



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
12 2016
Số 474

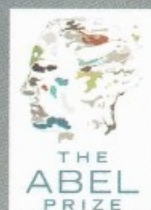
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Sir Andrew J. Wiles được nhận
Giải thưởng Toán học Abel năm 2016
từ Thái tử Haakon của Na Uy

ĐÃ BA BA = CHÍN + CHÍN + CHÍN



Giải thưởng Toán học Abel năm 2016

<https://tieuun.hopto.org>

Sách điện tử - IseeBooks

Đạt giải thưởng Sao Khuê 2016 của Hiệp hội CNTT Việt Nam



Sách điện tử IseeBooks
nâng cao năng lực học và tự đánh giá của học sinh.

Danh mục sách đã phát hành

- Bộ vở thực hành Thủ công 1,2,3
- Bộ thực hành cùng học Q1, 2, 3
- Bộ vở bài tập Tiếng Việt 1 - 5
- Bộ vở bài tập Toán 1 - 5
- Sách Tiếng Anh lớp 3-12 (sách học sinh)
- Sách Tiếng Anh lớp 3-12 (sách bài tập)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG

Địa chỉ: 145 Lê Lợi, P Hải Châu I, Q Hải Châu, TP. Đà Nẵng

ĐT: (05113) 889952 - 889954, Fax: (05113) 889953 - 889957; www.iseebooks.vn



SỬ DỤNG CÔNG THỨC ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

ĐỖ QUANG MINH

(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Có nhiều cách giải cho một bài toán cực trị đại số, nhưng ở đây chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn học sinh một cách giải khác đó là “Sử dụng công thức độ dài đoạn thẳng để giải một số bài toán cực trị”. Hy vọng rằng, các em có thêm một phương pháp khác (nhất là các bạn học sinh bậc THCS) để giải dạng toán này. Trước hết xin nhắc lại một số kiến thức bổ sung:

• Cho hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$, ta có:

+ Công thức tính độ dài đoạn thẳng AB là:

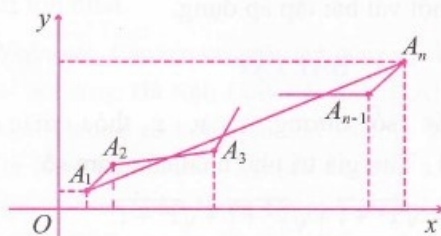
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

+ Nếu $x_1 \neq x_2; y_1 \neq y_2$ thì PT đường thẳng

$$\text{là } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

• Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d đi qua hai điểm A_1 và A_n . Một đường gấp khúc liên tiếp nhau gồm n đoạn thẳng mà điểm đầu của đoạn thẳng thứ nhất trùng với A_1 , điểm cuối của đoạn thẳng thứ n trùng với A_n . Thế thì

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n.$$



Đẳng thức xảy ra khi các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ (theo thứ tự đó) đều thuộc đường thẳng nối điểm A_1 với điểm A_n .

II. MỘT VÀI BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1}.$$

Lời giải. Ta biểu diễn hàm số y dưới dạng:

$$y = \sqrt{(x-0)^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Nếu trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét các điểm

$$O(0;0); A(0;1); B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ và}$$

$M(x;x)$ (bạn đọc tự vẽ hình) thì

$$y = MA + MB + MC.$$

Để kiểm tra $AB = AC = BC = \sqrt{3}; OA = OB = OC = 1$. Suy ra tam giác ABC đều với tâm là gốc tọa độ O . Mặt khác nếu $\triangle ABC$ đều thì

$$y = MA + MB + MC \geq OA + OB + OC$$

(Bổ đề tam giác đều).

Do đó $y \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$M \equiv O \Leftrightarrow x = 0. \text{ Vậy min } y = 3, \text{ khi } x = 0.$$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Lời giải. Biểu thức y được viết lại:

$$y = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Vì thế, trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ta xét các

$$\text{điểm: } O(0;0); A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và}$$

điểm $M(x;0)$ (dễ thấy A, B nằm khác phía đối với trục hoành và ba điểm A, O, B thẳng hàng). Khi đó $y = MA + MB \geq AB = 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O \Leftrightarrow x = 0$.
Vậy min $y = 2$ khi $x = 0$.

Bài 3. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $u = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$.

Lời giải. Biểu thức u được viết lại dưới dạng:

$$u = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} + \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^2}.$$

Vì vậy, trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta xét các điểm: $O(0;0)$; $A_1\left(\sqrt{2}; \frac{1}{x} - x\right)$;

$$A_2\left(2\sqrt{2}; \frac{1}{x} - x + \frac{1}{y} - y\right); A_3\left(3\sqrt{2}; \frac{1}{x} - x + \frac{1}{y} - y + \frac{1}{z} - z\right);$$

$$\text{Khi đó } OA_1 = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2};$$

$$A_1A_2 = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2};$$

$$A_2A_3 = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^2}. \text{ Để } y \text{ rằng:}$$

$$\frac{1}{x} - x + \frac{1}{y} - y + \frac{1}{z} - z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z)$$

$$= \left(\frac{1}{x} + 9x\right) + \left(\frac{1}{y} + 9y\right) + \left(\frac{1}{z} + 9z\right) - 10(x + y + z)$$

$\geq 18 - 10 = 8$ (áp dụng bất đẳng thức Cauchy và $x + y + z \leq 1$). Khi đó, ta luôn có

$$u = OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 \geq OA_3 \geq \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{x} = 9x; \frac{1}{y} = 9y; \frac{1}{z} = 9z; x + y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy min } u = \sqrt{82} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = \sqrt{a^2 + 1} + 2\sqrt{b^2 + 1} + 3\sqrt{c^2 + 1}$.

Lời giải. Biểu thức y được viết lại dưới dạng:

$$y = \sqrt{a^2 + 1^2} + \sqrt{(2b)^2 + 2^2} + \sqrt{(3c)^2 + 3^2}.$$

Vì thế, trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta xét các điểm sau: $O(0;0)$; $A_1(a;1)$; $A_2(a+2b;3)$;

$$A_3(a+2b+3c;6).$$

$$\text{Khi đó } OA_1 = \sqrt{a^2 + 1^2}; A_1A_2 = \sqrt{(2b)^2 + 2^2};$$

$$A_2A_3 = \sqrt{(3c)^2 + 3^2}; OA_3 = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow y = OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 \geq OA_3, \text{ hay } y \geq 2\sqrt{10}.$$

Đẳng thức xảy ra khi hai điểm A_1, A_2 đều thuộc đường thẳng d đi qua hai điểm O và A_3 .

Dễ thấy phương trình của đường thẳng d là: $y = 3x$ (bạn đọc tự vẽ hình).

Điều kiện để hai điểm A_1, A_2 thuộc (d) là:

$$a = 3; a + 2b + 3c = 2; 1 = 3a; 3 = 3(a + 2b)$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy min } y = 2\sqrt{10} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Trong bài báo này mới chỉ đưa ra một phần nhỏ trong việc sử dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng để giải bài toán cực trị mà thôi. Hy vọng rằng, chúng ta chịu khó để tìm được nhiều ứng dụng thú vị khác từ công thức tính độ dài đoạn thẳng, chúc các bạn thành công. Sau đây xin giới thiệu một vài bài tập áp dụng.

BÀI TẬP

1. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}.$$

2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT CHUYÊN TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 473, tháng 11 năm 2016)

Câu 1. a) ĐK đã cho tương đương với:

$$\frac{(a-b)^2}{a(a+b)(a-b)} + \frac{(a+b)^2}{a(a+b)(a-b)} = \frac{a(3a-b)}{a(a+b)(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a+b)^2 - a(3a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 3a^2 + ab = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + 2b^2 + ab = 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$ ($t \neq 0$), (1) trở thành:

$$-t + \frac{2}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1; t_2 = 2$$

Nếu $t = -1$ thì $a = -b$: loại, vì $a \neq \pm b$.

Nếu $t = 2$ thì $\frac{a}{b} = 2$, ta có:

$$P = \frac{a^3 + 2a^2b + 3b^3}{2a^3 + ab^2 + b^3} = \frac{t^3 + 2t^2 + 3}{2t^3 + t + 1} = 1.$$

b) Ta có: $5m + n : 5n + m$

$$\Leftrightarrow 5m + n = (5n + m).a \quad (\text{với } a \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow 5m + n = 5an + am \Leftrightarrow 5m - am = 5an - n$$

$$\Leftrightarrow m(5 - a) = n(5a - 1)$$

Vì $m, n, a \in \mathbb{N}^*$ nên $n(5a - 1) > 0$ suy ra $5 - a > 0$.

Do đó $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Xét các trường hợp $a = 1; a = 2; a = 3; a = 4$, từ (1) ta đều thấy $m : n$ (đpcm).

Câu 2. ĐK: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)^2 - 2x + 2\sqrt{2x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x-1})(x-3+\sqrt{2x-1}) = 0.$$

$$\bullet x-1-\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2x-1 \quad (x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (x \geq 1) \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\bullet x-3+\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (3-x)^2 \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right)$$

$\Leftrightarrow x_1 = 4 - \sqrt{6} < 3$. Vậy PT đã cho có hai nghiệm: $x_1 = 2 + \sqrt{2}, x_2 = 4 - \sqrt{6}$.

b) Từ PT thứ hai của hệ có: $x + y \neq 0, x - y \neq 0, x \neq 0$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 9(x+y) \\ (x-y)(x+y) = 3 \end{cases}$$

Chia theo vế hai PT của hệ, ta được:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = \frac{9(x+y)}{3} \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 3(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 5xy = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Đặt $t = \frac{y}{x}$ ($t \neq \pm 1$), ta có: $2t^2 + 5t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2}; t_2 = -2.$$

Với $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2y$. Thay vào PT thứ hai

của hệ, ta có: $(-2y)^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow 3y^2 = 3$

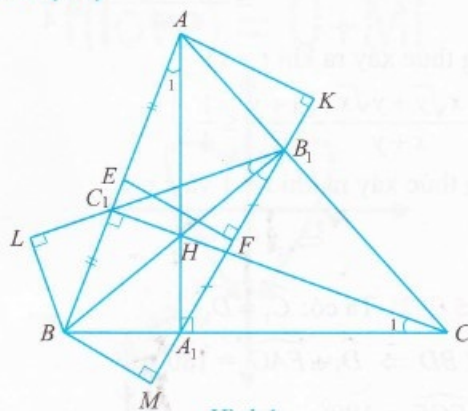
$$\Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 2.$$

Với $t = -2 \Leftrightarrow y = -2x$. Thay vào PT thứ hai của hệ, ta có: $x^2 - (-2x)^2 = 3$, PT này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$(x; y) = (2; -1); (x; y) = (-2; 1).$$

Câu 3. (h.1)



Hình 1

Ta có tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp, suy ra $\widehat{HB_1C_1} = \widehat{A_1}$ (1). Tứ giác CA_1HB_1 nội tiếp nên $\widehat{HB_1A_1} = \widehat{C_1}$ (2). Tứ giác AC_1A_1C nội tiếp nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra tia B_1H là tia phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$. Kẻ $BM \perp B_1A_1$ tại M ta có $B_1L = B_1M$ (4). Mặt khác, tứ giác AB_1A_1B nội tiếp đường tròn có đường kính AB , tâm là trung điểm E của AB . Gọi F là trung điểm của A_1B_1 thì $EF \perp A_1B_1$ (5). Mặt khác, $AK \parallel BM$ nên $ABMK$ là hình thang. Do đó $EF \parallel AK \parallel BM$, suy ra EF là đường trung bình của hình thang $ABMK$, do đó $FM = FK$ (6). Từ (5), (6) suy ra: $B_1M = A_1K$ (7). Từ (4), (7) suy ra $B_1L = A_1K$ (đpcm).

Câu 4. Ta có

$$\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x+y} \leq \left(\frac{x+y}{2} \right) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x+y} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 2 \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right] \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x+y}{2} \leq -\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có:

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4}$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, thì:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4} &= \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{-t^2 + 2t}{4} \\ &= \frac{-(t-1)^2 + 1}{4} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(đẳng thức xảy ra khi $t = 1$).

$$\text{Vậy } \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x+y} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$ và $x = y$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}.$$

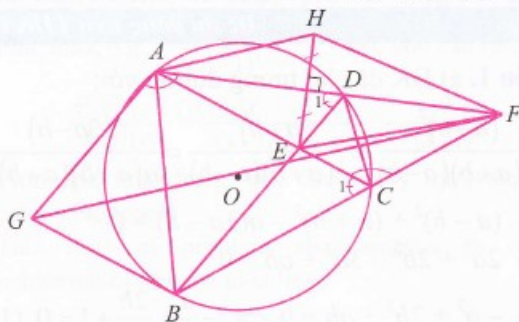
Câu 5 (h.2). Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

$$AG \parallel BD \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{FAG} = 180^\circ$$

$$\widehat{C_1} + \widehat{FCE} = 180^\circ$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra: } \widehat{FCE} = \widehat{FAG} \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \triangle FCD \sim \triangle FAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} = \frac{AB}{CD} \quad (4)$$



Hình 2

$$\triangle EAB \sim \triangle EDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4), (5) suy ra } \frac{EB}{EC} = \frac{FA}{FC} \Leftrightarrow \frac{FC}{EC} = \frac{FA}{EB}$$

$$\text{Mặt khác } EB = AG, \text{ nên } \frac{FC}{EC} = \frac{FA}{AG} \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có:

$$\triangle FCE \sim \triangle FAG \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{FG}{FE} = \frac{FA}{FC} \quad (6)$$

Từ (*) và (6) ta thu được

$$\frac{FG}{FD} = \frac{FG}{FE} \Leftrightarrow FD.FG = FB.FE \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có E và H đối xứng qua AD nên

$$\widehat{AEF} = \widehat{AHF} \quad (1)$$

$$\triangle FCE \sim \triangle FAG \text{ nên } \widehat{AGF} = \widehat{CEF} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{CEF} + \widehat{AEF} = 180^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AHF} + \widehat{AGF} = 180^\circ$ dẫn đến tứ giác $AHFG$ nội tiếp (đpcm).

Câu 6. Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt ($x; k \in \mathbb{N}^*$). Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt một miếng giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nên sau mỗi lần cắt, số miếng giấy tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng, do đó ta có: $x \equiv 1 \pmod{3}$ hoặc $x \equiv 1 \pmod{7}$. Vì $2016 \equiv 0 \pmod{3}$ và $2016 \equiv 0 \pmod{7}$ nên $x \neq 2016$.

Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VINH PHÚC NĂM HỌC 2015 - 2016

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 4}{x - 4} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} \right).$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình:

$$(x+1)(x-2)(x+6)(x-3) = 45x^2.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

$$x(x^2 + x + 1) = 4^y - 1.$$

Câu 3 (1 điểm). Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $3x + 2y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $H = x^2 - y^2 + |xy| + |x + y| - 2$.

Câu 4 (3 điểm). Cho hai điểm A, B phân biệt, lấy điểm C bất kì thuộc đoạn AB sao cho $0 < AC < \frac{3}{4}AB$; tia Cx vuông góc với AB tại C.

Trên tia Cx lấy hai điểm D, E phân biệt sao cho $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp

tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC cắt nhau tại điểm thứ hai H (H không trùng với C).

a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = \widehat{EBC}$ và ba điểm A, H, E thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của C để $HC \perp AD$.

c) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1 điểm). Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Chứng minh rằng:

$$x + 2y + z \geq (2-x)(2-y)(2-z).$$

Câu 6 (1 điểm). Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vinh Tường, Vinh Phúc) *Giới thiệu*

BAI ĐOC TRAO DOI VE SO CUC TRI CUA MOT HAM SO

NGUYỄN HUY ĐOAN (Hà Nội)

Trong sách giáo khoa (SGK) Giải tích 12 (cơ bản) có bài tập (bài 10 trang 46):

Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

b) Với giá trị nào của m thì (C_m)

Đáp số cho ở cuối sách là: a) $m \leq 0$: một cực đại; $m > 0$: hai cực đại và một cực tiểu.

Nhiều bạn băn khoăn rằng khi $m > 0$ thì đúng là hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu. Tuy nhiên hai giá trị cực đại lại bằng nhau nên hàm số chỉ có một cực đại và một cực tiểu mà thôi.

Về vấn đề này, tôi xin trao đổi như sau.

Theo định nghĩa trong SGK Giải tích 12 (cơ bản): "... Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số." (trang 14). Định nghĩa này hoàn toàn thống nhất với định nghĩa trong SGK Giải tích 12 nâng cao.

Theo định nghĩa đó, đáp số của câu a bài tập 10 nêu trên đúng ra phải là: khi $m > 0$ thì hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Cũng cần phải nói thêm rằng trên thực tế, do người ta thường quan tâm đến **số điểm cực trị** hơn là **số cực trị** của hàm số nên khi nói "số cực trị" thì đôi khi cũng được hiểu là "số điểm cực trị" mà trường hợp bài tập 10 trên đây là một ví dụ.

Bắt đầu từ kỳ thi THPT Quốc gia 2017, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quy định môn Toán thi trắc nghiệm. Khi đó một câu hỏi về **số cực trị** của hàm số sẽ là câu hỏi mà thí sinh rất khó chọn đáp án đúng với ý của người ra đề. Vì vậy tôi xin đề nghị các thầy cô giáo ra đề kiểm tra, nhất là ra đề thi (từ trung ương đến các địa phương) không nêu câu hỏi về **số cực trị** của hàm số; thay vào đó là hỏi về **số điểm cực trị** của hàm số để đề thi được rõ ràng.



MỘT HƯỚNG GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM VỀ CỰC TRỊ HÀM TRUNG PHƯƠNG

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT Tây Sơn, Bình Định)

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

- Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow a = b = 0$.
- Hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$ hoặc $a \neq 0, ab \geq 0$.
- Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

2. Đồ thị (C_1) của hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2) + b$

($k \neq 0, a > 0$) có ba điểm cực trị là $A(0; b)$, $B(-a; -ka^4 + b)$, $C(a; -ka^4 + b)$. Gọi H là trung điểm của BC , ta có

$$AH = |k|a^4, BC = 2a, AB = AC = \sqrt{a^2 + k^2a^8}.$$

3. Đồ thị (C_2) của hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2)$

($k \neq 0, a > 0$) có ba điểm cực trị là $A(0; 0)$, $B(-a; -ka^4)$, $C(a; -ka^4)$. Gọi H là trung điểm

của đoạn thẳng BC , ta có

$$AH = |k|a^4, BC = 2a, AB = AC = \sqrt{a^2 + k^2a^8}.$$

Nhận xét 1. Tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị (C_2) là ảnh tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị (C_1) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(0; -b)$.

Nhận xét 2. Nếu tính chất của $\triangle ABC$ chuyển đổi được về mối liên hệ giữa độ dài của các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH thì thay vì xét hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2) + b$ ($k \neq 0, a > 0$) ta chỉ cần xét hàm số $y = k(x^4 - 2a^2x^2)$ ($k \neq 0, a > 0$).

Nhận xét 3. Một số trường hợp thường gặp:

- $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Leftrightarrow AH = \frac{BC}{2}$.
- $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$.

- $\triangle ABC$ có diện tích bằng $q \Leftrightarrow AH \cdot BC = 2q$.

- $\triangle ABC$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R \Leftrightarrow 2R = \frac{AB^2}{AH}$.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán 1. Cho hàm số

$$y = (m-1)x^4 + (m^2 - 4m + 3)x^2 + 2017$$

(m là tham số).

Câu hỏi 1. Với giá trị nào của m thì hàm số không có điểm cực trị?

- A. $m = 1$ B. $m = 3$
C. $m = -3$ D. Không tồn tại m

Câu hỏi 2. Với giá trị nào của m thì hàm số có một điểm cực trị?

- A. $m = 1$ B. $m = 1, m \geq 3$
C. $m \geq 3$ D. $1 \neq m < 3$

Câu hỏi 3. Với giá trị nào của m thì hàm số có ba điểm cực trị?

- A. $m > 1$ B. $m > 3$
C. $m < 3$ D. $1 \neq m < 3$

Đáp án

Câu hỏi 1. A Câu hỏi 2. C Câu hỏi 3. D

Bài toán 2. Cho hàm số

$$y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$$

(m là tham số).

Câu hỏi 1. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông?

- A. $m = 2$ B. $m = 3$
C. $m = 4$ D. $m = 5$

Câu hỏi 2. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

- A. $m = \sqrt[3]{3} - 1$ B. $m = \sqrt[3]{3} + 1$
C. $m = \sqrt[3]{3}$ D. $m = \sqrt[3]{3} + 1$

Câu hỏi 3. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32 ?

- A. $m = 5$ B. $m = 3$
C. $m = 4$ D. $m = 2$

Câu hỏi 4. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 120° ?

- A. $m = \sqrt[3]{3} + 1$ B. $m = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + 1$ D. $m = 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Câu hỏi 5. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 30° ?

- A. $m = 1 + \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^2}$ B. $m = \frac{1 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$
C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + 1, m = 1 + \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$ D. $m = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$

Câu hỏi 6. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1 ?

- A. $m = 2$ B. $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
C. $m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ D. $m = 2, m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu hỏi 7. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có chu vi bằng $2 + \sqrt{8}$?

- A. $m = 2$ B. $m = 3$
C. $m = 4$ D. $m = \sqrt{2}$

Câu hỏi 8. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 ?

- A. $m = 2$ B. $m = 3$
C. $m = 4$ D. Không tồn tại m

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2$.

Đặt $a^2 = m-1$ ($a > 0$). Ta có $AH = a^4, BC = 2a, AB = AC = \sqrt{a^2 + a^8}$.

Câu hỏi 1. Ta có $BC = 2AH \Rightarrow a^4 = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow m = 2$. Chọn đáp án A.

Câu hỏi 2. Ta có $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^4 = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow m = \sqrt[3]{3} + 1$. Chọn đáp án B.

Câu hỏi 3. Ta có $AH \cdot BC = 64 \Rightarrow a^5 = 32 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow m = 5$. Chọn đáp án A.

Câu hỏi 4. Ta có $\tan 30^\circ = \frac{2AH}{BC} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Chọn đáp án C.

Câu hỏi 5.

• $\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

• $\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{BC}{2AH} = \frac{1}{a^3} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

$\Rightarrow a^2 = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} \Rightarrow m = 1 + \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C.

Câu hỏi 6. Ta có $AB^2 = 2 \cdot AH \Rightarrow a^2 + a^8 = 2a^4$

$\Rightarrow a^2 = 1, a^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow m = 2, m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án D.

Câu hỏi 7. Ta có $2AB + BC = 2 + \sqrt{8}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + a^8} + a = 1 + \sqrt{2}$. Hàm số $y = \sqrt{a^2 + a^8} + a$

tăng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow m = 2$.

Chọn đáp án A.

Câu hỏi 8. Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{a^5}{a + \sqrt{a^2 + a^8}} = \frac{\sqrt{1 + a^6} - 1}{a^2}$

$\Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow m = 3$. Chọn đáp án B.

Bài toán 3. Cho hàm số

$$y = -2x^4 + 3mx^2 + m^4 - 5m^2 + 1$$

(m là tham số).

Câu hỏi 1. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 2 ?

- A. $m = \frac{4}{3}$ B. $m = \frac{3}{4}$

- C. $m = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ D. $m = \frac{2}{3}$

Câu hỏi 2. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có độ dài cạnh bên bằng $\frac{3}{2}$ độ dài cạnh đáy ?

(Xem tiếp trang 27)

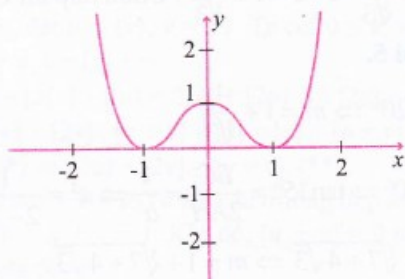
THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D sau:

- A. $y = x^3 - 3x + 2$ B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
C. $y = x^2 + 2x - 3$ D. $y = -2x^4 + 3x^2 - 1$



Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$, khi đó tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là:

- A. $\emptyset$ B. $(0; +\infty)$ C. $[-2; 2]$ D. $(-\infty; +\infty)$

Câu 3. Hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

- A. $(\frac{1}{2}; 1)$ B. $(0; \frac{1}{2})$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 4. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là:

- A. $m \leq 1$ B. $m \geq 3$ C. $-1 \leq m \leq 3$ D. $m < 3$

Câu 5. Cho hàm số $y = mx^3 + 2x^2 + (m+1)x - 2$.

Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho có 1 cực trị:

- A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $m = 0$ D. $m < 1$

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất:

- A. $y = -3x + 3$ B. $y = -3x - 3$ C. $y = -3x$ D. $y = 0$

Câu 7. Cho phương trình $-x^4 + 4x^2 - 3 - m = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có 4 nghiệm phân biệt:

- A. $1 < m < 2$ B. $-1 < m < 2$
C. $-3 < m < 1$ D. $1 < m < 3$

Câu 8. Số điểm có tọa độ là các số nguyên trên đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ là:

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 9. Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại:

- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 0$ D. $x = -2$

Câu 10. Cho họ đồ thị $(C_m): y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Tọa độ các điểm mà mọi đồ thị của họ (C_m) đi qua là:

- A. $(-1; 0)$ và $(1; 0)$ B. $(1; 0)$ và $(0; 1)$
C. $(-2; 1)$ và $(-2; 3)$ D. $(2; 1)$ và $(0; 1)$

Câu 11. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x+1}$ (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là:

- A. $3\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Câu 12. Biểu thức $A = 4^{\log_2 3}$ có giá trị là:

- A. 6 B. 9 C. 16 D. 2

Câu 13. Đạo hàm hàm số $y = 2^x \cdot 3^x$ bằng:

- A. $6^x \ln 6$ B. 6^x C. $2^x + 3^x$ D. $2^{x+1} + 3^{x+1}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = e^x(3 - x^2)$. Đạo hàm của hàm số triệt tiêu tại các điểm:

- A. $x = 1; x = -3$ B. $x = 1; x = 3$
C. $x = -1; x = 3$ D. $x = 0$

Câu 15. Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là:

- A. $\frac{11}{3}$ B. $\frac{25}{3}$ C. $\frac{29}{3}$ D. 87

Câu 16. Hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ có tập xác định là:

- A. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(2; 3)$

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$ là tập con của tập:

- A. $(-5; -2)$ B. $(-4; 0)$ C. $(1; 4)$ D. $(-3; 1)$

Câu 18. Cho $a = \log_{30} 3, b = \log_{30} 5$, khi đó $\log_{30} 1350$ tính theo a, b bằng:

- A. $2a + b + 1$ B. $2a - b + 1$
C. $a + 2b + 1$ D. $2a - b - 1$

Câu 19. Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a > 0$)

được kết quả là:

- A. a^4 B. a C. a^5 D. a^3

Câu 20. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Khi đó

A. $M = \frac{1}{e}; m = 0$ B. $M = e; m = 0$

C. $M = e; m = \frac{1}{e}$ D. $M = e; m = 1$

Câu 21. Số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 4^x + 1 \\ 2^{x+1} + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ là:}$$

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ trên tập số thực là:

A. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$ B. $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $-\sin x \cdot \cos x$ D. $-\frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 23. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ trên tập số thực thỏa mãn $F(-1) = 3$ là:

A. $x^4 - x^3 + 2x + 3$ B. $x^4 - x^3 + 2x$

C. $x^4 - x^3 + 2x + 4$ D. $x^4 - x^3 + 2x - 3$

Câu 24. Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} dx$ bằng:

A. 3 B. 7 C. -5 D. -3

Câu 25. Tích phân $\int_0^1 ((3x-1) - 2|x|) dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{11}{6}$ D. 0

Câu 26. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ bằng:

A. $1 - e^{\frac{\pi}{2}}$ B. $1 + e^{\frac{\pi}{2}}$ C. $\frac{1}{2}(1 + e^{\frac{\pi}{2}})$ D. $2(1 + e^{\frac{\pi}{2}})$

Câu 27. Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 3x - x^2$ và trục hoành quanh trục hoành bằng:

A. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt) B. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt)

C. $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt) D. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt)

Câu 28. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1, x = e, y = 0$ và $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ bằng:

A. $3 - \sqrt{e}$ B. $2 - \sqrt{e}$ C. $2 + \sqrt{e}$ D. $\sqrt{e} - 3$

Câu 29. Số nào trong các số sau là số thuần ảo:

A. $(\sqrt{2} + 2i) - (\sqrt{2} - i)$ B. $(2016 + i) + (2017 - i)$

C. $(3 - i) - (2 - i)$ D. $2017i^2$

Câu 30. Số phức liên hợp của số phức $z = (1 - i)(3 + 2i)$ là:

A. $\bar{z} = 1 + i$ B. $\bar{z} = 1 - i$ C. $\bar{z} = 5 - i$ D. $\bar{z} = 5 + i$

Câu 31. Đề số phức $z = a + (a - 1)i$ (a là số thực) có $|z| = 1$ thì:

A. $a = \frac{1}{2}$ B. $a = \frac{3}{2}$ C. $a = 0$ hoặc $a = 1$ D. $|a| = 1$

Câu 32. Số phức $z = (1 + 2i)^2(1 - i)$ có mô đun là:

A. $|z| = 5\sqrt{2}$ B. $|z| = 50$ C. $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $|z| = \frac{10}{3}$

Câu 33. Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $\frac{4i}{i-1}; (1-i)(1+2i); -2i^3$. Khi đó tam giác ABC :

A. Vuông tại C B. Vuông tại A
C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

Câu 34. Số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = (1 - 2i)^2$ là:

A. $-\frac{3}{4} + 2i$ B. $2 + \frac{3}{4}i$ C. $2 - \frac{3}{4}i$ D. $-\frac{3}{4} - 2i$

Câu 35. Diện tích hình tròn lớn của hình cầu là S . Một mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo một đường tròn có bán kính r , diện tích $\frac{1}{2}S$. Biết bán kính hình cầu là R , khi đó r bằng:

A. $\frac{R\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{R\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

Câu 36. Hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 37. Người ta bỏ vào một chiếc hộp hình trụ ba quả bóng tennis hình cầu, biết rằng đáy hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. 2 B. 5 C. 3 D. 1

Câu 38. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c thì đường chéo có độ lớn là:

A. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

B. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

D. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2c^2}$

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng:

A. 45°

B. 30°

C. 75°

D. 60°

Câu 40. Cho hình chóp tam giác đều đáy có cạnh bằng a , góc tạo bởi các mặt bên và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

D. $V = \frac{a^3}{8}$

Câu 41. Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh $6a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S của nón và cắt vòng tròn đáy tại hai điểm A và B . Biết số đo góc ASB bằng 30° , diện tích tam giác SAB bằng:

A. $18a^2$

B. $16a^2$

C. $9a^2$

D. $10a^2$

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB , diện tích thể tích cắt bởi (P) và hình chóp là

A. $\frac{4a^2\sqrt{10}}{25}$

B. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{15}$

C. $\frac{8a^2\sqrt{10}}{25}$

D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{15}$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a}(-1;1;0)$, $\vec{b}(1;1;0)$, $\vec{c}(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

D. $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng song song với hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases}$$

có vector pháp tuyến là:

A. $\vec{n} = (-5; 6; -7)$

B. $\vec{n} = (5; -6; 7)$

C. $\vec{n} = (-5; -6; 7)$

D. $\vec{n} = (-5; 6; 7)$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; -3)$ đi qua điểm $A(1; 0; 4)$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 53$

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 53$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 53$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 53$

Câu 46. Cho ba điểm $A(1;6;2)$, $B(5;1;3)$, $C(4;0;6)$, khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $14x + 13y + 9z + 110 = 0$

B. $14x + 13y - 9z - 110 = 0$

C. $14x - 13y + 9z - 110 = 0$

D. $14x + 13y + 9z - 110 = 0$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí

tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x=7 \\ y=-2m \\ z=1-2m \end{cases}$$
 là:

A. Chéo nhau

B. Cắt nhau

C. Song song

D. Trùng nhau

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(-3;0;4)$, $C(0;7;3)$. Khi đó $\cos(\vec{AB}, \vec{BC})$ bằng:

A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$

B. $-\frac{7\sqrt{118}}{177}$

C. $\frac{\sqrt{798}}{57}$

D. $-\frac{\sqrt{798}}{57}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là:

A. 11

B. $\frac{45}{7}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$, $D(2;2;1)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tọa độ

A. $(3;3;-3)$ B. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ D. $(3;3;3)$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

1C	2D	3C	4A	5C	6D	7A	8B
9D	10B	11B	12A	13C	14B	15D	16B
17A	18C	19C	20B	21D	22B	23A	24C
25C	26A	27D	28B	29A	30C	31B	32B
33D	34A	35B	36C	37D	38A	39D	40C
41B	42D	43A	44C	45A	46B	47C	48A
49A	50B						

Câu 1. $y' = \frac{3}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ ta chọn C

(phương án C).

Câu 14. Sau 2 năm bà A thu được cả vốn lẫn lãi là $100 \cdot (1+0,07)^2 = 114,49$ (triệu đồng). Lãi bà A thu được sau 2 năm là $114,49 - 100 = 14,49$ (triệu đồng).

Vậy ta chọn B.

Câu 15. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên SA là đường cao chung của hai khối chóp $S.ABM$ và $S.ABC$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AB \cdot AM}{AB \cdot BC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}$. Ta chọn D.

Câu 19. Gọi a, b, c (cm) là độ dài ba kích thước

của hình hộp chữ nhật. Ta có: $\begin{cases} ab=20 \\ bc=28 \\ ca=35 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 19600 \Rightarrow V = abc = 140.$$

Vậy ta chọn C.

Câu 20. Có: $f'(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow$ hàm

số đồng biến trên $[1; 4] \Rightarrow \max_{x \in [1; 4]} f(x) = f(4) = 32$.

Vậy ta chọn B.

Câu 21. Do $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i \Rightarrow \frac{z_1}{z_2}$

không là số thuần ảo. Ta chọn D.

Câu 22. • Vì $4x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

• Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\frac{1}{2}$ nên đường thẳng

$y = \pm \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị. Ta chọn B.

Câu 25. d có vector chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 3)$; (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 4; 6)$.

Ta có $\vec{n} = 2\vec{a} \Rightarrow d \perp (\alpha)$. Vậy ta chọn C.

Câu 28. • TXĐ $D = [0; 2]$.

• $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng xét dấu

x	0	1	2
y'	+	0	-

Dựa vào bảng trên ta chọn B.

Câu 29. $\log \sqrt[3]{0,18} = \frac{1}{3} \log \frac{18}{100} = \frac{1}{3} (\log 3^2 \cdot 2 - \log 10^2)$
 $= \frac{1}{3} (2 \log 3 + \log 2 - 2) = \frac{2b + a - 2}{3}$.

Vậy ta chọn A.

Câu 30. Có: $-\log_3^2 x + \log_3 x = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \log_3 x \right)^2 \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \max_{x \in (0; +\infty)} y = y(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$. Vậy ta chọn C.

Câu 31. Học sinh giải sai từ bước 2 bởi vì: Với điều

kiện $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$ thì PT đã cho tương đương với

$2 \log_3(x-2) + 2 \log_3|x-4| = 0$. Vậy ta chọn B.

Câu 33. Hình mũ gồm hai bộ phận:

• Bộ phận hình trụ với chiều cao $h = 30$ cm, bán kính

$R = \frac{35-2 \cdot 10}{2} = 7,5$ (cm). Hình trụ này có diện tích xung quanh là

$$S_1 = 2\pi Rh = 2\pi(7,5) \cdot 30 = 450\pi (\text{cm}^2).$$

• Bộ phận vành mũ có diện tích là

$$S_2 = \pi(17,5)^2 - \pi(7,5)^2 = 250\pi (\text{cm}^2)$$

• Tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ là

$$S = S_1 + S_2 + \pi(7,5)^2 = 756,25\pi (\text{cm}^2). \text{ Ta chọn D.}$$

Câu 34. Ta có:

$$I = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{14}{3}, J = \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{và } K = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1.$$

Vậy ta chọn A.

Câu 35. • Gọi $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức thì $z + 2i = x + (y+2)i$

• Ta có $|z + 2i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = 1$. Vậy ta chọn B.

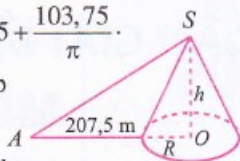
Câu 38. Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái tháp. Theo giả thiết $2\pi R = 207,5$

$$\Rightarrow R = \frac{103,75}{\pi} \Rightarrow OA = 207,5 + \frac{103,75}{\pi}.$$

Vì bóng của cậu học sinh gấp 2 lần chiều cao thật nên

$$OA = 2h \Leftrightarrow 207,5 + \frac{103,75}{\pi} = 2h$$

$$\Leftrightarrow h = 103,75 + \frac{51,875}{\pi}. \text{ Vậy ta chọn A.}$$



Câu 40. Gọi cạnh hình lập phương có độ dài a .

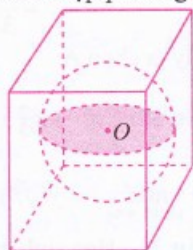
Theo giả thiết ta suy ra được bán kính của quả bóng bàn là $R = \frac{a}{2}$. Thể tích V_1, V_2 của hình lập phương và

quả bóng bàn lần lượt là

$$V_1 = a^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Thể tích của phần không gian

$$\text{cần tính } V = V_1 - V_2 = \frac{6 - \pi}{6} a^3.$$



Vậy ta chọn C.

Câu 41. Học sinh giải sai từ bước 2 bởi vì hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0$. Sau khi tìm ra được 2 giá trị $m = -1, m = -3$, ta thử lại chỉ thấy $m = -3$ thỏa mãn bài toán. Vậy ta chọn B.

Câu 42. PT hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là $\frac{x+1}{x-1} = 2x+m$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - (1+m) = 0 \quad (x \neq 1)$$

Ta thấy $\Delta = m^2 + 2m + 17 > 0, \forall m$. Vậy ta chọn B.

$$\text{Câu 43. } y' = 2x(2kx^2 + 4k - 5) = 0$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k(5-4k) > 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < \frac{5}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1.$$

Vậy ta chọn A.

$$\text{Câu 44. } y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2017m \right).$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -2017m, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

Vì $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ nên từ (*) suy ra

$$-2017m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2017}. \text{ Ta chọn C.}$$

Câu 45. Cách 1. Đặt $AM = x$ ($0 < x < 24$), $d = CM + DM$.

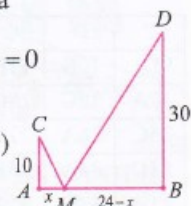
$$\text{Ta có: } CM = \sqrt{100 + x^2}, DM = \sqrt{(24-x)^2 + 30^2}$$

$$d = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{(24-x)^2 + 30^2} \text{ và}$$

$$d' = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} - \frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2 + 30^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} = \frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2 + 30^2}} \quad (*)$$

Bình phương hai vế PT(*) và



$$\text{thu gọn ta có } x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \in (0; 24) \\ x = -12 \notin (0; 24) \end{cases}$$

Từ đó ta chọn A.

Cách 2. Trong hệ trục tọa độ Oxy , đặt $A \equiv O$,

$C(0; 10)$, $D(24; 30)$, $C'(0; -10)$ và $M(x; 0)$

($0 < x < 24$). PT đường thẳng DC' : $5x - 3y - 30 = 0$.

Do $CM + MD = C'M + MD \geq C'D = 8\sqrt{34}$. Cho nên $CM + MD$ nhỏ nhất khi và chỉ $M = DC' \cap Ox$, từ đó có $M(6; 0)$. Vậy ta chọn A.

Câu 46. Gọi $G(1; 0; 2)$ là trọng tâm của tam giác

ABC . Ta có, $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG$.

Ycbt $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P) . Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y + z + 3 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow M(-1; 2; 0). \text{ Vậy ta chọn B.}$$

Câu 49. Tham số t ứng với giao điểm của d và (S) là nghiệm của PT

$$(2+t)^2 + (1+mt)^2 + 4t^2 - 2(2+t) + 6(1+mt) + 8t + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(4m + 5)t + 20 = 0.$$

$$\bullet \text{ Biệt số } \Delta' = -4m^2 + 40m - 75$$

$$\bullet d \text{ cắt } (S) \text{ tại hai điểm phân biệt thì } \Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Vậy ta chọn A.

$$\text{Câu 50. Có: } f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{g(0) - f(0)}{g^2(0)} = 1 \text{ (do } f'(0) = g'(0) \neq 0).$$

Suy ra PT $t^2 - t + f(0) = 0$ có nghiệm $t = g(0)$.

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4f(0) \geq 0 \Rightarrow f(0) \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy ta chọn B}$$

PHẠM TRỌNG THU

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

ĐẶNG THANH HẢI
TRẦN TUYẾT THANH

(Học viện PK - KQ, Sơn Tây, Hà Nội)

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số phương pháp giải phương trình và hệ phương trình không mẫu mực. Đây là dạng bài toán khó, thường được xuất hiện trong các câu phân loại của đề thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng những năm gần đây và trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp.

I. Phương pháp lượng giác hoá

Bài toán 1. Giải phương trình:

$$\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right] = 5x.$$

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $x = \cos t$ với $0 \leq t \leq \pi$, khi đó ta có:

$$\sqrt{(1+x)^3} = \sqrt{(1+\cos t)^3} = \sqrt{8\cos^6 \frac{t}{2}} = 2\sqrt{2} \cos^3 \frac{t}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^3} = \sqrt{(1-\cos t)^3} = \sqrt{8\sin^6 \frac{t}{2}} = 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2};$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \quad (\text{do } 0 \leq t \leq \pi).$$

Thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{2(1+\sin t)} \left[2\sqrt{2} \cos^3 \frac{t}{2} - 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2} \right] = 5 \cos t$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \times$$

$$\left(\cos^2 \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} \right) = 5 \cos t$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos t \left(1 + \frac{1}{2} \sin t \right) = 5 \cos t \Leftrightarrow \cos t (2 \sin t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t = 0 \\ x = \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x=0, x=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 128x^2(4x^2-1)(8x^2-1)^2 + 1 - 2x = 0 & (1) \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

Lời giải. Do $-\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow -1 < 2x < 0$.

Đặt $2x = \cos t$ với $\frac{\pi}{2} < t < \pi$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 32 \cos^2 t (\cos^2 t - 1) (2 \cos^2 t - 1)^2 + 1 - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -32 \cos^2 t \sin^2 t \cos^2 2t + 1 - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 \sin^2 t \cos^2 2t + 1 - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 4t + 1 - \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos 8t - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 8t = \cos t \Rightarrow \begin{cases} 8t = t + 2k\pi \\ 8t = -t + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2k\pi}{7} \\ t = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

($k \in \mathbb{Z}$)

• Với $\begin{cases} t = \frac{2k\pi}{7} \\ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{2k\pi}{7} < \pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} < k < \frac{7}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4\pi}{7} \\ t = \frac{6\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \cos \frac{4\pi}{7} \\ 2x = \cos \frac{6\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{7} \\ x = \frac{1}{2} \cos \frac{6\pi}{7} \end{cases}$$

• Với $\begin{cases} t = \frac{2k\pi}{9} \\ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{2k\pi}{9} < \pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{4} < k < \frac{9}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2\pi}{3} \\ t = \frac{8\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \\ 2x = \cos \frac{8\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \cos \frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm:

$$x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{7}, x = \frac{1}{2} \cos \frac{6\pi}{7}, x = \frac{1}{2} \cos \frac{8\pi}{9}.$$

II. Phương pháp hàm số

Bài toán 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \\ \pi < x, y < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$\frac{e^x}{e^y} = \frac{\sin x}{\sin y} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{e^x} = \frac{\sin y}{e^y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sin t}{e^t}$ với $t \in \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^{2t}} = \frac{\cos t - \sin t}{e^t} = \frac{\sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{e^t}.$$

$$\text{Do } \pi < t < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < t + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên khoảng } \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ v = \sqrt{x^4-x^2+1} \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = x^4 + 2.$$

Khi đó từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$10uv = 3(u^2 + v^2) \Rightarrow 3u^2 - 10uv + 3v^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 3v \\ u = \frac{v}{3} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } u = 3v \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{x^4-x^2+1}$$

$$\Rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 8 = 0 : \text{ PT vô nghiệm.}$$

$$\bullet \text{ Nếu } u = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 3u \Rightarrow \sqrt{x^4-x^2+1} = 3\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi^2 < x^2 < \frac{25\pi^2}{16} \\ x^2 = 5 \pm \sqrt{33} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi < x < \frac{5\pi}{4} \\ x^2 = 5 + \sqrt{33} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{5 + \sqrt{33}}.$$

Vậy hệ có nghiệm $x = y = \sqrt{5 + \sqrt{33}}$.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ta có

$$f'(t) = 3t^2 + 3 + \frac{2t-1}{t^2-t+1} = 3t^2 + 1 + \frac{2t^2+1}{t^2-t+1} > 0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành:

$$x = y = z$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$.

Ta có

$$g'(x) = 3x^2 + 2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 3x^2 + \frac{2x^2+1}{x^2-x+1} > 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta có $g(1) = 0$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

III. Phương pháp đánh giá bất đẳng thức

Bài toán 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho hệ phương trình sau có đúng 2017 nghiệm.

$$\begin{cases} \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2[1 + \sin^2(2a - 2y)] \\ \log_2(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \frac{1}{2}\log_2 y + 3\log_8(2x) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x > 0; y > 0; a - y > 0$.

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} &= 1, \cos 3x + 1, \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x} = 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác hiển nhiên ta có:

$$2[1 + \sin^2(2a - 2y)] \geq 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình thứ nhất của hệ xảy ra khi và chỉ khi:

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2[1 + \sin^2(2a - 2y)] = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin(2a - 2y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} \log_2(a - y) + 1 + \frac{1}{2} \log_2 y &= \frac{1}{2} \log_2 y + 1 + \log_2 x \\ \Leftrightarrow \log_2(a - y) &= \log_2 x \Leftrightarrow a - y = x \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3), (4) và kết hợp với ĐK suy ra hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x > 0; y > 0; a - y > 0 \\ \cos 3x = 1 \\ \sin(2a - 2y) = 0 \\ x = a - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; y > 0; a - y > 0 \\ x = \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ a - y = \frac{m\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ x = a - y \end{cases} \quad (5)$$

Từ ba điều kiện cuối của (5) ta có:

$$x = \frac{2k\pi}{3} = \frac{m\pi}{2} > 0 \Rightarrow x = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Từ đó suy ra: } (5) \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ y = a - x \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có đúng 2017 nghiệm khi và chỉ khi ứng với mỗi $x = 2n\pi \quad (n = \overline{1, 2017})$, $y = a - x > 0$; còn ứng

với $x = 2n\pi \quad (n = 2018)$ thì $a - x \leq 0$.

Do vậy ta có: $2.2017\pi < a \leq 2.2018\pi$

$\Leftrightarrow 4034\pi < a \leq 4036\pi$ là các giá trị cần tìm.

Bài toán 6. Tìm nghiệm thực không âm của phương trình: $\log_4(1 + 4^x) - \log_9(9^x + 2^x) = 0$.

Lời giải. Ta chứng minh khi $x \geq 0$ thì:

$$\log_4(1 + 4^x) > \log_9(9^x + 2^x) \quad (1)$$

Thật vậy ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_4(1 + 4^x) > \frac{\log_4(9^x + 2^x)}{\log_4 9}$$

$$\Leftrightarrow \log_4(1 + 4^x) \cdot \log_4 9 > \log_4(9^x + 2^x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(1 + 4^x)^{\log_4 9} > \log_4(9^x + 2^x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + 4^x)^{\log_4 9} > 9^x + 2^x \quad (2)$$

Ta có nhận xét sau: Nếu $a > 0$, $\alpha > 1$ thì:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^\alpha &> 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{(a+1)^\alpha}{a^\alpha} > \frac{a+1}{a} \\ \Rightarrow (a+1)^\alpha &> a^\alpha + a^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Do $\begin{cases} 4^x \geq 4^0 = 1 > 0 \\ \log_4 9 > \log_4 4 = 1 \end{cases}$ nên áp dụng bất đẳng

thức (3) ta có: $(1 + 4^x)^{\log_4 9} > (4^x)^{\log_4 9} + (4^x)^{\log_4 9 - 1}$

$$= (4^{\log_4 9})^x + \frac{(4^{\log_4 9})^x}{4^x} = 9^x + \left(\frac{9}{4}\right)^x \geq 9^x + 2^x$$

BĐT (2) được chứng minh. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm không âm.

Để luyện tập mời các bạn giải các bài toán sau:

1. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2$$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho phương trình:

$$4^{-|x-k|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}[2|x-k| + 2] = 0$$

có ba nghiệm phân biệt.

3. Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 4^{|x^2-8x+12|-\log_4 7} = 7^{2y-1} \\ |y-3| - 3|y| - 2(y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$4. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0 \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0 \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x \end{cases}$$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/474 (Lớp 6). Chứng minh rằng không tồn tại hai số tự nhiên a và b lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau sao cho $a^{2007} + b^{2007}$ chia hết cho $a^{2006} + b^{2006}$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/474 (Lớp 7). Tìm các số nguyên tố a, b, c, d, e sao cho $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = abcde$.

NGUYỄN ĐỨC TÂN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/474. Cho $f(x) = a^{2016}x^2 + bx + a^{2016}c - 1$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Giả sử phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $A = \frac{f^2(1) + f^2(-1)}{2}$ là một hợp số.

ĐOÀN CHÍ NHON
(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/474. Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp, D là tiếp điểm của (I) và BC . Đường thẳng qua D vuông góc với AI theo thứ tự cắt IB, IC tại P, Q . Chứng minh rằng B, C, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc AD .

NGUYỄN THANH HỒNG
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T5/474. Tìm tất cả các số thực k sao cho với mọi a, b, c không âm ta luôn có bất đẳng thức sau

$$[a + k(b - c)][b + k(c - a)][c + k(a - b)] \leq abc.$$

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toản, TP. Tuy Hòa, Phú Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/474. Với x là số thực thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$f = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 4x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}.$$

NGUYỄN VĂN NHỎ
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài T7/474. Phương trình $\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm?

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/474. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Một mặt phẳng (P) thay đổi đi qua trọng tâm của tứ diện cắt các cạnh SA, SB, SC của tứ diện lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng $\frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2} \geq \frac{4}{R^2}$, với

R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.
CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/474. Tìm phần nguyên của biểu thức

$$T = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{2016}{2015}.$$

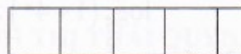
NGÔ QUANG MẠNH
(SV lớp 09KT- Kiến trúc công trình, ĐH Chu Văn An, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/474. Một số nguyên dương được gọi là “số HV 2015” nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2015 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Xét $(a_n), n=1, 2, 3, \dots$ là dãy tăng nghiêm ngặt các số nguyên dương sao cho dãy $\left(\frac{a_n}{n}\right), n=1, 2, 3, \dots$ bị chặn. Chứng minh rằng dãy số $(a_n), n=1, 2, 3, \dots$ chứa vô hạn số HV 2015.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/474. Cho n ô vuông 1×1 sắp xếp thành hình chữ nhật $1 \times n$. Mỗi ô được điền bởi số 0 hoặc số 1. Một cách điền gọi là “thỏa mãn”



nếu như ba ô liên tiếp nhau bất kì đều không chứa ba số giống nhau. Với mỗi $n \geq 3$, gọi a_n là số cách điền “thỏa mãn”. Tính a_n .

PHẠM XUÂN KHOA

(Lớp ĐKTD-K50- Trung tâm đào tạo tài năng,
ĐH Bách Khoa Hà Nội)

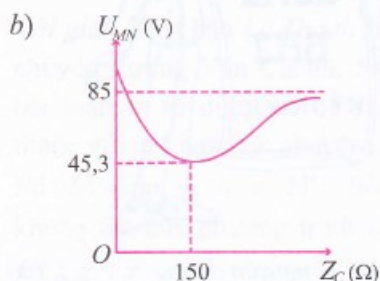
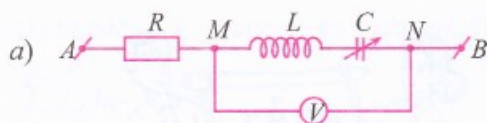
Bài T12/474. Cho tam giác ABC , Chứng minh rằng

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \geq \sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ

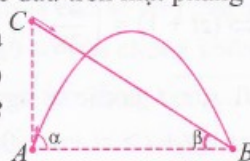
(SV K56A1T1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/474. Cho đoạn mạch AB như hình a. $u_{AB} = U_0 \cos 100\pi t$ (V). Điện trở thuần $R = 70 \Omega$, cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở thuần r . Tụ điện có điện dung C thay đổi từ $0 \div \infty$. Điện áp U_{MN} phụ thuộc vào dung kháng Z_C như đồ thị hình b. Tính giá trị của L, r .



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (Hà Nội)

Bài L2/474. Hai vật đồng thời xuất phát ở A và C , vật ở A được ném xiên góc α , vật ở C bắt đầu trượt xuống không vận tốc đầu trên mặt phẳng nghiêng góc β . Bỏ qua mọi ma sát, xác định cặp góc (α, β) để 2 vật đến B cùng lúc và cùng tốc độ?



NGÔ AN HÒA KỲ (TP. Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/474 (For 6th grade). Prove that there do not exist two coprime integers a and b which are greater than 1 and satisfy the fact that $a^{2007} + b^{2007}$ is divisible by $a^{2006} + b^{2006}$.

Problem T2/474 (For 7th grade). Find prime numbers a, b, c, d, e such that

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = abcde.$$

Problem T3/474. Given $f(x) = a^{2016}x^2 + bx + + a^{2016}c - 1$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Suppose that the equation $f(x) = -2$ has two positive integral solutions.

Prove that $A = \frac{f^2(1) + f^2(-1)}{2}$ is a composite number.

Problem T4/474. Given a triangle ABC and (I) is its incircle. Let D be the point of tangency

between (I) and BC . The line which goes through D and is perpendicular to AI intersects IB and IC respectively at P and Q . Prove that all B, C, P , and Q lie on a circle whose center is on AD .

Problem T5/474. Find all the real numbers k such that for all non-negative numbers a, b , and c we always have the following inequality

$$[a + k(b - c)][b + k(c - a)][c + k(a - b)] \leq abc$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/474. Find the minimum value of the expression

$$f = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 4x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}.$$

Problem T7/474. How many solutions does the following equation have $\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x$?

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/470. Tìm các số nguyên dương x, y, z, t sao cho $38(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 49(yzt + y + t)$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra

$$38(zt + 1) = (49 - 38x)(yzt + y + t) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (zt + 1) = \left(\frac{49}{38} - x\right)(yzt + y + t).$$

Vì y, z, t là các số nguyên dương nên $yzt + y + t > zt + 1 > 0$ (*), do đó

$$0 < \frac{49}{38} - x < 1 \Leftrightarrow \frac{11}{38} < x < \frac{49}{38}, \text{ suy ra } x = 1.$$

Thay vào (1) được: $38(zt + 1) = 11(yzt + y + t)$

$$\Leftrightarrow (38 - 11y)(zt + 1) = 11t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{38}{11} - y\right)(zt + 1) = t \quad (2)$$

Vì $zt + 1 > t > 0$ (**) nên $0 < \frac{38}{11} - y < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{11} < y < \frac{38}{11}, \text{ suy ra } y = 3. \text{ Thay vào (2)}$$

được $5(zt + 1) = 11t \Leftrightarrow t(11 - 5z) = 5$, suy ra $z = 2$ và $t = 5$. Bài toán có một nghiệm là

$$(x; y; z; t) = (1; 3; 2; 5). \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Một số bạn biến đổi đến dạng

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t}}}$$

trên là duy nhất, tuy nhiên các bạn chưa chứng minh tính duy nhất đó (!). Để chứng minh phải sử dụng các bất đẳng thức (*), (**) nêu trên.

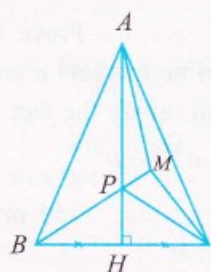
2) Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** Nguyễn Ngân Chi, 6C, THCS Lý Thái Tổ, Q. Cầu Giấy;

Nguyễn Hữu Nam, 6E, THCS Ngọc Hòa, Chương Mỹ; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Thành, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

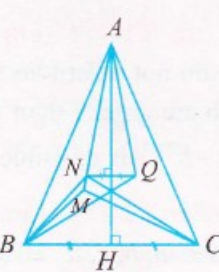
VIỆT HẢI

Bài T2/470. Cho tam giác ABC cân tại A . Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$, điểm N nằm giữa A và M . Chứng minh rằng $\widehat{ANB} > \widehat{ANC}$.

Lời giải. Trước tiên với giả thiết $\widehat{AMB} > \widehat{AMC}$, ta sẽ chỉ ra M , và do đó cả N đều nằm trong ΔHAB (h.2) trong đó H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC . Giả sử M nằm trong ΔHAC (h.1). Gọi P là giao điểm của BM với AH thì $MB = MP + PB = MP + PC > MC$, suy ra $\widehat{MBC} < \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{ABM} > \widehat{ACM}$, mà $\widehat{BAM} > \widehat{HAB} = \widehat{HAC} > \widehat{CAM}$, nên $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} > \widehat{ACM} + \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{AMB} < \widehat{AMC}$ (trái với giả thiết). Vậy M và N đều nằm trong ΔHAB .



Hình 1



Hình 2

Tiếp theo, gọi Q là điểm đối xứng với N qua AH (h.2), thì $AN = AQ$ và $\widehat{NAH} = \widehat{QAH}$

$\Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{CAN}$, kết hợp với $AB = AC$ ta có $\Delta NAC = \Delta QAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{AQB}$.

Vì N nằm trong ΔQAB , nên $\widehat{AQB} < \widehat{ANB}$.

Do đó $\widehat{ANB} > \widehat{ANC}$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** Nguyễn

Thị Linh Đan, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Lý Tuấn Kiệt, Văn Quang Tuệ, Phan Đình Tâm, Nguyễn Trung Phú, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Hoàng Kim Ánh, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** Võ Linh Kiều, 7B, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa.

LÊ MAI

Bài T3/470. Tìm số k lớn nhất sao cho tồn tại k số nguyên dương không vượt quá 100 có tính chất là không có hai số nào trong chúng mà số này là lũy thừa của số kia.

Lời giải. Đáp số: $k = 91$.

1) Tập hợp 91 số nguyên dương $\{1, 11, 12, \dots, 100\}$ có tính chất là không có 2 số nào trong chúng là lũy thừa của nhau, vì $11^2 > 100$.

2) Bây giờ ta chứng minh rằng trong một tập hợp A gồm 92 số nguyên dương tùy ý không vượt quá 100 luôn có 2 số là lũy thừa của nhau. Thật vậy, xét các tập hợp rời nhau:

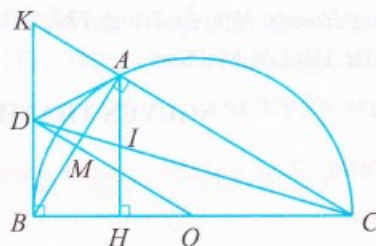
$A_1 = \{2, 32\}$, $A_2 = \{3, 27\}$, $A_3 = \{4, 16\}$,
 $A_4 = \{5, 25\}$, $A_5 = \{6, 36\}$, $A_6 = \{7, 49\}$,
 $A_7 = \{8, 64\}$, $A_8 = \{9, 81\}$, $A_9 = \{10, 100\}$.

Giả sử A không chứa 2 số nào là lũy thừa của nhau, thì trong mỗi tập hợp trên, A chỉ chứa nhiều lắm 1 phần tử của nó, và do đó $|A| \leq 100 - 9 = 91$, mâu thuẫn với giả thiết $|A| \geq 92$.

➤ **Nhận xét.** Bài này nhiều bạn gửi lời giải, nhưng đa số giải sai hoặc không chỉ ra 91 số thỏa mãn đầu bài. Chỉ có 4 bạn sau giải chính xác là: **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 9A5 THCS Cầu Giấy; Nguyễn Hà Anh, Trần Khánh Vân, Nguyễn Đặng Nhật Minh, THCS Archimedes, Trung Yên, Yên Hòa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/470. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp nửa đường tròn tâm O đường kính BC . Hai tiếp tuyến vẽ từ A và B với nửa đường tròn cắt nhau tại D . Chứng minh rằng DC đi qua trung điểm I của đường cao AH của tam giác ABC .



Lời giải. Kéo dài CA cắt BD tại K , M là giao điểm của OD với AB . Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $DA = DB$ và DO là trung trực của AB . Suy ra M là trung điểm của AB và $DM \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB).

Vậy DM là đường trung bình của tam giác ABK , nên D là trung điểm của KB . Áp dụng định lý Thales cho $\triangle CDK$ và $\triangle CDB$ ta có

$$\frac{AI}{KD} = \frac{HI}{BD} \left(= \frac{CI}{CD} \right). \text{ Suy ra } \frac{AI}{HI} = \frac{KD}{BD} = 1, \text{ do}$$

đó I là trung điểm của AH . Ta có điều phải chứng minh. $\square$

➤ **Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đề nghị cho lời giải đúng. Có thể lấy L là giao điểm của AD với tiếp tuyến tại C của (O) , rồi sử dụng định lý Thales cho hình thang $BCLD$, hoặc có thể chứng minh bài toán trực tiếp bằng các tam giác đồng dạng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Hương, Phạm Minh Đăng, Phạm Thị Kiều Trang, Dương Tiến Đạt, Đậu Thị Thu Trang, Phạm Duy Khánh, Nguyễn Trúc Quỳnh, Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Ánh Linh, Lê Phương Hạnh, Nguyễn Đình Huy, Lê Đức Thái, 9A2, THCS Yên Lạc;

Phú Thọ: Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 9A5, THCS Cầu Giấy; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 9A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Thanh Hoá:** Trần Quốc Phương, 9A, THCS Thị Trấn, Thường Xuân; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đặng Diệu Huyền, 9C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Quảng Trị:** Nguyễn Thực Anh, 9A, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, Thái Bá Bảo, Phan Thị Huyền Anh, 9C, Lê Đức Toàn, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Long:** Lê Nữ Hoàng Kim, 9/1, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Bình Thuận:** Huỳnh Vũ Khôi Nguyên, 9G, Trường chuyên Trần Hưng Đạo; **Sơn La:**

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/470. Tìm nghiệm nguyên dương của
phương trình: $xyz = x + 2y + 3z - 5$ (1)

Lời giải. Cách 1.

• Với $x = 1$ thì (1) có dạng $yz = 2y + 3z - 4$
 $\Leftrightarrow (y - 3)(z - 2) = 2$.
Do $y, z \in \mathbb{N}^*$ nên $y - 3 \geq -2, z - 2 \geq -1$ và $y - 3, z - 2$ là số nguyên. Ta có bảng sau:

$y - 3$	1	2	-2
$z - 2$	2	1	-1
y	4	5	1
z	4	3	1

Do đó (x, y, z) là: $(1, 4, 4); (1, 5, 3); (1, 1, 1)$.

• Với $x \geq 2$ thì từ (1) suy ra

$$2y + 3z = x(yz - 1) + 5 \geq 2(yz - 1) + 5$$

$$\Leftrightarrow (1 - z)(2y - 3) \geq 0 \quad (2)$$

- Với $z = 1$ thì (1) có dạng $xy = x + 2y - 2$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Với $z \geq 2$ thì $1 - z < 0$, từ (2) suy ra $2y - 3 \leq 0$,
nên $y = 1$ (do $y \in \mathbb{N}^*$). Thay $y = 1$ vào (1)

$$xz = x + 3z - 3 \Leftrightarrow (z - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } z \geq 2).$$

Vậy các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của
phương trình (1) là: $(m, 1, 1); (1, 4, 4); (1, 5, 3);$
 $(2, n, 1); (3, 1, p)$ với m, n, p là các số nguyên
dương tùy ý.

Cách 2. Đặt $x = 1 + a; y = 1 + b; z = 1 + c$
($a, b, c \in \mathbb{N}$). Thay vào (1) và biến đổi dẫn đến

$$abc + ab + bc + ca = b + 2c \quad (3)$$

• Với $a = 0$ thì (3) có dạng $bc = b + 2c$

$$\Leftrightarrow (b - 2)(c - 1) = 2.$$

Do $b, c \in \mathbb{N}$ nên $b - 2 \geq -2, c - 1 \geq -1$ và
 $b - 1, c - 1$ là số nguyên. Ta có bảng sau:

$b - 2$	1	2	-2
$c - 1$	2	1	-1
b	3	4	0
c	3	2	0

Do đó $(x, y, z) = (1, 4, 4); (1, 5, 3); (1, 1, 1)$.

• Với $a = 1$ thì (3) có dạng

$$bc + b + bc + c = b + 2c \Leftrightarrow c(2b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \text{ (do } 2b - 1 \neq 0).$$

Do đó $(x, y, z) = (2, 1 + b, 1)$.

• Với $a \geq 2$ thì từ (3) suy ra: $2bc + 2b + 2c + bc$
 $\leq b + 2c \Leftrightarrow b(1 + 3c) \leq 0 \Leftrightarrow b = 0$ (do $1 + 3c \neq 0$).

$$\text{Thay } b = 0 \text{ vào (3) ta được } ac = 2c \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Do đó (x, y, z) là $(1 + a, 1, 1), (3, 1, 1 + c)$.

Vậy các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của
phương trình (1) là $(1 + a, 1, 1); (1, 4, 4); (1, 5, 3);$
 $(2, 1 + b, 1); (3, 1, 1 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. $\square$

➤ Nhận xét. Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải
theo 2 cách trên. Một số bạn nhầm lẫn cho
rằng vai trò x, y, z là như nhau nên đã giả sử $x \leq y \leq z$
và tìm còn thiếu nghiệm.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Trần
Khánh Vân, 8A2, Nguyễn Hà Anh, 8A1, THCS
Archimedes, Đinh Hoàng Nhật Minh, 9A5, THCS Cầu
Giấy; **Vĩnh Phúc:** Trần Minh Huy, 8A, THCS Lý Tự
Trọng, Bình Xuyên; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn,
9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/470. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn:
 $|a + b| + |b + c| + |c + a| = 8$. Tìm giá trị lớn nhất,
giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải. Giá trị nhỏ nhất. Với x, y, z là các số
thực bất kì ta có

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2$$

$$= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Do đó $3P = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$

$$\geq (|a|+|b|+|c|)^2 = \left(\frac{|a|+|b|}{2} + \frac{|b|+|c|}{2} + \frac{|c|+|a|}{2} \right)^2$$

$$\geq \left(\frac{|a+b|+|b+c|+|c+a|}{2} \right)^2 = 16. \text{ Suy ra } P \geq \frac{16}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |a|=|b|=|c|$, các số a, b, c cùng dấu $\Leftrightarrow a=b=c=\pm\frac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{16}{3}$.

Giá trị lớn nhất. Áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có $8=|a+b|+|b+c|+|c+a|$
 $\geq |a+b+b+c-c-a|=2|b| \Rightarrow 4 \geq |b|.$

Tương tự $4 \geq |c|, 4 \geq |a|$. Do đó

$$P = a^2 + b^2 + c^2 \leq 4^2 \cdot 3 = 48.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$|a|=|b|=|c|=4, |a+b|=|b+c|=|c+a|=8$$

$\Leftrightarrow (a, b, c)$ là hoán vị hoặc của ba số $(4, 4, -4)$ hoặc của ba số $(4, -4, -4)$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 48. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán có giá trị tuyệt đối trên thuộc dạng cơ bản. Các học sinh sau đây có lời giải tốt:

Sơn La: Trần Hoàng Đạt, 11A1, THPT Chuyên Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Chung Hoàng, Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Đàm Quang Nhật, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Nam Định:** Vũ Hoàng Long, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Phạm Trần Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Linh, Đoàn Minh Quân, Trần Hậu Đức Thắng, Bùi Bá Vũ, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Lê Đình Hải, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** Tống Ngọc Chung, 11T1, Lê Cẩm Huyền, 11 Lý, THPT chuyên Quốc Học Huế, **Vĩnh Long:** Phan Gia Anh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình

Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Cà Mau:** Hoàng Công Minh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/470. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x=2^{1-y} \\ y=2^{1-x} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x > 0, y > 0$. Ta chứng minh hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$. Giả sử trái lại $(x; y) \neq (1; 1)$ là một nghiệm nào đó của hệ. Từ các phương trình của hệ ta thấy nếu $x > 1$ thì $y < 1$ và ngược lại. Do đó, không mất tính tổng quát giả sử $x > 1$. Khi đó $0 < y < 1$ và ta có $1 < x < 2$. Từ hai phương trình của hệ ta suy ra: $x \cdot 2^{1-x} = y \cdot 2^{1-y}$ hay $f(x) = f(y)$ với $f(t) = t \cdot 2^{1-t}$. Xét hàm $f(t)$ trên đoạn $[0; 2]$, ta có: $f'(t) = 2^{1-t}(1-t \ln 2)$. Hàm số tăng trên khoảng $\left(0; \frac{1}{\ln 2}\right)$ và giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{\ln 2}; 2\right)$. Ngoài ra $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$. Từ đó suy ra $0 < y < 1 < x < 2$ nên khi đó $f(y) < 1 < f(x)$: mâu thuẫn. Vậy điều giả sử trên là sai, nghĩa là hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$. $\square$

► **Nhận xét.** Đa số các bạn đều chứng minh tính duy nhất của nghiệm bằng cách xét tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số. Tuy nhiên do cách đặt hàm số không khéo nên lời giải của một số bạn còn dài. Một số bạn còn bị nhầm khi tính đạo hàm của hàm mũ. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Bắc Ninh: Nghiêm Chi, A1-K10-YP2, THPT Yên Phong Số 2. **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Huy, 11B2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi. **Thừa Thiên Huế:** Phan Trần Hương, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 12T1; Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An. **Đồng Tháp:** Nguyễn Lê Anh Minh, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

Cà Mau: Hoàng Công Minh, 11 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

NHƯ HOÀNG

Bài T8/470. Cho tam giác ABC không có góc tù.

Chứng minh bất đẳng thức

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$$

$$> 2\sqrt{\cos A \cos B \cos C} \quad (1)$$

Lời giải. Trường hợp 1. Tam giác ABC vuông.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \cos B \cdot \cos C > 0$ (bất đẳng thức

này đúng, vì $\widehat{B}, \widehat{C}$ là các góc nhọn).

Trường hợp 2. Tam giác ABC nhọn. Ta thấy

$$\frac{\tan C}{\tan A + \tan B} = \frac{\cos A \cdot \cos B \cdot \sin C}{\sin(A+B) \cdot \cos C} = \frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{\cos A \cdot \cos C}{\cos B} = \frac{\tan B}{\tan A + \tan C};$$

$$\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C}.$$

Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ ($x, y, z > 0$).

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos A \cdot \cos C}{\cos B}} + \sqrt{\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A}} > 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{x+z}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số

$$\text{dương, ta có: } \sqrt{\frac{x}{y+z}} = \frac{2x}{2\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2x}{x+y+z}.$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\frac{y}{x+z}} \geq \frac{2y}{x+y+z}; \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z}.$$

$$\text{Từ đó } \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{x+z}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$; $y = x = z$;

$z = x = y \Leftrightarrow x = y = z = 0$ (trái với điều kiện).

Tóm lại bất đẳng thức (2) đúng, suy ra bất đẳng thức (1) đúng (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hưng Yên: Đào Quang Huân, 11A1, THPT Dương

Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** Trần Minh

Hiếu, 11T2, Đoàn Thị Nhài, 12 Toán 1, THPT

chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Đặng Quang

Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Danh

Thắng, 11A5, THPT Lương Đức Bằng; **Nghệ An:**

Nguyễn Đức Bảo, 11A1, THPT chuyên Phan Bội

Châu, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH

Vinh, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Trung

Kiên, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế,

Quảng Nam: Nguyễn Huy Hải, 11/1, THPT chuyên

Nguyễn Bình Khiêm; **Vĩnh Long:** Trịnh Thế

Chương, Nguyễn Khiêm, 11T1, THPT chuyên

Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Cà Mau:**

Trần Quốc Việt, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc

Hiền; Kevin Soto Palacios

(email:virgozevolution_kevinzhito@gmail.com).

HỒ QUANG VINH

Bài T9/470. Cho n số thực không âm

$x_i, i=1, 2, \dots, n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n} \right) < \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{1+x_n^2} \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Cách 1. (Sử

dụng bất đẳng thức Chebyshev). Không mất

tính tổng quát, từ giả thiết có thể giả sử

$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$. Khi đó, với $i < j$ thì

$\frac{x_i}{x_i^2+1} \geq \frac{x_j}{x_j^2+1} \Leftrightarrow (x_i - x_j)(1 - x_i x_j) \geq 0$, hiển nhiên.

Vậy nên $\frac{x_1}{x_1^2+1} \geq \frac{x_2}{x_2^2+1} \geq \dots \geq \frac{x_n}{x_n^2+1}$. Áp dụng

bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy cùng

chiều, ta được

$$n \left(x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2+1} + x_2 \cdot \frac{x_2}{x_2^2+1} + \dots + x_n \cdot \frac{x_n}{x_n^2+1} \right)$$

$$\geq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k^2+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k^2+1} \quad (2)$$

Mặt khác, vì $0 \leq x_k \leq 1$ nên $\frac{x_k}{x_k^2+1} \geq \frac{x_k}{x_k+1}$,

$k=1, 2, \dots, n$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$x_k \in \{0, 1\}$. Suy ra $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k^2+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k+1} \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra (1). Dấu đẳng thức xảy ra khi có 1 phần tử $x_k = 1$, phần tử còn lại bằng 0, điều này dẫn đến dấu đẳng thức không xảy ra ở (1).

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + 1} = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k + 1} \leq n - \frac{n^2}{n + \sum_{k=1}^n x_k} = n - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (*)$$

$$\text{và } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{x_k^2 + 1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{x_k + 1} \geq \frac{(\sum_{k=1}^n x_k)^2}{n + \sum_{k=1}^n x_k} = \frac{1}{n+1} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra đpcm. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán về chứng minh bất đẳng thức có thể giải bằng nhiều cách. Ngoài hai cách trình bày ở trên, nhiều bạn còn sử dụng phương pháp quy nạp, phương pháp khảo sát hàm số,... cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bến Tre: Nguyễn Minh Anh, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Hà Nam:** Ngô Nhật Long, 12T₁, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T₂, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phú Thọ; **Hà Tĩnh:** Trần Hậu Đức Thắng, 10T₁, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Long, 10CT, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Lâm Đồng:** Nguyễn Quốc Trung, 11T₁, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nghệ An:** Cao Hữu Đạt, Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T₂, Đoàn Thị Nhài, 12T₁, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, 11A1, THPT Mộc Ly, Mộc Châu; **Thừa Thiên Huế:** Tống Ngọc Chung, Phan Trần Hương, 11T₁, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** Phạm Gia Anh, Lê Đức Minh, 12T₁, THPT chuyên Vĩnh Long; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** Phạm Tiến Trường, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/147. Một số tự nhiên được gọi là k -success nếu tổng các chữ số của nó bằng k . Gọi

Q_{ik} là các số k -success có i chữ số. Tính tổng

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ik}.$$

Lời giải. (Của bạn Lê Thành Lâm, 10T₁, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên). Để giải bài toán ta sử dụng bổ đề sau đây (khá quen thuộc với các bạn học chuyên).

Bổ đề: Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + \dots + x_n = m$ là C_{m+n-1}^{n-1} .

$$\text{Nếu } m > 9n \text{ ta có } \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^{9n} \sum_{i=1}^n a_{ik}.$$

Xét trường hợp $m \leq 9n$:

Các số thỏa mãn điều kiện là các số có i chữ số ($1 \leq i \leq n$) và tổng các chữ số của chúng không vượt quá m . Tức là các số có dạng $x_1 x_2 \dots x_n$ ($0 \leq x_i \leq 9, 1 \leq i \leq n$) sao cho $1 \leq x_1 + \dots + x_n \leq m$.

Do $1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq m$ nên $\exists x_{n+1} \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq x_{n+1} \leq m-1$)

sao cho $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = m$. Đặt $A = \{(x_1, \dots, x_n) \mid$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = m; 0 \leq x_i \leq 9; i = 1, \dots, n; x_{n+1} \geq 0\}$$

Vậy $\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ik} = |A| - 1$ (ta bỏ đi trường hợp $x_1 = \dots = x_n = 0, x_{n+1} = m$).

Đặt $S = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = m, x_i \geq 0\}$.

$A_j = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = m; x_i \geq 0; x_j \geq 10\}$

($j = \overline{1, n}$) và $q = \left\lceil \frac{m}{10} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{m}{9} \right\rceil \leq n$.

Ta có $\bigcup_{i=1}^k A_i = \emptyset, \forall k \geq q+1$. Ta có

$$S = A \cup \bigcup_{i=1}^n A_i, S \cap A_i = \emptyset (i = 1, \dots, n).$$

$$\text{Vậy } |A| = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = |S| + \sum_{i=1}^q (-1)^i \left| \sum_{j=1}^i A_j \right| \quad (1)$$

Theo bổ đề $|S| = C_{m+n}^n$.

Bây giờ ta cần tính $\sum_{x_i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left| \bigcup_{i=1}^k A_{x_i} \right|$ ($k = \overline{1, q}$)

với mỗi $k \leq q$.

Ta thấy $\sum_{x_i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left| \bigcup_{i=1}^k A_{x_i} \right| = C_n^k \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right|$.

Để tính $\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right|$ ta đặt $y_i = x_i - 10$. Ta có

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \{(y_1, \dots, y_k, x_k, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^k y_i + \sum_{j=k+1}^{n+1} x_j = m\}$$

Vậy theo bổ đề $\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = C_{(m-10k)+n}^k$.

$$\text{Vậy } \sum_{x_i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left| \bigcup_{i=1}^k A_{x_i} \right| = C_n^k \cdot C_{(m-10k)+n}^k.$$

$$\text{Thành thử } \sum_{k=1}^m \sum_{i=k}^n a_{ik} = |A| - 1 = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| - 1$$

$$= C_{m+n}^n + \sum_{i=1}^q (-1)^i C_n^i C_{(m-10i)+n}^i - 1$$

$$= \sum_{i=0}^q (-1)^i C_n^i C_{(m-10i)+n}^i - 1.$$

Kết hợp hai trường hợp $m > 9n$ và $m \leq 9n$ ta có

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=k}^n a_{ik} = \sum_{i=0}^q (-1)^i C_n^i C_{(m-10i)+n}^i - 1$$

$$\text{Ở đó } q = \left\lfloor \frac{\min\{m, 9n\}}{10} \right\rfloor. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Đây là một bài toán tổ hợp rất khó nên chỉ có duy nhất bạn Lâm tham gia giải.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/470. Tìm tất cả các bộ ba $(x; y; p)$ gồm hai số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^p = 1$ (1).

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Ta thấy:

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 0, p$ là số nguyên tố tùy ý.

+ Với $y = 0 \Rightarrow y = 0, p$ là số nguyên tố tùy ý.

+ Với $x, y > 0$, xét hai trường hợp:

1) Khi $p = 2$ thì (1) có dạng $2^x - 2 = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$, suy ra $(y-1)(y+1)$ chia hết cho

2. Do $y-1$ và $y+1$ cùng tính chẵn lẻ nên $(y-1)(y+1)$ chia hết cho 4, kéo theo $2^x - 2$ chia hết cho 4. Do đó $x = 1$ và suy ra $y = 1$. Bộ $(x; y; p) = (1, 1, 2)$ thỏa mãn (1).

2) Khi $p > 2$ thì p là số nguyên tố lẻ và $y > 1$.

Khi đó, viết (1) dưới dạng

$$p^x = y^p + 1 = (y+1)T, T = y^{p-1} - y^{p-2} + \dots - y + 1 > 1(2).$$

Từ (2) suy ra $(y+1)$ chia hết cho p .

i) Nếu $y+1 = p$ thì từ (1) suy ra $p^x - (p-1)^p = 1$ (3).

• Ta thấy $x = 1$ thì $(p-1)^p = p-1$, không xảy ra.

• Xét $x = 2$ thì từ (1) suy ra $p^2 = (p-1)^p + 1 \Leftrightarrow (p-1)^{p-2} \cdot (p-1) + 2$ nên 2 chia hết cho $p-1$. Do đó $p = 3$ và $y = 2$.

Ta thấy bộ $(x; y; p) = (2; 2; 3)$ thỏa mãn.

Xét $x \geq 3$ thì từ (3) suy ra $(p-1)^p + 1$ chia hết cho p^3 . Điều này không xảy ra vì

$$(p-1)^p + 1 = p^p - C_p^1 p^{p-1} + \dots + C_p^{p-3} p^3 - C_p^2 p^2 + p^2$$

chỉ chia hết cho p^2 .

ii) Nếu $\begin{cases} y+1 = p^k \\ T = p^{x-k}, x > k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì do $y \equiv -1 \pmod{p^k}$

nên $y^{p-1} - y^{p-2} + \dots - y + 1 \equiv p \pmod{p^k}$.

Suy ra $p^{x-k} = p < y+1$, vô lí vì $p^{x-k} > y+1$.

Vậy các bộ số $(x; y; p)$ thỏa mãn (1) là $(1; 1; 2), (2; 2; 3)$ và $(0; 0; p)$ với p là số nguyên tố tùy ý. $\square$

➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn đã biết sử dụng định lí nhỏ Fermat, bổ đề LTE để lời giải gọn gàng hơn.

Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn:

Hà Nội: Nguyễn Duy Khương, 11T, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam. **Nam Định:** Nguyễn Minh

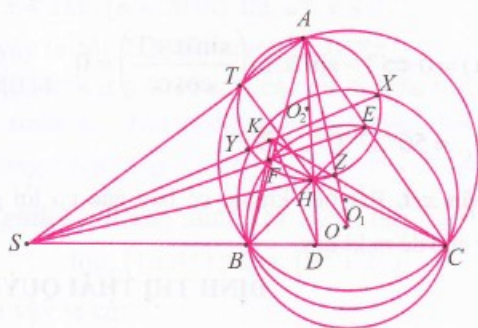
Hùng, 10T1, Đoàn Thị Nhài, 12T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn. **Nghệ An:** Trần Đức Mạnh, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh. **Hà Tĩnh:** Bùi Bá Vũ, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Minh Hải, Phan Trần Hương, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Quảng Nam:** Nguyễn Lê Thanh Hằng, 10/1, Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Cà Mau:** Hoàng Công Minh, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/469. Cho tam giác ABC , H là một điểm trong tam giác sao cho $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$. Một đường tròn đi qua B và C cắt đường tròn đường kính AH tại hai điểm phân biệt X, Y . AH cắt BC tại D . Gọi K là chân đường vuông góc vẽ từ D xuống XY . Chứng minh rằng $\widehat{BKD} = \widehat{CKD}$.

Lời giải. **Bổ đề 1.** Nếu bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) và AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại P, Q, R thì O là trực tâm tam giác PQR .

Bổ đề 2. Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) và AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại P, Q, R . Nếu K là giao điểm của OQ và PR thì bốn điểm A, D, P, K cùng thuộc một đường tròn. (Bạn đọc tự chứng minh) Trờ lại giải bài toán T12.



Bỏ qua trường hợp đơn giản: $AB = AC$.

Kí hiệu $E = BH \cap AC; F = CH \cap AB$.

Gọi $(O), (O_1), (O_2)$ theo thứ tự là đường tròn chứa các bộ bốn điểm $(B, C, E, F); (B, C, Y, Z); (A, H, Y, Z); S = BC \cap EF; Z = SH \cap AO$;

$T = SA \cap OH$. Vì $\widehat{ABE} = \widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{ACF}$ nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, áp dụng bổ đề 1 cho bốn điểm B, C, E, F , suy ra $\widehat{AZH} = \widehat{ATH} = 90^\circ$.

Vậy Z, T cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Áp dụng bổ đề 2 cho bốn điểm B, C, E, F , suy ra bốn điểm A, B, C, T cùng thuộc một đường tròn.

Vậy $\mathcal{P}_{S/(O_1)} = \overline{SA.ST} = \overline{SB.SC} = \mathcal{P}_{S/(O_2)}$

Điều đó có nghĩa là S thuộc XY (1)

Vì AD, BE, CF đồng quy nên

$$K(BCDS) = (BCDS) = -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), chú ý rằng $KD \perp KS$, suy ra

$$\widehat{BKD} = \widehat{CKD}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, 11A1, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T2, THPT chuyên KHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** Vũ Thị Diệp, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 11A1, Nguyễn Hoàng Quốc Khánh, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Nghệ An:** Đặng Duy Bảo Khánh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Quốc Khánh, Phan Thế Công, Nguyễn Quốc Khánh, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** Lê Viết Thanh Long, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** Nguyễn Phạm Nam Dương, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP Hội An; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 12T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/470. Đặt điện áp $u = 400\cos 100\pi t$ (V) vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm cuộn cảm thuần có độ tự cảm L , điện trở R và tụ điện có điện dung C thay đổi được.

Khi $C = C_1 = \frac{10^{-3}}{8\pi} F$ hoặc $C = \frac{2}{3} C_1$ thì công

suất của đoạn mạch có cùng giá trị.

Khi $C = C_2 = \frac{10^{-3}}{15\pi} F$ hoặc $C = 0,5C_2$ thì điện áp

hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện có cùng giá trị.

Khi nối một ampe kế xoay chiều (lí tưởng) với hai đầu tụ điện thì số chỉ của ampe kế là bao nhiêu?

Lời giải. Khi $Z_{C_1} = 80\Omega, Z_{C_2} = 120\Omega$ thì công suất của mạch có cùng giá trị nên

$$Z_{C_1} + Z_{C_2} = 2Z_L \Rightarrow Z_L = 100\Omega,$$

Khi $Z_{C_3} = 150\Omega, Z_{C_4} = 300\Omega$ thì điện áp hiệu dụng hai đầu tụ điện có cùng giá trị nên:

$$\frac{1}{Z_{C_3}} + \frac{1}{Z_{C_4}} = \frac{1}{Z_{C_0}} \Rightarrow Z_{C_0} = 200\Omega.$$

Lại có $Z_{C_0} = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L} \Rightarrow R = 100\Omega.$

Khi C bị nối tắt bằng ampe kế lí tưởng thì số chỉ của nó bằng: $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = 2(A).$ $\square$

► **Nhận xét,** Các bạn có lời giải đúng: **Hưng Yên:** Nguyễn Việt Đức, 11A9, Triệu Ninh Ngân, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bạc Liêu:** Đỗ Văn Dương, 12CA, THPT Trần Văn Bảy.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/470. Trên một khu đất rộng và bằng phẳng, một em bé ném đi một viên sỏi. Xác định góc ném để đoạn đường viên sỏi bay đi trong không khí là lớn nhất. Bỏ qua mọi ma sát, chiều cao em bé không đáng kể.

Lời giải. Phương trình chuyển động của viên sỏi:

$$\begin{cases} x = (v \cos \alpha)t \\ y = (v \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = v \cos \alpha dt \\ dy = (v \sin \alpha - gt) dt \end{cases}$$

Thời gian để viên sỏi đạt $h_{\max}$ là: $t = \frac{v \sin \alpha}{g},$

Suy ra chiều dài quỹ đạo viên sỏi:

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot \int_0^{\frac{v \sin \alpha}{g}} \sqrt{(v \cos \alpha)^2 + (v \sin \alpha - gt)^2} dt \\ &\Rightarrow L = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} \int_0^{\tan \alpha} \sqrt{1+k^2} dk \\ &= \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{g} \cdot \left[k\sqrt{1+k^2} + \ln|k + \sqrt{1+k^2}| \right]_0^{\tan \alpha} \end{aligned}$$

$$= 2v \cos \alpha \int_0^{\frac{v \sin \alpha}{g}} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha - \frac{gt}{v \cos \alpha} \right)^2} dt.$$

$$\text{Đổi biến: } k = \left(\tan \alpha - \frac{gt}{v \cos \alpha} \right)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{-v \cos \alpha}{g} dk$$

$$\Rightarrow L = \frac{v^2}{g} \left[\sin \alpha + \cos^2 \alpha \times \ln \left(\frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \right) \right]$$

Đổi cận:

t	0	$v \sin \alpha / g$
k	$\tan \alpha$	0

Lấy đạo hàm của hàm L theo α , ta được:

$$L'(\alpha) = \frac{v^2}{g} 2 \cos \alpha \cdot \left[1 - \sin \alpha \cdot \ln \left(\frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \right) \right]$$

$$L'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin \alpha \cdot \ln \left(\frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_c \approx 56^\circ 27' 57". \quad \square$$

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/474. Given a tetrahedron $SABC$ such that SA , SB , and SC are mutually perpendicular. A moving plane (P) which contains the centroid of the given tetrahedron intersects SA , SB , and SC respectively at A_1 , B_1 , and C_1 . Prove that $\frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2} \geq \frac{4}{R^2}$, where

R is the radius of the circumscribed sphere of the tetrahedron $SABC$.

Problem T9/474. Find the integral part of the following number $T = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{2016}{2015}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/474. A positive integer is called a "HV2015" number if in its decimal representation there are 2015 consecutive digits 9.

Let $(a_n), n=1,2,3,\dots$ be a strictly increasing sequence of positive integers such that the sequence $\left(\frac{a_n}{n}\right), n=1,2,3,\dots$ is bounded.

Prove that there are infinitely many "HV2015" numbers in the given sequence $(a_n), n=1,2,3,\dots$

Problem T11/474. Given a grid of the size $1 \times n$ ($n > 2$). Now we fill in each square with 0 or 1. A way to fill the grid is called "good" if any three consecutive squares do not contain the same number.

Let a_n be the number of "good" ways to fill the grid. Compute a_n .

Problem T12/474. Given a triangle ABC . Prove that

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \geq \sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}}.$$

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

MỘT HƯỚNG ... (Tiếp theo trang 7)

A. $m = \sqrt[3]{2}$

B. $m = \frac{4\sqrt[3]{2}}{3}$

C. $m = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

D. $m = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = -2 \left(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \right)$.

Đặt $a^2 = \frac{3m}{4}$ ($a > 0$). có

$$AH = 2a^4, BC = 2a, AB = AC = \sqrt{a^2 + 4a^8}.$$

Câu hỏi 1. Ta có $AH \cdot BC = 4 \Rightarrow a^5 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$. Chọn đáp án A.

Câu hỏi 2. Ta có $AB = \frac{3}{2}BC \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4a^8} = 3a \Rightarrow a^2 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt[3]{2}}{3}$. Chọn đáp án B.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông?

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 3$

2. Cho hàm số $y = -x^4 - 2(m-1)x^2 + m + 1$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32?

A. $m = 4$ B. $m = -4$
C. $m = \pm 4$ D. Đáp án khác.

3. Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên?

A. $m = \frac{5}{3}$ B. $m = -\frac{5}{3}$ C. $m = -\frac{4}{3}$ D. $m = -1$

4. Cho hàm số

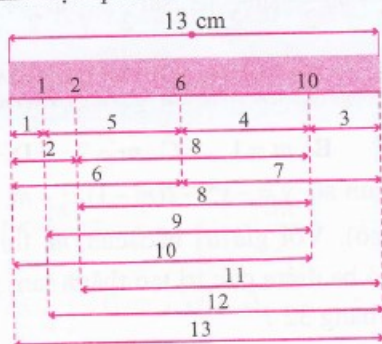
$$y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$$

(m là tham số). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$ B. $m = \frac{1}{2 - \sqrt[3]{3}}$
C. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ D. $m = -\sqrt[3]{3}$

Hẳn là các bạn đã từng gặp bài toán sau đây khi còn là học sinh tiểu học: “Một chiếc kẻ dài 13 cm không có vạch khắc (điểm chia) trên thước. Ta phải phân bố 4 điểm chia vào bên trong chiếc thước đó như thế nào để với chiếc thước có vạch chia đó ta có thể đo được các đoạn thẳng có chiều dài lần lượt là 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm, 13 cm?”.

Từ nay về sau ta sẽ gọi các điểm chia như vậy là các điểm chia trong. Lời giải của bài toán được minh họa qua hình 1.



Hình 1

Bài toán đã được giải xong, nhưng câu hỏi được đặt ra “Liệu 4 đã phải là số điểm chia ít nhất chưa?”. Câu trả lời là đúng.

Thật vậy giả sử 3 là số điểm chia trong của chiếc thước dài 13cm, hiển nhiên hai đầu mút của chiếc thước cũng là các điểm chia. Cùng với 3 điểm chia trong và 2 đầu mút của thước ta có 5 điểm chia. Với 2 điểm chia bất kỳ ta xác định được 1 đoạn thẳng có độ dài là số tự nhiên ≤ 13 cm. Tổng số các đoạn thẳng xác định bởi 5 điểm chia sẽ là: $\frac{(5-1) \cdot 5}{2} = 10$ đoạn thẳng. Như

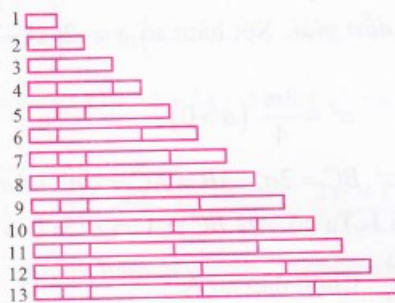
vậy nếu bên trong chiếc thước dài 13 cm chỉ có 3 điểm chia thì với chiếc thước ấy ta chỉ đo được tối đa 10 độ dài khác nhau, nhưng số đoạn cần đo lại là 13 đoạn. Bởi thế với 3 điểm chia trong chiếc thước dài 13 cm là không thỏa mãn

điều kiện của bài toán. Và 4 đúng là số chia trong ít nhất.

Xét bài toán tổng quát: “Số điểm chia trong ít nhất đối với chiếc thước kẻ có độ dài n cm là bao nhiêu để với chiếc thước có các điểm chia trong ấy ta có thể đo được tất cả các đoạn thẳng có độ dài từ 1 cm đến n cm?”

Bài toán tổng quát này được A.Savin đề xuất trên Tạp chí Kvant của nước Nga từ năm 1976, và trong suốt 40 năm qua vẫn chưa có lời giải.

Ta xét lời giải bài toán đối với một số giá trị n nhỏ (≤ 13). Đối với chiếc thước có độ dài 1 cm thì không cần có điểm chia trong nào cả. Đối với chiếc thước có độ dài 2 cm và 3 cm thì chỉ cần có 1 điểm chia trong là đủ. Với chiếc thước có độ dài 4, 5, 6 cm thì chỉ cần có 3 điểm chia trong là đủ. Với chiếc thước có độ dài 10, 11, 12, 13 cm thì cần phải có ít nhất 4 điểm chia trong. Toàn bộ các kết quả này được minh họa qua hình 2.



Hình 2

Với những giá trị n càng lớn thì bài toán càng trở nên khó khăn hơn. Để giải chúng rõ ràng là cần phải có một phương pháp tổng quát nào đó? Sau đây chúng ta sẽ tìm cách đánh giá số điểm chia trong (xác định cận trên và cận dưới).

Giả sử trên chiếc thước có độ dài n cm ta đặt k điểm chia trong. Tính cả 2 đầu mút trái và phải của chiếc thước ta có $(k+2)$ điểm chia. Số đoạn thẳng được tạo thành bởi $(k+2)$ điểm chia đó sẽ

bằng $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Bởi vì theo điều kiện của bài toán thì ta cần phải nhận được n đoạn có độ dài khác nhau, nhưng trong $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ đoạn đó có thể có một số đoạn có độ dài bằng nhau, vì thế ta cần phải có bất đẳng thức:

$$n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(k + \frac{3 + \sqrt{8n+1}}{2}\right) \left(k - \frac{-3 + \sqrt{8n+1}}{2}\right) \geq 0$$

Từ đó suy ra: $k \geq \frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}$ (1)

Như vậy trên chiếc thước có chiều dài n (cm) ta cần phải có ít nhất là $\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}$ điểm chia trong để thỏa mãn điều kiện của bài toán (nếu số trong biểu thức là không nguyên thì ta phải lấy số nguyên lớn hơn và gần nhất với nó, ví dụ giá trị của biểu thức là 6,25 chẳng hạn thì ta lấy 7). Tiếp theo ta sẽ phân bố k điểm chia trong trên thước như sau: Đầu tiên bắt đầu từ đầu mút bên trái của thước ta đặt liên tiếp từ trái sang phải m đoạn thẳng bằng nhau mà mỗi đoạn có chiều dài 1 cm ($m \leq k$), tiếp theo từ điểm chia trong thứ m trên thước ta đặt liên tiếp từ trái sang phải $(k-m)$ đoạn thẳng bằng nhau trong đó mỗi đoạn thẳng ấy có chiều dài $(m+1)$ (cm). Bây giờ ta xét chiếc thước kẻ có k điểm chia trong như trên và đoạn thẳng cuối (có một đầu mút trùng với đầu mút bên phải của thước và đầu mút còn lại chính là điểm chia trong thứ k mà ta vừa thực hiện) cũng có chiều dài $(m+1)$ (cm). Tính chiều dài L của chiếc thước đó theo m và k , ta có:

$$L = m + (k-m)(m+1) + (m+1)$$

$$= -m^2 + m(k+1) + (k+1)$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng trên chiếc thước có độ dài L (cm) với k điểm chia trong được phân bố như trên thì điều kiện của bài toán luôn được thỏa mãn.

Bây giờ ta viết L dưới dạng:

$$L = \frac{(k+1)(k+5)}{4} - \left(m - \frac{k+1}{2}\right)^2$$

Ta thấy rằng L sẽ lớn nhất khi biểu thức $\left(m - \frac{k+1}{2}\right)^2$ bé nhất. Và biểu thức ấy sẽ bé

nhất khi $m = \frac{k+1}{2}$ nếu k là số lẻ hoặc khi

$m = \frac{k+2}{2}$ nếu k là số chẵn. Từ đó suy ra:

$$L \geq \frac{(k+1)(k+5)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{k^2 + 6k + 4}{5}$$

Đặt $L = n$, ta có: $n \geq \frac{k^2 + 6k + 4}{5}$ hay là:

$$k^2 + 6k + 4 - 5n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (k + \sqrt{4n+5} + 3)(k - \sqrt{4n+5} + 3) \leq 0$$

Ta nhận được: $k \leq \sqrt{4n+5} - 3$ (2)

Nếu giá trị biểu thức vế phải của (2) là không nguyên thì ta phải lấy số nguyên lớn hơn và gần nhất với nó, ví dụ giá trị của biểu thức là 6,05 chẳng hạn thì ta lấy số 7.

Ký hiệu $k(n)$ là số điểm chia trong bé nhất trên thước có chiều dài n (cm) thỏa mãn điều kiện của bài toán, thì từ (1) và (2) ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2} \leq k(n) \leq \sqrt{4n+5} - 3 \quad (3)$$

Một số kết quả với n nhỏ được liệt kê ở dưới đây:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k \geq$	0	1	1	2	2	2	3	3	3
k	0	1	1	2	2	2	3	3	3
$k \leq$	0	1	1	2	2	3	3	3	4

n	10	11	12	13	14	15
$k \geq$	3	4	4	4	4	4
k	4	4	4	4	5	5
$k \leq$	4	4	5	5	5	5

Việc tính giá trị đúng của $k(n)$ đến nay vẫn chưa có. Liệu ta có thể làm "chặt hơn" các bất đẳng thức trong (3) hay không? Rất mong được các bạn trẻ yêu toán tiếp sức.



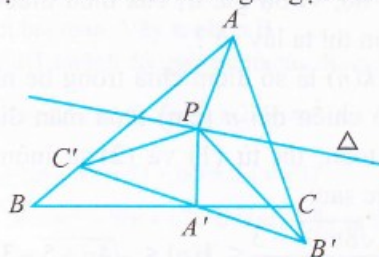
ĐỊNH LÝ GOORMAGHTIGH VÀ SỰ MỞ RỘNG CỦA NÓ

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Năm 1930, René Goormaghtigh, một kỹ sư điện người Pháp, đã đề xuất một định lý thú vị mang tên ông.

Định lý 1. Cho tam giác ABC và điểm P khác A, B, C . Đường thẳng Δ đi qua P . Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho các đường thẳng PA', PB', PC' theo thứ tự là ảnh đối xứng của các đường thẳng PA, PB, PC qua Δ . Khi đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Có nhiều cách chứng minh định lý 1, tuy nhiên cách chứng minh sau đây không những không phụ thuộc hình vẽ mà còn ngắn gọn nhất (h.1).



Hình 1

Chú ý rằng phép đối xứng trục là một toán tử số kép và A', B', C' theo thứ tự thuộc BC, CA, AB , ta có $P(AA'B'C') = P(A'ABC) = A(A'PBC) = A(A'PC'B') = A(PA'B'C')$.

Vậy ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Tác giả của phép chứng minh trên là bạn Phạm Nam Khánh, học sinh Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam.

Năm 2014, Đào Thanh Oai, lại một kỹ sư điện, và Trần Quang Hùng, giáo viên Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, gần như cùng một lúc đã mở rộng định lý 1 như sau [2], [3].

Định lý 2. Cho tam giác ABC và điểm P khác A, B, C . Các đường thẳng Δ và Δ' cắt nhau tại P . Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho

$$(PA, PA', \Delta, \Delta') = (PB, PB', \Delta, \Delta') = (PC, PC', \Delta, \Delta') = -1.$$

Khi đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Khi $\Delta \perp \Delta'$, định lý 2 chính là định lý 1.

Cũng năm 2014, định lý 2 đã được chứng minh bởi Trần Hoàng Sơn, học sinh Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội [3].

Trong bài viết này, dựa trên ý tưởng của bạn Phạm Nam Khánh, tôi sẽ đưa ra một phép chứng minh khác cho định lý 2 khác với các phép chứng minh trong [3] và [4].

Trước hết ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu các điểm $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$ cùng thuộc một đường thẳng sao cho $(AA'PQ) = (BB'PQ) = (CC'PQ) = (DD'PQ) = -1$ thì $(A'B'C'D) = (A'B'C'D')$.

Chứng minh. Gọi Δ là đường thẳng chứa các điểm $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$. Không mất tính tổng quát giả sử Δ là một trục và các điểm $P, Q, A, A', B, B', C, C', D, D'$ theo thứ tự có tọa độ là $0, q, a, a', b, b', c, c', d, d'$.

$$\text{Vì } (AA'PQ) = (BB'PQ) = (CC'PQ) = (DD'PQ) = -1,$$

$$\text{nên } \begin{cases} 2aa' = q(a + a') \\ 2bb' = q(b + b') \\ 2cc' = q(c + c') \\ 2dd' = q(d + d'). \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}.$$

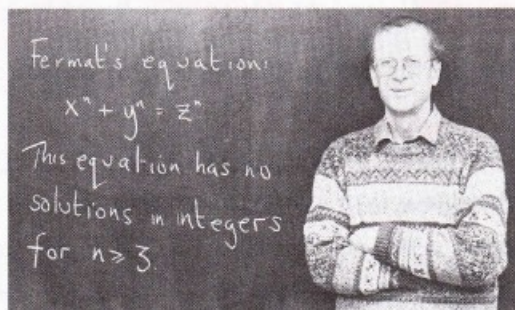
$$\text{Vậy } \begin{cases} \frac{a-c}{ac} = -\frac{a'-c'}{a'c'} \\ \frac{b-c}{bc} = -\frac{b'-c'}{b'c'} \\ \frac{a-d}{ad} = -\frac{a'-d'}{a'd'} \\ \frac{b-d}{bd} = -\frac{b'-d'}{b'd'}. \end{cases}$$

Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy đã trao giải Abel 2016 cho nhà toán học nổi tiếng người Anh, *Andrew J. Wiles* cho việc chứng minh Định lý Fermat lớn bằng cách chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura cho các đường cong elliptic bán ổn định của ông, mở ra một thời kỳ mới cho chuyên ngành lý thuyết số.

Wiles sinh ngày 11 tháng 4 năm 1953 tại Cambridge (Anh). Tháng 6 năm 1993, *Wiles* cho rằng công việc chứng minh sắp được hoàn tất, nhưng sau đó phát hiện ra một lỗ hổng không nhỏ. Công việc còn dở dang đến tận 19 tháng 9 năm 1994, khi đột nhiên ông có ý tưởng đúng. Năm 1995, bài báo *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem* của *Wiles* xuất hiện trên Tạp chí *Annals of Mathematics*.

Giải Abel được lấy theo tên nhà toán học Na Uy, *Niels Henrik Abel* (1802–1829), người có nhiều đóng góp trong Giải tích và Đại số, trong đó có việc chứng minh phương trình bậc năm không giải được bằng căn thức.

Giải thưởng Abel được trao mỗi năm một lần (lần đầu vào năm 2003) sau một cuộc tuyển chọn do một hội đồng gồm 5 nhà toán học quốc tế tiến hành. Khoản tiền thưởng cùng với giải thưởng gần một triệu đôla Mỹ, gần như giải Nobel (trao thưởng ở Thụy Điển và Na Uy nhưng không bao gồm toán học). Na Uy ban đầu cung cấp cho giải 200.000.000 NOK (khoảng 23.000.000 USD) làm quỹ trong năm 2001. Mục đích của giải là phổ biến toán học, làm cho môn khoa học này thêm uy tín, đặc biệt là dành cho những người trẻ tuổi.



LÊ MAI (Nguồn: diendantoanhoc.net)

Chia vế cho vế đẳng thức thứ nhất và đẳng thức thứ hai, đẳng thức thứ ba và đẳng thức thứ tư, ta

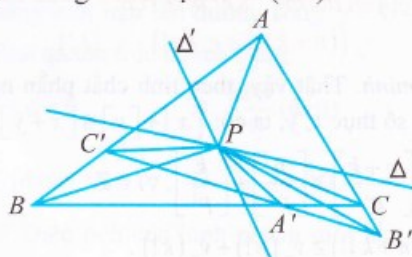
$$\text{có } \begin{cases} \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a'-c'}{b'-c'} \cdot \frac{b'}{a'} \\ \frac{a-d}{b-d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a'-d'}{b'-d'} \cdot \frac{b'}{a'} \end{cases}$$

Chia vế với vế hai đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} = \frac{a'-c'}{b'-c'} \cdot \frac{a'-d'}{b'-d'}$$

Nói cách khác $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Trở lại chứng minh định lý 2 (h.2).



Hình 2

$$\begin{aligned} & \text{Vì } (PA, PA', \Delta, \Delta') = (PB, PB', \Delta, \Delta') = (PC, PC', \Delta, \Delta') \\ & = -1 \text{ nên } (PA, PA', \Delta, \Delta') = (PA', PA, \Delta, \Delta') \\ & = (PB', PB, \Delta, \Delta') = (PC', PC, \Delta, \Delta') = -1. \end{aligned}$$

Từ đó, theo bổ đề trên, chú ý rằng phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép và A', B', C' theo thứ tự thuộc BC, CA, AB , suy ra $P(AA'B'C') = P(A'ABC) = A(A'PBC) = A(A'PC'B') = A(PA'B'C')$.

Vậy ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R.Goormaghtigh, *Sur une generalization du theorem de Noyer, Droz-Farny et Neuberg*, Mathesis 44 (1930).
- [2] T.O.Dao, *Message Advanced Plane Geometry* 1271, April / 26th / 2014.
- [3] Q.H.Tran, *Generalization of Droz Farny line*, HUS High school for Gifted Student, pp. 1 - 5.
- [4] H.S.Tran, *A synthetic of Dao's generalization of Goormaghtigh's theorem*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, Vol. 3, Issue 2, (2014), pp. 125-129.



NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP Mỹ Tho, Tiền Giang)

Trước tiên xin nhắc lại định nghĩa $v_p(x)$ như sau :

1. Định nghĩa số mũ đúng

Cho số nguyên x và p là một số nguyên tố bất kì, ta định nghĩa $v_p(x) = n$ là số mũ cao nhất của p mà p^n chia hết x . Hay nói cách khác $v_p(x)$ là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của x . Tức là: nếu $x \neq 0$ thì $v_p(x) = n \in \mathbb{N}$ nếu $p^n \mid x$ và $p^{n+1} \nmid x$. Nếu $x = 0$ thì $v_p(0) = +\infty$. Từ định nghĩa $v_p(x)$, ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau đây:

Cho x, y là 2 số nguyên và p là số nguyên tố bất kì. Khi đó, ta có:

- $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
- Nếu $x:y$ thì $v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$.
- $x:y \Leftrightarrow v_p(x) - v_p(y) \geq 0$, với mọi số nguyên tố p .
- $x:p^m \Leftrightarrow v_p(x) \geq m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$).

2. Công thức Polignac

Cho p là một số nguyên tố và n là một số nguyên dương, khi đó số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ là: $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right]$, trong đó, kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số thực x .

Chứng minh. Với mỗi số nguyên dương i , gọi e_i là số các số chia hết cho p^i trong đoạn $[1; n]$. Ta có:

$$e_i = \left[\frac{n}{p^i} \right]. \text{ Khi đó, số các số chia hết cho } p^i \text{ trong}$$

đoạn $[1; n]$ mà không chia hết cho p^{i+1} là $f_i = e_i - e_{i+1}$. Số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn

$$\begin{aligned} \text{của } n! \text{ là: } v_p(n!) &= \sum_{i=1}^{+\infty} if_i = \sum_{i=1}^{+\infty} i(e_i - e_{i+1}) \\ &= (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + 3(e_3 - e_4) + \dots = \sum_{i=1}^{+\infty} e_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right]. \end{aligned}$$

3. Các tính chất

Tính chất 1. Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p . Gọi $s_p(n)$ là tổng các chữ số biểu diễn theo hệ

$$\text{cơ số } p \text{ của } n. \text{ Khi đó, ta có: } v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.$$

Chứng minh. Giả sử biểu diễn của n trong hệ cơ số p là: $n = a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + a_{k-2} \cdot p^{k-2} + \dots + a_0$, trong đó: $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \in \{0; 1; \dots; p-1\}, k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Khi đó: } \left[\frac{n}{p^i} \right] = 0, \forall i > k, i \in \mathbb{Z} \text{ và}$$

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = a_k p^{k-i} + a_{k-1} p^{k-i-1} + \dots + a_{i+1} p + a_i, \forall i \leq k, i \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Do đó: } a_i = \left[\frac{n}{p^i} \right] - p \left[\frac{n}{p^{i+1}} \right], \forall i = \overline{0, k} \text{ và}$$

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = \sum_{j=i}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] - \sum_{j=i+1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

$$\text{Suy ra: } s_p(n) = \sum_{i=0}^k a_i = \sum_{i=0}^k \left(\left[\frac{n}{p^i} \right] - p \left[\frac{n}{p^{i+1}} \right] \right)$$

$$= n - (p-1) \sum_{i=1}^k \left[\frac{n}{p^i} \right] = n - (p-1) v_p(n!) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Khi $p = 2$ thì ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1. $v_2(n!) = n - s_2(n)$.

Vì $s_p(n) \geq 1$ và $p-1 \geq 1$ nên ta có thêm 2 hệ quả sau:

Hệ quả 2. $v_p(n!) \leq \frac{n-1}{p-1}$. Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow s_p(n) = 1 \Leftrightarrow n \text{ là một lũy thừa của } p.$$

Hệ quả 3. $v_p(n!) < n$.

Tính chất 2. Cho p là một số nguyên tố và n, k là hai số nguyên dương. Khi đó ta có:

$$v_p((n+k)!) \geq v_p(n!) + v_p(k!).$$

Chứng minh. Thật vậy, theo tính chất phần nguyên, với mọi số thực x, y , ta có: $[x] + [y] \leq [x+y]$.

$$\text{Do đó, } \left[\frac{n+k}{p^i} \right] \geq \left[\frac{n}{p^i} \right] + \left[\frac{k}{p^i} \right], \forall i \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow v_p((n+k)!) \geq v_p(n!) + v_p(k!).$$

Tính chất 3. Cho p là số nguyên tố và $n, m \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n < p^{m+1}$. Khi đó ta có: $v_p(C_n^k) \leq m, \forall k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Với $i \geq m+1$ thì:

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} \right] = \left[\frac{n-k}{p^i} \right] = 0, \forall k \leq n, k \in \mathbb{N}.$$

Vì $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ nên:

$$\begin{aligned} v_p(C_n^k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n-k}{p^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{n}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^m \left[\frac{k}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^m \left[\frac{n-k}{p^i} \right]. \end{aligned}$$

Ta chứng minh: $\forall x, y \in \mathbb{R}, [x+y] - [x] - [y] \leq 1$.

Thật vậy, ta có: hàm phần nguyên là hàm không giảm (nếu $x < y$ thì $[x] \leq x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$ do $[y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá y).

Vì $y < [y] + 1 \Rightarrow x + y < x + [y] + 1$

$\Rightarrow [x+y] \leq [x + [y] + 1] = [x] + [y] + 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Như vậy, $\left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right] - \left[\frac{n-k}{p^i} \right] = \left[\frac{k + (n-k)}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right] - \left[\frac{n-k}{p^i} \right] \leq 1, \forall i = \overline{1, m}.$

Do đó, $v_p(C_n^k) \leq m$.

Tính chất 4. Cho n là một số nguyên dương và p là một ước nguyên tố bất kì của C_{2n}^n .

Đặt $m = v_p(C_{2n}^n)$. Khi đó ta có: $p^m \leq 2n$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, $p^m > 2n$. Khi đó,

$$p^m > n \Rightarrow \left[\frac{2n}{p^i} \right] = \left[\frac{n}{p^i} \right] = 0, \forall i \geq m.$$

Ta có: $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Suy ra:

$$\begin{aligned} m &= v_p(C_{2n}^n) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^i} \right] \right) = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\left[\frac{2n}{p^i} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^i} \right] \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Với $x \in \mathbb{R}$ bất kì thì ta có:

$$\begin{aligned} [2x] &= 2x - \{2x\} = 2([x] + \{x\}) - \{2x\} \\ &= 2[x] + 2\{x\} - \{2x\} \leq 2[x] + 2\{x\} < 2[x] + 2 \\ \Rightarrow [2x] - 2[x] &\leq 1 \text{ (do } [2x] - 2[x] \text{ là số nguyên).} \end{aligned}$$

Do đó, từ (*) suy ra: $m \leq m-1$ (mâu thuẫn).

Vậy $p^m \leq 2n$.

1. Một số thí dụ ứng dụng

a. Các bài toán chia hết

Thí dụ 1. Chứng minh rằng: tích của k số nguyên dương liên tiếp chia hết cho $k!$.

Lời giải. Gọi k số nguyên dương liên tiếp là: $n+1, n+2, \dots, n+k$, trong đó n là số tự nhiên.

Ta có:
$$\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k)}{k!} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \cdot k!} = \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}.$$

Gọi p là số nguyên tố bất kì, theo tính chất 2 ta có:

$$v_p((n+k)!) \geq v_p(n!) + v_p(k!).$$

Vậy $\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k)}{k!} = \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$ là số nguyên. Suy ra đpcm.

Chú ý: $\frac{(n+k)!}{n! \cdot k!} = C_{n+k}^k$ là một số nguyên. (Đây là cách chứng minh bằng tổ hợp).

Thí dụ 2. Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng: nếu $n = p^s$ ($s \in \mathbb{Z}^+$) thì với mọi $k, 1 \leq k < n, C_n^k : p$. Điều ngược lại có đúng không?

Lời giải. Giả sử $n = p^s$ ($s \in \mathbb{Z}^+$), ta cần chứng minh:

$v_p(C_n^k) \geq 1$. Thật vậy, ta có:

$$v_p(C_n^k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n-k}{p^i} \right].$$

Theo tính chất phần nguyên ta có:

- Với mọi $i \neq s$ thì $\left[\frac{n}{p^i} \right] \geq \left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right]$.

- Với $i = s$ thì $\left[\frac{n}{p^s} \right] = 1, \left[\frac{k}{p^s} \right] = \left[\frac{n-k}{p^s} \right] = 0$
(do $0 < k, n-k < n = p^s$).

Do đó, $v_p(C_n^k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n-k}{p^i} \right] \geq 1$.

Suy ra đpcm. Điều ngược lại cũng đúng. Thật vậy, giả sử phản chứng n không có dạng p^s . Khi đó, chọn $m = [\log_p n] \Rightarrow \log_p n - 1 < m < \log_p n \Leftrightarrow p^m < n < p^{m+1}$.

Xét $k = p^m < n$. Ta chứng minh: $C_n^k \not\vdots p$. Thật vậy,

với $i \geq m+1$ thì: $\left[\frac{n}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} \right] = \left[\frac{n-k}{p^i} \right] = 0$.

Với $i \leq m$ thì $\frac{k}{p^i}$ là một số nguyên, nên

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = \left[\frac{k + n - k}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right].$$

Vậy $v_p(C_n^k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right] - \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n-k}{p^i} \right] = 0$,

do đó $C_n^k \not\vdots p$. Ta có đpcm.

Thí dụ 3. (IMO 1972) Chứng minh rằng: với mọi số nguyên dương m, n ta có: $(2m)!(2n)!$ chia hết cho $m!n!(m+n)!$.

Lời giải. Giả sử p là số nguyên tố bất kì. Ta cần chứng minh: $v_p((2m)!(2n)!) \geq v_p(m!n!(m+n)!)$.

$$\Leftrightarrow v_p((2m)!) + v_p((2n)!) \geq v_p(m!) + v_p(n!) + v_p((m+n)!).$$

Ta chứng minh:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, [2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x+y]. (*)$$

Thật vậy, đặt $u = \{x\}, v = \{y\}$. Ta có: $0 \leq u, v < 1$ và $x = [x] + u, y = [y] + v$

$$\Rightarrow [2x] = [2[x] + 2u] = 2[x] + [2u] \text{ và } [2y] = [2[y] + 2v] = 2[y] + [2v], [x+y] = [x] + [y] + [u+v].$$

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow [2u] + [2v] \geq [u+v]. (**)$$

Ta có: $0 \leq u + v < 2$. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: $0 \leq u + v < 1$. Khi đó, $[u+v] = 0$ nên $(**)$ hiển nhiên đúng.

• TH2: $1 \leq u + v < 2$. Khi đó, $[u+v] = 1$ và trong 2 số u, v phải có ít nhất 1 số $\geq \frac{1}{2}$. Không mất tính tổng

$$\text{quát, giả sử } u \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq 2u < 2 \Rightarrow [2u] + [2v] = 1 + [2v] \geq 1 = [u+v].$$

$$\text{Vậy } (**) \text{ đúng } \Rightarrow (*) \text{ đúng. Do đó, } \left[\frac{2m}{p^i} \right] + \left[\frac{2n}{p^i} \right] \geq \left[\frac{m}{p^i} \right] + \left[\frac{n}{p^i} \right] + \left[\frac{m+n}{p^i} \right], \forall i \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow v_p((2m)!) + v_p((2n)!) \geq v_p(m!) + v_p(n!) + v_p((m+n)!)$$

Như vậy, ta có đpcm.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng: $n!$ không chia hết cho 2^n với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Theo hệ quả 3 ta có: $v_2(n!) < n$ nên ta có đpcm.

Thí dụ 5. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $n!$ chia hết cho 2^{n-1} .

Lời giải. Giả sử biểu diễn của n trong hệ nhị phân là:

$$n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \dots + a_0,$$

trong đó: $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}^+$ và $a_k = 1$.

$$\text{Theo hệ quả 1 ta có: } v_2(n!) = n - \sum_{i=0}^k a_i = n - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i.$$

$$\text{Do đó, } n! : 2^{n-1} \Leftrightarrow v_2(n!) \geq n-1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 0, k-1 \text{ (do } a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1\})$$

$$\Leftrightarrow n = 2^k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Thí dụ 6. Giả sử n và m là hai số tự nhiên sao cho m không có ước nguyên tố nào nhỏ hơn hoặc bằng n . Chứng minh rằng:

$$M = (m-1)(m^2-1)(m^3-1)\dots(m^{n-1}-1) : n!.$$

Lời giải. Xét số nguyên tố p bất kì, $p \leq n$. Theo giả thiết ta có: $(p, m) = 1$. Theo định lý Fermat ta có:

$$m^{p-1} - 1 : p \Rightarrow m^{k(p-1)} - 1 : p, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Số các số là bội của $(p-1)$ không vượt quá $(n-1)$

$$\text{là } \left[\frac{n-1}{p-1} \right]. \text{ Do đó, } v_p(M) \geq \left[\frac{n-1}{p-1} \right].$$

$$\text{Mặt khác, theo hệ quả 2 ta có: } v_p(n!) < \frac{n-1}{p-1}.$$

$$\text{Do đó: } v_p(n!) \leq \left[\frac{n-1}{p-1} \right] \text{ (vì } \left[\frac{n-1}{p-1} \right] \text{ là số nguyên}$$

$$\text{lớn nhất không vượt quá } \frac{n-1}{p-1}).$$

Suy ra: $v_p(n!) \leq v_p(M)$, từ đó ta có đpcm.

Thí dụ 7. (India 2000) Cho n và m là hai số tự nhiên sao cho: $m \leq \frac{n^2}{4}$ và m không có ước nguyên tố nào lớn hơn n . Chứng minh rằng: $n! : m$.

Lời giải. Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của m . Ta cần chứng minh: $v_p(n!) \geq v_p(m)$. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: $v_p(m) = 2s$, tức là: $m = p^{2s} \cdot q$, với q là số tự nhiên, $(p, q) = 1$. Khi đó:

$$n \geq 2\sqrt{m} \geq 2p^s \Rightarrow v_p(n!) \geq \left[\frac{n}{p} \right] \geq 2p^{s-1} \geq 2s = v_p(m)$$

$$n \geq 2\sqrt{m} \geq 2p^{s-1} \geq 2s-1 = (1+1)^{s-1} \geq 1+s-1 = s.$$

• TH2: $v_p(m) = 2s+1$, tức là: $m = p^{2s+1} \cdot q$, với q là số tự nhiên, $(p, q) = 1$. Khi đó: $n \geq 2\sqrt{m} \geq 2p^s \sqrt{p}$.

- Nếu $n > 4p^s$ thì

$$v_p(n!) \geq \left[\frac{n}{p} \right] \geq 4p^{s-1} > 2s+1 = v_p(m)$$

$$\text{(vì } 4p^{s-1} \geq 4 \cdot 2^{s-1} = 2 \cdot 2^s = 2 \cdot (1+1)^s \geq 2(1+s) > 2s+1).$$

- Nếu $n \leq 4p^s$, khi đó, $2p^s \sqrt{p} \leq n \leq 4p^s$

$$\Rightarrow \sqrt{p} \leq 2 \Rightarrow 2\sqrt{p} \geq p. \text{ Do đó, } n \geq 2p^s \sqrt{p} \geq p^{s+1}.$$

Suy ra,

$$v_p(n!) \geq \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^{s+1}} \right] \geq p^s + p^{s-1} + \dots + p+1$$

$$\geq 2^s + 2^{s-1} + \dots + 2+1 = 2^{s+1} - 1 \geq 2s+1 = v_p(m).$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có: $v_p(n!) \geq v_p(m)$.

Do đó: $n! : m$.

b. Các bài toán về phương trình nghiệm nguyên

Thí dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên dương m và số nguyên tố p sao cho: $(p-2)! - 1 = p^m$.

Lời giải. Ta có: $p^m > 1$ nên $(p-2)! > 2 \Rightarrow p \geq 5$.

Nhận xét, nếu $p > 5$ thì $(p-1)|(p-2)!$.

Thật vậy, ta xét 2 trường hợp sau:

• TH1: Nếu $p > 5$ và $p-1$ có ít nhất 2 ước nguyên tố.

Khi đó: $p-1 = q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}$, trong đó q_i là số nguyên tố

và $k > 1$ thì $q_i^{n_i} \leq p-2, \forall i=1,2,\dots,k$

$$\Rightarrow p-1 = q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k} \mid (p-2)!$$

• TH2: Nếu $p > 5$ và $p-1$ chỉ có 1 ước nguyên tố là 2 thì $p-1 = 2^n, n \geq 4$.

$$\text{Khi đó, } v_2((p-2)!) = v_2((2^n-1)!)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n-1}{2^i} \right] \geq \left[\frac{2^n-1}{2} \right] + \left[\frac{2^n-1}{4} \right] = 2^{n-1} - 1 + 2^{n-2} - 1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} - 2 > 2^{n-1} = (1+1)^{n-1} > 1+n-1 = n, \forall n \geq 4.$$

$$\text{Do đó, } (p-1) \mid (p-2)!$$

$$\text{Nên vậy, nếu } p > 5 \text{ thì } p^m + 1 = (p-2)! : p-1$$

$$\Rightarrow (p^m + 1) + 2 : p-1.$$

Vì $p^m - 1 : p-1$ nên suy ra $2 : p-1$ (vô lí).

Như vậy $p = 5$. Khi đó ta có: $5 = 5^m \Leftrightarrow m = 1$.

Kết luận, $p = 5$ và $m = 1$.

Thí dụ 9. Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\text{phương trình: } \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$$

không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải. Giả sử phản chứng phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ α . Khi đó, α là nghiệm của đa thức:

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + \dots + \frac{n!}{k!}x^k + \dots + \frac{n!}{2!}x^2 + \frac{n!}{1!}x + n!.$$

Do $P(x)$ là đa thức bậc n có hệ số nguyên nên và hệ số của x^n là 1 nên α là số nguyên.

Ta có:

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + \dots + \frac{n!}{k!}\alpha^k + \dots + \frac{n!}{2!}\alpha^2 + \frac{n!}{1!}\alpha + n! = 0 \quad (1)$$

Gọi p là một ước nguyên tố của n . Từ (1) ta có:

$$\alpha^n : p \Rightarrow \alpha : p \quad (2). \text{ Với mỗi } k = \overline{1, n}, \text{ đặt } r_k = v_p(k!).$$

Theo hệ quả 3 ta có: $r_k < k \Rightarrow r_k \leq k-1$.

Từ (2) ta có: $v_p(\alpha^k) \geq k$. Suy ra:

$$v_p\left(\frac{n!}{k!} \cdot \alpha^k\right) = v_p(n!) - v_p(k!) + v_p(\alpha^k)$$

$$= r_n - r_k + v_p(\alpha^k) \geq r_n - k + 1 + k = r_n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{k!} \cdot \alpha^k : p^{r_n+1}, \forall k = \overline{1, n}.$$

Do đó, từ (1) suy ra: $n! : p^{r_n+1} \Rightarrow r_n = v_p(n!) \geq r_n + 1$.

Điều này mâu thuẫn. Vậy điều giả sử sai nên ta có đpcm.

c. Các bài toán về bội chung nhỏ nhất

Thí dụ 10. Cho n là số tự nhiên và $a_k = (n+1)C_n^k$,

với $k = 0, 1, \dots, n$. Chứng minh rằng:

$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [1, 2, \dots, n+1]$, trong đó kí hiệu $[x, y]$ chỉ bội chung nhỏ nhất của 2 số nguyên x và y .

Lời giải. Ta biết rằng: nếu

$$a = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}, b = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k} \text{ thì}$$

$$[a, b] = p_1^{\max\{m_1, s_1\}} \dots p_k^{\max\{m_k, s_k\}}.$$

Đặt $m = [1, 2, \dots, n+1]$. Giả sử p là một ước nguyên

tố bất kì của m và $v_p(m) = \alpha \Rightarrow \exists i \in \overline{1, n+1} : p^\alpha \mid i$ và $n+1 < p^{\alpha+1} \Rightarrow p^\alpha \leq i \leq n+1 < p^{\alpha+1}$ và do đó $n < p^{\alpha+1}$. Ta cần chứng minh:

$$v_p(a_i) \leq v_p(m), \forall i = \overline{0, n} \text{ và } \exists i_0 \in \overline{0, n} : v_p(a_{i_0}) = v_p(m).$$

Thật vậy, giả sử $\exists k \in \overline{0, n} : v_p(a_k) > v_p(m) = \alpha$.

$$\text{Do } a_k = (n+1)C_n^k \Rightarrow v_p(n+1) + v_p(C_n^k) > \alpha$$

$$\Rightarrow v_p(n+1) > \alpha - v_p(C_n^k) \geq 0 \text{ (theo tính chất 3)}$$

$$\Rightarrow v_p(n+1) \geq 1 \Rightarrow n+1 : p.$$

$$\text{Ta có } a_k = (n+1)C_n^k = (n+1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= (n-k+1) \frac{(n+1)!}{(k)!(n+1-k)!} = (n-k+1)C_{n+1}^k$$

$$\text{và } a_k = (n+1)C_n^k = (n+1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= (k+1) \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = (k+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Tương tự theo tính chất 3 ta cũng có:

$$v_p(n-k+1) \geq 1 \Rightarrow n-k+1 : p \text{ và}$$

$$v_p(k+1) \geq 1 \Rightarrow k+1 : p.$$

Do đó, $k = n+1 - (n-k+1) : p$

$$\Rightarrow 1 = (k+1) - k : p \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $v_p(a_i) \leq v_p(m), \forall i = \overline{0, n}$. Hơn nữa, với

$$i_0 = p^\alpha - 1 \leq n \text{ thì } a_{i_0} = (i_0 + 1)C_{n+1}^{i_0+1} = p^\alpha \cdot C_{n+1}^{p^\alpha}.$$

$$\text{Ta có: } v_p(a_{i_0}) = v_p(p^\alpha) + v_p(C_{n+1}^{p^\alpha}) = \alpha + v_p(C_{n+1}^{p^\alpha}).$$

Ta chứng minh: $v_p(C_{n+1}^{p^\alpha}) = 0$. Thật vậy, vì $p^\alpha \leq n+1 < p^{\alpha+1}$ nên:

- Với $i \geq \alpha+1$ thì:

$$\left[\frac{n+1}{p^i} \right] = \left[\frac{p^\alpha}{p^i} \right] = \left[\frac{n+1-p^\alpha}{p^i} \right] = 0.$$

<https://tieulun.hopto.org>



THƠ VIẾT TẶNG EM

NGUYỄN ĐÀO QUANG ĐIỀN

Cựu sinh viên Khoa Toán, ĐHSPT Hà Nội 1969 - 1973

Tân Tiến, H. Văn Giang, Hưng Yên

Bài thơ này anh viết tặng em
Người bạn đời anh hằng mong nhớ
Bài tích phân vừa làm ra kết quả
Đổi biến rồi truy hồi tiếp mới xong.

Hà Nội mùa này tiết đã sang đông
Em nhớ quàng khăn khi đi dạo phố
Thành phố lên đèn không gian rực rỡ
Phương và chiều em chỉ véc tơ thôi.

Không gian yêu tọa độ xác định rồi
Phương trình bậc cao đường lối chung hạ bậc
Ta đưa về kỹ năng thành thạo nhất
Bậc nhất bậc hai em nổi tiếng một thời.

Đôi mắt em xanh ánh xạ cuộc đời
Mỗi lần trao vô hạn lần hạnh phúc
Nghiệm ngoại lai làm sao mà có được
Em biết rồi anh biến đổi tương đương.

Anh gửi tình anh qua những con tem
Những lá thư vì muốn trùng sóng gió
Mong đến trao em người anh hùng hằng mong nhớ
Bài thơ này anh viết tặng riêng em.

Lần dạo chơi nơi thành phố mờ sương
Đà Lạt thông reo bên đèo Ngoạn Mục
Anh với em chơi rút bài xác suất
Anh hỏi em không gian mẫu là gì?

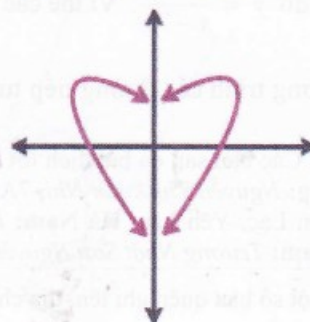
Và rồi thời gian cứ mãi miết đi
Anh là đường xiên nhận em hình chiếu
Ngọt bùi cùng chia đắng cay cùng chịu
Gắn hai đầu đường vuông góc cùng chung.

Anh tìm em bằng đa thức đặc trưng
Đạo hàm bậc hai biết rằng em ở đó
Cò lẩn giếm anh em bảo là không có
Giấc ngủ không thành gián đoạn suốt thâu đêm.

Chỉ định hai trung tuyến xa nhau
Trông về trọng tâm tin ngày gặp mặt
Giá trị tuyệt đối bao giờ âm được
Và bao giờ anh khỏi nhớ thương em.



$$f(\text{love}) = U + M_i$$



TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 15

Problem. Let $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ be a polynomial with real coefficients and c a non-zero real number. Can we rewrite $f(x)$ as $b_0 + b_1(x-c) + \dots + b_n(x-c)^n$? And if yes, how to find b_i 's in terms of a_i 's?

Solution. The answer is yes. Suppose that

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + \dots + b_n(x-c)^n \quad (1)$$

In (1), let $x = c$, we have $b_0 = f(c)$. Taking derivative both sides of (1), we get

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-c) + \dots + nb_n(x-c)^{n-1} \quad (2)$$

In (2), let $x = c$, we have $b_1 = f'(c)$. Taking derivative both sides of (2), we get $f''(x) = 1.2.b_2 + 2.3.b_3(x-c) + \dots + (n-1).n.b_n(x-c)^{n-2}$ (3)

$$+ 2.3.b_3(x-c) + \dots + (n-1).n.b_n(x-c)^{n-2} \quad (3)$$

$$\text{In (3), let } x = c, \text{ we have } b_2 = \frac{f''(c)}{2!}.$$

Similarly, we get $b_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}$, for $i = 1, \dots, n$.

Remarks. The problem has several applications.

In high school, it helps you to integrate some functions, e.g., $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3}$, ... First, you can rewrite

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2-3}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^3}.$$

From the final form, you can easily integrate the original function.

This kind of problem also appears in some mathematics courses in college.

TỪ VỰNG

polynomial	: đa thức
coefficient	: hệ số
derivative	: đạo hàm
application	: áp dụng
integrate	: tính nguyên hàm, tính tích phân
original	: đầu tiên, gốc
college	: đại học

NGUYỄN PHÚ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Problem. Cho một đường cong đồng có phương trình

$$(x-y)^2 + 3(x-y)^2 = 27.$$

Viết phương trình các đường tiếp tuyến với đường cong tại các giao điểm của đường cong với trục tung.

Solution. Trước tiên ta tìm tọa độ các giao điểm của đường cong với trục tung. Khi $x = 0$, ta có $4y^2 + 3y^2 = 27$. Vậy tọa độ hai giao điểm của

đường cong với trục tung là $\left(0; 3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ và $\left(0; -3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.

Bây giờ chúng ta cần tìm hệ số góc của các đường tiếp tuyến đó. Trong trường hợp này không dễ để biểu diễn y như một hàm của x một cách tường minh, nhưng ta có thể sử dụng một kỹ thuật gọi là quá trình lấy đạo hàm hàm ẩn. Đạo hàm hai vế của phương trình đã cho theo x , ta được:

$$2(x+y)(1+y') + 6(x-y)(1-y') = 0 \quad (\text{lưu ý rằng ta đã sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm}$$

hợp). Từ đó $y' = \frac{4x-y}{x-7y}$. Vì thế các giá trị của y' tại các điểm $\left(0; 3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ và $\left(0; -3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ đều bằng $\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình các đường tiếp tuyến cần tìm là $y = \frac{1}{7} \cdot x + 3\sqrt{\frac{3}{7}}$ và $y = \frac{1}{7} \cdot x - 3\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hà Nội:** Vũ Trung Tiến, 8A2, THCS Trưng Vương, Mê Linh; **Hải Phòng:** Nguyễn Thị Xuân Nhi, 7A1, THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng; **Vĩnh Phúc:** Lê Đức Thái, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nam:** Phạm Phương Thảo, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Quảng Nam:** Trương Nhật Sơn Nguyễn, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

(Lưu ý: Một số bạn quên ghi tên, địa chỉ vào bài làm của mình!).

HỒ HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: TÌM MAX, MIN

(Đề đăng trên TH&TT số 470, tháng 8 năm 2016)

Phân tích. Bạn học sinh đó mắc sai lầm khi kết luận $\max_{(-\infty; +\infty)} y = 1$. Vì từ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$ và bảng biến thiên của hàm số ta suy ra với $x \in \mathbb{R}$ ta có $-1 \leq y < 1$, $y = -1$ tại $x = 0$, không tồn tại x_0 để $y(x_0) = 1$. Vậy ta phải kết luận min $y = -1$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Lời giải đúng. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$y(0) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-1	1

Vậy min $y = -1$ khi $x = 0$, hàm số không có giá trị lớn nhất.

Nhận xét. Các bạn sau phân tích đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Hà Nội:** Đinh Văn Anh, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân, Hà Nội. **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Đồng Tháp:** Nguyễn Lê Anh Minh, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

KIHIVI



TÌM GIỚI HẠN!

Trong giờ bài tập tính giới hạn hàm số ở lớp 11A1. Thầy giáo gọi bạn Văn lên bảng tính giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{2x + 3}{x^3 + x + 1}}.$$

Bạn Văn đã làm như sau:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{2x + 3}{x^3 + x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{(2x + 1)^2 (2x + 3)}{x^3 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2 \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^2 \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Thầy giáo yêu cầu các bạn ở dưới lớp nhận xét. Cả lớp xôn xao, râm ran “đúng”, “sai”, “chưa chắc”,....

Các em hãy đưa ra nhận xét đúng đắn nhất cho lời giải trên giúp các bạn lớp 11A1 nhé!

NGUYỄN ANH VŨ

GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)





Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 474 (12.2016)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocvotruotvietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Đỗ Quang Minh – Sử dụng công thức độ dài đoạn thẳng để giải một số bài toán cực trị.

3 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016 – 2017.

5 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 10 Tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2015 – 2016.

Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Huy Doan – Về số cực trị của một hàm số.

6 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia

Nguyễn Hoàng Nam – Một hướng giải nhanh trắc nghiệm về cực trị hàm trùng phương.

8 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 4.

11 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 3.

13 Diễn đàn dạy học Toán

Đặng Thanh Hải - Trần Tuyết Thanh – Một số phương pháp giải phương trình, hệ phương trình không mẫu mực.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/474 ..., T12/474, L1/474, L2/474.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

28 Bạn có biết

Hoàng Đức Tân – Cần bao nhiêu điểm chia trong trên thước kẻ.

30 Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Minh Hà – Định lý Goormaghtigh và sự mở rộng của nó.

31 Tin tức. Giải Abel 2016.

32 Diễn đàn phương pháp giải toán

Nguyễn Tuấn Ngọc – Công thức Polignac và ứng dụng.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 15

Bài dịch số 12 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Tim Max, Min!

Nguyễn Anh Vũ – Tìm giới hạn!

Biên tập: LÊ MAI

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MAI ANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu bộ sách

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ DÀNH CHO TIỂU HỌC VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sau cuốn *Tập 1 - Kỳ thi Toán Quốc tế Kangaroo*, chúng tôi xin trân trọng giới thiệu *Tập 2* của bộ sách *Các kỳ thi Toán Quốc tế dành cho học sinh Tiểu học và THCS*. Bộ sách gồm bốn tập:

Tập 1. *International Kangaroo Mathematics Contest* (IKMC) - Kỳ thi Toán Quốc tế Kangaroo.

Tập 2. *Bebras Computational Thinking Challenge* (BCTC) - Thách thức tư duy tính toán Bebras.

Tập 3. *International Mathematical Assessment for Schools* (IMAS) - Kỳ thi đánh giá năng lực Toán học Quốc tế.

Tập 4. *Math Olympiads for Elementary and Middle Schools* (MOEMS) - Kỳ thi học sinh giỏi Toán Hoa Kỳ dành cho học sinh Tiểu học và THCS.

Việc tiếp cận với các kỳ thi quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn sẽ có tác động tích cực đến phong trào học tập nói chung. Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS.TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kỳ thi Toán quốc tế và khu vực.

Tập 2 của bộ sách giới thiệu *Kỳ thi Thử thách tư duy thuật toán Bebras (Bebras Computational Challenge)* được tổ chức lần đầu tiên tại Lithuania vào năm 2004. Sau đó mở rộng ra toàn thế giới với hơn 1300000 thí sinh đến từ khoảng 20 quốc gia năm 2015 và trở thành hoạt động ngoài trường học được chú ý nhất trên thế giới về việc giáo dục công nghệ cho học sinh. Kỳ thi là một hoạt động nằm ngoài chương trình trường học, nhằm thúc đẩy phong trào dạy và học công nghệ thông tin cho các em học sinh tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông. Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội là đơn vị được Ủy ban Bebras quốc tế chỉ định là điều phối quốc gia tại Việt Nam, tổ chức kỳ thi Thử thách tư duy thuật toán Bebras tại Việt Nam.

Các bài toán trong cuốn sách này được các tác giả chọn lọc từ các bộ đề của những nước tham gia kỳ thi trong năm 2015 như Anh, Úc và Mỹ,... đồng thời sắp xếp theo mức độ dễ, khó, trung bình cho từng cấp độ. Với mỗi bài chúng tôi đưa ra đáp án, lời giải chi tiết và những kiến thức liên hệ máy tính với mục đích để các đọc giả làm quen với cách thức làm bài của kỳ thi cũng như thấy được mối liên hệ mật thiết với công nghệ thông tin. Chúng tôi hi vọng rằng, với cách tiếp cận đó, các bạn đọc giả sẽ được thúc đẩy sự hứng thú, niềm đam mê không chỉ trong lĩnh vực công nghệ thông tin.

Liên hệ mua sách:

PHÒNG KINH DOANH - CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

- Địa chỉ: Tầng 4 Toà nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
- Tel: 04.35121974 (máy lẻ 120)/ 0944591598/04.36210196
- Fax: 04.35121973/04.36210201 • E-mail: phathanh@xbgdhn.vn





TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



TS. Nguyễn Đức Hoàng - Hiệu trưởng nhà trường



Hội đồng Sư phạm Trường THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội

Đến năm 1966, Trường Chuyên ĐHSPT Hà Nội thân yêu vừa tròn 50 tuổi. Chặng đường 50 năm chưa phải là thật dài, song cũng đủ để chúng ta nhìn lại để bước tiếp. Có thể coi đây là một chặng đường có nhiều khó khăn nhưng cũng có biết bao niềm tự hào.

Ngày 4/9/1965, Hội đồng Chính phủ đã ra quyết định giao cho Bộ Giáo dục tổ chức các lớp bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán học. Liên sau đó, năm học 1966 - 1967, Khối phổ thông chuyên Toán (PTCT) thuộc Khoa Toán - Tin Trường ĐHSPT Hà Nội được thành lập. Khóa học đầu tiên gồm 33 học sinh được tập trung tại huyện Phú Cù, tỉnh Hải Hưng cũ (nay là tỉnh Hưng Yên) sau chuyển về xã Viên Nội, huyện Ứng Hòa, tỉnh Hà Tây. Từ năm học 1968 - 1996, Khối PTCT tuyển thêm một lớp chuyên Tin học và trở thành Khối phổ thông chuyên Toán Tin, trực thuộc Khoa Toán - Tin của Trường ĐHSPT Hà Nội. Tháng 4/2005, Ban Giám hiệu Trường ĐHSPT Hà Nội ra quyết định thành lập Khối THPT Chuyên trực thuộc Ban Giám hiệu trường ĐHSPT Hà Nội. Ngày 20/7/2009, Chủ tịch UBND TP Hà Nội ra quyết định thành lập Trường THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội.

Đến nay Trường THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội có 38 lớp với 1580 học sinh gồm 7 môn chuyên: Toán học, Tin học, Văn học, Sinh học, Vật lý, Hóa học, Tiếng Anh, và các lớp chất lượng cao. Đội ngũ cán bộ, giáo viên được tăng cường, 95% cán bộ, giáo viên của nhà trường có trình độ Thạc sĩ, trong đó 20% giáo viên có học vị Tiến sĩ. Nhà trường luôn thực hiện tốt phương châm giáo dục toàn diện đức, trí, thể, mỹ, nâng cao môn chuyên, chú trọng tiếng Anh, mở rộng hợp tác quốc tế, phát huy tính sáng tạo và phát triển năng lực của học sinh đáp ứng nguồn đầu vào chất lượng cao cho các trường Đại học trong và ngoài nước.

Trong 50 năm qua, Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội đã đào tạo được gần 5000 học sinh THPT chuyên. Hàng năm, học sinh THPT chuyên đều tham dự các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia và là một trong những đơn vị đạt kết quả cao nhất trong hệ thống các trường THPT chuyên toàn quốc với hàng trăm giải. Kể từ năm đầu tiên Việt Nam tham gia Olympic Toán học Quốc tế (1974), năm nào

Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội cũng có học sinh tham gia và đã đạt 62 huy chương các loại, trong đó có nhiều em tham dự và hai lần liên tiếp đạt huy chương như các em: *Trần Trọng Hùng* (2 Huy chương Bạc, năm 1997, 1998), *Thái Hoàng* (1 Huy chương Đồng, 1 Huy chương Vàng, năm 1998, 1999), *Trần Quang Khải* (1 Huy chương Bạc, 1 Huy chương Vàng, năm 2001, 2002), *Vũ Ngọc Minh* (2 Huy chương Vàng, năm 2001, 2002), ... Từ khi thành trường (năm 2009) đến nay, học sinh của Trường đã dành được 22 Huy chương Quốc tế và 1 Bằng khen; 100% học sinh của nhà trường thi đỗ vào các trường Đại học, nhà trường luôn nằm trong top 3 các trường THPT trong toàn quốc có điểm bình quân thi Đại học của học sinh cao nhất, trong đó, có nhiều em là Thủ khoa của nhiều trường thuộc top trên. Cho đến nay, hơn 300 cựu học sinh của nhà trường đã bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ, Tiến sĩ khoa học, trong đó có hơn 150 người được Nhà nước phong tặng học hàm Giáo sư và Phó Giáo sư.

Ghi nhận những đóng góp, những bước trưởng thành của trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, nhà trường vinh dự nhận được nhiều danh hiệu cao quý: Danh hiệu Tập thể lao động Xuất sắc cấp Bộ các năm học liên tục từ năm học 2009 - 2010 đến năm học 2015 - 2016; Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo các năm 2008, 2011, 2012, 2015; Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ năm 2013; Cờ thi đua của Bộ Giáo dục và Đào tạo năm 2016; Huân chương Lao động hạng Ba năm 1986, Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1997, Huân chương Lao động hạng Nhất năm 2001, ...

Nửa thế kỷ đã đi qua, những thành tích vẻ vang của nhà trường xưa và nay đã khẳng định tầm vóc và uy tín của một ngôi trường giàu truyền thống, một trong những cánh chim đầu đàn và là niềm tự hào của ngành giáo dục Việt Nam. Thấy và trò Trường THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội hôm nay nhìn lại một chặng đường đã đi qua để tiếp tục phát huy tốt hơn những truyền thống đã có, đáp ứng được sự đổi mới của ngành Giáo dục và Đào tạo trong thời kỳ công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.