



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2018
Số 488

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

Xuân Mậu Tuất
2018

Chúc Mừng Năm Mới



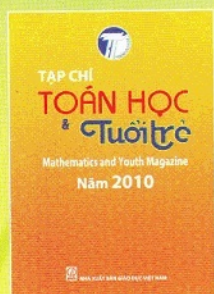


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

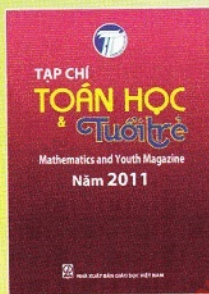
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đông tập

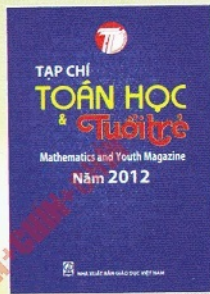
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



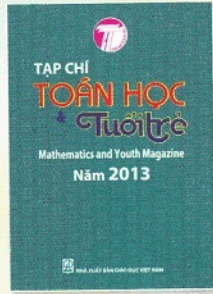
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



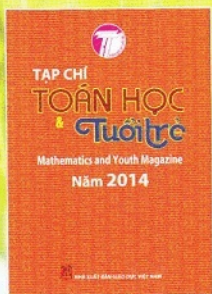
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



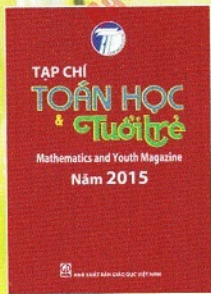
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



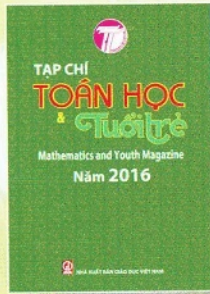
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



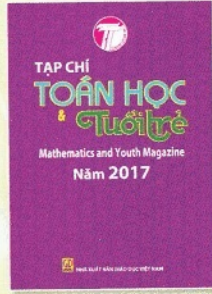
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com



MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoàng Xuân, Hoàng Hòa, Thanh Hóa)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN CHÚ Ý

1. Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.
2. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ số tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
3. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.
4. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n + 1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n + 2$ hoặc $4n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
5. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n + 1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).
6. Số chính phương tận cùng bằng 1 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.
Số chính phương tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
7. Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.
Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25.
Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1. a) Chứng minh rằng số N sau đây là số chính phương: $N = \underbrace{111\dots 1}_{1995 \text{ số } 1} \underbrace{0\dots 0}_{1994 \text{ số } 0} 5 + 1$.

(Đề thi chọn HSG Toán Quốc gia năm học 1994 - 1995, Bảng A).

b) Chứng minh tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

Lời giải. a) Ta có:

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{1995} - 1}{9} \cdot (10^{1995} + 5) + 1 = \frac{(10^{1995})^2 + 4 \cdot 10^{1995} - 5}{9} + 1 \\ &= \frac{(10^{1995})^2 + 4 \cdot 10^{1995} + 4}{9} = \left(\frac{10^{1995} + 2}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Mà $10^{1995} + 2 \equiv 2 \pmod{3}$ nên N là số chính phương.

b) Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp đó là $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in \mathbb{N}$). Ta có

$$\begin{aligned} K &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1. \end{aligned}$$

Đặt $t = n^2 + 3n$ ($t \in \mathbb{N}$) thì

$$K = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương. $\square$

Bài 2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn

$2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng

$2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

(Câu III.2 - Đề thi vào lớp 10, THPT chuyên, TP. Hồ Nội, năm học 2016 - 2017).

Lời giải. Hiển nhiên $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên

mà $12n^2 + 1$ là số lẻ nên tồn tại số tự nhiên k mà

$$\begin{aligned} 12n^2 + 1 &= (2k+1)^2 \Leftrightarrow 12n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Leftrightarrow k(k+1) = 3n^2. \end{aligned}$$

Vì $(k; k+1) = 1$ nên xảy ra 2 trường hợp:

$$\bullet \text{ TH1: } \begin{cases} k = a^2 \\ k+1 = 3b^2 \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^2 - 3b^2 = -1$$

$$\equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ (vô lý).}$$

$$\bullet \text{ TH2: } \begin{cases} k = 3a^2 \\ k+1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2(b^2 - 1) = 3n^2$$

$$\Rightarrow 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2 + 2\sqrt{4b^4 - 4b^2 + 1}$$

$$= 2 + 2(2b^2 - 1) = 4b^2.$$

Vì $4b^2 = (2b)^2$ nên $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương. $\square$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì: $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Lời giải. Ta có:

$$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4.$$

Đặt $t = x^2 + 5xy + 5y^2$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4$$

$$= t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2.$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}.$$

Vậy A là số chính phương. $\square$

Bài 4. Cho $P = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ với $k \in \mathbb{N}^+$. Chứng minh rằng $4P + 1$ là số chính phương.

Lời giải. Ta có: $m(m+1)(m+2) = \frac{1}{4}m(m+1)(m+2).4$

$$= \frac{1}{4}m(m+1)(m+2) \cdot [(m+3) - (m-1)]$$

$$= \frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3) - \frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m-1).$$

Cho $m = 1, 2, 3, \dots, k$, ta có

$$4P = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots +$$

$$+ k(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2)(k-1)$$

$$= k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$\Rightarrow 4P + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$. Theo kết quả bài 1 thì $k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$ là số chính phương. Vậy $4P + 1$ là số chính phương. $\square$

Bài 5. Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ... Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{44 \dots 488 \dots 89}{n \text{ chữ số } 4 \quad n-1 \text{ chữ số } 8} = \frac{44 \dots 48 \dots 8+1}{n \text{ chữ số } 4 \quad n \text{ chữ số } 8}$$

$$= \frac{44 \dots 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 11 \dots 1+1}{n \text{ chữ số } 4 \quad n \text{ chữ số } 1}$$

$$= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2.$$

Ta thấy $2 \cdot 10^n + 1 = 2 \underbrace{00 \dots 01}_{n-1 \text{ chữ số } 0}$ có tổng các chữ số

chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

$$\Rightarrow \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \in \mathbb{Z} \text{ hay các số có dạng}$$

$44 \dots 4488 \dots 89$ là số chính phương. $\square$

Bài 6. Chứng minh rằng các số sau là số chính phương:

a) $A = \frac{224 \underbrace{99 \dots 9}_{n-2 \text{ chữ số } 9} \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ chữ số } 0}}{9}$

b) $B = \frac{11 \dots 1 \underbrace{55 \dots 5}_{n \text{ chữ số } 1} \underbrace{56 \dots 6}_{n-1 \text{ chữ số } 5}}{9}$

Lời giải. a) $A = 224 \cdot 10^{2n} + 99 \dots 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} + 9$

$$= 224 \cdot 10^{2n} + (10^{n-2} - 1) \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} + 9$$

$$= 224 \cdot 10^{2n} + 10^{2n} - 10^{n-2} + 10^{n-1} + 9$$

$$= 225 \cdot 10^{2n} - 90 \cdot 10^n + 9 = (15 \cdot 10^n - 3)^2.$$

Suy ra A là số chính phương. $\square$

b) $B = \frac{11 \dots 1 \underbrace{555 \dots 5}_{n \text{ chữ số } 5} + 1}{9} = \frac{11 \dots 1}{n \text{ chữ số } 1} \cdot 10^n + 5 \cdot \frac{11 \dots 1}{n \text{ chữ số } 1} + 1$

$$= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 5 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2.$$

Vậy B là số chính phương. $\square$

Bài 7. Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Lời giải. Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Ta có:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2).$$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó

$n^2 + 2$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow 5(n^2 + 2)$ không là số chính phương hay tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương. $\square$

Bài 8. Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 &= n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) \\ &= n^2[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)] = n^2(n+1)(n^3 - n^2 + 2) \\ &= n^2(n+1)[(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] = n^2(n+1)(n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$.

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ và do đó số có dạng đã cho không là số chính phương. $\square$

Bài 9. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là một số chính phương.

Lời giải. Vì a và b lẻ nên $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$

$$\begin{aligned} (k, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2m+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2. \quad (t \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Không có số chính phương nào có dạng $4t + 2$ ($t \in \mathbb{N}$) do đó $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương. $\square$

Bài 10. Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Lời giải. Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p:2$ và p không chia hết cho 4. (1)

• Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$). Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$\Rightarrow p+1 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k+1):4 \text{ mâu thuẫn với (1)}$$

$$\Rightarrow p+1 \text{ không là số chính phương.}$$

• $p = 2.3.5 \dots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$. Không có số chính phương nào có dạng $3k+2 \Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương. $\square$

Bài 11. Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2017$. Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N-1$, $2N$ và $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

Lời giải. a) $2N-1 = 2.1.3.5.7 \dots 2017 - 1$.

Do $2N:3$ nên $2N-1$ không chia hết cho 3 và $2N-1 = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2N-1$ không là số chính phương.

b) $2N = 2.1.3.5.7 \dots 2017$. Vì N lẻ nên N không chia hết cho 2 và $2N:2$ nhưng $2N$ không chia hết cho 4. Mà $2N$ chẵn nên $2N$ chia cho 4 không có dư là 1 $\Rightarrow 2N$ không là số chính phương.

c) $2N+1 = 2.1.3.5.7 \dots 2017 + 1$.

$2N+1$ lẻ nên $2N+1$ không chia hết cho 4. Mà $2N$ không chia hết cho 4 nên $2N+1$ chia cho 4 không có dư là 1 $\Rightarrow 2N+1$ không là số chính phương. $\square$

Bài 12. Cho $a = \frac{11 \dots 1}{2018 \text{ chữ số } 1}$; $b = \frac{100 \dots 05}{2017 \text{ chữ số } 0}$.

Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Lời giải. Cách 1. Ta có: $a = \frac{11 \dots 1}{2018 \text{ chữ số } 1} = \frac{10^{2018} - 1}{9}$;

$$b = \frac{100 \dots 05}{2017 \text{ chữ số } 0} = \frac{100 \dots 0}{2018 \text{ chữ số } 0} + 5 = 10^{2018} + 5$$

$$\Rightarrow ab+1 = \frac{(10^{2018} - 1)(10^{2018} + 5)}{9} + 1 = \left(\frac{10^{2018} + 2}{3} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{\left(\frac{10^{2018} + 2}{3} \right)^2} = \frac{10^{2018} + 2}{3}.$$

Mà $10^{2018} + 2 = \frac{100 \dots 02}{2017 \text{ chữ số } 0} : 3$ nên $\frac{10^{2018} + 2}{3} \in \mathbb{N}$,

hay $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2. $b = \frac{100 \dots 05}{2017 \text{ chữ số } 0} = 1 \frac{00 \dots 0}{2018 \text{ chữ số } 0} - 1 + 6$

$$= 99 \dots 9 + 6 = 9a + 6$$

2018 chữ số 9

$$\Rightarrow ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = (3a + 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab + 1} = \sqrt{(3a + 1)^2} = 3a + 1 \in \mathbb{N}.$$

Dạng 2. Tìm giá trị của biến để biểu thức là số chính phương

Bài 1. Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương:

- a) $n^2 + 2n + 12$; b) $n(n + 3)$;
c) $13n + 3$; d) $n^2 + n + 1589$.

Lời giải.

a) Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2$

$$\Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11.$$

Nhận xét rằng $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương nên ta có thể viết

$$(k + n + 1)(k - n - 1) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

b) Đặt $n(n + 3) = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n^2 + 3n = a^2$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2 \Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 9 = 4a^2 \Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9.$$

Nhận xét rằng $2n + 3 + 2a \geq 2n + 3 - 2a$ và

$2n + 3 + 2a$ là số nguyên dương, nên có thể viết

$$(2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9 \Rightarrow 1 = 3 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 3 \\ 2n + 3 - 2a = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 2$ và $n = 1$ hoặc $a = 0$ và $n = 0$.

c) Đặt $13n + 3 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 13(n - 1) = y^2 - 16$

$$\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y - 4) \Rightarrow (y + 4)(y - 4) : 13$$

mà 13 là số nguyên tố nên $y + 4 : 13$ hoặc

$$y - 4 : 13 \Rightarrow y = 13k \pm 4 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k(13k \pm 8)$$

$$\Rightarrow n = 13k^2 \pm 8k + 1. \text{ Vậy } n = 13k^2 \pm 8k + 1, k \in \mathbb{N} \text{ thì}$$

$13n + 3$ là số chính phương.

d) Đặt $n^2 + n + 1589 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 + 6355 = 4m^2$$

$$\Rightarrow (2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.$$

Nhận xét rằng $2m + 2n + 1 > 2m - 2n - 1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết

$$(2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$$

Vậy n nhận các giá trị sau: 1588; 316; 43; 28. $\square$

Bài 2. Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Lời giải. Với $n = 1$ thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương.

Với $n = 2$ thì $1! + 2! = 3$ không là số chính phương.

Với $n = 3$ thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2$ là số chính phương.

Với $n \geq 4$ ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33$, còn $5!; 6!; \dots; n!$ đều tận cùng bởi 0 do đó $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương. Vậy có 2 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài là $n = 1; n = 3$. $\square$

Bài 3. Có hay không số tự nhiên n để $2018 + n^2$ là số chính phương?

Lời giải. Giả sử $2018 + n^2$ là số chính phương thì

$$2018 + n^2 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}). \text{ Từ đó suy ra}$$

$$m^2 - n^2 = 2018 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2018.$$

Như vậy trong hai số $m + n$ và $m - n$ phải có ít nhất một số chẵn. (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m$ nên suy ra hai số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn

$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$. Nhưng 2018 không chia hết cho 4, do đó điều giả sử là sai. Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018 + n^2$ là số chính phương. $\square$

Bài 4. Tìm chữ số x với $x \geq 2$ sao cho

$$\overline{x(x-1)}, \overline{x(x-1)}, \overline{(x-2)xx(x-1)}.$$

Lời giải. Đẳng thức đã cho được viết lại như sau:

$$[x(x-1)]^2 = (x-2)xx(x-1).$$

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương. Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ

số: 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên x chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số: 1; 2; 5; 6; 7; 0. (1)

Do x là chữ số nên $x \leq 9$, kết hợp với điều kiện đề bài ta có $2 < x \leq 9$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra x chỉ có thể nhận một trong các giá trị: 5; 6; 7. Bằng phép thử ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn đề bài, khi đó: $76^2 = 5776$. $\square$

Bài 5. Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n - 1$ và $3n + 1$ đều là các số chính phương.

Lời giải. Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n + 1 \leq 199$. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84. Ta có số $3n + 1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương. Vậy $n = 40$. $\square$

Bài 6. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho $n - 1$ và $2n + 1$ đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Lời giải. Vì $n + 1$ và $2n + 1$ là các số chính phương nên đặt $n + 1 = k^2$, $2n + 1 = m^2$ ($k, m \in \mathbb{N}$). Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a + 1$ ($a \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow m^2 = 4a(a + 1) + 1$
 $\Rightarrow n = \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{4a(a + 1)}{2} = 2a(a + 1)$
 $\Rightarrow n$ chẵn $\Rightarrow n + 1$ lẻ $\Rightarrow k$ lẻ. Đặt $k = 2b + 1$ ($b \in \mathbb{N}$)
 $\Rightarrow k^2 = 4b(b + 1) + 1 \Rightarrow n = 4b(b + 1) \Rightarrow n : 8$. (1)

Ta có: $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3

dư 0 hoặc 1. Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod{3}$ thì

$k^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $m^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$\Rightarrow (m^2 - k^2) : 3$ hay $(2n + 1) - (n + 1) : 3 \Rightarrow n : 3$. (2)

Mà $(8; 3) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra $n : 24$ $\square$

Bài 7. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 - 2^{17} - 2^n$ là số chính phương.

Lời giải. Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) thì

$$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$$

$\Rightarrow 2^p \cdot 2^q = (a + 48)(a - 48)$; $p, q \in \mathbb{N}$; $p + q = n$; $p > q$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p - q = 2 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow n = 12.$$

Thử lại ta có: $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 80^2$ $\square$

Dạng 3. Tìm số chính phương

Bài 1. Tìm tất cả các số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 - 8x$ là các số chính phương (Câu 1b. Đề thi chọn HSG Toán 9 TP. Hà Nội, năm học 2016-2017).

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y$. Khi đó ta có:

$$x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

Vì $x^2 + 8y$ là số chính phương nên sẽ nhận các giá trị là một trong các số: $(x + 1)^2, (x + 2)^2, (x + 3)^2$.

Do đó:

• $x^2 + 8y = (x + 1)^2 \Rightarrow 8y = 2x + 1$, không xảy ra vì $2x + 1$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

• $x^2 + 8y = (x + 3)^2 \Rightarrow 8y = 6x + 9$, không xảy ra vì $6x + 9$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

• $x^2 + 8y = (x + 2)^2 \Rightarrow 8y = 4x + 4 \Rightarrow x = 2y - 1$.

Do $y^2 - 8x$ là số chính phương nên $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

– Với $y = 1$, ta có $x = 1$ và cặp số $(1, 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

– Xét $y \geq 2$. Ta có:

$$y^2 + 16y - 8 = (y + 3)^2 + (10y - 17) > (y + 3)^2 \text{ và}$$

$$y^2 + 16y - 8 < (y + 8)^2 - 72 < (y + 8)^2. \text{ Do đó để}$$

$y^2 + 16y - 8$ là số chính phương thì:

$$y^2 + 16y - 8 \in \{(y + 4)^2, (y + 5)^2, (y + 6)^2, (y + 7)^2\}.$$

Giải trực tiếp các trường hợp ta có: $y = 3$ (tương ứng $x = 5$) hoặc $y = 11$; (tương ứng $x = 21$) và thử lại thấy thỏa mãn. Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn đề bài là: $(1, 1)$; $(5, 3)$; $(3, 5)$; $(21, 11)$ và $(11, 21)$.

Bài 2. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau 1 đơn vị.

Lời giải. Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $k \in \mathbb{N}$, $32 \leq k < 100$. Suy ra

$101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k-10)(k+10) \Rightarrow (k+10):101$
 hoặc $(k-10):101$. Mà $(k-10):101 = 1$ do đó ta suy ra $k+10:101$.

Vì $32 \leq k < 100$ nên $42 \leq k+10 < 110 \Rightarrow k+10 = 101$
 $\Rightarrow k = 91 \Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$. $\square$

Bài 3. *Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.*

Lời giải. Gọi số chính phương phải tìm là $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$. Ta có
 $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot a0b = 11 \cdot (99a + a + b)$ (1)

Vì $\overline{aabb}$ là số chính phương nên $(a+b):11$. Mà $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ nên $1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b = 11$.

Thay $a+b=11$ vào (1) được: $n^2 = 11^2(9a+1)$, do đó $9a+1$ là số chính phương. Bảng phép thử với $a = 1; 2; \dots; 9$ ta thấy chỉ có $a = 7$ thỏa mãn $\Rightarrow b = 4$. Vậy số cần tìm là 7744. $\square$

Bài 4. *Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.*

Lời giải. Gọi số chính phương đó là $\overline{abcd}$. Vì $\overline{abcd}$ vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$, với $x, y \in \mathbb{N}$.

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương. Ta có: $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và do y là số chính phương nên: $y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$. $\square$

Bài 5. *Tìm một số chính phương A gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của A là một số có tổng các chữ số là một số chính phương.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $A = \overline{abcd}$ với a, b, c, d nguyên và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$.

Từ $\overline{abcd}$ chính phương nên $d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Do d là nguyên tố nên $d = 5$.

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$.

k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 nên k tận cùng bằng 5. Tổng các chữ số của k là một số chính phương nên $k = 45$. Khi đó $\overline{abcd} = 2025$. Vậy số phải tìm là $A = 2025$. $\square$

Bài 6. *Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$. Theo giả thiết ta có:

$$(\overline{ab})^2 = (a+b)^3 \Rightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3$$

$\Rightarrow \overline{ab}$ là một lập phương và $a+b$ là một số chính phương. Đặt $\overline{ab} = t^3 (t \in \mathbb{N}), a+b = l^2 (l \in \mathbb{N})$.

Vì $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$.

• Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a+b = 9$ là số chính phương.

• Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a+b = 10$ không là số chính phương (loại). Vậy số cần tìm là $\overline{ab} = 27$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

$$A = \frac{11 \dots 1}{2n \text{ chữ số } 1} + \frac{44 \dots 4}{n \text{ chữ số } 4} + 1;$$

$$B = \frac{11 \dots 1}{2n \text{ chữ số } 1} + \frac{11 \dots 1}{n-1 \text{ chữ số } 1} + \frac{66 \dots 6}{n \text{ chữ số } 6} + 8;$$

$$C = \frac{44 \dots 4}{2n \text{ chữ số } 4} + \frac{22 \dots 2}{n-1 \text{ chữ số } 2} + \frac{88 \dots 8}{n \text{ chữ số } 8} + 7.$$

2. Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

3. Tìm a để các số sau là những số chính phương:

$$a) a^2 + a + 43; \quad b) a^2 + 81; \quad c) a^2 + 31 + 1984.$$

4. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để các số sau là số chính phương:

$$a) n^2 + 2014; \quad c) n^2 + 4n + 97;$$

$$b) (23-n)(23+n); \quad d) 2^n + 15.$$

5. Cho một số chính phương có 4 chữ số. Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số đó ta cũng được một số chính phương. Tìm số chính phương ban đầu.

6. Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

7. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Hãy tìm các số A và B .

8. Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng các bình phương của chúng là một số có 4 chữ số giống nhau.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

LỚP 9 TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. a) Ta có $P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} c - \frac{b^2}{4} = -1 \\ -\frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 & (1) \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0 & (2) \end{cases}$ ĐK: $x \geq 0$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow (x-y)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y^2=0 \end{cases}$$

TH1: $x+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$ không thỏa mãn hệ.

TH2: $x-y=0 \Rightarrow x=y$, thế vào PT (2) ta được:

$$\begin{aligned} 2(x^2+1) - 3\sqrt{x}(x+1) - x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1) &= 0. \end{aligned}$$

Hệ PT có nghiệm: $(4; 4)$ và $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 2. a) ĐK: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $a = \sqrt{1+x}$, $b = \sqrt{1-x}$ ($a, b \geq 0$). Ta có:

$$2a^2 + b^2 - 1 = 3ab + a \Leftrightarrow 2a^2 - (3b+1)a + b^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b+1 \text{ hoặc } a = \frac{b-1}{2}.$$

Với $a = b+1$ thì

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2x-1 = 2\sqrt{1-x} \quad \left(\text{ĐK: } x \geq \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 - 4x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Với $a = \frac{b-1}{2}$ thì

$$\sqrt{1+x} = \frac{\sqrt{1-x}-1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}+1 = \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x} = -5x-4 \quad (\text{ĐK: } x \leq -\frac{4}{5})$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{24}{25} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $x = -\frac{24}{25}$ là các nghiệm của PT.

b) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+b)(c+a)}} \\ &= 2a\sqrt{\frac{1}{(a+b)(a+c)}} + 2b\sqrt{\frac{1}{4(b+c)(b+a)}} + \\ &\quad + 2c\sqrt{\frac{1}{4(c+b)(c+a)}} \\ &\leq a\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) + b\left(\frac{1}{4(b+c)} + \frac{1}{b+a}\right) \\ &\quad + c\left(\frac{1}{4(c+b)} + \frac{1}{c+a}\right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $\max P = \frac{9}{4}$ khi $b=c=\frac{a}{7} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Câu 3. Kẻ $CK \perp AB$ ($K \in AB$) thì $\triangle AKC$ vuông cân tại K . Đặt $AB=x$, $AK=y$ ($x, y > 0$), ta có:

$$BK^2 + KC^2 = BC^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + 2y^2 = 25. \quad (1)$$

Từ $\triangle BHA \sim \triangle BKC$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{5} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$(x; y) = (\sqrt{5}; \sqrt{5})$ hoặc

$$\left(\sqrt{10}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right). \text{ Vậy } AB = \sqrt{5} \text{ cm, } AC = \sqrt{10} \text{ cm,}$$

hoặc $AB = \sqrt{10} \text{ cm, } AC = \sqrt{5} \text{ cm.}$

Câu 4. a) Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{AKC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ do đó tứ giác $ADCK$ nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$. Các tứ giác $KIPC$, $KIAQ$ nội tiếp suy ra $\widehat{CIP} = \widehat{CKP}$ và $\widehat{AIQ} = \widehat{AKQ}$ (1). Từ các tứ giác nội tiếp $ABCK$, $BPKQ$ ta có: $\widehat{AKC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{QKP}$ suy ra $\widehat{CKP} = \widehat{AKQ}$ (2). Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{CIP} = \widehat{AIQ} \Rightarrow P, I, Q$ thẳng hàng.

b) Gọi M là giao điểm của AH với (O) ($M \neq A$) và $N = AH \cap PQ$, khi đó $MN \parallel KP$. Bốn điểm B, Q, K, P thuộc một đường tròn và A, B, M, K thuộc $(O) \Rightarrow \widehat{QBK} = \widehat{AMK} = \widehat{QPK} \Rightarrow MNKP$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MNKP$ là hình thang cân $\Rightarrow KN = PM$. 

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016 - 2017

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 điểm) Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Tính $a^7 + b^7$.

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có đồ thị (d) . Lập phương trình đường thẳng (d) , biết (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB + OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$.

Câu 3. (3 điểm) Giải phương trình sau:

$$4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x+1} - 3x.$$

Câu 4. (3 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4(5x^2 - 17x + 6) = 6 - 15x \end{cases}$$

Câu 5. (6 điểm) Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$).

Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB tại C . Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM , BM theo thứ tự ở D , H .

a) Chứng minh rằng: $CA = CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O) , F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O) . Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.

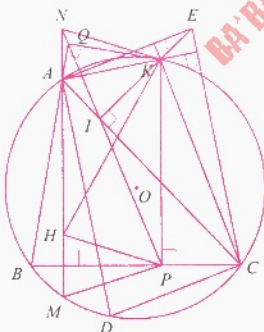
c) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$.

Câu 6. (2 điểm) Cho ba số $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $32abc = 18(a+b+c) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{\sqrt{c^2-1}}{c}.$$

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên) *Giới thiệu*



Mặt khác $PH = PM \Rightarrow \widehat{PHM} = \widehat{PMH} = \widehat{KNM} \Rightarrow KN \parallel PH \Rightarrow HPMN$ là hình bình hành $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5. a) Không mất tính tổng quát giả sử

$m < n < p < q$. Nếu $m \geq 3$ thì

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mpq} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} < 1.$$

Vậy $m = 2$ và khi đó ta có

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Nếu $n \geq 5$ thì

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} < \frac{1}{2}.$$

Vậy $n = 3$ và (1) trở thành

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{6pq} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (p-6)(q-6) = 37 \Rightarrow p = 7; q = 43.$$

Vậy $(m; n; p; q) = (2; 3; 7; 43)$ và các hoán vị của nó.

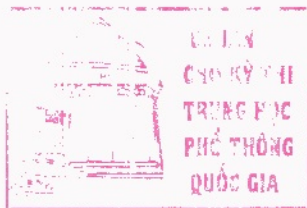
b) Các số được viết trên bảng là: 1; 5; 11; ... Các số đầu tiên của bảng có dạng $3m + 2$ (trừ số 1) với $m \in \mathbb{N}$. Nếu sử dụng số 1 để viết thì số mới sẽ là: $3m + 2 + 1 + (3m + 2) \cdot 1 = 6m + 5 = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Nếu không sử dụng số 1 để viết thì số mới sẽ là:

$$3m + 2 + 3n + 2 + (3m + 2)(3n + 2) = 9mn + 9m + 9n + 8 = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ (đpcm).}$$

MAI XUÂN VINH

(Sở GD - ĐT Nghệ An) *Giới thiệu*



GIẢI TOÁN SỐ PHỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ PHẪNG

HUỲNH VĂN MINH

(GV PTDNT Sa Thầy, Kon Tum)

I. MỞ ĐẦU

Mỗi số phức $z = a + bi$, với a, b là số thực, i là đơn vị ảo, đều được biểu diễn bởi một điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) là $M(x; y)$ và ngược lại.

Ta nói điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z . Do đó về mặt nguyên tắc, khi bài toán số phức được diễn đạt bằng ngôn ngữ tọa độ thì ta luôn giải được bằng phương pháp tọa độ (hình học giải tích trong mặt phẳng). Sau đây là một vài ví dụ thể hiện khẳng định này.

II. NỘI DUNG

*** Ví dụ 1.** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 6 - 13i| = |z - 4 - 5i|$, tìm số phức môđun nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 6 + 13i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(6; 13)$, số $z_2 = -4 + 5i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(-4; 5)$. Khi đó ta có $|z - 6 - 13i| = |z - 4 - 5i| \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra điểm M thuộc đường thẳng Δ là trung trực của đoạn thẳng AB nên đường thẳng Δ có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 9 - 5t \end{cases}$$

Môđun của số phức z nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, OM nhỏ nhất khi $OM \perp \Delta$. Điểm M thuộc Δ nên $M(1 + 4m; 9 - 5m)$, vector $\overrightarrow{OM} = (1 + 4m; 9 - 5m)$, vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = (4; -5)$. Từ điều kiện $OM \perp \Delta$ suy ra:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 41m - 41 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow M(5; 4).$$

Số phức thỏa mãn đề bài là $z = 5 + 4i$. $\square$

*** Ví dụ 2.** Trong tập các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 10 - 8i| = 4$, tìm số phức môđun nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 10 + 8i$ có điểm biểu diễn hình học là $I(10; 8)$.

Ta có $|z - 10 - 8i| = \sqrt{41} \Leftrightarrow MI = \sqrt{41}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $r = \sqrt{41}$, phương trình (I, r) là: $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 41$.

Số phức z có môđun nhỏ nhất khi và chỉ khi $\{M = OI \cap (I, r)\}$. Phương trình của đường thẳng OI là:

$$OI: \begin{cases} x = 10t \\ y = 8t \end{cases}, \text{ thay vào phương trình đường tròn}$$

$$(I, r) \text{ ta được: } 164(t - 1)^2 = 41 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có hai điểm là $M_1(5; 4)$ và $M_2(15; 12)$. Với điểm $M_1(5; 4)$ ta có $\overrightarrow{IM_1} \uparrow \uparrow \overrightarrow{IO}$, với điểm $M_2(15; 12)$ ta có $\overrightarrow{IM_2} \downarrow \downarrow \overrightarrow{IO}$, chứng tỏ số phức thỏa mãn đề bài là $z = 5 + 4i$. $\square$

*** Ví dụ 3.** Trong tập các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 2i| = 5$, tìm số phức môđun nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = -5 - 2i$ có điểm biểu diễn hình học là $I(-5; -2)$, số $z_2 = 4 + 10i$ có điểm biểu diễn hình học là $C(4; 10)$. Ta có $|z + 5 + 2i| = 5 \Leftrightarrow MI = 5$, suy ra điểm M thuộc

đường tròn tâm I, bán kính $r = 5$, đường tròn (I, r) có phương trình:

$$(x+5)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Số phức z có môđun lớn nhất khi

$\begin{cases} M = CI \cap (I, r) \\ \overline{IM} \uparrow \downarrow \overline{IC} \end{cases}$. Phương trình của đường thẳng

$CI: \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$, thay vào phương trình đường

tròn (I, r) ta được: $25t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -1$.

Ta có hai điểm là $M_1(-2; 2)$ và $M_2(-8; -6)$. Với điểm $M_1(-2; 2)$ ta có $\overline{IM}_1 \uparrow \downarrow \overline{IC}$, với điểm $M_2(-8; -6)$ ta có $\overline{IM}_2 \uparrow \downarrow \overline{IC}$, chứng tỏ số phức thỏa mãn đề bài là $z = -8 - 6i$. $\square$

*** Thí dụ 4.** Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 6i| = |z + 5 - 4i|$, tìm số z sao cho môđun $|z - 6 + 3i|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 1 - 6i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(1; -6)$, số $z_2 = -5 + 4i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(-5; 4)$. Khi đó ta có: $|z - 1 + 6i| = |z + 5 - 4i| \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra điểm M thuộc đường thẳng Δ là trung trực của đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$.

Gọi $C(6; -3)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức $z_3 = 6 - 3i$, khi đó ta có $|z - 6 + 3i| = MC$.

Số $z - 6 + 3i$ có môđun nhỏ nhất khi MC ngắn nhất, tức là điểm M là hình chiếu vuông góc của điểm C trên đường thẳng Δ .

Điểm M thuộc Δ nên $M(-2 + 5m; -1 + 3m)$, vector $\overline{CM} = (-8 + 5m; 2 + 3m)$, vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overline{u_\Delta} = (5; 3)$. Từ điều kiện $CM \perp \Delta$ ta có:

$$\overline{CM} \cdot \overline{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 34m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow M(3; 2).$$

Số phức thỏa mãn đề bài là $z = 3 + 2i$. $\square$

*** Thí dụ 5.** Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 9 - 10i| = |z + 1 - 4i|$, tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 9 + 10i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(9; 10)$, số $z_2 = -1 + 4i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(-1; 4)$. Khi đó ta có:

$$|z - 9 - 10i| = |z + 1 - 4i| \Leftrightarrow MA = MB.$$

Suy ra điểm M thuộc đường thẳng Δ là trung trực của đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}$.

Gọi $C(2; -1)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức $z_3 = 2 - i$, khi đó ta có $|z - 2 + i| = MC$.

Số $z - 2 + i$ có môđun nhỏ nhất khi MC ngắn nhất, tức là điểm M là hình chiếu vuông góc của điểm C trên đường thẳng Δ . Điểm M thuộc Δ nên tọa độ của $M(4 + 3m; 7 - 5m)$, vector $\overline{CM} = (2 + 3m; 8 - 5m)$, vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overline{u_\Delta} = (3; -5)$. Giải điều kiện:

$$CM \perp \Delta \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 34m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow M(7; 2).$$

Suy ra $\min|z - 2 + i| = \sqrt{34}$. $\square$

Cách tính khác

Ta có $\min|z - 2 + i| = d(C, \Delta)$. Phương trình đường thẳng $\Delta: 5x + 3y - 41 = 0$, khoảng cách

$$d(C, \Delta) = \frac{|5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 41|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \sqrt{34}. \quad \square$$

*** Thí dụ 6.** Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 10i| = |z - 1|$, tìm số phức z có tổng môđun $|z - 6 + 3i| + |z + 10 - i|$ nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 5 + 10i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(5; 10)$, số $z_2 = 1$ có điểm biểu diễn hình học là $B(1; 0)$. Ta có: $|z - 5 - 10i| = |z - 1| \Leftrightarrow MA = MB$. Tức là điểm M thuộc trung trực Δ của đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $\Delta: 3x - 5y + 1 = 0$.

Gọi số phức $z_3 = 6 - 3i$ có điểm biểu diễn hình học là $C(6; -3)$, $z_4 = -10 + i$ có điểm biểu diễn hình học là $D(-10; 1)$. Khi đó

$$|z - 6 + 3i| + |z + 10 - i| = MC + MD.$$

Đặt $f(M) = f(x; y) = 3x - 5y + 1$. Ta có $f(C) = 34$, $f(D) = -34$. Suy ra hai điểm C, D thuộc về hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng Δ . Suy ra điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng CD và đường thẳng Δ .

Phương trình đường thẳng $CD: x + 4y + 6 = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$ ta có nghiệm là $(-2; -1)$. Số phức thỏa mãn đề bài là $z = -2 - i$. $\square$

*** Ví dụ 7. Tìm số phức z thỏa mãn**

$$\begin{cases} |z - 14 - 7i| = |z - 8 + 7i| \\ |z + 16i| = |z - 10 + 12i| \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$. số $z_1 = 14 + 7i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(14; 7)$, số $z_2 = 8 - 7i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(8; -7)$, số $z_3 = -16i$ có điểm biểu diễn hình học là $C(0; -16)$, số $z_4 = 10 - 12i$ có điểm biểu diễn hình học là $D(10; -12)$. Ta có:

$$|z - 14 - 7i| = |z - 8 + 7i| \Leftrightarrow MA = MB.$$

Suy ra điểm M thuộc trung trực a của đoạn thẳng AB . Phương trình đường thẳng a là:

$$3x + 7y - 33 = 0.$$

Ta có: $|z + 16i| = |z - 10 + 12i| \Leftrightarrow MC = MD$. Suy ra điểm M thuộc trung trực b của đoạn thẳng CD . Phương trình đường thẳng $b: 5x + 2y + 3 = 0$. Giải

hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 7y - 33 = 0 \\ 5x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ được $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$.

Số phức thỏa mãn đề bài là $z = -3 + 6i$. $\square$

*** Ví dụ 8. Tìm số phức z thỏa mãn**

$$\begin{cases} |z - 13 - 6i| = |z - 3 - 12i| \\ |z - 7 + 4i| = \sqrt{34} \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 13 + 6i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(13; 6)$, số $z_2 = 3 + 12i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(3; 12)$, số $z_3 = 7 - 4i$ có điểm biểu diễn hình học là $I(7; -4)$. Ta có: $|z - 13 - 6i| = |z - 3 - 12i| \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra điểm M thuộc trung trực a của đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $a: \begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 9 + 5t \end{cases}$.

Ta có: $|z - 7 + 4i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow IM = \sqrt{34}$. Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm I , có bán kính $r = \sqrt{34}$. Phương trình đường tròn (I, r) :

$$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 34.$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 9 + 5t \\ (x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 34 \end{cases}$, suy

ra: $34t^2 + 136t + 136 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(2; -1)$.

Số phức thỏa mãn đề bài là $z = 2 - i$. $\square$

*** Ví dụ 9. Tìm số phức z thỏa mãn**

$$\begin{cases} |z - 14 + 5i| = |z - 10 - 5i| \\ |z - 2 + 4i| = \sqrt{29} \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 14 - 5i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(14; -5)$, số $z_2 = 10 + 5i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(10; 5)$, số $z_3 = 2 - 4i$ có điểm biểu diễn hình học là $I(2; -4)$. Ta có: $|z - 14 + 5i| = |z - 10 - 5i| \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra điểm M thuộc trung trực a của đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $a: \begin{cases} x = 12 + 5t \\ y = 2t \end{cases}$.

Ta có: $|z - 2 + 4i| = \sqrt{29} \Leftrightarrow IM = \sqrt{29}$. Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm I , có bán kính $r = \sqrt{29}$. Phương trình đường tròn (I, r) :

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 29.$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x = 12 + 5t \\ y = 2t \end{cases}, \text{ suy ra: } \begin{cases} (x-2)^2 + (y+4)^2 = 29 \end{cases}$$

$$29t^2 + 116t + 87 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(7; -2) \\ M(-3; -6) \end{cases}$$

Số phức thỏa đề bài là $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = -3 - 6i$. $\square$

Thí dụ 10. Tìm số phức z thỏa mãn

$$|z - 2 + 4i| = |z - 12| = \sqrt{58}$$

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = 2 - 4i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(2; -4)$, số $z_2 = 12$ có điểm biểu diễn hình học là $B(12; 0)$.

Ta có: $|z - 2 + 4i| = |z - 12| \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra điểm M thuộc trung trực Δ của đoạn thẳng AB .

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$$

Ta có: $|z - 12| = \sqrt{58} \Leftrightarrow BM = \sqrt{58}$. Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm B , có bán kính $r = \sqrt{58}$. Phương trình đường tròn (B, r) :

$$(x-12)^2 + y^2 = 58.$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -2 - 5t \end{cases}, \text{ suy ra: } \begin{cases} (x-12)^2 + y^2 = 58 \end{cases}$$

$$29t^2 = 29 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(9; -7) \\ M(5; 3) \end{cases}$$

Vậy số phức thỏa mãn là $z_1 = 9 - 7i$, $z_2 = 5 + 3i$. $\square$

Thí dụ 11. Cho số phức z thỏa mãn

$$|z - 8 + i| = |z - 10i| = \sqrt{17}$$

Tìm x, y sao cho $z = x + yi$ có giá trị nhỏ nhất.

$|z - 8 + i| = |z - 10i| = \sqrt{17}$ $\Rightarrow$ $|z - 8 + i| = |z - 10i| = \sqrt{17}$ $\Rightarrow$ $|z - 8 + i| = |z - 10i| = \sqrt{17}$

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, $z_1 = 8 + i$ có điểm biểu diễn hình học là $A(8; 1)$, $z_2 = -7 + 10i$ có điểm biểu diễn hình học là $B(-7; 10)$.

Số phức z thỏa mãn $|z - 8 - i| = \sqrt{34}$, chứng tỏ điểm M thuộc đường tròn tâm A , bán kính $R = \sqrt{34}$, đường tròn này có phương trình:

$$(x-8)^2 + (y-1)^2 = 34.$$

Ta có $|z + 7 - 11i| = MB$ nên $M = AB \cap (A; R)$.

Phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$, thay

vào phương trình đường tròn $(A; R)$ ta được:

$$t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm là $M(3; 4)$ và $M(13; -2)$.

a) Với $M(3; 4)$ ta có $\overline{AM} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ nên số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 3 + 4i$.

b) Với $M(13; -2)$ ta có $\overline{AM} \uparrow \downarrow \overline{AB}$ nên số phức z thỏa mãn đề bài là $z = 13 - 2i$. $\square$

Thí dụ 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 5 + 6i| = |z - 15| = \sqrt{58}$. Chứng tỏ z thuộc đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB , Δ có phương trình: $5x + 3y - 41 = 0$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn là $M(x; y)$, số $z_1 = 5 - 6i$ có điểm biểu diễn là $A(5; -6)$, số $z_2 = 15$ có điểm biểu diễn là $B(15; 0)$.

Số phức z thỏa mãn: $|z - 5 + 6i| = |z - 15| \Leftrightarrow MA = MB$ chứng tỏ M thuộc đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB , Δ có phương trình: $5x + 3y - 41 = 0$.

Số phức $z_3 = 2 - i$ có điểm biểu diễn là $C(2; -1)$, số phức $z_4 = -6 + i$ có điểm biểu diễn là $D(-6; 1)$. Biểu thức P có giá trị nhỏ nhất khi $MC + MD$ nhỏ nhất.

Đặt $f(M) = 5x + 3y - 41$, ta có các giá trị $f(C) = -34$, $f(D) = -68$. Chứng tỏ C, D thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng Δ . Vậy $MC + MD$ bé nhất khi $M = C'D \cap \Delta$, với C' là đối xứng của điểm C qua đường thẳng Δ .

Đường thẳng Δ' qua C và vuông góc với Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$, thay vào phương trình

của Δ ta có: $t = 1 \Rightarrow H(7; 2)$ (với $H = \Delta \cap \Delta'$) $\Rightarrow C'(12; 5)$. Phương trình đường thẳng DC' :

$\begin{cases} x = -6 + 9t \\ y = 1 + t \end{cases}$, thay vào phương trình đường thẳng

Δ ta được $t = \frac{4}{3}$. Tọa độ điểm $M\left(6; \frac{11}{3}\right)$.

Số phức cần tìm là $z = 6 + \frac{11}{3}i$. $\square$

*** Ví dụ 13.** Cho số phức z thỏa mãn
 $|z - 9 - 7i| = \sqrt{29}$. Đặt $M = \max\{|z - 5 - 3i|$
 $|z - 11 - 3i|$. Tính tổng $M + m$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn là $K(x; y)$, số $z_1 = 9 - 7i$ có điểm biểu diễn là $I(9; -7)$. Số phức z thỏa mãn $|z - 9 + 7i| = \sqrt{29}$ chứng tỏ điểm K thuộc đường tròn $(I; \sqrt{29})$.

Số $z_2 = 5 + 3i$ có điểm biểu diễn $B(5; 3)$, nên suy ra $|z - 5 - 3i| = KB$. Vậy $|z - 5 - 3i|$ lớn nhất (nhỏ nhất) khi $K = IB \cap (I; \sqrt{29})$.

Phương trình của (I) : $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 29$.

Phương trình của IB : $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -7 - 5t \end{cases}$, thay vào

phương trình của đường tròn (I) , ta được:

$$29t^2 = 29 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(7; -2) \\ K(11; -12) \end{cases}$$

Với điểm $K(7; -2)$ ta có $\overline{IB} \uparrow \overline{IK}$, chứng tỏ giá trị nhỏ nhất $m = KB = \sqrt{29}$.

Vậy tổng $M + m = 2m + 2R = 4\sqrt{29}$. $\square$

*** Ví dụ 14.** Cho số phức z có môđun bằng
 $\sqrt{10}$ thỏa mãn điều kiện $|z - \sqrt{3}i| + |z - \sqrt{3}| = 4$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ là số phức có điểm biểu diễn là $M(x; y)$, số $z_1 = -\sqrt{3}$ có điểm biểu diễn là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, số $z_2 = \sqrt{3}$ có điểm biểu diễn là $F_2(\sqrt{3}; 0)$. Số phức z thỏa mãn $|z + \sqrt{3}| + |z - \sqrt{3}| = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$, chứng tỏ điểm M thuộc đường elip có $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$ (elip nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm) và elip có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Số phức z

có môđun bằng $\frac{\sqrt{10}}{2}$ tức là $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$. Giải hệ

phương trình $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Có 4 số phức thỏa mãn đề bài là: $z = \sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}$,
 $z = \sqrt{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z = -\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z = -\sqrt{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}$. $\square$

*** Ví dụ 15.** Cho số phức z có môđun bằng $\sqrt{5}$ thỏa mãn điều kiện $|z - \sqrt{5}i| + |z - \sqrt{5}| = 6$.

Lời giải. Gọi $z = x + yi$ có điểm biểu diễn hình học là $M(x; y)$, số $z_1 = -\sqrt{5}i$ có điểm biểu diễn là hình học là $F_1(0; -\sqrt{5})$, số $z_2 = \sqrt{5}i$ có điểm biểu diễn là hình học là $F_2(0; \sqrt{5})$. Số phức z thỏa mãn $|z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6$,

chứng tỏ M thuộc elip có $a = 2, b = 3, c = \sqrt{5}$ (elip nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm) và có phương

trình là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Môđun của số z bằng $\sqrt{5}$ tức là $x^2 + y^2 = 5$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \text{ ta được: } \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}. \text{ Có 4 số phức}$$

thỏa mãn đề bài: $z = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3i}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3i}{\sqrt{5}}$,
 $z = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3i}{\sqrt{5}}$, $z = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3i}{\sqrt{5}}$. $\square$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

1C	2A	3B	4A	5B	6D	7A	8B	9C	10D
11C	12D	13C	14D	15B	16B	17D	18A	19B	20C
21A	22C	23A	24A	25D	26C	27B	28D	29B	30D
31D	32A	33A	34D	35C	36A	37B	38A	39A	40A
41B	42A	43B	44D	45A	46B	47A	48D	49A	50B

Câu 1. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y(0) = -3 \Rightarrow d = -3$.

$$y(1) = -1 \Rightarrow a + b + c + d = -1 \Rightarrow a + b + c = 2. \quad (1)$$

$$y'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0. \quad (2)$$

$$y(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c - 3 = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2. \quad (3)$$

Giải (1), (2), (3) ta được $a = -1$; $b = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$.

Chọn C.

Câu 2. Độ dài hai cạnh hình chữ nhật là 2 và $|m|$ do đó $2|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Chọn A.

Câu 3. Bài toán $\Leftrightarrow$ tìm m để $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$ có 2 nghiệm

$$\text{đương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 6m - 5 > 0 \\ -\frac{b}{a} = -m - 1 > 0 \\ \frac{c}{a} = m^2 + 4m + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{Giải ra}$$

được $-5 < m < -3$. Chọn B.

Câu 4. Tiệm cận $y = 0$; $x = 2$. Chọn A.

Câu 5. Chỉ có hàm số $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Chọn B.

Câu 6. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị $2x - y + 4 = 0$ (Δ). Đường tròn (C) có tâm

$$I(m; m+1); R = \sqrt{5}. \text{ Khi đó } (\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C)$$

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m+3| = 5 \Leftrightarrow m = 2; -8.$$

Do đó $m_1 + m_2 = -6$. Chọn D.

Câu 7. Hàm số $y = \cos x + 1$ nghịch biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

hàm số $y = \sin x + 1$ đồng biến và dương trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó hàm số $y = \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, đạt

GTNN bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{2}$ và đạt GTLN bằng 2 khi

$x = 0$. Miền giá trị của hàm số là $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Chọn A.

Câu 8. Ta có $y' = x^3 - 2mx$. Tìm được điều kiện hàm số có 3 cực trị là $m > 0$; phương trình parabol (C) là $y = \frac{-1}{2}mx^2 + m^2$. Điểm $A(2; 24)$ thuộc (C) tìm được $m = 6$ hoặc -4 (loại). Chọn B.

Câu 9. Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$. Đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 3 điểm do đó phương trình $|f(x)| = 3$ có 3 nghiệm.

Chọn C.

Câu 10. Ta có

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000,$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + \frac{10000}{x} + 0,2 \geq 2\sqrt{0,0001x \cdot \frac{10000}{x}} + 0,2 = 2,2. \text{ Chọn D.}$$

Câu 11. Ta có: $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x \Leftrightarrow \sin 11x = \sin x$, từ đó lấy được nghiệm. Chọn C.

Câu 12. Phương trình có nghiệm $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 0; \pi; 2\pi$. Chọn D.

Câu 13. Biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned} 3\sin x - 4\sin^3 x - 6\sin x \cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x + 3\cos x &= 2 \\ \Leftrightarrow -(4\sin^3 x - 2\sin^2 x) - (6\sin x \cos x - 3\cos x) + 3(2\sin x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x - 1) &= 0. \text{ Chọn C.} \end{aligned}$$

Câu 14. Biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned} 27\cos^4 x + 8\sin x &= 12\sin^2 x + 12\cos^2 x \\ \Leftrightarrow 3[(3\cos^2 x)^2 - (2\sin x)^2] - 4(3\cos^2 x - 2\sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3\cos^2 x - 2\sin x)(9\cos^2 x + 6\sin x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3\sin^2 x - 2\sin x + 3)(-9\sin^2 x + 6\sin x + 5) &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Tìm được } \sin x = \frac{\sqrt{10}-1}{3} \text{ (1) hoặc } \sin x = \frac{1-\sqrt{6}}{3} \text{ (2).}$$

Mỗi phương trình (1); (2) đều có 2 nghiệm

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4' \\ b = 6' \\ a + b = 9' \end{cases} \Rightarrow 4' + 6' = 9'$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4'}{6'} = \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 28. Ta có $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

Bắt phương trình có các nghiệm nguyên dương là $x = 1, 2, 3$. Chọn D.

Câu 29. Ta có

$$\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 = 3(x - 2) \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 3\} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \text{ Chọn B.}$$

Câu 30. Hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ xác định và liên tục trên $[e^{-1}; e]$.

$$y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [e^{-1}; e] \\ x = 1 \in [e^{-1}; e] \end{cases}$$

Ta có: $y(e^{-1}) = e^{-2} + 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e^2 - 2$.

Vậy $M = e^2 - 2, m = 1$. Chọn D.

Câu 31. Đặt $t = 2^{|x-1|} \geq 2^0 = 1$.

Mỗi giá trị $t > 1$ có 2 giá trị x thỏa mãn; $t = 1$ có 1 giá trị x thỏa mãn phương trình.

Do đó bài toán tương đương tìm m để phương trình $2t^2 + t + m = 0$ (1) có nghiệm $t = 1$ và không có nghiệm $t > 1$.

Với $t = 1$ ta tìm được $m = -3$. Với $m = -3$ thì (1) có nghiệm $t = 1$ và $t = -\frac{3}{2}$, do đó phương trình đã

cho có nghiệm duy nhất $x = -1$. Chọn D.

Câu 32. Gọi cạnh hình lập phương là a , khi đó

$$6a^2 = 150 \Leftrightarrow a = 5.$$

Thể tích khối lập phương là: $V = a^3 = 125 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Chọn A.

Câu 33. Bán kính đáy nôi:

$$R^2 = 900\pi : \pi = 900 \Rightarrow R = 30 \text{ (cm)}.$$

Chiều dài miếng kim loại là:

$$2\pi R = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \text{ (cm)}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 34. Ta có

$$\frac{V_{MIK}}{V_{MNPQ}} = \frac{MI}{MN} \cdot \frac{MJ}{MP} \cdot \frac{MK}{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 35. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của 2 tam giác đều ABC và $A'B'C'$. Gọi I là trung điểm GG' . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có

$$R = AI = \sqrt{AG^2 + GI^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28\pi a^2}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 36. Gọi chiều cao hình nón nhỏ, hình nón lớn, thể tích khối nón nhỏ, khối nón lớn lần lượt là $h_1; h_2; V_1; V_2$. Khi đó ta có: $h_1 + h_2 = 30$ (1) và tính

$$\text{được } V_1 = \frac{1}{9}\pi h_1^3; V_2 = \frac{1}{9}\pi h_2^3.$$

Do đó

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{9}\pi(h_1^3 + h_2^3) = 1000\pi \Rightarrow h_1^3 + h_2^3 = 9000. \quad (2)$$

Giải (1) và (2) được $h_1 = 10; h_2 = 20$ do đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 = \left(\frac{10}{20}\right)^3 = \frac{1}{8}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 37. Tính được A từ giả thiết $65 = 100 \cdot (0,5)^{\frac{3574}{A}}$.

Tìm được t thỏa mãn $63 = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{A}}$.

Kết quả $t = 3833$. Chọn B.

Câu 38. Ta có

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int x d(e^{2x}) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C. \text{ Chọn A.} \end{aligned}$$

Câu 39. Đổi biến

$$x = \tan \alpha \Rightarrow dx = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = (1 + x^2) d\alpha \Rightarrow d\alpha = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$\int \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = \int \tan^2 \alpha f(\tan \alpha) d\alpha = \int \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) f(\tan \alpha) d\alpha$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan \alpha) d(\tan \alpha) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan \alpha) d\alpha.$$

Do đó: $2 = \int_0^1 f(x) dx - 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6$. Chọn A.

❖ Câu 42. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - x \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Suy ra $b=1; c=2; a=-\frac{1}{2}$ nên $2a+3b+c=4$.

Chọn A.

❖ Câu 43. Phương trình hoành độ giao điểm (H) và

trục Ox là: $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x=1$.

Giao điểm (H) và trục Oy là: $(0; -1)$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

(H): $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là:

$$S = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| \left[x - 2 \ln(x+1) \right]_0^1 \right| = 2 \ln 2 - 1. \text{ Chọn B.}$$

❖ Câu 44. Từ $3z - (4+5i)z = -17+11i$ ta có $-a-5b+(7b-5a) = -17+11i$.

Giải hệ $\begin{cases} a+5b=17 \\ 7b-5a=11 \end{cases}$ được $a=2; b=3 \Rightarrow ab=6$.

Chọn A.

❖ Câu 45. Phương trình có các nghiệm: $1; -1-i; -1+i$, tổng các nghiệm bằng -1 . Chọn B.

❖ Câu 46. Ta có

$$\begin{aligned} |z+2+i| &= |\bar{z}-3i| \Leftrightarrow |(x+2)+(y+1)i| = |x-(y+3)i| \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 &= x^2 + (y+3)^2 \\ \Leftrightarrow x-y-1 &= 0. \text{ Chọn D.} \end{aligned}$$

❖ Câu 47. Đặt $z = x + yi$. Ta có

$$|(x-3)+(y-4)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

$$\begin{aligned} P &= |(x+2)^2 + y^2| - |(x+(y-1)i)|^2 = 4x+2y+3 \\ &= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |P-23| \leq \sqrt{4^2+2^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{20} \cdot 5 = 10$$

$$\Rightarrow 13 \leq P \leq 33$$

($P=33$ khi $z=5+4i$; $P=13$ khi $z=1+3i$).

Khi đó $w=33+13i \Rightarrow |w| = \sqrt{1258}$. Chọn A.

❖ Câu 46. Phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu khi

$$(m+2)^2 + (2m)^2 + m^2 > 5m^2 + 9 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0$$

$\Leftrightarrow m < -5$ hoặc $m > 1$. Chọn B.

❖ Câu 47. Tọa độ véc tơ $\vec{m}(3; 22; -3)$. Chọn A.

❖ Câu 48. Mặt cầu có tâm $I(1; -1; -3)$ có bán kính

$R = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d từ I đến các mặt phẳng và so sánh với R , khoảng cách $d < R$ thì mặt phẳng cắt mặt cầu. Chọn D.

❖ Câu 49. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d . Ta có $AH \leq AK \Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H = K$.

$$K \in d \Leftrightarrow K(t; t; 1+t) \Rightarrow \vec{AK} = (t-3; t-2; t+2)$$

$$\Rightarrow \vec{AK} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra: $K(1; 1; 2)$ và $\vec{AK} = (-2; -1; 3)$

$$\text{Vậy } (P): -2(x-1) - 1(y-1) + 3(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 3z + 3 = 0. \text{ Chọn A.}$$

❖ Câu 50. Phương trình đường thẳng d là:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

$$B \in d \Rightarrow B(1+3t; 2+4t; -3-4t).$$

$$\text{Mà } B \in (P) \Rightarrow 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1).$$

Do $\triangle MAB$ vuông tại $M \Rightarrow MB = \sqrt{AB^2 - MA^2}$.

Để MB lớn nhất thì MA nhỏ nhất.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P). Xét $\triangle AHM$ vuông tại $H \Rightarrow AM \geq AH$.

Để MA nhỏ nhất thì $M \equiv H \Rightarrow MB$ là giao tuyến phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\vec{n_d} = [\vec{n_P}, \vec{u_d}] = (-4; 5; 2)$$

$$\Rightarrow \vec{u_{MB}} = [\vec{n_P}, \vec{n_d}] = -9(1; 0; 2).$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } MB: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

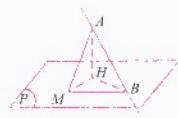
Khi đó điểm $I(-1; -2; 3)$ thỏa mãn. Chọn B.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

<https://tuoanhoc.org>

Số 488(2-2018)

TUẦN HỌC
Quê 17



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

- A. 1260. B. 40320. C. 120. D. 1728.

Câu 2. Phương trình $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0; 4035\pi]$?

- A. 2016. B. 2017. C. 2011. D. 2018.

Câu 3. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số nào sau đây cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất?

A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$. B. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

C. $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$. D. $y = -x^3 + 3x - 2$.

Câu 4. Cho các số thực a, b thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a^{14}} > \sqrt[3]{a^7}, \log_b(2\sqrt{a+1}) < \log_b(\sqrt{a} + \sqrt{a+2}).$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a > 1, b > 1$. B. $0 < a < 1 < b$.
C. $0 < b < 1 < a$. D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

Câu 5. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn, đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$). Tìm x để hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

A. $x = \frac{a}{\pi+4}$ (cm). B. $x = \frac{2a}{\pi+4}$ (cm).

C. $x = \frac{\pi a}{\pi+4}$ (cm). D. $x = \frac{4a}{\pi+4}$ (cm).

Câu 6. Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất một lần. Giả sử con xúc sắc xuất hiện mặt k chấm. Xét phương trình

$$-x^3 + 3x^2 - x = k.$$

Tính xác suất để phương trình trên có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 7. Áp suất không khí P (mmHg) được tính theo công thức $P = P_0 e^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $\left| \frac{P - P_0}{P_0} \right| = \left| \frac{x - 3}{x+1} \right| = 1$ mmHg là áp suất ở mức nước biển ($x = 0$), k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí bằng 672,71mmHg. Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000m.

- A. 527,06mmHg. B. 530,23mmHg.
C. 530,73mmHg. D. 545,01mmHg.

Câu 8. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có chiều cao h và bán kính mặt cầu nội tiếp r ($h > 2r > 0$).

A. $V = \frac{4h^2 r^2}{3(h+2r)}$. B. $V = \frac{4h^2 r^2}{h-2r}$.

C. $V = \frac{4h^2 r^2}{3(h-2r)}$. D. $V = \frac{3h^2 r^2}{4(h-2r)}$.

Câu 9. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1?$$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 10. Cho số thực α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính

$$(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha) \cos \alpha.$$

- A. $\frac{25}{128}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{255}{128}$. D. $\frac{225}{128}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 1$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn MN .

A. $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

B. $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

C. $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

D. $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m sao cho đường thẳng $d: y = mx - m - 3$ cắt đồ thị

(C): $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ tại ba điểm phân biệt $A, B, I(1; -3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba

đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .

A. $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

B. $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, m = -1$.

C. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $m < -1$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{khi } x > 1 \\ m.e^{x-1} + 1 - 2mx^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 16. Trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R}).$$

Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 18. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển

$f(x) = (1 - 3x + 2x^3)^{10}$ thành đa thức.

A. 204120. B. -262440.

C. -4320. D. -62640.

Câu 19. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu

$I_n = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1 B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = h$ ($a, h > 0$). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB', BC' .

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

B. $\frac{ah}{\sqrt{5a^2 + h^2}}$.

C. $\frac{ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$.

D. $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 5h^2}}$.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $I(2; -1)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \sin 3x$. Phép vị tự

tâm $I(2; -1)$, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến (C) thành (C') .

Viết phương trình đường cong (C') .

A. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin(6x + 18)$.

B. $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin(6x + 18)$.

C. $y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin(6x - 18)$.

D. $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin(6x - 18)$.

Câu 22. Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

A. 1. B. -1. C. 0. D. 3.

Câu 23. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

A. 20 B. 42. C. 21. D. 17.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh

$S\left(\frac{17}{18}; -\frac{11}{9}; \frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm

$A(1; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; 1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$.

B. $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$.

C. $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$.

D. $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có

$f'(x) = x^{2017} \cdot (x-1)^{2018} \cdot (x+1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 26. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$ cùng với

hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. Tìm m .

A. $m = 1, m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -1, m = -\frac{3}{2}$.

$$C. m = 1, m = -\frac{3}{2}.$$

$$D. m = -1, m = 3.$$

Câu 27. Tính thể tích của một hình hộp chữ nhật, biết rằng ba mặt của hình này có diện tích là 20cm^2 , 10cm^2 , 8cm^2 .

$$A. 40\text{cm}^3.$$

$$B. 1600\text{cm}^3.$$

$$C. 80\text{cm}^3.$$

$$D. 200\text{cm}^3.$$

Câu 28. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

$$A. 12\text{m/s}.$$

$$B. 0\text{m/s}.$$

$$C. 11\text{m/s}.$$

$$D. 6\text{m/s}.$$

Câu 29. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$số f(x) = \frac{8}{1+2x} + x \text{ trên đoạn } [1; 2] \text{ lần lượt là}$$

$$A. \frac{11}{3}, \frac{7}{2}.$$

$$B. \frac{11}{3}, \frac{18}{5}.$$

$$C. \frac{13}{3}, \frac{7}{2}.$$

$$D. \frac{18}{5}, \frac{3}{2}.$$

Câu 30. Trong không gian Oxyz, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao H cho là trọng tâm của tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

$$A. x^2 + y^2 + z^2 = 81.$$

$$B. x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$C. x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$D. x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 1, BC = \sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, SC .

$$A. 45^\circ.$$

$$B. 120^\circ.$$

$$C. 30^\circ.$$

$$D. 60^\circ.$$

Câu 32. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

$$A. y = 2x + 2.$$

$$B. y = x + 1.$$

$$C. y = 2x + 1.$$

$$D. y = 1 - x.$$

Câu 33. Từ phương trình

$$(3 + 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 3$$

đặt $t = (\sqrt{2} - 1)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

$$A. t^3 - 3t - 2 = 0.$$

$$B. 2t^3 + 3t^2 - 1 = 0.$$

$$C. 2t^3 + 3t - 1 = 0.$$

$$D. 2t^2 + 3t - 1 = 0.$$

Câu 34. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^\circ, SA \perp (ABC)$, góc giữa (SBC) và (ABC) là 60° .

$$A. \frac{\sqrt{21}a^3}{14}.$$

$$B. \frac{\sqrt{7}a^3}{14}.$$

$$C. \frac{3\sqrt{21}a^3}{14}.$$

$$D. \frac{\sqrt{7}a^3}{7}.$$

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $81^{2x - \sqrt{x}} = m$ có nghiệm.

$$A. m \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$B. m \geq 0.$$

$$C. m \geq 1.$$

$$D. m \geq -\frac{1}{8}.$$

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

$$A. m = 20.$$

$$B. m = 4.$$

$$C. m = 5.$$

$$D. m = 3.$$

Câu 37. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến với (P) tại $A(1; 2)$ và $B(4; 5)$.

$$A. \frac{9}{4}.$$

$$B. \frac{4}{9}.$$

$$C. \frac{9}{8}.$$

$$D. \frac{5}{2}.$$

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D' tương ứng, sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD' .

$$A. 4.$$

$$B. 6.$$

$$C. 2.$$

$$D. 12.$$

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Tính khoảng cách giữa SC và AB biết rằng $SO = a$ và vuông góc với mặt đáy của hình chóp.

$$A. a.$$

$$B. \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$C. \frac{2a}{5}.$$

$$D. \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Câu 40. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH vuông góc với BC tại $H, HB = 3, 6\text{ cm}, HC = 6, 4\text{ cm}$. Quay miền tam giác ABC quanh đường thẳng AH ta thu được khối nón có thể tích bằng bao nhiêu?

$$A. 205,89\text{cm}^3.$$

$$B. 617,66\text{cm}^3.$$

$$C. 65,14\text{cm}^3.$$

$$D. 65,54\text{cm}^3.$$

Câu 41. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết rằng $AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c$.

$$A. \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$B. \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \sqrt{n+2018} - \sqrt{n+2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Dãy số (u_n) là dãy tăng. B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

C. $0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{2018}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Câu 43. Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 44. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên không dương của m để phương trình $\log_1(x+m) + \log_5(2-x) = 0$ có nghiệm. Tập S

có bao nhiêu tập con?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox và trên mặt phẳng (Oyz) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

A. $4x - 2z - 3 = 0$. B. $4x - 2y - 3 = 0$.

C. $4x - 2z + 3 = 0$. D. $4x + 2z + 3 = 0$.

Câu 46. Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$,

trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$.

A. -2. B. -3. C. $\frac{1}{8}$. D. 0.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa

d và tiếp xúc với (S) tại T và T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{7}{6}\right)$.

Câu 48. Cho các số phức z_1, z_2 với $z_1 \neq 0$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 \cdot z_2$ là đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 1. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường nào sau đây?

A. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $|z_1|$.

B. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $-\frac{z_2}{z_1}$,

bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

C. Đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

D. Đường tròn tâm là điểm biểu diễn số phức $\frac{z_2}{z_1}$,

bán kính bằng $\frac{1}{|z_1|}$.

Câu 49. Tính đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) của hàm số $y = \ln|2x-3|$.

A. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

B. $y^{(n)} = (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

C. $y^{(n)} = (-1)^n (n-1)! \left(\frac{2}{2x-3}\right)^n$.

D. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{2x-3}\right)^n$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 8^{\cot x} + (m-3) \cdot 2^{\cot x} + 3m - 2$ đồng biến trên

$\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

A. $-9 \leq m < 3$. B. $m \leq 3$. C. $m \leq -9$. D. $m < -9$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh)



CON SỐ 0 ĐẦY QUYỀN LỰC XUẤT HIỆN TỪ LÚC NÀO...

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong kho tàng số của loài người “chữ số quan trọng nhất là số “0” (zero). Đây là một ý niệm tuyệt vời, từ cái “không có gì” người ta làm được “cái gì đó” rồi đặt cho cái gì đó ấy một cái tên và tiếp đó là cho nó một ký hiệu” (Van Der Warden). Đó chính là những bước ngoặt trong câu chuyện về con số 0 từ thừa ban đầu cổ xưa của những dân tộc có nền văn minh toán học phát triển sớm.

Con số - không Babylon.

Danh từ Babylon thường được dùng để chỉ các thành quốc ở vùng bình nguyên Lưỡng Hà nằm giữa hai con sông Tigris và Euphrates cách thành phố Baghdad không xa và tồn tại từ thế kỷ XX đến thế kỷ II trước Công nguyên. Đây là nơi sản sinh ra những nhà thiên văn và nhà toán học đầu tiên và họ cũng là dân tộc đầu tiên có chữ viết và hệ đếm.

Hệ thống đếm của người Babylon có từ đầu Thiên niên kỷ thứ hai trước Công nguyên và đó là hệ lục thập phân theo vị trí (cơ số 60). Đó cũng là nguồn gốc để người ta chia giờ thành 60 phút và 3600 giây, cũng như ta chia đường tròn thành 360 độ và mỗi độ ra 60 phút và mỗi phút thành 60 giây. Có lẽ số 60 có nhiều ước số cũng là lý do nó được chọn làm cơ số. Trong hệ lục thập phân, cứ 60 đơn vị của một hàng nào đó là tương ứng với một đơn vị của hàng kế liền trên. Hệ thống số của người Babylon có hai ký hiệu cơ sở hình nêm:

nêm dọc “ ∇ ” ứng với vị trí số 1 cũng như mọi số dạng $60^n (n \in \mathbb{N})$ và cái *nêm ngang* “ $\leftarrow$ ” ứng với giá trị số 10. Bằng nguyên tắc cộng vào lặp đi lặp lại hai chữ số cơ bản này người ta viết được mọi số từ 1 đến 59. Mọi số khác của hệ đếm Babylon đều được viết dưới dạng:

$$N = \alpha_n 60^n + \alpha_{n-1} 60^{n-1} + \dots + \alpha_1 60^1 \\ = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1).$$

Tuy nhiên hệ tính này đối diện với một vài mơ hồ cần phải minh định. Đầu tiên, giá trị của ký hiệu cơ sở không phải bao giờ cũng rõ ràng theo vị trí mà có khi phải rút ra từ ngữ cảnh. Một mơ hồ khác xuất hiện khi trong biểu hiện số được xét bị khuyết một hàng nào đó, tức là xuất hiện cái “không có gì”. Vấn đề là làm thế nào để cảnh báo rằng có thiếu hàng đó. Phải hơn mười lăm thế kỷ sau người Babylon mới ý thức được rằng cần phải biểu hiện cái “không có gì” đó (tức là chỗ có hàng thiếu!) bằng một “cái gì đó” (chẳng hạn một hình vết) nếu người ta không muốn lẫn lộn trong các biểu hiện số.

Lúc đầu người Babylon khắc phục khó khăn bằng cách chừa ra một khoảng trống ở chỗ có thiếu một lũy thừa của 60. Nhưng điều gì sẽ xảy ra nếu viên thư lại vô ý cầu thả bỏ quên không chừa chỗ trống?

Cuối cùng đến thế kỷ III trước Công nguyên người Babylon dùng ký hiệu “*đôi nêm nghiêng*” “ $\nwarrow$ ” để thể hiện sự vắng mặt một hàng nào đó. Người ta cho rằng đôi nêm nghiêng này chính là “cái gì đó” có vai trò thế chỗ và gọi nó là con số không Babylon. Nếu $m - n > 1$ thì giữa các bội số của 60^m và 60^n cần đặt $m - n + 1$ đôi nêm nghiêng đó. Có thể xem đó là con số không cổ xưa nhất trong lịch sử văn minh của loài người mặc dù nó không được các nhà toán học Babylon nhận thức như một đại lượng – có nghĩa là như chữ số 0 (zero) bởi vì nó không tham gia vào các phép tính số học.

Một điều kỳ lạ là cho đến khi để chế Babylon huy hoàng sụp đổ người Babylon cũng chưa bao giờ sử dụng con số không của họ để làm chữ số cuối cùng của một số.

Con số - không Maya.

Maya là tên một bộ tộc thổ dân da đỏ. Họ từng sinh sống ở bán đảo Yucatan thuộc Đông Nam Mexico, bắc Guatemala và Honduras ngày nay.

Trong suốt mười thế kỷ đầu sau công nguyên người Maya đã đạt đến đỉnh cao ở nhiều lĩnh vực, trong đó có toán học và thiên văn học với sự đóng góp lớn lao của các Thầy tu và nhà Chiêm tinh Maya. Các nguồn dữ liệu đã chứng tỏ rằng người Maya đã từng sử dụng *hệ đếm nhị thập phân theo vị trí* (cơ số 20). Để viết một số bất kỳ người Maya chỉ sử dụng ba ký hiệu cơ sở: chấm đậm “.” để chỉ số 1, một vạch ngang đậm “—” để chỉ số 5 và cái hình vỏ sò “” để chỉ số 0. Số 0 của người Maya ra đời vào năm 357 sau Công nguyên, trước Châu Âu gần 900 năm.

Cái số được viết theo thang thẳng đứng có nhiều nấc, mỗi nấc là một hàng (như hàng đơn vị, hàng chục, ... trong thập phân của chúng ta). Nấc dưới cùng dành cho các số nhỏ hơn 20, nấc tiếp theo là bội số của 20, nấc trên nữa – nấc thứ ba – chỉ số lần của $20^2=400$, ... Trong trường hợp biểu diễn số có thiếu hàng nào đó thì người ta thế vào nấc tương ứng biểu tượng vỏ sò là số 0 Maya. Như vậy con số 0 Maya với tư cách “*cái gì đó*” thế chỗ cho cái “*không có gì*” đã ra đời rất sớm.

Một đặc điểm của hệ tính Maya là *hệ đếm miệng là nhị thập phân theo vị trí*, trong khi *hệ tính viết lại là nhị thập phân theo vị trí biến thể* với một ngoại lệ ở nấc thứ ba. Thật vậy, nếu hệ tính là nhị thập phân theo vị trí bình thường thì các số nguyên thủy phải sắp xếp theo thứ tự $1, 20, 20^2=400, 20^3=8000, \dots$ Trong khi đó, ở hệ tính viết của họ lại theo thứ tự $1, 20, 18 \times 20 = 360, 18 \times 20 \times 20 = 7200, \dots$ Do đó ở đây nguyên tắc theo vị trí đã bị vi phạm. Đó chính là vị trí gây ra biến thể.

Do có ngoại lệ vừa trình bày nên con số 0 Maya cũng gần như bị tước mất khả năng thao tác mặc dù nó có thể nằm ở giữa hoặc ở cuối số. Trong trường hợp nó ở cuối số thì nó lại bị tước đi “*đặc quyền*” của số 0 chân chính là làm cho giá trị số đó tăng lên 20 lần. Nhiều nhà lịch sử cho rằng về cơ bản mọi tính toán trên các con số có nhiều chữ

số của người Maya là liên quan tới thiên văn và đó là cơ sở để làm lịch.

Do đó với ưu tiên đặc biệt cho thực hành họ đã không sợ phá vỡ cái kết cấu chặt chẽ của hệ tính để tạo nên những con số trừu tượng đáp ứng cho nhu cầu cụ thể của mình.

Đề đơn giản tính toán người Maya đã thay thế số khởi thủy ở nấc thứ ba là $20 \times 20 = 400$ bởi số $18 \times 20 = 360$ là xấp xỉ gần nhất với số ngày một năm của họ. Vì trong 18 tháng với 20 ngày một tháng tạo thành một năm lịch với 360 ngày, trong đó cần lưu ý rằng người Maya chia một năm Mặt trời có 365 ngày thành 18 tháng, mỗi tháng có 20 ngày, 5 ngày còn lại được đưa vào cuối năm.

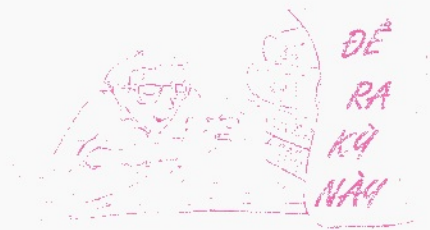
Như vậy, bắt đầu từ cái cụ thể, người Maya đã vươn lên đỉnh của tư duy trừu tượng để tạo riêng cho mình một hệ tính “*nhị thập phân theo vị trí biến thể*”. Ngày nay ta cố tìm hiểu xem làm thế nào mà các nhà thiên văn Maya tính được một năm có 365,24200 ngày trong khi họ không có trong tay bất cứ máy móc hiện đại nào. Các tính toán gần đây nhất mới cho kết quả mỗi năm có 365,242198 ngày. Vậy người Maya vẫn không có con số 0 toán học.

Con số - không Ấn Độ

Không giống các hệ thống số Babylon và Maya, ngay từ thế kỷ III trước công nguyên trong hệ thống số Ấn Độ (còn gọi là *hệ thống Hindu*) các nhà toán học đã tạo ra *chín ký hiệu khác nhau* cho các số từ 1 đến 9 tách hẳn với mọi trục cảm của thị giác con người. Các ký hiệu này đã thay hình đổi dạng theo chiều dài của thời gian. Đến thế kỷ V sau công nguyên, khi trình bày một số người Ấn Độ rút bớt các tên “chục”, “trăm”, “ngàn”, ... Chẳng hạn số 1975 được biểu hiện đơn giản là “NĂM. BẢY. CHÍN. MỘT” ($= 5 + 7.10 + 9.10^2 + 1.10^3$). Nhưng không phải bao giờ cách biểu diễn cũng thực hiện được theo quy tắc này. Khi gặp số 201 mà trong thần số thiếu hàng chục thì người ta không thể đọc “MỘT. HAI” ($= 1 + 2.10 = 21$ (?)). Do vậy người ta cần có một dấu hiệu riêng để cảnh báo rằng số đang xét không có hàng chục. Sự mò mẫm và do dự đã mang lại cho các nhà toán học Ấn Độ biện pháp khắc phục vương mông này bằng cách dùng

(Xem tiếp trang 36)

<https://tietlichon.com.org>



CÁC LỚP THCS

Bài T1/488 (Lớp 6). Cho ngũ giác $ABCDE$ có cạnh BC song song với đường chéo AD , cạnh CD song song với đường chéo BE , cạnh DE song song với đường chéo AC , cạnh AE song song với đường chéo BD . Chứng minh rằng cạnh AB song song với đường chéo CE .

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/488 (Lớp 7). Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4035}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}} > \frac{2019}{4036}.$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/488. Cho hai bộ số thực $(a, b, c); (x, y, z)$ thỏa mãn không có bộ nào đồng nhất bằng 0 và
 $a + b + c = x + y + z = ax + by + cz = 0$.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$P = \frac{(b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(y+z)^2}{xy+yz+zx}$$

là hằng số.

VŨ VĂN LIÊM
(Cẩm Xá, Mỹ Hào, Hưng Yên)

Bài T4/488. Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các tam giác ABD , BCE , CAF thỏa mãn
 $\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = 90^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = \widehat{CAF} = \alpha$.
Chứng minh rằng $DF = AE$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

Bài T5/488. Chứng minh tổng sau đây là một số nguyên dương:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2017}\right)^2.$$

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/488. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^5 - 2x^3y - x^2y + 10x^3 + y^2 - 5y = 0 \\ (x+1)\sqrt{y-5} = y - 3x^2 + x - 2 \end{cases}$$

NGÔ QUỐC KHÁNH
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T7/488. Chứng minh rằng:

$$x_0 = \cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21}$$

là một nghiệm của phương trình:

$$4x^3 + 2x^2 - 7x - 5 = 0.$$

ĐOÀN KIM SANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái)

Bài T8/488. Cho tam giác ABC : $a = BC, b = CA, c = AB$. Chứng minh rằng:

$$\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T9/488. Cho 6 số thực dương a, b, c, x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$ax + by + cz \geq a^x b^y c^z.$$

NGUYỄN ĐẠT BÔNG
(Thôn Cáp Thủy, xã An Thịnh, huyện Lương Tài, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/488. Xét dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$. Với mỗi số tự nhiên n , đặt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , trong nửa khoảng $[s_n, s_{n+1})$ có ít nhất hai số chính phương.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T11/488. Cho hai dãy số dương $(a_n)_{n \geq 0}$ và $(b_n)_{n \geq 0}$ xác định bởi: $a_0 = \sqrt{3}$, $b_0 = 2$ và

$$\begin{cases} a_n + b_n = \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}} \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 \end{cases}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng hai dãy số trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/488. Cho tam giác ABC không cân tại A . Đường tròn (O) thay đổi, đi qua B, C và theo thứ tự cắt các đoạn AB, AC tại M, N . P là giao điểm của BN và CM . Q là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ không chứa M, N của (O) . K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PBC . Chứng minh rằng KQ luôn đi qua một điểm cố định.

PHAN VĂN NAM

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Định chính. Đề bài T8/486, T12.2017 (trang 24), đã viết: ... tam giác OBC ... , $OA = a$, $OB = b$, ...
xin được sửa là: ... tam giác OAB ... , $OA = b$, $OB = a$, ...

Bài L1/488. Trên mặt thoáng của một chất lỏng có đường tròn đường kính $AB = 26\text{cm}$. M là điểm trên đường tròn và cách A một khoảng $AM = 10\text{cm}$. Tại A, B người ta đặt hai nguồn sóng kết hợp, dao động đồng pha, phát sóng có bước sóng $\lambda = 5\text{cm}$. Tính số điểm có cực đại giao thoa trên cung tròn nhỏ MB .

THANH LÂM (Hà Nội)

Bài L2/488. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0 \cos 2\pi ft$ (V), (trong đó U_0 không đổi, f thay đổi được) vào hai đầu đoạn mạch điện mắc nối tiếp gồm điện trở thuần R và tụ điện có điện dung C . Khi tần số bằng 20Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch là 20W . Khi tần số bằng 40Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch là 32W . Khi tần số bằng 60Hz thì công suất tiêu thụ điện của đoạn mạch bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

Thanh thật xin lỗi bạn đọc. TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/488 (For 6th grade). Given a pentagon $ABCDE$. Assume that BC is parallel to AD , CD is parallel to BE , DE is parallel to AC , and AE is parallel to BD . Show that AB is parallel to CE .

Problem T2/488 (For 7th grade). Prove that

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4035}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}} > \frac{2019}{4036}.$$

Problem T3/488. Given two triples $(a, b, c); (x, y, z)$, none of them contains all 0's, such that

$$a + b + c = x + y + z = ax + by + cz = 0.$$

Prove that the expression $P = \frac{(b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(y+z)^2}{xy+yz+zx}$ is a constant.

Problem T4/488. Outside a triangle ABC , draw triangles ABD , BCE , CAF such that $\widehat{ADB} = \widehat{BEC} = \widehat{CFA} = 90^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = \widehat{CAF} = \alpha$. Prove that $DF = AE$.

Problem T5/488. Show that the following sum is a positive integer

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2017}\right)^2.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/488. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 2x^5 - 2x^3y - x^2y + 10x^3 + y^2 - 5y = 0 \\ (x+1)\sqrt{y-5} = y - 3x^2 + x - 2 \end{cases}$$

Problem T7/488. Prove that $x_0 = \cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \cos \frac{10\pi}{21}$

is a solution of the equation $4x^3 + 2x^2 - 7x - 5 = 0$.

Problem T8/488. In any triangle ABC , show that $\cos(A-B) + \cos(B-C) + \cos(C-A) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$.

Problem T9/488. Given 6 positive numbers a, b, c, x, y, z and assume that $x + y + z = 1$. Show that $ax + by + cz \geq a^x b^y c^z$. (Xem tiếp trang 34)



Bài T1/484. Tính tổng

$$A = 3 + 4 + 6 + 9 + 13 + 18 + \dots + 4953$$

(các số hạng trong tổng A được xác định theo công thức $a_{n+1} = a_n + n$ với $n \in \mathbb{N}^*$).

Lời giải. Theo giả thiết có

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

....

$$a_n = a_{n-1} + n - 1$$

$$a_{n+1} = a_n + n$$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên được

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_1 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = 3 + \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

Với $a_{n+1} = 4953 \Rightarrow 2 \times 4950 = n(n+1)$ tức là $n(n+1) = 99.100 \Rightarrow n = 99$. Do đó tổng A có 100 số hạng.

Từ (*) cho n lần lượt bằng 1, 2, 3, 4, ..., 99 ta có

$$2a_2 = 6 + 1.2; 2a_3 = 6 + 2.3; 2a_4 = 6 + 3.4; \dots;$$

$$2a_{99} = 6 + 98.99; 2a_{100} = 6 + 99.100.$$

Do đó

$$2A = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \dots + 2a_{99} + 2a_{100} \\ = 100.6 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100.$$

$$\text{Đặt } B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100$$

$$\text{thì } 3B = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 98.99.3 + 99.100.3 = 1.2.3 + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 98.99(100-97) + 99.100(101-98) = 99.100.101.$$

Do đó $B = 33.100.101 = 333300$. Thay vào biểu thức $2A$ được $2A = 600 + 333300 = 333900$, nên

$$A = 166950.$$

➤ **Nhận xét.** Hầu hết các bạn đều giải tương tự như trên, trong đó vài bạn viết nhầm số. Các bạn sau có lời giải đúng. **Phú Thọ:** *Chữ Lê Phương Linh*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Dặng Khôi Nguyên*, 6C3, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Trương Khánh Chi*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Hoàng Thế Hiếu, Nguyễn Công An, *Phạm Viết Thịnh*, 6A, *Thái Huyền Trang*, *Bùi Duy Huy Hoàng*, *Nguyễn Thị Ngân*, *Phan Thị Hoa*, *Phan Văn Anh Tài*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Mai Thành Nguyên*, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/484. Tìm các số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình: $(1+x!)(1+y!) = (x+y)!$ (1)
(trong đó ký hiệu $n! = 1.2 \dots n$).

Lời giải. (Cách giải của bạn *Lê Tuấn Kiệt*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**).

• Với $x = 0$ thay vào (1) ta có:

$$2(1+y!) = y! \Rightarrow y! = -2$$

(loại vì $y \in \mathbb{N}$) (chú ý rằng: luôn quy ước $0! = 1$).

• Với $x = 1$ thay vào (1) ta có:

$$2(1+y!) = (y+1)! \Rightarrow y!(y-1) = 2 \Rightarrow y = 2.$$

• Với $x \geq 2$ thì $(x+y)!$ là số chẵn, $1+x!$ là số lẻ. Từ (1) suy ra $1+y!$ là số chẵn, hay $y!$ là số lẻ nên $y = 1$. Khi đó ta có: $2(1+x!) = (x+1)! \Rightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm là (1;2) và (2;1). □

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Kiệt* thì các bạn có lời giải tốt là: **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thành Nam*, *Lê Hoài Sơn*, *Nguyễn Quốc Hiếu*, *Đặng Hữu Khanh*, *Phạm Văn Quyền*, *Nguyễn Phương Uyên*, 7A, *Đào Danh Hào*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Thiên Ngân*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Phạm Ngọc Trinh*, 7B, *Trương Khánh Chi*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 7A, *Nguyễn Trọng Nam*, *Nguyễn Việt Hoàng*, *Hoàng Quốc Duy*, 7C, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn, *Lê Đức Chính*, *Trịnh Duy Đạt*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; *Đỗ Lê Trung*, 7A4, THCS

Quang Trung, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** Hà Thị Yên, 7A, THCS Đông Cửu, Thanh Sơn; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Lê Bích Ngọc, 7A, THCS Thái Thịnh, Đống Đa; **Đặng Khôi Nguyên**, 6C3, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/484. Trong mỗi ô của bàn cờ vua 8×8 ô vuông được đặt một số viên sỏi sao cho số viên sỏi trong các ô cùng hàng hoặc cùng cột là số chẵn. Chứng minh rằng tổng số các viên sỏi trên các ô đen của bàn cờ là số chẵn.

Lời giải. Đánh số các hàng và các cột bởi $1, 2, \dots, 8$ và giả sử không mất tổng quát là ô $(1, 1)$ là ô màu đen.

Ký hiệu A là số các viên sỏi trong các ô có tung độ và hoành độ là số chẵn.

Ký hiệu B là số các viên sỏi trong các ô có tung độ và hoành độ là số lẻ.

Ký hiệu C là số các viên sỏi trong các ô có tung độ lẻ và hoành độ là số chẵn.

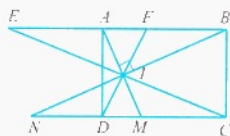
Khi đó $A + C$ là số các viên sỏi trong các ô có hoành độ là số chẵn và $B + C$ là số các viên sỏi trong các ô có tung độ lẻ. Dễ thấy rằng $A + C \equiv B + C \equiv 0 \pmod{2}$. Do đó số sỏi trên các ô đen là $A + B = (A + C) + (B + C) - 2C \equiv 0 \pmod{2}$. $\square$

Nhận xét. Bài toán này không khó lắm nhưng có ít bạn gửi lời giải. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn: **Thanh Hóa:** Đỗ Lê Trung, 7A, THSC Quang Trung; **Đỗ Cao Bách Tùng**, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Trịnh Đức Tuấn**, 7A, Nguyễn Việt Hoàng, Nguyễn Trọng Nam, Nguyễn Tiến Đáng, 7C, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/484. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = BC\sqrt{2}$. M là một điểm trên cạnh CD (M khác D). Kẻ $BI \perp AM$ tại I . Gọi giao điểm của CI và DI với AB lần lượt là E và F . Chứng minh rằng AE , BF và AB là độ dài ba cạnh của tam giác vuông.

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của BI và CD . Đặt $DM = x$, $DN = y$, $BC = a$. Do $AM \perp BN$ nên $\widehat{DAM} = \widehat{BNC}$, suy ra $\triangle ADM \sim \triangle NCB$ (g-g), do đó:

$$\frac{MD}{BC} = \frac{AD}{NC} \Leftrightarrow x(a\sqrt{2} + y) = a^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } MC^2 + ND^2 &= (a\sqrt{2} - x)^2 + y^2 \\ &= 2a^2 + x^2 + y^2 - 2ax\sqrt{2} \\ &= 2x(a\sqrt{2} + y) + y^2 + y^2 - 2ax\sqrt{2} \\ &= (x + y)^2 = MN^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, do $AB \parallel CD$, áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{AE}{MC} = \frac{IE}{IC} = \frac{IB}{IN} = \frac{FB}{ND} = \frac{AB}{MN}.$$

Kết hợp với (1) ta có

$$\frac{AB^2}{MN^2} = \frac{AE^2}{MC^2} = \frac{BF^2}{ND^2} = \frac{AE^2 + BF^2}{MC^2 + ND^2} = \frac{AE^2 + BF^2}{MN^2}.$$

Do đó $AE^2 + BF^2 = AB^2$. Vậy AE , BF , AB là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. $\square$

Nhận xét. Các bạn sau cho lời giải đúng: **Hà Nội:** Lê Tuấn Tú, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghe An:** Lê Văn Quang Trung, 8B, THCS Lý Nhạ Quang, Đô Lương.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/484. Giải phương trình

$$2x^4 - 8x^3 + 60x^2 - 104x - 240 = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^4 - 4x^3 + 30x^2 - 52x - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x - 4) - 2x(x^2 - 2x - 4) + 30(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x + 30) = 0. \quad (1)$$

Vì $x^2 - 2x + 30 = (x - 1)^2 + 29 > 0$ nên từ PT (1) ta được: $x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$. Vậy PT ban đầu có hai nghiệm là $x = 1 + \sqrt{5}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$. $\square$

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách viết PT thành $(x^2 - 2x + 13)^2 = 289 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 13 = \pm 17$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Ngệ An:** Nguyễn Văn Hoàng Minh, 8D, Nguyễn Huy Hoàng, Lê Quang Huy, Nguyễn Cảnh Mạnh, Nguyễn Thanh Nguyên, 8B, THCS Lý Nhật quang, Đô Lương, Phạm Ngọc Trinh, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Phú Thọ:** Thạch Đức Tùng, Nguyễn Duy Anh, Trần Ngọc Lương, Thạch Quang Triều, 8A, THCS Cao Mại, Lâm Thao, Nguyễn Huy Tú, 8A, THCS Thị trấn 2, Yên Lập, Đào Nhân Độ, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Nguyễn Việt Anh, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Cần Thơ:** Trần Danh Nhân, 8A5, THCS Đoàn Thị Điểm, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/484. Giải phương trình sau trên tập số thực.

$$3\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} + 2\sqrt{5x^2+y^2+10y-50} = 130$$

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} + \sqrt{10x^2+10y^2-20x+20y+1360} = 130$$

Lời giải. Nhận thấy với mọi số thực x, y thì

$$x^2+y^2-2x-4y+5 = (x-1)^2+(y-2)^2 \geq 0;$$

$$5x^2+5y^2+10x+50y+130 = 5[(x+1)^2+(y+5)^2] \geq 0;$$

$$5x^2+5y^2-30x+45 = 5[(x-3)^2+y^2] \geq 0;$$

$$102x^2+102y^2-204x+204y+1360 = 34[3(x-1)^2+3(y+1)^2+34] \geq 0.$$

Do đó phương trình luôn xác định với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$VT = 3\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} + 2\sqrt{5x^2+y^2+10y-50} = 130$$

$$+ \sqrt{5x^2+y^2-6x+9}$$

$$\leq \sqrt{3^2+(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2} \cdot \sqrt{(x^2+y^2-2x-4y+5)+(x^2+y^2+10y-50)+(x^2+y^2-6x+9)}$$

$$= \sqrt{34(3x^2+3y^2-6x+6y+40)}$$

$$= \sqrt{102x^2+102y^2-204x+204y+1360} = VP.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}}{3} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+2x+10y+26}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2-6x+9}}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2x-4y+5}{9} = \frac{x^2+y^2+2x+10y+26}{20}$$

$$= \frac{x^2+y^2-6x+9}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-11x+5y+14=0 \\ 3x^2+3y^2-26x-10y+10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-11x+5y+14=0 \\ 7x-25y-32=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 337y^2-40y-377=0 \\ x = \frac{25y+32}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=-1 \\ x = \frac{2887}{337}; y = \frac{377}{337} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm (x, y) là $(1; -1)$

và $\left(\frac{2887}{337}; \frac{377}{337}\right)$. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình hai ẩn chứa căn thức cần sử dụng bất đẳng thức. Đa số các bạn đều giải theo cách trên, tuy nhiên một số bạn tính thiếu nghiệm $(x; y) = \left(\frac{2887}{337}; \frac{377}{337}\right)$. Ngoài ra,

có bạn sử dụng phương pháp tọa độ như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đặt $A(1; 2), B(-1; -5), C(3; 0)$, $M(x; y)$ thì phương trình đã cho có thể viết thành

$$3MA+2\sqrt{5}MB+\sqrt{5}MC = \sqrt{34(MA^2+MB^2+MC^2)}$$

sử dụng BĐT Bunyakovsky để suy ra

$$\frac{MA}{3} = \frac{MB}{2\sqrt{5}} = \frac{MC}{\sqrt{5}}$$

và tiếp tục giải như trên.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Lào Cai:** Bùi Phương Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, Chu Ngọc Chiến, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Lê Phương Thanh, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Thùy Linh, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Ngệ An:** Nguyễn Bá Linh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Quảng Bình:** Phạm Cảnh Hưng, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Khánh Vinh, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Long An:** Phạm Quý Lộc, 11T1, Nguyễn Thị Ngân Trúc, 12 T1, THPT chuyên Long An; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thê Vinh, Biên Hòa; **Gia Lai:** Lê Tôn Đăng Khoa, 11A2,

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài 47484. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có

$$\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \dots < \frac{1}{2} < \log_2 \frac{n+1}{n}.$$

Giải thích:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \frac{1}{n-2} < \dots < \frac{1}{2} < 1 < 2.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[k]{2} = \sqrt[k]{\underbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1}_{k-1 \text{ số } 1}} \leq \frac{2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k-1 \text{ số } 1}}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Nhưng đẳng thức không thể xảy ra nên

$$\sqrt[k]{2} < \frac{k+1}{k}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \sqrt[k]{2} &< \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} &< \frac{n+1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} &< \log_2 \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, sử dụng kết quả quen thuộc

$$\ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0,$$

ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &< \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow \ln \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \ln \frac{n+1}{2} &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Từ chứng minh trên và do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n+1}{2} = +\infty$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = +\infty. \quad \square$$

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, một số bạn đã giải dựa vào hai kết quả sau:

$$\ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0; \quad (3)$$

$$x < \log_2(1+x), \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{3} \right]. \quad (4)$$

Để chứng minh (3), (4), xét các hàm:

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad \text{và} \quad g(x) = x - \log_2(1+x),$$

rồi chứng tỏ

$$f'(x) > 0, \quad \forall x > 0; \quad g'(x) < 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{3} \right].$$

Từ (3) và (4) ta suy được BĐT cần chứng minh.

Các bài gửi về đều có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Bắc Ninh:** Vũ Đăng Linh, 11A, THPT Thuận Thành 1; **Nam Định:** Lê Phương Thanh, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** Lê Thị Thu Sương, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; **Quảng Nam:** Trần Thiện Thu Uyên, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Lê Đào Văn Trung**, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Long An:** Lê Trí Phú, Nguyễn Thị Ngân Trúc, 12T1, THPT chuyên Long An; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, Đinh Phong Phú, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

TRẦN HỮU NAM

Bài 48484. Giả sử đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC , CA và AB theo thứ tự tại D , E và F . Kẻ DG vuông góc với EF (G thuộc EF), gọi A' là trung điểm của đoạn DG . Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn (I) tại H . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FGH . Chứng minh rằng $IK \perp BH$.

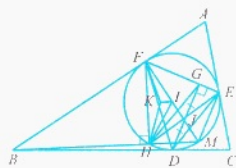
Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O). Khi đó các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và D hoặc song song hoặc cắt nhau trên đường thẳng AC .

(Bạn đọc tự chứng minh bổ đề này).

Trở lại bài toán T8/484.

Kẻ đường kính FM của đường tròn (I) . Khi đó ta có $EM \perp EF$, kết hợp $GD \perp EF \Rightarrow EM \parallel GD$. Chú ý rằng J là trung



điểm của GD , suy ra chùm (EM, EJ, ED, EG) là chùm điều hòa. Từ đó các giao điểm của các chùm điều hòa nói trên với đường tròn (I) lập thành một tứ giác điều hòa (Dựa vào tính chất của tỉ số kép của hàng điểm thẳng và tỉ số kép của hàng điểm tròn). Do đó tứ giác chéo $MHFD$ là tứ giác điều hòa, theo Bổ đề trên các tiếp tuyến tại F và D của đường tròn (I) cắt nhau trên đường thẳng MH , nghĩa là ba điểm B, M, H thẳng hàng. Từ đây, suy ra $FH \perp BH$ (1)

Lại vì $IF = IH$ và $KF = KH$, suy ra IK là trung trực của đoạn FH , do đó $IK \perp FH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK \parallel BH$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt: **Lào Cai:** Nguyễn Minh Hiệu, 12 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** Vũ Đăng Linh, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Hung Yên:** Phạm Thị Phương Huyền, Đoàn Phú Thành, Nguyễn Tiến Thành, Nguyễn Trung Hiếu, Chu Ngọc Chiến, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Bá Linh, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Quỳnh Lưu; **Tăng Văn Minh Hùng,** 11T1, THPT Đô Lương 1, Đô Lương; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** Mai Thanh Hằng, Lê Thị Thu Sương, 10T2, Nguyễn Trung Kiên, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** Trần Thiện Thu Uyên, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Dà Nẵng:** Phạm Hiếu, Nguyễn Đức Toàn, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Phùng Trọng Nghĩa, Nguyễn Tuấn Lộc, 10 Toán, Nguyễn Quốc Tuấn, Võ Minh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Bình Phước:** Lưu Trí Cường, 11T4, THPT chuyên Bình Long; **Đắk Lắk:** Võ Phan Anh Quân, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Phú Yên:** Nguyễn Phương Kim Trang, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đồng Tháp:** Võ Hoàng Huy, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu; **Bà Rịa -Vũng Tàu:**

Phạm Thế Nguyễn, 11CT1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Long An:** Phan Quý Lộc, 11T1, THPT chuyên Long An; **Cần Thơ:** Tăng Trung Lộc, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Phan Thanh Đại Dương, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** Đinh Phong Phú, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **TP. Hồ Chí Minh:** Đặng Đức Trường, Bùi Khánh Vinh, Nguyễn Thủy Kim Ngân, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/484. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Lời giải. Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$. Ta có $a, b, c > 0$, $abc = 1$ và $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = bc + ca + ab$. Từ giả thiết

$$\begin{aligned} 16 &\leq (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + 1 = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + 1 \\ &\Rightarrow 15 \geq abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \\ &= (a+1)(b+1)(c+1) = (a+1) \left[(\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \right] \geq \\ &\geq (a+1)(\sqrt{bc} + 1)^2 = (a+1) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1 \right)^2 \\ &\Rightarrow 15a \geq (a+1)(1 + \sqrt{a})^2 = (a+1) \left[(a+1) + 2\sqrt{a} \right] \\ &\Rightarrow 16a \geq (a+1)^2 + 2(a+1)\sqrt{a} + a = (a+1 + \sqrt{a})^2 \\ &\Rightarrow 4\sqrt{a} \geq a+1 + \sqrt{a} \Rightarrow \frac{5}{4} \geq a - 3\sqrt{a} + \frac{9}{4} = \left(\sqrt{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \geq \sqrt{a} - \frac{3}{2} \Rightarrow q \geq a; q = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Do vai trò của a, b, c trong (1) là như nhau nên ta có $q \geq b; q \geq c$. Do đó: $(q-a)(q-b)(q-c) \geq 0$
 $\Rightarrow q^3 - q^2(a+b+c) + q(ab+bc+ca) - abc \geq 0$
 $\Rightarrow q^3 - q^2(a+b+c+ab+bc+ca) + (q^2+q)(ab+bc+ca) - 1 \geq 0$
 $\Rightarrow q^3 - 13q^2 + (q^2+q)P - 1 \geq 0$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1+13q^2-q^3}{q+q^2} = \frac{13-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $P = \frac{13-\sqrt{5}}{2}$ khi và chỉ khi trong ba số a, b, c

có một hằng số bằng $q = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ và hai số còn lại

bằng $\frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Vậy khi đó ta được nghiệm là

$$(x; y; z) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t; t; \frac{3-\sqrt{5}}{2}t \right) \text{ và hai hoán vị vòng}$$

quanh, trong đó t là số thực dương tùy ý. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán đại số khó, có nhiều biến đổi hay. Đại đa số các bạn học sinh gửi lời giải có dùng đạo hàm để khảo sát hàm số. Hoan nghênh các bạn lớp 9, lớp 10 tham gia và có lời giải đúng: **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên;

Thái Bình: Nguyễn Thị Thùy Linh, 10T2, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Phạm Anh Đức, 9B, TICS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc Khánh, 10A1, THPT Đức Thọ, Đức Thọ; **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đắk Lắk:** Lê Ngọc Đức, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/484. Với mỗi số nguyên dương n , ký hiệu $f(n)$ là tổng bình phương các ước số nguyên dương của n . Hãy tìm tất cả các số nguyên dương

$$n \text{ sao cho } \sum_{k=1}^n f(k) \geq \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn Phan Thanh Đại Dương, 11T, THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre).

Với mỗi $k \in [1, n]$, trong các số từ 1 đến n có đúng

$$\left[\frac{n}{k} \right] \text{ số là bội của } k. \text{ Do đó trong tổng } \sum_{k=1}^n f(k)$$

mỗi số k^2 được tính $\left[\frac{n}{k} \right]$ lần. Thành thử ta cần tìm

tất cả n sao cho

$$T_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \left[\frac{n}{k} \right] \geq \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

Giả sử $n = q_k k + r_k$ ($0 \leq r_k < k$). Khi đó $\left[\frac{n}{k} \right] = q_k$ và

$$k^2 \left[\frac{n}{k} \right] = k^2 \left(\frac{n-r_k}{k} \right) = nk - k r_k. \text{ Vậy khi đó ta có}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n nk - \sum_{k=1}^n k r_k = \frac{n^2(n+1)}{2} - S_n \text{ với } S_n = \sum_{k=1}^n k r_k.$$

Ta xét hai trường hợp sau:

• Nếu n lẻ: $n = 2m+1$ ($m \geq 1$) (dễ thấy $m = 0$ không thỏa mãn đề bài). Ta có với $k = m+1, m+2, \dots, 2m$ thì r_k tương ứng là $m, m-1, \dots, 1$. Do đó

$$\begin{aligned} S_n &\geq \sum_{k=m+1}^{2m} k r_k = (m+1)m + (m+2)(m-1) + \dots + 2m.1 \\ &= \sum_{k=1}^m k(2m+1-k) = (2m+1) \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m k^2 \\ &= \frac{(2m+1)m(m+1)}{2} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} = \frac{n^3 - n}{12}. \end{aligned}$$

Thành thử ta có

$$T_n \leq \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^3 - n}{12} = \frac{5n^3 + 6n^2 + n}{12} < \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

• Nếu n chẵn: $n = 2m$.

Với $m = 1 \Leftrightarrow n = 2$ thì thay vào ta thấy thỏa mãn.

Với $m > 1$ và $k = m+1, \dots, 2m-1$ thì r_k tương ứng là $m-1, m-2, \dots, 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S_n &\geq \sum_{k=m+1}^{2m-1} k r_k = \sum_{k=1}^{m-1} k(2m-k) = 2m \sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k^2 = \\ &= \frac{n(n-2)(2n+1)}{24}. \end{aligned}$$

Vậy ta được

$$T_n \leq \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n-2)(2n+1)}{24} = \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $r_k = 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, m$.

Tức là $2m$ chia hết cho $1, 2, \dots, m$.

Với $m = 2, n = 4$ (thỏa mãn)

Với $m = 3, n = 6$ (thỏa mãn)

Với $m > 3$, do $n:(m-1), n:(m-2)$ và $(m-1, m-2) = 1$ nên $n:(m-1)(m-2)$. Suy ra

$$n \geq (m-1)(m-2) \Leftrightarrow 2m \geq (m-1)(m-2) \Leftrightarrow m^2 - 5m + 2 \leq 0$$

$\Rightarrow m < 5 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow n = 8$. Thử lại thấy không thỏa mãn vì 8 không chia hết cho 3. Vậy các số cần tìm là $n = 2, 4, 6$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn Phan Thanh Đại Dương còn có bạn Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN,

ĐHQG Hà Nội tham gia giải và có lời giải đúng, chính xác (tuy có hơi dài).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/484. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn các điều

kiện $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + 4^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3-\sqrt{5})^n x_n$.

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của đa số các bạn).

Từ giả thiết, ta có

$$x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + 4^{-n}, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

và

$$x_{n+1}x_{n-1} = x_n^2 + 4^{-n+1}, 1 < n \in \mathbb{N}^*$$

hay

$$\frac{1}{4}x_{n+1}x_{n-1} = \frac{1}{4}x_n^2 + 4^{-n}, 1 < n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) và (2), ta thu được

$$x_{n+1}\left(\frac{1}{4}x_{n-1} + x_{n+1}\right) = x_n\left(\frac{1}{4}x_n + x_{n+2}\right), 1 < n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Hay } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{4}x_n + x_{n+2}}{\frac{1}{4}x_{n-1} + x_{n+1}}, 1 < n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Xét dãy (y_n) xác định như sau:

$$y_n = \frac{1}{4}x_n + x_{n+2}, n \in \mathbb{N}^* \text{ thì } y_1 = \frac{1}{4}x_1 + x_3 = \frac{3}{4}.$$

Từ (3) ta có

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{y_k}{y_{k-1}}, 1 < k \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{y_{k+1}}{y_k} &= \prod_{k=2}^n \frac{y_k}{y_{k-1}} \Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_2} = \frac{y_n}{y_1} \Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_2} = \frac{\frac{1}{4}x_n + x_{n+2}}{y_1} \\ &\Leftrightarrow 4x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Phương trình sai phân (4) với điều kiện

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$, có nghiệm là

$$x_n = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{10+4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n \text{ hay}$$

$$(3-\sqrt{5})^n x_n = \frac{10-4\sqrt{5}}{5} + \frac{10+4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}, 1 < k \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (3-\sqrt{5})^n x_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10-4\sqrt{5}}{5} + \frac{10+4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \right) \\ &= \frac{10-4\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Kết luận: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (3-\sqrt{5})^n x_n = \frac{10-4\sqrt{5}}{5}. \quad \square$$

➤Nhận xét. Đây là dạng toán về lớp dãy phi tuyến tính hóa được (dựa được về phương trình sai phân bậc hai với hệ số hằng). Có rất nhiều cách giải bằng các cách đặt ẩn phụ khác nhau nhưng tựu chung đều đưa về xét các phương trình sai phân bậc hai tương ứng và đều cho đáp số đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân; **Bắc Ninh:** Vũ Đăng Linh, 11A1, THPT Thuận Thành; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** Võ Hoàng Huy, Huỳnh Tân Phúc, Phạm Công Minh, 11T THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN; **Huế:** Lê Cẩm Thanh Hà, 12T2, Lê Thị Thu Sương, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** Nguyễn Quốc Tuấn, Chu Văn Phương, 11T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** Lê Trí Phú, Nguyễn Thị Ngân Trúc, 12T1, Phan Quý Lộc, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Lê Phương Thanh, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** Đặng Thị Trà My, Đàm Thị Xuân Ý, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Nguyễn Văn Khang, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông.

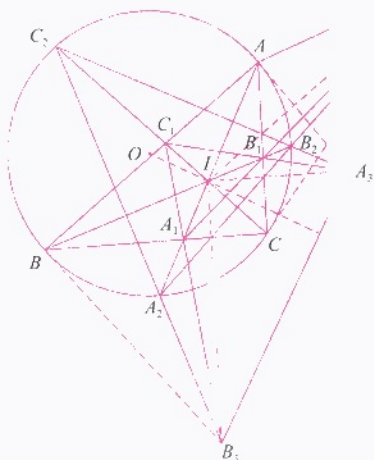
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/484. Cho tam giác ABC. Gọi (O), I theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. AI cắt BC tại A_1 và cắt lại (O) tại A_2 . Tương tự ta có B_1, B_2 và C_1, C_2 . B_1C_1 và B_2C_2 cắt nhau tại A_3 ; A_1C_1 và A_2C_2 cắt nhau tại B_3 ; A_1B_1 và A_2B_2 cắt nhau tại C_3 . Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với OI.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, (O), I theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp. BI, CI theo thứ tự lại cắt (O) tại B', C' . Khi đó $B'C'$ là trung trực của AI.

(Bạn đọc tự chứng minh bổ đề này)



Gọi (I, O) là đường tròn tâm I bán kính bằng không. Chú ý rằng $B_1 = AC \cap BB_2$, $C_1 = AB \cap CC_2$.

áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm (ABC_2) , suy

ra B_1, C_1 và $AA \cap B_2C_2$ thẳng hàng. Kết hợp với $A_3 = B_1C_1 \cap B_2C_2$, suy ra $A_3 \in AA$. Nói cách khác, A_3A tiếp xúc với (O) . Theo bổ đề trên $A_3A = A_3I$.

Vậy $\rho_{A_3(O)}^2 = A_3A^2 = A_3I^2 = \rho_{A_3(I,O)}^2$.

Tương tự $\rho_{B_3(O)}^2 = \rho_{B_3(I,O)}^2$ và $\rho_{C_3(O)}^2 = \rho_{C_3(I,O)}^2$.

Điều đó có nghĩa là A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với OI . $\square$

➤**Nhận xét.** 1) Khả nhiều bạn tham gia giải bài toán này nhưng một số bạn tính toán quá dài.

2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt:

Lào Cai: Nguyễn Minh Hiệu, 12T, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai; **Đà Nẵng:** Nguyễn Đức Toàn, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng;

Lâm Đồng: Nguyễn Tuấn Lộc, 10T, Võ Minh Quân, Nguyễn Quốc Tuấn, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Phước:** Lưu Trí Cường, 11T4, THPT chuyên Bình Long, TX. Đồng Xoài;

TP. Hồ Chí Minh: Trần Vũ Duy, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bến Tre:** Phan Thanh Đại Dương, 11T, THPT chuyên Bến Tre, TP. Bến Tre;

Lời giải. Do con chim bay với tốc độ không đổi nên nó chỉ có gia tốc pháp tuyến:

$$a = a_n = \frac{v_0^2}{R},$$

trong đó R là bán kính cong của quỹ đạo tại điểm đang xét. Tại vị trí có độ cao bằng nửa độ cao cực đại, vận tốc $\vec{v}$ của hòn đá lập với phương ngang một góc β . Do vận tốc của hòn đá theo phương ngang không đổi nên: $v_0 \cos \alpha = v \cos \beta$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgh_{\max}}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Độ cao cực đại của hòn đá: $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Tại điểm đang xét gia tốc của hòn đá theo phương pháp tuyến bằng: $a_{n\text{đá}} = \frac{v^2}{R} = g \cos \beta$.

Từ các phương trình trên ta sẽ tìm được gia tốc của con chim tại điểm có độ cao bằng nửa độ cao cực đại của hòn đá:

$$a_n = \frac{g \cos \alpha}{[1 - (\sin^2 \alpha) / 2]^{3/2}}. \quad \square$$

➤**Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lý này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

12A101, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng;
12A101, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng;
12A101, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng;
12A101, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng;

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/488. Given an infinite sequence of positive integers $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ such that $a_{i+1} - a_i \geq 8$ for all $i=1,2,3,\dots$. For each n , let $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Show that for each n , there are at least two square numbers inside the half-open interval $[s_n, s_{n+1})$.

Problem T11/488. Given two positive sequences $(a_n)_{n \geq 0}$ and $(b_n)_{n \geq 0}$ which are determined as follows $a_0 = \sqrt{3}, b_0 = 2$ and

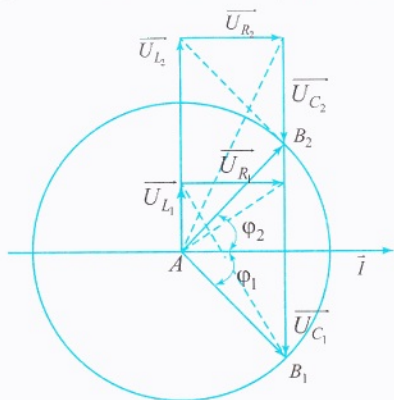
$$\begin{cases} a_n + b_n = \frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 \end{cases}$$

dùng C , mắc nối tiếp. Cho biết $L = CR^2$. Thay đổi tần số góc của điện áp người ta tìm được hai giá trị là $\omega_1 = 50\pi$ (rad/s) và $\omega_2 = 80\pi$ (rad/s) ứng với hệ số công suất của đoạn mạch có giá trị bằng nhau. Với hai giá trị bằng nhau đó hãy xác định hệ số công suất của đoạn mạch.

Lời giải. Từ giả thiết ta có: với mọi ω thì

$$Z_L = \frac{R^2}{Z_C} \Rightarrow U_{RL} \perp U_{RC}.$$

Từ giản đồ vector ta có hệ số công suất trong hai .



for all $n=0,1,2,\dots$. Show that they converges and find the limits.

Problem T12/488. Given a triangle ABC with $AB \neq AC$. A circle (O) passing through B, C intersects the line segments AB and AC at M and N respectively. Let P be the intersection of BN and CM . Let Q be the midpoint of the arc $\widehat{BC}$ which does not contain M, N . Let K be the incenter of PBC . Show that KQ always goes through a fixed point when (O) varies.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

trường hợp bằng nhau nên : $U_R = U \cos \varphi =$ hằng số. Ta có

$$\begin{cases} \tan \varphi_1 = \frac{Z_{C_1} - Z_{L_1}}{R} \\ \tan \varphi_2 = \frac{Z_{L_2} - Z_{C_2}}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{C_1} - Z_{L_1} = Z_{L_2} - Z_{C_2} \Rightarrow Z_{L_1} + Z_{L_2} = Z_{C_1} + Z_{C_2}$$

$$\Rightarrow Z_{L_1} + \frac{8}{5} Z_{L_1} = Z_{C_1} + \frac{5}{8} Z_{C_1} \Rightarrow Z_{L_1} = \frac{5}{8} Z_{C_1}$$

$$\Rightarrow R^2 = Z_{L_1} Z_{C_1} = \frac{5}{8} Z_{C_1}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{5}{8}} Z_{C_1}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi_1 = \frac{Z_{C_1} - \frac{5}{8} Z_{C_1}}{\sqrt{\frac{5}{8}} Z_{C_1}} = \frac{3}{\sqrt{40}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

□

➤ **Nhận xét.** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** Phan Trần Hường, 12T1, Trương Xuân Như Ngọc, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Diễm Ly, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hải Dương:** Nguyễn Đăng Sơn, 12A, THPT Nam Sách.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 29

Problem. Find the coordinates expression $\begin{cases} x' = ax + by + x \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$ of a single transformation which maps the triangle ABC onto the triangle $A'B'C'$ with $A(1;2)$, $B(2;2)$, $C(1;4)$, $A'(4;3)$, $B'(6;3)$ and $C'(4;7)$.

Solution: We observe that we can use a dilation with the ratio 2, at the center M which is the intersection of AA' and BB' to map ABC onto $A'B'C'$. But since M is different from the origin, it seems that's it is not easy to get the corresponding coordinates expression. To get the coordinates expression easier, we can combine a dilation at the origin with a translation as follows.

The dilation at the origin with the ratio 2 will map ABC onto $A''B''C''$ with $A''(2;4)$, $B''(4;4)$, $C''(2;8)$. The coordinates expression of this dilation is $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$. Then

we translate $A''B''C''$ onto $A'B'C'$ with the translation vector $\overrightarrow{B''B'} = (2; -1)$. The coordinates expression of this

translation is $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$. Therefore, one single coordinates expression which maps ABC onto $A'B'C'$ is $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$.

TỪ VỰNG

<i>Coordinates expression:</i>	biểu thức tọa độ
<i>Transformation</i>	phép biến đổi
<i>Map</i>	ánh xạ, biến đổi
<i>Dilation</i>	phép vị tự
<i>Combine</i>	kết hợp
<i>Translate</i>	tịnh tiến

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

Bài toán. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^4 + 2x^3 + nx^2 + 8x + 16$. Tìm tham số n sao cho tồn tại một đường thẳng cắt (C) tại 4 điểm phân biệt.

Lời giải. Đầu tiên, ta thấy rằng việc tìm các giao điểm của (C) với đường thẳng $y = ax + b$ tương đương với việc tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^3 + nx^2$ và đường thẳng $y = ax + b - (8x + 16)$. Do

đó ta có thể giả sử $f(x) = x^4 + 2x^3 + nx^2$. Và tương tự, với bài toán này ta có thể bỏ qua bất cứ phần tuyến tính " $px + q$ " nào khi nó phát sinh. Thứ hai, bằng cách đổi biến và bỏ qua phần tuyến tính ta có thể biến đổi $f(x) = x^4 + 2x^3 + nx^2$ thành dạng trùng phương mà ta biết rất rõ. Cụ thể, ta có: $(x+a)^4 + 2(x+a)^3 + n(x+a)^2 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + \dots + 2x^3 + 6ax^2 + \dots + nx^2$. Do đó nếu đổi biến $x := x - \frac{1}{2}$ và bỏ qua phần tuyến tính thì ta có thể giả sử rằng

$f(x) = x^2 + \left(n - \frac{3}{2}\right)x^2$. Lưu ý rằng, đổi biến có nghĩa là tịnh tiến đồ thị sang trái hoặc sang phải. Với bài toán này, ta có thể tịnh tiến đồ thị một cách tùy ý mà không mất đi sự tổng quát. Với hàm số sau cùng $f(x) = x^4 + \left(n - \frac{3}{2}\right)x^2$ ta có thể

kiểm tra được rằng đồ thị của nó có dạng hình chữ W hay hình chữ V phụ thuộc vào $n - \frac{3}{2}$ có âm hay không (cần thận hơn, ta có thể khảo sát dấu của đạo hàm $f'(x)$). Từ những thông tin về đồ thị ta thấy rằng những đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài tồn tại khi và chỉ khi $n - \frac{3}{2} < 0$ hay $n < \frac{3}{2}$.

Lưu ý: Tôi đã biết được bài toán và lời giải này qua một số tài liệu trên mạng.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài đến Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** Bùi Thị Thùy Trang, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Đặng Sơn, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách; **Thái Bình:** Bùi Sang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghe An:** Tăng Văn Minh Hùng, 11T1, THPT Đỗ Lương I, Đô Lương; **Thừa Thiên Huế:** Phan Cảnh Minh Phước, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (Hà Nội)

<https://tuphnhoc.org>

Số 488(2-2018)

TOÁN HỌC
Tuổi trẻ 35

từ “*Shunya*” (có nghĩa là “rỗng”) để thế vào chỗ trống. Khi đó số 201 được đọc là “MỘT. SHUNYA. HAI”. Rõ ràng dấu hiệu *shunya* này có chức năng của một con số không mà ta sẽ gọi là con số – không Ấn Độ. Về sau từ “*Shunya*” (= rỗng) được thay bởi *Bindu* “điểm” (một chấm). Để có được số – không và chữ số 0 toán học các nhà bác học Ấn Độ còn cần phải xóa đi cái ranh giới vô hình giữa khái niệm “*Shunya*” (= rỗng) với khái niệm “*cái không*” (= không có số lượng) và cần tìm cho nó một ký hiệu. Chưa đầy nửa thế kỷ sau họ đã có bước nhảy vọt trong nhận thức và đã ghép – nối hai khái niệm đó. Trong công trình “*Học thuyết hoàn thiện của Brahma*” (628) nhà toán học và thiên văn học thiên tài Ấn Độ *Brahmagupta* (598 – 660) viết rằng: *nếu lấy một số trừ đi chính nó thì được không*. Ông còn lập luận một cách trực giác rằng các con số có thể giải thích như “*tài sản*”, “*món nợ*” và cho rằng tổng của tài sản và món nợ là hiệu của chúng, còn nếu chúng bằng nhau thì tổng sẽ bằng không. Đó là định nghĩa quen thuộc về số 0. Cái “không” thu được ở đây là *có giá trị bằng 0* hay *không có số lượng*. Các nhà bác học Ấn Độ cần tìm cho nó một cái tên và cho nó một ký hiệu. Ở đây người ta có thể dùng bất cứ một ký hiệu nào nhưng chỉ với một điều kiện là tự bản thân nó – ký hiệu đó, phải có nghĩa số không, tức là bằng 0. Người ta cho rằng khái niệm hư không là một khái niệm trung tâm, quan trọng nhất và cũng là trừu tượng nhất của Phật giáo. Có thể nói đó là lý do thôi thúc các nhà bác học Ấn Độ đặt tên cho cái không cũng bằng từ “*shunya*” (= “*trống rỗng*”, “*trống không*”) và cho nó một ký hiệu bởi khoanh tròn nhỏ liền nét “0” – được cho là tượng trưng cho vòng tuần hoàn của sự sống trong văn hóa Ấn Độ. Kể từ thời điểm lịch sử đó đã xuất hiện số “0” quen thuộc với chúng ta như ngày nay – đó là con số cuối cùng của các chữ số Hindu. Người ta cho rằng đó là một trong những thành tựu trí tuệ vĩ đại nhất của nền văn minh nhân loại. Hình ảnh của số “0” như vậy được phát hiện ở số 270 khắc năm 876 trên một phiến đá của một bức tường ở thành phố Gwalior (Ấn Độ). Nhà toán học *Brahmagupta* đã đưa số “0” trở nên tuyệt vời hơn khi ông sử

dụng nó để tính toán như bất cứ số nào khác. Về điều đó, trong cuốn sách in năm 662, Đức Giám mục Syria là *Severe Sebekt* ở Tu viện Qenesre có ghi rằng: “*Người ta không đủ lời để ca ngợi cái phương pháp đầy thuyết phục trong việc thực hiện cái phép tính*”. Một cách tự nhiên các chữ số Ấn Độ theo bước chân của những đoàn Lạc đã cùng với chủ nhân của chúng hay các đoàn thương thuyền đến với các “*Phiên chợ Batur*” tập nập hay thành Baghdad – một đô thị phồn hoa của thế kỷ III và cũng là trung tâm của Đế quốc Hồi giáo mới thành lập. Và cũng từ đó bắt đầu một cuộc di cư tự nhiên của các con số Ấn Độ đến thế giới A-rập rồi từ A-rập đến Châu Âu và lan tỏa khắp nơi, ...

Lịch sử ghi lại rằng vào thế kỷ VIII thế giới khoa học Hồi giáo làm quen được với hệ thống số Ấn Độ khi *Al Fazari* dịch tác phẩm của *Brahmagupta* ra tiếng A-rập vào khoảng năm 773. Họ gọi khoanh tròn nhỏ là “*sifr*” = “*không trống*”. Khi cuốn sách này được dịch ra tiếng Latinh thì *Fibonacci* (1170 – 1250) đã đặt tên cho khoanh tròn hay chữ số 0 là *Zephyrum* và người ta dùng tên này cho đến thế kỷ XV. Sau vài thay đổi từ này trở thành “*zefiro*” trong tiếng Italia và từ năm 1491 người ta dùng chữ zero cho đến bây giờ. Nhà toán học và thiên văn học thiên tài Pháp P. Laplace (1749 – 1827), vị cổ vắn tối cao về khoa học cơ bản của Hoàng đế *Napoleon Bonaparte* của nước Pháp đánh giá rằng: “*Chính nhờ Ấn Độ mà chúng ta học được phương pháp tài tình chỉ dùng có mười chữ số mà ta viết đủ các số: mỗi chữ số vừa có một giá trị tuyệt đối, vừa có một trị số tùy theo vị trí của nó. Ý đó tinh tế và đơn giản đến nỗi chính sự đơn giản ấy làm ta khó mà hiểu hết sự kỳ diệu và công lao của người Ấn Độ. Muốn thấy hết sự tài tình của phương pháp đó chỉ cần nhớ rằng ngay những bậc thiên tài vĩ đại nhất của khoa học Hy Lạp là Archimedes và Appoloniuss cũng chưa nghĩ ra được*”. Và nữa, vai trò của các máy tính điện tử trong thế giới ngày nay đang trở thành quyết định đối với mọi mặt của đời sống con người. Những máy tính này không thể xuất hiện nếu con số “0” không hiện diện trong vương quốc diệu kỳ của những con số Ấn Độ trong nền văn minh hiện đại.

Mặc dù vắng bóng khá lâu trong các đề thi VMO, IMO nhưng trong các đề thi chọn đội tuyển của các Tỉnh vẫn giữ lại câu bất đẳng thức (BDT), lý do đơn giản vì đây là câu có thể đánh giá được kỹ năng cũng như tư duy đại số của mỗi học sinh. Một thực tế là với mảng BDT gần như có đầy đủ các công cụ để xử lý, nên để có được một câu BDT vừa không quá nặng nề về kỹ thuật, tính toán vừa có thể đánh giá được mức độ tư duy của học sinh và tránh những tư duy lối mòn là điều không hề dễ.

Một trong số những hướng ra đề đảm bảo được yêu cầu như vậy là xây dựng BDT với giả thiết ràng buộc các biến là một đẳng thức. Điều này sẽ gây khó cho các công cụ mà ta đã nói ở trên, bởi thông thường nếu áp dụng các công cụ đó thì điều kiện của đẳng thức rất ít khi được đảm bảo và việc chứng minh được bài toán là điều rất khó khăn. Thông qua đề thi chọn đội của Tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu năm 2017, bài viết sẽ minh họa cho các cách tiếp cận BDT dựa trên một đẳng thức. Hy vọng qua đó bạn đọc sẽ thấy được rằng việc học toán sẽ hiệu quả hơn, nếu ta xem mỗi bài toán là một hành trình khám phá thay vì là một đề thi.

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ thì:

• tồn tại A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn sao cho:

$$a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C;$$

• tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}; b = \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}; c = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}};$$

• tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}; b = \sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}; c = \sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}.$$

Chứng minh. Ý tưởng xuất phát từ đẳng thức lượng giác quen thuộc: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.

- Từ giả thiết ta dễ dàng có được $0 < a, b < 1$, do đó

tồn tại $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ sao cho: $a = \cos A, b = \cos B$. Thay

vào đẳng thức ta thu được:

$$c = \cos C; 0 < C < \frac{\pi}{2}; A + B + C = \pi,$$

hay nói cách khác là tồn tại A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn sao cho: $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.

- (Sử dụng phép thế Ravi) Giả sử k, m, n là ba cạnh của tam giác nhọn nói ở trên. Vì tam giác là tam giác nhọn nên k^2, m^2, n^2 cũng là ba cạnh của một tam giác, nên tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $k^2 = x + y, m^2 = y + z, n^2 = z + x$ và ta được: $a = \cos A = \frac{k^2 + m^2 - n^2}{2km} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$. Tương tự:

$$b = \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

- Lý do có cách đặt cuối cùng mời bạn đọc xem trong TH&TT số 484.

Hệ quả 1. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ thì:

• tồn tại A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn sao cho:

$$a = 2 \cos A, b = 2 \cos B, c = 2 \cos C;$$

• tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = \frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}; b = \frac{2y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}; c = \frac{2z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}};$$

• tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = 2 \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}; b = 2 \sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}; c = 2 \sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}.$$

Hệ quả 2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$ thì tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = \frac{y+z}{x}; b = \frac{z+x}{y}; c = \frac{x+y}{z}.$$

Hệ quả 3. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$ thì tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$a = \frac{x}{y+z}; b = \frac{y}{z+x}; c = \frac{z}{x+y}.$$

2. Bất đẳng thức trong đề thi tuyển và các hướng suy luận

Bài toán (Chọn đội tuyển HSG. Bà Rịa Vũng Tàu, năm 2017). Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{(b+2)(c+2)}} + \frac{b}{\sqrt{(c+2)(a+2)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+2)(b+2)}} \geq 1.$$

Lời giải và phân tích. Áp dụng BDT Cauchy ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{(b+2)(c+2)}} \geq \frac{2a}{b+c+4}.$$

Tương tự cho hai số hạng còn lại, vậy nên ta cần chứng minh:

$$\frac{2a}{b+c+4} + \frac{2b}{c+a+4} + \frac{2c}{a+b+4} \geq 1.$$

Áp dụng BDT Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{b+c+4} + \frac{2b}{c+a+4} + \frac{2c}{a+b+4} \\ &= \frac{2a^2}{a(b+c+4)} + \frac{2b^2}{b(c+a+4)} + \frac{2c^2}{c(a+b+4)} \\ &\geq \frac{2(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$2(a+b+c)^2 \geq 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c).$$

Theo giả thiết ta có:

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (4-abc)$$

nên BDT được viết lại là:

$$(a+b+c)^2 + 4 \geq 4(a+b+c) + abc \Leftrightarrow a+b+c-2 \geq \sqrt{abc} \quad (1)$$

(vì dễ dàng chứng minh được $a+b+c > 2$).

a) Khai thác trực tiếp giả thiết

Cách 1. (Sử dụng phép thế tận dụng giả thiết bài toán) Vì $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ nên tồn tại ba số thực dương x, y, z :

$$a = 2\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}, b = 2\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}, c = 2\sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}.$$

BDT (1) được viết lại là:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}} + \sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}} - 1 \\ & \geq \frac{2xyz}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{xy(x+y)} + \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} \\ & \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)} + \sqrt{2xyz}. \end{aligned}$$

Vì biểu thức trong căn của hai vế có khá nhiều nhân tử chung, suy nghĩ tự nhiên ta sẽ bình phương hai vế.

Khi đó BDT tương đương với:

$$\begin{aligned} & 2\sum_{\text{cyc}} \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{x(x+y)(x+z)} \geq 4xyz + 2\sqrt{2xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \\ & \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \sqrt{x(x+y)(x+z)} \geq 2\sqrt{xyz} + \sqrt{2(x+y)(y+z)(z+x)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Hướng 1. (Sử dụng bổ đề quen thuộc)

BDT (2) tương đương với:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{x+y}{z} \cdot \frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{y+z}{x} \cdot \frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{z+x}{y} \cdot \frac{x+y}{z}} \\ & \geq 2 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{y+z}{x} \cdot \frac{z+x}{y} \cdot \frac{x+y}{z}} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử z là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z . Khi đó:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{x+z}} \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}.$$

(Cách chứng minh và ứng dụng của bổ đề này mời bạn đọc xem bài viết “Ứng dụng một bổ đề hay trong chứng minh BDT – TH&TT số 469”).

$$\text{Ta lại có: } \frac{xy}{(y+z)(x+z)} = \frac{1}{\frac{z(x+y+z)}{xy} + 1}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{1}{\frac{4z(x+y+z)}{(x+y)^2} + 1} = \frac{(x+y)^2}{(x+y+2z)^2}.$$

Kết hợp với bổ đề trên ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x+y+2z)^2}} \\ & \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2z}{x+y}}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2z}{x+y}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Để đơn giản, đặt $t = \frac{z}{x+y}$, BDT được viết lại là

$$2\sqrt{\frac{1}{1+2t}} + \sqrt{t} \geq \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{t}{(2t+1)^2}}.$$

Với BDT này dễ nhất là sử dụng công cụ hàm số để khảo sát. Tuy nhiên vẫn có thể chứng minh bằng các phép biến đổi tương đương như sau: Bình phương hai vế, BDT tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{4}{1+2t} + t + 4\sqrt{\frac{t}{1+2t}} \geq 2 + \frac{4t}{(2t+1)^2} + 4\sqrt{\frac{2t}{(2t+1)^2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(2t^2-t-2)}{(2t+1)^2} \geq 4\sqrt{\frac{2t}{(2t+1)^2}} - 4\sqrt{\frac{t}{1+2t}} \\ & = \frac{4t(1-2t)}{(2t+1)^2 \left(\sqrt{\frac{2t}{(2t+1)^2}} + \sqrt{\frac{t}{1+2t}} \right)}. \end{aligned}$$

Vì $t \leq \frac{1}{2}$ nên ta cần có:

$$(2+t-2t^2) \left(\sqrt{\frac{2t}{(2t+1)^2}} + \sqrt{\frac{t}{1+2t}} \right) \geq 4t.$$

Cũng vì $t \leq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{\frac{2t}{(2t+1)^2}} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}; \sqrt{\frac{t}{1+2t}} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}$. Do

đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\sqrt{\frac{t}{2}}(2+t-2t^2) \geq 2t \Leftrightarrow t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)(2t^2+3t+2) \geq 0.$$

BĐT trên đúng nên bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Hướng làm tương đối dài nhưng nó hoàn toàn là những suy luận tự nhiên kết hợp với các BĐT phụ. Với cách làm như trên ta có một kết quả mạnh hơn:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

Lời giải với bộ đề trong hướng 1 có thể chưa làm hài lòng nhiều bạn đọc (vì sẽ có bạn đọc nào đó chưa từng gặp bộ đề chẳng hạn), khi đó mời bạn đọc đến với BĐT phụ quen thuộc hơn trong hướng 2 sau đây:

Hướng 2. Vì hai vế của BĐT (2) chứa khá nhiều căn thức, điều này làm ta nghĩ đến BĐT sau:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

Chứng minh. Bình phương hai vế, BĐT tương đương với:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd.$$

BĐT này hiển nhiên đúng theo BĐT Bunyakovsky).

Khi đó về trái của BĐT (2) được đánh giá là:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \sqrt{x(x+y)(x+z)} &= \sum_{cyc} \sqrt{x^2(x+y+z)+xyz} \\ &= \sum_{cyc} \sqrt{(x\sqrt{x+y+z})^2 + (\sqrt{xyz})^2} \\ &\geq \sqrt{(x\sqrt{x+y+z} + y\sqrt{x+y+z})^2 + (2\sqrt{xyz})^2} \\ &\quad + \sqrt{(z\sqrt{x+y+z})^2 + (\sqrt{xyz})^2} \\ &\geq \sqrt{(x\sqrt{x+y+z} + y\sqrt{x+y+z} + z\sqrt{x+y+z})^2 + (3\sqrt{xyz})^2} \\ &= \sqrt{(x+y+z)^3 + 9xyz}. \end{aligned}$$

Đến đây ta cần có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y+z)^3 + 9xyz} &\geq 2\sqrt{xyz} + \sqrt{2(x+y)(y+z)(z+x)} \\ \Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 9xyz &\geq 4xyz + 2(x+y)(y+z)(z+x) \\ &\quad + 4\sqrt{2xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \\ \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+(x+y)(y+z)(z+x) &\geq 5xyz \\ &\geq 4\sqrt{2xyz(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{aligned}$$

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz \\ (x+y)(y+z)(z+x) + 8xyz \geq 4\sqrt{2xyz(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{cases}$$

Vậy nên bài toán được chứng minh.

Hướng 3. Ta nhắc lại BĐT cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \sqrt{x(x+y)(x+z)} \geq 2\sqrt{xyz} + \sqrt{2(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Bình phương vế trái ta có:

$$\begin{aligned} VT^2 &= \left[\sum_{cyc} \sqrt{x^2(x+y+z)+xyz} \right]^2 \\ &= \sum_{cyc} (x^3+x^2y+x^2z+xyz) \\ &\quad + 2\left[\sqrt{x^2(x+y+z)+xyz} \right] \left[\sqrt{y^2(x+y+z)+xyz} \right] \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Bunyakovsky}}{\geq} \sum_{cyc} (x^3+x^2y+x^2z+xyz) + 2\left[xy(x+y+z)+xy^2z \right]$$

$$= \sum_{cyc} (x^3+3x^2y+x^2z+2xy^2+5xyz)$$

$$= x^3+y^3+z^3+3[xy^2(x+y)+yz^2(y+z)+zx^2(z+x)]+15xyz$$

$$= (x+y+z)^3 + 9xyz \stackrel{\text{Schar}}{\geq} 4(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &\sqrt{2(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &\geq 2\sqrt{xyz} + \sqrt{2(x+y)(y+z)(z+x)} \\ \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) &\geq 8xyz. \end{aligned}$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng theo BĐT Cauchy, nên bài toán được giải quyết.

b) Lượng giác hóa

Cách 2. Trở lại vấn đề. Ta nhắc lại BĐT (1):

$$a+b+c-2 \geq \sqrt{abc}.$$

Vì $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$ nên tồn tại A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn sao cho: $a=2\cos A, b=2\cos B, c=2\cos C$. BĐT (1) được viết lại là

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 \geq \sqrt{2\cos A \cos B \cos C}.$$

$$\text{Ta có: } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

nên ta cần chứng minh:

$$8\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \cos A \cos B \cos C. \quad (3)$$

Hướng 1. Chia hai vế cho $\sin A \sin B \sin C$ và sử dụng công thức nhân đôi, BĐT (3) tương đương với:

$$\cot A \cot B \cot C \leq \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}. \quad (4)$$

Để chứng minh BĐT (4) ta sử dụng đánh giá:

$$\cot A \cot B \leq \tan^2 \frac{C}{2} \quad (\text{và làm tương tự cho các đánh giá còn}$$

lại). Thật vậy, đánh giá này tương đương với:

$$\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} \leq \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} \leq \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{1 + \cos(A+B)}{1 - \cos(A+B)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B) \leq 2\cos(A+B)\cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos C \geq \cos C \cos(A-B).$$

BDT cuối hiển nhiên đúng nên bài toán được chứng minh.

Hướng 2. Sử dụng công thức hạ bậc, BĐT (3) tương đương với:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C. \quad (5)$$

Trước tiên ta chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C - \frac{3}{2} &= \cos A + 2\cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - \frac{3}{2} \\ &= -2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-1 + \cos^2 \frac{B-C}{2}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Do đó:

$$(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \left(\frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \frac{27}{8}.$$

BDT (5) sẽ được chứng minh nếu:

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) &\geq \frac{27}{8} \cos A \cos B \cos C \\ \Leftrightarrow \frac{\cot A \cot B \cot C}{\sin A \sin B \sin C} &\leq \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức cộng với sin, chú ý rằng

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin C \text{ ta được: } \frac{\cot A \cot B \cot C}{\sin A \sin B \sin C} \\ &= \cot A \cot B \cot C (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \end{aligned}$$

Sử dụng BDT Cauchy ta được:

$$\begin{aligned} \cot A \cot B \cot C (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \\ \leq \frac{[2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)]^3}{27}. \end{aligned}$$

Khi đó ta cần chứng minh

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A \leq 1.$$

Điều này là hiển nhiên vì bản chất đây là một đẳng thức.

$$\text{Thật vậy: } -\tan C = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C} = \frac{1}{\cot A \cot B \cot C}$$

$$\Leftrightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Khi chuyển về lượng giác, sử dụng định lý cosin

$$\text{ta có: } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R};$$

$$\sum_{\text{cyc}} \cos A \cos B = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}$$

(trong đó R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi của tam giác). BDT cần chứng minh là $p^2 \leq 4R^2 + 3r^2 + 4rR$, đây chính là BDT Gerretsen. Tức là sẽ có một lời giải theo hình học cho bài toán, về phần này mời bạn đọc tự khám phá.

c) Dự đoán điểm rơi

Trong chứng minh BDT việc đề ý đẳng thức xảy ra khi nào và đảm bảo nó qua các bước đánh giá là một kỹ năng cơ bản và khá quan trọng. Không khó để dự đoán điểm rơi của BDT là $a = b = c = 1$, dựa vào đây ta có lời giải sau:

Cách 3. BDT (1) tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a+b+c) - (ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 4 - abc - 2(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - (a-1)(b-1)(c-1) - (a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-a) + (1-b) + (1-c) - (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0.$$

Từ giả thiết ta được $0 < a, b, c < 2$ do đó

$$2(a+b) > a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vậy nên: $(1-a) + (1-b) + (1-c) - (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (1-c)(a+b-ab) \geq a+b-2 \Leftrightarrow 1-c \geq \frac{a+b-2}{a+b-ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-ab}{a+b-ab} \geq c \Leftrightarrow 2-ab \geq ac+bc-abc$$

$$\Leftrightarrow 2+abc \geq ab+bc+ca. \quad (6)$$

Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có hai số nào đó cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a, b và ta được

$$(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1+ab.$$

Khi đó: $ab+bc+ca-abc = c(a+b)+ab(1-c)$

$$\leq c(1+ab)+ab(1-c) = c+ab.$$

Ta lại có: $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Rightarrow c^2 + 2ab + abc \leq 4$

$$\Leftrightarrow ab(c+2) \leq 4-c^2 \Leftrightarrow ab \leq 2-c.$$

Vậy nên: $ab+bc+ca-abc \leq c+2-c = 2$.

BDT (6) được chứng minh. Bài toán được giải quyết.

Nhận xét. Kết quả $ab+bc+ca \leq 2+abc$ có thể chứng minh bằng ba phép đổi biến như trong hệ quả 1. Để tránh trùng lặp ý tưởng giải, người viết mời bạn đọc làm thử.

Không dừng lại ở đó, dấu bằng của bài toán còn "xảy ra" khi $c \rightarrow 2; a, b \rightarrow 0$ (và các hoán vị của nó). Chính điểm

biên này làm ta liên tưởng đến kỹ thuật dồn biên về biên, và ta có được lời giải sau.

Cách 4. Lập luận như cách 3, BĐT (1) tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - (ab + bc + ca). \quad (7)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $2 > c \geq a \geq b > 0$ khi đó tồn tại $m > n \geq 0$ sao cho $a = m + n, b = m - n$. Giả thiết được viết lại là:

$$m^2(2+c) + n^2(2-c) = 4 - c^2 \Rightarrow n^2 = 2 + c - m^2 \cdot \frac{2+c}{2-c}.$$

BĐT (7) được viết lại là:

$$\begin{aligned} (m+n)^2 + (m-n)^2 + c^2 &\geq 2(2m+c) - (m^2 - n^2 + 2mc) \\ \Leftrightarrow 2(m^2 + n^2) + c^2 &\geq 4m + 2c - m^2 + n^2 - 2mc \\ \Leftrightarrow 3m^2 + 2 + c - m^2 \cdot \frac{2+c}{2-c} + c^2 - 2m(2-c) - 2c &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4-4c}{2-c} m^2 - 2m(2-c) + 2 - c + c^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vi } 0 \leq n^2 = 2 + c - m^2 \cdot \frac{2+c}{2-c} \Rightarrow 0 < m \leq \sqrt{2-c}.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(m) = \frac{4-4c}{2-c} m^2 - 2m(2-c) + 2 - c + c^2.$$

Vi c là số lớn nhất trong ba số nên $c \geq 1$ do đó:

$$f'(m) = \frac{8-8c}{2-c} m - 2(2-c) < 0.$$

Vậy f là hàm nghịch biến, cho nên: $f(m) \geq f(\sqrt{2-c})$

$$\begin{aligned} &= \frac{4-4c}{2-c}(2-c) - 2\sqrt{2-c}(2-c) + 2 - c + c^2 \\ &= (2-c)^2 + (2-c) - 2\sqrt{2-c}(2-c) = (2-c - \sqrt{2-c})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Nếu ta đoán được dấu bằng xảy ra ở đâu, nhất là những điểm “đặc biệt” gần như ta đã nắm trong tay chìa khóa cho bài toán. Đánh giá trong lời giải trên không chỉ dấu bằng có thể “xảy ra” khi $c \rightarrow 2; a, b \rightarrow 0$ (và các hoán vị của nó) mà còn đảm bảo cả khi $a = b = c = 1$.

Cách 5. (Sử dụng tính chất của hàm bậc nhất)

Từ BDT (1), ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca) &\geq 2(a + b + c) \\ \Leftrightarrow 4 - abc + ab + bc + ca &\geq 2(a + b + c). \end{aligned} \quad (8)$$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} (2a + bc)^2 &= (4 - b^2)(4 - c^2) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \left(\frac{8 - b^2 - c^2}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow 4a + (b + c)^2 &\leq 8 \Rightarrow a \leq 2 - \frac{(b + c)^2}{4}. \end{aligned}$$

BĐT (8) được viết lại là:

$$f(a) = a(b + c - bc - 2) - 2(b + c) + bc + 4 \geq 0.$$

Ta xem $f(a)$ là hàm bậc nhất theo a có:

$$b + c - bc - 2 < 0 \Leftrightarrow (2 - b)(2 - c) + bc > 0,$$

điều này là hiển nhiên vì $0 < a, b, c < 2$. Do đó:

$$f(a) \geq f\left(2 - \frac{(b + c)^2}{4}\right). \text{ Vậy ta cần chứng minh:}$$

$$\begin{aligned} f\left(2 - \frac{(b + c)^2}{4}\right) &= \left[2 - \frac{(b + c)^2}{4}\right](b + c - bc - 2) - 2(b + c) + bc + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow [8 - (b + c)^2](b + c - bc - 2) - 8(b + c) + 4bc + 16 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -(b + c)^3 + bc(b + c)^2 + 2(b + c)^2 - 4bc &\geq 0. \end{aligned}$$

Vi $-4bc \geq -(b + c)^2$ nên ta cần có:

$$\begin{aligned} -(b + c)^3 + bc(b + c)^2 + (b + c)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (b + c)^2(1 + bc - b - c) &\geq 0 \Leftrightarrow (b - 1)(c - 1)(b + c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

BĐT cuối này hiển nhiên không hoàn toàn đúng. Tuy nhiên vì tính đối xứng của BDT ban đầu nên ta có thể giả sử $(b - 1)(c - 1) > 0$, do đó bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Mẫu chốt lời giải trên là sử dụng đánh giá

$$a \leq 2 - \frac{(b + c)^2}{4}.$$

Đánh giá này khá chặt, nó đảm bảo cả hai

trường hợp dấu bằng “xảy ra” và đánh giá này cũng là đánh giá mà ta đã dùng cho cách 4. Tính chất của hàm bậc nhất có vẻ khá đơn giản nhưng đôi khi lại rất hữu dụng trong chứng minh BDT. bạn đọc có thể tìm hiểu cách vận dụng nó trong bài viết “Một tính chất thú vị của tam thức bậc hai và nhị thức bậc nhất – TH&TT số 444”. Với cách sử dụng tính chất của hàm bậc nhất này ta còn thu được một BDT khá thú vị (xem mục 3).

d) Tách ghép - Thêm bớt

Trong các kỹ năng chứng minh BDT thì kỹ năng tách ghép - thêm bớt là một trong số những kỹ năng cơ bản (và nó là tiêu chí thể hiện sự tinh tế, đẹp cho bài giải). Tuy nhiên, đây cũng là một kỹ năng khó sử dụng nhất bởi muốn đi đến đáp số, đòi hỏi người chứng minh phải khéo léo trong các bước làm, kể cả những bước đánh giá nếu cần thiết. Bài viết giới thiệu với bạn đọc một lời giải như vậy, đương nhiên ở mức độ tinh tế hơn, kết hợp với cả giả thiết bài toán (lời giải tham khảo trên diễn đàn toán học).

Cách 6. BDT (1) tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 2(a + b + c).$$

Kết hợp với giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}
4(a+b+c)^2 &= (a^2+b^2+c^2+abc)(a+b+c)^2 \\
&= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)+abc(a+b+c)^2 \\
&\leq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)+3abc(a+b+c) \\
&\leq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)^2 \\
&= (a^2+b^2+c^2)^2+2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \\
&\quad + (ab+bc+ca)^2 \\
&= (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2.
\end{aligned}$$

Trong các bước đánh giá trên, ta đã sử dụng kết quả $a+b+c \leq 3$. Kết quả này được suy ra trực tiếp từ giả thiết bài toán, bạn đọc hãy suy nghĩ thử hoặc có thể tìm thấy trong bài viết “Năm lời giải hay cho một bài toán đẹp, Trần Nam Dũng, TH&TT quyển 6”.

e) Sử dụng phép thế Ravi

Trong phần kiến thức hỗ trợ ta thấy rằng với a, b, c thỏa yêu cầu bài toán thì ta có thể lượng giác hóa bằng ba góc của một tam giác nhọn. Đối với BĐT trong tam giác, một phép thế hiệu quả đó là phép thế Ravi. Suy nghĩ khá tự nhiên, ta sẽ chuyển bài toán về lượng giác, sau đó sử dụng phép thế Ravi để chuyển về đại số 1 lần nữa. Như vậy bài toán sẽ mang một diện mạo mới mà trong nó đã đảm bảo được phân điều kiện, vấn đề còn lại là chứng minh một BDT thuần đại số.

Cách 7. Ta viết lại BDT (1): $a+b+c-2 \geq \sqrt{abc}$.

- (Lượng giác hóa) Theo hệ quả 1, tồn tại A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn sao cho:

$$a = 2 \cos A, b = 2 \cos B, c = 2 \cos C$$

và ta cần chứng minh

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 \geq \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

Gọi m, n, k lần lượt là ba cạnh của tam giác. Khi đó BDT được viết lại là (kết hợp định lý Côsin):

$$\begin{aligned}
&(m+n-k)(m+k-n)(n+k-m) \\
&\geq \sqrt{(m^2+n^2-k^2)(m^2+k^2-n^2)(n^2+k^2-m^2)}. \quad (9)
\end{aligned}$$

- (Sử dụng phép thế Ravi) Vì m, n, k là ba cạnh của tam giác do đó tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho:

$$m = x+y; n = y+z; k = z+x.$$

BDT (9) được viết lại là:

$$\begin{aligned}
&8xyz \geq \sqrt{8[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]} \\
&\Leftrightarrow 8x^2y^2z^2 \geq xyz(x+y+z)^3 - (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)^2 \\
&\quad + xyz(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - x^2y^2z^2 \\
&\Leftrightarrow (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)^2 + 9x^2y^2z^2 \\
&\geq xyz(x+y+z)^3 + xyz(x+y+z)(x^2+y^2+z^2). \quad (10)
\end{aligned}$$

BDT (10) tương đối phức tạp, thế nhưng nếu ta để ý thì nó

đồng bậc và có khá nhiều nhân tử mà ta có thể tách tổng bình phương.

Hướng 1. (Khai triển trực tiếp) Ta sẽ cố gắng khai triển các biểu thức của cả hai vế và tiến hành ghép các hạng tử có thể tách tổng bình phương, cách làm này nhìn có vẻ nặng về tính toán thế nhưng trong quá trình nhân và thu gọn, các hạng tử trên có quy luật nên điều đó sẽ không còn khó khăn. Cụ thể:

$$\begin{aligned}
VT &= (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\
&\quad \times (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + 9x^2y^2z^2 \\
&= \sum_{sym} x^4y^2 + 2 \sum_{cyc} x^3y^3 + 2xyz \sum_{sym} x^2y + 12x^2y^2z^2. \\
VP &= xyz \left[(x+y+z)^3 + (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \right] \\
&= 2xyz \sum_{cyc} x^3 + 4xyz \sum_{sym} x^2y + 6x^2y^2z^2. \\
VT - VP &= \left(\sum_{sym} x^4y^2 - 2xyz \sum_{cyc} x^3 \right) \\
&\quad + 2 \left[\sum_{cyc} x^3y^3 + 3x^2y^2z^2 - xyz \sum_{sym} x^2y \right] \\
&= \sum_{cyc} x^2(y-z)^2 + 2 \left[\sum_{cyc} x^3y^3 + 3x^2y^2z^2 - xyz \sum_{sym} x^2y \right].
\end{aligned}$$

Theo BDT Schur bậc 3 ta có:

$$\begin{aligned}
&x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3x^2y^2z^2 \\
&\geq xyz(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y).
\end{aligned}$$

Vậy nên BDT (10) luôn đúng, bài toán được chứng minh.

Hướng 2. (Phương pháp SOS) Cũng là tách tổng bình phương, tuy nhiên ta sẽ đứng trên quan điểm là đã biết phương pháp SOS. Khi đó việc thêm bớt các nhân tử sẽ có nhiều gợi ý, việc tính toán (khai triển ra tất cả như hướng 1) sẽ giảm đi và bước đánh giá sẽ có định hướng hơn (theo các tiêu chuẩn của phương pháp SOS):

$$\begin{aligned}
&(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x+y+z)^2 + 9x^2y^2z^2 \\
&\geq xyz(x+y+z)^3 + xyz(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^2 [x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - xyz(x+y+z)] \\
&\quad + xyz[9xyz - (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{2} \sum_{cyc} z^2(x-y)^2 - xyz \left[\sum_{cyc} \frac{x+y+3z}{2}(x-y)^2 \right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{z^2(x+y+z)^2}{2} - \frac{xyz(x+y+3z)}{2} \right] (x-y)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0 \\
&\text{với } S_x = \frac{x^2(x+y+z)^2}{2} - \frac{xyz(3x+y+z)}{2},
\end{aligned}$$

$$S_y = \frac{y^2(x+y+z)^2}{2} - \frac{xyz(x+3y+z)}{2},$$

$$S_z = \frac{z^2(x+y+z)^2}{2} - \frac{xyz(x+y+3z)}{2}.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó dễ dàng thấy được: $S_y > 0; S_x + S_y > 0; S_z + S_y > 0$

$$\text{và } 2(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (z-x)^2 \geq (x-y)^2 + (y-z)^2.$$

$$\text{Do đó: } S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (S_x + S_y)(y-z)^2 + (S_z + S_y)(x-y)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Điểm thú vị của phép thế Ravi là chuyển BĐT hình học sang BĐT đại số ở đó ta có nhiều công cụ xử lý hơn và trên là một minh chứng cho điều đó. Tinh ý hơn ta có thể chứng minh BĐT (9) trực tiếp và ngắn gọn như sau:

$$\begin{aligned} & [(m+n-k)(m+k-n)]^2 \geq (m^2+n^2-k^2)(m^2+k^2-n^2) \\ \Leftrightarrow & [m^2-(n-k)^2]^2 \geq m^4-(n^2-k^2)^2 \\ \Leftrightarrow & (n-k)^4-2m^2(n-k)^2 \geq -(n-k)^2(n+k)^2 \\ \Leftrightarrow & (n-k)^2[(n-k)^2-2m^2+(n+k)^2] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(n-k)^2(n^2+k^2-m^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Mà ΔABC nhọn nên theo định lý Côsin ta có $n^2+k^2-m^2 > 0$. Tương tự cho các đánh giá còn lại và bài toán được chứng minh.

3. Nhiều hơn một bài toán

Qua các cách giải trên ta thu được hai BĐT khá thú vị sau

$$a+b+c-2 \geq \sqrt{abc} \quad \text{và} \quad ab+bc+ca \geq 2+abc.$$

Nếu ta thừa nhận một BĐT nào đó đúng (và ta đã chứng minh nó đúng) thì BĐT còn lại cũng sẽ được chứng minh. Thật vậy, giả sử BĐT đầu là đúng, ta có:

$$\begin{aligned} & (a+b+c-2)^2 \geq abc \\ \Leftrightarrow & a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-4(a+b+c)+4 \geq abc \\ \Leftrightarrow & a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 2(a+b+c). \end{aligned}$$

Theo cách giải 3 thì BĐT trên tương đương với

$$ab+bc+ca \leq 2+abc.$$

Vậy đến hiện tại, từ giả thiết a, b, c cho như trên ta có một số BĐT sau: $3abc-2 \leq ab+bc+ca-2 \leq abc$

$$\leq \sqrt{abc} \leq a+b+c-2 \leq 1 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Một số kết quả liên quan

Với cách đánh giá $a+bc \leq 2$ như trong cách 3 (đánh giá cuối) ta được:

$$abc \leq (2-ab)(2-bc)(2-ac)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2 \leq \frac{2abc(a+b+c)-(abc)^2-abc}{4}.$$

Với cách đánh giá $a \leq 2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ trong cách 5 ta được:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \leq \sqrt{(2-a)(2-b)(2-c)} = a+b+c-2.$$

Với cách dồn biến như trong cách 5 ta được:

$$a^2+b^2+c^2+abc(a+b+c) \geq 2(ab+bc+ca).$$

Với cách lượng giác hóa kết hợp với BĐT Walker ta được:

$$a+b+c \leq \sqrt{ab+8}.$$

Với cách lượng giác hóa và sử dụng phép thế Ravi ta được: (Mathematical Reflections 2015)

$$a+b+c \leq \sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} + \sqrt{2-c}.$$

Với cách sử dụng nguyên lý Dirichlet (trong cách 3) ta được: (Mathematical Reflections 2014)

$$\sqrt{1-abc}(3-a-b-c) \geq |(1-a)(1-b)(1-c)|.$$

Từ giả thiết ta có thể xây dựng được một hằng đẳng thức khác. Khi đó BĐT được viết lại:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{(2+b)(b+2)}} + \sqrt{\frac{b}{(2+c)(2+a)}} + \sqrt{\frac{c}{(2+a)(2+b)}} \\ & \geq \sqrt{\frac{(2-a)(2-b)}{(2+a)(2+b)}} + \sqrt{\frac{(2-b)(2-c)}{(2+b)(2+c)}} + \sqrt{\frac{(2-c)(2-a)}{(2+c)(2+a)}}. \end{aligned}$$

4. Một số bài toán tương tự qua các đề chọn đội tuyển

Bài 1. (Chọn đội tuyển HSG Đắk Nông, vòng 2, năm 2017) Cho ba số thực dương a, b, c sao cho

$$a^2+b^2+c^2+abc=4. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a+b+c \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

2. (Olympic chuyên KHTN 2016) Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+2abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2} + \frac{b(b+1)}{(2b+1)^2} + \frac{c(c+1)}{(2c+1)^2} \leq \frac{9}{16}.$$

3. (HSG lớp 12, Hà Nội, năm 2016) Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca+2abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2(a+b+c).$$

Kết luận. Phía sau mỗi bài toán luôn là một câu chuyện dài, con đường khám phá ra nó là một hành trình mà đến đích đến luôn chứa đựng rất nhiều điều bất ngờ. Hy vọng qua mỗi hành trình như vậy, người học sẽ có những niềm vui và từ đó niềm đam mê học toán sẽ được nhân lên.



❖ BÀI TOÁN 9. Cho a, b, c là các số thực dương.
Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 3 + \sqrt{3}.$$

Cách giải 1. Theo BDT Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \\ &= 2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$S \geq 2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{a+b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{a+b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{a+b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} &+ \frac{a+b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &\geq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)}} \\ &\geq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3} \cdot 3(ab+bc+ca)}{8(ab+bc+ca)}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 3 + \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách giải 2. Nhận xét. Với a, b, c là các số thực dương thì:

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab^2}{c} + ac + \frac{bc^2}{a} + ba + \frac{ca^2}{b} + bc &\geq 2(ab+bc+ca) \\ \Rightarrow \frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} &\geq ab+bc+ca. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} (ab+bc+ca) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) &= (a^2+b^2+c^2) \\ &+ (ab+bc+ca) + \frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} \\ &\geq (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Từ đây ta có đánh giá

$$S \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{(\sqrt{3}-1)(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &\geq 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca) \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = P \end{aligned}$$

(theo BDT Cauchy và nhận xét).

Mặt khác theo BDT Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$\begin{aligned} &(ab+bc+ca)^2 \cdot (a^2+b^2+c^2) \\ &\leq \left[\frac{2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)}{3} \right]^3 \\ &= \frac{(a+b+c)^6}{27} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca) \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{(a+b+c)^3}{3\sqrt{3}}.$$

Suy ra

$$S \geq 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 3 + \sqrt{3}.$$

Vậy

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 3 + \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách giải 3. Ta có

$$S = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Áp dụng BDT Cauchy ta có

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3 - \sqrt{3}.$$

Áp dụng BDT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{3}(ab+bc+ca)}.$$

Áp dụng BDT Cauchy ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{3}(ab+bc+ca)} + \sqrt{3} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Áp dụng BDT Bunyakovsky và Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{2(a+b+c)}{\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ & \geq \frac{9(a+b+c)}{2\sqrt{ab+bc+ca} + \sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ & \geq \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{3} \cdot [a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)]} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Từ các BDT trên suy ra

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 3 + \sqrt{3}.$$

Cách giải 4. Áp dụng BDT Bunyakovsky ta có:

$$(ab+bc+ca) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq (a+b+c)^2$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \\ \Rightarrow & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 \\ & = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \sqrt{3} = \frac{a+b+c - \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ & = \frac{(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot [a+b+c + \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}]}, \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - 3 - \sqrt{3} \geq \\ & \geq \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{2(ab+bc+ca)} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot [a+b+c + \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}]}\right] \\ & \geq \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{2(ab+bc+ca)} - \frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca} \cdot [2\sqrt{3(ab+bc+ca)}}\right] \geq 0 \end{aligned}$$

(luôn đúng vì $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$
và $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$).

Vậy $S \geq 3 + \sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

>Nhận xét. Ngoài 4 cách giải của tác giả Trương Quang An, Tòa soạn không nhận được lời giải nào của các bạn gửi về.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi Bài toán 11 sau đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2018.

Bài toán 11. Cho đường tròn (O); hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên các đoạn thẳng OD và OC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho CN = OM. Đường thẳng AM cắt (O) tại P. Chứng minh rằng $\widehat{ANP} = 90^\circ$.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 486, T12.2017.

Bài 15 (Canada Mathematical Olympiad 1999). *Tim tất cả các nghiệm thực của phương trình $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ (1), ở đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .*

Giải. Đặt $[x] = n \in \mathbb{Z}$, $\{x\} = \alpha \in [0; 1)$ thì $x = [x] + \{x\} = n + \alpha$. Khi đó (1) trở thành

$$4(n + \alpha)^2 - 40n + 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 + 8n\alpha + 4n^2 - 40n + 51 = 0 \quad (2).$$

Ta có $\Delta' = 16n^2 - 4(4n^2 - 40n + 51) = 160n - 204$

$$= 16 \left(10n - \frac{51}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{51}{40} \Rightarrow n \geq 2.$$

Do $\alpha \geq 0$ nên với $n \geq 2$, (2) có nghiệm

$$\alpha = -n + \sqrt{10n - \frac{51}{4}}. \text{ Do } 0 \leq \alpha < 1 \text{ nên ta phải có}$$

$$\begin{cases} -n + \sqrt{10n - \frac{51}{4}} \geq 0 \\ -n + \sqrt{10n - \frac{51}{4}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10n - \frac{51}{4} \geq n^2 \\ 10n - \frac{51}{4} < (n+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 10n + \frac{51}{4} \leq 0 \\ n^2 - 8n + \frac{55}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq n \leq \frac{17}{2} \\ n < \frac{5}{2} \vee n > \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{do } n \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2 \leq n \leq 8 \\ n \leq 2 \vee n \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{2, 6, 7, 8\}.$$

Từ $x = [x] + \{x\} = n + \alpha = \sqrt{10n - \frac{51}{4}}$, ta tìm được các nghiệm thực của (1) là:

$$x \in \left\{ \frac{\sqrt{29}}{2}; \frac{3\sqrt{21}}{2}; \frac{\sqrt{229}}{2}; \frac{\sqrt{269}}{2} \right\}.$$

Bài 16 (Dutch Mathematical Olympiad 1998).

Xét hoán vị σ tùy ý của các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Với mỗi bộ ba trong 8 bộ ba, mỗi bộ ba gồm ba số hạng liên tiếp trong hoán vị σ , xét tổng của ba số này. Gọi $M(\sigma)$ là tổng lớn nhất trong 8 tổng này.

(ví dụ với $\sigma = (4, 6, 2, 9, 0, 1, 8, 5, 7, 3)$, ta có 8 tổng là: 12, 17, 11, 10, 9, 14, 20, 15 và $M(\sigma) = 20$).

a) *Tim một hoán vị σ_1 sao cho $M(\sigma_1) = 13$;*

b) *Tồn tại hay không một hoán vị σ_2 sao cho $M(\sigma_2) = 12$?*

Giải. a) Có hoán vị σ_1 như vậy, ví dụ:

$\sigma_1 = (9, 1, 3, 7, 2, 4, 6, 0, 5, 8)$, có $M(\sigma_1) = 13$.

b) Không tồn tại hoán vị σ_2 nào mà $M(\sigma_2) = 12$.

Thật vậy, giả sử tồn tại hoán vị σ_2 mà $M(\sigma_2) = 12$. Suy ra tổng 9 số hạng đầu tiên của σ_2 lớn nhất là $3.12 = 36$ (coi tổng 9 số hạng này là tổng của ba bộ, mỗi bộ gồm ba số hạng liên tiếp của σ_2). Mà tổng của 10 số đã cho là 45. Vậy số hạng cuối của σ_2 là 9. Lập luận tương tự ta cũng suy ra số hạng đầu của σ_2 là 9. Điều này là mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh.

TRẦN HỮU NAM (Hà Nội)

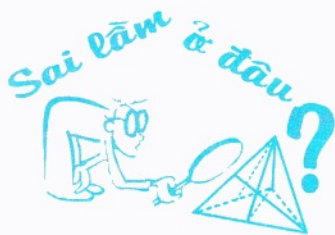
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy thử giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 18. Tim số nguyên dương n lớn nhất sao cho $n^3 + 100$ chia hết cho $n + 10$.

Bài 19. Đặt $f(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$. Tim hai chữ số tận cùng của số $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.

NHU' HOÀNG (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: *TÌM CỰC TRỊ*

CỦA HÀM ĐA THỨC!

(Đề đăng trên TH&TT số 484, tháng 10 năm 2017)

Phân tích. Cả hai bạn đều giải sai:

- Đối với bạn *Minh*, đầu tiên, bạn đã tính đạo hàm bị sai. Đạo hàm của hàm f là

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x + m + 2$$

chứ không phải là

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + m + 2$$

như bạn đã làm. Từ đó dẫn tới tính toán $f''(x)$ bị sai.

Phương pháp giải của *Minh* bị sai ở chỗ là thừa nhận mệnh đề: **Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases}$$

Từ đó *Minh* đã áp dụng hệ thức này để tìm m , dẫn tới kết quả sai.

- Đối với bạn *Hoàng*: Tương tự như bạn *Minh*, bạn *Hoàng* cũng tính đạo hàm bị sai. Tuy nhiên, phương pháp giải của bạn *Hoàng* thì đúng vì đã tìm nghiệm của phương trình đạo hàm cấp 1 tại $x = 0$, sau đó lập bảng biến thiên theo m đó để xem m có thỏa mãn yêu cầu là hàm số có điểm cực đại tại $x_0 = 0$ hay không.

Lời giải đúng. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x + m + 2.$$

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 11$

$$f'(x) = -4x^3; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f			

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$. Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Các bạn sau đã phát hiện được sai lầm và đưa ra cách giải đúng:

Hưng Yên: *Bùi Thị Thủy Trang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thừa Thiên Huế:** *Cao Thị Linh*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

KIHI VI

**TÌM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ
CỦA HÀM SỐ!**



Trong giờ ôn tập môn toán của lớp 12A3, thầy giáo yêu cầu học sinh trả lời câu hỏi sau:

Câu hỏi: Số điểm cực trị của hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ là

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

Sau một lúc suy nghĩ, bạn *Tùng* đã xung phong lên bảng. Lời giải của bạn *Tùng* như sau:

Tập xác định: $\mathbb{R}$;

$$y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8.$$

Suy ra hàm số có một điểm cực trị. Vậy ta chọn đáp án B.

Theo bạn câu trả lời của bạn *Tùng* đúng hay sai? Nếu sai, lời giải của bạn như thế nào!

THÂN VĂN DUY

(GV THPT Lạng Giang số 1, Bắc Giang)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỤU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXBGD Việt Nam

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THÚY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1. Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Hà Văn Nhân – Một số dạng toán về số chính phương.

7. Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Nghệ An, năm học 2016 – 2017.

8. Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hưng Yên, năm học 2016 – 2017.

9. Chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc Gia

Huỳnh Văn Minh – Giải toán số phức bằng phương pháp tọa độ phẳng.

14. Đáp án và hướng dẫn giải đề số 4.

18. Thử sức trước kì thi 2018 - Đề số 5.

22. Lịch sử toán học

Nguyễn Thủy Thanh – Con số 0 đầy quyền lực xuất hiện từ lúc nào...

24. Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/488, ..., T12/488, L1/488, L2/488.

26. Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

35. Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 29.

Bài dịch số 26 - Tiếng Anh qua các bài toán.

37. Phương pháp giải toán

Nguyễn Tuấn Anh – Xung quanh câu bất đẳng thức trong đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu.

44. Nhiều cách giải cho một bài toán

46. Du lịch thế giới qua các bài toán hay

47. Sai lầm ở đâu?

Thân Văn Dự – Tìm số điểm cực trị của hàm số!



VỊNH TUỔI TUẤT

Được sống gần người hoá kỳ cương
Chẳng rong chơi phố, rượt qua đường
Khi xông mặt trận - quân tiền tuyến
Lúc thôi côi nhà - lính hậu phương
Thế mạnh canh phòng tại cực thính
Tiềm năng phát hiện mũi phi thường
Người người thú vị sinh năm Tuất
Tri tuệ, trung thành, sống dễ thương.

Ngày 10/12/2017

ĐÀO TAM (Đại học Vinh)

CÂY HAY CHỚ

Là Chớ, có sao lại gọi Cây,
Gọi Cây hay Chớ, khác gì đây?
Chớ nằm cạnh cửa canh người lạ.
Cây ngự trên mâm đủ món bày.
Chớ bị xích xiềng, quen mồm sủa.
Cây ưa giềng mẽ, chuộng men say.
Mấy chàng bợm nhậu sao kỳ cục:
Nhìn Chớ, chỉ mong nó hóa Cây.

LÝ VĂN TOÁN (Hà Nội)

Mừng xuân Mậu Tuất 2018

CHỈ TOÁN HOA THƠ

Để lại cho em những vần thơ
Để yêu Toán học đến vô bờ
Để cùng hoa thắm vui xuân mới
Để được say nồng những áng thơ.

Xuân 2018

NGUYỄN HỮU DỰ

(Xóm 3, Quỳnh Liên, TX. Hoàng Mai, tỉnh Nghệ An)

MỘT BÀI TOÁN CỔ KỶ LẠ

Trong các bản cổ chi Rhind tìm thấy Thời Ai Cập Cổ Đại cách đây khoảng 4000 năm có một bài toán trong đó mô tả tài sản của một người giàu có như sau:

Nhà: 7, Mèo: 49, Chuột: 343, Ngọn lúa mì: 2401, Số hekar*: 16807.

Tính tổng các số trên.

Ngày nay ta dễ dàng nhận thấy các số trên là năm lũy thừa đầu tiên của 7 và ta cần tính: $S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$ (1).
Thế thì $7S = 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$ (2). Trừ từng vế (2) cho (1) ta có: $6S = 7^6 - 7$ nên $S = (7^6 - 7) : 6 = 19607$.

Theo cách diễn tả của Maritz Cantor (1829 - 1920) thì bài toán cổ trên bản cổ chi Rhind có thể phát biểu như sau:

“Tài sản của một người gồm có bảy căn nhà, mỗi căn nhà có bảy con mèo, mỗi con mèo ăn thịt bảy con chuột, mỗi con chuột ăn bảy ngọn lúa, mỗi ngọn lúa có khả năng sinh bảy hekar hạt. Có cả thảy bao nhiêu trong tài sản của người đó?”.

Hai nghìn năm sau, năm 1202 nhà toán học người Italia là Leonardo Fibonacci đã nêu lại bài toán này trong tác phẩm *Leber abaci* như sau:

“Có bảy bà lão trên đường đi Rome. Mỗi bà có bảy con la. Trên lưng mỗi con có bảy cái túi. Mỗi túi có bảy cái bánh mì, kèm theo mỗi ổ bánh mì là bảy con dao, mỗi con dao nằm trong bảy cái vỏ. Có tất cả là bao nhiêu bà già, con la, túi, dao và vỏ trên đường đến Rome?”.

Hơn bảy trăm năm sau, một dị bản của bài toán đó dưới dạng một bài thơ tiếng Anh cổ được lưu truyền khá phổ biến:

Trên đường đi đến St. Ives
Tôi gặp một người có bảy người vợ
Mỗi người vợ có bảy cái túi
Mỗi cái túi có bảy con mèo
Mỗi con mèo có bảy chú mèo con
Mèo con, mèo lớn, túi và những người vợ
Cả thảy bao nhiêu trên đường đi Ives?

Việt Nam có nhiều bài toán vui bằng thơ với nhiều dị bản khác nhau, điển hình là bài toán sau:

Một đoàn phụ nữ tắm bên sông
Thảo luận cùng nhau việc lấy chồng
Mỗi chị ba chồng thừa bảy chị
Ba chồng một chị bốn chồng không
Hỏi có tất cả bao nhiêu chị bao nhiêu chồng?

Thật quá thể. Và người ta bèn thay bằng Một đoàn em bé tắm bên sông/ Thảo luận cùng nhau việc chơi bông/...

*Hekar: Dụng cụ đựng lúa mì của người Ai Cập Cổ đại.

LÊ QUỐC HẠN (Nghệ An) sưu tầm.



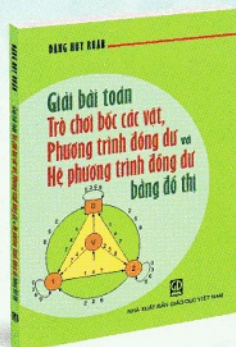
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với

b theo module m . Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TAP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● Điện thoại biên tập: 024.35121607

● Điện thoại Fax: phát hành: 024.35121606

● Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035

Chi số: 12884

Mã số: 8BT2M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Xi nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng