



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2018
Số 487

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

Chúc Mừng Năm Mới

2018

HAPPY NEW YEAR





TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

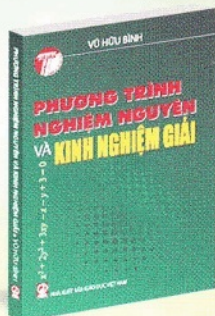
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lý, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như định lý lớn Fermat.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như Pell, Pythagore, Fermat, Diophante, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của Andrew Wiles chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư Ngô Bảo Châu chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách "đưa

khó về dễ, đưa lạ về quen", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kỹ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND Vũ Hữu Bình sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Buu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

• Điện thoại biên tập: 024.35121607

• Điện thoại Fax - phát hành: 024. 35121606

• Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

<https://tieulun.hopto.org>



PHÂN TÍCH LÓGIC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÔ TỈ

NGUYỄN VĂN NHÔ

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Bài viết giới thiệu bạn đọc phương pháp phân tích logic để chứng minh một số dạng BĐT vô tỉ (BĐT có biến số trong dấu căn thức). Định hướng tổng quát của việc chứng minh BDT vô tỉ là tìm cách khử căn, có thể khử căn theo BDT Cauchy hoặc theo hằng đẳng thức.

Một số dạng khử căn:

BĐT Cauchy

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0).$$

BĐT Bunyakovsky

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq |ax + by + cz|.$$

$$\sqrt{m(a+b)^2 + n(a-b)^2} \geq m|a+b| \quad (m > 0, n > 0).$$

(Ở các đánh giá trên thay biểu thức về trái bởi biểu thức về phải thì sẽ khử được căn thức).

Thí dụ 1. Cho các số dương x, y, z . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{3\sqrt{x^2+y^2+1}} + \frac{1}{3\sqrt{y^2+z^2+1}} + \frac{1}{3\sqrt{z^2+x^2+1}} \geq \frac{1}{3(x+y+z)}.$$

Phân tích. Vì mẫu số của các số hạng chứa căn thức nên chúng ta sử dụng BDT Cauchy để khử căn, nhằm rút gọn phân số chúng ta đánh giá mẫu số của các phân thức đó theo các nhân tử $(1+x), (1+y)$ từ đó ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} xy + x + y &\geq 3\sqrt{x^2 y^2} \Leftrightarrow (1+x)(1+y) \geq 3\sqrt{x^2 y^2} + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(y+1)}{3\sqrt{x^2 y^2} + 1} \geq y+1. \end{aligned}$$

Thiết lập các BDT tương tự và cộng các BDT cùng chiều vừa thu được ta có BDT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Thí dụ 2. Cho x, y, z là các số dương bằng nhau thì mẫu số $x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18$. Chứng minh BDT

$$\frac{1}{x^2 - x + 6} + \frac{1}{y^2 - y + 6} + \frac{1}{z^2 - z + 6} \geq 1.$$

Phân tích. Vì các số hạng chứa căn thức ở mẫu nên chúng ta khử căn bằng cách áp dụng BDT Cauchy. Để sử dụng BDT Cauchy cho hai số chúng ta cần phân tích biểu thức trong căn thức theo tích hai nhân tử như sau:

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Dự đoán điểm rơi $x = y = z = 1$, khi đó thì $x+2 = x^2 - 2x + 4 = 3$, từ đó có đánh giá:

$$\sqrt{x^3 + 8} \leq \frac{x+2+x^2-2x+4}{2} = \frac{x^2-x+6}{2}.$$

Ta đưa về chứng minh BDT:

$$P = \frac{2x^2}{x^2 - x + 6} + \frac{2y^2}{y^2 - y + 6} + \frac{2z^2}{z^2 - z + 6} \geq 1.$$

Áp dụng BDT Schwarz ta có:

$$P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18}.$$

Do đó để $P \geq 1$ chỉ cần chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 - (x+y+z) + 18} \geq 1.$$

Bằng phương pháp biến đổi tương đương đưa về:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 + 2(xy+yz+zx) + (x+y+z) &\geq 18 \\ \Leftrightarrow (x+y+z)^2 + (x+y+z) &\geq 12 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x + y + z = \sqrt{(x + y + z)^2} \geq \sqrt{3(xy + yz + zx)} = 3$$

nên (*) luôn đúng.

Thí dụ 3. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{7a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 7b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + 7c^2}} \leq 1.$$

Phân tích. Áp dụng BĐT Bunyakovsky để khử căn ở mẫu ta có:

$$\sqrt{\left[(\sqrt{7})^2 + 1^2 + 1^2\right] \left[(\sqrt{7}a)^2 + b^2 + c^2\right]} \geq 7a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{1}{3}(7a + b + c).$$

Để thực hiện phép tính tổng các phân số mới, chúng ta cần điều chỉnh sao cho các phân số mới tạo thành có chung mẫu số bằng cách đánh giá giá nhờ BDT Schwarz như sau:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{7a^2 + b^2 + c^2}} &\leq \frac{3a}{7a + b + c} = \\ &= \frac{a}{3} \left(\frac{(2+1)^2}{6a + (a+b+c)} \right) \\ &\leq \frac{a}{3} \left(\frac{2^2}{6a} + \frac{1^2}{a+b+c} \right) = \frac{2}{9} + \frac{a}{3(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Thiết lập các BDT tương tự rồi cộng lại ta có BDT cần chứng minh.

Nhận xét. Các thí dụ trên ta đã sử dụng BDT Cauchy và BDT Bunyakovsky để khử căn.

Thí dụ 4. Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \text{ Tìm GTLN của}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$$

Phân tích. Vì biểu thức trong căn ở mẫu thức là đẳng cấp bậc hai đối với hai biến số nên chúng ta phân tích bình phương theo điểm rơi ($a = b = c$)

để khử căn: $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2a+b)^2 + (a-b)^2}} \leq \frac{1}{2a+b}.$$

Từ đó ta được:

$$P \leq \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \frac{9}{2a+b} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}. (*)$$

Theo BDT Schwarz ta có:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2^2}{2a} + \frac{1^2}{b} \geq \frac{(2+1)^2}{2a+b} = \frac{9}{2a+b}.$$

Vậy (*) đúng. Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right); \quad \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a} \right).$$

Do đó

$$P \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{1}{3} \sqrt{3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $P \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \sqrt{3}. \text{ Do đó } \max P = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

BÀI TẬP

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

2. Với các số thực x, y, z đều thuộc khoảng $(0; 1)$ thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. Với các số dương thay đổi x, y, z thỏa mãn: $3xyz \geq x + y + z$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{xy + yz + zx - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3y^2 + 1} + \sqrt{3z^2 + 1}}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c+a}} + 3 \\ &\leq \sqrt{2} (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}). \end{aligned}$$

5. Cho $a > b > c > 0$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{b}{a-b} + \frac{c}{b-c} + \frac{a^2}{8c(\sqrt{ac} - c)}.$$

VỀ THÊM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ĐỖ QUANG MINH

(GV THPT Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

Những năng lực về thêm yếu tố phụ làm cho việc giải toán hình học trở nên dễ dàng và thuận lợi hơn. Có rất nhiều cách về thêm yếu tố phụ: về thêm đường vuông góc, đường thẳng song song, tam giác đều, nửa tam giác đều, tam giác vuông cân, tiếp tuyến, đường kính, ... Tuy nhiên về thêm yếu tố phụ như thế nào để cho bài toán có lời giải ngắn gọn và độc đáo là một vấn đề mà người giải toán phải đầu tư và suy nghĩ. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu đến bạn đọc một cách về thêm yếu tố phụ đó là “Về thêm đường tròn ngoại tiếp tam giác” để giải một số bài toán về tính số đo góc trong tam giác, chứng minh hai góc bằng nhau, ...

Bài 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 100^\circ$; $\widehat{C} = 65^\circ$. Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy hai điểm M , N sao cho $\widehat{MCB} = 55^\circ$, $\widehat{NBC} = 80^\circ$. Tính số đo $\widehat{MNC}$.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy

$$\widehat{BMC} = 25^\circ; \widehat{MBN} = 20^\circ; \widehat{MCN} = 10^\circ.$$

Dựng đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCM$ cắt BN tại điểm thứ hai E . Dễ tính được

$$\widehat{CME} = \widehat{CEM} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow CM = CE; \widehat{MCE} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{NCM} = 10^\circ \Rightarrow \triangle MCN = \triangle ECN$$

$$\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NEC} = \widehat{BMC} = 25^\circ. \text{ Vậy } \widehat{MNC} = 25^\circ.$$

Bài 2. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 100^\circ$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A bờ BC sao cho $\widehat{CBD} = 15^\circ$; $\widehat{BCD} = 35^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{ADB}$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra: $\widehat{BDC} = 130^\circ$;

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ.$$

Dựng đường tròn (O)

ngoại tiếp $\triangle BDC$. Do

$$\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 230^\circ > 180^\circ$$

và hai điểm A, D nằm

khác phía đối với đường

thẳng BC , nên điểm A ở

bên trong (O) . Gọi M là

điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O) (M, A ở cùng

phía đối với đường thẳng BC). Ta có:

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BDC} = 50^\circ = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$$

$\Rightarrow \widehat{BAC}$ là góc ở tâm của đường tròn (O)

$\Rightarrow A \in (O) \Rightarrow AB = AD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$.

Vậy $\widehat{ADB} = 55^\circ$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 20^\circ$,

BI là đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$. Trên cạnh

AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ACH} = 30^\circ$. Tính số đo

$\widehat{CHI}$.

Lời giải. Theo đề bài ta có:

$$\widehat{ACB} = 70^\circ. \text{ Mà } \widehat{ACH} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCH} = 40^\circ. \text{ Dựng}$$

đường tròn ngoại tiếp

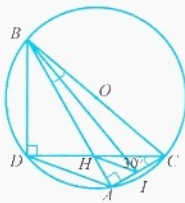
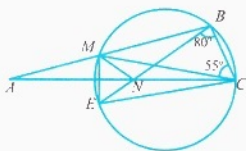
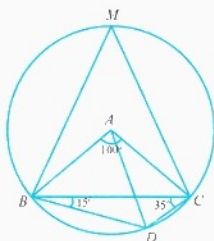
$\triangle ABC$ cắt tia CH tại điểm thứ

hai là D . Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Vì BI là đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$ nên:

$$\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{1}{\sin 70^\circ}. \quad (1)$$

Trong $\triangle HBC$, ta có:



$$\frac{HC}{\sin \widehat{HBC}} = \frac{HB}{\sin \widehat{HCB}} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \cos 20^\circ} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \triangle DBH \text{ có } \widehat{D} = 90^\circ; \widehat{B} = 30^\circ \text{ nên } \frac{HD}{HB} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \frac{HC}{HD} = \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4), suy ra: } \frac{IC}{IA} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow IH \parallel AD$$

$$\Rightarrow \widehat{CHI} = \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = 20^\circ. \text{ Vậy } \widehat{CHI} = 20^\circ.$$

Chú ý.

• Ở đẳng thức (1) chúng ta vận dụng kết quả:

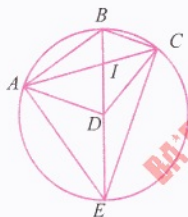
$$\text{Trong } \triangle ABC: \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

• Ở đẳng thức (2) chúng ta vận dụng công thức:
 $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a.$

(Cách chứng minh dành cho bạn đọc).

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại I . Tính số đo $\widehat{AID}$, biết rằng $\widehat{B} = 20^\circ, \widehat{BCA} = 35^\circ, \widehat{BDC} = 40^\circ, \widehat{BDA} = 70^\circ$.

Lời giải.



Dựng đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, đường thẳng BD kéo dài cắt đường tròn tại E (h.4). Theo tính chất góc nội tiếp và góc ngoài tam giác, ta có:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 20^\circ; \widehat{DCE} = \widehat{BDC} - \widehat{DEC} = 20^\circ.$$

Suy ra $\triangle DCE$ cân tại $D \Rightarrow DC = DE$. Chứng minh tương tự, ta cũng được kết quả $DA = DE$. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCE$. Vì vậy:

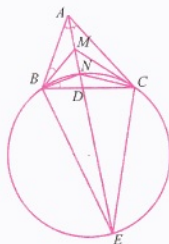
$$\widehat{DEA} = \widehat{BEA} = \widehat{BCA} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \frac{1}{2} \widehat{ADE} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{ABE} + \widehat{BAC} = 75^\circ.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC với đường phân giác trong AD . Các điểm M, N thuộc đoạn thẳng AD .

Chứng minh rằng $\widehat{ACM} = \widehat{BCN}$.

Lời giải.



Giả sử điểm M nằm giữa A và N (trường hợp điểm N nằm giữa A và M ta chứng minh tương tự).

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC cắt AD ở E (E khác N). Theo tính chất góc nội tiếp, kết hợp giả thiết, ta có $\widehat{ABM} = \widehat{CBN} = \widehat{AEC}$.

$$\text{Do đó } \triangle ABM \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AC}.$$

$$\text{Suy ra: } \triangle ABE \sim \triangle AMC \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACM}$$

$$\text{Kết hợp với } \widehat{AEB} = \widehat{BCN} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCN}.$$

Mời các bạn thử vận dụng cách vẽ thêm đường tròn ngoại tiếp tam giác để giải các bài tập sau:

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng khi M, N di động trên đoạn AB, AC của tam giác ABC sao cho $BM = CN$ thì đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

2. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường cao AH , trung tuyến AM . Giả sử $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

3. Cho tam giác ABC cân tại A . Tìm tập hợp các điểm I sao cho IA là phân giác của $\widehat{BAC}$.

4. Cho hai điểm D và E tương ứng trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC sao cho $DE \parallel BC$. Gọi P là điểm bất kì nằm bên trong tam giác ABC . Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt DE tại F và G . Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PDG, PEF . Chứng minh rằng $AP \perp O_1O_2$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VINH PHÚC NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. a) ĐK:
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{3} \neq 0 \\ \sqrt{3}-\sqrt{x+2} \neq 0 \\ x+2-\sqrt{3x+6} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

b)
$$P = \left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{1} + \frac{(2-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2} \right) \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3}-\sqrt{x+2})} \right)$$

$$= (\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}-\sqrt{3}) \left(\frac{2\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3}-\sqrt{x+2})} \right)$$

$$= (\sqrt{x+2}-\sqrt{3}) \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{3}-\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} - 1.$$

Ta có:

$$x \geq -1 \Rightarrow x+2 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{x+2} \leq 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \leq \sqrt{3} - 1$$

$$\Rightarrow \max P = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Câu 2. a) ĐK: $x \neq 2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với $(3m+3)x - (2m+5) = 0$ (*)

• Nếu $3m+3=0 \Leftrightarrow m=-1 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

• Nếu $3m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \Rightarrow x = \frac{2m+5}{3m+3}$

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với (*) có

ng nghiệm thỏa mãn
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+5}{3m+3} \leq 3 \\ \frac{2m+5}{3m+3} \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7m+4}{3m+3} \geq 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \geq -\frac{4}{7} \text{ (do } m \neq -1) \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

b) Cộng vế với vế ta có:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) = 42+d^2 \Rightarrow 3Q \geq 42 \Rightarrow Q \geq 14$$

Do đó

$$\min Q = 14 \Leftrightarrow d = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+2b^2+3c^2 = 36 \quad (1) \\ 2a^2+b^2 = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra b chẵn và $b < 3 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$.

• Nếu $b = 0$ từ (2) suy ra $a^2 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $b = 2$ từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} a^2+3c^2 = 28 \\ 2a^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $\min Q = 14$ khi $a = 1, b = 2, c = 3, d = 0$.

Câu 3. Đặt $T = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5}{4}} + \dots + \sqrt[2017]{\frac{2018}{2017}}$.

Vì T có 2018 số hạng và các số hạng của T đều lớn hơn 1 nên $T > 2016 \Rightarrow S > 2018$. (1)

Ta sẽ chứng minh $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ta đều có

$$(1+x)^n > 1+nx. \quad (2)$$

Thật vậy, với $n = 2$ ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 1+2x+x^2 > 1+2x \Leftrightarrow x^2 > 0. \text{ (hiển nhiên)}$$

Giả sử (2) đúng với $n = k, k > 2$, tức là:

$$(1+x)^k > 1+kx.$$

Khi đó ta có $(1+x)(1+x)^k > (1+x)(1+kx)$

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x.$$

Vậy BĐT (2) được chứng minh. Từ (2) ta suy ra

$$\sqrt[n]{1+nx} < 1+x, \text{ thay } x = \frac{1}{n^2} \text{ ta được}$$

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < 1 + \frac{1}{n^2}.$$

Thay $n = 2, 3, \dots, 2017$ ta được

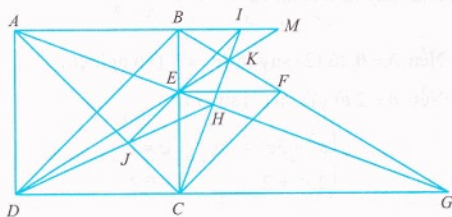
$$T < 1 + \frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + 1 + \frac{1}{2017^2}$$

$$< 2016 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2016.2017}$$

$$< 2016 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} = 2017.$$

Do đó $S = T + 2 < 2019$ kết hợp với (1) suy ra $[S] = 2018$.

Câu 4.



a) Từ giả thiết, ta có: $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{FB}{FG} = \frac{EA}{EG}$.

$\triangle EAB \sim \triangle EGC$ nên $\frac{EA}{EG} = \frac{AB}{CG}$. Mà $AB = CD$

$$\Rightarrow \frac{FB}{FG} = \frac{CD}{CG} \Rightarrow CF \parallel BD \Rightarrow CF \perp AC.$$

b) Kéo dài DE cắt AB tại M . Xét các cặp tam giác đồng dạng KIB và KCG ; KIM và KCD , ta

$$\text{có: } \frac{IM}{DC} = \frac{IK}{KC} = \frac{KB}{KG} = \frac{BI}{GC}.$$

Suy ra $\frac{IM}{IB} = \frac{DC}{CG} = \frac{AB}{CG} = \frac{EB}{EC} = \frac{EM}{ED}$, theo định lý

Thales đảo, ta suy ra $IE \parallel BD \Rightarrow IE \perp AC$.

Xét $\triangle ACI$ có $IE \perp AC$, $CE \perp AI$ nên suy ra E là

trực tâm của $\triangle ACI$ hay $AE \perp CI \Rightarrow \widehat{EHI} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BEHI$ có $\widehat{EBI} = \widehat{EHI} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $BEHI$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có tứ giác $AJHI$ nội tiếp nên $\widehat{JHC} = \widehat{JAB} = 45^\circ$ (cùng bù với $\widehat{JHI}$). Lại có tứ giác $ADCH$ nội tiếp nên $\widehat{DHC} = \widehat{DAC} = 45^\circ$. Mà D, J thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CH nên ba điểm H, J, D thẳng hàng.

Xét $\triangle DJC$ và $\triangle DCH$ có $\widehat{DCJ} = \widehat{DHC} = 45^\circ$, $\widehat{D}$

là góc chung, suy ra $\triangle DJC \sim \triangle DCH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DJ}{DC} = \frac{DC}{DH} \Rightarrow DJ \cdot DH = DC^2 = a^2.$$

Câu 5. Do $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$ suy ra $ab < abc, bc < abc, ca < abc \Rightarrow a > 1, b > 1, c > 1$. Đặt $2x^3 = b + c - a - 1; 2y^3 = c + a - b - 1; 2z^3 = a + b - c - 1$. Ta cần chứng minh $xyz \leq 1$. (*)

Ta có: $2(x^3 + y^3) = 2(c - 1) > 0 \Rightarrow x^3 + y^3 > 0$,

tương tự $x^3 + z^3 > 0, y^3 + z^3 > 0$. Suy ra có nhiều nhất một trong ba số x, y, z nhỏ hơn hoặc bằng 0.

• Nếu một trong các số x, y, z nhỏ hơn hoặc bằng 0 thì (*) hiển nhiên đúng.

• Nếu cả ba số x, y, z đều dương, ta chứng minh (*) bằng phản chứng. Giả sử $xyz > 1$. Khi đó:

$$y^3 + z^3 = (y + z)[yz + (y - z)^2] \geq yz(y + z)$$

$$\Rightarrow x(y^3 + z^3 + 1) \geq xyz(y + z) + x > x + y + z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x + y + z} > \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} = \frac{1}{a}.$$

Tương tự:

$$\frac{y}{x + y + z} > \frac{1}{x^3 + z^3 + 1} = \frac{1}{b}, \frac{z}{x + y + z} > \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} = \frac{1}{c}.$$

Suy ra:

$$\frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} + \frac{z}{x + y + z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{ab + bc + ca}{abc} \Rightarrow abc > ab + bc + ca$$

(trái giả thiết). Vậy $xyz \leq 1$. Suy ra

$$(a + b - c - 1)(b + c - a - 1)(c + a - b - 1) = 8(xyz)^3 \leq 8.$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $a = b = c = 3$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH NGHỆ AN NĂM HỌC 2016 - 2017

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (4 điểm)

- a) Tìm các hệ số b, c của đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $x = 2$.
b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (4 điểm)

- a) Giải phương trình $x + 2 = 3\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x}$.
b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ$, $BC = 5$ cm và đường cao $AH = 1$ cm. Tính độ dài các cạnh AB và AC .

Câu 4. (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , D là điểm trên cung BC không

chứa A . Dựng hình bình hành $ADCE$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC, ACE ; P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên các đường thẳng BC, AB và I là giao điểm của EK với AC .

- a) Chứng minh ba điểm P, I, Q thẳng hàng.
b) Chứng minh đường thẳng PQ đi qua trung điểm của đoạn HK .

Câu 5. (4 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1$.

b) Trên bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các số tiếp theo lên bảng theo quy tắc: Nếu có hai số x, y phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z = x + y + xy$. Chứng minh rằng các số được viết trên bảng (trừ số 1) có dạng $3k + 2$ (với k là một số tự nhiên).

MAI XUÂN VINH

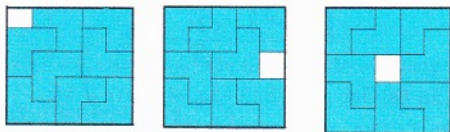
(Sở GD – ĐT Nghệ An) **Giới thiệu**

Câu 6. Ta gán cho các ô vuông ở hàng lẻ, cột lẻ số 7 các ô còn lại ta gán số -4 như hình vẽ dưới đây:

7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7

Ta nhận thấy rằng khi lát một tấm gỗ vào bất kì vị trí nào nên mặt sàn theo yêu cầu đã nêu thì tổng các số trên ba ô được lát luôn là một số âm. Từ đó, nếu ô không được lát là ô mang số -4 , thì tổng các ô được lát là $9.7 + 15.(-4) = 3 > 0$, vô lý! Do đó các

ô không được lát phải là các ô mang số 7. Ta sẽ chỉ ra các ô mang số 7 đều có thể là các ô không được lát. Do tính đối xứng của hình vuông nên ta chỉ cần xét 3 trường hợp như các hình vẽ sau:



Vậy các ô không được lát là các ô ở hàng lẻ, cột lẻ, đó là các ô: 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) **Giới thiệu**

1A	2D	3A	4B	5C	6D	7B	8D	9C	10A	11B	12C	13B	14D	15D	16A	17A
13D	19B	20A	21C	22C	23B	24A	25A	26D	27A	28A	29C	30B	31D	32C	33B	34D
35C	26A	37D	28A	39C	40C	41A	42C	43A	44B	45C	46B	47D	48D	49A	50B	

Câu 1. $S = 40 \cdot \frac{1,1^{12} - 1}{1,1 - 1} \approx 855,4$.

Câu 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Câu 3. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$ nên

$f'(0) = \frac{5}{6}$ và $g'(x) = \cos x$ nên $g'(0) = 1$.

Câu 4. $(SAB), (MCD)$ lần lượt chứa 2 đường thẳng song song AB, CD và MN là giao tuyến của chúng nên $MN \parallel CD$.

Câu 5. $\frac{4x+4}{x-1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-3) = 0$ nên đồ thị của 2 hàm số đã cho cắt nhau tại 2 điểm.

Câu 6. Đặt $t = \frac{1}{x} > 0$. Xét $f(t) = t^3 - t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 3t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Lập bảng biến thiên ta được

$$y = f(t) \geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Câu 7. $\frac{1}{p} = \log_x \frac{a}{b^2} = \log_x a - 2\log_x b = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

Câu 8. $z = -3 - 4i$ nên $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i = \frac{1}{5}$.

Câu 9. Lấy $A(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng đã cho ta có khoảng cách cần tìm là

$$\frac{\left| \overrightarrow{AM}, \vec{u} \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 10. Gọi $A(2+2a; 3+3a; -4-5a) \in d$ và $B(-1+3b; 4-2b; 4-b) \in d'$ lần lượt là giao điểm của đường vuông góc chung với d và d' . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0$ nên $a = -1, b = 1$. Đường thẳng cần tìm đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vector chỉ phương.

Câu 11. Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3} \sin x = -\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \cos x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Do $S \subset \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$ nên $S = \left\{-\frac{7\pi}{6}\right\}$.

Câu 12. Do $f(x)$ liên tục trên mỗi miền $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 13. $y' = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$. Gọi m là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị. Yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\begin{cases} y'(m) = 0 \\ y(m) - my'(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 14. Gọi trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ lần lượt là $G(2; 1), G'(a; b)$. Vì $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{BC}$ nên $a = 2b = -4$.

Câu 15. $D = (-1; +\infty)$. Do $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$ nên trục hoành là 1 tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Do $\lim_{x \rightarrow -1} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm đứng là các đường thẳng $x = \pm 1$.

Câu 16. Đồ thị ở phương án D là của hàm số có đạo hàm tại 0 khác 0. Đồ thị ở phương án C là của hàm số có đạo hàm cấp 2 tại 0 bằng 0. Đồ thị ở phương án B là của hàm số có đạo hàm cấp 2 tại 0 dương.

Câu 17. $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1; 2\}$. Đặt $t = \log_2 x$ ta được

$$\frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(2t-1)(t+1)}{t(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t < 1 \end{cases}$$

Khi đó $S = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$.

Câu 18. $\int x^2 \ln x dx = \frac{2}{3} \int \ln x dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int x^{\frac{1}{2}} dx \right)$
 $= \int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

Câu 19. Ta có $x^2 \leq 2x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. Suy ra diện tích cần tính là $\pi \int_0^2 ((2x)^2 - (x^2)^2) dx$.

Câu 20. Đặt $x = \tan t$, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t) d(\tan t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{2 + \pi}{8}.$$

Câu 21. Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$|z| = |z + \bar{z}| = 1 \text{ nên } x^2 + y^2 = 4x^2 = 1.$$

Câu 22. Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Với $A(1, 0); \Delta: x = -1$, ta có $MA = d(M, \Delta)$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là 1 parabol.

Câu 23. Gọi độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ

tam giác đều là x , ta có $\frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = a$ nên $x = a\sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra } V = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} h = \frac{3a^2 h \sqrt{3}}{4}.$$

Câu 24. Với I, K là trung điểm AB, IC ta có

$$\frac{|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|}{4} = \frac{|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC}|}{2} = |\overrightarrow{MK}| \geq d(K, (P)).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên (P) . Khi đó $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 25. Gọi $A(-1+2a; a; -2+3a) = d \cap (P)$ thì ta

có $(-1+2a) + 2a + (-2+3a) - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Do

$\vec{n}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (5, -1, -3)$ nên có phương trình.

Câu 26. Số các số cần tìm là $2(4 \cdot A_7^3 - 3 \cdot A_6^3) = 1500$.

Câu 27. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của AG với CB, CD ta có $K = PM \cap SD$. Gọi L là trung điểm của KD thì $CL \parallel MK$. Suy ra K là trung điểm SL . Do vậy $KD = 2KS$.

Câu 28. Gọi H là tâm của tam giác đều BCD .

Dựng hình chữ nhật $CMHK$. Ta có

$$d(AC, BM) = d(H, (ACK)) = HL = \frac{HK \cdot HA}{AK} = a\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Câu 29. Định chính: C là $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Ta có $y' = 3(x+m)(x-3m)$ và y nghịch biến trên (x_1, x_2) với $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của y' nên yêu cầu bài toán sẽ được thỏa mãn khi $(0; 1) \subset (x_1, x_2)$. Xét các trường hợp $m \geq 0$ và $m < 0$ sẽ được đáp số.

Câu 30. Xét $f(x) = |x^2 - 2x|(|x| - 1)$ ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x, & x \geq 2; \\ -x^3 + 3x^2 - 2x, & 0 \leq x < 2; \\ -x^3 + x^2 + 2x, & x < 0. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$. Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Câu 31. Với $\Delta = 9 - 4(2m - 7) \geq 0$, phương trình

đã cho luôn có 2 nghiệm thực $x_1, x_2 > 0$ thỏa mãn $\log_3(x_1 x_2) = \log_3(x_1) + \log_3(x_2) = 3$.

Suy ra $x_1 x_2 = 27$. Do đó giả thiết trở thành

$$27 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 72 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12.$$

Do đó $\{x_1; x_2\} = \{3; 9\}$. Suy ra

$$2m - 7 = \log_3(x_1) \cdot \log_3(x_2) = 2. \text{ Vậy } 2m = 9.$$

Câu 32. Ta có

$$f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} + \ln 2.$$

Câu 33. Ta có $e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$ (do hàm số

$f(x) = e^{x-1} + x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 0$).

$$\text{Suy ra } V = \pi \int_0^1 e^{2x-2} dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}.$$

Câu 34. Gọi H là hình chiếu của B' lên $A'C'$

thì $B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $A'C' \perp (BB'H)$. Do đó

$$\widehat{BHB'} = 60^\circ. \text{ Suy ra } BB' = B'H \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Do vậy } V = \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{8}.$$

Câu 35. Gọi $C(a, b, c)$ ta có $d(C, Ox) = \sqrt{b^2 + c^2}$

và $d(C, \Delta) = \sqrt{a^2 + (c-1)^2}$. Do đó $a^2 = b^2 + 2c - 1$.

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{b^2 + 2c - 1 + (b-4)^2 + c^2} \geq \sqrt{6}.$$

Câu 36. Xác suất cần tìm là $1 - \left(1 - \frac{1}{6.2}\right)^3 = \frac{397}{1728}$.

Câu 37. Số tiền nhận được vào cuối tháng thứ n nên ban đầu gửi số tiền A với lãi suất r là $T_n = A(1+r)^n$. Do vậy, sau 5 năm (60 tháng), số tiền người đó nhận được là

$$\sum_{k=1}^{60} A(1+r)^k + \sum_{k=1}^{59} Bk(1+r)^{60-k} = 539447312 \text{ (đồng)}.$$

Câu 38. Gọi Q là phép quay tâm A biến C thành B và M' là ảnh của M trong phép quay Q .

Ta có $M'M^2 + MB^2 = 2AM^2 + MC^2 = MB^2$ nên $M'B \perp M'M$. Kết hợp $M'B \perp MC$ được M', M, C thẳng hàng. Suy ra $\widehat{AMC} = 180^\circ - \widehat{AMM'} = 135^\circ$.

Câu 39. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . Khi đó $AB \perp (CDM)$ và $CD \perp (ABN)$. Do đó yêu cầu bài toán sẽ được thỏa mãn khi

$$MC \perp MD \Leftrightarrow MD = x\sqrt{2} \Leftrightarrow MA = \sqrt{a^2 - 2x^2}$$

$$2\sqrt{a^2 - 2x^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 40. Gọi $M(m, m^3 - 3m)$ thì phương trình tiếp tuyến Δ tại M là $\Delta: y = f'(m)(x - m) + f(m)$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ là

$$f(x) = f'(m)(x - m) + f(m) \Leftrightarrow (x - m)^2(x + 2m) = 0$$

Khi đó $x_A = -2m$. Ngoài ra $x_B = \frac{2m^3}{3m^2 - 3}$. Do đó yêu cầu bài toán sẽ được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \frac{-2m + \frac{2m^3}{3m^2 - 3}}{2} = m \neq -2m \Leftrightarrow 5m^2 = 6.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Định chính “cực trị” thành “điểm cực trị” và bổ sung “ $f(x)$ có đạo hàm liên tục”.

Đặt $u = x^2 - 2x$ ta có $y' = (2x - 2)f'(u)$.

$$\text{Do đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = -0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 42. Giả thiết của bài toán tương đương

$$f(3(x+y)) = f(x^2 + y^2 + xy + 2) \text{ với}$$

$$f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t \text{ có } f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} > 0; \forall t > 0.$$

Do vậy $3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2$. Suy ra

$$(2x+y)^2 - 6(2x+y) + 5 = -3(y-1)^2 \leq 0.$$

$$\text{Suy ra } 1 \leq 2x+y \leq 5. \text{ Do đó } P = 1 + \frac{2x+y-5}{x+y+6} \leq 1.$$

Câu 43. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 + 2x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < mx - 5 \neq 1 \\ x = 2 \vee x = 5. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2m - 5 \neq 1 \\ 5m - 5 \leq 0 \vee 5m - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 5m - 5 \neq 1 \\ 2m - 5 \leq 0 \vee 2m - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 < 10m \neq 12 \leq 25 \\ 10m = 30. \end{cases}$$

Do $10m \in \mathbb{Z}$ nên có 15 giá trị m thỏa mãn.

Câu 44. $L = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$. Đặt $u = \sqrt{1 + x^2}$ ta có

$$L = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \left(u + \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Do đó $m = 2, n = 3$.

Câu 45. Đặt $z = a + bi$ với $a^2 + b^2 = 1$ thì

$$P = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{(a^2 - b^2 + a + 1)^2 + (2ab + b)^2} = \sqrt{2-2a} + |2a+1| = f(a).$$

Khảo sát hàm số $f(a)$ với $a \in [-1; 1]$ được

$$\max_{[-1;1]} f(a) = \frac{13}{4}. \text{ Khi } z = \frac{7+i\sqrt{15}}{8} \text{ thì } P = \frac{13}{4}.$$

Câu 46. Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu của A trên (BCD) . Do $(ABM) \perp CD$ nên H thuộc BM . Ta có

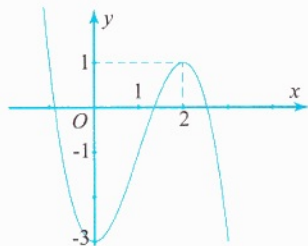
$$AH = \frac{2S_{ABM}}{BM} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{\frac{3x^2}{4} - 3}}{x\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3x^2 - 12}}{x}.$$

$$\text{Do } S_{BCD} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \text{ và } V = 2\sqrt{2} \text{ nên}$$

$$x\sqrt{x^2 - 4} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

(Xem tiếp trang 15)

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ -3 ; hoành độ điểm cực đại là 2 và đi qua điểm $(1; -1)$ như hình vẽ.



Tỷ số $\frac{b}{a}$ bằng

- A. -1 . B. 1 . C. -3 . D. 3 .

Câu 2. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (m là tham số thực) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2 . Giá trị của m bằng bao nhiêu?

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 3. Cho hàm số

$$y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 3,$$

(m là tham số thực). Tìm điều kiện của m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm bên phải của trục tung.

- A. $-5 < m < -1$. B. $-5 < m < -3$.

- C. $-3 < m < -1$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -5 \end{cases}$.

Câu 4. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận

ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2x^2 - 5x + 2}$ là

- A. 2 . B. 1 . C. 3 . D. 4 .

Câu 5. Cho các hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$; $y = x^4 + 2x^2 + 2$;

$y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$?

- A. 3 . B. 1 . C. 2 . D. 0 .

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 5$. Tính tổng $m_1 + m_2$.

- A. $m_1 + m_2 = 0$. B. $m_1 + m_2 = 10$.

- C. $m_1 + m_2 = 6$. D. $m_1 + m_2 = -6$.

Câu 7. Tập giá trị của hàm số $\frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

- A. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. B. $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$. C. $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 8. Gọi (C) là đường parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$, tìm m để (C) đi qua điểm $A(2; 24)$.

- A. $m = -4$. B. $m = 6$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Hỏi phương trình $|f(x)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm.

- C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

Câu 10. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000,$$

$C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỷ số

$M(x) = \frac{T(x)}{x}$, với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x

uốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

- A. 20.000đ. B. 15.000đ.
C. 10.000đ. D. 22.000đ.

Câu 11. Phương trình $\sin 2x \cos x = \sin 7x \cos 4x$ có các nghiệm là:

- A. $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{k\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \frac{k2\pi}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 12. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng:

- A. 0. B. π . C. 2π . D. 3π .

Câu 13. Xét phương trình

$$\sin 3x - 3 \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x + 3 \cos x = 2.$$

Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình đã cho?

- A. $(2 \sin x - 1)(2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1) = 0$.
B. $(2 \sin x - \cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$.
C. $(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$.
D. $(2 \sin x - 1)(\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$.

Câu 14. Số nghiệm trên khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $27 \cos^4 x + 8 \sin x = 12$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả tráng miệng trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn?

- A. 25. B. 75. C. 100. D. 15.

Câu 16. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà số đó nhất thiết có mặt các chữ số 1, 2, 5?

- A. 684. B. 648. C. 846. D. 864.

Câu 17. Hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành đa thức là

- A. 162270. B. 162720.
C. 126270. D. 126720.

Câu 18. Cho một đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn O . Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

- A. $\frac{3}{323}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{2}{969}$. D. $\frac{7}{216}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}, m$

là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27}, & x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9}, & x = \pm 3 \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc khoảng $(-3; 3)$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.
C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.
D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

- A. $y'' - y' = e^x(x+1)$. B. $y'' - y' = e^x(x-1)$.
C. $y'' + y' = e^x(x-1)$. D. $y'' + y' = e^x(-x+1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A. 0. B. $f'(2)$.
C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x = 1$ cắt đồ thị hàm số tại điểm B (B khác A). Tọa độ điểm B là

- A. $B(-3; 24)$. B. $B(-1; -8)$.
C. $B(3; 24)$. D. $B(0; -3)$.

Câu 24. Cho tứ diện $O.ABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = 2\text{cm}$

$OB = 3\text{cm}$, $OC = 6\text{cm}$. Tính thể tích của khối tứ diện $O.ABC$.

- A. 6cm^3 . B. 36cm^3 . C. 12cm^3 . D. 18cm^3 .

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD .

- A. a . B. $2a$. C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Biết tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos \widehat{ACB} = \frac{1}{3}$, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $S = \frac{65\pi a^2}{4}$. B. $S = 13\pi a^2$.
C. $S = \frac{97\pi a^2}{4}$. D. $S = 4\pi a^2$.

Câu 27. Cho hai số thực dương a, b thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 28. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 29. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 30. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ trên $[e^{-1}; e]$ là

- A. $M = e^2 - 2, m = e^{-2} + 2$. B. $M = e^{-2} + 2, m = 1$.
C. $M = e^{-2} + 1, m = 1$. D. $M = e^2 - 2, m = 1$.

Câu 31. Tìm giá trị m để phương trình $2^{2|x-1|+1} + 2^{|x-1|} + m = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 3$. B. $m = \frac{1}{8}$. C. $m = 1$. D. $m = -3$.

Câu 32. Diện tích toàn phần của một khối lập phương là 150cm^2 . Thể tích của khối lập phương đó là

- A. 125cm^3 . B. 100cm^3 . C. 25cm^3 . D. 75cm^3 .

Câu 33. Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là 60cm , diện tích đáy $900\pi\text{cm}^2$. Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm thân nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

- A. Chiều dài $60\pi\text{cm}$, chiều rộng 60cm .
B. Chiều dài 900cm , chiều rộng 60cm .
C. Chiều dài 180cm , chiều rộng 60cm .
D. Chiều dài $30\pi\text{cm}$, chiều rộng 60cm .

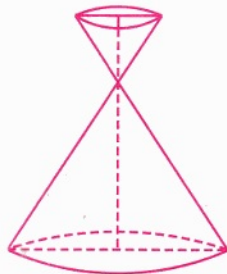
Câu 34. Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I ; J ; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN ; MP ; MQ . Tỉ số thể tích $\frac{V_{MIK}}{V_{MNPQ}}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 35. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh bằng nhau và bằng $2a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

- A. $S = \frac{28\pi a^2}{9}$. B. $S = \frac{7\pi a^2}{9}$.
C. $S = \frac{28\pi a^2}{3}$. D. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 36. Cho một đồng hồ cát như hình bên dưới (gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° .



Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\text{cm}^3$. Hỏi nếu cho

đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{27}$. C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{64}$.

Câu 37. Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức

$N(t) = 100 \cdot (0.5)^{\frac{t}{A}} (\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3574 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 63%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

- A. 3874. B. 3833. C. 3834. D. 3843.

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

B. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa

mãn $\int_0^{\pi} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính tích

phần $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 6. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 40. Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ (với a là số

thực, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a + 3b + c$.

- A. 4. B. -6. C. 6. D. 5.

Câu 41. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- A. $S = \ln 2 - 1$ (đvdt). B. $S = 2 \ln 2 - 1$ (đvdt).

C. $S = 2 \ln 2 + 1$ (đvdt). D. $S = \ln 2 + 1$ (đvdt).

Câu 42. Cho số phức $z = a + ib$ (trong đó a, b là các số thực) thỏa mãn $3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i$. Tính ab .

- A. $ab = 6$. B. $ab = -3$. C. $ab = 3$. D. $ab = -6$.

Câu 43. Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3 + z^2 - 2 = 0$ là:

- A. 1. B. -1. C. $1 - i$. D. $1 + i$.

Câu 44. Trên mặt phẳng phức tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = x + 1$. B. $y = -x + 1$.

C. $y = -x - 1$. D. $y = x - 1$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = \sqrt{1258}$.

B. $|w| = 3\sqrt{137}$.

C. $|w| = 2\sqrt{314}$.

D. $|w| = 2\sqrt{309}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0.$$

Tìm m để phương trình đó là phương trình của một mặt cầu.

A. $-5 < m < 1$.

B. $m < -5$ hoặc $m > 1$.

C. $m < -5$.

D. $m > 1$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,

cho ba vector $\vec{a}(5; 7; 2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$, $\vec{c}(-6; 1; -1)$. Tìm

tọa độ của vector $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

A. $\vec{m} = (3; 22; -3)$.

B. $\vec{m} = (3; 22; 3)$.

C. $\vec{m} = (-3; 22; -3)$.

D. $\vec{m} = (3; -22; 3)$.

Câu 48. Mặt phẳng cắt mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z - 1 = 0$ có phương trình là:

A. $2x + 3y - z - 16 = 0$. B. $2x + 3y - z + 12 = 0$.

C. $2x + 3y - z - 18 = 0$. D. $2x + 3y - z + 10 = 0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; 2; -1)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}. \text{Viết phương trình mặt phẳng}$$

(P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $2x + y - 3z + 3 = 0$. B. $x + 2y - z - 1 = 0$.

C. $3x + 2y - z + 1 = 0$. D. $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A

ĐÁP ÁN...

(Tiếp theo trang 10)

Câu 47. Đường thẳng EM cắt AD, AB lần lượt tại X, Y. Các đường thẳng YN, AC cắt nhau tại Z. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BD. Áp dụng định lý Menelaus, ta có

$$\frac{YA}{YB} \cdot \frac{EB}{EK} \cdot \frac{MK}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{YA}{YB} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{XA}{XD} \cdot \frac{ED}{EB} \cdot \frac{YB}{YA} = 1 \Rightarrow \frac{XA}{XD} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Chú ý $\triangle ABC = \triangle ABD$ nên $\frac{AZ}{AC} = \frac{AX}{AD} = \frac{3}{4}$.

Do vậy

$$V_{AXYZ} = V_{ABCD} \cdot \frac{AX}{AD} \cdot \frac{AY}{AB} \cdot \frac{AZ}{AD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}.$$

Câu 48. Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD ngoại tiếp mặt cầu J bán kính a thì $J \in SO$ với O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của J trên (SBC). Theo cách dựng thì $JH \perp (SBC)$ nên $JH = JO = a$. Đặt $SO = h, AB = 2x$ ta có

$$\frac{a}{h-a} = \sin \widehat{OSM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Rightarrow h = \frac{2x^2 a}{x^2 - a^2}.$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 4x^2 \cdot \frac{2ax^2}{x^2 - a^2} = \frac{8a}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - a^2}.$

Xét $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - a^2}$ trên $(a, +\infty)$ có

và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2; -1; 3)$.

B. $I(-1; -2; 3)$.

C. $K(3; 0; 15)$.

D. $J(-3; 2; 7)$.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}.$$

Lập bảng biến thiên ta có $f(x) \geq f(a\sqrt{2}) = 4a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} \geq \frac{8a}{3} \cdot 4a^2 = \frac{32a^3}{3}.$

Câu 49. Gọi H là trung điểm BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có H là trung điểm

của AO. Ta có $DH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi J là tâm

mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD ta có $JO \perp (ABC)$. Do $JA = R, OA = a$ nên

$JO = \sqrt{R^2 - a^2}$. Do $HO \perp JO, HO \perp HD$ nên ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{R^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = R^2.$$

Giải phương trình trên được $R = \frac{\sqrt{91}a}{8}.$

Câu 50. Đặt $X(a, b, 0), Y(c, d, 0)$ thì

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = 1.$$

Theo BĐT Minkowski, ta có

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(3-c)^2 + (4-d)^2} + \sqrt{(c-a)^2 + (d-a)^2} \geq 5.$$

Suy ra $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(3-c)^2 + (4-d)^2} \geq 4.$

Lại áp dụng BĐT Minkowski, ta được

$$AX + BY = \sqrt{a^2 + b^2 + 4} + \sqrt{(c-3)^2 + (d-4)^2 + 1} \geq 5.$$

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)



TẠI SAO LIÊN BANG NGA THUA TRONG KỲ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ IMO

OLEG MAKARENKO
(CHLB Nga)

Đắt đáng tiếc, những năm trở lại đây, đất nước chúng ta đánh mất thứ hạng của mình trong Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế. Đây không phải là thất bại ngẫu nhiên, mà đây là hệ quả tất yếu của những quyết sách sai lầm được đưa ra từ 15-20 năm trước đây.

Đầu tiên tôi sẽ nói về thành tích của cá nhân tôi với toán học. Khi còn là học sinh tôi đã đạt kết quả không tồi trong một kỳ thi toán của thành phố Leningrad, sau đó tôi được tham gia vào lớp toán nổi tiếng của thầy *Sergei Rukshin*, nơi đã khơi dậy nhiều tài năng, ví dụ như *Grigori Perelman* (giải thưởng Fields 2006), *Stanislav Smirnov* (giải thưởng Fields 2010), *Fedor Nazarov* và *Chelkak Dmitry* (giải thưởng Salem 1999 và 2014), *Eugenia Malinnikova* (giải thưởng của Viện Clay 2017). Xin nói thêm, chính Viện Clay đã trao giải thưởng 1 triệu đô la nhưng *Perelman* đã từ chối.

Sau khi trải qua lớp toán nổi tiếng, tôi không trở thành nhà toán học chuyên nghiệp, thế nhưng tôi vẫn lặng lẽ, thích thú theo dõi hệ thống đào tạo nguồn nhân lực. Chắc chắn hệ thống đào tạo này không tuyển chọn bừa bãi những tài năng trong thành phố. Chúng tôi đã được học chương trình riêng phù hợp với mình, còn trong quá trình học tập được tiếp xúc với cả những trò chơi điện tử ứng dụng rất hiện đại ngày nay.

Khi nhiều độc giả thông tin với tôi rằng, nước Nga đang trượt chân trong các Kỳ thi Olympic Toán trong những năm gần đây, thì đầu tiên tôi nghĩ: họ đã phóng đại, chắc chỉ một vài lần trượt hi hữu thôi. Thế nhưng những bức thư như vậy, rồi cả những lời bình phẩm đã quá nhiều, và cuối cùng tôi buộc phải nghiên cứu kỹ lưỡng vấn đề. Buộc phải cay đắng thừa nhận rằng, hiện giờ chúng ta đang nằm ở vị trí mà 10 năm trước được coi là điều ô nhục.

Các bạn có thể tìm hiểu kết quả của đội tuyển của chúng ta trên trang web của Olympic Toán Quốc tế IMO.

Nếu không tính tới năm 1992, năm mà do những xáo trộn chính trị các đội Nga và đội SNG cùng tham gia một lúc, thì gần như toàn bộ các năm chúng ta hoặc là nằm trong top ba đội dẫn đầu hoặc là gần trong nhóm đấy. Thật đáng ngạc nhiên: mặc dù một nửa số học sinh của chúng ta, sau khi Liên Xô tan rã, đã nằm ngoài lãnh thổ nước ta, thế nhưng toán phổ thông của chúng ta vẫn mạnh tới mức thi đấu ngang ngửa với Trung Quốc và cả Mỹ (Mỹ vốn vẫn mua trí tuệ của người châu Á).

Năm 2011 đội tuyển của chúng ta chạm vào vạch của sự trì trệ đáng báo động: nhiều năm liền chúng ta dậm chân tại chỗ ở vị trí thứ tư và

không có cơ hội leo lên cao. Cuộc khủng hoảng này cần phải được tháo gỡ: hoặc là chúng ta quay lại tập ba hoặc là chúng ta sẽ trượt dốc không phanh. Rất đáng tiếc, chúng ta đã không quay trở lại tập ba.

Năm 2015 tiếng chuông báo động vang lên. Đội tuyển chúng ta đạt vị trí thứ tám trong bảng thành tích đội, còn trong bảng thành tích huy chương Olympic chúng ta giữ vị trí thứ 21: lần đầu tiên chúng ta không có huy chương Vàng và xếp giữa Iran và Singapore. Khi đó nó được coi là sự ngẫu nhiên, dù những người quan tâm toán thừa biết là ngẫu nhiên cũng chỉ là tự an ủi; biết trách ai khi đội gồm có sáu người chứ không phải một người.

Năm 2016 tiếng chuông thứ hai vang lên. Vị trí thứ bảy – tám đáng buồn trong bảng tổng sắp các đội.

Năm 2016 thì ngay cả những người mắc bệnh lạc quan cũng hiểu rõ rằng, vấn đề của chúng ta không phải là nghiêm trọng mà là nguy kịch. Chúng ta giữ vị trí thứ 11 theo thứ hạng và thứ 14 trên bảng tổng sắp huy chương, một kết quả ngang với các nước nhỏ như Georgia hay Hy Lạp.

Tôi cho rằng không nhất thiết phải đưa ra tiêu chí kết luận chúng ta đứng sau cả Mông Cổ, Turkmenistan, Tajikistan, và tại sao vị trí thứ 11 với nước Nga được coi là thảm họa. Tôi chuyển ngay sang bản chất của vấn đề. Vấn đề nằm ở chỗ, hệ thống tuyển chọn và đào tạo các vận động viên toán học từ thời Liên Xô để lại đã bị phá bỏ. Trước kia việc tuyển chọn học sinh tham gia Olympic được diễn ra theo hệ thống

hiều cấp độ. Tất cả học sinh giỏi được liệt kê vào danh sách và ngay trước Kỳ thi Olympic tất cả được mời tới hội trại để thi đấu, chọn ra những học sinh có khả năng nhất.

Trong những năm 90, hệ thống trên bị thay đổi. Trường đoàn Olympic mới là *Nazar Agakhanov* sắp xếp các vị trí trong đội tuyển có phần tùy tiện: dựa theo kết quả của học sinh trong Kỳ thi Olympic toàn Nga và những kỳ thi quốc gia ở các nước khác.

Cứ hình dung, có ba bạn trẻ tài năng. Một bạn có kết quả tốt trong Kỳ thi Olympic Quốc gia của Trung Quốc, một bạn đoạt huy chương Vàng trong Kỳ thi Olympic toàn Nga, còn một bạn thì có kết quả xuất sắc trong các cuộc đấu ở Serbia. Cần gọi ai trong số đó vào đội tuyển?

Câu trả lời thỏa đáng là: không rõ. Cần phải mời cả ba bạn tới hội trại rồi tại đó xem cả ba giải các dạng toán sẽ chờ đón họ trong Kỳ thi Olympic Quốc tế IMO như thế nào? Thêm vào đó cũng cần tính tới lai lịch: nếu một bạn trẻ đã từng tham vào IMO năm ngoái thì đây là một điểm cộng lớn, vì đào tạo bạn trẻ này sẽ dễ hơn.

Thay vì những phương cách đó, rất đáng tiếc học sinh được tuyển chọn vào đội tuyển bây giờ ít nhiều theo cách ngẫu nhiên. Tôi phỏng đoán là có cả yếu tố chính trị trong đó: những bạn trẻ từ một số thành phố hoặc từ một số trường đại học có nhiều cơ hội lọt vào đội tuyển hơn.

Để chứng tỏ những luận điểm của tôi không phải là vô căn cứ, tôi dẫn ra là năm 2017 một nửa thành viên trong đội tuyển Nga không nằm trong số một trăm người có thứ hạng cá nhân cao nhất: hai thành viên nằm trong nhóm thứ

hạng sau một trăm (vị trí thứ 115 và 188), lần đầu tiên trong lịch sử tham gia của đội tuyển Liên Xô và Nga có một thành viên nằm dưới thứ hạng hai trăm: vị trí thứ 265. Vì học sinh tài năng của Nga là có thừa nên chỉ có thể đưa ra một kết luận là: hệ thống tuyển chọn yếu kém, lọt vào đội tuyển còn xa mới là những vận động viên giỏi nhất.

Và cuối cùng, hàng năm lại có thêm những than phiền về quy chế huấn luyện. Xin trích dẫn lời của *Sergei Rukshin*: "...trưởng đoàn môn toán là *Nazar Agakhanov*, Phó giáo sư của Viện Toán Lý Moscow. Trong các vòng chung kết Olympic toàn Nga, ông ta lấy những học sinh giỏi nhất và chọn vào đội tuyển. Tiếp theo thì ông ta ủy nhiệm cho người khác. Theo thời khóa biểu thi trong năm nay ông ta không dạy một tiết nào cho đội tuyển. Nếu trong bóng đá, huấn luyện viên đội tuyển quốc gia thì chỉ cần một lý do như vậy thôi đã bị sa thải từ lâu".

Thêm một điều không hay nữa. Từ năm 2015 học sinh giỏi toán được đào tạo trong hội trại giáo dục mới "Sirius". Ngay năm đầu tiên học sinh trên lớp bị vắt kiệt khủng khiếp – nghe đồn rằng, các huấn luyện viên bắt học sinh làm việc hết sức để có cơ nghỉ ngơi dài hạn cùng với vợ con, tận hưởng điều kiện lý tưởng trên bờ biển Đen.

Hãy xem, học sinh giỏi vật lý không đến "Sirius" mà đến nơi kém hơn ở Dolgoprudnei. Kết quả là có năm huy chương Vàng với năm bạn đi thi.

Sửa sai vẫn còn chưa muộn: may mắn thay, tài năng vẫn không cần cỗi đi trên đất Nga, theo thống kê của các trung tâm ngoại khóa: 10 năm trở lại đây, các bậc phụ huynh có xu hướng đầu

tư tiền bạc và thời gian vào việc học phụ đạo của con em mình. Nói đơn giản hơn thì chúng ta vẫn có người để tuyển chọn.

Việc quan trọng phải làm ngay là điều chỉnh hệ thống tuyển chọn học sinh cho Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế. Có thể, hoặc là copy ngay hệ thống vốn hình thành từ những năm 80 và đã đem lại kết quả rất tốt của chúng ta, hoặc là phải rút ra những bài học về mặt tổ chức sau những kỳ thi không thành công để các huấn luyện viên phải thay đổi.

Cũng cần phải đấu tranh với nạn tham ô, những nhiễu đang diễn ra trong các Kỳ thi Olympic ở ngay trong nước Nga. Hệ thống thi phổ thông quốc gia để vào các trường đại học đã tạo nên kẻ hở cho những kẻ ăn hối lộ: rất khó để mua bán kết quả của kỳ thi quốc gia, ở một số địa phương thì gần như là không thể. Vì thế nạn tham ô, những nhiễu chuyển sang các Kỳ thi Olympic: có thể mua huy chương Vàng ở một Kỳ thi Olympic địa phương hay ở một trường đại học nào đó bằng một số tiền nhỏ.

Cần phải, hoặc là quy trách nhiệm hình sự với những kẻ lợi dụng tổ chức Olympic nhận hối lộ, hoặc là bỏ chế độ ưu đãi khi xét tuyển vào đại học cho những người đoạt giải trong kỳ thi Olympic. Một logic thông thường xin được đưa ra làm kết luận: nếu học sinh có thể đoạt huy chương Vàng trong Kỳ thi Olympic môn Toán thì chắc chắn những bài toán thông thường trong bài kiểm tra cũng là không quá khó với cậu ta.

TS. HOÀNG NGUYỄN HUÂN

(Bộ môn Toán, ĐH Mỏ Địa chất Hà Nội)

Sưu tầm và dịch từ bài viết của Oleg Makarenko, một độc giả Nga trên tờ Ria Novosti, đăng ngày 2.9.2017. Bạn đọc có thể tham khảo bài gốc tại:

<https://ria.ru/authors/20170902/1501619466.html>

<https://tieulun.hopto.org>



KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT VỀ ĐẠO HÀM VÀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

NGUYỄN THÀNH NHÂN

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương)

Lời mở đầu. Đa thức thuộc lớp hàm khả vi (có đạo hàm) tại mọi điểm. Tính khả vi của đa thức được khai thác ở nhiều khía cạnh khác nhau. Trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta cùng xét một tính chất quan trọng được khai thác rất nhiều trong các bài toán liên quan đến nghiệm. Ta xét bài toán sau:

Bài toán mở đầu. Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc $n \geq 1$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ký hiệu $P'(x)$ là đạo hàm cấp một của đa thức đó tại điểm x . Khi đó ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}. \quad (*)$$

Chứng minh. Theo định lý Bézout ta có

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \text{ với } a \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } P'(x) = a(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \dots + a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).$$

$$\text{Vậy nên } \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}. \text{ Bài toán được chứng}$$

minh.

Tiếp theo ta sẽ đi xét một số ứng dụng của bài toán trên. Ta bắt đầu với bài toán sau.

Bài toán 1. Cho đa thức

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 4x + 6$$

có bốn nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 .

Tính tổng

$$S = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 3} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 3} + \frac{1}{x_3^2 - 4x_3 + 3} + \frac{1}{x_4^2 - 4x_4 + 3}.$$

Lời giải. Ta có

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

$$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 14x + 4.$$

Dễ thấy

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{x_i - 3} - \frac{1}{x_i - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - 3} - \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - 1} \right).$$

Áp dụng bài toán trên ta có

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{P'(3)}{P(3)} \right) = \frac{-35}{9}.$$

Nhận xét. Với biểu thức đơn giản ta có thể dùng định lý Viète để tính. Nhưng với biểu thức phức tạp thì dùng định lý Viète là không tối ưu. Dấu hiệu để sử dụng bài toán mở đầu đó chính là mỗi phân thức trong tổng S có thể tách được thành dạng

$$\frac{1}{x - x_i} \text{ trong đó } x_i \text{ là các nghiệm.}$$

Với ý tưởng trên bạn đọc hãy giải thử bài toán sau đây.

Bài toán 2 (Chọn đội tuyển Toán TP. Hồ Chí Minh, năm 2016). Cho đa thức với hệ số thực

$$P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \dots + a_1x + a_0$$

có 2016 nghiệm thực phân biệt và

$P'(x) = P'(2) = 0$, $P'(3) = P'(4) = 2016$. Chứng minh:

trong tập hợp n nhất một nghiệm của $P'(x)$ thuộc khoảng $(1; 2)$.

Tiếp theo bằng cách đánh giá hệ số của đa thức ta có được một vài kết quả khá tổng quát

Bài toán 3. Cho đa thức $P'(x)$ có bậc $n \geq 1$ và có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng khi đó ta có:

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0. \quad (1)$$

Chứng minh. Với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ ta xét đa thức

$$P_k(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) = \frac{P(x)}{x-x_k}.$$

Khi đó $P'(x) = P_1'(x) + P_2'(x) + \dots + P_n'(x)$.

Lại có $P_k'(x_i) = 0 (k \neq i)$ và $P_k'(x_k) \neq 0$. Từ đó ta suy ra $P'(x_i) = P_i'(x_i), \forall i = \overline{1; n}$.

Vậy $\frac{P_i'(x_i)}{P'(x_i)} = 1$. Ta xét đa thức phụ

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{P'(x_i)} - 1 \text{ thì đa thức này có } n$$

nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong khi bậc của nó không quá $n-1$ do đó $Q(x)$ là đa thức đồng nhất không. Nói riêng, hệ số bậc cao nhất của

$$\text{nó là } \frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Ở lời giải trên ta sử dụng một tính chất của đa thức đó là: Nếu đa thức có bậc n và có nhiều hơn n nghiệm thì đa thức đó đồng nhất không. Kỹ thuật này được dùng khá nhiều khi lập luận liên quan đến hệ số của đa thức. Trong bài

toán 3 nếu ta sử dụng đồng nhất hệ số tự do của đa thức phụ $Q(x)$ thì ta có được lời giải cho bài toán sau đây

Bài toán 4. (Đề chính thức trường Đồng toán học miền Nam 2017). Cho đa thức monic $P(x)$ bậc $n \geq 1$ (tức là đa thức có hệ số bậc cao nhất bằng 1) có n nghiệm thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ phân biệt khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1 P'(x_1)} + \frac{1}{x_2 P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{x_n P'(x_n)} = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Bây giờ nếu sử dụng tời đạo hàm cấp hai thì ta lại có kết quả sau đây.

Bài toán 5. Cho đa thức $P'(x) \neq 0, P''(x)$ có $\deg P' = n$ và có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng ta có đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)^2} = 0. \quad (2)$$

Phân tích tìm hướng giải. Để chứng minh bài toán này tương tự với cách xét đa thức $P_k(x)$ như trên thì ta xét đa thức $R_j(x)$ như sau

$$P(x) = (x-x_i)Q_i(x) = (x-x_i)(x-x_j)R_j(x)$$

với $i \neq j$. Khi đó

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n Q_i(x); P''(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} R_j(x).$$

Lập luận tương tự ta có được khẳng định (2). Lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Trong các bài tập tiếp theo ta cần xét thêm tính đơn điệu của hàm số trong quá trình lập luận.

Bài toán 6. Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc $n \geq 1$ có n nghiệm thực phân biệt. Gọi D là tổng độ dài các khoảng nghiệm của bất phương trình $\frac{P'(x)}{P(x)} \geq 2018$. Tìm n để $D = 1$.

Phân tích tìm lời giải. Sự xuất hiện của giả thiết

$\frac{P'(x)}{P(x)} \geq 2018$ đưa ta đi đến suy nghĩ sẽ sử dụng

bài toán mở đầu ở trên. Thật vậy, theo định lí

Bézout ta có $P(x) = a \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ với $a \neq 0$ và

ta giả sử các nghiệm được sắp xếp theo thứ tự lớn dần là $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Do đó ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} \geq 2018 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} \geq 2018.$$

Đặt

$$G(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} \Rightarrow G'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{(x - x_k)^2} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	$x_2 \dots x_n$	$+\infty$
$G'(x)$	-	-	-	-
$G(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	0

Do đó phương trình $G(x) = 2018$ có n nghiệm

thực $x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < \dots < x_n < t_n$. Tập nghiệm

của bất phương trình là $S = \bigcup_{i=1}^n (x_i; t_i]$. Tổng độ dài

các khoảng nghiệm của bất phương trình là

$D = \sum_{i=1}^n (t_i - x_i) = \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n x_i$. Mặt khác ta lại có

$t_i (i = \overline{1; n})$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = 2018 \Leftrightarrow P'(x) = 2018P(x)$$

$$\Leftrightarrow a \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j \neq k} (x - x_j) \right) = 2018a \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$\Leftrightarrow 2018a \prod_{j=1}^n (x - x_j) - a \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq k}^n (x - x_j) \right) = 0. \quad (3)$$

Phương trình (3) có hệ số của x^n (bậc cao nhất)

là $2018a$, hệ số của x^{n-1} là

$$-2018a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - na.$$

Áp dụng định lí Viète ta có

$$\sum_{i=1}^n t_i = -\frac{-2018a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - na}{2018a} = \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2018}.$$

Vậy $D = \sum_{i=1}^n (t_i - x_i) = \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2018}$. Do

đó $D = 1$ khi $n = 2018$.

Nhận xét. Do ta cần xuất hiện các khoảng nghiệm

của bất phương trình $\frac{P'(x)}{P(x)} \geq 2018$, tức là các

nghiệm của phương trình $\frac{P'(x)}{P(x)} = 2018$ nên việc

xét tính đơn điệu của hàm $G(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ là hoàn

toàn tự nhiên.

Một bài toán tương tự sau đây cũng đã xuất hiện trong một đề thi. Mời bạn đọc thử sức.

Bài toán 7. Chứng minh rằng tập nghiệm của bất phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \dots + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

là hợp các khoảng rời nhau và có tổng độ dài là 1988.

Ngoài ra chúng ta chứng minh được bài toán tổng quát sau đây. Phần chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 8. Cho đa thức hệ số thực

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ($a_0 \neq 0$) bậc n , có n nghiệm thực phân biệt và số $c > 0$.

Chứng minh rằng bất phương trình $\frac{P'(x)}{P(x)} \geq c$ có tập nghiệm là hợp của một số nửa khoảng có tổng độ dài là $\frac{n}{c}$.

Bài toán 9. *Ứng với mỗi đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm thực, gọi $d(P)$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kì của nó. Giả sử các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $P'(x)+P'(x)$ đều có bậc $k > 1$ và có k nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng $d(P+P') \geq d(P)$. (4)*

Chứng minh

Ta kí hiệu các nghiệm của $P(x)$ là $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Ta chứng minh bài toán trên bằng phản chứng..

Giả sử $d(P+P') = b-a < d(P)$ trong đó a, b là hai nghiệm gần nhau nhất của đa thức $P(x)+P'(x)$ và $b > a$. Do đa thức $P(x)$ không có nghiệm bội nên ta suy ra a, b không phải là nghiệm của $P'(x)$. Ta đề ý là $P(a)+P'(a)=0; P(b)+P'(b)=0$. Nên từ đó ta suy ra $\frac{P'(a)}{P(a)} = -1; \frac{P'(b)}{P(b)} = -1$. (5)

Theo định lí Bézout ta có $P(x) = a_0 \prod_{i=1}^k (x-x_i)$ với

$$a_0 \neq 0. \text{ Khi đó ta có } \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{x-x_i}.$$

Hàm số $G(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$ có

$$G'(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-x_i)^2} < 0$$

nên nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Từ (5) ta có $G(a) = G(b) = -1$ nên ta suy ra

a, b phải nằm ở hai khoảng xác định khác nhau. Cũng vì a, b là hai giá trị gần nhau nhất của nghiệm $P(x)+P'(x)$ và gần hơn bất cứ hai nghiệm nào của $P(x)$ nên suy ra tồn tại duy nhất một nghiệm $x_j \in (a; b)$.

Từ $d(P+P') = b-a < d(P)$ nên suy ra $x_{i+1} - x_i > b-a \Leftrightarrow a-x_i > b-x_{i+1}$ với mọi $i = 1; k-1$. Cũng từ tính gần nhất của a, b và từ $a-x_i > b-x_{i+1}$ nên ta suy ra $(a-x_i)(b-x_{i+1}) > 0$ (có thể vẽ lên trục số để kiểm tra). Từ đó ta suy ra được

$$\frac{1}{a-x_i} < \frac{1}{b-x_{i+1}} \quad (\forall i = 1; k-1) \quad (6) \quad \text{và hiển nhiên ta có } a-x_k < 0 < b-x_1 \text{ nên}$$

$$\frac{1}{a-x_k} < \frac{1}{b-x_1} \quad (7). \text{ Vì vậy cộng vế theo vế các bất đẳng thức trong (6) và (7) ta thu được}$$

$$-1 = \frac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{a-x_i} < \sum_{i=1}^k \frac{1}{b-x_i} = -1 \text{ (vô lý).}$$

Vậy $d(P+P') \geq d(P)$.

Bài toán 10. *Tìm tất cả các đa thức bậc $n = 2018$ có hệ số thực $P(x)$ sao cho đa thức đạo hàm $P'(x)$ là ước của $P(x)$. Nghĩa là tồn tại đa thức hệ số thực $Q(x)$ sao cho*

$$P(x) = P'(x) \cdot Q(x). \quad (8)$$

Lời giải. Ta có $\deg P(x) = n$ nên $\deg P'(x) = n-1$. Bằng cách so sánh hệ số bậc cao nhất của hai đa thức ở hai vế trong (8) ta suy ra $Q(x) = \frac{1}{n}(x-\alpha)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$. Như vậy

$$P(x) = \frac{1}{n} P'(x)(x-\alpha),$$

$$\text{hay} \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n}{x-\alpha}. \quad (9)$$

Gọi $x_1 = \alpha, x_2, \dots, x_k$ ($1 \leq k \leq n$) là các nghiệm phức khác nhau của $P(x)$ với các bội tương ứng là $p_1, p_2, \dots, p_k$ sao cho $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$. Khi đó

$$P(x) = a(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2} \dots (x-x_k)^{p_k}$$

với $a \neq 0$.

$$\text{Khi đó: } \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x-x_i} \quad (10).$$

Ta sẽ chứng minh $k=1$.

Thật vậy nếu $k \geq 2$. Trong (9) ta xét

$$\lim_{x \rightarrow x_i} (x-x_i) \frac{P'(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow x_i} (x-x_i) \cdot \frac{n}{x-\alpha} = 0, \quad i = \overline{2; k}.$$

Trong (10) ta có

$$\lim_{x \rightarrow x_i} (x-x_i) \frac{P'(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow x_i} (x-x_i) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x-x_i} = p_i, \quad i = \overline{2; k}.$$

Như vậy $p_i = 0, \forall i = \overline{2; k}$ (vô lý).

Vậy $P(x) = a(x-x_1)^{2018}, a \neq 0$. Thử lại ta thấy đa thức này thỏa mãn.

Bài toán 11.

a) Cho đa thức hệ số thực $Q(x)$ bậc n và có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$[Q'(x)]^2 > Q(x) \cdot Q''(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Cho đa thức hệ số thực

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_{k-1} \cdot a_{k+1} < a_k^2, \forall k \in \{1; 2; \dots; n-1\}.$$

Chứng minh. a) Gọi các nghiệm phân biệt của $Q(x)$ là $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i}.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{[Q'(x)]^2 - Q(x) \cdot Q''(x)}{Q^2(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x-x_i)^2}. \quad (11)$$

Với $x = x_i$ ($i = \overline{1; n}$) thì $Q(x_i) = 0$ và

$$Q'(x_i) \neq 0 \text{ nên ta có } [Q'(x_i)]^2 > Q(x_i) \cdot Q''(x_i).$$

Với $x \neq x_i$ ($i = \overline{1; n}$) thì ta có từ (11) ta có

$$[Q'(x)]^2 > Q(x) \cdot Q''(x).$$

Như vậy $[Q'(x)]^2 > Q(x) \cdot Q''(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Áp dụng bài toán ở câu a), ta xét đa thức

$$Q(x) = P^{(k-1)}(x), k = \overline{1; n-1}.$$

Ta có $[Q'(x)]^2 > Q(x) \cdot Q''(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} [P^{(k)}(0)]^2 &> P^{(k-1)}(0) \cdot P^{(k+1)}(0) \\ \Leftrightarrow (k!a_k)^2 &> (k-1)!a_{k-1}(k+1)!a_{k+1} \\ \Leftrightarrow a_{k-1} \cdot a_{k+1} &< \frac{k}{k+1} a_k^2 < a_k^2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán sau là một trường hợp của bài toán 11b). Ta cũng có thể sử dụng định lý Viète để giải quyết nó. Bạn đọc thử chứng minh.

Bài toán 12. Biết rằng đa thức

$$P(x) = x^{2020} + a_1x^{2019} + \dots + a_{2019}x + a_{2020}$$

có 2020 nghiệm thực khác nhau và $a_{2015} = 2015, a_{2017} = 2017$. Chứng minh rằng

$$|a_{2016}| > 2016.$$

Lời kết. Trên đây là một số bài toán khai thác xung quanh một tính chất liên quan đến tính khả vi và nghiệm của đa thức. Tính khả vi là đặc trưng cơ bản của đa thức. Do đó sẽ còn những khai thác khác mà tác giả chưa biết. Mong nhận được trao đổi từ bạn đọc.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/487 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn phương trình:

$$p^q - q^p = 79.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/487 (Lớp 7). Tìm các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $\sqrt[3]{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a + b + c} = d$.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/487. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{21}{1 + 36abc}.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/487. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Các cạnh AB, BC, CA lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) tại D, E, F sao cho $EC = 2EB$. Kẻ đường kính EI của đường tròn (O) . Qua D kẻ đường thẳng song song với BC , đường thẳng này cắt đoạn thẳng EF tại K . Chứng minh rằng A, I, K thẳng hàng.

NGUYỄN TÂN NGỌC

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/487. Tìm số M lớn nhất sao cho ta có bất đẳng thức $x^2 \geq M \cdot [x] \cdot \{x\}$ thỏa mãn với mọi số thực x (trong đó $[x], \{x\}$ tương ứng kí hiệu là phần nguyên và phần thập phân của x).

ĐÀO CHÍ THANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/487. Giải phương trình

$$x^3 + x + 6 = 2(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}.$$

TRẦN NGUYỄN HẠNH

(GV THPT Vạn Xuân, Hoài Đức, Hà Nội)

Bài T7/487. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}} + \sqrt{\frac{y^4+z^4}{2}} + \sqrt{\frac{z^4+x^4}{2}} \end{cases}$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(SV K61 SP Toán, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/487. Cho tam giác ABC có bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_a, r_b, r_c , độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và có diện tích S . Chứng minh rằng:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 3\sqrt{3}S + (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2.$$

NGUYỄN VĂN AI

(GV THPT Lê Thế Hiếu, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/487. Cho số nguyên dương n và các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tìm số thực λ sao cho

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n + \lambda x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/487.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình $2012^x(x^2 - n^2) = 1$ có một nghiệm dương duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là x_n .

b) Tìm $\lim(x_{n+1} - x_n)$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/487. Gọi T là tập tất cả các ước số nguyên dương của $n = 2004^{2010}$. Giả sử S là một tập con khác rỗng bất kì của T thỏa mãn điều

kiện: với mọi a, b thuộc S mà $a > b$ thì a không chia hết cho b . Tìm số phần tử lớn nhất của tập S .

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/487. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D . H là hình chiếu của A trên BC . N là trung điểm của AH . Đường thẳng qua D, N cắt CA, AB lần lượt tại J, S . BJ cắt CS tại P . DA, DP lần lượt cắt (I) tại G, L . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, G, L cùng nằm trên một đường tròn.

TRẦN QUANG HÙNG
(Gv THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/487. Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần

số góc ω (với $5\omega^2 LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là $u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

(V). Viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN .

THANH LÂM (Hà Nội)

Bài L2/487. Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số $f = 80\text{Hz}$, tốc độ truyền sóng là $1,6\text{ m/s}$. Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O . Biết $OA = 9\text{ cm}$; $OB = 12\text{ cm}$. Xác định số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA .

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/487 (For 6th grade). Find all pairs of prime numbers (p, q) satisfying

$$p^q - q^p = 79.$$

Problem T2/487 (For 7th grade). Find integers a, b, c, d satisfying

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a + b + c} = d.$$

Problem T3/487. Let a, b , and c be positive numbers such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{21}{1 + 36abc}.$$

Problem T4/487. Given a triangle ABC circumscribing a circle (O) . The sides AB, BC , and CA are tangent to (O) at D, E , and F respectively and assume furthermore that $EC = 2EB$. Suppose that EI is a diameter of (O) .

Through D draw a line which is parallel to BC . This line intersects the line segment EF at K . Prove that A, I, K are collinear.

Problem T5/487. Find the maximal number M such that the inequality $x^2 \geq M \cdot [x] \cdot \{x\}$ holds for every x (where $[x], \{x\}$ respectively are the integral part and the fractional part of x).

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/487. Solve the equation

$$x^3 + x + 6 = 2(x + 1)\sqrt{3 + 2x - x^2}.$$

Problem T7/487. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = 4\sqrt{\frac{x^4 + y^4}{2}} + 4\sqrt{\frac{y^4 + z^4}{2}} + 4\sqrt{\frac{z^4 + x^4}{2}} \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 44)



Bài T1/483. *Tìm tất cả các chữ số a, b, c sao cho các số $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$ đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Các số đang xét n có ba chữ số nên nhỏ hơn 1000, nếu n là hợp số thì nó có ước số nguyên tố nhỏ nhất là p và có dạng $n = pd$ với $p \leq d$, do đó $p^2 \leq pd < 1000$, suy ra $p \leq 31$. Ta cần loại đi các hợp số gồm ba chữ số là bội của một trong các số 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

- Các chữ số a, b, c không thể là số chẵn vì lúc đó n là bội của 2.
- Các chữ số a, b, c không thể là 5 vì lúc đó n là bội của 5.

Từ đó các chữ số a, b, c chỉ có thể lấy giá trị là các số 1, 3, 7, 9.

- Tổng các chữ số $a + b + c$ không thể là bội của 3 vì lúc đó n là bội của 3, từ đó ta loại bỏ các số $\overline{aaa}, 117, 171, 711; 177, 717, 771; 339, 393, 939$ và $399, 939, 993$. Các số còn lại cần xét là: 113, 119, 133, 137, 139, 179, 199, 337, 377, 379, 779, 799 và các hoán vị của chúng, tức là đổi vị trí các chữ số của chúng.

Để xét số n có chia hết cho mỗi số nguyên tố 7, 11 hay không, ta sử dụng các dấu hiệu chia hết dưới đây để tính toán đơn giản hơn.

- $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c = 7(14a + b) + 2a + 3b + c$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi

$2a + 3b + c$ chia hết cho 7. Từ đó loại bỏ được các số $119 = 7.17; 133 = 7.19; 371 = 7.53; 791 =$

$7.113; 931 = 7.133; 973 = 7.139$ và các hoán vị của chúng.

- $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(9a + b) + a - b + c$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $a - b + c$ chia hết cho 11. Từ đó loại bỏ được các số $737 = 11.67; 979 = 11.89$ và các hoán vị của chúng.

- Khi chia cho 19 có $779 = 19.41$, loại bỏ được 797 và 977.

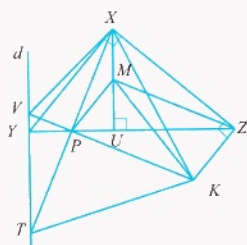
Kiểm tra tiếp ta thu được các số sau là số nguyên tố: 113, 131, 311; 199, 919, 991; 337, 373, 733 là các số nguyên tố. $\square$

➤ Nhận xét. Các bạn có thể tra *Bảng các số nguyên tố* để cho kết quả, tuy nhiên yêu cầu khi ra đề này là muốn các bạn sử dụng các dấu hiệu chia hết nêu trên để tính toán đơn giản hơn. Có thể xét dấu hiệu chia hết cho 13, 17, 19 tương tự như thế. Chỉ có bạn *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** cho đáp án đúng, trong đó có sử dụng các dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5.

VIỆT HẢI

Bài T2/483. *Cho tam giác XYZ vuông tại X ,*

($XY < XZ$), kẻ XU vuông góc với YZ . Gọi P là trung điểm của YU . Lấy điểm K thuộc nửa mặt phẳng bờ YZ không chứa điểm X sao cho KZ vuông góc với XZ và $XY = 2KZ$. Qua Y kẻ đường thẳng d song song với XU , d cắt đường thẳng KP tại V . T là giao điểm của đường thẳng XP và đường thẳng d . Chứng minh rằng $\widehat{VTK} = \widehat{XKZ} + \widehat{VXY}$.



Lời giải. Gọi M là trung điểm của XU , khi đó ta

có: $MP \parallel XY$ và $MP = \frac{1}{2}XY = ZK$ mà $XY \perp XZ$

$\Rightarrow MP \perp XZ \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle PXZ$

$\Rightarrow MZ \perp XP$. Mặt khác: $\triangle KZM = \triangle MPK$ (c.g.c)

nên $\widehat{ZMK} = \widehat{MKP} \Rightarrow MZ \parallel KP$. Do đó $KP \perp XP$.

Vì $\triangle TYP = \triangle XUP$ (g.c.g) $\Rightarrow PX = PT \Rightarrow VK$ là trung trực của XT suy ra

$\widehat{VTK} = \widehat{VXK} = \widehat{KXY} + \widehat{VXY}$. Mà $\widehat{KXY} = \widehat{XKZ}$

(so le trong). Vậy $\widehat{VTK} = \widehat{XKZ} + \widehat{VXY}$. $\square$

>Nhận xét. Các bạn đều có lời giải tương tự như trên xin được chúc mừng các bạn: **Quảng Ngãi:** Nguyễn Trung Phú, Lê Tuấn Kiệt, 7A, Phạm Đình Tâm, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, Võ Thị Hồng Thu, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa. **Hà Nội:** Hoàng Lê Bích Ngọc, 7A, THCS Thái Thịnh, Quận Đống Đa.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/483. Có ba người tới mua cừu của ông

An. Người thứ nhất đòi mua $\frac{1}{a}$ số đàn cừu của

ông, người thứ hai đòi mua $\frac{1}{b}$ số đàn cừu của

ông, người thứ ba đòi mua $\frac{1}{c}$ số đàn cừu của ông,

sao cho thỏa mãn đồng thời ba yếu tố sau:

1) $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $a < b < c$;

2) Số con cừu của mỗi người mua được phải là một số nguyên;

3) Sau khi bán xong, ông An còn dư lại 1 con cừu.

Hỏi đàn cừu của ông An có thể có mấy con?

Lời giải. Gọi số con trong đàn cừu của ông An là x ($x \in \mathbb{N}^*$). Thì số con cừu người thứ nhất, người thứ hai và người thứ ba đòi mua lần lượt là

$\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}$. Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + 1 = x \quad (1)$$

với điều kiện $x: a, x: b, x: c$ và $a < b < c \leq x$.

Do $a < b < c \leq x$ nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} \geq \frac{1}{x}$.

Chia hai vế của (1) cho x ta được:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow 1 < a < 4.$$

Vì $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a = 2$ hoặc $a = 3$.

• Với $a = 2$ thì

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b} \Rightarrow 2 < b < 6.$$

Do $b \in \mathbb{N}^*$ nên $b \in \{3, 4, 5\}$.

+ Nếu $b = 3$ thì

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{c} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \Rightarrow 6 < c \leq 12.$$

Và ta có $c \in \mathbb{N}^*$ nên $c \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Với $c = 7$ thì $\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 42$ (thỏa mãn);

Với $c = 8$ thì $\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 24$ (thỏa mãn);

Với $c = 9$ thì $\frac{1}{9} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 18$ (thỏa mãn);

Với $c = 10$ thì $\frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 15, \frac{x}{c} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$ (loại);

Với $c = 11$ thì $\frac{1}{11} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{66}{5} \notin \mathbb{N}^*$ (loại);

Với $c = 12$ thì $\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn).

+ Nếu $b = 4$ thì

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \Rightarrow 4 < c \leq 8.$$

Vì $c \in \mathbb{N}^*$ nên $c \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Với $c = 5$ thì $\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 20$ (thỏa mãn);

Với $c = 6$ thì $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn);

Với $c = 7$ thì $\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{28}{3} \notin \mathbb{N}^*$ (loại);

Với $c = 8$ thì $\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn);

+ Nếu $b = 5$ thì $c > 5$ và

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{3}{10} \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \Rightarrow 5 < c < \frac{20}{3}.$$

Vì $c \in \mathbb{N}^*$ nên $c = 6$, $\frac{1}{x} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}^*$.

• Với $a = 3$ thì $b > 3$ và

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b} \Rightarrow 3 < b < \frac{9}{2}.$$

Vì $b \in \mathbb{N}^*$ nên $b = 4$. Do đó $c > 4$ và

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{12} < \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{c} \Rightarrow 4 < c < \frac{24}{5} \text{ (loại)}$$

Tóm lại, ta có 6 kết quả sau:

Số con trong đàn cừu	42 con	24 con	20 con	18 con	12 con	8 con
a	2	2	2	2	2	2
b	3	3	4	3	3	4
c	7	8	5	9	12	8

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán giải phương trình tìm nghiệm nguyên dương có 4 ẩn. Đa số các bạn giải theo cách trên. Một số bạn sử dụng tính chất chia hết để giới hạn miền nghiệm và cũng cho kết quả như trên. Tuy nhiên một số bạn quan niệm $a < b < c < x$

nên đã thiếu mất nghiệm $x = 8$ và $x = 12$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Lê Tuấn Tú, 9T, THPT Dân Lập Lương Thế Vinh; Nguyễn Đặng Nhật Minh, 9C1, THCS Archimedes Academy; Hoàng Lê Bích Ngọc, 7A, THCS Thái Thịnh, Quận Đống Đa; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Khải, 8A3, Nguyễn Chí Công, Nguyễn Đăng Khoa, Lê Phương Lan, Tổng Thu Hà, 9A3, THCS Lâm Thao.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/483. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên (O) lấy điểm C sao $CA < CB$. Trên đoạn OB lấy điểm E (E khác O , E khác B). CE cắt lại đường tròn (O) tại D . Qua A kẻ đường thẳng song song với BD , cắt đường thẳng BC tại I . Đường thẳng OI và đường thẳng CE cắt nhau tại F . Chứng minh FA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải. Gọi H là trung điểm của CD , suy ra $OH \perp CD$. Vì AB là đường kính đường tròn (O) nên $BD \perp AD$, suy ra $AI \perp AD$ (do $AI \parallel BD$).

Xét hai tam giác $\triangle AIB$ và $\triangle CAD$ có

$$\widehat{IAB} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$

và $\widehat{ABI} = \widehat{CDA}$,

suy ra $\triangle AIB \sim \triangle CAD$.

Lại có IO và AH là hai trung tuyến tương ứng

của $\triangle AIB$ và $\triangle CAD$, nên $\widehat{IOA} = \widehat{AHC}$. Do đó tứ giác $AOHF$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

Suy ra $\widehat{FAO} = \widehat{OHD} = 90^\circ$. Vậy $FA \perp AO$, nên FA là tiếp tuyến của đường tròn (O) . $\square$

➤ **Nhận xét.** Chỉ có ba bạn sau cho lời giải đúng:

Thanh Hoá: Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Đình Minh Hùng, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Tr. Bút Sơn, Hoàng Hoá; **Phú Thọ:** Nguyễn Đăng Khoa, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/483. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$ và $abc \geq -4$. Chứng minh rằng: $3(abc + 4) \geq 5(ab + bc + ca)$.

Lời giải. Nếu $ab + bc + ca < 0$ thì

$$3(abc + 4) \geq 0 > 5(ab + bc + ca) \text{ (luôn đúng)}$$

Nếu $ab + bc + ca \geq 0$ thì trong ba số ab, bc, ca phải có ít nhất một số không âm giả sử $ab \geq 0$ thì

$$0 \leq ab + bc + ca \leq \frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) = \frac{(3-c)^2}{4} + c(3-c) \\ \Rightarrow 3c^2 - 6c - 9 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq c \leq 3 \quad (1)$$

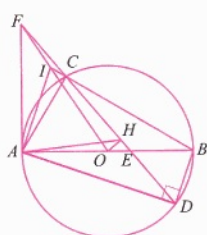
Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với:

$$3(abc + 4) - 5(ab + bc + ca) \geq 0. \quad (2)$$

Gọi về trái của (2) là H , ta có

$$H = (3c - 5)ab - 5c(a + b) + 12 \\ = (3c - 5)ab - 5c(3 - c) + 12.$$

$$\text{Hay } H = (3c - 5)ab + 5c^2 - 15c + 12.$$



Ta phải chứng minh $H \geq 0$.

Nếu $3c - 5 \geq 0$ thì

$$H \geq 5c^2 - 15c + 12 = 5\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Nếu $3c - 5 < 0$ thì

$$H = (3c - 5)ab + 5c^2 - 15c + 12$$

$$\geq (3c - 5)\frac{(a+b)^2}{4} + 5c^2 - 15c + 12$$

$$= (3c - 5)\frac{(3-c)^2}{4} + 5c^2 - 15c + 12$$

$$\Rightarrow H \geq \frac{3}{4}(c+1)(c-1)^2 \geq 0 \text{ (do (1) nên } c+1 \geq 0 \text{)}.$$

Như vậy trong tất cả các trường hợp, ta có $H \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=b; c=\pm 1 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a=b=2; c=-1 \end{cases}.$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. $\square$

➤ Nhận xét. Trong lời giải chỉ sử dụng bất đẳng thức

quen thuộc $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$. Điều cơ bản trong trường

hợp $ab+bc+ca \geq 0$ là biết giả thiết $ab \geq 0$, từ đó suy ra $-1 \leq c \leq 3$. Tuy nhiên đây là bài toán khó nên có rất ít bạn gửi bài giải. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Thanh Hóa:** Phạm Anh Đức, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Nội:** Lê Tuấn Tú, 9T, THPT Dân Lập Lương Thế Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài 16-485. Giải và biện luận phương trình bậc hai phương trình

$$\begin{aligned} & (ax^2 + a - 1) - y^2 = 0 \quad \text{với } a \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow (2y^2 + a - 1) = 2x^2 + 9y^2 + 1 \quad (1) \\ & [2ax^2 - a^2] - [x^2 - 9y^2] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Lời giải. • Với $a = 0$, hệ (1) tương đương với

$$\begin{cases} 2xy^2 = y^3 \\ 2yz^2 = z^3 \Rightarrow 8x^3y^3z^3 = x^3y^3z^3 \Rightarrow xyz = 0. \\ 2zx^2 = x^3 \end{cases}$$

Từ đó (1) $\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

• Với $a \neq 0$, đặt $f(t) = \frac{t(t^2 + 9a^2)}{2(t^2 + a^2)}$, $t \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$f'(t) = \frac{(t^2 - 3a^2)^2}{2(t^2 + a^2)^2} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa $f'(t)$ chỉ bằng 0 tại hai điểm $t = \pm a\sqrt{3}$

nên f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì hệ không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh bộ (x, y, z) nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\} \Rightarrow x \geq y, x \geq z$. Khi đó do f đồng biến nên từ (1) kéo theo

$$\begin{cases} f(y) = x \geq y = f(z) \\ f(y) = x \geq z = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq z \\ y \geq x \end{cases}.$$

Bằng cách lập luận như vậy ta cũng có $z \geq x, z \geq y$.

Suy ra $x = y = z$ (*). Do đó

$$\begin{aligned} (I) & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x(x^2 - 7a^2) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = a\sqrt{7} \\ x = y = z = -a\sqrt{7} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy hệ (1) có nghiệm $(x; y; z)$ là: $(0; 0; 0)$,

$(a\sqrt{7}; a\sqrt{7}; a\sqrt{7}), (-a\sqrt{7}; -a\sqrt{7}; -a\sqrt{7})$. $\square$

➤ Nhận xét. Một số bạn chỉ tìm được nghiệm $(0; 0; 0)$.

Đẳng thức (*) có thể được chứng minh bằng phương

pháp phản chứng. Các bạn sau có lời giải đúng: **Nam**

Định: Vũ Thủy An, 10 Toán 1, Nguyễn Thanh

Huyền, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong,

TP. Nam Định. **Bắc Giang:** Chu Thị Ngân, Hoàng

Mai Phương, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang.

Hưng Yên: Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Thị Hoa,

Đoàn Phú Thành. Trần Thị Phương Linh, 10 Toán 1,

THPT chuyên Hưng Yên. **Quảng Bình:** Hoàng Kim

Cá, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

Quảng Nam: Đàm Thị Xuân Ý, 11/1, THPT chuyên

Nguyễn Bình Khiêm. **Thừa Thiên Huế:** Lê Cẩm

Thanh Hà, 12 Toán 2, Nguyễn Đình Long, Bùi Nhật

Minh, Nguyễn Thị Ngọc Mai, Nguyễn Ngọc Thanh,

12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:**

Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP.

Bến Tre. **Long An:** Lê Trí Phú, Bùi Khánh Phong,

12T1, Phan Quý Lộc, 11T1, THPT chuyên Long An.

Kon Tum: Nguyễn Ngọc Khánh Như, 11T0, THPT

chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum. **Sóc Trăng:** Lâm Quốc Bảo, 12A7, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc Trăng.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/483. Giả sử $x = \frac{2013}{2015}$ là một nghiệm của

đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Hỏi tổng các hệ số của $f(x)$ có thể bằng 2017 được không?

Lời giải. (Theo bạn Dương Đông Thư, 12 Toán 2, THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế).

Ta chứng minh một kết quả tổng quát: Giả sử

$x = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ là nghiệm của $f(x)$. Khi đó với

mỗi số nguyên m thì $p - mq$ là ước của $f(m)$.

Thật vậy, ta có biểu diễn $f(x)$ theo lũy thừa của $(x - m)$ như sau:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - m) + b_2(x - m)^2 + \dots + b_n(x - m)^n \\ = g(x - m) \quad (1)$$

ở đó $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$.

Từ (1) suy ra

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p}{q} - m\right) = g\left(\frac{p - mq}{q}\right).$$

Vậy $\frac{p - mq}{q}$ là nghiệm hữu tỷ của $g(x)$ với

$(p - mq, q) = 1$ (do $(p, q) = 1$).

Do đó $p - mq$ là ước của $b_0 = f(m)$.

Đặc biệt với bài toán đã nêu $p = 2013$, $q = 2015$,

$m = 1$ thì -2 là ước của $\sum_{i=1}^n a_i = 2017$.

Điều này là không thể. Do vậy tổng các hệ số của $f(x)$ không thể bằng 2017. Nó phải là một số chẵn. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn tham gia giải bài toán này đều có lời giải đúng. Xin được chúc mừng các bạn: **Vĩnh**

Long: Châu Minh Khánh, 12T1, THPT chuyên

Nguyễn Bình Khiêm. **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Bắc Giang:** Hoàng Mai Phương, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang. **Quảng Nam:** Nguyễn Văn Khang, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân. **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 11 TO, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

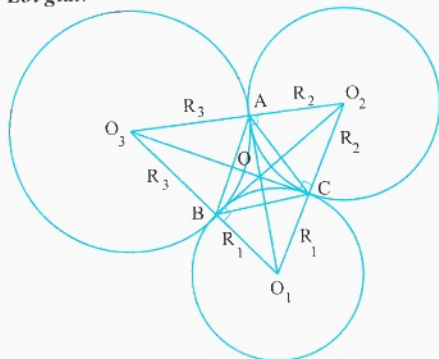
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/483. Cho ba đường tròn (O_1, R_1) ;

(O_2, R_2) và (O_3, R_3) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại ba điểm A, B, C . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$r \leq \frac{R_1 + R_2 + R_3}{6\sqrt{3}}.$$

Lời giải.



Gọi O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Do $OB = OC, O_1B = O_1C$ nên O_1O là tia phân giác của $\widehat{BO_1C}$. Tương tự O_2O là tia phân giác của $\widehat{AO_2O_3}$. Từ đó O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle O_1O_2O_3$. Sử dụng công thức Heron ta có:

$$S_{O_1O_2O_3}^2 = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 (R_1 + R_2 + R_3), \text{ mà}$$

$$S_{O_1O_2O_3} = OA(R_1 + R_2 + R_3), \text{ suy ra}$$

$$R^2 = OA^2 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Theo BĐT Cauchy cho ba số dương R_1, R_2, R_3 ta

$$\text{thấy: } R^2 \leq \frac{\left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}\right)^3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(R_1 + R_2 + R_3)^2}{27}$$

Suy ra $R \leq \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3\sqrt{3}}$. (1)

Mặt khác, từ hệ thức Euler: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ dễ thấy $R \geq 2r$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $r \leq \frac{R_1 + R_2 + R_3}{6\sqrt{3}}$. Đẳng thức

xảy ra khi và chỉ khi $R_1 = R_2 = R_3$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Số bài giải gửi về Tòa soạn khá nhiều. Hầu hết theo hướng sử dụng công thức Heron, bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Euler: $R \geq 2r$.

Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Minh Nghĩa, 11A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa. **Phú Thọ:** Lê Na, 10E, THPT Yên Lập, Yên Lập. **Hưng Yên:** Nguyễn Trung Hiếu, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Nam Định:** Nguyễn Thanh Huyền, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Trung Kiên, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Phú Yên:** Phạm Minh Chiến, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa. **Lâm Đồng:** Nguyễn Tuấn Lộc, Phùng Trọng Nghĩa, 10 Toán, Võ Minh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt. **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, Nguyễn Nhật Hào, Huỳnh Tấn Phúc, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 11T0, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân. **Long An:** Bùi Khánh Phong, Lê Trí Phú, 12T1, THPT chuyên Long An. **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Khánh Vinh, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/483. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + yz + zx \leq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4 + y^4}{z^4} + \frac{y^4 + z^4}{x^4} + \frac{z^4 + x^4}{y^4}.$$

Lời giải. Ta có $0 \geq x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + yz + zx = (x+y)^2 + (x+y)z - 2z^2 = (x+y-z)(x+y+2z) \Leftrightarrow z \geq x+y$ (1)

Nhận xét. Với mọi các số thực dương a, b

$$\bullet (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$\bullet (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4.$$

Áp dụng nhận xét trên ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^4 + y^4}{z^4} + \frac{y^4 + z^4}{x^4} + \frac{z^4 + x^4}{y^4} \\ &= \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) + \frac{x^4 + y^4}{z^4} + z^4 \cdot \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}\right) \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{y^4} \cdot \frac{y^4}{x^4}} + \frac{8 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^4}{z^4} + z^4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^4 \\ &\geq 2 + \frac{1}{8} \left(\frac{x+y}{z}\right)^4 + \frac{z^4}{8} \left(\frac{4}{x+y}\right)^4 = 2 + \frac{c}{8} + \frac{32}{c} \\ &\quad (\text{với } c = \left(\frac{x+y}{z}\right)^4, 0 < c \leq 1 \text{ theo (1)}) \\ &= 2 + \frac{1}{8} \left(c + \frac{1}{c}\right) + \frac{31}{8} \cdot \frac{7}{8} \geq 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} + 31 \cdot \frac{7}{8} \\ &= 2 + \frac{1}{4} + \frac{255}{8} = \frac{273}{8}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{z}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là: $\min P = \frac{273}{8}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc loại cơ bản, đơn giản. Hoan nghênh các bạn THCS sau tham gia và có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tuấn Nam, 9A1, THCS Thị Trấn Chờ, Yên Phong.

Thanh Hóa: *Thiều Đình Minh Hùng*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Thị trấn Bút Sơn, Hoàng Hóa, *Phạm Anh Đức*, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/483. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \left(\frac{a+b}{c+d} \right) \left(\frac{a+c}{a+d} + \frac{b+d}{b+c} \right). \text{ Trong đó } a, b, c, d$$

là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$.

Lời giải. Từ $a, b, c, d \geq \frac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a+c}{a+d} = (a+b) \cdot \frac{a+c}{(c+d)(a+d)} \leq a+b$$

$$\left(\text{Do } \frac{a+c}{(c+d)(a+d)} \leq \frac{a+c}{\left(c+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)} \leq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2} \right) \left(c - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \text{ bất đẳng thức này luôn đúng.}$$

$$\text{Tương tự } \left(\frac{a+b}{c+d} \right) \left(\frac{b+d}{b+c} \right) \leq a+b \text{ do đó } T \leq 2(a+b).$$

$$\text{Do } a, b \leq \frac{2}{3} \text{ cho nên } T \leq 2(a+b) \leq 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } c = d = \frac{1}{2}; a = b = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } T \text{ là } \frac{8}{3}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này không khó lắm nhưng có ít bạn gửi lời giải và phần nhiều đều dùng đạo hàm nên lời giải hơi dài và phức tạp. Các bạn sau đây (có một bạn không ghi tên và địa chỉ) có đáp số đúng:

Nghệ An: *Trần Tiến Mạnh*, 11A₁ THPT chuyên Đại học Vinh; **Long An:** *Lê Trí Phú*, 12 T, *Phan Quý Lộc*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Đắk Lắk:** *Lê Ngọc Đức*, 10 CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, *Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Tăng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi*

Khanh Vinh, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Giang:** *Chu Thị Ngân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/483. *Cho $R(x)$ là một đa thức bậc 2017.*

Chứng minh rằng tồn tại vô số các đa thức

$P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P \left[\left(R^{2017}(t) + R(t+1)^2 - 2 \right) \right] = P^2 \left(R^{2017}(t) + R(t+1) \right) - 2. \quad (1)$$

Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa các đa thức $P(x)$ đó.

Lời giải.

Đặt $x = R^{2017}(t) + R(t) + 1$, khi đó (1) trở thành

$$P(x^2 - 2) = (P(x))^2 - 2(2).$$

Để giải bài toán, trước hết ta cần bổ đề sau

Bổ đề

Cho $a \neq 0, b, c$ là những số thực bất kỳ và $n \geq 1$ là số tự nhiên. Khi đó tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện

$$P(ax^2 + bx + c) = a(P(x))^2 + bP(x) + c \quad (3).$$

Chứng minh

Giả sử $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_n$, $a_0 \neq 0$ là đa thức thỏa mãn bài toán. Khi đó từ (3) ta có

$$\begin{aligned} a_0(ax^2 + bx + c)^n + a_1(ax^2 + bx + c)^{n-1} + \dots + \\ + a_{n-1}(ax^2 + bx + c) + a_n = \\ = a(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_n)^2 + \\ + b(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_n) + c. \end{aligned}$$

Trong (2) ta đem so sánh các hệ số của $x^{2n}, x^{2n-1}, \dots, x^n$ ta được

$$a_0a^n = a_0^2a; \varphi_1(a_0, a, b, c) = 2aa_0a_1;$$

$$\varphi_2(a_0, a_1, a, b, c) = aa_1^2 + 2aa_0a_2;$$

$$\varphi_3(a_0, a_1, a_2, a, b, c) = 2a_1a_2a + 2a_3a_0a, \dots$$

$$\varphi_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a, b, c) = 2a_0a_na + 2a_0a_nb,$$

trong đó $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ là các đa thức. Do $a_0 \neq 0$ và thêm $a \neq 0$ nên từ hệ trên ta suy ra các số $a_0, a_1, \dots, a_n$ là duy nhất. Vậy với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ luôn tồn tại duy nhất đa thức $P(x)$ với

deg $P(x) = n$ thỏa mãn bài toán trên.

Bây giờ trở lại với bài toán

Trước hết theo bổ đề trên thì với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ tồn tại duy nhất $R(t)$ một đa thức $P_n(x)$ bậc

n thỏa mãn $P_n(x^2 - 2) = P_n^2(x) - 2$. So sánh các hệ số của x trong mỗi đa thức ta thu được:

$$P_1(x) = x; P_2(x) = x^2 - 2; P_3(x) = x^3 - 3x;$$

$$P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 2; P_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x.$$

Ta rút ra $P_3(x) = xP_2(x) - P_1(x)$:

$$P_4(x) = xP_3(x) - P_2(x); \dots$$

và dự đoán rằng

$$P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x) \quad (4), n \geq 1.$$

Ta chứng minh nhận định (4) bằng quy nạp theo n . Dễ thấy $n=1, n=2$ thì (4) đúng.

Giả sử với n nào đó thì các đa thức $P_n(x), P_{n+1}(x)$ thỏa mãn (2). Ta chứng minh $P_{n+2}(x)$ thỏa mãn (2). Thật vậy

$$P_{n+2}(x^2 - 2) - P_{n+2}^2(x) + 2$$

$$= (x^2 - 2)P_{n+1}(x^2 - 2) - P_n(x^2 - 2)$$

$$- xP_{n+1}(x) - P_n(x)^2 + 2$$

$$= (x^2 - 2)[P_{n+1}^2(x) - 2] - [P_n^2(x) - 2]$$

$$- x^2P_{n+1}^2(x) + 2xP_{n+1}(x)P_n(x) - P_n^2(x) + 2$$

$$= -2P_{n+1}^2(x) - 2P_n^2(x) + 2xP_n(x)P_{n+1}(x) - 2x^2 + 8$$

$$= -2Q_n(x)$$

với

$$Q_n(x) = P_{n+1}^2(x) + P_n^2(x) - xP_n(x)P_{n+1}(x) + x^2 - 4.$$

Nhưng lại có

$$Q_n(x) = [xP_n(x) - P_{n+1}(x)]^2 +$$

$$P_n^2(x) - x[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]P_n(x) + x^2 - 4$$

$$= P_n^2(x) + P_{n+1}^2(x) - xP_n(x)P_{n+1}(x) + x^2 - 4$$

$$= Q_{n-1}(x).$$

Bằng phương pháp lùi ta dẫn đến

$$Q_n(x) = Q_{n-1}(x) = \dots = Q_1(x)$$

$$= (x^2 - 2)^2 + x^2 - x(x^2 - 2)x + x^2 - 4 = 0.$$

Từ đó suy ra $P_{n+2}(x^2 - 2) = [P_{n+2}(x)]^2 - 2$.

Vậy tất cả các đa thức $P_n(x)$ bậc n được xác định

$$\text{bởi } P_1(x) = x; P_2(x) = x^2 - 2;$$

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x), n \geq 3. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán về đồng nhất thức của đa thức thuộc dạng khó. Ban biên tập nhận được hai bài giải đúng từ Nguyễn Ngọc Khánh Như, 11 TO

THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum** và Trần Thiện Thu Uyên, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**.

NGUYỄN VĂN MẬU

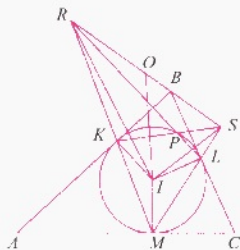
Bài T12/ 483. Cho tam giác ABC , Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với AB, BC và CA lần lượt tại K, L và M . Đường thẳng t đi qua B khác với AB và BC cắt các đường thẳng AK và AL thứ tự tại R và S . Chứng minh $\widehat{RIS}$ nhọn.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc (O) .

$E = AB \cap CD; F = AC \cap BD; G = AD \cap BC$. M là trung điểm của EF . Khi đó $\varphi_{M(O)} = \frac{1}{2}EF^2$.

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây. Trở lại giải bài toán trên.



Gọi O là trung điểm của RS ; P là giao điểm của KS và LR , r là bán kính của (I) . Chú ý

$R = KM \cap PL; B = KK \cap LL$ và R, S, B thẳng hàng, áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm (KPL) , suy ra P thuộc (I) . Do đó, theo bổ đề

$$\text{trên, } OI^2 - r^2 = \varphi_{O(I)} = \frac{1}{4}RS^2 = OR^2 = OS^2.$$

Vậy $OI > OR = OS$. Do đó $\widehat{RIS}$ nhọn. $\square$

➤ **Nhận xét**

- 1) Bài toán này là mở rộng bài toán 5, IMO 1998.
- 2) Chỉ có hai bạn tham gia giải và lời giải cũng chưa hoàn chỉnh: **Lâm Đồng; Võ Minh Quân**, 11 Toán,

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/483. Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp dao động đồng pha, phát đồng thời sóng có bước sóng bằng 1,2 cm. Hai điểm C và D thuộc cùng một elip trên mặt chất lỏng nhận A, B là hai tiêu điểm. Biết hiệu số khoảng cách từ hai nguồn tới C và D lần lượt là $AC - BC = 4,8\text{cm}$ và $AD - BD = 0,4\text{cm}$. Coi biên độ sóng do mỗi nguồn gửi đến mỗi điểm trên elip nói trên đều bằng nhau. Tại thời điểm t nào đó, li độ của điểm C là 1,5 mm thì li độ của điểm D là bao nhiêu?

Lời giải.

Phương trình sóng tổng hợp tại điểm cách 2 nguồn những khoảng d_1 và d_2 :

$$u = 2a \cos\left(\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi(d_1 + d_2)}{\lambda}\right)$$

Hai điểm trên cùng một elip nên $(d_1 + d_2)$ bằng hằng số nên:

$$\frac{u_C}{u_D} = \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot \Delta d_C}{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{\pi \cdot \Delta d_D}{\lambda}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot 4,8}{1,2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi \cdot 0,4}{1,2}\right)} = 2$$

Do đó khi li độ dao động của điểm C bằng 1,5mm thì li độ của điểm D sẽ bằng 0,75mm. $\square$

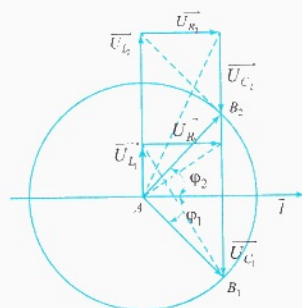
➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Diễm Ly, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Thừa Thiên Huế:** Ngô Nguyễn Quỳnh Thơ, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/483. Đặt điện áp $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V) (trong đó U không đổi, ω có thể thay đổi được) vào hai đầu một đoạn mạch AB gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện

dung C , mắc nối tiếp. Cho biết $L = CR^2$. Thay đổi tần số góc của điện áp người ta tìm được hai giá trị là $\omega_1 = 50\pi$ (rad/s) và $\omega_2 = 80\pi$ (rad/s) ứng với hệ số công suất của đoạn mạch có giá trị bằng nhau. Với hai giá trị bằng nhau đó hãy xác định hệ số công suất của đoạn mạch.

Lời giải.



Từ giả thiết ta có: với mọi ω thì $Z_L = \frac{R^2}{Z_C}$

$\Rightarrow U_{RL} \perp U_{RC}$. Theo đề bài ta có giản đồ vectơ như hình trên. Từ giản đồ ta có hệ số công suất trong hai trường hợp bằng nhau nên

$$U_R = U \cos\varphi = \text{hằng số.}$$

$$\begin{cases} \tan\varphi_1 = \frac{Z_{C1} - Z_{L1}}{R} \\ \tan\varphi_2 = \frac{Z_{L2} - Z_{C2}}{R} \end{cases} \Rightarrow Z_{L1} + Z_{L2} = Z_{C1} + Z_{C2}$$

$$\Rightarrow Z_{L1} + \frac{8}{5}Z_{L1} = Z_{C1} + \frac{5}{8}Z_{C1} \Rightarrow Z_{L1} = \frac{5}{8}Z_{C1}$$

$$\Rightarrow R^2 = Z_{L1}Z_{C1} = \frac{5}{8}Z_{C1}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{5}{8}}Z_{C1}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_1 = \frac{Z_{C1} - \frac{5}{8}Z_{C1}}{\sqrt{\frac{5}{8}}Z_{C1}} = \frac{3}{\sqrt{40}} \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

➤ **Nhận xét.** Chúc mừng một bạn duy nhất đã có lời giải đúng đề ra kì này (Bạn quên ghi tên và địa chỉ)

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 27

Problem. Find the general term of the sequence (x_n) whose terms satisfy

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 4 \\ x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Solution: We have

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 2x_{n+1} - 2x_n = 2(x_{n+1} - x_n), \forall n \geq 0.$$

Therefore if we let $y_n = x_n - x_{n-1}, \forall n \geq 1$ the sequence (y_n) is a geometric progression with the first term $y_1 = x_1 - x_0 = 3$ and the common ratio $r = 2$. More specifically, we have

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) + x_0$$

$$= y_n + y_{n-1} + \dots + y_1 + x_0$$

$$= 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) + 1$$

$$= 3 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 1 = 3 \times 2^n - 2.$$

TỪ VỰNG

sequence	:	dãy (số, hàm, ...)
term	:	số hạng
geometric progression	:	cấp số nhân
common ratio	:	công sai

NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

Bài toán. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ là một đa thức với hệ số nguyên không âm. Biết rằng $f(1) = 6, f(8) = 36945$. Tính

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n.$$

Lời giải. Vì $f(1) = 6$ và các hệ số a_i là những số tự nhiên, nên ta có $0 \leq a_i \leq 6$. Từ đó, kết hợp với $f(8) = a_0 + a_1 \cdot 8 + \dots + a_n \cdot 8^n = 36945$ ta thấy $a_0 + a_1 \cdot 8 + \dots + a_n \cdot 8^n$ là cách biểu diễn (duy nhất) của số 36945 trong hệ cơ số 8.

Chúng ta có thể dễ dàng tìm được cách biểu diễn số 36945 trong hệ cơ số 8 như sau:

$$36945 = 8^5 + 8^4 + 8^2 + 2 \cdot 8 + 1.$$

Do đó $f(x) = 1 + 2x + x^2 + x^4 + x^5$, vậy $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n = 0$.

Nhận xét. Các bạn có bài dịch tốt, gửi bài đến Tòa soạn sớm: **Yên Bái:** Nguyễn Khánh Linh, 11A1, THPT Hoàng Văn Thụ, Lục Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Đăng Sơn, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách; **Hưng Yên:** Đoàn Phú Thành, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** Lê Thị Thu Hương, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Phú Yên:** Nguyễn Kim Phương Trang, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

HỒ HẢI (Hà Nội)



PHÉP ĐỐI XỨNG NGHỊCH VÀ ĐƯỜNG TRÒN EULER

LÊ QUANG CHIÊU (Hà Nội)

§1. ĐỊNH LÝ LEBOSSÉ – HÉMERY

1. BỔ ĐỀ. M là một điểm thuộc miền trong của góc $\widehat{xAy}$. Q và R là những điểm đối xứng của M qua Ax và Ay thì đường trung trực của QR đối xứng với AM qua đường phân giác của góc $\widehat{xAy}$.

Chứng minh. Đặt $\widehat{MAy} = \alpha$ ta có $\widehat{RAQ} = 2\widehat{xAy}$,

$$\begin{aligned}\widehat{MAQ} &= 2\widehat{xAy} - 2\alpha \\ &= 2(\widehat{xAy} - \alpha).\end{aligned}$$

Kẻ đường phân giác Az của $\widehat{xAy}$, đường trung trực AH của QR ta được

$$\widehat{HAR} = \widehat{HAQ} = \widehat{xAy},$$

$$\widehat{xAH} = \widehat{HAQ} - \widehat{xAQ} = \widehat{xAy} - \frac{1}{2}\widehat{MAQ} = \widehat{xAy} - (\widehat{xAy} - \alpha)$$

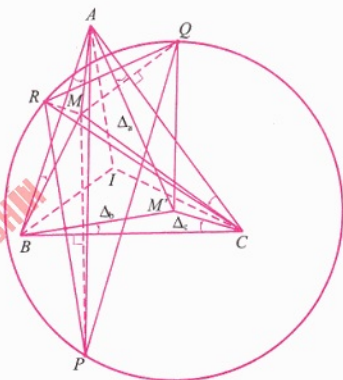
$$= \alpha = \widehat{yAM} \Rightarrow Az \text{ cũng là phân giác của } \widehat{MAH}.$$

2. Định Lý Lebossé – Hémery

Cho một điểm M bất kì thuộc miền trong của tam giác ABC ; P, Q và R lần lượt là những điểm đối xứng của M qua BC, CA và AB thì các đường thẳng đối xứng với AM và BM qua các đường phân giác trong của góc A và B giao nhau tại M' và CM' đối xứng với CM qua đường phân giác trong của góc C .

Chứng minh. (h.2) Theo Bổ đề, đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AI là đường trung trực Δ_a của QR . Tương tự, đường thẳng đối xứng với

BM qua đường phân giác BI là đường trung trực Δ_b của PR .



Hình 2

Δ_a cắt Δ_b tại M' nên M' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQR . Do đó M' thuộc đường trung trực Δ_c của PQ , mà P và Q là những điểm đối xứng của M qua CB và CA tương ứng nên theo bổ đề, CM đối xứng với đường trung trực CM' của PQ qua phân giác CI . Ta gọi M và M' là **hai điểm đối xứng nghịch (đẳng giác)** trong ΔABC . Ta có:

$$\begin{cases} (AB, AM) = -(AC, AM') \\ (BA, BM) = -(BC, BM') \end{cases} \Rightarrow (CA, CM) = -(CB, CM') \quad (1)$$

§2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐIỂM M VÀ M'

1. Gọi D, E và F ; D', E' và F' là các hình chiếu của M và M' lần lượt trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC ; ω là trung điểm của MM' thì

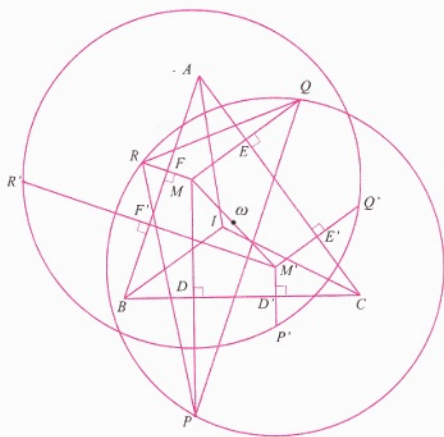
$$\omega D = \omega E = \omega F = \omega D' = \omega E' = \omega F'$$

Chứng minh. Ta có

$$\omega M = \omega M', DM = DP, EM = EQ, FM = FR \text{ nên}$$

$$\omega D = \frac{1}{2} M'P; \omega E = \frac{1}{2} M'Q; \omega F = \frac{1}{2} M'R.$$

Mà M' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQR , suy ra



Hình 3

$$M'P = M'Q = M'R = 2\rho \Rightarrow \omega D = \omega E = \omega F = \rho.$$

Lại có $MM'D'D$; $MM'E'E$ và $MM'F'F$ là những hình thang vuông có chung cạnh bên MM' nên ω thuộc trung trực của các đoạn DD' , EE' và FF' .

$$\omega D = \omega D' = \omega E' = \omega E = \omega F' = \omega F = \rho.$$

Do đó 6 điểm D, D', E, E', F và F' đều thuộc đường tròn tâm ω . Ta tạm gọi là **đường tròn 6 điểm Euler** (viết tắt là **ĐT6Đ (Euler)** để phân biệt với đường tròn 9 điểm Euler mà ta đã biết) tại điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC . Điểm M là tâm tạo, ω là tâm, ρ là bán kính của đường tròn 6 điểm Euler, được kí hiệu là (M, ω, ρ) .

2. Gọi P', Q' và R' là các điểm đối xứng của M' lần lượt qua BC, CA và AB thì M là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $P'Q'R'$.

Chứng minh. Ta có $\omega D'$; $\omega E'$ và $\omega F'$ là các đường trung bình của tam giác $MM'P'$; $MM'Q'$ và $MM'R'$ nên $MP' = MQ' = MR' = 2\rho$.

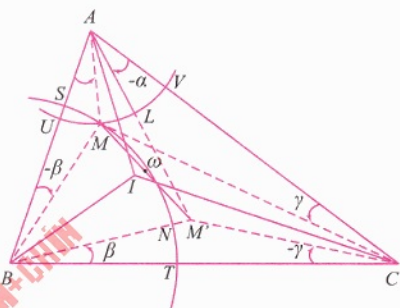
3. Cách dựng đường tròn 6 điểm Euler

Cách dựng ĐT6Đ (Euler) khác cách dựng đường

tròn thông thường bởi vì ta chỉ mới biết tam giác ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Trước hết ta phải dựng M' rồi tìm bán kính ρ .

a. Cách dựng điểm M'

- Dựng cung tròn tâm A đi qua M cho cắt các cạnh AB và AC tại U và V . Lấy L thuộc cung $\widehat{UV}$ sao cho $\widehat{VL} = -\widehat{UM}$ (h.4)



Hình 4

- Dựng cung tròn tâm B đi qua M cho cắt các cạnh AB và BC tại S và T . Lấy N thuộc cung $\widehat{TS}$ sao cho $\widehat{TN} = -\widehat{SM}$. Nối BN và AL cho cắt nhau tại M' , ta có

$$\begin{cases} (AB, AM) = -(AC, AL) \\ (BA, BM) = -(BC, BN) \end{cases} \Rightarrow (CA, CM) = -(CB, CM').$$

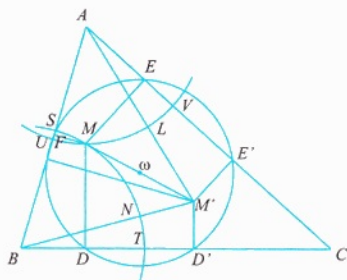
Theo định lý Lebossé – Hémery M và M' là hai điểm đẳng giác trong ΔABC .

b. Tìm bán kính ρ

Lấy trung điểm ω của MM' , theo cách dựng tại §2.1 ta có $\omega D = \rho$ là bán kính của ĐT6Đ (Euler) duy nhất đi qua 6 điểm D, D', E, E', F và F' được gọi là **Đường tròn 6 điểm Euler chuẩn** tại điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC .

Tâm ω của ĐT6Đ (Euler) (M, ω, ρ) không thuộc bất kì đường phân giác nào của các góc A, B và C . Bởi vì nếu ω thuộc một phân giác nào đó chẳng hạn AI thì tam giác AMM' có đường phân giác AI cũng là

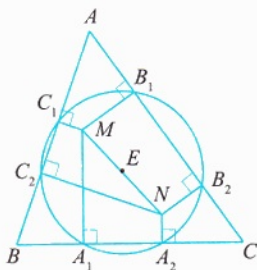
trung tuyến $A\omega$. Điều này không thể xảy ra! Như vậy cho một tam giác ABC ta dựng được vô số ĐT6Đ (Euler). Nhưng ngược lại không phải đường tròn nào cắt các cạnh của tam giác tại 6 điểm cũng được gọi là ĐT6Đ (Euler). Ta hãy chứng minh bài toán sau



Hình 5

4. Một đường tròn tâm E cắt các cạnh BC , CA và AB của tam giác ABC tại các điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 và C_2 . Chứng minh rằng nếu các đường thẳng vuông góc với các cạnh tam giác tại A_1, B_1 và C_1 đồng quy tại một điểm M thì các đường vuông góc với các cạnh tại A_2, B_2 và C_2 cũng đồng quy tại một điểm N . (Đề thi Olympic Toán học Hungary năm 1914).

Chứng minh. Tâm E của đường tròn thuộc đường trung trực của đoạn A_1A_2 . Gọi N là giao điểm của đường vuông góc với BC tại A_2 và đường thẳng ME kéo dài thì E là trung điểm của đoạn MN (h.6). Điều khẳng định tương tự cũng đúng với các đường thẳng vuông góc với các cạnh CA và AB tại B_2 và C_2 tương ứng. Ta được điều cần chứng minh.



Hình 6

5. Tính bán kính ρ của đường tròn 6 điểm Euler.

AM và AM' lần lượt là các đường kính của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AEMF$ và $AE'M'F'$. Đặt $AM = d_a$; $AM' = d'_a$ ta có

$EF = d_a \cdot \sin A$; $E'F' = d'_a \cdot \sin A$. Đường tròn 6 điểm Euler bán kính ρ ngoại tiếp cả hai tam giác DEF và $D'E'F'$ nên

$$2\rho = \frac{EF}{\sin \widehat{EDF}} = \frac{E'F'}{\sin \widehat{E'D'F'}}.$$

Mà $MDBF$ và $MDCE$ là những tứ giác nội tiếp, nên

$$\widehat{MDF} = \widehat{MBF} = \beta \text{ (cùng chắn cung } \widehat{MF});$$

$$\widehat{MDE} = \widehat{MCE} = \gamma \text{ (cùng chắn cung } \widehat{ME}).$$

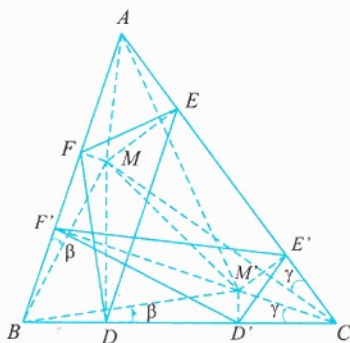
Do đó: $\widehat{EDF} = \beta + \gamma$ (h.7). Lại có $M'D'BF'$ và $M'D'CE'$ cũng là những tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{M'D'F'} = \widehat{M'BF'} = \hat{B} - \beta \text{ (cùng chắn } \widehat{M'F'});$$

$$\widehat{M'D'E'} = \widehat{M'CE'} = \hat{C} - \gamma \text{ (cùng chắn } \widehat{M'E'}).$$

$$\text{Do đó: } \widehat{E'D'F'} = \hat{B} + \hat{C} - (\beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow 2\rho = \frac{d_a \cdot \sin A}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{d'_a \cdot \sin A}{\sin[(B + C) - (\beta + \gamma)]} \quad (2)$$



Hình 7

§3. ĐƯỜNG TRÒN 6 ĐIỂM EULER THỨ CẤP

1. Quỹ tích của M và M' khi $AM = AM'$.

Khi $\sin(\beta + \gamma) = \sin[(B + C) - (\beta + \gamma)]$ thì

$AM = AM'$ (h.8). Ta có:

$$\begin{aligned} \text{a) } \beta + \gamma &= B + C - (\beta + \gamma); \quad 2(\beta + \gamma) = 180^\circ - A \\ \Rightarrow \beta + \gamma &= 90^\circ - \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{b) } \beta + \gamma = 180^\circ - [(B + C) - (\beta + \gamma)];$$

$$0 = 180^\circ - (B + C) \text{ (loại).}$$

Giả sử M_a và M'_a là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (3). Qua M_a và M'_a dựng các đường thẳng $M_a D_a$ và $M'_a D'_a$; $M_a E_a$ và $M'_a E'_a$; $M_a F_a$ và $M'_a F'_a$ lần lượt vuông góc với các cạnh BC , CA và AB của $\triangle ABC$ ta được

$$\begin{aligned} \widehat{M_a D_a F_a} &= \beta \text{ và } \widehat{M_a D_a E_a} = \gamma; \quad \widehat{M'_a D'_a F'_a} = \beta' \text{ và } \\ \widehat{M'_a D'_a E'_a} &= \gamma' \text{ trong đó } \beta + \gamma = \beta' + \gamma' = 90^\circ - \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Ta hãy tìm quỹ đạo do M_a và M'_a vẽ ra khi β và γ biến thiên nhưng tổng của chúng không thay đổi.

Xét tam giác $BM_a C$ ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{BM_a C} &= 180^\circ - (\widehat{M_a BC} + \widehat{M_a CB}) \\ &= 180^\circ - (\widehat{B} - \beta) - (\widehat{C} - \gamma) = \widehat{A} + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

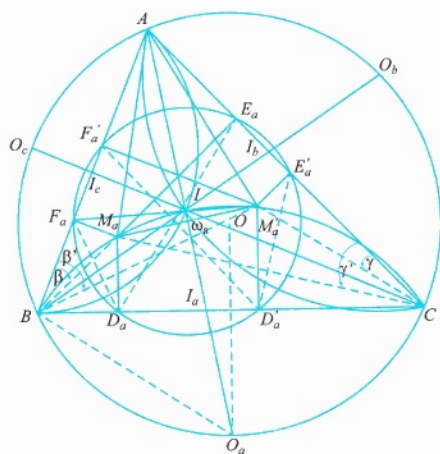
Xét tam giác $BM'_a C$ ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{BM'_a C} &= 180^\circ - (\widehat{M'_a BC} + \widehat{M'_a CB}) \\ &= 180^\circ - (\widehat{B} - \beta') - (\widehat{C} - \gamma') = \widehat{A} + \beta' + \gamma' \\ \Rightarrow \widehat{BM_a C} &= \widehat{BM'_a C} = A + \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 90^\circ + \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Lại có $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Với I là tâm đường tròn nội

tiếp $\triangle ABC$ nên M_a và M'_a thuộc cung tròn $\widehat{BIC}$.

Đường phân giác trong AI của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại O_a nên



Hình 8

$$\widehat{O_a B} = \widehat{O_a C} \Rightarrow \widehat{O_a BC} = \widehat{O_a AC} = \frac{A}{2}$$

$$\text{và } \widehat{O_a BI} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}.$$

Mặt khác $\widehat{O_a IB} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} \Rightarrow O_a BI$ là tam giác cân; $O_a B = O_a C = O_a I$.

Nhận thấy AO_a là trục đối xứng của cung tròn $\widehat{BIC}$ tâm O_a , nên $\widehat{IM_a} = \widehat{IM'_a}$ và BI và CI cũng là các phân giác của góc $\widehat{M_a BM'_a}$ và $\widehat{M'_a CM_a}$; do đó M_a và M'_a vẫn thỏa mãn điều kiện (1). Như vậy sau khi “co giãn” AM và AM' để được $AM_a = AM'_a$ thì M_a và M'_a vẫn là hai điểm đẳng giác thuộc cung $\widehat{BIC}$.

Đảo lại, lấy hai điểm N_a và N'_a bất kì thuộc cung tròn $\widehat{BIC}$ sao cho $AN_a = AN'_a$ thì các góc ngoài của các tam giác $N_a BC$ và $N'_a BC$ tại các đỉnh N_a và N'_a là những góc nội tiếp có đỉnh thuộc cung tròn và cùng chắn cung nhỏ BC này nên chúng bằng nhau:

$$\widehat{N_a} = \widehat{N'_a} = 90^\circ - \frac{A}{2} \text{ và } \beta + \gamma = \beta' + \gamma' = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

Vậy quỹ tích của các tâm tạo M_a và M'_a luôn cách đều điểm A là cung tròn $\widehat{BIC}$, được ký hiệu là $\mathcal{C}_1$ thuộc đường tròn $\mathcal{C}$ tâm O_a .

2. Đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp.

Các đường tròn 6 điểm Euler có các tâm tạo là M_a và M'_a thì tâm ω_a là trung điểm của đoạn $M_a M'_a$; ω_a thuộc đường phân giác AO_a và $M_a M'_a \perp AO_a$.

Kẻ $M_a F_a \perp AB$ ta được tứ giác $A\omega_a M_a F_a$ nội tiếp đường tròn đường kính AM_a . Nối $\omega_a F_a$ theo cách dựng tại mục §2.3 thì $\omega_a F_a = \rho$, là bán kính của đường tròn (M_a, ω_a, ρ) .

Theo định lý hàm số sin ta có

$$\frac{\omega_a F_a}{\sin \omega_a A F_a} = AM_a \Rightarrow d_a \sin \frac{A}{2} = \rho.$$

Hoán vị vòng quanh các góc A, B và C ta được

$$\rho = d_a \sin \frac{A}{2} = d_b \sin \frac{B}{2} = d_c \sin \frac{C}{2} \quad (3)$$

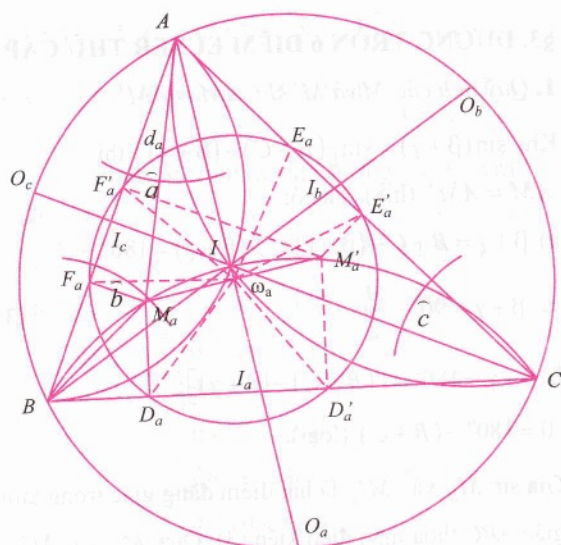
Như vậy sau khi dựng được ĐT6Đ (Euler) chuẩn (M, ω, ρ) ta dựng được 3 ĐT6Đ (Euler) cùng bán kính ρ . Ta gọi những đường tròn này là **Đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp** thuộc tam giác ABC .

3. Cách dựng đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp

Dựng đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp khác hẳn cách dựng đường tròn thông thường kể cả đường tròn 6 điểm Euler chuẩn. Bởi vì ta chỉ mới biết bán kính mà chưa xác định được vị trí của tâm đường tròn. Ví dụ cho $\triangle ABC$ và điểm M (h.5). Ta tiến hành các bước như sau:

3.1) Xác định các tâm tạo M_a, M_b và M_c .

- Sau khi dựng được ĐT6Đ (Euler) chuẩn tại điểm M thuộc miền trong của $\triangle ABC$ (h.5) ta đo được chiều dài bán kính ρ .



Hình 9a

- Dựng đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$. Dựng các điểm chính giữa O_a, O_b và O_c của các cung $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ và $\widehat{AB}$ của đường tròn tâm O .

- Nối AO_a, BO_b và CO_c cho chúng cắt nhau tại I , tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

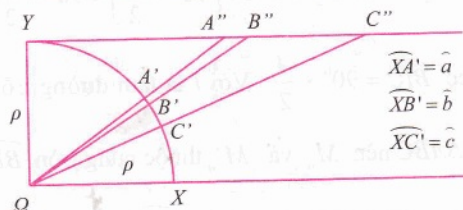
- Dựng các cung tròn $\widehat{BIC}, \widehat{CIA}$ và $\widehat{AIB}$ lần lượt với các tâm O_a, O_b và O_c .

- Dựng các cung tròn tâm A, B, C cùng bán kính ρ cho cắt một phân giác và một cạnh của góc đó để xác định được các cung $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ của đường tròn bán kính ρ ứng với các góc ở tâm là $\frac{\widehat{A}}{2}, \frac{\widehat{B}}{2}$ và $\frac{\widehat{C}}{2}$. (h.9a)

3.2) Dựng thước chính tâm

- Dựng cung một phần tư đường tròn XY tâm Ω bán kính ρ và tiếp tuyến $YY' \parallel \Omega X$.

- Dựng các cung dương thuộc cung tròn $\widehat{XY}$ sao



Hình 9b

cho $\widehat{XA'} = \frac{\hat{A}}{2}$; $\widehat{XB'} = \frac{\hat{B}}{2}$ và $\widehat{XC'} = \frac{\hat{C}}{2}$. Nói $\Omega A'$, $\Omega B'$ và $\Omega C'$ rồi kéo dài cho cắt YY' lần lượt tại A'' , B'' và C'' thì ta được $\widehat{\Omega A''}Y = \frac{\hat{A}}{2}$; $\widehat{\Omega B''}Y = \frac{\hat{B}}{2}$ và $\widehat{\Omega C''}Y = \frac{\hat{C}}{2}$. Do đó:

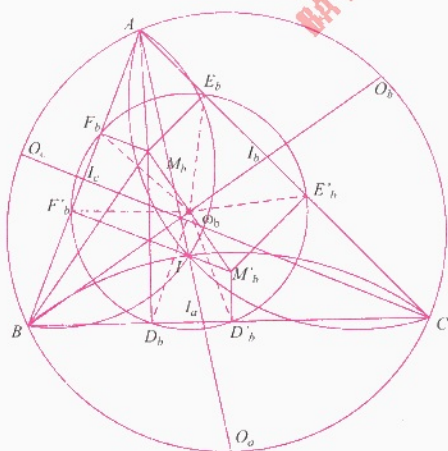
$$\Omega A'' = \frac{\rho}{\sin \frac{A}{2}} = d_a; \Omega B'' = \frac{\rho}{\sin \frac{B}{2}} = d_b; \Omega C'' = \frac{\rho}{\sin \frac{C}{2}} = d_c.$$

3.3) *Dựng các tâm tạo và các tâm các đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp.*

+ Dựng các cung tròn tâm A , B và C bán kính d_a , d_b và d_c cho chúng cắt các cung $\widehat{BIC}$, $\widehat{CIA}$ và $\widehat{AIB}$ lần lượt tại M_a , M_b và M_c (h.9a, 10 và 11)

+ Dựng các điểm M'_a , M'_b và M'_c đối xứng với M_a , M_b và M_c lần lượt qua các đường phân giác trong của các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$ và $\hat{C}$ của $\triangle ABC$.

+ Các giao điểm ω_a , ω_b và ω_c của các đoạn $M_a M'_a$, $M_b M'_b$ và $M_c M'_c$ và lần lượt các đường phân giác AI_a , BI_b và CI_c là các tâm của các ĐT6Đ (Euler) thứ cấp cần tìm.

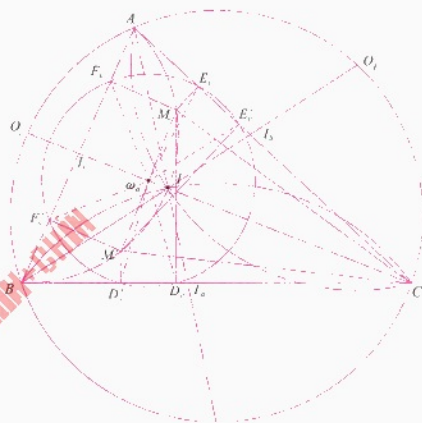


Hình 10

Ghi chú

1) Cho tam giác ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác bao giờ ta cũng dựng được điểm M' độc nhất đẳng giác với M nên ĐT6Đ (Euler) chuẩn dựng được cũng duy nhất.

2) Các đường tròn 6 điểm Euler thứ cấp và ĐT6Đ (Euler) chuẩn vừa dựng được tại phần 1) có cùng bán kính ρ nhưng còn phụ thuộc vào hình dạng của tam giác ABC nên số đường tròn thứ cấp dựng được không vượt quá con số 3.



Hình 11

3) Thước chỉnh tâm đòi hỏi chính xác cho từng tam giác ABC nên nó mà "sai một li" thì phép dựng hình sẽ "sai đi một dặm"! Thường thì $\Omega C''$ là đoạn dài nhất nên xác định giao điểm C'' rất khó chính xác do góc cắt giữa $\Omega C''$ và YY' khá nhỏ, dẫn đến không tìm được trùng tâm ω_c . Lúc này ta xê dịch M_c một chút cho đến khi dựng được hình như ý muốn.

4) $\widehat{XA'} = \frac{\hat{A}}{2}$: xin được hiểu là các số đo của cung và góc ở tâm tương ứng.

§4. DỰNG ĐƯỜNG TRÒN 9 ĐIỂM EULER VÀ 3 ĐT6Đ (EULER) THỨ CẤP.

Cho tam giác ABC , $R = 10$.

Đường tròn 9 điểm Euler: ($H, \omega, \rho = 5$)

Và ba đường tròn 6 điểm Euler: $(M_a, \omega_a, \rho = 5)$;

Và ba đường tròn 6 điểm Euler: $(M_a, \omega_a, \rho = 5)$;

$(M_b, \omega_b, \rho = 5)$ và $(M_c, \omega_c, \rho = 5)$.

Xin được giành cho độc giả.

§5. LỜI TỰ THUẬT.

Tiếp nối ý tưởng về các điểm đảo nghịch trong tam giác (points inverses) do các Giáo sư *C. Lebossé* và *C. Hémerly* phát hiện tại đề toán số 117, Sách giáo khoa HÌNH HỌC PHẪNG dùng cho các lớp đệ nhị trung học chuyên và phổ thông nước Pháp năm 1947, chúng tôi nghiên cứu đường tròn 6 điểm và nhận thấy đường tròn 9 điểm Euler chỉ là một trường hợp riêng.

Với lòng ngưỡng mộ sâu sắc các bậc tiền bối, chúng tôi đề nghị xin được gọi tên là “Đường tròn 6 điểm Euler” để phân biệt với “Đường tròn 9 điểm Euler.”

Quan sát thấy đường tròn 6 điểm Euler (xin được viết tắt là ĐT6Đ (Euler)) ngoại tiếp cả hai tam giác DEF và $D'E'F'$ ta tính được bán kính ρ của nó:

$$2\rho = \frac{d_a \cdot \sin A}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{d'_a \cdot \sin A}{\sin[(B+C) - (\beta + \gamma)]}.$$

Nhận thấy ρ phụ thuộc 4 tham số d_a, d'_a, β và γ chúng tôi nảy ra ý nghĩ cho $AM = AM'$, thử xem có thể giảm bớt được số tham số chẳng? Bất ngờ tìm được cung $\widehat{BIC}$ rất quen mà cũng thật là lạ!

Cung tròn này có ý nghĩa gì đây? Nó là một ĐT6Đ (Euler) ư? Thú thực ban đầu chúng tôi rất lúng túng. Trong lúc chưa đặt được tên, nhưng chúng tôi nhờ nó mà đã dựng được ba đường tròn 6 điểm Euler cùng bán kính!

Chúng tôi cứ “vờ” đi mà tiến! Mãi đến lúc nhìn lại thấy $AM = AM'$ thì mới nhận ra đây là cung tròn quỹ tích. Bởi nó không phải ĐT6Đ (Euler). Khi $M_a \equiv I$ thì $\rho = r$, khi M_a tiến dần tới B thì ρ tăng

dần nhưng $\rho \leq c \cdot \sin \frac{A}{2} < O_a B$ bán kính của cung

tròn $\widehat{BIC}$ tâm O_a .

Từ đó khẳng định $\widehat{BIC}$ là quỹ tích của các điểm đẳng giác M_a và M'_a khi chúng thay đổi nhưng luôn cách đều A .

Trong khi làm bài nhiều lúc gặp khó khăn tưởng chừng phải dừng bước. Nhưng với lòng tin và nhiệt huyết chúng tôi đã được đền đáp bằng biết bao điều thú vị, xin kể ra để chia vui cùng bạn đọc:

Thứ nhất là Đường tròn 9 điểm chỉ là một trường hợp riêng nhưng chúng giống nhau ở chỗ trong tập hợp này có vô số “anh em sinh tử” tức là với mỗi đường tròn $\left(H, \omega_H, \frac{R}{2}\right)$ và (M, ω, ρ) ta còn dựng

được thêm ba ĐT6Đ (Euler) thứ cấp khác nhau nhưng cùng bán kính với chúng. Chúng lại khác nhau ở chỗ ĐT9Đ (Euler) tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và mỗi đường tròn bàng tiếp thuộc tam giác ABC còn ĐT6Đ (Euler) thì không! (hoặc nói chính xác là chúng ta chưa biết đến).

Thứ hai là chúng ta phát hiện ra ĐT6Đ (Euler) thứ cấp. Gọi là thứ cấp bởi vì tâm tạo của chúng chỉ thuộc một trong ba cung tròn như $\widehat{BIC}$ nhưng cùng bán kính ρ với ĐT6Đ (Euler) chuẩn.

Thứ ba là phép nghịch đảo có thước tạo hình Peaucelior. Trong công nghiệp có máy chỉnh tâm (Centreur) còn trong phép đối xứng nghịch ta có thước, giúp xác định và điều chỉnh thật chính xác tâm của ĐT6Đ (Euler) thứ cấp, chắc là “MADE IN VIET NAM”!

Mãi vui kể lê dòng dài, cuối cùng phải công bằng mà nói rằng: “Những lời động viên, khích lệ ân cần và những ý kiến phản biện xuất sắc đầy trách nhiệm của Ban biên tập Tòa soạn Tạp chí TH&TT có ý nghĩa quyết định trước thành công của bài viết này.”

Cho dù rất cố gắng về mọi mặt nhưng chắc chắn thiếu sót không thể tránh hết được, tác giả rất mong được bạn đọc chỉ giáo.

Xin chân thành cảm ơn!



❖ BÀI TOÁN 8. (IMO 1984) Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}.$$

Cách giải 1. Từ giả thiết ta có $a, b, c \in [0;1]$

$$\Rightarrow ab+bc+ca-2abc \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} - 2abc.$$

Rõ ràng $0 \leq abc \leq 1$ nên $\sqrt[3]{(abc)^2} \geq abc$. Suy ra:

$$ab+bc+ca-2abc \geq 3abc-2abc = abc \geq 0 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a; b; c) = (0; 0; 1)$ và các bộ hoán vị của nó. Ta có: $f(bc) = ab+bc+ca-2abc$

$$= a(b+c) + bc(1-2a) = a(1-a) + (1-2a)bc$$

$$\text{với } 0 \leq bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2. \text{ Vì đồ thị hàm}$$

số $y = f(bc)$ là một đoạn thẳng với

$$0 \leq bc \leq \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \text{ mà}$$

$$f(0) = a(1-a) \leq \left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27} \text{ và}$$

$$f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{27} - \frac{1}{4}\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{7}{27}.$$

$$\text{Do đó: } f(bc) \leq \frac{7}{27}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ}$$

$$\text{khi } a=b=c=\frac{1}{3}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}.$$

Cách giải 2. Ta sẽ chứng minh:

$$ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow 0 < c \leq \frac{1}{3}. \text{ Khi đó: } M = ab+bc+ca-2abc$$

$$\text{hay } M = ab(1-2c) + c(1-c) \quad (\text{do } a+b+c=1)$$

$$\Rightarrow M \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (1-2c) + c(1-c)$$

$$\Rightarrow M \leq \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 (1+2c) + c(1-c)$$

$$\Rightarrow M \leq -\frac{1}{2}c^3 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4} = f(c).$$

$$\text{Ta có: } f'(c) = -\frac{c}{2}(3c-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$$

c	1	$\frac{1}{3}$	
$f'(c)$	0	+	0
$f(c)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{27}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $M \leq \frac{7}{27}$. Đẳng

thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách giải 3. Trước hết ta chứng minh BĐT sau:

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz \quad (3)$$

với x, y, z là các số không âm. Thật vậy:

• Nếu có một thừa số trong tích ở vế trái âm thì BĐT (3) đúng.

• Nếu có hai thừa số nào đó trong tích ở vế trái âm, chẳng hạn:

$$\begin{cases} x+y-z < 0 \\ x+z-y < 0 \end{cases} \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ (vô lý).}$$

• Nếu cả ba thừa số ở vế trái đều dương thì áp

dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp, \text{ với } m, n, p > 0.$$

Đặt $m = x+y-z; n = y+z-x; p = z+x-y$ ta

(Tiếp theo trang 25)

Problem T8/487. Given a triangle ABC with the exradii r_a, r_b, r_c , the medians m_a, m_b, m_c and the area S . Prove that

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 3\sqrt{3}S + (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2.$$

Problem T9/487. Given a positive integer n and positive numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$. Find a real number λ such that

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n + \lambda x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/487.

a) Prove that for every positive integer n the equation $2012^x(x^2 - n^2) = 1$ has a unique solution (denoted by x_n).

suy ra ngay bất đẳng thức (3).

Áp dụng BĐT (3) ta có:

$$\begin{aligned} (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) &\leq abc \\ \Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c) &\leq abc \\ \Leftrightarrow 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc &\leq abc \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc &\leq \frac{1}{4}(1+abc) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \right] = \frac{7}{27}.$$

NGUYỄN TRỌNG THỌ

(GV THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

LÊ THỊ HỒNG HÀ

(Trường THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An)

➤**Nhận xét.** Hai bạn Vũ Thúy An, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định và Bùi Sang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái

b) Find $\lim(x_{n+1} - x_n)$.

Problem T11/487. Let T be the set of all positive factors of $n = 2004^{2010}$. Suppose that S be an arbitrary nonempty subset of T satisfying the fact that for all a, b belong to S and $a > b$ then a is not divisible by b . Find the maximal number of elements of such subset S .

Problem T12/487. Given a triangle ABC whose the incircle (I) is tangent to BC at D . Let H be the perpendicular projection of A on BC . Let N be the midpoint of AH . The line through D and N intersects CA, AB respectively at J and S . Assume that BJ intersects CS at P . Suppose that DA, DP intersect (I) respectively at G, L . Prove that B, C, G, L lie on some circle.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

Bình cũng đã đưa ra 3 cách giải tương tự như 3 cách giải trên của hai tác giả Nguyễn Trọng Thọ, Lê Thị Hồng Hà. Ngoài ra, hai bạn Bùi Thị Thu Trang, Nguyễn Thị Hương Giang, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên cũng đóng góp một lời giải giống cách 3 trên. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 10 sau đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28.2.2018.

BÀI TOÁN 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các tia phân giác trong của các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ cắt (O) lần lượt tại D, E, F ($D \neq A, E \neq B, F \neq C$). Chứng minh rằng:

$$AD + BE + CF > AB + BC + CA.$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Tạp chí TH&TT số 487, tháng 1/2018 giới thiệu với các bạn hai bài toán nằm trong kì thi China MO, 1996 và IMO, 2012 cùng với các lời giải của chúng.

Bài 13. (China, MO, 1996, bài 2) *Tìm k nhỏ nhất sao cho trong k số tùy ý của tập hợp $\{1, 2, \dots, 50\}$ luôn tồn tại hai số a và b thỏa mãn điều kiện ab chia hết cho $a+b$.*

Lời giải. Đặt $a = da_1 > b = db_1, (a_1, b_1) = 1$. Khi đó $ab = d^2 a_1 b_1$ là bội của $a+b = d(a_1 + b_1)$ khi và chỉ khi $da_1 b_1$ chia hết cho $a_1 + b_1$. Do $(a_1, b_1) = 1$ nên $(a_1 + b_1, a_1) = (a_1 + b_1, b_1) = 1$

$\Rightarrow (a_1 + b_1, a_1 b_1) = 1 \Rightarrow a_1 + b_1 \mid d \Rightarrow d \geq (a_1 + b_1)$
 $\Rightarrow 99 \geq a + b = d(a_1 + b_1) \geq (a_1 + b_1)^2$
 $\Rightarrow a_1 + b_1 \leq 9$ và ta có $da_1 \leq 50$. Lập bảng, ta có

a_1	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6
b_1	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1

Tương ứng với mỗi cặp (a_1, b_1) này là các (a, b) sau:

Với $a_1 = 2, b_1 = 1 \Rightarrow 3 \mid d, 2d \leq 50 \Rightarrow d = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$, cho ta các cặp: $(6, 3), (12, 6), (18, 9), (24, 12), (30, 15), (36, 18), (42, 21), (48, 24)$.

Với $a_1 = 3, b_1 = 1 \Rightarrow 4 \mid d, 2d \leq 50 \Rightarrow d = 4, 8, 12, 16$, cho ta các cặp: $(12, 4), (24, 8), (36, 12), (48, 16)$.

Với $a_1 = 3, b_1 = 2 \Rightarrow 5 \mid d, 3d \leq 50 \Rightarrow d = 5, 10, 15$, cho ta các cặp: $(15, 10), (30, 20), (45, 30)$.

Với $a_1 = 4, b_1 = 1 \Rightarrow 5 \mid d, 4d \leq 50 \Rightarrow d = 5, 10$, cho ta các cặp: $(20, 5), (40, 10)$.

Với $a_1 = 4, b_1 = 3 \Rightarrow 7 \mid d, 4d \leq 50 \Rightarrow d = 7$, cho ta cặp: $(28, 21)$.

Với $a_1 = 5, b_1 = 1 \Rightarrow 6 \mid d, 5d \leq 50 \Rightarrow d = 6$, cho ta cặp: $(30, 6)$.

Với $a_1 = 5, b_1 = 2$ cho $d = 7$ và cặp $(35, 14)$.

Với $a_1 = 5, b_1 = 3$ cho $d = 8$ và cặp $(40, 24)$.

Với $a_1 = 5, b_1 = 4$ cho $d = 9$ và cặp $(45, 36)$.

Với $a_1 = 6, b_1 = 1$ cho $d = 7$ và cặp $(42, 7)$.

Có tất cả gồm 23 cặp, chứa 24 số trong 50 số đã cho thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Vì vậy $k > 26$ và $k = 26 + j, j \in \mathbb{N}^*, j \geq 2$. Bây giờ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất có thể của j trong 24 số nằm trong 23 cặp ở trên để khi lấy j số luôn có 2 số a và b thỏa mãn ab chia hết cho $a+b$. Theo nguyên lý Dirichlet, dễ thấy $j = 13$. Vậy ta được giá trị bé nhất của k là $26 + 13 = 39$.

Bài 14. (IMO 2012, bài 4) *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ đẳng thức sau đây đúng:*

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) \quad (*)$$

ở đây $\mathbb{Z}$ ký hiệu tập hợp các số nguyên.

Lời giải. Thay $a = b = c = 0$ ta có

$$3f^2(0) = 6f^2(0), \text{ và do đó } f(0) = 0 \quad (1).$$

Thay $b = -a$ và $c = 0$ vào $(*)$ ta thu được $[f(a) - f(-a)]^2 = 0$.

Suy ra $f(a) = f(-a), \forall a \in \mathbb{Z}$ (2). Thay $b = a$ và $c = -2a$ vào $(*)$ ta có

$$2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$$

$$\Leftrightarrow f(2a)[f(2a) - 4f(a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow f(2a) = 0 \text{ hoặc } f(2a) = 4f(a), \forall a \in \mathbb{Z} \quad (3).$$

Nếu $f(r) = 0$ với $r \geq 1$ nào đó. Khi đó thay $b = r$ và $c = -a - r$ vào (*) ta suy ra

$$\Leftrightarrow [f(a+r) - f(a)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(a+r) = f(a)$$

hay f là hàm tuần hoàn chu kỳ r với mọi $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Nói riêng, nếu $f(1) = 0$ thì f là hằng số, nghĩa là $f(a) = 0$ cho mọi $a \in \mathbb{Z}$ và hàm số thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bây giờ ta giả sử $f(1) = k \neq 0$. Từ (3) ta có $f(2) = 0$ hoặc $f(2) = 4k$.

Nếu $f(2) = 0$ thì f tuần hoàn với chu kỳ 2, do đó $f(2t) = 0$ và $f(2t+1) = k$ với $\forall t \in \mathbb{Z}$. Hàm số này cũng là nghiệm với mọi k . Chúng ta hoàn việc kiểm tra lại. Tiếp theo ta giả sử $f(2) = 4k \neq 0$. Từ (3), ta lại có $f(4) = 0$ hoặc $f(4) = 16k$. Trong trường hợp đầu f tuần hoàn với chu kỳ 4, và $f(3) = f(-1) = f(1) = k$, khi đó ta có $f(4n) = 0$, $f(4n+1) = f(4n+3) = k$ và $f(4n+2) = 4k$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$. Hàm số này cũng là một nghiệm mà chúng ta sẽ kiểm chứng sau. Tiếp tục cho phần còn ta giả sử $f(4) = 16k \neq 0$.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng $f(3) = 9k$ bằng hai thay thế sau:

$$a = 1, b = 2, c = -3 \Rightarrow f^2(3) - 10kf(3) + 9k^2 = 0 \\ \Rightarrow f(3) \in \{k, 9k\};$$

$$a = 1, b = 3, c = -4 \Rightarrow f^2(3) - 34kf(3) + 225k^2 = 0 \\ \Rightarrow f(3) \in \{9k, 25k\}.$$

Do đó $f(3) = 9k$. Bằng quy nạp ta chứng minh rằng hàm số còn lại chỉ có thể là: $f(x) = kx^2$, $x \in \mathbb{Z}$. Ta đã chứng minh điều này với $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Giả sử rằng với $n \geq 4$ ta có $f(x) = kx^2$ với mọi $x \in [0, n]$. Khi đó với

$$a = n, b = 1, c = -n - 1$$

$$\text{và } a = n - 1, b = 2, c = -n - 1$$

tương ứng ta có:

$$f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-1)^2\}$$

$$\text{và } f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-3)^2\}.$$

Do $k(n-1)^2 \neq k(n-3)^2$ với $n \neq 2$, nên chỉ có khả năng là $f(n+1) = k(n+1)^2$, do đó $f(x) = kx^2$ với $\forall x \geq 0$. Cho giá trị âm của x ta cũng có kết quả tương tự do f là hàm chẵn. Để khẳng định là $f(x) = kx^2$ là nghiệm, ta cần kiểm tra đẳng thức

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 \\ = 2a^2b^2 + 2a^2(a+b)^2 + 2b^2(a+b)^2,$$

điều này là dễ thấy khi khai triển đồng thời hai vế đẳng thức. Vậy tất cả nghiệm có thể là các hàm số

$$f_1(x) = 0 \quad \text{và} \quad f_2(x) = kx^2,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ chẵn} \\ c & \text{nếu } x \text{ lẻ} \end{cases},$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \equiv 0 \pmod{4} \\ k & \text{nếu } x \equiv 1 \pmod{2} \\ 4k & \text{nếu } x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

với mọi k nguyên khác 0.

Việc kiểm tra hai hàm số đầu thỏa mãn đầu bài là dễ dàng. Với hàm f_3 ta lưu ý là nếu $a+b+c=0$ thì hoặc a, b, c cùng chẵn, trong trường hợp này thì $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, hoặc một trong chúng là chẵn và hai giá trị còn lại là lẻ, khi đó hai vế của phương trình là $2k^2$. Với hàm f_4 , sử dụng tính chẵn lẻ và tính đối xứng của phương trình, ta quy về kiểm tra các bộ ba $(0, k, k), (4k, k, k), (0, 0, 0), (0, 4k, 4k)$. Các bộ này đều thỏa mãn phương trình.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Khoa Công nghệ Thông tin, ĐHSP Hà Nội)

Sau đây là bài tập đề nghị, các bạn hãy thử giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28.2.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 15. Giả sử a và b là các số tự nhiên sao cho

$$P = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

là một số nguyên tố. Giá trị lớn nhất có thể có của p là bao nhiêu?

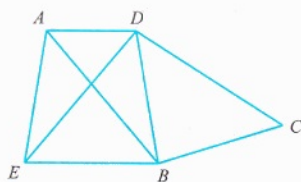
NHƯ HOÀNG (Hà Nội)



**GIẢI ĐÁP: THÊM DẤU HIỆU:
NHẬN BIẾT HÌNH BÌNH HÀNH**

(Đề đăng trên TH&TT số 483, tháng 9 năm 2017)

Trả lời. Kết luận về vị trí tương đối của H và K trong chứng minh là không chính xác. Ta xây dựng phản ví dụ sau đây.



Xét hình thang cân $ADBE$. Gọi C là điểm đối xứng với E qua BD . Từ tính chất đối xứng và tính chất của hình thang cân, ta có:

$AB = DE$ (hai đường chéo hình thang cân),

$DE = DC$ (tính chất đối xứng),

suy ra $AB = CD$.

Lại có: $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$ (tính chất đối xứng)

$\widehat{BED} = \widehat{DAB}$ (tính chất hình thang cân)

do đó $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

Như vậy, ta vừa xây dựng tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh đối bằng nhau, một cặp góc đối bằng nhau nhưng không phải hình bình hành. Trong phản ví dụ này, có thể thấy vị trí tương đối của H và K đối với AD và BC không giống nhau.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia làm bài này và không có bạn nào phát hiện đúng sai lầm.

KIHI VI

KẾT QUẢ NÀO?



Trong giờ bài tập ở lớp 11A1, thầy giáo đưa ra bài toán sau đây: Cho cấp số cộng (u_n) có tổng n số hạng đầu $S_n = 2n^2 - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{100}$.

Dưới đây là lời giải của ba bạn học sinh.

Lời giải của bạn Tuyết Trinh:

Ta có: $S_{100} = u_1 + u_2 + \dots + u_8 + u_9 + \dots + u_{99} + u_{100}$
 $= 2 \cdot 100^2 - 100 + 1 = 19901$

$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_8 + u_9 = 2 \cdot 9^2 - 9 + 1 = 154$.

Vậy $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{100} = S_{100} - S_9$
 $= 19901 - 154 = 19747$.

Lời giải của bạn Hương Giang:

Ta có: $u_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2$;

$u_1 + u_2 = S_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7$

$\Rightarrow u_2 = 7 - u_1 = 7 - 2 = 5$;

$d = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$.

Vậy $u_{10} + \dots + u_{100} = (u_1 + \dots + u_{10} + \dots + u_{99} + u_{100})$
 $- (u_1 + \dots + u_8 + u_9)$

$= S_{100} - S_9 = \frac{100}{2}(2u_1 + 99d) - \frac{9}{2}(2u_1 + 8d)$

$= \frac{100}{2}(2 \cdot 2 + 99 \cdot 3) - \frac{9}{2}(2 \cdot 2 + 8 \cdot 3) = 14924$.

Lời giải của bạn Minh Quang:

Ta có: $u_1 = S_1 = 2$;

$u_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n + 1) - [2(n-1)^2 - (n-1) + 1]$
 $= 4n - 3, \forall n \geq 2$;

$u_9 = 4 \cdot 9 - 3 = 33$; $u_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$.

Vậy $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{100} = S_{100} - S_9$
 $= \frac{100}{2}(u_1 + u_{100}) - \frac{9}{2}(u_1 + u_9)$
 $= \frac{100}{2}(2 + 397) - \frac{9}{2}(2 + 33) = \frac{39585}{2}$.

Theo bạn, bạn nào đúng, kết quả của bạn thế nào?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXBGD Việt Nam

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẠ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Văn Nho – Phân tích logic trong chứng minh bất đẳng thức vô tỉ.

3 Đỗ Quang Minh – Vẽ thêm đường tròn ngoại tiếp tam giác để giải một số bài toán hình học.

5 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2016-2017.

7 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Nghệ An, năm học 2016-2017.

8 Đáp án và hướng dẫn giải Đề số 3.

11 Thử sức trước kì thi 2018 - Đề số 4.

16 Bạn có biết

Oleg Makarenko – Tại sao Liên bang Nga thua trong kỳ thi Olympic Toán Quốc tế IMO.

9 Phương pháp giải toán

Nguyễn Thành Nhân – Khai thác một tính chất về đạo hàm và nghiệm của đa thức.

24 Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/487, ..., T12/487, L1/487, L2/487.

26 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

35 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 27.

Bài dịch số 25 - Tiếng Anh qua các bài toán.

36 Bạn đọc tìm tòi

Lê Quang Chiêu – Phép đối xứng nghịch và đường tròn Euler.

43 Nhiều cách giải cho một bài toán

45 Du lịch thế giới qua các bài toán hay

47 Sai lầm ở đâu?

Nguyễn Văn Xá – Kết quả nào?

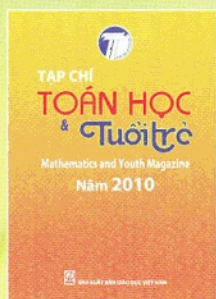


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

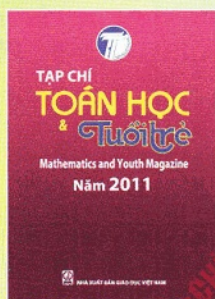
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

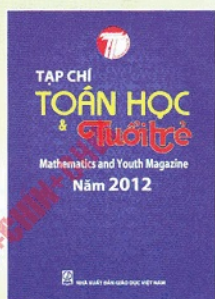
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



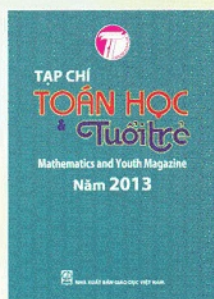
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



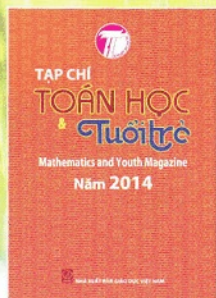
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



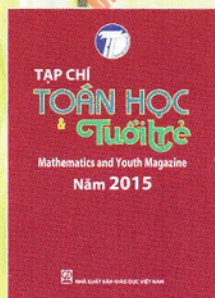
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



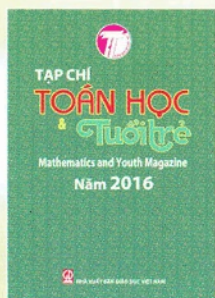
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



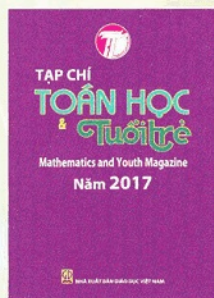
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

• Điện thoại biên tập: (024).35121607

• Điện thoại Fax-phát hành: (024). 35121606

• Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

<https://tieulun.hopto.org>