=9 \Leftrightarrow 4z^2+4t^2-4zt=36$$

$$\Leftrightarrow (2t-z)^2+3z^2=36$$

$\Rightarrow (2t-z) \vdots 3 \Rightarrow (2t-z)^2 \vdots 9$ và $z \vdots 3$. Mặt khác

$$3z^2 \leq 36 \Leftrightarrow z^2 \leq 12 \text{ nên } z \in \{0; -3; 3\}.$$

• Nếu $z=0$ thì $(2t-z)^2=36 \Leftrightarrow 2t-z=\pm 6 \Rightarrow t=\pm 3$. Do đó $x=3,\ y=0$ hoặc $y=6$.

• Nếu $z=-3$ thì $(2t-z)^2=9 \Leftrightarrow 2t-z=\pm 3$. Suy ra $t=0, t=-3 \Rightarrow x=6,\ y=3$ hoặc $y=6$.

• Nếu $z=3$ thì $(2t-z)^2=9 \Leftrightarrow 2t-z=\pm 3$. Suy ra $t=3, t=0$. Do đó $x=0,\ y=0$ hoặc $y=3$.

Các bộ số $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (0; 3), (3; 0), (6; 3), (3; 6), (6; 6).

**THÁI NHẬT PHƯỢNG**

*(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

***Nhận xét.*** Trên đây là 7 cách giải của bạn *Thái Nhật Phượng*, tác giả của đề toán. Bạn *Nguyễn Anh Vũ* (GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, **Bình Định**) gửi về Tòa soạn 9 cách giải cho Bài toán 15. Nhiều cách của bạn *Vũ* có hướng tương tự như các cách mà bạn *Phượng* giới thiệu ở trên. Tòa soạn xin giới thiệu thêm 2 cách giải nữa của bạn *Vũ*:

*Cách 8.*

• Với $y=0$, ta có $x^2=3x \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$.

• Với $y \neq 0$, ta đặt $x=ty,\ t \in \mathbb{Q},\ t \geq 0$ ($\mathbb{Q}$ là tập số hữu tỉ). Khi đó, $(x+y)^2=3(xy+x+y)$

$$\Leftrightarrow (ty+y)^2=3(ty^2+ty+y) \Leftrightarrow y(t+1)^2=3ty+3(t+1)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \Rightarrow x=\frac{3t(t+1)}{t^2-t+1}.$$

Tiếp theo, sử dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc hai hoặc sử dụng đạo hàm ta thu được

$3 \leq y=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \leq 3+2\sqrt{3},\ \forall t \geq 0$. Mà $y$ là số tự nhiên, nên suy ra $y \in \{3; 4; 5; 6\}$.

• Với $y=3$, ta có $3=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$.

• Với $y=4$, ta có $4=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \Leftrightarrow 4t^2-7t+1=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

• Với $y=5$, ta có $5=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \Leftrightarrow 5t^2-8t+2=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

• Với $y=6$, ta có $6=\frac{3(t+1)}{t^2-t+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Các bộ số $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (3; 0), (0; 3), (3; 6), (6; 3), (6; 6).

*Cách 9.* Đặt $x=y+t,\ t \in \mathbb{Z}$, khi đó phương trình (*) tương đương với $y^2+(t-6)y+t^2-3t=0$

$$\Leftrightarrow 4y^2+4(t-6)y+4t^2-12t=0 \Leftrightarrow (2y+t-6)^2=36-3t^2$$

$\Rightarrow 36-3t^2 \geq 0$ và $36-3t^2$ là số chính phương. Từ hai điều kiện này suy ra $t \in \{-3; 0; 3\}$.

• Với $t=-3 \Rightarrow x=y-3$ và ta có $y^2-9y+18=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=6 \end{array}\right..$$

• Với $t=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow y^2-6y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=6 \end{array}\right.$ suy ra

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=6 \end{array}\right..$$

• Với $t=3 \Rightarrow x=y+3$ và ta có $y^2-3y=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right..$$

Các bộ số $(x; y)$ cần tìm là (0; 0), (3; 0), (0; 3), (3; 6), (6; 3), (6; 6).

**LÊ MAI** *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 17 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.9.2018.

**BÀI TOÁN 17.** *Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH, I là giao điểm của EF và AD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KBC.*

**NGUYỄN ĐỨC TẤN**

*(TP. Hồ Chí Minh)*


Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 492, T6.2018.

**Bài 23.** *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=y^3. \quad (1)$$

***Lời giải.*** Ta có:

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3 = 8x^3+84x^2+420x+784.$$

Mặt khác:

$$(2x+7)^3=8x^3+84x^2+294x+343;$$

$$(2x+10)^3=8x^3+120x^2+600x+1000.$$

• Xét $x\ge 0$. Khi đó $(2x+7)^3<y^3<(2x+10)^3$ nên $2x+7<y<2x+10$. Vì $x$, $y$ nguyên dương nên $y=2x+8$ hoặc $y=2x+9$.

- Nếu $y=2x+8$ thì thay vào (1) ta có:

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=(2x+8)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+84x^2+420x+784=8x^3+96x^2+384x+512$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-36x-272=0$$

$\Leftrightarrow 3x^2-9x-64=0$: PT này không có nghiệm nguyên.

- Nếu $y=2x+9$ thì thay vào (1) ta có:

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=(2x+9)^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+84x^2+420x+784=8x^3+108x^2+486x+729$$

$\Leftrightarrow 24x^2+66x-55=0$: PT này cũng không có nghiệm nguyên.

Vậy PT(1) không có nghiệm nguyên với $x\ge 0$.

• Xét $x<0$. Đặt

$$f(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3. \quad (2)$$

Với mọi $x$ thì ta luôn có

$$f(-x-7)=(-x-7)^3+(-x-6)^3+(-x-5)^3+...+(-x)^3$$

$$=-\left[(x+7)^3+(x+6)^3+(x+5)^3+...+x^3\right]$$

$$=-f(x). \quad (3)$$

Do đó nếu $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của PT(1), thì do (2) và (3) ta có:

$$f(x_0)=y_0^3 \Rightarrow -f(x_0)=-y_0^3 \Rightarrow f(-x_0-7)=(-y_0^3).$$

Như vậy $(-x_0-7;-y_0)$ cũng là nghiệm của PT(1).

Nếu $-x_0-7\ge 0 \Leftrightarrow x_0\le -7$ thì theo trường hợp trên thì PT(1) vô nghiệm. Vậy để PT(1) có nghiệm nguyên thì $-x_0-7<0$. Do đó $-7<x_0<0$. Vậy

$$x_0\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}.$$

Thay $x$ lần lượt bằng $-6;-5;-4;-3;-2;-1$ vào PT(1) ta được các nghiệm $(x;y)$ của PT(1) là:

$$(-2;6),(-3;4),(-4;-4),(-5;-6).$$

***Nhận xét.*** Bạn *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS xã Thanh Yên, huyện Điện Biên, tỉnh **Điện Biên** đã đưa ra lời giải đúng bài toán này.

**NHƯ HOÀNG** (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2018.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 25.** *Tìm tất cả các ước số nguyên tố p của*

$$A=2^{2017}-1,$$

*biết* $p<9000$.

**NGUYỄN VĂN BẢN**

(*GV THCS Thanh Yên, Điện Biên, Điện Biên*)


## GIẢI ĐÁP: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA F ĐÚNG HAY SAI

**(*Đề đăng trên TH&TT số* 490, *tháng* 4 *năm* 2018)**

***Phân tích sai lầm.*** Bạn *Dương* chứng minh được $F \geq -8$, và chỉ ra rằng $F = -8$ khi $x = -2 \Rightarrow y = -4$. Tuy nhiên, ta phải hiểu rằng $x, y$ thỏa mãn $\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases}$, chứ không chỉ đơn thuần $y = x - 2$.

Với $x = -2, y = -4$ thì hệ $\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases}$ không được nghiệm đúng. Vì thế, với $x, y$ thỏa mãn $\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases}$ thì $F = 2x^2 - y^2 > -8$. Tức là $-8$ không phải là giá trị nhỏ nhất của $F$. Đến đây ta cũng không thể kết luận rằng $F$ không có giá trị nhỏ nhất, mà chỉ có thể kết luận rằng nếu $F$ có giá trị nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó lớn hơn $-8$.

***Lời giải đúng.*** Ta có:

$$\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 + 3x - 1 = y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 + 3x - 1 = y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = (y+1)^3 \\ -3x^2 + 3x - 1 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ -3x^2 + 3x - 1 = y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ -3x^2 + 3x - 1 = (x-2)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 9x - 7 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left((x-1)^2 + 6\right) = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Do đó $F = 2x^2 - y^2 = 2.1^2 - (-1)^2 = 1$.

Vậy $\min F = 1$. Đạt được khi $x = 1, y = -1$.

***Nhận xét.*** Các bạn tham gia bài này đều phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Danh sách các bạn được khen là:

**Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Hương Giang*, 11 Toán 1, *Bùi Văn Quyến*, *Chu Ngọc Chiến*, *Trần Thị Phương Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Đinh Bảo Anh*, 11A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

**KIHIVI**

## ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT !

Trong tiết ôn tập ở lớp 10A1, thầy giáo nêu ra bài tập sau: *Cho phương trình*

$$\frac{x-m}{(x-2)^2} + \frac{3-x}{x-2} = 1 \ (\textit{m là tham số}) \quad (1).$$

*Hãy tìm tất cả các giá trị m để phương trình* (1) *có nghiệm duy nhất.*

Sau một lúc suy nghĩ, *Quỳnh* đã xung phong lên bảng giải. Sau đây là lời giải của *Quỳnh*.

ĐK: $x \neq 2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x - m + (3-x)(x-2) = (x-2)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 10 + m = 0 \quad (2).$$

Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm kép khác 2, điều kiện này tương đương với $\begin{cases} \Delta' = (-5)^2 - 2(10+m) = 0 \\ 2.2^2 - 10.2 + 10 + m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{2} \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy chỉ có một giá trị $m = \dfrac{2}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Sau khi lời giải của *Quỳnh* được trình bày xong, cả lớp tỏ vẻ thán phục cho sự gọn gàng và lôgic của nó.

***Theo bạn thì lời giải trên đúng chưa ?***

**NGUYỄN ANH VŨ**

(*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định*)

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
# Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 494 (8.2018)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com




## TRONG SỐ NÀY



Ảnh bìa 1. Đội tuyển Toán Việt Nam tại Kì thi IMO 2018. Từ trái qua phải: Em *Trương Mạnh Tuấn*, em *Phan Minh Đức*, em *Trịnh Văn Hoàn*, em *Trần Việt Hoàng*, em *Nguyễn Quang Bin*, em *Đỗ Hoàng Việt*.


***Biên tập***: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
***Trị sự, phát hành***: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
***Mĩ thuật***: QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản***: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

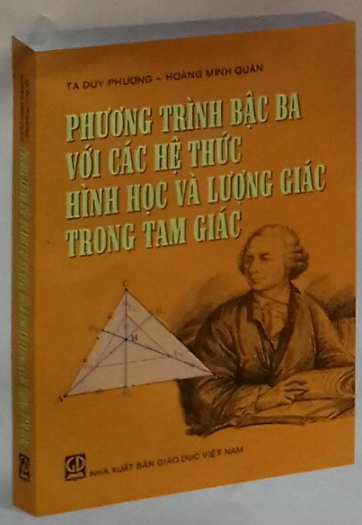
# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới*

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.




Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là $p$, $R$, $r$, trong đó $p$ là nửa chu vi, còn $R$ và $r$ tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

**Chương 1** tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

**Chương 2** trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

**Chương 3** và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố $p$, $R$, $r$). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

**Chương 5** (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

---

*Mọi chi tiết xin liên hệ:*

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội**

- Điện thoại biên tập: 04.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 04. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

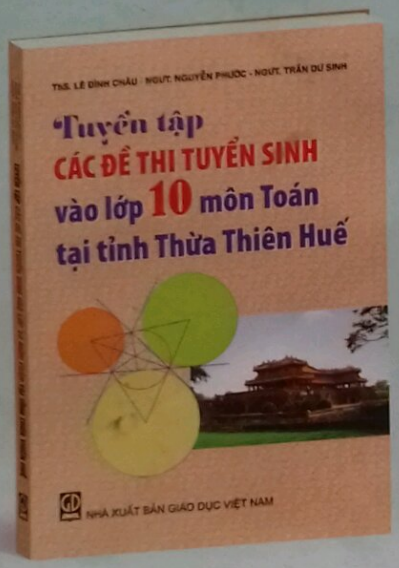
*Cuốn sách*

## TUYỂN TẬP CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN TẠI TỈNH THỪA THIÊN HUẾ

(*Tái bản lần thứ nhất có chỉnh lý, bổ sung*)

của các tác giả: ThS. *Lê Đình Châu*, NGƯT. *Nguyễn Phước*, NGƯT. *Trần Dư Sinh*.

Sách dày 240 trang, khổ 17 × 24 cm, giá bìa: 38.000 *đồng*.




Các đề thi tuyển sinh vào lớp 10, tuyển sinh vào Trường Quốc học Huế là công trình của tập thể các thầy cô giáo dạy toán có kinh nghiệm và được thông qua tuyển chọn của Hội đồng ra đề thi. Do đó, tuyển tập các đề thi là nguồn tư liệu phong phú, bổ ích cho học sinh trong việc ôn tập.

Cuốn sách "*Tuyển tập các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán tại tỉnh Thừa Thiên Huế*" được các tác giả sưu tầm và biên soạn bao gồm hai phần cơ bản:

- Phần các đề thi tuyển sinh vào các trường THPT ở tỉnh Thừa Thiên Huế từ năm học 1991 – 1992 đến năm học 2018 - 2019.
- Phần các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, chuyên Tin Trường THPT chuyên Quốc học Huế từ năm học 2005 – 2006 đến năm học 2018 – 2019.

**Cuốn sách này ra đời nhằm đáp ứng nhu cầu học Toán của học sinh THCS, đặc biệt là giúp cho các em học sinh lớp 9 có tài liệu ôn tập chuẩn bị cho kì thi vào các trường THPT và THPT chuyên.**

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp cho các thầy cô giáo và các em học sinh chuẩn bị thật tốt và đạt kết quả như mong muốn trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp đầu cấp THPT.

---

Mọi chi tiết xin liên hệ:

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

**Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội**

- Điện thoại biên tập: 024. 35121607
- Điện thoại Fax – phát hành: 024.35121606
- Số tài khoản: 111000002173 tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam – chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT08M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 08 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng