



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2018
Số 492

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



John Napier (1550-1617)

<https://seoulun.haplo.org>



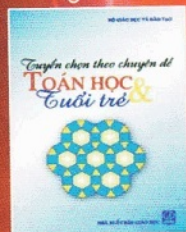


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

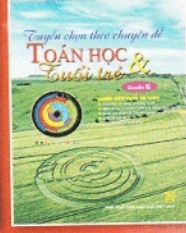
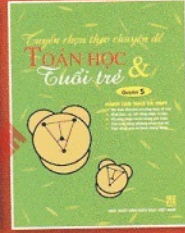
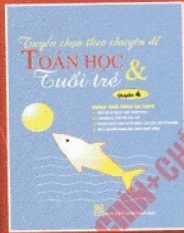
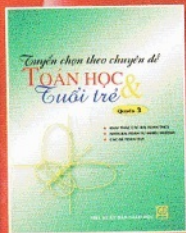
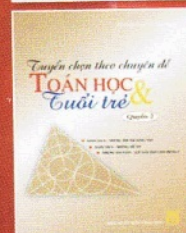
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

Bộ sách

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



- ★ Quyển 1. 300 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 58.000 đồng
- ★ Quyển 2. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 3. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 4. 200 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 39.500 đồng
- ★ Quyển 5. 240 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 42.500 đồng
- ★ Quyển 6. 224 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 45.000 đồng

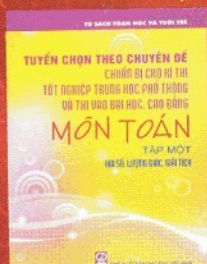


Bộ sách

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 46.000 đồng.



240 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 44.000 đồng.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT-Fax Phát hành, Trĩ sự: (024)35121606

Email: toanhocvotuotrievietnam@gmail.com

<https://tieuulun.hopto.org>



MỘT SỐ BÀI TOÁN LÝ THỦ ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ PYTHAGORE

NGUYỄN VĂN HIẾU

(GV THCS Vinh Hưng, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Định lý Pythagore là định lý được áp dụng cho các tam giác vuông hết sức quan trọng của hình học Euclid. Vì từ đó người ta có thể tính toán được khoảng cách của hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ. Cho tới giờ có rất nhiều cách chứng minh định lý Pythagore khác nhau. Trong đó có một cách chứng minh định lý Pythagore khá đẹp của một người Mỹ đó là James A. Garfield (1831 - 1881). Cách chứng minh đó như sau:

Bài toán 1. Cho hình thang vuông ABCD ($AB \parallel CD$, AD là cạnh bên vuông góc với đáy) và $AB + CD = AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = CD$. Đặt $BM = a$; $AM = b$; $AB = c$.

Chứng minh: $a^2 = b^2 + c^2$.

Chứng minh. Ta có $\triangle ABM \cong \triangle DMC$ (c.g.c).

Suy ra $MB = MC$ và $\widehat{BMC} = 90^\circ$ nên $\triangle BMC$ là tam giác vuông cân. Do đó

$$S_{ABCD} = 2S_{ABM} + S_{MBC} \\ \Rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2bc}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Người viết bài này đã tìm ra lớp lớp bộ ba Pythagore từ bài toán sau đây:

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đặt $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ ($a > b > c > 0$). Chứng minh rằng $(ak)^2 = (bk)^2 + (ck)^2$ ($k > 0, k \in \mathbb{R}$).

Chứng minh. Áp dụng định lý Pythagore, ta có $a^2 = b^2 + c^2$. Nhân hai vế với

k^2 ($k > 0, k \in \mathbb{R}$), ta có:

$$(ak)^2 = (bk)^2 + (ck)^2$$

Từ bài toán 2 ta có lớp các bộ ba Pythagore như sau: Cứ lấy một bộ ba Pythagore chẳng hạn (3;4;5) ta nhân với một số k ($k > 0$; k thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$), ta sẽ được bộ ba Pythagore khác:

• (3;4;5); (6;8;10); (9;12;15); (15;20;25).....

- (5;12;13); (10;24;26); (15;36;39); (20;48;52); ...
- (7;24;25); (14;48;50); (21;72;75); (28;96;100)....
-

Sau đây là một số bài toán áp dụng định lý Pythagore:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Từ một điểm M bất kỳ, gọi M_1 ; M_2 ; M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên cạnh AB, BC, CA. Chứng minh đẳng thức $AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 = AM_3^2 + CM_2^2 + BM_1^2$.

Chứng minh.

a) Trường hợp M nằm ở bên trong tam giác:

Áp dụng định lý Pythagore ta có: $AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2$

$$= AM^2 - MM_1^2 + BM^2 - MM_2^2 + CM^2 - MM_3^2 \\ = AM^2 - MM_3^2 + BM^2 - MM_1^2 + CM^2 - MM_2^2 \\ = AM_3^2 + CM_2^2 + BM_1^2.$$

b) Trường hợp điểm M trùng với một đỉnh của tam giác:

Giả sử M trùng với đỉnh A, (khi đó $M_1 = A$, $M_2 = M_3$ trùng nhau). Ta có:

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 \\ = 0^2 + BM_2^2 + AM_2^2 + CM_2^2 \\ = AM_3^2 + CM_2^2 + BM_1^2.$$

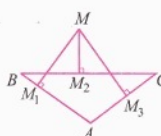
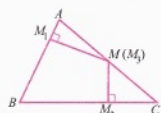
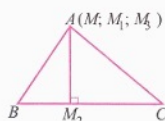
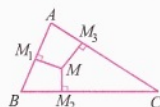
c) Trường hợp điểm M nằm trên một cạnh của tam giác: Giả sử M thuộc AC khi đó $M \equiv M_3$. Ta có

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 \\ = AM_3^2 - MM_1^2 \\ + MB^2 - M_2M^2 + CM_3^2 \\ = AM_3^2 + CM_2^2 + BM_1^2.$$

d) Trường hợp điểm M nằm ngoài tam giác:

Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2$$



$$\begin{aligned} &= MA^2 - MM_1^2 + BM^2 - MM_2^2 + MC^2 - MM_3^2 \\ &= MA^2 - MM_3^2 + MC^2 - MM_2^2 + BM^2 - MM_1^2 \\ &= AM_3^2 + CM_2^2 + BM_1^2. \end{aligned}$$

Bài toán 4. Trong không gian cho ba tia chung gốc Ox, Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 90^\circ, \widehat{yOz} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 60^\circ$. Lấy ba điểm A, B, C thuộc ba tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$. Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

Chứng minh. Dễ thấy $\triangle OAC$ là tam giác đều nên $AC = a$.

Suy ra $AC^2 = a^2$ (1)

$\triangle OAB$ là tam giác vuông cân nên $AB^2 = 2a^2$ (2)

Vì $\triangle OBC$ cân tại O , có $\widehat{BOC} = 120^\circ$ ta cũng tính được $BC^2 = 3a^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A . (Định lý Pythagore đảo).

Bài toán 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại $A, AH \perp BC$ (H thuộc BC). Lấy một điểm D nằm giữa A và H . Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $AD = HE$. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F . Chứng minh $BE \perp FE$.

Bài toán này có nhiều cách giải. Người viết bài này có một cách thật ngắn gọn sau đây:

Chứng minh. Ta có

$$AD = HE \text{ nên } AH = DE.$$

Áp dụng định lý Pythagore

$$\text{ta có: } EB^2 + EF^2$$

$$= BH^2 + HE^2 + DE^2 + DF^2$$

$$= AB^2 - AH^2 + AD^2 + AH^2 + AF^2 - AD^2 = BF^2$$

Suy ra $\triangle EBF$ vuông tại E . (định lý đảo định lý Pythagore) hay $BE \perp FE$.

Bài toán 6. Cho hình vuông $ABCD$ ($AB = a$), M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Tia Ax vuông góc với AM cắt đường thẳng CD tại K . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MK , tia AI cắt đường thẳng CD tại E . Chứng minh rằng khi M di chuyển trên BC thì tam giác CME luôn có chu vi không đổi.

Chứng minh. Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

$$\Rightarrow \cos \widehat{A_3} = \cos \widehat{A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AK} \Rightarrow \frac{a}{AM} = \frac{a}{AK}$$

$$\Rightarrow AM = AK \Rightarrow \triangle AKM \text{ cân}$$

tại $A \Rightarrow AE$ là đường trung trực của KM ($IK = IM$) $\Rightarrow EK = EM$. Chu vi của $\triangle EMC$ là:

$$EM + EC + MC = EK + EC + MC = KC + MC.$$

Đặt $MC = b \Rightarrow BM = a - b$. Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông BAM , ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + (a - b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$$

$$KM^2 = 4a^2 - 4ab + 2b^2$$

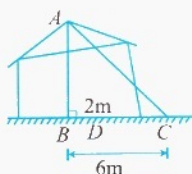
$$KC^2 = KM^2 - MC^2 = 4a^2 - 4ab + 2b^2 - b^2$$

$$\Rightarrow KC = 2a - b$$

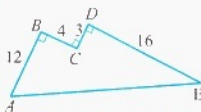
Vậy chu vi $\triangle EMC$ là: $KC + MC = 2a - b + b = 2a$.

Sau đây là một số bài toán áp dụng định lý Pythagore khác.

Bài toán 7. Người ta treo một sợi dây ở nóc nhà A , khi sợi dây chạm mặt đất ở B (AB vuông góc với mặt đất) và còn thừa 2m. Kéo thẳng mui dây chạm mặt đất ở C , biết C cách B một khoảng 6m. Tính chiều cao của nóc nhà so với mặt đất.



Bài toán 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB > AD$). Từ A kẻ AH vuông góc với BD , AH kéo dài cắt CD tại K . Trên tia AH lấy điểm L sao cho $AL = HK$. Kẻ đường thẳng vuông góc với AK tại L đường thẳng này cắt AB tại S . Chứng minh tứ giác $ASKD$ là hình chữ nhật.



Bài toán 9. Tính diện tích và chu vi hình tám bìa như hình vẽ

Bài toán 10: Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 90^\circ$; chu vi bằng 36 và $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$. Tính độ dài mỗi cạnh.

Bài viết này đã tổng hợp được một số kiến thức, một số dạng bài tập áp dụng định lý Pythagore và đã đưa ra cách tìm các lớp bộ ba Pythagore. Rất mong bạn đọc tiếp tục nghiên cứu, mở rộng về vấn đề này.



15th HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION, VIETNAM 2018

INDIVIDUAL CONTEST - SENIOR SECTION

NGUYỄN MINH TUẤN
NGUYỄN HỮU ĐIỀN
(Hội Toán học Hà Nội) giới thiệu

ANSWER KEY (Time limit: 120 minutes)

SENIOR SECTION 1. QUESTION

Instructions.

- Write down your name, your ID number and your team's name on the first page.
- Answer all 15 questions. In Section A, each question is worth 5 points. In Section B, each question is worth 10 points. In Section C, each question is worth 15 points. The total is 150 points. There is no penalty for a wrong answer.
- For Section A (questions 1-5), circle the correct answer A, B, C, D or E. For Section B (question 6-10), fill your answer in the space provided at the end of each question. For Section C (questions 11-15), write your detailed solution in the space provided at the end of each question.
- Diagrams shown may not be drawn to scale.
- No calculators, protractors or electronic devices are allowed to use.
- Answers must be in pencil, blue or black ball-point pen.
- All papers shall be collected at the end of the test.

SENIOR SECTION 1. QUESTION

Section A. Circle the correct answer A, B, C, D or E.

Q1. How many rectangles can be formed by the vertices of a cube? (Note: square is also a special rectangle).

- A. 6. B. 8. C. 12. D. 18. E. 16.

Q2. What is the largest area of a regular hexagon that can be drawn inside the equilateral triangle of side 3?

- A. $3\sqrt{7}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. E. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Q3. How many integers n are there those satisfy the following inequality $n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n - 17 < 0$?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10. E. 12.

Q4. Let

$$a = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}) \\ \times (\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$
$$b = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ \times (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

The difference $a - b$ belongs to the set:

- A. $(-\infty, -4)$. B. $[-4, 0)$. C. $\{0\}$. D. $[0, 4]$. E. $(4, \infty)$.

Q5. The center of a circle and nine randomly selected points on this circle are colored in red. Every pair of those points is connected by a line segment, and every point of intersection of two line segments inside the circle is colored in red. What is the largest possible number of red points?

- A. 235. B. 245. C. 250. D. 220. E. 265.

Section B. Fill your answer in the space provided at the end of the question.

Q6. Write down all real number (x, y) satisfying two conditions: $x^{2018} + y^2 = 2$, and $x^2 + y^{2018} = 2$.

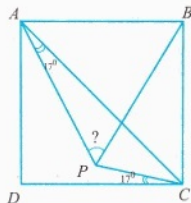
Q7. Let $\{u_n\}_{n \geq 1}$ be given sequence satisfying the conditions: $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, và $u_{n+1} = u_{n-1} + 2n - 1$ for $n \geq 2$.

1) Calculate u_5 .

2) Calculate $u_{100} + u_{101}$.

Q8. Let P be a point inside the square $ABCD$ such that $\widehat{PAC} = \widehat{PCD} = 17^\circ$. Calculate $\widehat{APB}$.

Q9. How many ways of choosing four edges in a cube such that any two among those four chosen edges have no common point.



Q10. There are 100 school students from two clubs A and B standing in circle. Among them 62 students stand next to at least one student from club A , and 54 students stand next to at least one student from club B .

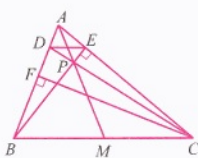
1) How many students stand side-by-side with one friend from club A and one friend from club B ?

2) What is the number of students from club A ?

Section C. Write your detailed solution in the space provided at the end of the question.

Q11. Find all positive integers k such that there exists a positive integer n , for which $2^n + 11$ is divisible by $2^k - 1$.

Q12. Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$, and let BE and CF be the altitudes. Let the median AM intersect BE at point P , and let line CP intersect AB at point D . Prove that $DE \parallel BC$, and AC is tangent to the circumcircle of $\triangle DEF$.



Q13. For a positive integer n , let $S(n)$, $P(n)$ denote the sum and product of all the digits of n respectively

1) Fill all value of n such that $n = P(n)$.

2) Determine all value of n such that $n = S(n) + P(n)$.

Q14. Let a, b, c denote the real numbers such that $1 \leq a, b, c \leq 2$. Consider

$$T = (a-b)^{2018} + (b-c)^{2018} + (c-a)^{2018}.$$

Determine the large possible value of T .

Q15. There are n distinct straight lines on a plane such that every line intersects exactly 12 others. Determine all the possible values of n .

2. SENIOR SECTION'S ANSWERS AND SOLUTION

Q1. *Correct Answer C.* There are 6 squares on 6 faces of the cube. There are 4 diagonals of the cube that have the same length and pass through the center of the cube. Every two diagonals intersect at their midpoint, hence they form a rectangle. So,

there are $6 + \binom{4}{2} = 12$ rectangles.

Q2. *Correct Answer B.* Suppose that the regular hexagon H with side a is inside the triangle equilateral triangle with side 3. Then, the inscribed circle of H is also inside the triangle, and its radius is equal to $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. On the other hand, the largest circle

in the given equilateral triangle is its inscribed circle whose radius is $\frac{\sqrt{3}}{2}$. It follows that $a \leq 1$ and the answer is $\frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Q3. *Correct Answer A.* We have $(n+1)^3 + 16 > n^4 \geq 0$, Which implies $n \geq -3$. For $n \geq 4$ we have $n^4 - (n+1)^3 \geq 3n^3 - 3n^2 - 3n - 1$

$$\geq 12n^2 - 3n^2 - 3n - 1 = 9n^2 - 3n - 1 > 16.$$

Hence, $-3 \leq n \leq 3$. By directly calculation, we obtain $n = -1, 0, 1, 2$.

Q4. *Correct Answer B.* Note that $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - x^4 - y^4 - z^4$.

We get $a-b = 2(2+3)(6-5) - 6^2 + 5^2 = -1$.

In fact, we can also calculate a, b as follows: for $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ we get $a = 23$, and for $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ we get $b = 24$. It follows that $a-b = -1$.

Q5. *Correct Answer D.* Remark that a convex quadrilateral has exactly one intersection which is the intersection of its two diagonals. Consider 9

points on the circle, which give at most $\binom{9}{4} = 126$

intersections. Considering the center and three points on the circle, there are at most $\binom{9}{3} = 84$

intersections. So there are at most $126 + 84 + 10 = 220$ red points.

Q6. If $x^2 > 1$ then $x^{2018} > x^8 > 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y^2 > y^{2018}$. Thus $x^{2018} + y^2 > x^8 + y^{2018}$ (contradiction).

Analogically, if $x^2 < 1 \Rightarrow x^{2018} + y^2 < x^2 + y^{2018}$ (contradiction). Therefore $x^2 = y^2 = 1$.

Q7.

1) It is easy to see that $u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 6, u_5 = 10$.

2) We can prove by induction that

$$u_n = \frac{n(n-1)}{2} \text{ for every } n \geq 1.$$

Therefore,

$$u_n + u_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 \text{ for every } n \geq 1.$$

Thus, $u_{100} + u_{101} = 10000$.

Q8. Let $O(B, BA)$ denote the circle with its center B and radius BA . Let Q denote the point of intersection

of ray CP with $O(B, BA)$.

We have $\widehat{DCQ} = 17^\circ$, which implies

$$\widehat{CAQ} = \widehat{CAP} = 17^\circ.$$

Hence, $Q = P$. We have

$$\widehat{ABP} = 2\widehat{ACP}$$

$$= 2(45^\circ - 17^\circ) = 56^\circ;$$

$$\widehat{APB} = 180^\circ - (56^\circ + 45^\circ + 17^\circ) = 62^\circ.$$

Q9. There are 9 choices, Consider 2 cases: all edges are parallel (3 choices) or two pair of parallel edges (6 choices).

Q10. Let x denote the number of students standing between 2 student from club A , i.e. $(A - * - A)$; y denote the number of student standing between 2 student from club B , i.e. $(B - * - B)$; and z denote the number of student standing between 1 student from A and 1 student from B , i.e. $(A - * - B)$ or $(B - * - A)$. Thus we have

$$x + y + z = 100; x + z = 62; y + z = 54.$$

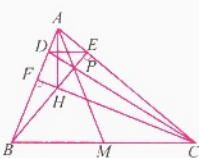
From those equation we have $z = 62 + 54 - 100 = 16$, $x = 62 - 16 = 46$ and $y = 54 - 16 = 38$. Moreover each student from club A has exactly 2 neighbours. Therefore $2x + z = 2|A|$, where $|A|$ is the number of students from club A . Thus $|A| = \frac{(2 \times 46 + 16)}{2} = 54$.

Q11. Suppose $n \in \mathbb{Z}^+$ is a positive integer such that $2^n + 11$ is divisible by $2^k - 1$. Let $n = qk + r$, where q, r are nonnegative integers and $0 \leq r < k$. We have

$$2^n + 11 = 2^{kq+r} + 11 = 2^r(2^{kq} - 1) + (2^r + 11):2^k - 1 \Rightarrow 2^r + 11:2^k - 1.$$

Thus we have $2^r + 11 \geq 2^k - 1$ and $r < k$. Therefore $k \leq 4$. By checking for $k = 1, 2, 3, 4$, we obtain $k = 1, 2, 4$.

Q12. 1) Let $ED' \parallel BC$ (with $D' \in AB$). We see that P is the common point of BE, CD', AM in the trapezoid $BCED'$. It follows $D' \equiv D, DE \parallel BC$.



2) Let H be the point of intersection of BE and CF and let K denote the point of intersection of AH and DE . We see that the quadrilateral $HKDF$ is inscribed in a circle, hence $AD \cdot AF = AK \cdot AH$. In other hand,

we have $AE^2 = AK \cdot AH$. By the above equalities, we deduce $AE^2 = AD \cdot AF$, as desired.

Q13. Let

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0.$$

1) If $k \geq 1$, then

$$n - P(n) = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0 - (a_k a_{k-1} \dots a_0) \geq a_k (10^k - 9^k) > 0.$$

Thus $n = P(n) \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

2) Notice that in this case n has at least 2 digits. Moreover, we have $n - S(n) - P(n)$

$$\begin{aligned} &= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0 - (a_k + \dots + a_0) - a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \\ &= a_k (10^k - a_{k-1} \dots a_1 a_0 - 1) + a_{k-1} (10^{k-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot 9 \\ &\geq a_k (10^k - 9^k - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

The equality occurs if $k = 1$. We find

$$n = 10a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1 a_0$$

i.e. $10 = 1 + a_0$ and $a_0 = 9$. All numbers 19; 29; 39; 49; 59; 69; 79; 89; 99 are satisfying the condition. Answer: 19; 29; 39; 49; 59; 69; 79; 89; 99.

Q14. Without loss of generality, one can assume that

$$1 \leq c \leq b \leq a \leq 2.$$

Hence, $0 \leq a - b \leq 1$, and $(a - b)^{2018} \leq a - b$, and the equality hold if $a = b$ or $(a, b) = (2, 1)$. Similarly,

$0 \leq b - c \leq 1$ then $(b - c)^{2018} \leq b - c$, $0 \leq a - c \leq 1$

then $(c - a)^{2018} \leq c - a$. Hence,

$$\begin{aligned} T &= (a - b)^{2018} + (b - c)^{2018} + (c - a)^{2018} \\ &\leq a - b + b - c + a - c = 2(a - c) \leq 2. \end{aligned}$$

The equality holds if

$$(a, b, c) = (2, 2, 1) \text{ or } (a, b, c) = (2, 1, 1).$$

So, $\max T = 2$.

Q15. Suppose that we have k separate groups of parallel straight lines. Every straight line of each group will intersects all other straight lines of other $(k - 1)$ groups. Hence, 12 is the number of straight lines in every $(k - 1)$ groups. It follows all k groups consist the same number, that called q . We then have $12 = q(k - 1)$ and $n = kq$. This follows $12 + q = kq$. We deduce 12 is divisible by q , i.e. $q = 1; 2; 3; 4; 6; 12$. As above, the identity $n = 12 + q$ gives $n \in \{13; 14; 15; 16; 18; 24\}$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM HỌC 2017-2018

VÒNG 1

Câu 1. a) Với $x > 0, x \neq 1$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2 - 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \\ &= \frac{4\sqrt{x}+4}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x-2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2 \cdot 4\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$B = (x - \sqrt{x} + 1)A = (x - \sqrt{x} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B - 1 = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0$$

$\forall x > 0, x \neq 1$. Vậy $B > 1 \forall x > 0, x \neq 1$.

Câu 2. PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2mx + 2m + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 8 = 0. (*)$$

a) Khi $m = -4$ thì (*) trở thành:

$$x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0$$

Toạ độ giao điểm của (d) và (P) là $O(0; 0)$ và $A(-8; 64)$.

b) Xét (*) có: $\Delta' = m^2 + 2m + 8 = (m + 1)^2 + 7 > 0$,

$\forall m$ nên (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = -2m - 8 & (2) \end{cases}$$

Theo giả thiết: $x_1 + 2x_2 = 2$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - 2m \\ x_1 = 4m - 2 \end{cases}$$

Thay $x_1 = 4m - 2, x_2 = 2 - 2m$ vào (2) ta được:

$$(4m - 2)(2 - 2m) = -2m - 8$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 = 0.$$

Ta thấy $m \in \left\{ 2; -\frac{1}{4} \right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3. $\begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x & (1) \\ x + y - 4\sqrt{y-1} = 0 & (2) \end{cases}$ ĐK: $y \geq 1$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow y^2(x+1) - (x+1)(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y^2 - x - 2) = 0.$$

• Nếu $x = -1$ thì (2) trở thành:

$$y - 1 - 4\sqrt{y-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y-1}(\sqrt{y-1} - 4) = 0$$

Vậy $(-1; 1); (-1; 17)$ là nghiệm của hệ đã cho.

• Nếu $x = y^2 - 2$ thì (2) trở thành:

$$y^2 - 2 + y - 4\sqrt{y-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+2) - 4\sqrt{y-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1}[\sqrt{y-1}(y+2) - 4] = 0$$

+ Nếu $y = 1$ thì $x = 1^2 - 2 = -1 \Rightarrow (x; y) = (-1; 1)$ là nghiệm của hệ đã cho.

+ Với $\sqrt{y-1}(y+2) - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y-1}(y-1+3) - 4 = 0$

Đặt $t = \sqrt{y-1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = y-1$, ta được:

$$t(t^2 + 3) - 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t - 4 = 0$$

$$(t-1)(t^2 + t + 4) = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Với $t = 1 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn) $\Rightarrow (x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của hệ đã cho. Vậy hệ PT đã cho có ba nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; 1); (-1; 17); (2; 2)$.

Câu 4. Đổi 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất, xe thứ hai lần lượt là x (km/h) và y (km/h). ĐK: $y > x > 0$ (*)

Sau 3 giờ, xe thứ nhất đi được $3x$ (km) và xe thứ nhất đi được $3y$ (km). Vì sau khi xuất phát được 3 giờ thì hai xe gặp nhau nên ta có phương trình:

$$3x + 3y = 300 \Leftrightarrow x + y = 100 \quad (1)$$

Thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\frac{300}{x}$ (h), còn thời gian xe thứ hai đi hết quãng

đường AB là $\frac{300}{y}$ (h). Vì thời gian đi cả quãng

đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút nên ta có:

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) có $y = 100 - x$, thay vào (2), ta được:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{100-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 340x + 12000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (nhận)} \\ x = 300 \text{ (loại, do (1))} \end{cases}$$

Vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là 40 km/h và 60 km/h.

Câu 5. a)

Từ OP là đường trung trực của $AC \Rightarrow OP \perp AC$ tại

$M \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$; OQ là đường trung trực của

$BC \Rightarrow OQ \perp BC$ tại $N \Rightarrow \widehat{ONC} = 90^\circ$.

$\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $\widehat{MCN} = 90^\circ$.

Do đó tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật. Vì PQ là tiếp tuyến của (O) , C là tiếp

điểm nên $OC \perp PQ$.

Xét $\triangle POQ$ vuông tại O có

$\Rightarrow PC \cdot QC = OC^2$. Do đó:

$$AP \cdot BQ = MN^2.$$

b) Gọi I là trung điểm của PQ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle OPQ$. Dễ thấy OI là đường trung bình của hình thang vuông $BAPQ$, nên $IO \perp AB$ (đpcm).

c) Ta có $OC^2 = OM \cdot OP$; $OC^2 = ON \cdot OQ$

$$\Rightarrow OM \cdot OP = ON \cdot OQ \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{OQ}{OP}.$$

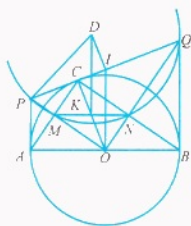
$\Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OQP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OQP}$. Do đó $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp.

• Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ thì DP là bán kính của đường tròn (D) .

Ta thấy MN là đường trung bình của $\triangle ACB \Rightarrow MN \parallel AB$; mà $IO \perp AB \Rightarrow IO \perp MN$.

Gọi K là giao điểm của MN và OC thì K là trung điểm của MN và OC (vì $CMON$ là hình chữ nhật).

Xét đường tròn (D) có I là trung điểm của dây PQ ,



K là trung điểm của dây $MN \Rightarrow DI \perp PQ$ và

$DK \perp MN$. Theo chứng minh trên ta có

$$\begin{cases} OC \perp PQ \\ DI \perp PQ \end{cases} \Rightarrow DI \parallel CO \text{ hay } \begin{cases} DI \parallel KO \\ DK \parallel IO \end{cases}$$

Do đó tứ giác $IOKD$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow DI = OK = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}.$$

$\triangle OPQ$ vuông tại O có OI là đường trung tuyến ứng

với cạnh huyền $PQ \Rightarrow OI = IP = IQ = \frac{PQ}{2}$.

Mà $PQ \geq AB = 2R \Rightarrow OI = IP = IQ \geq R \Rightarrow IP^2 \geq R^2$.

$$\text{Do đó } DP^2 = DI^2 + IP^2 \geq \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2 = \frac{5R^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } DP \geq \frac{R\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \min DP = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} PQ = AB \\ OI = R \end{cases}$ hay

C là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB .

Câu 6. Vì $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ nên ta có:

$$P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

Đặt $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$; $\frac{1}{z} = c$ ($0 < a, b, c < \sqrt{3}$) thì

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Suy ra $P = \frac{a}{3 - a^2} + \frac{b}{3 - b^2} + \frac{c}{3 - c^2}$. Dễ thấy

$$\frac{x}{3 - x^2} \geq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - 3x^2 + x^4}{2(3 - x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x + 2)(x - 1)^2}{2(3 - x^2)} \geq 0$$

đúng, $\forall x$, $0 < x < \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Suy ra $P \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy

ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Xét (1) và (2) có:

$$\Delta'_{(1)} = a^2 - 2a^2 + b^2 - 1; \Delta'_{(2)} = b^2 - 3b^2 + ab$$

$$\Rightarrow \Delta'_{(1)} + \Delta'_{(2)} = a^2 - 2a^2 + b^2 - 1 + b^2 - 3b^2 + ab$$

$$= -a^2 - 2b^2 + ab - 1$$

$$= -\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{7b^2}{4} - 1 < 0 \quad \forall a, b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} < 0 \\ \Delta'_{(2)} < 0 \end{cases}$$

Vậy một trong hai PT đã cho vô nghiệm.

2) Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -2xy.$$

Tương tự

$$y^2 + z^2 - x^2 = -2yz; \quad z^2 + x^2 - y^2 = -2zx.$$

$$\text{Suy ra: } P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2zx} + \frac{z^2}{-2xy} = \frac{-(x^3 + y^3 + z^3)}{2xyz}$$

$$\text{Lại có: } x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(x + y) = 3xyz.$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-3xyz}{2xyz} = \frac{-3}{2}.$$

Câu 2. 1) ĐK: $x \geq -1$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$)

$\Rightarrow x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4(t^2 - 1) + 12} = 2(t^2 - 1) - 4 + t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^4 + 2t^2 + 9} = 2t^2 + t - 6 \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } 2t^2 + t - 6 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{3}{2} \quad (\text{vì } t \geq 0).$$

Khi đó (1) tương đương với phương trình sau:

$$t^4 + 2t^2 + 9 = 4t^4 + t^2 + 36 + 4t^3 - 24t^2 - 12t$$

$$\Leftrightarrow 3t^4 + 4t^3 - 25t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 25 - \frac{12}{t} + \frac{27}{t^2} = 0$$

(vì $t = 0$ không phải là nghiệm của (1))

$$\Leftrightarrow 3\left(t^2 + \frac{9}{t^2}\right) + 4\left(t - \frac{3}{t}\right) - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(t - \frac{3}{t}\right)^2 + 4\left(t - \frac{3}{t}\right) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t - \frac{3}{t} - 1\right)\left(3t - \frac{9}{t} + 7\right) = 0.$$

$$\bullet \text{ Với } t - \frac{3}{t} - 1 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 3 = 0 \text{ ta được } t = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } 3t - \frac{9}{t} + 7 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 7t - 9 = 0 \Rightarrow \text{phương}$$

trình có nghiệm không thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

2) ĐK: $x > y$. Khi đó PT(1) tương đương với

$$x^2 + y^2 - \frac{8xy}{x-y} = 16 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 2xy - \frac{8xy}{x-y} = 16$$

$$\Rightarrow (x-y)^3 + 2xy(x-y) - 8xy = 16(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3 + 2(xy-8)(x-y) - 8xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-4)[(x-y)^2 + 4(x-y) + 2xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-4)[x^2 + y^2 + 4(x-y)] = 0 \Leftrightarrow x-y = 4.$$

Khi đó (2) tương đương với phương trình sau:

$$\sqrt{x-y} + 3\sqrt{2y^2 - y + 1} = 2y^2 - y + 1 - (x-y) + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3\sqrt{2y^2 - y + 1} = 2y^2 - y + 1 - 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - y + 1 - 3\sqrt{2y^2 - y + 1} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2y^2 - y + 1} + 1)(\sqrt{2y^2 - y + 1} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y^2 - y + 1} = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y+5)(y-3) = 0.$$

$$\bullet \text{ Nếu } y = -\frac{5}{2} \text{ thì } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\bullet \text{ Nếu } y = 3 \text{ thì } x = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x, y) là:

$$\left(7; 3\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

Câu 3. Đặt $a = x - y$, $h = xy$ ($a, h \in \mathbb{Z}$), PT đã cho

$$\text{trở thành: } a^3 + 3ah = 6h + 3 \Leftrightarrow a^3 - 3 = -3b(a-2)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 8) + 5 = -3b(a-2) \quad (1)$$

$$\text{Vì } a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4) : (a-2) \text{ nên từ (1)}$$

$$\text{suy ra } 5 : a-2 \Rightarrow a-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-3; 1; 3; 7\}.$$

$$\text{Mà } a^3 - 3 = -3b(a-2) \Rightarrow b = \frac{a^3 - 3}{-3(a-2)}.$$

Ta có bảng:

a	-3	1	3	7
b	-2	$-\frac{2}{3}$ (loại)	-8	$-\frac{68}{3}$ (loại)

$$\bullet \text{ Nếu } a = -3, b = -2 \text{ ta được: } x - y = -3, xy = -2$$

suy ra $x, -y$ là hai nghiệm của PT:

$$\Rightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta được $(x; y) \in \{(-1; 2), (-2; 1)\}$.

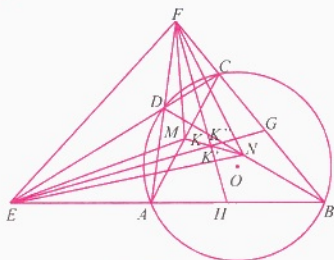
$$\bullet \text{ Nếu } a = 3, b = -8 \text{ ta suy ra } x, -y \text{ là nghiệm của}$$

$$\text{phương trình: } t^2 + 3t + 8 = 0 \text{ (PT này vô nghiệm).}$$

Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là:

$$(-1; 2), (-2; 1).$$

Câu 4.



1) • Ta có: $\widehat{ADE} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$ (góc ngoài của $\triangle DEF$). Suy ra: $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{ABC}$.

• Vì $\widehat{BCD}$ là góc ngoài của $\triangle CDF$
 $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{BCD} - \widehat{CDF} = \widehat{BCD} - \widehat{ABC}$

Vì $\widehat{BAD}$ là góc ngoài của $\triangle ADE$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{AED} &= \widehat{BAD} - \widehat{ADE} = \widehat{BAD} - \widehat{ABC} \\ \Rightarrow \widehat{KEC} + \widehat{KFA} &= \frac{\widehat{AED} + \widehat{CFD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD} - 2\widehat{ABC}}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 2\widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{KEF} + \widehat{KFE} &= \widehat{DEF} + \widehat{KEC} - \widehat{DFE} + \widehat{KFA} \\ &= (\widehat{DEF} + \widehat{DFE}) + (\widehat{KEC} + \widehat{KFA}) \\ &= \widehat{ABC} + 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ.\end{aligned}$$

2) Ta có $\triangle EDB \sim \triangle EAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BD}{AC}$ (1)

Mà $BD = 2BN$ (gt); $AC = 2CM$ (gt) $\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BN}{CM}$
 $\Rightarrow \triangle EBN \sim \triangle ECM$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{EN}{EM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{EN}{EM} \Rightarrow EM \cdot BD = EN \cdot AC$.

Gọi giao điểm của các đường phân giác trong của $\triangle BEC$, $\triangle BFA$ với BC , AB là G và H tương ứng; K' là giao điểm của EG và MN ; K'' là giao điểm của FH và MN . Vì $\triangle EBN \sim \triangle ECM \Rightarrow \widehat{NEB} = \widehat{MEC}$ mà $\widehat{GEB} = \widehat{GEC} \Rightarrow \widehat{GEB} - \widehat{NEB} = \widehat{GEC} - \widehat{MEC}$ hay $\widehat{GEN} = \widehat{GEM} \Rightarrow EG$ là tia phân giác của $\widehat{MEN}$
 $\Rightarrow \frac{K'N}{K'M} = \frac{EN}{EM} = \frac{BD}{AC}$ (3)

Chứng minh tương tự như trên, ta có: $\frac{FN}{FM} = \frac{BD}{AC}$ và FH là tia phân giác của

$$\widehat{MFN} \Rightarrow \frac{K''N}{K''M} = \frac{FN}{FM} = \frac{BD}{AC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{K'N}{K'M} = \frac{K''N}{K''M} \Rightarrow K' \equiv K'' \Rightarrow K'$ là giao điểm của EG và FH . Mà K là giao điểm của EG và $FH \Rightarrow K \equiv K' \equiv K''$. Vậy ba điểm M, K, N thẳng hàng.

Câu 5. 1) Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ($x, y, z > 0$).

BDT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{3y+2x}} + \frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{3z+2y}} + \frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{3x+2z}} \geq \frac{3\sqrt{xyz}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{5z}\sqrt{3y+2x}} + \frac{y}{\sqrt{5x}\sqrt{3z+2y}} + \frac{z}{\sqrt{5y}\sqrt{3x+2z}} \geq \frac{3}{5} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{5z}\sqrt{3y+2x}} \geq \frac{2x}{2x+3y+5z}; \quad (1)$$

$$\frac{y}{\sqrt{5x}\sqrt{3z+2y}} \geq \frac{2y}{2y+3z+5x}; \quad (2)$$

$$\frac{z}{\sqrt{5y}\sqrt{3x+2z}} \geq \frac{2z}{2z+3x+5y} \quad (3)$$

Đặt $A = \frac{x}{\sqrt{5z}\sqrt{3y+2x}} + \frac{y}{\sqrt{5x}\sqrt{3z+2y}} + \frac{z}{\sqrt{5y}\sqrt{3x+2z}}$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$A \geq \frac{2x}{2x+3y+5z} + \frac{2y}{2y+3z+5x} + \frac{2z}{2z+3x+5y} \quad (4)$$

Đặt $B = \frac{x}{2x+3y+5z} + \frac{y}{2y+3z+5x} + \frac{z}{2z+3x+5y}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}B &= \frac{x^2}{2x^2+3xy+5zx} + \frac{y^2}{2y^2+3yz+5xy} \\ &\quad + \frac{z^2}{2z^2+3zx+5yz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)}.\end{aligned}$$

Lại có: $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ với $x, y, z > 0$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow xy + yz + zx &\leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \\ \Rightarrow \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{10}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Suy ra $2B \geq \frac{3}{5}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra BDT (*) được chứng minh.

2) Gọi 5 số tự nhiên phân biệt đã cho lần lượt là: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Không giảm tổng quát có thể giả sử: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$.

• Nếu $x_1 \leq 4; 5 \leq x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ thì

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN VỊ THANH, HẬU GIANG, NĂM HỌC 2017 – 2018

Câu 1 (2 điểm). a) Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $(a+1)(b+1) \geq 64$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b$.

b) Tính tổng

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

theo n (S gồm n số hạng, n là số nguyên dương).

c) Cho p và q là hai số nguyên tố khác nhau. Tìm hai số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 1.$$

Câu 2 (2 điểm). 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy = y \\ \frac{3x^2}{y} = 7 - 2x \end{cases}$$

2) Giải các phương trình:

a) $x(4 + \sqrt{x}) - 3 - (x + \sqrt{x})\sqrt{4x - 3} = 0.$

b) $x^2 + \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = 3.$

3) Gọi a và b là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{5} = 0. \text{ Đặt}$$

$$s_1 = a + b; s_2 = a^2 + b^2; \dots; s_n = a^n + b^n,$$

với n là số nguyên dương.

a) Tìm a và b .

b) Giả sử $s_{2016} = \alpha; s_{2017} = \beta$. Tính s_{2018} theo α và β .

Câu 3 (2 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng

$$d: y = 2(m-1)x - 4.$$

1) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d khi d qua điểm $A(1; 6)$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn

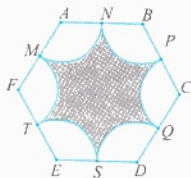
$$P = x_1^3 + x_2^3 + |x_1 - x_2|^2 + \sqrt{x_1 x_2} = 966.$$

Câu 4 (3.5 điểm). 1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi D là điểm di động trên đoạn thẳng BC (D khác B và C). Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của D lên AB và AC .

a) Đặt $AP = x$. Tính diện tích tứ giác $APDQ$ theo a và x . Tìm giá trị của x để diện tích tứ giác $APDQ$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Gọi F là điểm đối xứng của D qua PQ . Chứng minh $\widehat{BFC} = 90^\circ$.

2) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh bằng $2a$. Ta vẽ 6 đường tròn, mỗi đường tròn có tâm là đỉnh của lục giác và bán kính bằng a (như hình bên). Tính diện tích phần tô đen theo a .



Câu 5 (0.5 điểm). Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

MAI HOÀN HẢO (Hậu Giang) giới thiệu

• $x_2 \leq x_4 - 2, x_3 \leq x_5 - 2$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 + x_4 - 2 + x_5 - 2 = x_4 + x_5$ (trái gt).

• Nếu $x_1 < x_2 \leq 4; 5 \leq x_3 < x_4 < x_5$ thì

$$\Rightarrow x_1 \leq 3; x_2 \leq 4; x_3 \leq x_5 - 2$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 + 4 + x_3 = 5 + 2 + x_3 < x_4 + 2 + x_5 - 2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 < x_4 + x_5$ (trái gt).

• Nếu $x_1 < x_2 < x_3 \leq 4; 5 \leq x_4 < x_5$ thì

$$\Rightarrow x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_3 < x_5$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 + 3 + x_3 = 5 + x_3 < x_4 + x_5$ (trái gt).

• Nếu $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 4; 5 \leq x_5$ thì

$$\Rightarrow x_1 \leq 1, x_2 \leq 2, x_3 \leq 3, x_4 > 1$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 + 2 + 3 = 1 + 5 < x_4 + x_5$ (trái gt).

• Nếu $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \leq 4$ thì

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 = 6 < 7 = x_4 + x_5$ (trái gt).

Vậy tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

TRẦN NGỌC ĐẠI

(GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình) giới thiệu



PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ HÓA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Nhiệm vụ của người dạy học là luôn trăn trở làm sao để “Đưa vấn đề phức tạp trở nên đơn giản, vấn đề khó trở nên dễ hiểu, dễ tiếp thu”. Khi giải toán về bất đẳng thức (BĐT) và cực trị với các biến bình đẳng thì ta thường dự đoán điểm rơi khi các biến bằng nhau. Nhưng với những bài toán mà các biến không bình đẳng thì lời giải sẽ khó hơn vì việc xác định điểm rơi và tách số để triệt tiêu biến là không hề dễ. Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu phương pháp **tham số hóa** kết hợp với một số kĩ năng phân tích và suy luận hợp lí để tìm lời giải cho các bài toán cực trị với các biến khác nhau.

Thí dụ 1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $\sqrt{ab}(a-b) = a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a+b$. (Đề TS lớp 10 THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm học 2012-2013).

Lời giải. Cách 1 (Đáp án của đề thi). Từ giả thiết suy ra $a > b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $(a+b)^2 = ab(a-b)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4ab[(a+b)^2 - 4ab]$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\frac{4ab + (a+b)^2 - 4ab}{2} \right)^2 \text{ hay}$$

$$(a+b)^2 \leq \frac{1}{16} (a+b)^4 \Leftrightarrow a+b \geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 4ab = (a+b)^2 - 4ab \\ \sqrt{ab}(a-b) = a+b \\ a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \\ b = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy min $P = 4$ đạt được khi $a = 2 + \sqrt{2}; b = 2 - \sqrt{2}$

Nhận xét. Đây là bài toán cực trị ở đó các biến không bằng nhau nên để tách và biến đổi như trên là không hề dễ đối với nhiều học sinh. Cách này

chỉ dùng khi ta biết trước điểm rơi nhưng việc nhắm được điểm rơi ở đây rất khó.

Cách 2 (tham số hóa). Vì $a > b > 0$, đặt $a = tb$ ($t > 0$) khi đó ta có $\sqrt{tb} \cdot b(tb-b) = tb+b$

$$\Leftrightarrow b = \frac{t+1}{\sqrt{t(t-1)}}. \text{ Do } a, b > 0 \Rightarrow t > 1.$$

Ta có $P = a+b = b(t+1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t(t-1)}} = \frac{t^2+2t+1}{\sqrt{t(t-1)}} = \frac{(t-1)^2+4t}{\sqrt{t(t-1)}} \\ &= \frac{t-1}{\sqrt{t}} + \frac{4t}{\sqrt{t(t-1)}} \geq 2\sqrt{\frac{t-1}{t} \cdot \frac{4t}{t(t-1)}} = 4. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{t-1}{\sqrt{t}} = \frac{4t}{\sqrt{t(t-1)}}$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow t = 3 + 2\sqrt{2} \text{ (do } t > 1). \text{ Khi đó } b = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow a = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy min $P = 4$ đạt được khi $a = 2 + \sqrt{2}; b = 2 - \sqrt{2}$.

Nhận xét. Việc tham số hóa đã làm bài toán trở nên dễ dàng hơn vì chuyển thành bài toán tìm cực trị của biểu thức một biến.

Thí dụ 2. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{ab}$. (Đề TS lớp 10 THPT chuyên

ĐHSPT Hà Nội, năm học 2015-2016).

Lời giải. Cách 1 (Đáp án đề thi) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $1 = 4a+b+\sqrt{ab} \geq 5\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^2 \geq 25.$$

Vậy min $P = 25$ đạt được khi $a = \frac{1}{10}; b = \frac{2}{5}$.

Nhận xét. Lời giải thật ngắn gọn nhưng để chọn được điểm rơi như trên là không đơn giản vì điểm rơi không phải là số nguyên.

Cách 2 (tham số hóa). Do $a > 0, b > 0$ nên đặt $a = bt$ với $t > 0$. Khi đó ta có:

$$4bt + b + \sqrt{bt \cdot b} = 1 \Leftrightarrow b(4t + \sqrt{t} + 1) = 1.$$

Suy ra $b = \frac{1}{4t + \sqrt{t} + 1}$. Thay vào biểu thức của P ta được:

$$P = \frac{1}{bt \cdot b} = \frac{1}{b^2 t} = \frac{(4t + \sqrt{t} + 1)^2}{t} = \left(4\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P = \left(4\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)^2 \geq \left(2\sqrt{4\sqrt{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}} + 1 \right)^2 = (2 \cdot 2 + 1)^2 = 25.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $4\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$. Khi đó

$$\text{ta có: } \begin{cases} b = 4a \\ 25ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Vậy min $P = 25$ đạt được khi $a = \frac{1}{10}; b = \frac{2}{5}$.

Nhận xét. Khi có được điểm rơi tại $a = \frac{1}{10}; b = \frac{2}{5}$

ta lí giải lời giải ở cách 1 như sau: Từ $a = \frac{1}{10} \Rightarrow 4a = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$, vậy ta có $4a = b$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1 = 4a + b + \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{4ab} + \sqrt{ab} = 5\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 1 \geq 5\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq 25.$$

Thí dụ 3. Cho a, b là những số thực dương thỏa mãn $a + b = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b}$. (Đề TS lớp 10 THPT Bắc Giang, năm học 2008 - 2009).

Lời giải. Cách 1 (Đáp án đề thi). Từ giả thiết $a + b = \frac{5}{4}$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 4(a+b) - 5 \\ &= \left(\frac{4}{a} + 4a \right) + \left(\frac{1}{4b} + 4b \right) - 5. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{4}{a} + 4a \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot 4a} = 8; \quad \frac{1}{4b} + 4b \geq 2\sqrt{\frac{1}{4b} \cdot 4b} = 2.$$

Do đó: $P \geq 8 + 2 - 5 \Leftrightarrow P \geq 5$. Đẳng thức xảy ra

$$\text{khi } \begin{cases} \frac{4}{a} = 4a \\ \frac{1}{4b} = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy min $P = 5$ đạt được khi $a = 1; b = \frac{1}{4}$.

Cách 2 (Tham số hóa)

Do $a > 0, b > 0$ nên ta đặt $a = bt$ với $t > 0$. Từ giả

thiết có: $bt + b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4(t+1)}$. Do đó

$$P = \frac{16(t+1)}{5t} + \frac{t+1}{5} = \frac{1}{5} \left(17 + \frac{16}{t} + t \right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{5} \left(17 + \frac{16}{t} + t \right) \geq \frac{1}{5} \left(17 + 2\sqrt{\frac{16}{t} \cdot t} \right) = 5.$$

Suy ra $P \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{16}{t} = t \Rightarrow t = 4$.

Do đó $b = \frac{1}{4}; a = 1$. Vậy min $P = 5$ đạt được khi

$$a = 1; b = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Khi có điểm rơi $a = 1; b = \frac{1}{4}$, ta có thể giải thích cách giải trên như sau:

Với $a = 1; b = \frac{1}{4}$ ta có $\frac{4}{a} = 4$ và $\frac{1}{4b} = 1$ để áp dụng được bất đẳng thức Cauchy thì

$\frac{4}{a} = 4 = ka \Rightarrow k = 4; \quad \frac{1}{4b} = 1 = lb \Rightarrow l = 4$. Do đó ta tách số như sau:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} = \frac{4}{a} + 4a + \frac{1}{4b} + 4b - 5 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot 4a} + 2\sqrt{\frac{1}{4b} \cdot 4b} - 5 \end{aligned} \Rightarrow P \geq 5.$$

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta

$$\text{có: } \left(\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} \right)^2 \leq (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{5}{4} \cdot P \Rightarrow P \geq 5.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt{b}}{1} \\ \sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Thí dụ 4. Cho a, b là những số thực dương thỏa mãn $\frac{2017}{a} + \frac{2018}{b} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a \cdot b$. (Đề TS lớp 10 THPT chuyên Bình Định, năm học 2017-2018).

Lời giải. Cách 1 (Tham số hóa). Đặt $a = bt$ với $t > 0$. Từ giả thiết có: $2017b + 2018a = ab$

$$\Leftrightarrow 2017b + 2018bt = bt \cdot b \Rightarrow b = \frac{2017 + 2018t}{t}$$

$\Rightarrow a = 2017 + 2018t$. Do đó ta có:

$$P = a + b = 2017 + 2018t + \frac{2017}{t} + 2018.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$P \geq 2017 + 2018 + 2\sqrt{2018 \cdot \frac{2017}{t}} = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $2018t = \frac{2017}{t} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2018}}$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2018}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}),$$

$$a = \sqrt{2017}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}).$$

Vậy min $P = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$ khi

$$a = \sqrt{2017}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018});$$

$$b = \sqrt{2018}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}).$$

Cách 2 (Tách số) Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2 &= \left(\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{\sqrt{2018}}{\sqrt{b}} \right)^2 \\ &\leq (a+b) \left(\frac{2017}{a} + \frac{2018}{b} \right). \end{aligned}$$

Suy ra $P = a + b \geq (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2$. Đẳng thức

xảy ra khi $\begin{cases} a+b = (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2 \\ \frac{a}{\sqrt{2017}} = \frac{b}{\sqrt{2018}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2017}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}) \\ b = \sqrt{2018}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}) \end{cases}$$

Cách 3. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} P = a + b &= \frac{a}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} + \frac{2017}{a} \\ &\quad + \frac{b}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} + \frac{2018}{b} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} \right) (a+b) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P &\geq 2\sqrt{\frac{a}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} \cdot \frac{2017}{a}} \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{b}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} \cdot \frac{2018}{b}} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} \right) (a+b) - 1 \end{aligned}$$

$$P \geq 2 + P - \frac{P}{(\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2} - 1 \Leftrightarrow P \geq (\sqrt{2017} + \sqrt{2018})^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a = \sqrt{2017}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}) \\ b = \sqrt{2018}(\sqrt{2017} + \sqrt{2018}) \end{cases}$$

Thí dụ 5. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $a + b \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3a + 2b + \frac{6}{a} + \frac{8}{b}.$$

Lời giải. Nhận xét 1. Ở bài này do giả thiết ở dạng bất đẳng thức nên ta suy luận tìm điểm rơi theo cách tham số hóa. Ta xét dấu bằng xảy ra tức là $a + b = 6$. Giả sử $a = bt$ với $t > 0$. Khi đó

$$bt + b = 6 \Leftrightarrow b = \frac{6}{t+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \frac{3.6t}{t+1} + \frac{2.6}{t+1} + \frac{t+1}{t} + \frac{8(t+1)}{6} \\ &= \frac{12(t+1) + 6t}{t+1} + 1 + \frac{4(t+1)}{3} \\ &= 13 + \frac{6t}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{4(t+1)}{3} \\ &\geq 13 + 3\sqrt{\frac{6t}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{4(t+1)}{3}} = 19. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{6t}{t+1} = \frac{1}{t} = \frac{4(t+1)}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Khi đó ta có $a = 2$; $b = 4$. Vậy min $P = 19$ đạt được khi $a = 2$; $b = 4$.

Nhận xét 2. Khi đã có điểm rơi $a = 2$; $b = 4$ thì ta có thể trình bày lời giải nhanh như sau:

$$\text{Từ } a = 2 \Rightarrow \frac{6}{a} = 3 \text{ để áp dụng được bất đẳng thức}$$

$$\text{Cauchy thì } \frac{6}{a} = 3 = ka \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Từ } b = 4 \Rightarrow \frac{8}{b} = 2 \text{ suy ra } \frac{8}{b} = 2 = lb \Rightarrow l = \frac{1}{2}.$$

Do đó ta có thể tách số như sau:

(Xem tiếp trang 16)



MỘT BÀI TOÁN CÓ NHIỀU CÁCH GIẢI

TRẦN XUÂN ĐĂNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Trong kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) năm 2013 tại Colombia có bài toán sau đây:

Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H . Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC , khác với các điểm B và C . Các điểm M và N tương ứng là chân các đường cao kẻ từ B và C . Kí hiệu (ω_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN và gọi X là điểm trên (ω_1) sao cho WX là đường kính của (ω_1) . Tương tự, kí hiệu (ω_2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và gọi Y là điểm trên (ω_2) sao cho WY là đường kính của (ω_2) . Chứng minh rằng các điểm X , Y và H thẳng hàng. (Bài toán 4 của đề thi IMO năm 2013).

Sau đây là một số lời giải của Bài toán 1 mà trong các lời giải đó chỉ sử dụng kiến thức của bậc trung học cơ sở.

Lời giải 1. Gọi D là giao điểm của AH và BC . Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên $AD \perp BC$.

Vì WX là đường kính của đường tròn (ω_1)

nên $\widehat{XBW} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{XBN} + \widehat{NBW} = 90^\circ$. (1)

Vì $CN \perp AB$ nên $\widehat{CNB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NCB} + \widehat{NBC} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{XBN} = \widehat{NCW}$ (3)

Vì WX là đường kính của đường tròn (ω_1) nên

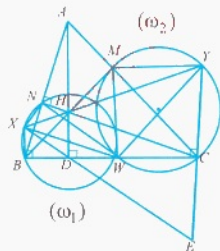
$\widehat{XNW} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{XNB} + \widehat{BNW} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{CNW} + \widehat{BNW} = 90^\circ$, nên

$\widehat{XNB} = \widehat{CNW}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle BNX \sim \triangle CNW$ (g.g).

Suy ra $\frac{BX}{CW} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow CW = \frac{BX \cdot CN}{BN}$.



Tương tự $BW = \frac{CY \cdot BM}{CM}$.

Suy ra $BC = BW + CW = BX \cdot \frac{CN}{BN} + CY \cdot \frac{BM}{CM}$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle BNC \sim \triangle BDA$, suy

ra $\frac{CN}{BN} = \frac{AD}{BD}$. Tương tự $\frac{BM}{CM} = \frac{AD}{CD}$, suy ra

$BC = BX \cdot \frac{AD}{BD} + CY \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{AD(BX \cdot CD + CY \cdot BD)}{BD \cdot CD}$

Gọi $E = XD \cap CY$. Vì BX và CY cùng vuông góc với BC nên $BX \parallel CY$. Theo hệ quả của định lý

Thales ta có $\frac{CE}{BX} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CE = \frac{BX \cdot CD}{BD}$

$\Rightarrow YE = CY + CE = CY + \frac{BX \cdot CD}{BD} = \frac{BX \cdot CD + CY \cdot BD}{BD}$

$= \frac{BC \cdot CD}{AD} \Rightarrow \frac{YE}{HD} = \frac{BC \cdot CD}{HD \cdot AD}$.

Dễ thấy $\triangle DBH \sim \triangle DAC$. Suy ra $\frac{BD}{AD} = \frac{HD}{CD}$

$\Rightarrow AD \cdot HD = BD \cdot CD \Rightarrow \frac{YE}{HD} = \frac{BC}{BD}$.

Mặt khác $\frac{BC}{BD} = \frac{XE}{XD} \Rightarrow \frac{YE}{HD} = \frac{XE}{XD}$.

Mặt khác $\widehat{XDH} = \widehat{XEY}$ (vì $HD \parallel CY$).

Suy ra $\triangle XEY \sim \triangle XDH$. Suy ra $\widehat{EXH} = \widehat{EXY}$.

Từ đó suy ra các điểm X , Y và H thẳng hàng.

Lời giải 2. Gọi E là giao điểm của BX và CN . Gọi F là giao điểm của CY và BM . Ta có

$\widehat{XNE} + \widehat{XNB} = 90^\circ$, $\widehat{WNB} + \widehat{XNB} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{XNE} = \widehat{WNB}$. Ta có

$\widehat{NBW} + \widehat{BCN} = 90^\circ$, $\widehat{BEN} + \widehat{BCE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NBW} = \widehat{XEN}$.

Suy ra $\triangle NEX \sim \triangle NBW \Rightarrow \frac{EX}{BW} = \frac{NE}{NB} = \frac{BE}{BC}$

$\Rightarrow EX = \frac{BW \cdot BE}{BC}$. Tương tự $FY = \frac{CW \cdot CF}{BC}$.

$$\Rightarrow CY = CF - FY = CF - \frac{CW.CF}{BC} = \frac{BW.CF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{EX}{CY} = \frac{BE}{CF}. \text{ Mặt khác, vì } BE \parallel CF \text{ nên theo}$$

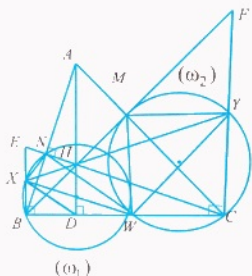
hệ quả của định lý Thales ta có $\frac{BE}{CF} = \frac{EH}{HC}$, suy

$$\text{ra } \frac{EX}{CY} = \frac{EH}{HC}. \text{ Vì } \widehat{XEH} = \widehat{YCH}, \Delta EHX \sim$$

ΔCHY , suy ra $\widehat{XHE} = \widehat{YHC}$. Lại có

$$\widehat{YHC} + \widehat{YHE} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{XHE} + \widehat{EHY} = 180^\circ.$$

Từ đó suy ra các điểm X, Y và H thẳng hàng.



Lời giải 3. Gọi D là giao điểm của AH và BC . Vì H là trực tâm của ΔABC nên $AD \perp BC$. Kẻ $HK \perp AW (K \in AW)$. Ta thấy

$$\Delta AKH \sim \Delta ADW \Rightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AW} \\ \Rightarrow AK.AW = AH.AD.$$

$$\Delta ANH \sim \Delta ADB. \text{ Suy ra } AH.AD = AN.AB$$

$$\Rightarrow AK.AW = AN.AB \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AN}{AW}.$$

Từ đó các tam giác AKN và ABW đồng dạng với nhau, suy ra $\widehat{AKN} = \widehat{ABW}$.

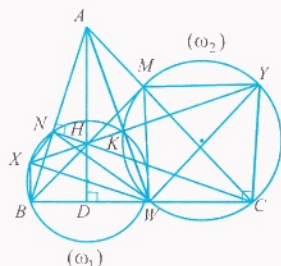
Vậy tứ giác $BNKW$ nội tiếp được trong một đường tròn. Suy ra $\widehat{XKW} = 90^\circ \Rightarrow XK \perp KW$

$$\Rightarrow X, H, K \text{ thẳng hàng.}$$

Để dàng chứng minh được $AM.AC = AH.AD$.

Suy ra $AM.AC = AK.AW$. Suy ra tứ giác $CWKM$ nội tiếp được trong một đường tròn. Do đó $K \in (\omega_2) \Rightarrow \widehat{WKY} = 90^\circ \Rightarrow KY \perp KW$.

Suy ra các điểm X, Y, H thẳng hàng.



Lời giải 4. Gọi D là giao điểm của AH và BC . Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $AD \perp BC$. Gọi K là giao điểm khác W của đường thẳng AW và đường tròn (ω_1) . Dễ dàng chứng minh được

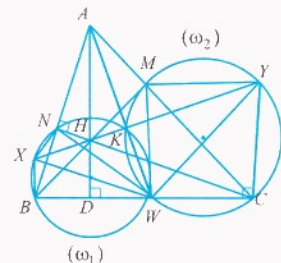
$$AH.AD = AN.AB \text{ và } AK.AW = AB.AN,$$

suy ra $AH.AD = AK.AW$. Dẫn đến tứ giác $HKWD$ nội tiếp được trong một đường tròn, suy ra $\widehat{HKW} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp KW$. Mặt khác

$$\widehat{XKW} = 90^\circ \Rightarrow KX \perp KW \Rightarrow X, H, K \text{ thẳng hàng.}$$

Dễ dàng chứng minh được $AM.AC = AN.AB$,

suy ra $AM.AC = AK.AW$. Do đó tứ giác $KMCW$ nội tiếp được trong một đường tròn, suy ra $K \in (\omega_2) \Rightarrow \widehat{WKY} = 90^\circ \Rightarrow KY \perp KW$. Mặt khác $XK \perp KW$, suy ra X, Y, H thẳng hàng.



Lời giải 5. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC . Giả sử điểm W thuộc đoạn thẳng KC . Kẻ đường kính KD của đường tròn đường kính BH , khi đó B, X, D thẳng hàng. Để dàng chứng minh được $\Delta NDH \sim \Delta NKW$ nên suy ra

$$\frac{DX}{KW} = \frac{ND}{NK}.$$

Đễ dàng chứng

minh được

$$\Delta NDK \sim \Delta KBA$$

$$\Rightarrow \frac{ND}{NK} = \frac{BK}{AK}$$

$$\Rightarrow \frac{DX}{KW} = \frac{BK}{AK} = \frac{DK}{AK}$$

$$\Delta HDX \sim \Delta HDK$$

$$\Rightarrow \widehat{DHX} = \widehat{KAW}$$

Mặt khác $DH \perp AK$, suy ra $HX \perp AW$. Tương tự $HY \perp AW$, suy ra các điểm X, Y và H thẳng hàng.

Trong kì thi học sinh giỏi lớp 9 của tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2010 - 2011 có bài toán sau:

Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H . Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BH ở D đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt đường thẳng CH tại E . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD .

1) Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

2) Gọi K là trung điểm của cạnh BC . Đường thẳng MN cắt đường thẳng AK tại P . Chứng minh

PHƯƠNG PHÁP THAM SỞ HÓA...

(Tiếp theo trang 13)

$$P = 3a + 2b + \frac{6}{a} + \frac{8}{b} = \frac{3}{2}(a+b) + \frac{3}{2}a + \frac{6}{a} + \frac{b}{2} + \frac{8}{b}$$

$$\geq \frac{3}{2} \cdot 6 + 2\sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{6}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{8}{b}} = 9 + 2,3 + 2,2 = 19.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2; b = 4$.

Kết luận. Như vậy nếu suy luận hợp lí ta tìm được lời giải một cách tự nhiên dễ hiểu không mang tính gượng ép đồng thời từ đó có thể tìm ra nhiều cách giải. Cuối cùng xin mời các bạn hãy luyện tập phương pháp trên qua một số bài tập sau:

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $a + 2b \geq 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2a + 3b + \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$$

Bài 2. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn

$a + \frac{1}{b} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP tiếp xúc với BC .

Chúng ta thấy rằng Bài toán 1 là một bài toán tổng quát của Bài toán 2. Bài toán sau là một bài toán tổng quát của bài toán 1:

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC . Một đường tròn đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại N, M . Cho D là một điểm nằm trên cạnh BC , khác với các điểm B và C . Gọi H là một giao điểm khác D của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BND và CMD . Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC , khác với các điểm B và C . Kí hiệu (ω_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BWN và (ω_2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM . Gọi X là điểm trên (ω_1) sao cho BX song song với AD . Gọi Y là điểm trên (ω_2) sao cho CY song song với AD . Chứng minh rằng các điểm X, Y và H thẳng hàng.

Mời các bạn hãy tìm lời giải cho bài toán 3. Chúc các bạn thành công!

$$P = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

(Đề TS lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, năm học 2007-2008)

Bài 3. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$$

Bài 4. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $a \geq 2b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

(Đề TS lớp 10 THPT Hà Nội, năm học 2012-2013)

Bài 5. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $a + b \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a + b + \frac{1}{2a} + \frac{2}{b}$$

Bài 6. Với a, b là những số thực dương thỏa mãn $2a + 3b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2002}{a} + \frac{2017}{b} + 2996a - 5501b$$

(Đề TS lớp 10 THPT Bắc Giang, năm học 2017-2018)

1C	2B	3D	4C	5D	6B	7C	8A	9A	10D
11A	12D	13D	14C	15B	16B	17B	18B	19C	20A
21A	22B	23D	24D	25D	26A	27A	28A	29B	30C
31B	32B	33B	34C	35D	36B	37B	38D	39C	40A
41C	42D	43C	44B	45C	46C	47C	48A	49A	50C

Câu 3. $y' = \frac{a}{2018+ax} + \frac{b}{2018+bx}$

$$= \frac{2abx + 2018(a+b)}{abx^2 + 2018x(a+b) + 2018^2}$$

 Vậy $y'(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2ab + 2018(a+b)}{ab + 2018(a+b) + 2018^2} = 1$

$$\Rightarrow ab = 2018^2 = p.$$

Câu 5. $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x = \cos x \cdot \cos 3x$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x).$$

Câu 6. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = -i.$

Suy ra $z = i^{2018} + (-i)^{2018} = -2.$

Câu 8. Ta có

$$S_1 \cdot S_2 = (2 + \sqrt{3})(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + (2018^2 - 2017^2)$$

$$= (2 + \sqrt{3})^{3+7+11+\dots+4035} = (2 + \sqrt{3})^{2037171}.$$

Do đó $\log_{(26+15\sqrt{3})}(S_1 \cdot S_2) = \frac{1}{3} \log_{(2+\sqrt{3})}(S_1 \cdot S_2) = 679057.$

Câu 9. Giả sử thiết diện của hình nón là tam giác cân SAB và O là tâm của đường tròn đáy hình nón và là trung điểm AB . Ta có:

$$k^2 = \frac{SO^2}{SA^2} = \frac{SA^2 - OA^2}{SA^2} = \frac{8OA^2}{9OA^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 11. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (\tan x + 1)^2}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan x)}{(\tan x + 1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 12. Đặt $x = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = |x|$. Ta có:

$$z_2^2 - 2z_1 z_2 + 2z_1^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{z_2^2}{z_1^2} - 2 \frac{z_2}{z_1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ (vì } z_1, z_2 \neq 0) \Leftrightarrow x = 1 \pm i \Rightarrow |x| = \sqrt{2}.$$

Câu 13. Vì vẽ trái đồng biến trong hai khoảng, nên kết luận phương trình có một nghiệm duy nhất là không đúng. Nên sai ở bước 4.

Câu 14. Ta có:

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} \ln |a+x^2| \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \ln |a+1| = \ln |a| + 2$$

$$\Leftrightarrow \ln |a+1| = \ln(e^2 \cdot |a|) \Leftrightarrow |a+1| = e^2 \cdot |a| \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e^2 - 1} \\ a = -\frac{1}{e^2 + 1} \end{cases}$$

Câu 15. Gọi a, S lần lượt là cạnh bên và diện tích của hình lăng trụ đứng. Ta có

$$V_D = S \cdot a, V_X = S \cdot AH = S \cdot a \cdot \sin \alpha.$$

$$V_D = 2V_X \Leftrightarrow S \cdot a = 2S \cdot a \cdot \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Câu 16. Ta nhận thấy các điểm $M(1; 2; 3), P(-1; 4; 3),$

$Q(0; 0; 6), R(0; 2; 4)$ cùng nằm trên mặt phẳng

$$(\alpha): x + y + z - 6 = 0 \text{ và } N(-1; 2; 0) \notin (\alpha).$$

Câu 17. $y = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

$$\Rightarrow y' = -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow y'' = -\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$y'' \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) = -\sqrt{2} \cos(k\pi) = \begin{cases} -\sqrt{2} < 0 \text{ với } k = 2m \\ \sqrt{2} > 0 \text{ với } k = (2m+1)\pi \end{cases}$$

Từ $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < 3, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2\}.$

Câu 18. Vẽ sơ lược dạng hai đồ thị $y = \log_2 |x|$, và $y = -x^2 + 2017$ trên cùng một hệ trục tọa độ ta nhận thấy chúng cắt nhau tại 2 điểm.

Câu 19. Ta có

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2 + 2018x + 2019} + \sqrt{ax^2 + 2017x + 2018}}$$

suy ra đồ thị có hai tiệm cận ngang khi $a > 0.$

Câu 20. Phương trình đường thẳng AB :

$$x = 3 + 2t, y = 4 + 2t, z = 1 + t.$$

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(xOy): z = 0$, tại giao điểm $M(1; 2; 0)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỷ lệ k nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ mà $\overrightarrow{MA} = (2; 2; 1)$ và

$$\overrightarrow{MB} = (-4; -4; -2) \text{ nên } k = -\frac{1}{2}.$$

Câu 21. Đưa PT đã cho về PT theo $\tan x$. Giải PT

$$\text{này được: } \begin{cases} \tan x = -2 \\ \tan x = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Khi $\tan x = -2$ suy ra

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 5 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (vì } x \text{ tù).}$$

Câu 22. Ta có:

$$V_I = \frac{1}{2}V_O \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_O}{R_I} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{SO}{SI} \right)^2 \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 23. Đặt $x = -t$, vì $f(x)$ là hàm chẵn nên suy ra

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_0^2 f(t) dt = 2018 \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \Rightarrow I = -1. \end{aligned}$$

Câu 24. BPT $\Leftrightarrow \log_a x + \log_b a \cdot \log_a x > \log_c a \cdot \log_a x$
 $\Leftrightarrow \log_a x (1 + \log_b a - \log_c a) > 0.$

Theo giả thiết ta có

$$1 + \log_b a - \log_c a < 0 \Rightarrow \log_a x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1.$$

Câu 25. $\int_0^1 \frac{x}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 x d(\tan ax)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} [x \tan ax]_0^1 - \frac{1}{a} \int_0^1 \tan ax dx = \frac{\tan a}{a} + \frac{1}{a^2} [\ln |\cos ax|]_0^1 \\ &= \frac{\tan a}{a} + \frac{1}{a^2} \ln |\cos a|. \end{aligned}$$

Ta chỉ có $a = \frac{\pi}{4} \in (0; 1)$ để $I = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2} \ln 2.$

Câu 26. Số các số tự nhiên $\overline{abcd}$ có không gian mẫu: $9 \cdot A_9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Mà $\overline{abcd} \leq 2018$, nên xảy ra các trường hợp:

• $a = 1 \Rightarrow A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ số.

• $\overline{abcd} \in \{2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018\}$

$\Rightarrow$ có 6 số.

Vậy xác suất cần tìm $p = \frac{A_9^3 + 6}{9 \cdot A_9^3} = \frac{510}{4536} = \frac{85}{756}.$

Câu 27. Giả sử hai cạnh bên của tấm bia là x, y ($x, y > 0$). Theo giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$. Do đó thể tích hình nón tạo thành là

$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 x = \frac{1}{3} \pi (a^2 - x^2) x \Rightarrow V' = \frac{1}{3} \pi a^2 - \pi x^2.$$

Lập bảng biến thiên ta có $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} a^3.$

Câu 28. Dựa vào đồ thị ta có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $x = -2$ và $x = 2$ nên hàm số có dạng $y = ax^2(x^2 - 4)$. Tìm được hai đường cong có PT:

$$y = x^4 - 4x \text{ và } y = -x^4 + 4x. \text{ Vậy diện tích giới hạn}$$

bởi hai đường này là $S = 4 \int_0^2 (-x^4 + 4x^2) dx = \frac{256}{15}.$

Câu 29. Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1+ax)(1+bx)} dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{1+ax} + \frac{b}{1+bx} \right) dx \\ &= [\ln |1+ax| + \ln |1+bx|]_0^1 \Rightarrow \ln |(1+a)(1+b)| = 0 \\ \Rightarrow |1+ab+a+b| &= 1 \Rightarrow \begin{cases} ab+a+b=0 \\ ab+a+b=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 30. Cho $a, b \in (0; 1)$:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \log_{2017} \frac{a}{1-a} + \log_{2017} \frac{b}{1-b} \\ &= \log_{2017} \left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{b}{1-b} \right) = \log_{2017} \left(\frac{ab}{1-(a+b)+ab} \right) \end{aligned}$$

Nếu $a+b=1 \Rightarrow f(a) + f(b) = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} 2S &= \left[f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) \right] \\ &\quad + \dots + \left[f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{1}{2019}\right) \right] \\ &= 0 + 0 + 0 \dots + 0 = 0 \Rightarrow S = 0. \end{aligned}$$

Câu 31. $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow x_{n+1} + \frac{1}{n+1} = x_n + \frac{1}{n} = \dots = x_1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Vậy $x_n = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow x_{2018} = \frac{4035}{2018}.$

Câu 32. Gọi $(x; y; z)$ là tọa độ điểm I sao cho:

$$\overline{IA} + 2\overline{IB} + 3\overline{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right).$$

Ta có:

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2.$$

Đề $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, lúc đó M là hình chiếu của I xuống mp(P), suy ra $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}\right)$.

Câu 33. Giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 3x = mx \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m+3}, m > -3$$

Về sơ lược dạng đồ thị (C): $y = x^3 - 3x$, ta có đồ thị đối xứng qua gốc O nên:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{m+3}} (mx - x^3 + 3x) dx = 2 \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{m+3}} \\ &= \frac{m^2 + 6m + 9}{2} = \frac{(m+3)^2}{2}. \end{aligned}$$

$$S = 8 \Leftrightarrow \frac{(m+3)^2}{2} = 8 \Rightarrow m = 1, m = -7 \text{ (loại)}.$$

Câu 34. $\cos^3 x - \cos 2x + 2018 \cdot \sin^2 \frac{x}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - 1)^2 + 2018 \cdot \sin^2 \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin \frac{x}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 3k\pi.$$

Ta có: $0 \leq 3k\pi \leq 16, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 0, k = 1$.

Câu 35. PT

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right) - \log_2 \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right) - 1 - k = 0.$$

Đặt $t = \log_2 \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right) \Rightarrow t \leq 0$. PT đã cho trở thành $t^2 - t - 1 = 0$. (1)

PT đã cho có nghiệm thì PT(1) có ít nhất một nghiệm $t \leq 0$. Lập bảng biến thiên suy ra $k \geq -1$.

Câu 36. Xét số phức $z = x + yi$. Từ giả thiết suy ra $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$. Suy ra tập hợp điểm $M(x, y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Dễ dàng có được

$$M(\sqrt{5} \cos \alpha + 1; \sqrt{5} \sin \alpha - 2) \text{ với } \alpha \in [0; 2\pi].$$

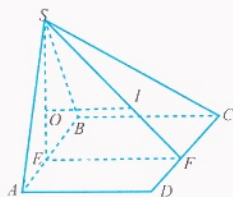
Mặt khác $w = z + 1 + i = (x+1) + (y+1)i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 \\ &= (\sqrt{5} \cos \alpha + 2)^2 + (\sqrt{5} \sin \alpha - 1)^2 \\ &= 10 + 2\sqrt{5} (2 \cos \alpha - \sin \alpha) \leq 20. \end{aligned}$$

Do đó $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$.

Câu 37. Gọi E, F lần lượt trung điểm AB và CD suy ra $EF \perp (SAB)$. Gọi O là tâm của tam giác đều SAB , trong mặt phẳng (SEF) từ O dựng đường thẳng song song EF cắt SF tại I , suy ra I là đỉnh hình nón. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{OI}{EF} &= \frac{SO}{SE} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow OI &= \frac{2}{3} EF = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$



Bán kính đường tròn đáy:

$$R = OS = \frac{2}{3} SE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Vậy thể tích của hình nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2\pi a^3}{21}.$$

Câu 38. ĐK: $\cos x, \sin x$ cùng dấu. Do đó PT được viết lại: $\sin x \cdot 2018^{\sin^2 x} = \cos x \cdot 2018^{\cos^2 x}$ (*)
Vì hàm số $\tan x$ có chu kì là π nên trước tiên ta xét $\sin x > 0, \cos x > 0$. Khi đó hàm số

$$f(t) = t \cdot 2018^{t^2}, \forall t \in (0; 1)$$

đồng biến trong $(0; 1)$ nên từ phương trình (*)

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Tương tự xét $\sin x < 0, \cos x < 0$ ta được nghiệm

$$x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi. \text{ Vậy PT đã cho có nghiệm}$$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi (k \in \mathbb{Z})$. Do đó trong khoảng $(0; 2018)$ phương trình có 643 nghiệm.

Câu 39. Giả sử $M(1; b)$ là điểm tùy ý nằm trên đường thẳng $x = 1$, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) qua M là $y = k(x-1) + b$ nên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 2 = kx + b \\ 3x^2 - 2x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = (3x^2 - 2x)(x-1) + b$$

$$\Rightarrow b = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 2. \quad (*)$$

Đề qua M có hai tiếp tuyến thì phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm, suy ra đường thẳng $y = b$ phải cắt đường cong $y = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ tại hai điểm. Ta có

$$y' = -6x^2 + 8x - 2; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{1}{3}.$$

Lập bảng biến thiên thì ta có hai giá trị b đề phương trình có hai nghiệm.

Câu 40. Bạn *Lâm* làm bài chắc chắn có 8 điểm. Để có đúng 9 điểm bạn *Lâm* phải làm đúng 5 câu trong 10 câu đánh ngẫu nhiên, mà ta biết một câu đúng có xác suất $\frac{1}{4}$ và $\frac{3}{4}$ chọn sai. Do đó xác suất để có 9

$$\text{điểm là: } p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot C_{10}^5.$$

Câu 41. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; -1; 1)$ và bán kính

$R = \sqrt{5}$. Gọi r là bán kính hình tròn thiết diện, theo giả thiết ta có: $S = \pi \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \pi = \pi \Rightarrow r = 1$. Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng α . Ta có:

$$d^2 = R^2 - r^2 = 5 - 1 \Rightarrow d = 2.$$

Mặt phẳng α qua $N(0; -1; 0)$ có dạng

$$Ax + B(y+1) + Cz = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + B = 0$$

Mặt khác α qua $M(1; -1; 1)$ nên thỏa

$$A + C = 0 \Rightarrow \alpha: Ax + By - Az + B = 0.$$

Vì

$$d = d(I, \alpha) = \frac{|-3A|}{\sqrt{2A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow A^2 = 4B^2 \Rightarrow \frac{A}{B} = \pm 2.$$

Do đó có hai mặt phẳng α cần tìm là:

$$2x + y - 2z + 1 = 0, \quad 2x - y - 2z - 1 = 0.$$

Câu 42. Chứng minh qui nạp ta có $u_n = n(n+1)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Câu 43. Từ giả thiết suy ra (P) có VTPT $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}] = (1; -2; 1)$. Ta có $A(1; 2; 3) \in (d_1)$, $B(0; 1; 0) \in (d_2)$. Gọi E là giao điểm của AB và mp (P) .

Vì $d[(d_1, (P))] = 2d[d_2, (P)]$ nên có hai trường hợp xảy ra:

$$\text{TH1: } \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EB}$$

$$\Rightarrow E(-1; 0; -3) \Rightarrow (P): x - 2y + z + 4 = 0.$$

$$\text{TH2: } \overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{EB}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 1\right) \Rightarrow (P): x - 2y + z + \frac{4}{3} = 0.$$

Câu 44. Ta có $y' = 3x^2 - 4x - m + 1$.

Hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{3}.$$

Đồ thị luôn qua điểm cố định $(1; 0)$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m) dx = -\frac{1}{12} - \frac{m}{2}.$$

Mà $S \leq 1$ do đó $-\frac{1}{12} - \frac{m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{13}{6}$. So sánh

với điều kiện ta có $-\frac{13}{6} \leq m \leq -\frac{1}{3}$.

Câu 45. Giả sử $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), vì

$$|z - 1| = \sqrt{34} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 34$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 34$. Vì

$$|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+m)^2 = (x+m)^2 + (y+2)^2$$

$$\Rightarrow 2(1-m)x + 2(m-2)y - 3 = 0$$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $(d):$

$$2(1-m)x + 2(m-2)y - 3 = 0.$$

Để tồn tại hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện đã cho nghĩa là tồn tại hai điểm M_1, M_2 biểu diễn hai số phức lần lượt nằm trên hai giao điểm của (C) và (d) , và để $|z_1 - z_2|$ lớn nhất thì M_1, M_2 là đường kính của (C) hay (d) qua tâm $I(1; 0)$ của (C)

$$\Rightarrow 2(1-m) \cdot 1 + 2(m-2) \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $M_1(6;3)$, $M_2(-4;-3)$.

Câu 46.

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, theo bảng biến thiên trên thì phương trình $f(t) = m$ có nhiều nhất 2 nghiệm với $t \geq 0$. Do đó phương trình $f(x^2) = m$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Câu 47.

$$C_n^{k-2} + 2C_n^{k-1} + C_n^k = (C_n^{k-2} + C_n^{k-1}) + (C_n^{k-1} + C_n^k) \\ = C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^k = C_{n+2}^k = \frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}.$$

Mặt khác: $\frac{2018C_{n+1}^{k-1}}{k} = \frac{2018(n+1)!}{k \cdot (k-1)!(n+2-k)!}$. Suy ra $n = 2016$. Số hạng thứ m là:

$$C_{2016}^m (2x)^m \left(\frac{1}{x}\right)^{2016-m} = C_{2016}^m 2^m (x)^{-2016+2m} \Rightarrow m = 1008.$$

Câu 48. Gọi A là biến cố để ông Đại Gia li xi anh Cả 100000 đồng, anh Hai 100000 đồng và Tôi được 200000 đồng

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}.$$

Gọi B là biến cố để ông Đại Gia li xi anh Cả 100000 đồng, anh Hai 200000 đồng và Tôi được 200000 đồng

$$\Rightarrow P(B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504} = \frac{5}{42}.$$

Gọi C là biến cố để ông Đại Gia li xi anh Cả 200000 đồng, anh Hai 100000 đồng và Tôi được 200000 đồng

$$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504} = \frac{5}{42}.$$

Gọi D là biến cố để ông Đại Gia li xi anh Cả 200000 đồng, anh Hai 200000 đồng và Tôi được 200000 đồng

$$\Rightarrow P(D) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}.$$

Vậy xác suất để Tôi được li xi một tờ mệnh giá cao 200000 đồng là:

$$p = p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = \frac{4}{9}.$$

Câu 49. Đặt $x = \ln a$, $y = \ln b$, điều kiện được viết lại là: $x(1-y) = y\sqrt{4-x^2}$. ĐK: $-2 \leq x \leq 2$.

Vì $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{x}{y}$ nên đề tồn tại giá trị lớn nhất

và nhỏ nhất của $\frac{x}{y}$ thì $y \neq 0$. Biến đổi:

$$x(1-y) = y\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = (x + \sqrt{4-x^2}).$$

Đặt $\frac{x}{y} = h$ ($h \neq 0$). Ta có: $h = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trong đoạn $[-2; 2]$

$$\Rightarrow \max h = 2\sqrt{2}, \min h = -2 \Rightarrow M = 2\sqrt{2}, m = -2.$$

Câu 50. Phương trình hàm số được viết lại là:

$$m(x^3 - 3x^2 + 3) = y - x^3 - x^2 + x.$$

Đề đường cong qua điểm cố định $(x, y) \forall m$ thì

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \\ y = x^3 + x^2 - x \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f_{\text{cđ}}' = f'(0), f(2) = -3 < 0.$$

Do đó đường cong qua ba điểm cố định, giả sử ba điểm đó là $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, trong đó

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ và

$$y_1 = x_1^3 + x_1^2 - x_1, y_2 = x_2^3 + x_2^2 - x_2, y_3 = x_3^3 + x_3^2 - x_3$$

Ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0, x_1x_2x_3 = -3.$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 +$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= 18 + 9 - 3 = 24.$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 8.$$

Vậy đường cong qua ba điểm cố định tạo thành một tam giác nhận $G(1; 8)$ làm trọng tâm. Từ hệ

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \\ y = x^3 + x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x^3 - 2x^2 - x + 3 \\ y = 4x^2 - x - 3 \end{cases}$$

từ đó suy ra chỉ có hai khẳng định II và IV đúng.

NGUYỄN LÀI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)



NHỮNG ĐIỀU KỲ LẠ XUNG QUANH CÂU CHUYỆN PHÁT MINH RA PHÉP TOÁN LÔGARIT

LÊ QUỐC HÂN (Trường Đại Học Vinh)
LÊ THỊ NGỌC THÚY (Trường CDSP Nghệ An)

Có nhiều vấn đề liên quan đến toán học rất quen thuộc ngỡ như không còn để tìm hiểu nữa. Thật ra, có biết bao bí ẩn giấu sau những vấn đề ấy mà hậu thế cần khám phá. Sự ra đời của phép toán lôgarit là một trong những vấn đề như vậy.



Nhà toán học Scotland
John Napier
(1550 - 1617)

1. Cuộc đời kỳ lạ của John Napier, cha đẻ của phép tính lôgarit

John Napier (1550 - 1617) sinh ra khi cha ông mới 16 tuổi. Phần lớn cuộc đời, ông sống bằng một gia sản lớn ở Lâu đài Merchston gần Edinburgh, Scotland, và đã hao tốn nhiều tâm lực vào những đảo lộn về chính trị và tôn giáo thời đó. Ông là người chống đối mạnh mẽ đạo Cơ đốc và bảo vệ chính nghĩa của John Knox và James I. Năm 1593, ông đã công bố một ấn phẩm tấn công một cách mạnh mẽ vào Giáo hội La Mã được nhiều người đọc có tên là *A Plaine Discovery of the whole Reuelation of Saint John* (Một khám phá rõ ràng và toàn bộ thiên khai của Thánh John), trong đó ông đã cố gắng chứng minh Giáo hoàng là một kẻ phản Chúa và rằng Chúa sáng thế đã định ngày tận thế vào giữa những năm 1699 và 1700. Cuốn sách được tái bản 21 lần, ít nhất là 10 lần khi ông còn sống, và ông thật sự tin rằng nếu có tiếng tăm cho hậu thế thì chính nhờ cuốn sách này. Ông cũng đã viết phỏng đoán về các dụng cụ chiến tranh thật độc ác khác nhau và về "những sơ đồ tàu thuyền chạy ngầm dưới nước" có kèm các bản vẽ và các sơ đồ. Một vài chiến xa của ông

thật giống với một chiếc xe tăng hiện đại và một trong các chiến xa đó có một cái miệng mở ra đóng vào được và có thể phá hủy bất kỳ cái gì trên đường nó đang chạy. Chắc chắn rằng tính tình chân thật đáng ngạc nhiên của ông cũng như sự tương tượng như vậy đã khiến nhiều người cho rằng ông bị *mất* và nhiều người cho rằng ông làm với các ma thuật. Nhiều chuyện kể, có lẽ không còn tìm thấy, nhằm hỗ trợ cho quan điểm này. Trước hết có một thời gian ông công bố rằng con gà trống đen như than của ông có thể giúp ông nhận diện xem ai trong số người hầu hạ đã ăn cắp của ông. Bọn họ đi từng người một vào một phòng tối đen như mực và được yêu cầu vỗ nhẹ lên con gà. Napier giấu bọn họ đã ngấm bôi lên lưng con gà một ít muối đen, và kẻ có tội đã không dám sờ vào con gà và đi ra với hai bàn tay sạch sẽ. Cũng có lần Napier bị đàn bò câu nhà hàng xóm sang mổ thóc nhà mình. Ông dọa sẽ bắt nhốt đàn chim nếu người hàng xóm cứ để cho chúng bay lung tung. Người hàng xóm nghĩ rằng khó có thể bắt chúng và nói với Napier rằng nếu bắt được chúng thì chắc chắn đàn chim sẽ rất vui mừng đón ông. Ngày hôm sau người hàng xóm với vẻ mặt ngỡ ngàng khi thấy các chú bò câu của mình cứ loạng choạng trên sân cỏ nhà Napier và Napier lặng lẽ ra nhặt chúng cho vào một cái túi lớn. Về sau mới biết Napier đã làm cho đàn bò câu bị say khi đã tẩm rượu vào các hạt đậu và rắc lên sân nhà cho chúng.

2. Napier đã phát minh ra phép tính lôgarit như thế nào?

Để thư giãn sau các cuộc bút chiến về chính trị và tôn giáo, Napier lấy việc nghiên cứu toán học và

khoa học làm thú vui và cuối cùng bốn sản phẩm thiên tài của ông đã được ghi nhận trong lịch sử toán học. Đó là: (1) phát minh ra lôgarit; (2) một quy tắc thông minh và dễ nhớ gọi là *quy tắc các phần vòng tròn* nhằm tái tạo các công thức để giải các tam giác cầu vuông góc; (3) ít nhất hai công thức lượng giác nhóm bốn thứ gọi là các *tương tự Napier* rất hữu dụng trong việc giải các tam giác cầu xiên; (4) phát minh ra một dụng cụ gọi là *thanh Napier* hoặc *xương Napier* dùng trong việc làm máy móc các phép nhân, chia và căn bậc hai của các số. Trong đó thành tựu đặc sắc và quan trọng nhất của ông là phát minh ra phép tính lôgarit. Như ta biết hiện nay, sức mạnh của lôgarit với tính cách một dụng cụ để tính toán là nhờ chúng mà các phép nhân và phép chia quy về các phép tính cộng và phép trừ đơn giản hơn. Ngày nay ta định nghĩa lôgarit đơn giản như sau:

Giả sử a là số thực dương khác 1 cho trước. Khi đó với mỗi số dương N , ta gọi *logarit cơ số a của N* là số thực (duy nhất) x thỏa mãn $a^x = N$ (và ký hiệu bởi $x = \log_a N$). Nhưng *Napier* không đưa ra được định nghĩa bằng công cụ đại số đơn giản như vậy, mà đã đưa ra một định nghĩa khá phức tạp dựa vào hình học như sau:

Công thức $\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$

khá thông dụng thời *Napier*, và hoàn toàn tự nhiên khi tuyển tư duy của *Napier* bắt đầu từ công thức này (biến đổi tích thành tổng) và điều này giải thích vì sao thời đại *Napier* lôgarit lại bắt đầu về các lôga của sin. *Napier* đã làm việc ròng rã ít nhất 12 năm cho lý thuyết của mình. Ông định nghĩa lôgarit bằng *phương pháp kiến thiết* dựa vào công cụ hình học như sau: Xét một đoạn thẳng AB và một tia vô hạn DE . Cho C và F cùng bắt đầu chuyển động từ A và D trên các đường thẳng đó với cùng một vận tốc ban đầu. Giả sử C chuyển động với một vận tốc luôn bằng về số với khoảng cách CB và F chuyển động với vận tốc đều. Và *Napier* đã định nghĩa DF là lôgarit của CB .

Đặt $DF = x, CB = y$ thì
 $x = Nap \log y$.



Để tránh phiền phức về các phân số, *Napier* lấy độ dài $AB = 10^7$, bởi vì theo ông các bảng sin tốt nhất phải có 7 chữ số lẻ. Từ định nghĩa *Napier*, nhận được $Nap \log y = 10^7 \log_1 \left(\frac{y}{10^7} \right)$. Thật vậy, ta có $AC = 10^7 - y$ nên vận tốc của

$$C = -\frac{dy}{dt} = x, \text{ nghĩa là } \frac{dy}{y} = dt.$$

Lấy tích phân hai vế, ta có $\ln y = -t + C$ (trong đó $\ln y = \log_e y$ được gọi là lôgarit với cơ số tự nhiên). Tính hằng số tích phân bằng cách lấy $t = 0$ nhận được $C = \ln 10^7$. Do đó $\ln y = -t + \ln 10^7$. Ta lại có vận tốc của

$$F = \frac{dx}{dt} = 10^7 \text{ nên } x = 10^t. \text{ Do đó}$$

$$\begin{aligned} Nap \log y = x = 10^7 t = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y) \\ = 10^7 \ln \frac{10^7}{y} = 10^7 \ln_{\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{10^7} \right). \end{aligned}$$

Phần phát triển hơn nữa là, qua một sự kể tục các khoảng thời gian bằng nhau, *y giảm theo cấp số nhân* trong khi đó *x tăng theo cấp số cộng*. Như vậy có một nguyên lý cơ bản của một hệ thống lôgarit là sự liên kết giữa cấp số nhân và cấp số cộng. Chẳng hạn suy ra rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì

$\text{Nap log } a - \text{Nap log } b = \text{Nap log } c - \text{Nap log } d$. Đây là một trong những kết quả mà *Napier* thiết lập được. *Napier* công bố phần luận giải của ông về lôgarit vào năm 1614 trong một cuốn sách có tên là *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* (mô tả luật lôgarit kỳ diệu). Công trình này có một bảng lôga của sin các góc với các phút kế tiếp nhau của cung. Ngay từ khi ra mắt, cuốn sách được giới toán học đón nhận nhiệt tình rộng rãi và

(Xem tiếp trang 34)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/492 (Lớp 6). Cho tổng

$$M = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{120} + \dots$$

- a) Phân số $\frac{1}{15400}$ có là một số hạng của M không? Vì sao?
b) Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của M .

PHẠM TUẤN KHAI

(Số nhà 29, ngõ 67, đường Giáp Bát, quận Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T2/492 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực của cạnh BC tại điểm M . Gọi H, K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC và BC . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Diễn Hải, Diên Châu, Nghệ An)

Bài T3/492. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 = 4y^3 + x^2y + y + 13.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T4/492. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC , điểm M trên AB sao cho $AM = AD$. Các đường thẳng DM và BC cắt nhau tại N , AN cắt đường tròn tại K . Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC . AB cắt NH và CK lần lượt tại P và Q . Chứng minh:

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{MA} + \frac{1}{MQ}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/492. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^3 + 6x + 2 = 2y^3 \\ 3y^3 + 6y + 2 = 2z^3 \\ 3z^3 + 6z + 2 = 2x^3 \end{cases}$$

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/492. Giải bất phương trình sau:

$$x^3 + 6x^2 + 9x \leq \sqrt{x+4} - 2.$$

NGUYỄN MINH TÂN

(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T7/492. Với a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^{2017} + a^{2015} + 1} + \frac{1}{b^{2017} + b^{2015} + 1} + \frac{1}{c^{2017} + c^{2015} + 1}$$

NGUYỄN TUẤN ANH

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Bài T8/492. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại P . Đường thẳng qua A song song với BP cắt BC tại M . Đường thẳng qua A song song với BC cắt BP tại N . Gọi I là giao điểm của AP với MN . Chứng minh rằng bốn điểm B, I, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

Bài T9/492. Cho phương trình: $x^3 + mx^2 + n = 0$ (*)

Tìm m, n để phương trình (*) có ba nghiệm thực u, v, t thỏa mãn các điều kiện sau:

i) u, v, t đôi một khác nhau và khác 0.

$$\text{ii) } \frac{u^4}{u^3 - 2n} + \frac{v^4}{v^3 - 2n} + \frac{t^4}{t^3 - 2n} = 3.$$

TRẦN VŨ HOÀNG ĐÀO

(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/492. Cho p là số nguyên tố lẻ và $a_1, a_2, \dots, a_p$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai d không chia hết cho p . Chứng minh rằng:

$$\prod_{i=1}^p (a_i + a_1 a_2 \dots a_p); p^2.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho, Tiền Giang)

Bài T11/492. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+f(y)) = f(x+y^{2018}) + f(y^{2018} - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ (Hà Nội)

Bài T12/492. Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao BE, CF . ST là một dây cung của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Hai đường tròn qua S, T tiếp xúc với đường thẳng BC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng PE, QF cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/492. Một con lắc lò xo gồm vật nhỏ có khối lượng $m = 0,03\text{kg}$ và lò xo có độ cứng

$k = 1,5\text{N/m}$. Vật nhỏ được đặt trên giá đỡ cố định nằm ngang dọc theo trục của lò xo. Hệ số ma sát trượt giữa giá đỡ và vật nhỏ là $\mu = 0,2$. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị giãn một đoạn $\Delta l_0 = 15\text{cm}$ rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Xác định tốc độ lớn nhất vật nhỏ đạt được trong quá trình dao động.

THANH LÂM (Hà Nội)

Bài L2/492. Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu dân cư bằng đường dây truyền tải một pha. Nếu điện áp tại nơi truyền tải tăng từ U lên $2U$ thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ công suất điện tăng từ 93 hộ lên 120 hộ. Coi rằng công suất điện truyền đi từ trạm phát không đổi, công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân như nhau và không đổi. Hệ số công suất trên đường truyền tải không đổi. Khi tăng điện áp tại nơi truyền tải lên $3U$ thì số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/492 (For 6th grade). Let

$$M = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{120} + \dots$$

a) Is the fraction $\frac{1}{15400}$ a term of M ? Why?

b) Compute the sum of the 8 first terms of M .

Problem T2/492 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $AB < AC$. The angle bisector of $\widehat{BAC}$ intersects the perpendicular bisector of BC at M . Let H, K , and I respectively be the perpendicular projections of M on AB, AC , and BC . Prove that H, I, K is collinear.

Problem T3/492. Find integer solutions of the equation

$$x^3 = 4y^3 + x^2y + y + 13.$$

Problem T4/492. Given a quadrilateral $ABCD$ inscribed in the circle with the diameter AC . Let M be the point on AB such that $AM = AD$. The lines DM and BC intersect at N , and the AN

intersects the circle at K . Let H be the perpendicular projection of D on AC . Assume that AB intersects NH and CK at P and Q . Show that $\frac{1}{MP} = \frac{1}{MA} + \frac{1}{MQ}$.

Problem T5/492. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 3x^3 + 6x + 2 = 2y^3 \\ 3y^3 + 6y + 2 = 2z^3 \\ 3z^3 + 6z + 2 = 2x^3 \end{cases}$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/492. Solve the inequality

$$x^3 + 6x^2 + 9x \leq \sqrt{x+4} - 2.$$

Problem T7/492. For a, b, c are positive numbers with the product is equal to 1, find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{a^{2017} + a^{2015} + 1} + \frac{1}{b^{2017} + b^{2015} + 1} + \frac{1}{c^{2017} + c^{2015} + 1}$$

(Xem tiếp trang 41)



Bài T1/488. Cho ngũ giác $ABCDE$ có cạnh BC song song với đường chéo AD , cạnh CD song song với đường chéo BE , cạnh DE song song với đường chéo AC , cạnh AE song song với đường chéo BD . Chứng minh rằng cạnh AB song song với đường chéo CE .

Lời giải. Kí hiệu diện tích của tam giác ABC là S_{ABC} .

Nhận xét. Cho tứ giác $ABCD$, kẻ BH vuông góc với AD và CK vuông góc với AD . Nếu BC song song với AD thì $BCKH$ là hình chữ nhật nên $BH = CK$, do đó

$$S_{BAD} = \frac{1}{2} BH \cdot AD = \frac{1}{2} CK \cdot AD = S_{CAD}.$$

Sử dụng nhận xét trên, xét tứ giác $ABCD$ khi BC song song với AD thì $S_{BAD} = S_{CAD}$, xét tứ giác $DCBE$ khi CD song song với BE thì $S_{CBE} = S_{DBE}$, xét tứ giác $DEAC$ khi DE song song với AC thì $S_{DAC} = S_{EAC}$, xét tứ giác $EABD$ khi AE song song với BD thì $S_{ABD} = S_{EBD}$. Từ các đẳng thức về diện tích trên suy ra

$$S_{CBE} = S_{DBE} = S_{ABD} = S_{CAD} = S_{EAC} \Rightarrow S_{BEC} = S_{AEC}.$$

Kẻ AM vuông góc với EC thì AM là đường cao của tam giác AEC . Kẻ BN vuông góc với EC thì BN là đường cao của tam giác BEC . Hai tam giác AEC và BEC có chung đáy EC mà $S_{AEC} = S_{BEC}$ nên hai đường cao của chúng bằng nhau, tức là $AM = BN$, lúc đó tứ giác $ABNM$ là hình chữ nhật, suy ra AB song song với MN , hay là AB song song với CE . $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng là: **Vĩnh Phúc: Tq Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc: Quảng**

Ngãi: Mai Thành Nguyên, 6A, THCS TTtr. Sông Vệ, Võ Thị Hồng Thu, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; Nguyễn Hoàng Hưng, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/488. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4035}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}} > \frac{2019}{4036}.$$

Lời giải. Ta chứng minh với n nguyên và $n \geq 2$

$$2n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) > (n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) (*)$$

bằng quy nạp theo n .

• (*) đúng với $n=2$ vì $\frac{16}{3} > \frac{9}{2}$.

• Giả sử (*) đúng với $n=k \geq 2$

• Xét $n=k+1$ ta có

$$\begin{aligned} & 2(k+1) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 2k \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right) \\ & \quad + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{2(k+1)}{2k+1} \\ &> (k+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) \\ & \quad + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right) + 1 + \frac{2(k+1)}{2k+1} \\ &> (k+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) \\ & \quad + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k} \right) + 2 + \frac{1}{2k+1} \\ &> (k+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) \\ & \quad + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{k+2}{k+1} \\ & \quad \left(\text{vì } 2 + \frac{1}{2k+1} > \frac{k+2}{k+1} \right) \\ &= (k+2) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Vậy (*) đúng với $n=k+1 \Rightarrow (*)$ đúng với mọi $n \geq 2$. Thay $n=2018$ ta có điều phải chứng minh.

◀ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Ngệ**

An: Nguyễn Phương Uyên, Nguyễn Thị Thanh Hằng, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Phạm Ngọc Trinh, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Khối 1, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** Phạm Đình Tân, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Thanh Hóa:** Vũ Tuấn Nghĩa, Lê Đức Chính, Lê Minh Long, 7B, THCS Như Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/488. Cho bộ hai số thực $(a, b, c); (x, y, z)$ thỏa mãn không có bộ nào đồng thời bằng 0 và $a+b+c = x+y+z = ax+by+cz = 0$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau là hằng số

$$P = \frac{(b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(y+z)^2}{xy+yz+zx}.$$

Lời giải. Ta xét các khả năng sau:

• Nếu $ax = 0$, thì $a = 0$ hoặc $x = 0$.

+ Nếu $a = 0$ thì $b+c=0$ và $by+cz=0$, suy ra $b=-c$ và $by+cz = by-bz = b(y-z)=0$ (1)
Nhận thấy $b \neq 0$ (vì nếu $b = 0$ thì $c = 0$, khi đó $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ trái với giả thiết), từ (1) suy ra $y = z$. Từ đó $x = (y+z) = -2y$. Nếu $y = 0$ thì $x = y = z = 0$ trái với giả thiết, vậy $y \neq 0$. Ta có

$$P = \frac{(b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(y+z)^2}{xy+yz+zx} = 0 + \frac{4y^2}{-2y^2+y^2-2y^2} = -\frac{4}{3}.$$

+ Nếu $x = 0$, tính tương tự ta cũng có $P = -\frac{4}{3}$.

• Nếu $ax \neq 0$, đặt $\alpha = \frac{b}{a}, \beta = \frac{c}{a}, u = \frac{y}{x}, v = \frac{z}{x}$ thì có thể đưa giả thiết

$$a+b+c = x+y+z = ax+by+cz = 0 \text{ về hệ}$$

$$\begin{cases} 1+\alpha+\beta=0 \\ 1+u+v=0 \\ 1+\alpha u+\beta v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ u+v=-1 \\ \alpha u+\beta v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1-\beta \\ u=-1-v \\ (-1-\beta)u+\beta v=-1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow 1-u = \beta(u-v) \quad (3)$$

Nếu $u-v=0$ thì từ (3) suy ra $u=1$. Mặt khác từ $u-v=0$ và $u+v=-1$ suy ra $u=v=-\frac{1}{2}$. Hai điều này mâu thuẫn nhau. Vậy $u-v \neq 0$, từ (3)

$$\text{suy ra } \beta = \frac{1-u}{u-v}. \text{ Do đó } \alpha = -1-\beta = \frac{v-1}{u-v}.$$

$$\alpha\beta = \frac{(1-u)(v-1)}{(u-v)^2} = \frac{u+v-1-uv}{(u+v)^2-4uv} = \frac{-(2+uv)}{1-4uv}.$$

Từ đây ta tính

$$P = \frac{a^2}{ab+bc+ca} + \frac{x^2}{xy+yz+zx}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2}} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{yz}{x^2}} = \frac{1}{\alpha + \beta + \alpha\beta} + \frac{1}{u + v + uv} \\ &= \frac{1}{-1 + \alpha\beta} + \frac{1}{-1 + uv} = \frac{1}{-1 - \frac{2+uv}{1-4uv}} - \frac{1}{-1 - uv} \\ &= \frac{1-4uv}{-3(1-uv)} - \frac{1}{-1-uv} = \frac{4(1-uv)}{-3(1-uv)} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

«Nhận xét. Đây là bài toán tính giá trị của biểu thức với nhiều biến thỏa mãn một hệ điều kiện cho trước, ta cần phải xét các khả năng xảy ra. Có bạn đã giải bài toán bằng cách chia hai khả năng $y=z$ và $y \neq z$ và cũng cho đáp số như trên. Bài này có ít bạn gửi bài, tuy nhiên các bạn sau có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Thái Bình:** Bùi Thị Huyền, 9A3, THCS Lê Danh Phương, Hưng Hà.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/488. Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các tam giác ABD, BCE, CAF thỏa mãn $\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = 90^\circ, \widehat{ABD} = \widehat{CBE} = \widehat{CAF} = \alpha$.

Chứng minh rằng $DF = AE$.

Lời giải. Hạ $EH \perp BC$ tại

H. Dễ thấy:

$$\triangle ABD \sim \triangle CAF.$$

$$\text{Đặt } \frac{AD}{DB} = \frac{CF}{FA} = k, \text{ ta có}$$

$$AD = k \cdot DB, CF = k \cdot FA.$$

Áp dụng định lý Pythagore ta có

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = (k^2 + 1)DB^2 \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{CF}{CA} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Mặt khác, $\triangle BDA \sim \triangle BHE$, ta có

$$\frac{BD}{BH} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BH}{BE}.$$

$$\text{Suy ra } \triangle BDH \sim \triangle BAE \text{ (c.g.c)} \quad (1)$$

$$\text{Do đó } \frac{DH}{AE} = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow DH = \frac{AE}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (2)$$

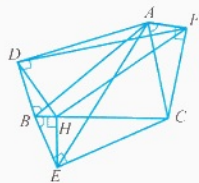
$$\text{Tương tự, ta có } \triangle CFH \sim \triangle CAE \quad (3)$$

$$\text{Suy ra } \frac{FH}{AE} = \frac{CF}{CA} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow FH = \frac{k \cdot AE}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (4)$$

Từ (1) và (3), ta lại có:

$$\widehat{DHB} + \widehat{FHC} = \widehat{AEB} + \widehat{AEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DHF} = 90^\circ.$$

Từ (2), (4), áp dụng định lý Pythagore ta có



$$DF^2 = DH^2 + FH^2 = \frac{AE^2}{k^2 + 1} + \frac{k^2 \cdot AE^2}{k^2 + 1} = AE^2.$$

Do đó $DF = AE$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Chỉ có bạn **Đỗ Cao Bách Tùng**, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa** tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên lời giải của bạn **Tùng** phụ thuộc vào hình vẽ nên chưa chặt chẽ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/488. Chứng minh tổng sau đây là một số nguyên dương:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2017} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2017}\right)^2.$$

Lời giải. Đặt

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, S_n là một số nguyên dương. Thật vậy, ta có

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

là một số nguyên dương.

Giả thiết S_n ($n \geq 2$) là số nguyên dương. Ta có:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) + (n+1) \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= S_n + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} \cdot n = S_n + 2. \end{aligned}$$

Suy ra $S_{n+1} = S_n + 2$ là số nguyên dương. Theo nguyên lý quy nạp, ta được S_n là số nguyên dương với mọi $n \geq 2$. Đặc biệt trong bài toán S_{2017} là số nguyên dương. Bài toán được chứng minh. $\square$

► **Nhận xét.** Dãy (S_n) với $S_2 = 4$; $S_{n+1} = S_n + 2$ ($n \geq 2$) là dãy các số chẵn 4, 6, 8, ... Dễ thấy $S_n = 2n$; $n = 2, 3, 4, \dots$ Điều này chứng tỏ của bài toán là chứng minh hệ thức $S_{n+1} = S_n + 2$ và nhận ra

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n$$

(trong vế trái có 1 số 1, hai số $\frac{1}{2}$, ba số $\frac{1}{3}$, ..., n số $\frac{1}{n}$).

Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Thái Bình:** Bùi Thị Huyền, 9A3, THCS Lê Danh Phương, Hưng Hà; **Thanh Hóa:** Phạm Anh Đức, Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Bình Phước:** Đặng Đình Văn, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/488. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 - 2x^2y - x^2y + 10x^3 + y^2 - 5y = 0 & (1) \\ (x+1)\sqrt{y^2 - 5} = y - 3x^2 + x - 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2x^2y - x^2y + 10x^3 + y^2 - 5y = 0 & (1) \\ (x+1)\sqrt{y^2 - 5} = y - 3x^2 + x - 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $y \geq 5$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - y + 5)(2x^3 - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 + 5 \\ y = 2x^3 \end{cases}$$

• Với $y = x^3 + 5$, thay vào (2) ta có:

$$(x+1)|x| = -2x^2 + x + 3 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = 6.$$

• Với $y = 2x^3 \Rightarrow x > 0$, thay vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} (x+1)\sqrt{2x^3 - 5} &= 2x^3 - 3x^2 + x - 2 \\ \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{2x^3 - 5} - x - 4) &= 2x^3 - 4x^2 - 4x - 6 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)[(2x^3 - 5) - (x+4)^2]}{\sqrt{2x^3 - 5} + x + 4} &= 2x^3 - 4x^2 - 4x - 6 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(2x^2 + 5x + 7)}{\sqrt{2x^3 - 5} + x + 4} &= (x-3)(2x^2 + 2x + 2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \frac{(x+1)(2x^2 + 5x + 7)}{\sqrt{2x^3 - 5} + x + 4} = 2x^2 + 2x + 2. \end{cases} & (3) \end{aligned}$$

- Với $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=54$.

- Giải (3), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)(2x^2 + 5x + 7)}{\sqrt{2x^3 - 5} + x + 4} &\leq \frac{(x+1)(2x^2 + 5x + 7)}{x + 4} \\ &< \frac{(x+1)(2x^2 + 5x + 7) + 2x^2 + (x-1)^2}{x + 4} = 2x^2 + 2x + 2 \\ \Rightarrow (3) \text{ vô nghiệm.} & \text{Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm:} \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \{(1, 6); (-1, 6); (3, 54)\}.$$



➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn tham đã gia giải bài này với cách giải tương tự như trên. Tuy nhiên một số bạn chứng minh (3) (hoặc PT tương tự) vô nghiệm còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Lào Cai:** Nguyễn Hoàng Anh, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai. **Nam Định:** Vũ Thị Diễm Quỳnh, 10A1, THPT Tổng Văn Trán, Ý Yên. **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Vĩnh Phúc:** Trần Hồng Quý, Phạm Thành Dũng, Tạ Nam Khánh, Lê Ngọc Hoa, Chu Thị Thanh, Hà Ngọc Khánh, 10A1, Đỗ Minh Hiệp, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Hưng Yên:** Nguyễn Tiến Thành, Chu Ngọc Chiến, Đoàn Phú Thành, Bùi Văn Quyền, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thanh Hóa:** Lê Thị Ngọc Anh, 10A1, THPT Hoàng Hóa IV, H. Hoàng Hóa; Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 11T1, THPT Đô Lương I, H. Đô Lương. **Quảng Bình:** Đinh Đoàn Xuân Phương, Hoàng Kim Cà, 10 Toán, Hồ Minh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Trị:** Võ Thanh Long, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Thừa Thiên Huế:** Phạm Tiến Duy, Lê Thị Thu Sương, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** Nguyễn Văn Canh, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cây Nam; Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Đồng Tháp:** Huỳnh Tấn Phúc, Nguyễn Nhật Hào, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu. **Vĩnh Long:** Lê Nữ Hoàng Kim, Lê Văn Nhân, 10T1, Trần Lữ, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Phú Yên:** Đặng Hải Đăng, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/488. Chứng minh rằng:

$$x_B = \cos \frac{2\pi}{21} - \cos \frac{8\pi}{21} - \cos \frac{10\pi}{21}$$

là một nghiệm của phương trình:

$$4x^3 + 2x^2 - 7x - 5 = 0.$$

Lời giải. (Của bạn Võ Minh Quân, Lâm Đồng).

Trước tiên ta chứng minh một bổ đề:

Với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Do $\cos \frac{2i\pi}{2n+1} = \cos \frac{2(2n+1-i)\pi}{2n+1}$ cho nên ta có

$$\begin{aligned} & \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{4n\pi}{2n+1} \right) \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \left(\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{4n\pi}{2n+1} \right)}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} + 2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{4n\pi}{2n+1} + \dots}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{3\pi}{2n+1} - \sin \frac{\pi}{2n+1} \right) + \left(\sin \frac{5\pi}{2n+1} - \sin \frac{3\pi}{2n+1} \right) + \dots}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{\left(\sin \frac{(4n+1)\pi}{2n+1} - \sin \frac{(4n-1)\pi}{2n+1} \right)}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{2n+1} + \sin \frac{(4n+1)\pi}{2n+1}}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2n+1}}{4 \sin \frac{\pi}{2n+1}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề cho $n = 21, n = 7$, bình phương hai

vế của $x_0 = \cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21}$, ta có

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \left(\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21} \right)^2 \\ &= \left(\cos^2 \frac{2\pi}{21} + \cos^2 \frac{8\pi}{21} + \cos^2 \frac{10\pi}{21} \right) \\ &+ 2 \left(\cos \frac{2\pi}{21} \cdot \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} \cdot \cos \frac{10\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21} \cdot \cos \frac{2\pi}{21} \right) \\ &= \frac{\cos \frac{4\pi}{21} + \cos \frac{16\pi}{21} + \cos \frac{20\pi}{21} + 3}{2} + \left(\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{6\pi}{21} \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21} + \cos \frac{12\pi}{21} + \cos \frac{18\pi}{21} \right) \\ &= \frac{\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{4\pi}{21} + \dots + \cos \frac{20\pi}{21}}{2} \\ &\quad + \frac{\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21}}{2} \\ &\quad + \frac{\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} + \frac{3 - \cos \frac{14\pi}{21}}{2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{x_0}{2} - \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{4} \Rightarrow 4x_0^2 - 2x_0 - 5 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

➤ **Nhận xét.** Rất ít bạn giải bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải đúng (có một bạn quên không ghi tên và địa chỉ).
Lâm Đồng: Võ Minh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long;
Bến Tre: Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre;
Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thái, Mộ Cây Nam;
Vinh Phúc: Trần Hồng Quý, Tạ Nam Khánh, Phạm Thành Dũng, Lê Ngọc Hoa, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc;
Hà Nội: Đàm Nguyệt Ánh, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội;
Quảng Bình: Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp;
Phú Yên: Đặng Hải Đăng, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/488. Cho tam giác ABC với $a = BC, b = CA, c = AB$. Chứng minh rằng:

$$\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right).$$

Lời giải. (Theo lời giải của đa số các bạn).

Từ $\cos(A-B) \leq 1, \cos(B-C) \leq 1, \cos(C-A) \leq 1$, suy ra $\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \leq 3$ (1)
 Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} & \cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos(A-B) = \cos(B-C) = \cos(C-A) = 1 \\ a = b = c \end{cases}$$

hay ΔABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải của các bạn gửi về đều đúng. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; Đàm Nguyệt Ánh, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Khánh, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vinh Phúc:** Tạ Nam Khánh, Phạm Thành Dũng, Chu Thị Thanh, Trần Hồng Quý, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hưng Yên:** Bùi Văn Quyển, Đoàn Phú Thành, Nguyễn Thị Hương Giang, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Ninh Bình:** Trần Trí Thức, 10 Toán 1, THPT chuyên

Lương Văn Tuy; **Thanh Hóa:** Phạm Anh Đức, Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** Nguyễn Đức Toàn, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Khánh Hòa:** Hồ Long Nhật, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đắk Lắk:** Bùi Huỳnh Hạ Doan, Lê Ngọc Đức, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Vinh Long:** Trần Linh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vinh Long; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thái, Mộ Cây Nam; **Bình Dương:** Trần Đăng Khoa, 10T1, THPT chuyên Hùng Vương; **TP. Hồ Chí Minh:** Trịnh Thủy Ánh Tuyết, Nguyễn Thái Bình, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** Đặng Hải Đăng, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/488. Cho 6 số thực dương a, b, c, x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$ax + by + cz \geq a^x b^y c^z.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \ln x, x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, x > 0$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lõm thực sự. Bởi vậy theo bất đẳng thức Jensen cho hàm số lõm ta có $x \ln a + y \ln b + z \ln c \leq \ln(ax + by + cz)$

$$\Rightarrow \ln(a^x b^y c^z) \leq \ln(ax + by + cz) \Rightarrow a^x b^y c^z \leq ax + by + cz.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán của bất đẳng thức Jensen cho các hàm số lõm dạng quá đơn giản. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 9, lớp 10 sau đã tham gia giải bài toán này và có lời giải tốt: **Vinh Phúc:** Hồ Ngọc Khánh, Tạ Nam Khánh, Chu Thị Thanh, Lê Ngọc Hoa, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hưng Yên:** Chu Ngọc Chiến, Đoàn Phú Thành, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Phạm Anh Đức, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Lâm Đồng:** Nguyễn Trọng Đức Huy, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Phú Yên:** Đặng Hải Đăng, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/488. Xét dãy số vô hạn các số nguyên dương $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$. Với mỗi số tự nhiên n , đặt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng với

mọi số tự nhiên n , trong nửa khoảng $[s_n, s_{n+1})$ có ít nhất hai số chính phương.

Lời giải. Cách 1 (Theo ý tưởng của bạn Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thái, Mỏ Cày Nam, Bến Tre và bạn Hà Ngọc Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc).

Trong nửa khoảng $[s_n, s_{n+1})$ có ít nhất hai số chính phương khi và chỉ khi trong nửa khoảng $[\sqrt{s_n}, \sqrt{s_{n+1}})$ có ít nhất hai số nguyên dương tức là khi và chỉ khi $\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n} \geq 2 \Leftrightarrow s_{n+1} \geq (\sqrt{s_n} + 2)^2$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq 4\sqrt{s_n} + 4 \Leftrightarrow a_{n+1} - 4 \geq 4\sqrt{s_n} \Leftrightarrow (a_{n+1} - 4)^2 \geq 16s_n$$

$$(\text{do } a_{n+1} \geq 4) \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 8a_{n+1} + 16 \geq 16s_n \quad (1)$$

Ta có $a_{i+1} - a_i \geq 8 \Rightarrow a_i \leq a_{i+1} - 8 \leq \dots \leq a_1 + 8n$ hay

$$a_{n+1} \geq a_1 + 8n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Từ (2) ta có

$$s_n = a_1 + \dots + a_n \leq (a_{n+1} - 8n) + [a_{n+1} - (8n-1)] + \dots + (a_{n+1} - 8.2) + (a_{n+1} - 8)$$

$$= na_{n+1} - 8(1 + 2 + \dots + n) = na_{n+1} - 4n(n+1).$$

Thành thử (1) đúng nếu ta có

$$a_{n+1}^2 - 8a_{n+1} + 16 \geq 16[na_{n+1} - 4n(n+1)]$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 + 64n^2 + 16 - 8a_{n+1} - 16na_{n+1} + 64n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} - 8n - 4)^2 \geq 0.$$

BĐT cuối luôn đúng do đó (1) được chứng minh.

Cách 2. Gọi m^2 là số chính phương lớn nhất thỏa mãn $m^2 < s_n$. Suy ra $s_n \leq (m+1)^2$. Ta chứng minh $(m+2)^2 < s_{n+1}$. Giả sử phản chứng $(m+2)^2 \geq s_{n+1}$.

Thế thì, vì $m^2 < s_n < s_{n+1} \leq (m+2)^2$ nên $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n < (m+2)^2 - m^2 = 4m + 4$. Vì $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$ nên $a_n < a_{n+1} - 8 < 4m - 4$, $a_{n-1} < 4m - 12, \dots, a_1 < 4m - 4(2n-1)$. Do đó:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$< 4nm - 4(1 + 3 + \dots + 2n-1) = 4nm - 4n^2.$$

Mà $s_n > m^2$ nên từ BĐT trên suy ra: $m^2 < 4nm - 4n^2$ hay $(m-2n)^2 < 0$, vô lý. Vậy giả sử phản chứng là sai, nghĩa là ta phải có $(m+2)^2 < s_{n+1}$. Như vậy,

$s_n \leq (m+1)^2 < (m+2)^2 < s_{n+1}$, dẫn tới trong nửa khoảng $[s_n, s_{n+1})$ phải có ít nhất hai số chính phương là $(m+1)^2$ và $(m+2)^2$. $\square$

➤ Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài hai bạn Cảnh và Khánh chỉ có thêm 4 bạn sau đây gửi lời giải và giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Chu Thị Thanh, Đỗ Minh Hiệp, Tạ Nam Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

DẠNG HÙNG THẮNG

Bài T11/488. Cho hai dãy số dương $(a_n)_{n \geq 0}$ và $(b_n)_{n \geq 0}$ xác định bởi: $a_0 = \sqrt{3}$, $b_0 = 2$ và

$$\begin{cases} a_n + b_n = \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} & (1) \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 & (2) \end{cases}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng hai dãy số trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của đa số các bạn). Nhận xét rằng, từ giả thiết hai dãy số (a_n) , (b_n) là

dương nên từ (1) suy ra $0 < \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}}$ hay $0 < a_{n+1} < 1$,

tức là $0 < a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} b_n = \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} - a_n, & n \in \mathbb{N} \\ b_n = \sqrt{a_n^2 + 1}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

suy ra $a_n^2 + 1 = \left(\frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} - a_n \right)^2 \Leftrightarrow a_n = \frac{2a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2} \quad (3)$

$$\Leftrightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}^3 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy (a_n) là dãy dương đơn điệu giảm nên có giới hạn: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ với $0 \leq a \leq 1$. Chuyển qua giới

hạn đẳng thức (3), ta thu được $a = \frac{2a}{1 - a^2} \Leftrightarrow a = 0$ (do $0 \leq a \leq 1$). Từ (2) suy ra dãy (b_n) hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n^2 + 1} = 1.$$

Kết luận: Hai dãy đã cho hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Một số bạn còn sử dụng phương pháp lượng giác bằng cách đặt $a_0 = \tan \frac{\pi}{3}$, $b_0 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}$ sau đó

chứng minh bằng quy nạp hệ thức:

$$a_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, \quad b_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}$$

dễ tính trực tiếp giới hạn. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân; **Nguyễn Văn Cảnh,** 12A8, THPT An Thái, Mộ Cày Nam; **Lào Cai:** Bùi Thanh Trà, Đỗ Hải Đăng, 11T, THPT chuyên Lào Cai; **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Khánh Hòa:** Nguyễn Quang Đạt, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** Tạ Nam Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 11T, THPT chuyên Thăng Long.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài 112/488. Cho tam giác ABC không cân tại A . Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C và theo thứ tự cắt các đoạn AB, AC tại M, N . P là giao điểm của BX và CM . Q là điểm chính giữa của cung BC không chứa M, N của (O) . K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PBC . Chứng minh rằng KQ luôn đi qua một điểm cố định.

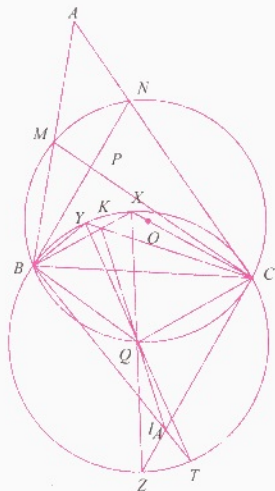
Lời giải 1. Gọi (Q) là đường tròn tâm Q đi qua B, C ; X, Y theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BK, CK và (Q) ; Z, T theo thứ tự là giao điểm thứ hai của XQ, YQ và (Q) ; I_A là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh A của $\triangle ABC$. Vì $QX = QB = QC$;

$\widehat{NBX} = \widehat{PBX} = \widehat{CBX}$ nên X là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle NBC$. Từ đó, chú ý $\widehat{XCZ} = 90^\circ$, suy ra CZ là phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$.

Tương tự BT là phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$. Chú ý rằng

$$K = BX \cap CY; Q = YT \cap XZ; I_A = BT \cap CZ,$$

Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $\left(\begin{matrix} BYZ \\ CXT \end{matrix} \right)$, suy ra K, Q, I_A thẳng hàng. Nói cách khác KQ luôn đi qua một điểm cố định (điểm I_A).



Lời giải 2. Gọi I_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$; X và Y theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CBM và BCN ; Z, T theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp góc C và góc B của các tam giác CBM và BCN .

Dễ thấy các bộ ba điểm (X, N, Q) , (Y, M, Q) , (X, B, T) , (Y, C, Z) thẳng hàng và các tứ giác $BYMZ$ và $CXNT$ nội tiếp. Vậy với MQ và NQ theo thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{BMC}$, $\widehat{BNC}$, ta có

$$\begin{aligned} (\angle B, \angle C) &= (\angle B, \angle Y) = (\angle M, \angle Y) \\ &= (\angle M, \angle MQ) = (\angle MQ, \angle C) \pmod{\pi} \\ &= (\angle NQ, \angle C) = (\angle NX, \angle C) = (\angle TX, \angle C) = (\angle TB, \angle C) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là tứ giác $BCTZ$ nội tiếp. (1)
Dễ thấy

$$\begin{aligned} (\angle BQ, \angle C) &= (\angle NQ, \angle C) = (\angle NX, \angle C) \\ &= (\angle TX, \angle C) = (\angle TB, \angle C) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

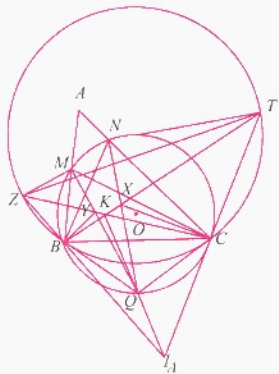
Do đó BQ tiếp xúc với đường tròn $(BCTZ)$. (2)

Tương tự CQ tiếp xúc với đường tròn $(BCTZ)$ (3)

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng

$$K = TB \cap CZ; Q = CC \cap BB; I_A = BZ \cap CT,$$

áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $\left(\begin{matrix} TCB \\ ZBC \end{matrix} \right)$, suy ra K, Q, I_A thẳng hàng. Nói cách khác KQ luôn đi qua một điểm cố định (điểm I_A). $\square$



➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán này khá khó, chỉ có 6 bạn tham gia giải.

2) Lời giải 1 tương tự lời giải của bạn **Nguyễn Minh Huệ**, 12T, THPT chuyên Lào Cai, **TP. Lào Cai**. Lời giải 2 phỏng theo lời giải của bạn **Võ Minh Quân**, 11T, THPT chuyên Thăng Long, **TP. Đà Lạt**, sau khi căn chỉnh các phép biến đổi góc định hướng.

3) Xin nên tên các bạn còn lại: **Vĩnh Phúc**: Tạ Nam Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Quảng Bình**: Hồ Anh, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đà Nẵng**: Nguyễn Đức Toàn, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **TP. Hồ Chí Minh**: Trần Vũ Duy, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH HẠ

Bài L1/488. Trên mặt thoáng của một chất lỏng có đường tròn đường kính $AB = 26$ cm. M là một điểm trên đường tròn và cách A một khoảng $AM = 10$ cm. Tại A, B người ta đặt hai nguồn sóng kết hợp, dao động đồng pha, phát sóng có bước sóng $\lambda = 5$ cm. Tính số điểm có cực đại giao thoa trên cung tròn nhỏ MB .

Lời giải. Tam giác MAB vuông tại M nên:

$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 24$ cm. Với điểm I bất kỳ trên cung tròn nhỏ MB ta có:

$$-\frac{AB}{\lambda} \leq \frac{IB - IA}{\lambda} \leq \frac{MB - MA}{\lambda} \quad (1)$$

Tại I là cực đại giao thoa thì:

$$IB - IA = k\lambda \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $-5,2 \leq k \leq 2,8$.

Vậy có 8 giá trị của k ứng với 8 điểm dao động cực đại trên cung nhỏ MB . $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế**: Châu Thị Tuyết Chi, Phan Nhật Tiến, Nguyễn Dạ Thảo Nhung, Huỳnh Hồng Thảo, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/488. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0 \cos 2\pi ft$ (V), (trong đó U_0 không đổi, f thay đổi được) vào hai đầu đoạn mạch điện mắc nối tiếp gồm điện trở thuần R và tụ điện có điện dung C . Khi tần số bằng 20Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch là 20W. Khi tần số bằng 40Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch là 32W. Khi tần số bằng 60Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch bằng bao nhiêu?

Lời giải. Gọi dung kháng của tụ điện khi $f = 20$ Hz là Z_C , như vậy dung kháng của tụ điện

khi $f = 40$ Hz là $\frac{Z_C}{2}$ và dung kháng của tụ điện

$$\text{khi } f = 60\text{Hz là } \frac{Z_C}{3}. \quad \mathcal{P} = RI^2 = \frac{RU^2}{R^2 + Z_C^2}$$

$$\text{Khi } f = 20\text{Hz:} \quad \frac{RU^2}{R^2 + Z_C^2} = 20 \quad (1)$$

$$\text{Khi } f = 40\text{Hz:} \quad \frac{RU^2}{R^2 + \left(\frac{Z_C}{2}\right)^2} = 32 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $Z_C = R$; $U^2 = 40R$
 Khi $f = 60\text{Hz}$

$$\mathcal{P} = \frac{RU^2}{R^2 + \left(\frac{Z_C}{3}\right)^2} = \frac{R \cdot 40R}{R^2 + \left(\frac{R}{3}\right)^2} = 36 \text{ W} \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kỳ này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

không ngừng bổ sung cải tiến cho lý thuyết mới này ngày một hoàn thiện hơn.

3. Những cố gắng cải tiến tiếp theo

Ngay trong năm 1614, khi cuốn sách *Descriptio* xuất hiện, Henry Briggs (1661-1631), giáo sư hình học của trường Cao đẳng Gresham ở London mà về sau là giáo sư ở Oxford đã đến Edinburgh để tỏ lòng ngưỡng mộ trước phát minh vĩ đại ra

lôgarit. Chính trong cuộc viếng thăm này mà Napier và Briggs đã nhất trí rằng các bảng sẽ hữu hiệu hơn nếu chúng được thay đổi sao cho lôga của 1 sẽ bằng 0 và lôga của 10 sẽ bằng một lũy thừa thích hợp của của 10. Thế là ra đời các lôgarit mà ngày nay gọi là lôga Briggs hay lôga thập phân. Các lôga loại này chủ yếu là các lôga cơ số 10, hữu ích hơn cả trong việc tính toán là do hệ thống số của chúng ta cũng có cơ số 10. Đối với một hệ thống có cơ số b khác thì tất nhiên thuận tiện nhất cho các mục đích tính toán là phải có các bảng lôgarit cũng có cơ số b .

Briggs đã dành nhiều sức lực của mình vào việc soạn một bảng theo kế hoạch mới, và năm 1624 đã cho công bố *Arithmetica logarithmica* (Số học lôgarit) bao gồm một bảng 14 số cho các lôga thập phân của các số từ 1 đến 20.000 và từ 90.000 đến 100.000. Phần còn lại từ 20.000 đến 90.000 để trống sau này được thực hiện tiếp với sự trợ giúp của Adriaen Vlacq (1600 - 1666), một nhà xuất bản và phát hành sách người Hà Lan. Năm 1620, Edmund Gunter (1581 - 1626), một đồng nghiệp của Briggs đã công bố một bảng lôga thập phân bảy chữ số lẻ của sin và tang các góc của các cung cách nhau một phút một. Chính Gunter là người đưa ra các từ *cosin* và *cotang*, các kỹ sư biết ông qua "xích Gunter". Briggs và Vlacq đã công bố bốn bảng lôga cơ bản mà những kết quả chỉ bị thế chỗ mới đây khi giữa năm 1924 và 1949 các bảng mở rộng 20 số đã được tính toán ở Anh để kỷ niệm 400 năm ngày tìm ra lôgarit.

Từ lôgarit có nghĩa là "số tỷ lệ" đã được Napier chấp nhận sau khi dùng lúc đầu một nhóm từ là *số nhân tạo*. Briggs đưa ra từ *mantissa* - phần định

trị là một từ Latin về sau, và có nguồn gốc Etruscan, lúc đầu có nghĩa là "cộng", hoặc "cân" và đến thế kỷ XVI có nghĩa là "phụ lục". Từ *Characteristic* - phần đặc tính cũng được Briggs gợi ý và Vlacq sử dụng. Có điều kỳ lạ là trong các bảng lôgarit thập phân thời trước thì in cả phần đặc tính lẫn phần định trị và mãi đến thế kỷ XVIII mới có thói quen hiện nay là chỉ in phần định trị mà thôi.

Phát minh kỳ diệu của Napier đã được đón nhận nhiệt tình khắp châu Âu. Nói riêng trong thiên văn học, một khám phá như vậy quả thật xuất hiện đúng lúc. Laplace - một nhà thiên văn học vĩ đại - đã xác nhận rằng việc phát minh ra lôgarit đã "giảm lao động cho nhà thiên văn được một nửa cuộc đời của mình". Bonaventura Cavarilireld (1598-1647) đã làm rất nhiều để lôgarit trở thành một cái ~~một~~ ở Italia. Tương tự như vậy có Johann Kepler ở Đức và Edmund Wingate ở Pháp. J. Kepler (1571-1630) là cha đẻ ba Định luật nổi tiếng về chuyển động của hành tinh trong thiên văn học. Còn Wingate (1596 - 1656) đã sống nhiều năm ở Pháp và đã trở thành một tác gia viết sách giáo khoa về số học sơ cấp nổi tiếng nhất của Anh ở thế kỷ XVII.

4. Một hướng tiếp cận khác

Một người Thụy Sĩ làm nhạc cụ tên là Jobst Burgi (1552-1632) độc lập với Napier đã xây dựng được một bảng các lôga rồi cho công bố vào năm 1620, nghĩa là 6 năm sau khi Napier đã công bố khám phá của mình với thế giới. Tuy nhiên điều thú vị là hai người tiếp cận theo hai hướng khác nhau. Trong khi cách tiếp cận của Napier là theo hình học thì cách tiếp cận của Burgi theo hướng đại số. Mặc dù sau này giới toán học xem Napier là cha đẻ của lôgarit, nhưng công trình của Burgi cũng rất đáng trân trọng vì cách tiếp cận của ông gần với cách tiếp cận hiện đại sau này. Câu chuyện này làm ta liên tưởng đến các câu chuyện Newton và Leibniz cùng phát minh ra phép toán vi tích phân, hay Lobachevsky, Bolyai và Gauss đều độc lập với nhau tìm ra hình học phi Euclid vậy.

PHƯƠNG TRÌNH HÀM JENSEN VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY TRÊN MỘT ĐOẠN

LÊ QUANG KHANH
(GV THPT chuyên Trần Quang Diệu, Hoài Ân, Bình Định)



Chúng ta đã biết đến phương trình hàm Jensen và phương trình hàm Cauchy trên tập số thực. Bài viết này, chúng tôi trình bày một số vấn đề về phương trình hàm Jensen và phương trình hàm Cauchy trên một đoạn.

1. PHƯƠNG TRÌNH HÀM JENSEN TRÊN MỘT ĐOẠN

1. Định nghĩa

Phương trình hàm Jensen trên một đoạn là phương trình hàm có dạng

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [\alpha; \beta] \quad (1),$$

ở đây $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

2. Tính chất

Định lý 1. Nghiệm của PT (1) là $f(x) = ax + b$ (a, b là các hằng số).

Chứng minh. Xét hàm số $\varphi: [0; 1] \rightarrow [\alpha; \beta]$ xác định bởi $\varphi(t) = (1-t)\alpha + t\beta$, $\forall t \in [0; 1]$.

Ta có $\varphi(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $\alpha \leq \varphi(t) \leq \beta$, $\forall t \in [0; 1]$. Khi đó nếu f là nghiệm phương trình (1) thì hàm $g(t) = f(\varphi(t))$, $\forall t \in [0; 1]$ là nghiệm của phương trình hàm

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}, \quad \forall u, v \in [0; 1].$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u+v}{2}\right) &= f\left(\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = f\left(\left(1-\frac{u+v}{2}\right)\alpha + \frac{u+v}{2}\beta\right) \\ &= f\left(\frac{(1-u)\alpha + u\beta + (1-v)\alpha + v\beta}{2}\right) \\ &= \frac{f((1-u)\alpha + u\beta) + f((1-v)\alpha + v\beta)}{2} \\ &= \frac{f(\varphi(u)) + f(\varphi(v))}{2} = \frac{g(u) + g(v)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}, \quad \forall u, v \in [0; 1].$$

Vì f liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ và φ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ nên $g(t) = f(\varphi(t))$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$. Để tìm hàm f , ta cần tìm hàm g liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u)+g(v)}{2}, \quad \forall u, v \in [0; 1] \quad (1)$$

Đặt $g(0) = c$, $g(1) = d$ và $e = d - c$. Ta có

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= g\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{g(0)+g(1)}{2} \\ &= \frac{c+c+(d-c)}{2} = c + \frac{1}{2}(d-c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2^2}\right) &= g\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right) = \frac{g(0)+g\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{c+c+\frac{1}{2}(d-c)}{2} = c + \frac{1}{2^2}(d-c). \end{aligned}$$

Giả sử $g\left(\frac{1}{2^k}\right) = c + \frac{1}{2^k}(d-c)$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) &= g\left(\frac{0+\frac{1}{2^k}}{2}\right) = \frac{g(0)+g\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2} \\ &= \frac{c+c+\frac{1}{2^k}(d-c)}{2} = c + \frac{1}{2^{k+1}}(d-c). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } g\left(\frac{1}{2^n}\right) = c + \frac{1}{2^n}(d-c) = c + \frac{1}{2^n}e \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta chứng minh:

$$g\left(\frac{2m}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{2m}{2^{n+1}}} + c, \quad g\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{2m+1}{2^{n+1}}} + c,$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, 2m < 2m+1 \leq 2^{n+1} \quad (3)$$

Với $n=0$ thì (3) đúng vì $g(0) = c, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e + c$

(theo (2)) và $g\left(\frac{2}{2}\right) = g(1) = d = e + c = e^{\frac{2}{2}} + c.$

Giả sử (3) đúng với $n = k \geq 0$, tức là

$$g\left(\frac{2m}{2^{k+1}}\right) = e^{\frac{2m}{2^{k+1}}} + c, \quad g\left(\frac{2m+1}{2^{k+1}}\right) = e^{\frac{2m+1}{2^{k+1}}} + c,$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, 2m < 2m+1 \leq 2^{k+1}. \text{ Ta chứng minh}$$

$$g\left(\frac{2m'}{2^{k+2}}\right) = e^{\frac{2m'}{2^{k+2}}} + c, \quad g\left(\frac{2m'+1}{2^{k+2}}\right) = e^{\frac{2m'+1}{2^{k+2}}} + c,$$

$$\forall m' \in \mathbb{N}, 2m' < 2m'+1 \leq 2^{k+2} \quad (4)$$

Vì $2m' < 2m'+1 \leq 2^{k+2}$ nên $m' < 2^{k+1}$ và $m'+1 \leq 2^{k+1}$.

Do đó, theo giả thiết quy nạp ta có

$$g\left(\frac{m'}{2^{k+1}}\right) = e^{\frac{m'}{2^{k+1}}} + c, \quad g\left(\frac{m'+1}{2^{k+1}}\right) = e^{\frac{m'+1}{2^{k+1}}} + c.$$

Khi đó, ta có

$$g\left(\frac{2m'}{2^{k+2}}\right) = g\left(\frac{m'}{2^{k+1}}\right) = e^{\frac{m'}{2^{k+1}}} + c = e^{\frac{2m'}{2^{k+2}}} + c \text{ và}$$

$$g\left(\frac{2m'+1}{2^{k+2}}\right) = g\left(\frac{\frac{m'+1}{2} + \frac{m'}{2}}{2}\right) = \frac{g\left(\frac{m'+1}{2}\right) + g\left(\frac{m'}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{m'+1}{2}} + c + e^{\frac{m'}{2}} + c \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2m'+1}{2}} + 2c \right) = e^{\frac{2m'+1}{2}} + c.$$

Suy ra (4) đúng. Vậy (3) đúng hay với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta

$$\text{có } g\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{k}{2^{n+1}}} + c, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \leq 2^{n+1} \quad (3')$$

Với $t \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$[2^{n+1}t] \leq 2^{n+1}t < [2^{n+1}t] + 1 \Rightarrow \frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}} \leq t < \frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t - \frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad 0 \leq \frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}} \leq 1.$$

Hơn nữa, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$. Suy ra $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}$.

Mà g liên tục nên

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}} + c \right) = et + c,$$

ở đây $g\left(\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}} + c$ (theo (3')). Suy ra

$$g(t) = et + c, \quad \forall t \in [0; 1].$$

Thử lại ta thấy g thỏa mãn (1).

Vậy $g(t) = et + c, \quad \forall t \in [0; 1]$. Đặt

$$z = \varphi(t) \Rightarrow t = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Vì $\alpha \leq z \leq \beta$ nên $0 \leq t = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \leq 1$. Khi đó, từ

$$g(t) = f(\varphi(t)), \text{ ta có}$$

$$f(z) = g\left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}\right) = e^{\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}} + c = az + b,$$

$$\forall z \in [\alpha; \beta], a = \frac{e}{\beta - \alpha}, b = -\frac{e\alpha}{\beta - \alpha} + c.$$

Suy ra $f(z) = az + b, \quad \forall z \in [\alpha; \beta]$ với a, b là hằng số.

Thử lại ta thấy f thỏa mãn (I). Vậy $f(x) = ax + b,$

$\forall x \in [\alpha; \beta]$, với a, b là hằng số.

Thí dụ 1. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn điều kiện

$$(x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right) = xf(x) + yf(y), \quad \forall x, y \in [1, 2] \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ta viết phương trình (1) dưới dạng

$$\frac{x+y}{2} f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{xf(x) + yf(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [1, 2].$$

Đặt $g(x) = xf(x), \quad \forall x, y \in [1, 2]$. Khi đó g liên tục trên đoạn $[1, 2]$ và thỏa mãn điều kiện

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [1, 2].$$

Theo định lý 1, ta có $g(x) = ax + b, \quad \forall x \in [1, 2]$, với

a, b là hằng số tùy ý. Do đó $f(x) = a + \frac{b}{x},$
 $\forall x \in [1, 2]$, với a, b là các hằng số tùy ý.

Thí dụ 2. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ dương, liên tục trên đoạn $[-3, 4]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \quad \forall x, y \in [-3, 4]. \quad (1)$$

Lời giải. Ta viết phương (1) dưới dạng

$$\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [-3, 4].$$

Đặt $g(x) = \ln f(x) \quad \forall x \in [-3, 4]$. Khi đó g liên tục trên đoạn $[-3, 4]$ và thỏa mãn điều kiện

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [-3, 4]$$

Do đó theo định lý 1 ta có

$$g(x) = ax + b, \quad \forall x \in [-3, 4], \quad a, b \text{ là các hằng số.}$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$f(x) = e^{ax+b}, \quad \forall x \in [-3, 4], \quad a, b \text{ là các hằng số.}$$

II. PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY TRÊN MỘT ĐOẠN

1. Định nghĩa

Phương trình hàm Cauchy trên một đoạn là phương trình hàm có dạng

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [\alpha; \beta] \quad (II)$$

ở đây $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

Để tìm hàm f , ta xét các trường hợp sau:

TH1: $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = \emptyset$. Khi đó $\forall x, y \in [\alpha; \beta]$, ta có $2\alpha \leq x+y \leq 2\beta \Rightarrow x+y \in [2\alpha; 2\beta]$.

Suy ra $x+y \notin [\alpha; \beta]$ vì $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = \emptyset$.

Do đó $\forall x, y \in [\alpha; \beta]$ thì $x+y \notin [\alpha; \beta]$. Như vậy, mọi hàm số liên tục $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ đều là nghiệm phương trình (II).

TH2: $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1] \neq \emptyset$.

$$\forall x \in [\alpha_1; \beta_1] \Rightarrow \begin{cases} x \in [\alpha; \beta] \\ x \in [2\alpha; 2\beta] \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} \in [\alpha; \beta].$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}, \quad \forall x \in [\alpha_1; \beta_1]. \end{aligned}$$

Do đó $\forall x, y \in [\alpha_1; \beta_1]$, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} \\ &\forall x, y \in [\alpha_1; \beta_1]. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in [\alpha_1; \beta_1].$$

Như vậy, f là nghiệm phương trình hàm Jensen trên đoạn $[\alpha_1; \beta_1]$. Theo kết quả phương trình hàm Jensen trên một đoạn, ta có

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in [\alpha_1; \beta_1] \quad (a, b \text{ là hằng số}) \quad (1)$$

Trong trường hợp 2, ta xét các trường hợp sau:

• TH2.1: $\alpha > 0$. Khi đó $2\alpha \leq \beta$ hay $\alpha \leq \frac{1}{2}\beta$ (2) vì

$$[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1] \neq \emptyset.$$

Ta có $\alpha < 2\alpha \leq \beta < 2\beta$. Suy ra $\alpha_1 = 2\alpha, \beta_1 = \beta$. Vì

$\alpha_1 \in [\alpha_1; \beta_1]$ nên theo (1) ta có

$$f(\alpha_1) = f(2\alpha) = a(2\alpha) + b = f(\alpha + \alpha)$$

$$= f(\alpha) + f(\alpha) = 2f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = a\alpha + \frac{b}{2}$$

Với $x \in [\alpha; \beta - \alpha] \Rightarrow x + \alpha \in [2\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1]$. Khi đó, theo (1) ta có

$$a(x+\alpha) + b = f(x+\alpha) = f(x) + f(\alpha) = f(x) + a\alpha + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow a(x+\alpha) + b = f(x) + a\alpha + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + \frac{b}{2}, \quad \forall x \in [\alpha; \beta - \alpha]. \quad (3)$$

Tiếp theo, ta xét $\alpha \leq \frac{1}{3}\beta$ hoặc $\frac{1}{3}\beta < \alpha \leq \frac{1}{2}\beta$.

Với $\alpha \leq \frac{1}{3}\beta$, ta có $\alpha < 2\alpha = \alpha_1 \leq \beta - \alpha < \beta = \beta_1$

$$\Rightarrow [\alpha; \beta - \alpha] \cap [2\alpha; \beta] = [\alpha; \beta],$$

$$\alpha_1 \in [\alpha; \beta - \alpha] \cap [\alpha_1; \beta_1] \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \in [\alpha; \beta - \alpha] \\ \alpha_1 \in [\alpha_1; \beta_1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1) = f(2\alpha) = a(2\alpha) + b \quad (\text{theo (1)}),$$

$$f(\alpha_1) = f(2\alpha) = a(2\alpha) + \frac{b}{2} \quad (\text{theo (3)})$$

$$\Rightarrow a2\alpha + b = a2\alpha + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Suy ra $f(x) = ax, \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$. Thử lại ta thấy f thỏa mãn (II).

Vậy $f(x) = ax, \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$ là nghiệm của phương trình (II), với $\alpha > 0$ và $\alpha \leq \frac{1}{3}\beta$.

Với $\frac{1}{3}\beta < \alpha \leq \frac{1}{2}\beta$, ta có $\alpha \leq \beta - \alpha < 2\alpha \leq \beta$. Ta xét hàm số $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{b}{2}, & x \in [\alpha; \beta - \alpha] \\ g(x), & x \in [\beta - \alpha; 2\alpha] \\ ax + b, & x \in [2\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1] \end{cases} \quad (4)$$

trong đó, g là hàm liên tục trên đoạn $[\beta - \alpha; 2\alpha]$ sao

cho $g(\beta - \alpha) = a(\beta - \alpha) + \frac{b}{2}; g(2\alpha) = 2a\alpha + b$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Ta chứng minh f là nghiệm của phương trình (II). Tức là, ta cần chứng minh

$$\forall x, y, x + y \in [\alpha; \beta] \text{ thì } f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Nếu $x \notin [\alpha; \beta - \alpha]$ hoặc $y \notin [\alpha; \beta - \alpha]$ thì

$$\begin{cases} x > \beta - \alpha \\ y \geq \alpha \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y > \beta - \alpha \\ x \geq \alpha \end{cases}.$$

Suy ra $x + y > \beta$. Do đó $x + y \notin [\alpha; \beta]$.

Nếu $x \in [\alpha; \beta - \alpha]$ và $y \in [\alpha; \beta - \alpha]$ thì

$$x + y \in [2\alpha; 2(\beta - \alpha)].$$

Mà $2(\beta - \alpha) \geq \beta$ (theo (2)). Như vậy, ta chỉ xét

$x + y \in [2\alpha; \beta]$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \left(ax + \frac{b}{2}\right) + \left(ay + \frac{b}{2}\right) \\ &= a(x + y) + b = f(x + y) \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ được xác định bởi công thức (4) với

$$\alpha > 0 \text{ và } \frac{1}{3}\beta < \alpha \leq \frac{1}{2}\beta.$$

• **TH2.2:** $\beta < 0$. Khi đó $\alpha \leq 2\beta$ (5) vì

$$[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1] \neq \emptyset.$$

Ta có $2\alpha < \alpha \leq 2\beta < \beta$. Suy ra $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = 2\beta$. Vì

$\beta_1 \in [\alpha_1; \beta_1]$ nên theo (1) ta có

$$a(2\beta) + b = f(2\beta) = f(\beta_1) = f(\beta) + f(\beta) = 2f(\beta)$$

$$\Rightarrow f(\beta) = a\beta + \frac{b}{2}.$$

Với $x \in [\alpha - \beta; \beta] \Rightarrow x + \beta \in [\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1]$. Khi

đó, theo (1) ta có

$$a(x + \beta) + b = f(x + \beta) = f(x) + f(\beta) = f(x) + a\beta + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + \frac{b}{2}, \quad \forall x \in [\alpha - \beta; \beta] \quad (6)$$

Tiếp theo, ta xét $\alpha \leq 3\beta$ hoặc $\alpha > 3\beta$.

Với $\alpha \leq 3\beta$, ta có $\alpha = \alpha_1 < \alpha - \beta \leq \beta_1 = 2\beta < \beta$

$$\Rightarrow [\alpha_1; \beta_1] \cup [\alpha - \beta; \beta] = [\alpha; \beta], \quad \beta_1 \in$$

$$[\alpha_1; \beta_1] \cap [\alpha - \beta; \beta] \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 \in [\alpha_1; \beta_1] \\ \beta_1 \in [\alpha - \beta; \beta] \end{cases}.$$

Do đó, $f(\beta_1) = f(2\beta) = a2\beta + b$ (theo (1)),

$$f(\beta_1) = f(2\beta) = a2\beta + \frac{b}{2} \text{ (theo (6))}$$

$$\Rightarrow a2\beta + b = a2\beta + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 0.$$

Suy ra $f(x) = ax$, $\forall x \in [\alpha; \beta]$. Thử lại ta thấy f thỏa mãn (II). Vậy $f(x) = ax$, $\forall x \in [\alpha; \beta]$ là nghiệm phương trình (II) với $\beta < 0$ và $\alpha \leq 3\beta$.

Với $\alpha > 3\beta$, khi đó, kết hợp với (5) ta được $\alpha \leq 2\beta < \alpha - \beta \leq \beta$. Ta xét hàm $f(x)$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, x \in [\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1] \\ h(x), x \in [2\beta; \alpha - \beta] \\ ax + \frac{b}{2}, x \in [\alpha - \beta; \beta] \end{cases} \quad (7)$$

trong đó, $h(x)$ là hàm liên tục trên $[2\beta; \alpha - \beta]$ sao cho

$$h(2\beta) = 2a\beta + b, \quad h(\alpha - \beta) = a(\alpha - \beta) + \frac{b}{2}.$$

Khi đó, $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Ta

chứng minh f là nghiệm của phương trình (II). Tức là, ta cần chứng minh $\forall x, y, x + y \in [\alpha; \beta]$ thì

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Nếu $x \notin [\alpha - \beta; \beta]$ hoặc $y \notin [\alpha - \beta; \beta]$ thì

$$\begin{cases} x < \alpha - \beta \\ y \leq \beta \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y < \alpha - \beta \\ y \leq \beta \end{cases}.$$

Suy ra $x + y < \alpha$. Do đó $x + y \notin [\alpha; \beta]$.

Nếu $x \in [\alpha - \beta; \beta]$ và $y \in [\alpha - \beta; \beta]$, thì

$$x + y \in [2(\alpha - \beta); 2\beta]. \text{ Mà } 2(\alpha - \beta) \leq \alpha \text{ (theo (5)).}$$

Như vậy, ta chỉ xét $x + y \in [\alpha; 2\beta]$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= \left(ax + \frac{b}{2}\right) + \left(ay + \frac{b}{2}\right) \\ &= a(x + y) + b = f(x + y). \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ được xác định bởi công thức (7) với $\beta < 0$ và $3\beta < \alpha \leq 2\beta$.

TH3: $\alpha \leq 0, \beta \geq 0$. Khi đó $2\alpha \leq \alpha \leq \beta \leq 2\beta$. Suy ra

$[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = [\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1] \neq \emptyset$. Do đó, theo

(1) ta có $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [\alpha_1; \beta_1]$ hay

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in [\alpha; \beta].$$

Vì $0 \in [\alpha; \beta]$ nên

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 = b.$$

Suy ra $f(x) = ax$, $\forall x \in [\alpha; \beta]$. Thử lại ta thấy f

thỏa mãn (II). Vậy nghiệm tổng quát của (II) là $f(x) = ax$, $\forall x \in [\alpha; \beta]$, a là hằng số.

Từ các trường hợp trên, ta có kết quả sau:

2. Tính chất

Định lý 2. Cho phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [\alpha; \beta] \quad (II)$$

trong đó $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

i) Nếu $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] = \emptyset$ thì mọi hàm số liên tục $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ là nghiệm của (II).

2) Nếu $[\alpha; \beta] \cap [2\alpha; 2\beta] \neq \emptyset$ ta có các trường hợp sau:

i) Nếu $\alpha \leq 0 \leq \beta$ hoặc $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}\beta$ hoặc $\alpha \leq 3\beta < 0$

thì nghiệm tổng quát của phương trình (II) là

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \quad a \text{ là hằng số.}$$

ii) Nếu $0 < \frac{1}{3}\beta < \alpha \leq \frac{1}{2}\beta$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (II) được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{b}{2}, & x \in [\alpha; \beta - \alpha] \\ g(x), & x \in [\beta - \alpha; 2\alpha] \\ ax + b, & x \in [2\alpha; \beta] = [\alpha_1; \beta_1] \end{cases}$$

trong đó, g là hàm liên tục trên đoạn $[\beta - \alpha; 2\alpha]$ sao

cho: $g(\beta - \alpha) = a(\beta - \alpha) + \frac{b}{2}$; $g(2\alpha) = 2a\alpha + b$.

iii) Nếu $3\beta < \alpha \leq 2\beta < 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (II) được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [\alpha; 2\beta] = [\alpha_1; \beta_1] \\ h(x), & x \in [2\beta; \alpha - \beta] \\ ax + \frac{b}{2}, & x \in [\alpha - \beta; \beta] \end{cases}$$

trong đó, $h(x)$ là hàm liên tục trên $[2\beta; \alpha - \beta]$ sao

cho: $h(2\beta) = 2a\beta + b$, $h(\alpha - \beta) = a(\alpha - \beta) + \frac{b}{2}$.

Sau đây là một số thí dụ áp dụng từ định lý trên.

Thí dụ 1. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1, 3]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [1, 3].$$

Lời giải. Với $\alpha = 1$, $\beta = 3$, ta có $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}\beta$, nên

theo định lý 2, hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x) = ax$, $\forall x \in [1, 3]$, a là hằng số.

Thí dụ 2. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ dương, liên tục trên đoạn $[2, 5]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [2, 5] \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [2, 5].$$

Đặt $g(x) = \ln f(x)$, $\forall x \in [2, 5]$. Khi đó g là hàm số xác định, liên tục trên $[2, 5]$ và thỏa mãn điều kiện $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y, x+y \in [2, 5]$.

Với $\alpha = 2$, $\beta = 5$, ta có $0 < \frac{1}{3}\beta < \alpha < \frac{1}{2}\beta$, nên theo

định lý 2, hàm số $g(x)$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} ax + \frac{b}{2}, & x \in [2, 3] \\ h(x), & x \in [3, 4] \\ ax + b, & x \in [4, 5] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó a, b là các hằng số và $h(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[3, 4]$ sao cho

$$h(3) = 3a + \frac{b}{2} \quad \text{và} \quad h(4) = 4a + b.$$

Vậy $f(x) = e^{g(x)}$, $\forall x \in [2, 5]$ trong đó $g(x)$ được xác định bởi hệ thức (2).

Thí dụ 3. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[1, 4]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y, xy \in [1, 4] \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $t = \log_2 x \in [0, 2]$, $\forall x \in [1, 4]$ và

$g(t) = f(2^t)$, $\forall t \in [0, 2]$. Khi đó g là hàm số xác định, liên tục trên $[0, 2]$ và thỏa mãn điều kiện

$$g(t+u) = g(t) + g(u), \quad \forall t, u, t+u \in [0, 2].$$

Vì $0 \in [0, 2]$ nên theo định lý 2, ta có $g(t) = at$, $\forall t \in [0, 2]$ với a là hằng số. Suy ra $f(x) = a \log_2 x$, $\forall x \in [1, 4]$, với a là hằng số tùy ý. Thử lại ta thấy f thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = a \log_2 x$, $\forall x \in [1, 4]$, với a là hằng số tùy ý.

Thí dụ 4. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-5, -2]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \forall x, y, x+y \in [-5, -2] \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - x^2$, $\forall x \in [-5, -2]$.

Phương trình (1) tương đương với

$g(x+y) + (x+y)^2 = g(x) + g(y) + x^2 + y^2 + 2xy$,
 $\forall x, y, x+y \in [-5, -2]$. Khi đó $g(x)$ liên tục trên
 đoạn $[-5, -2]$ và thỏa mãn điều kiện

$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y, x+y \in [-5, -2]$.
 Với $\alpha = -5, \beta = -2$, ta có $3\beta < \alpha \leq 2\beta < 0$, nên
 theo định lý 2, hàm số $g(x)$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, x \in [-5, -4] \\ h(x), x \in [-4, -3] \\ ax + \frac{b}{2}, x \in [-3, -2] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó a, b là các hằng số và $h(x)$ là hàm số xác
 định và liên tục trên đoạn $[-4, -3]$ sao cho

$$h(-4) = -4a + b \text{ và } h(-3) = -3a + \frac{b}{2}.$$

Vậy $f(x) = g(x) + x^2, \forall x \in [-5, -2]$ trong đó $g(x)$
 được xác định bởi hệ thức (2).

Thí dụ 5. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên
 đoạn $[-3, -1]$, $f(x) > -1, \forall x \in [-3, -1]$ và thỏa
 mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \forall x, y, x+y \in [-3, -1] \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$f(x+y) + 1 = (f(x) + 1)(f(y) + 1), \\ \forall x, y, x+y \in [-3, -1].$$

Đặt $g(x) = f(x) + 1 > 0, \forall x \in [-3, -1]$, ta có

$$g(x+y) = g(x)g(y), \forall x, y, x+y \in [-3, -1].$$

Suy ra $\ln g(x+y) = \ln g(x) + \ln g(y)$,

$$\forall x, y, x+y \in [-3, -1].$$

Đặt $h(x) = \ln g(x)$. Khi đó h liên tục trên đoạn
 $[-3, -1]$ và thỏa mãn điều kiện $h(x+y) = h(x) + h(y)$,
 $\forall x, y, x+y \in [-3, -1]$. Với $\alpha = -3, \beta = -1$, ta có
 $\alpha \leq 3\beta < 0$, nên theo định lý 2, ta có $h(x) = ax$,
 $\forall x \in [-3, -1]$ với a là hằng số. Vậy $f(x) = e^{ax} - 1$,
 $\forall x \in [-3, -1]$.

Thí dụ 6. Tìm tất cả các hàm số $g(x)$ liên tục trên
 đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$g(x) + g(y) \cdot g(x+y) = xy - 1, \forall x, y, x+y \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $f(x) = g(x) + 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \in [-1, 1]$. Khi
 đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều
 kiện

$f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y, x+y \in [-1, 1]$.
 Vì $0 \in [-1, 1]$ nên theo định lý 2, ta có $f(x) = ax$,
 $\forall x \in [-1, 1]$, a là hằng số. Vậy

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + ax, \forall x \in [-1, 1], a \text{ là hằng số.}$$

Thí dụ 7. Tìm tất cả các hàm số $f(x), g(x), h(x)$
 dương, liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều
 kiện $f(x+y) = g(x)h(y), \forall x, y, x+y \in [-1, 1]$ (1)

Lời giải. Trong phương trình (1), ta lần lượt thay
 $x = 0, y = t$ và $y = 0, x = t$, ta được

$$\begin{cases} f(t) = g(0)h(t) \\ f(t) = g(t)h(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) = \frac{f(t)}{a} \\ g(t) = \frac{f(t)}{b} \end{cases}, \forall t \in [-1, 1],$$

với $a = g(0) > 0, b = h(0) > 0$.

Khi đó (1) trở thành

$$f(x+y) = \frac{f(x)}{b} \frac{f(y)}{a} \Leftrightarrow \frac{f(x+y)}{ab} = \frac{f(x)}{ab} \frac{f(y)}{ab},$$

$\forall x, y, x+y \in [-1, 1]$. Hay

$$\ln \frac{f(x+y)}{ab} = \ln \frac{f(x)}{ab} + \ln \frac{f(y)}{ab}, \forall x, y, x+y \in [-1, 1].$$

Ta đặt $\Phi(x) = \ln \frac{f(x)}{ab}, \forall x \in [-1, 1]$. Khi đó $\Phi(x)$

liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y), \forall x, y, x+y \in [-1, 1].$$

Vì $0 \in [-1, 1]$ nên theo định lý 2, ta có $\Phi(x) = cx$,

$\forall x \in [-1, 1]$, với c là hằng số. Suy ra $f(x) = bae^{cx}$,

$h(x) = be^{cx}, g(x) = ae^{cx}, \forall x \in [-1, 1]$, a, b, c là các
 hằng số ($a > 0, b > 0$). Thử lại ta thấy f, g, h thỏa
 mãn (1).

Vậy $f(x) = bae^{cx}, h(x) = be^{cx}, g(x) = ae^{cx}, \forall x \in [-1, 1]$,

a, b, c là các hằng số ($a > 0, b > 0$).

Thí dụ 8. Tìm tất cả các hàm số $f(x), g(x), h(x)$
 liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \forall x, y, x+y \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Lời giải. Trong phương trình (1), lần lượt thay
 $x = 0, y = t$ và $y = 0, x = t$, ta được

$$\begin{cases} f(t) = g(0) + h(t) \\ f(t) = g(t) + h(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(t) = f(t) - a \\ g(t) = f(t) - b \end{cases}, \forall t \in [-1, 1],$$

với $a = g(0), b = h(0)$. Khi đó (1) trở thành

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a - b, \\ \forall x, y, x+y \in [-1, 1].$$

Ta đặt $F(x) = f(x) - a - b$, $\forall x \in [-1, 1]$. Khi đó $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện $F(x+y) = F(x) + F(y)$, $\forall x, y, x+y \in [-1, 1]$. Vì $0 \in [-1, 1]$ nên theo định lý 2, ta có $F(x) = cx$, $\forall x \in [-1, 1]$, c là hằng số. Suy ra

$f(x) = cx + a + b$, $g(x) = cx + a$, $h(x) = cx + b$, $\forall x \in [-1, 1]$, a, b, c là các hằng số. Thử lại ta thấy f, g, h thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = cx + a + b$, $g(x) = cx + a$, $h(x) = cx + b$, $\forall x \in [-1, 1]$, a, b, c là các hằng số.

Thí dụ 9. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) - f(x) = f(y+z) - f(z), \\ \forall x, y, z, x+y, y+z \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Lời giải. Ta biến đổi phương trình (1) tương đương với $f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z)$

$$\forall x, y, z, x+y, y+z \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Thế $z = 0$ vào (2), ta được

$$f(x+y) + a = f(x) + f(y), \quad \forall x, y, x+y \in [-1, 1], \\ \text{với } f(0) = a. \text{ Đặt } f(x) - a = g(x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Khi đó g là hàm số xác định, liên tục trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y, x+y \in [-1, 1].$$

Vì $0 \in [-1, 1]$ nên theo định lý 2, ta có $g(x) = cx$, $\forall x \in [-1, 1]$, c là hằng số. Suy ra $f(x) = cx + a$, $\forall x \in [-1, 1]$, với a, c là hằng số. Thử lại ta thấy f thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = cx + a$, $\forall x \in [-1, 1]$, với a, c là hằng số.

Thí dụ 10. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1, 2018]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = 2018^x f(y) + 2018^y f(x), \\ \forall x, y, x+y \in [1, 2018]. \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $g(x) = 2018^{-x} f(x)$, $\forall x \in [1, 2018]$. Khi đó $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1, 2018]$ và thỏa điều kiện $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y, x+y \in [1, 2018]$.

Với $\alpha = 1$, $\beta = 2018$, ta có $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}\beta$ nên theo định lý 2, ta có $g(x) = ax$, $\forall x \in [1, 2018]$. Suy ra $f(x) = ax2018^x$, $\forall x \in [1, 2018]$. Thử lại ta thấy f thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = ax2018^x$, $\forall x \in [1, 2018]$.

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 25)

Problem T8/492. Given a triangle ABC inscribed in the circle (O) . The tangent lines of (O) at B and C intersect at P . The line which goes through A and is parallel to BP intersects BC at M . The line which goes through A and is parallel to BC intersects BP at N . Suppose that I is the intersections between AP and MN . Prove that four points B, I, O, C lie on a circle.

Problem T9/492. Given the equation

$$x^3 + mx^2 + n = 0 \quad (*)$$

Find m, n so the the equation $(*)$ has three distinct non-zero real roots u, v, t satisfying

$$\frac{u^4}{u^3 - 2n} + \frac{v^4}{v^3 - 2n} + \frac{t^4}{t^3 - 2n} = 3.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/492. Let p be an odd prime and $a_1, a_2, \dots, a_p$ is an arithmetic progression with the common difference d which is not divisible by p .

Prove that $\prod_{i=1}^p (a_i + a_1 a_2 \dots a_p) : p^2$.

Problem T11/492. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$f(x+f(y)) = f(x+y^{2018}) + f(y^{2018} - f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/492. Given an acute triangle ABC with the altitudes BE, CF . Let ST be a chord of the circumcircle of AEF . Two circles which go through S, T is tangent to BC respectively at P and Q . Prove that the intersection between PE, QF lies on the circumcircle of AEF .

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 33

Problem. Find the vertical asymptotes of the graph (C) of the function $y = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$.

Solution. All the solutions of the equation $x \sin \frac{1}{x} = 0$ are $x = 0$ or $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Therefore we can see that the possible vertical asymptotes are $x = 0$ or $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

The line $x = 0$ cannot be a vertical asymptote of (C). Consider the following sequence

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. This sequence tends to 0^+ , and

the corresponding sequence

$$y_n = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \rightarrow +\infty.$$

On the other hand, if we choose $x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

which also tends to 0^+ , the corresponding

$$\text{sequence } y_n = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \rightarrow -\infty.$$

Hence the limit does not exist when x tends to 0 on the right. Similarly for the left. Now we prove that all the remain lines are actually the vertical asymptotes of (C). Let consider the case $x = \frac{1}{\pi}$.

$$\text{We have } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\pi}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\pi}\right)^+} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow +\infty.$$

Notice that the denominator tends to 0 but is always positive and therefore the limit is positive infinity. Similarly for the others vertical lines.

In conclusion, all the vertical asymptotes of (C) are $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

TỪ VỰNG

Asymptote	: tiệm cận
Vertical asymptote	: tiệm cận đứng
Tend to	: tiến tới (giới hạn)

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)



Bài toán. Cho một hình trụ có độ dài đường cao bằng 2, bán kính đáy bằng 1. AB và CD là các đường kính của hai đáy sao cho chúng vuông góc với nhau. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

Lời giải. Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ thì $A(0; -1; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 2)$ và $D(-1; 0; 2)$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 2)$, $\overrightarrow{DB} = (1; 1; -2)$. Gọi α là góc tạo bởi

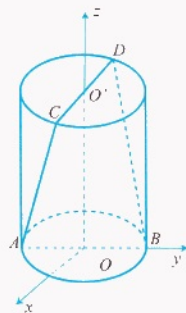
$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \text{ thì } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = -\frac{1}{3}. \text{ Từ đó } \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,5^\circ. \text{ Do đó số đo}$$

góc giữa hai đường thẳng AC và BD là $180^\circ - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ$. $\square$

Lưu ý. Góc giữa hai đường thẳng có giá trị từ 0° đến 90° . Góc giữa hai vectơ có giá trị từ 0° đến 180° .

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng**

Yên: Bùi Văn Quyển, Nguyễn Thị Hương Giang, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bến Tre:** Lê Ngộ Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.



HỒ HẢI (Hà Nội)



BÀI TOÁN 13. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương chứa vô hạn số nguyên tố.

Từ định nghĩa số nguyên tố ta thấy rằng mỗi số 2, 3, 5 không có ước số nào khác 1 và chính nó nên $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ là các số nguyên tố. Ta biết ít nhất 3 số nguyên tố phân biệt. Kí hiệu tích của m số nguyên liên tiếp từ 1 đến m là $m!$ và gọi là m giai thừa. Để giải bài toán này ta cần Bổ đề 1 về sự tồn tại số nguyên tố.

Bổ đề 1. Cho số tự nhiên $a \geq 4$ thì ước số dương q nhỏ nhất khác 1 của a là số nguyên tố.

Chứng minh. Do tập hợp các ước số dương khác 1 của a là hữu hạn nên tồn tại ước số nhỏ nhất q khác 1 của a . Nếu a là số nguyên tố thì $q = a$ là ước số dương nhỏ nhất khác 1 của a . Nếu a là hợp số thì $a = qt$ với t là số nguyên dương. Khi q là hợp số thì $q = rs$ với s là số nguyên dương và số r thỏa mãn $1 < r < q$, lúc đó $a = rst$ với r là ước số của a mà $1 < r < q$, trái với giả thiết. Vậy q phải là số nguyên tố.

Trở về giải bài toán 13.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Phương pháp phản chứng. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố phân biệt mà ta tìm được thêm số nguyên tố khác nữa, dựa vào việc xét tích các số nguyên tố đã cho

cộng hoặc trừ với 1 và Bổ đề 1, thì điều giả sử là sai, tức là phải có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 1. Chứng minh phản chứng, dựa theo ý tưởng của nhà toán học Euclid, thế kỷ III trước Công nguyên. Euclid xét các số được biểu thị bằng đoạn thẳng.

Giả sử chỉ có n số nguyên tố phân biệt là $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n$ với $n \geq 2$ (không nhất thiết là dãy số nguyên tố liên tiếp). Xét số $a = p_1 p_2 \dots p_n + 1$, trong đó $p_1 p_2 \dots p_n$ là tích của n số nguyên tố đã biết từ 2 đến p_n . Gọi q là ước số nhỏ nhất khác 1 của số $a = p_1$

$p_2 \dots p_n + 1$ thì $a = qt$ và q là số nguyên tố theo Bổ đề 1. Nếu số q bằng một trong các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$ thì q là ước của hiệu số

$$qt - p_1 p_2 \dots p_n = a - p_1 p_2 \dots p_n = 1,$$

không xảy ra. Do đó tồn tại số nguyên tố q khác n số nguyên tố trên, ta có $n + 1$ số nguyên tố phân biệt, trái với điều giả sử. Vậy phải có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 2. Tương tự như Cách giải 1, khi xét số nguyên $a = p_1 p_2 \dots p_n - 1$ với $n \geq 2$.

ĐỊNH HƯỚNG 2. Phương pháp kiến thiết. Giả sử có n ($n \geq 2$) số nguyên tố phân biệt, sử dụng Bổ đề 1 ta xây dựng dãy số chứa số nguyên tố khác với n số nguyên tố đã biết thì có $n + 1$ số nguyên tố phân biệt, và cứ làm như thế sẽ có vô hạn số nguyên tố. Việc tìm được các dãy số khác nhau dẫn đến các cách giải khác nhau.

Cách giải 3. Ta xây dựng dãy số sau: Số thứ nhất là $a_1 = 2$, lấy số thứ hai là $a_2 = 2! + 1 = 3$, lấy số thứ ba là $a_3 = 3! + 1 = 7$, cả ba số $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 7$ đều là số nguyên tố, lấy số thứ tư là $a_4 = 7! + 1 = 5041 = 71^2$ với $p_4 = 71$ là ước số nhỏ nhất của 5041 nên là số nguyên tố. Giả

sử đã biết n số nguyên tố là $p_1, p_2, \dots, p_n$, trong đó p_n là số nguyên tố lớn nhất, ta xét tích của p_n số nguyên liên tiếp từ 1 đến p_n và cộng với 1 được số

$$a_n = (p_n)! + 1 = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

Gọi q là ước số nhỏ nhất khác 1 của số $a = (p_n)! + 1$ thì $a = qt$ và q là số nguyên tố theo Bổ đề 1. Nếu q bằng một trong các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$ thì $q \leq p_n$ nên q là ước của số $(p_n)!$, suy ra q là ước của hiệu số $qt - (p_n)! = a - (p_n)! = 1$, không xảy ra. Vậy ta tìm được số nguyên tố $q = p_{n+1} > p_n$. Tiếp tục xét số $b = (p_{n+1})! + 1$ thì tồn tại số nguyên tố $p_{n+2} > p_{n+1}$ và cứ như thế ta xây dựng được dãy vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 4. Tương tự như Cách giải 3, khi xét dãy số nguyên $a = (p_n)! - 1$ với $n \geq 2$ và p_n là số nguyên tố lớn nhất. Có thể chuyển việc chứng minh từ *Phương pháp kiến thiết* sang *Phương pháp phản chứng*, chỉ khác là trong *Phương pháp kiến thiết* thì số mới tìm được phải lớn hơn mọi số đã biết, còn trong *Phương pháp phản chứng* thì điều đó không nhất thiết xảy ra.

ĐỊNH HƯỚNG 3. Phương pháp phản chứng. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố phân biệt, ta tách tích các số nguyên tố đã biết thành nhiều thừa số và xét tổng của các thừa số nguyên tố cùng nhau để tìm được thêm số nguyên tố khác nữa theo Bổ đề 1, suy ra điều giả sử là sai, tức là có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 5. Chứng minh của nhà toán học Stieltjes vào năm 1890.

Giả sử chỉ có n số nguyên tố phân biệt là $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$ với $n \geq 3$. Ta tách tích các số nguyên tố đã biết thành hai thừa số $p_1 p_2 \dots p_n = bc$ sao cho mỗi thừa số b, c lớn hơn 2 và

ƯCLN $(b, c) = 1$, rồi xét tổng $a = b + c$. Gọi q là ước số nhỏ nhất khác 1 của số $a = b + c$ thì $a = qt$ và q là số nguyên tố theo Bổ đề 1.

• Nếu số q bằng một trong các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$ thì q là ước số của một trong hai số b, c .

• Nếu q là ước của số b thì số q là ước của số $a - b = c$, nhưng do $(b, c) = 1$ nên điều này không xảy ra, tức là q không là ước của số b . Lập luận tương tự, số q không là ước của số c . Như vậy, số nguyên tố q khác với tất cả các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$. Vậy điều giả sử chỉ có n số nguyên tố là sai, tức là phải có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 6. Chứng minh của nhà toán học Métrol vào năm 1917.

Giả sử chỉ có n số nguyên tố phân biệt là $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$. Xét tổng a gồm n số hạng ($n \geq 3$) là $a = p_2 p_3 \dots p_n + p_1 p_3 \dots p_n + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1}$, trong đó mỗi số hạng là tích của $n - 1$ số nguyên tố trong n số nguyên tố trên và hai số hạng bất kì là khác nhau. Gọi q là ước số nhỏ nhất khác 1 của số a thì $a = qt$ và q là số nguyên tố theo Bổ đề 1. Lập luận tương tự như ở Cách giải 5 thì số nguyên tố q khác với tất cả các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$. Vậy điều giả sử chỉ có n số nguyên tố là sai, tức là phải có vô hạn số nguyên tố.

Trong định hướng giải bài toán này dưới đây ta cần dùng đến Bổ đề 2.

Bổ đề 2. Nếu hai số a và b nguyên tố cùng nhau thì ước số của chúng cũng nguyên tố cùng nhau, do đó ước số nguyên tố p của a phải khác ước số nguyên tố q của b .

Chứng minh. Giả sử $(a, b) = 1$ và p là ước số của a , còn q là ước số của b . Nếu p và q có ước số chung d thì d là ước số của p nên d

là ước số của a . Tương tự, vì d là ước số của q nên d là ước số của b , từ đó d là ước số của a và b , mà $(a, b) = 1$ nên $d = 1$.

ĐỊNH HƯỚNG 4. Phương pháp phản chứng. Giả sử chỉ có hữu hạn gồm n số nguyên tố phân biệt. Theo Bổ đề 2 nếu ta xây dựng được một dãy số gồm $n + 1$ số nguyên tố cùng nhau thì ta có $n + 1$ số nguyên tố phân biệt, trái với giả thiết. Vậy phải có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 7. Chứng minh dựa theo nhà toán học Hurwitz vào năm 1891.

Giả sử chỉ có n số nguyên tố phân biệt. Ta xây dựng một dãy $n + 1$ số như sau:

$$a_1 = 2, a_2 = a_1 + 1 = 3, a_3 = a_1 a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, a_4 = a_1 a_2 a_3 + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43, \dots, \text{ tổng quát là}$$

$$a_{k+1} = a_1 a_2 a_3 \dots a_k + 1; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

ét hai số bất kì a_k và a_j trong dãy số này, giả sử $k > j$ tức là $k = j + t$ với $t \geq 1$ thì $a_k = a_j b + 1$ với số nguyên dương b nên $(a_k, a_j) = (a_j b + 1, a_j) = 1$. Dãy số vừa được xây dựng có $n + 1$ số nguyên tố với nhau từng đôi một nên chứa $n + 1$ ước số nguyên tố phân biệt (theo Bổ đề 2), trái với giả thiết. Vậy phải có vô hạn số nguyên tố.

Cách giải 8. Chứng minh của nhà toán học Goldbach vào năm 1730.

Giả sử chỉ có n số nguyên tố phân biệt. Xét dãy số Fermat

$$F_m = 2^{2^m} + 1 \quad \text{với } m = 0, 1, 2, \dots, n$$

thì F_m là số lẻ. $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, \dots$ Bằng quy nạp ta có

$$F_m - 2 = F_0 F_1 \dots F_{m-1}.$$

Thật vậy, $F_1 - 2 = 5 - 2 = 3 = F_0$, hệ thức đúng với $m = 1$. Giả sử hệ thức đúng với s , xét

$$F_{s+1} - 2 = 2^{2^{s+1}} - 1 = 2^{2^s \cdot 2} - 1$$

$$= (2^{2^s} - 1)(2^{2^s} + 1) = (F_s - 2)F_s = F_0 F_1 \dots F_{s-1} F_s,$$

hệ thức đúng với $s + 1$. Vậy hệ thức đúng với bất kì số tự nhiên m . Với $1 \leq k < m \leq n$, xét UCLN $(F_k, F_m) = (F_k, F_0 \dots F_k \dots F_{m-1} F_m + 2) = d$ thì d là ước số của 2 mà các số F_i là số lẻ nên $d = 1$. Hai số phân biệt bất kì trong dãy số trên là nguyên tố cùng nhau, do đó có ít nhất $n + 1$ ước số nguyên tố phân biệt theo Bổ đề 2, trái với giả thiết. Vậy phải có vô hạn số nguyên tố. Có thể chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố dạng $4n - 1$ hoặc $6n - 1$, suy ra có vô hạn số nguyên tố. Còn một số chứng minh khác phức tạp hơn nên không trình bày tại đây.

➤ Nhận xét. Ngoài 8 cách giải mà tác giả Nguyễn Việt Hải giới thiệu ở trên, Tòa soạn còn nhận được một cách giải tương tự cách giải 1 trong bài của bạn Nguyễn Thái Bình, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 15 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2018.

BÀI TOÁN 15. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$(x + y)^2 = 5(xy + x + y).$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)



g bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 490, T4.2018.

Bài 20 (IMO 1989). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , ta có thể tìm được một tập gồm n số nguyên liên tiếp sao cho không số nào trong chúng là lũy thừa của một số nguyên tố.

Lời giải. Ta chứng minh rằng tập hợp

$\{(2n+2)!+2; (2n+2)!+3; \dots; (2n+2)!+n+1\}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Ta thấy rằng

$$(2n+2)!+2 = 2 \cdot \left[1 + \frac{(2n+2)!}{2} \right].$$

Từ $\frac{(2n+2)!}{2} \equiv 0 \pmod{2}$, suy ra

$$1 + \frac{(2n+2)!}{2} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Vì vậy $(2n+2)!+2$ không thể là lũy thừa của một số nguyên tố vì nó có một ước chẵn và một ước lẻ. Bây giờ ta xét

$$(2n+2)!+k = k \cdot \left[1 + \frac{(2n+2)!}{k} \right]$$

với $2 \leq k \leq n+1$. Khi đó ta có

$$(2n+2)! \equiv 0 \pmod{k^2} \Rightarrow \frac{(2n+2)!}{k} \equiv 0 \pmod{k}.$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{(2n+2)!}{k} \equiv 1 \pmod{k}.$$

Nếu $(2n+2)!+k$ là lũy thừa của một số nguyên tố thì do $(2n+2)!+k$ chia hết cho k nên nó là một lũy thừa của k . Nhưng điều này không xảy ra vì $1 + \frac{(2n+2)!}{k}$ không là lũy thừa của k . Vậy ta có điều phải chứng minh.

• Ta có thể giải bài này theo cách sau:

Đặt $N = 1 + [(n+1)!]^2$. Ta sẽ chứng minh:

Không có số nào trong n số nguyên liên tiếp: $N+1, N+2, \dots, N+n$ là lũy thừa của một số nguyên tố.

Giả sử ngược lại $\exists k, m \in \mathbb{Z}, k \geq 1; 1 \leq m \leq n$ và số nguyên tố p để $N+m = p^k$.

Ta có: $m+1 \mid (n+1)!$

$$\Rightarrow m+1 \mid [(n+1)!]^2 + (m+1) = N+m = p^k.$$

Do $1 < m+1 < N+m$ nên ta có: $m+1 = p^r$

$$\text{với } 0 < r < k \Rightarrow p^{r+1} \mid p^k = N+m.$$

Mặt khác $p^{r+1} \mid [(n+1)!]^2 = N-1$, do đó

$$p^{r+1} \mid (N+m) - (N-1) = p^r. \text{ Điều này là không thể. Vậy ta có điều phải chứng minh.}$$

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.7.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 23. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \dots + (x+7)^3 = y^3.$$

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: TÌM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ !

(Đề đăng trên TH&TT số 488, tháng 2 năm 2018)

Phân tích. Hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ có đạo hàm tại những điểm $x \neq 0$ và không có đạo hàm tại $x = 0$. Nhưng tại những điểm mà hàm số không có đạo hàm thì hàm số vẫn có thể đạt cực trị, do đó ta cần phải xét tại $x = 0$ hàm số có đạt cực trị hay không! Bạn *Tùng* chỉ tìm cực trị tại những điểm hàm số có đạo hàm nên đã tìm thiếu số điểm cực trị.

Ngoài ra bạn *Tùng* đã lập luận không chặt chẽ ở chỗ chỉ xét $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$, rồi kết luận luôn hàm số đạt cực trị tại $x = 8$ mà không lập bảng biến thiên của hàm số để xét xem y' có đổi dấu khi qua $x = 8$ hay không !

Lời giải đúng. Tập xác định: $\mathbb{R}$

$$y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$y' \text{ không xác định tại } x = 0$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
f'	+		-	+
f	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị.

Vậy ta chọn đáp án C.

Nhận xét. Các bạn sau đã phát hiện và phân tích đúng sai lầm: **Bến Tre:** Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHI VI

GIẢI ĐÚNG CHƯA NHÌ?



Trong tiết học về số phức, Thầy giáo ra đề toán

ĐỀ TOÁN: Giải phương trình sau trên tập hợp số

$$\text{phức } \mathbb{C}: z^3 - (3+i)z^2 + (5+3i)z - 5i = 0.$$

Một học sinh đã giải như sau:

Lời giải. Biến đổi phương trình:

$$z^3 - (3+i)z^2 + (5+3i)z - 5i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 5z - i(z^2 - 3z + 5) = 0 + 0i.$$

Áp dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau ta có:

$$\begin{cases} z^3 - 3z^2 + 5z = 0 \\ z^2 - 3z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 - 3z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i.$$

Theo bạn lời giải trên đúng chưa nhỉ? Cách giải của bạn thế nào !

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)



Math Jokes

Theorem 1: All numbers are equal to zero.

Proof: Suppose that $a = b$. Then $a = b$, so $a^2 = ab$.

By subtracting b^2 from the last equality we get

$a^2 - b^2 = ab - b^2$, hence $(a+b)(a-b) = b(a-b)$, thus $a+b = b$, therefore finally $a = 0$.

Theorem 2: All positive integers are interesting.

Proof: Assume the contrary. Then there is the lowest non-interesting positive integer. But, hey, that's pretty interesting! A contradiction.



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXBGD Việt Nam

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TRONG SỐ NÀY:

1. Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Văn Hiếu - Một số bài toán lý thú áp dụng định lý Pythagore.

3. HOMC

Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Hữu Điển - 15th Hanoi Open Mathematics Competition, Vietnam 2018.

6. Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 trường

THPT chuyên Thái Bình năm học 2017-2018.

10. Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Vĩ Thanh, Hậu

Giang, năm học 2017 - 2018.

11. Diễn đàn dạy - học toán

Mai Văn Năm - Phương pháp tham số hóa trong chứng minh bất đẳng thức.

14. Bạn đọc tìm tòi

Trần Xuân Đáng - Một bài toán có nhiều cách giải.

17. Đáp án hướng dẫn giải đề số 8.

22. Lịch sử toán học

Lê Quốc Hân, Lê Thị Ngọc Thủy - Những điều kỳ lạ xung quanh câu chuyện phát minh ra phép toán lôgarit.

24. Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/492, ..., T12/492, L1/492, L2/492.

26. Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

35. Phương pháp giải toán

Lê Quang Khanh - Phương trình hàm Jensen và phương trình hàm Cauchy trên một đoạn.

42. Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 33.

Bài dịch số 30 - Tiếng Anh qua các bài toán.

43. Nhiều cách giải cho một bài toán

46. Du lịch thế giới qua các bài toán hay

47. Sai lầm ở đâu?

Cao Ngọc Toán - Giải đúng chưa nhỉ?

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

<https://noidinh.nopto.org>



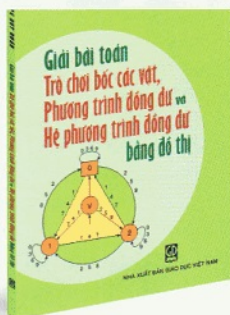
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với

b theo module m . Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chớp lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

• Điện thoại biên tập: 024.35121607

• Điện thoại Fax- phát hành: 024.35121606 <http://toanhocvatuoi trẻ.org>

• Email: toanhocvatuoi vietnam@gmail.com



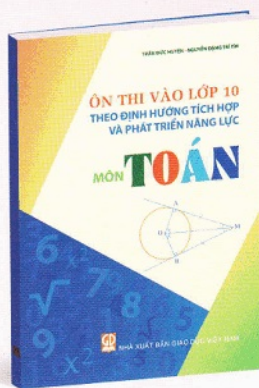
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

của các tác giả: TRẦN ĐỨC HUYỀN và NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

Sách dày 236 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa: 69.000 đồng



Nhằm giúp cho các em học sinh có thể tự ôn luyện và hỗ trợ quý Thầy Cô có thêm tài liệu ôn thi vào lớp 10, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn cuốn “**ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC**”.

Ngoài việc luyện thi vào lớp 10, cuốn sách này cũng đáp ứng yêu cầu cho việc đổi mới dạy - học, đáp ứng yêu cầu được các tiêu chí của bộ sách giáo khoa mới,

theo định hướng tích hợp các môn học, và phát triển năng lực của học sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách gồm 4 chương:

CHƯƠNG 1. NHỮNG CHỦ ĐỀ CƠ BẢN

Bao gồm 12 chủ đề căn bản của chương trình toán lớp 9 hiện hành: Mỗi chủ đề đều có phần tóm tắt lý thuyết, đề toán có hướng dẫn và đề toán tự giải rất tiện cho các em học sinh tự ôn tập và rèn luyện.

CHƯƠNG 2. NHỮNG CHỦ ĐỀ TOÁN ỨNG DỤNG

Chủ đề 13: Những bài toán tích hợp liên môn Lý - Hóa - Sinh.

Chủ đề 14: Những bài toán tỉ lệ phần trăm trong tài chính.

Chủ đề 15: Những bài toán thực tế đo đạc hình học - Các bài toán về địa lí.

CHƯƠNG 3. NHỮNG CHỦ ĐỀ NÂNG CAO

Chủ đề 16: Vận dụng mô hình toán học để giải quyết các vấn đề thực tế.

Chủ đề 17: Toán đại số tổng hợp.

Chủ đề 18: Toán hình học tổng hợp.

CHƯƠNG 4. ĐỀ MẪU THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Gồm 6 đề thi mẫu được biên soạn theo đúng hướng dẫn cấu trúc và ma trận đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh, trong đó một số đề có hướng dẫn giải và các đề còn lại các em học sinh sẽ tự làm.

Để sử dụng tài liệu một cách có hiệu quả các em học sinh cần học đầy đủ các kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, tích cực rèn luyện cách suy nghĩ, tư duy, phân tích, phân biệt, đồng thời tìm mối liên hệ với thực tế đối với kiến thức đã học.

Chúng tôi hi vọng tài liệu này sẽ giúp ích cho quý thầy cô và các em học sinh trong việc ôn tập, luyện thi vào lớp 10 theo cấu trúc đề mới và rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp xây dựng để những lần tái bản sau tài liệu sẽ được ngày càng hoàn thiện hơn.

Địa chỉ phát hành:

- Công ty CP Sách và Thiết bị giáo dục Miền Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh, ĐT: (028) 38358423
- Các Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Tỉnh (Thành phố).
- Mua sách trực tuyến tại: www.sobee.vn

ISSN: 0866-8035
Chi số: 12884
Mã số: 8BT06M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 06 năm 2018

<https://tieuuhoat16.org>
Mười lăm nghìn đồng