



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2016
Số 472

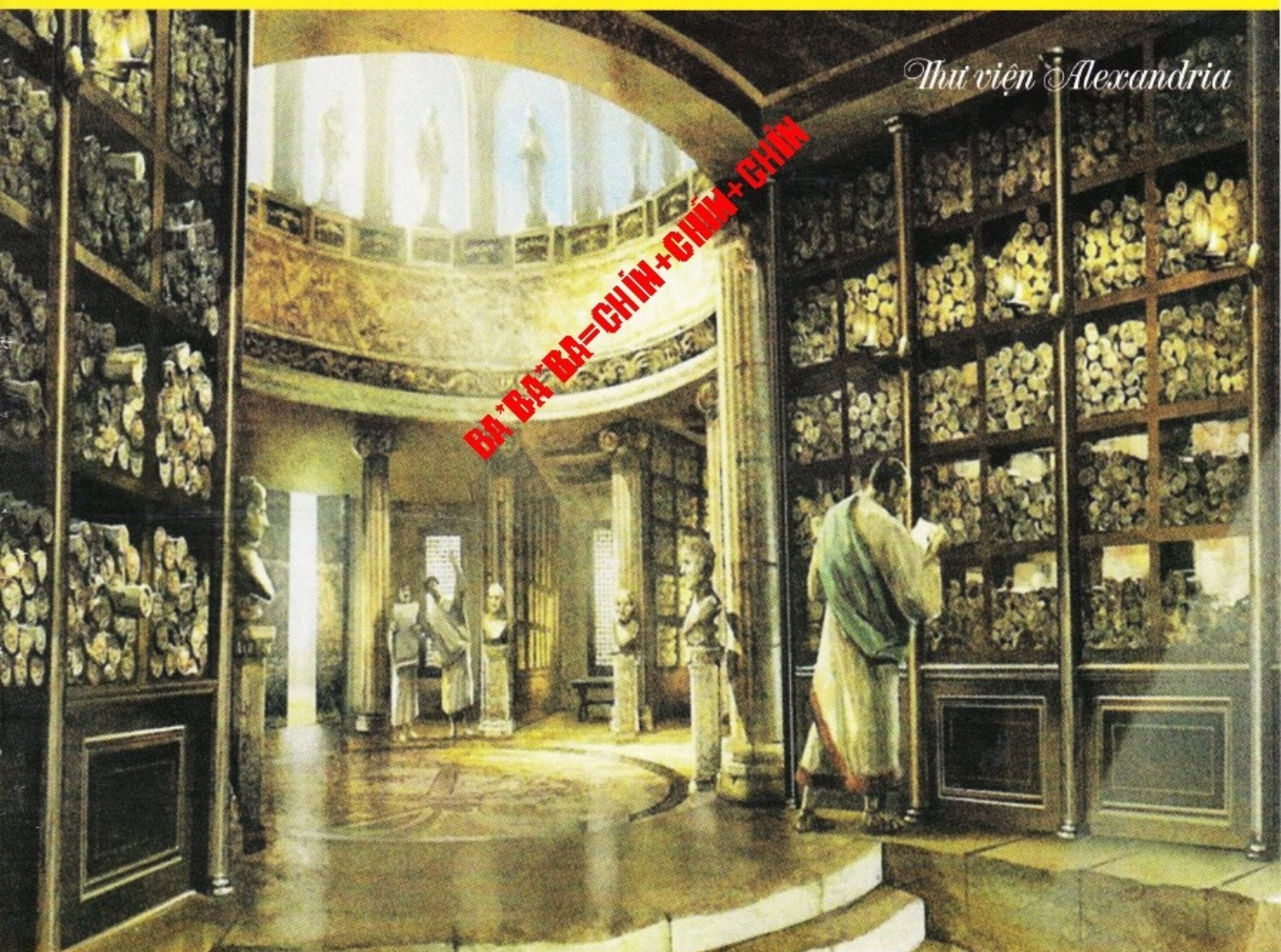
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trại sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Eratosthenes declares that it is no longer necessary to inquire as to the cause of the overflow of the Nile, since we know definitely that men have come to the sources of the Nile and have observed the rains there.



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THCS MÔN TOÁN

Bộ sách **Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Toán** gồm 2 cuốn:

- *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Hình học*
- *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Số học và Đại số*

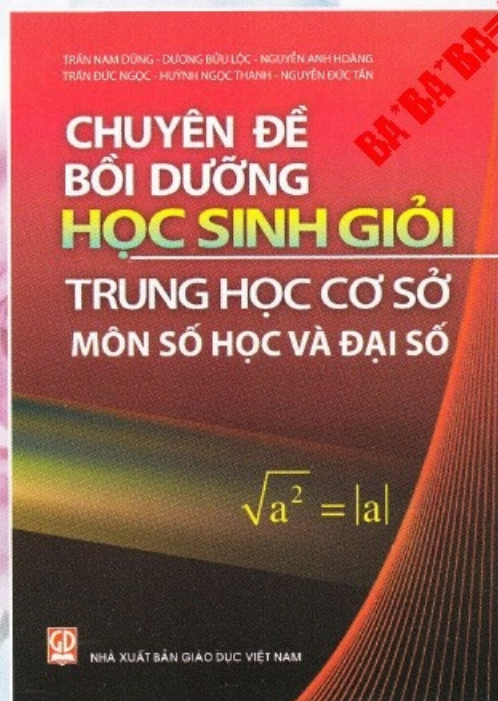
được nhóm tác giả là các thầy giáo có kinh nghiệm giảng dạy, những chuyên viên môn Toán của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh biên soạn. Nội dung bộ sách bao gồm những kiến thức bao quát chương trình môn Toán xuyên suốt từ lớp 6 đến lớp 9 và được viết theo những chuyên đề nhằm mục đích:

- Giúp các em học sinh THCS yêu thích môn Toán có thêm tài liệu để nâng cao kiến thức và kỹ năng giải toán.

- Giúp học sinh cuối cấp THCS ôn thi vào lớp 10 các trường THPT chuyên và không chuyên.

- Cung cấp thêm tài liệu tham khảo cho giáo viên trong việc bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho học sinh.

Hy vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh THCS, việc giảng dạy của giáo viên cũng như nhu cầu học tập của bạn đọc yêu thích toán.



Mọi chi tiết xin liên hệ:

Ban Toán Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Gia Định.

Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh. Tel: 08.38323044.



GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

BẰNG PHƯƠNG PHÁP HẰNG SỐ BIẾN THIÊN

DƯƠNG VĂN DUY

(GV THPT Nguyễn Hồng, Bắc Giang)

Nội dung của phương pháp là biến đổi phương trình đã cho về phương trình bậc 2 đối với một hằng số nào đó, sau đó tính Δ rồi thay lại tìm nghiệm phương trình ban đầu. Phương pháp hiệu quả với lớp bài toán đặc trưng.

Thí dụ 1. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$ (1)

Lời giải. ĐK: $x \geq -5$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 5 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x+5 = 5^2 - 2x^2 \cdot 5 + x^4 \quad (\text{ĐK: } 5 - x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + (x^4 - x) = 0.$$

Coi đây là PT bậc hai ẩn là 5, ta có:

$$\Delta = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} 5 = \frac{2x^2 + 1 + 2x + 1}{2} \\ 5 = \frac{2x^2 + 1 - 2x - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \quad (2) \\ x^2 - x - 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Giải PT(2) ta được nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Giải PT(3) ta được nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Kết hợp với ĐK, PT(1) có các nghiệm:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Thí dụ 2. Giải phương trình:

$$x + \sqrt{\sqrt{x} + 3} = 3 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x} + 3} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \sqrt{x} + 3 = 3^2 - 2x \cdot 3 + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 3^2 - (2x + 1) \cdot 3 + (x^2 - \sqrt{x}) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Coi (*) là PT bậc hai ẩn là 3, ta có:

$$\Delta = (2x + 1)^2 - 4(x^2 - \sqrt{x}) = 4x + 4\sqrt{x} + 1 = (2\sqrt{x} + 1)^2.$$

Từ đó

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{2x + 1 + 2\sqrt{x} + 1}{2} \\ 3 = \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x} - 2 = 0 \quad (2) \\ x - \sqrt{x} - 3 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Giải (2) ta được nghiệm $x = 1$. Giải (3) ta được

$$\text{nghiệm } \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^2.$$

Kết hợp với ĐK, PT(1) có nghiệm $x = 1$.

Thí dụ 3. Giải phương trình:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 15x - 25 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 5^2 - 3x \cdot 5 - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0.$$

Coi đây là PT bậc hai ẩn là 5, ta có:

$$\Delta = (3x)^2 - 4(-x^4 - x^3 + 2x^2) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 = (2x^2 + x)^2.$$

$$\text{Từ đó: } \begin{cases} 5 = \frac{3x + 2x^2 + x}{2} \\ 5 = \frac{3x - 2x^2 - x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 - x + 5 = 0 \end{cases}$$

Đến đây việc giải tiếp xin dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

$$1. x^4 - x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0.$$

(HD: Đưa về PT bậc hai ẩn $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5}^2 - 2x \cdot \sqrt{5} + x^2 - x^4 = 0).$$

$$2. x^2 + \sqrt{x+2} = 2.$$

$$3. x + \sqrt{11 + \sqrt{x}} = 11.$$

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

VƯƠNG ĐỨC THUẬN

(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Đối với học sinh lớp 8 khi chưa được học về công thức nghiệm giải phương trình bậc hai thì việc làm bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức có dạng phân thức gặp rất nhiều khó khăn. Trong quá trình giảng dạy tôi thường hướng dẫn các em làm theo phương pháp được trình bày như phần dưới đây:

1. Nhận xét

Tam thức $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) viết được dưới dạng $a(x+m)^2$ khi và chỉ khi $b^2 - 4ac = 0$ (các em tự chứng minh nhận xét trên như một bài tập).

2. Áp dụng

Bài 1. (Thi vào THPT chuyên Lê Quý Đôn Ninh Thuận năm học 2014 - 2015).

Tìm GTLN, GTNN của $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

Phân tích. $A = \frac{4x+3}{x^2+1} = a + \frac{4x+3-a}{x^2+1}$

Để $-ax^2 + 4x + 3 - a$ viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức thì

$$4^2 + 4a(3-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Với $a = -1$ ta có:

$$A = -1 + \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1} = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2 + 1}$$

Từ đó tìm được $\min A = -1 \Leftrightarrow x = -2$.

- Với $a = 4$ ta có:

$$A = 4 + \frac{-4x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2 + 1}$$

Từ đó tìm được $\min A = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có:

$$A = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{-x^2 - 1 + x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1} = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2 + 1}$$

Do $\frac{(x+2)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ với mọi x nên $A \geq -1$ với mọi x .

$$A = -1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy $\min A = -1 \Leftrightarrow x = -2$.

Mặt khác:

$$A = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{4x^2 + 4 - 4x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2 + 1}$$

Do $\frac{(2x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ với mọi x nên $A \leq 4$ với mọi x .

$$A = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max A = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Việc tìm ra được cách tách như trên không hề dễ dàng với mỗi bài toán. Tuy nhiên khi sử dụng nhận xét trên thì việc tìm được a trong thí dụ trên lại khá đơn giản từ đó ta dễ dàng tìm được GTLN, GTNN. Ta tiếp tục xét các thí dụ tương tự.

Bài 2. Tìm GTLN của $B = \frac{5x^2 + 10x + 42}{x^2 + 2x + 7}$

Phân tích. Ta có: $B = \frac{5x^2 + 10x + 42}{x^2 + 2x + 7}$

$$= a + \frac{(5-a)x^2 + (10-2a)x + 42-7a}{x^2 + 2x + 7}$$

- Với $a = 5$ thì $B = 5 + \frac{7}{x^2 + 2x + 7}$ do đó B

không có giá trị nhỏ nhất.

- Với $a \neq 5$: Để $(5-a)x^2 + (10-2a)x + 42-7a$ viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức thì:

$$(10-2a)^2 - 4(5-a)(42-7a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{37}{6}.$$

- Với $a = \frac{37}{6}$ thì

$$B = \frac{37}{6} - \frac{7}{6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+7} = \frac{37}{6} - \frac{7}{6} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+7} \leq \frac{37}{6}.$$

$$B = \frac{37}{6} \Leftrightarrow x = -1. \text{ Vậy } \max B = \frac{37}{6} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bài 3. Tìm GTNN của $C = \frac{(5x+8)(2x+5)}{x}$

với $x > 0$.

Phân tích. Ta có:

$$C = \frac{(5x+8)(2x+5)}{x} = \frac{10x^2 + 41x + 40}{x} \\ = a + \frac{10x^2 + (41-a)x + 40}{x}.$$

Để $10x^2 + (41-a)x + 40$ viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức thì

$$(41-a)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 40 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 82a + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=81 \end{cases}.$$

- Với $a = 1$ ta có

$$C = 1 + \frac{10(x^2 + 4x + 4)}{x} = 1 + \frac{10(x+2)^2}{x}.$$

Do $x > 0$ nên C không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

- Với $a = 81$ ta có

$$C = 81 + \frac{10(x^2 - 4x + 4)}{x} = 81 + \frac{10(x-2)^2}{x} \geq 81.$$

Vậy $\min C = 81 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Bài 4. (Thi vào THPT chuyên Bến Tre năm học 2014 - 2015). Tìm GTNN của biểu thức

$$D = \frac{x^2 - 2x + 2014}{x^2}, \text{ với } x \neq 0.$$

Phân tích: Ta có:

$$D = \frac{x^2 - 2x + 2014}{x^2} = a + \frac{(1-a)x^2 - 2x + 2014}{x^2}.$$

- Với $a = 1$ khi đó $D = 1 + \frac{-2x + 2014}{x^2}$ không có GTLN và GTNN.

- Với $a \neq 1$: Để $(1-a)x^2 - 2x + 2014$ viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức thì:

$$(-2)^2 - 4 \cdot (1-a) \cdot 2014 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 8056 + 8056a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2013}{2014}.$$

$$\text{Với } a = \frac{2013}{2014} \text{ thì } D = \frac{x^2 - 2x + 2014}{x^2}$$

$$= \frac{2013}{2014} + \frac{\frac{1}{2014}(x^2 - 2x \cdot 2014 + 2014^2)}{x^2}$$

$$= \frac{2013}{2014} + \frac{1}{2014} \frac{(x-2014)^2}{x^2} \geq \frac{2013}{2014}.$$

$$\text{Do đó } \min D = \frac{2013}{2014} \Leftrightarrow x = 2014 \text{ (thỏa mãn).}$$

Qua ví dụ trên các em có thể áp dụng để làm các bài tập tương tự:

Bài 1. (Thi vào THPT chuyên Trà Vinh năm học 2014 - 2015). Tìm GTLN, GTNN của $y = \frac{6-4x}{x^2+1}$.

Bài 2. (Thi vào THPT chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh năm học 2002 - 2003).

$$\text{Tìm GTLN, GTNN của } y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}.$$

Bài 3. Tìm GTNN của $P = \frac{x+8}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$.

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của:

$$Q = \frac{4x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} \text{ với } x \geq 0.$$

Bài 5. Tìm m để phân thức $M = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ đạt GTNN bằng -1 và GTLN bằng 1 .



Bài 4. CÓ BAO NHIÊU SỐ 0?

Ký hiệu $n!$ là tích của n số tự nhiên khác 0 đầu tiên, nghĩa là $n! = 1.2.3 \dots n$. Hỏi có bao nhiêu số 0 đứng ở vị trí cuối của số $150!$?

Lời giải. Số các số 0 ở vị trí cuối của một số thì bằng số mũ lớn nhất của 10 mà số này chia hết cho $10 = 2.5$.

Số mũ của lũy thừa của 2 chứa trong tích số của tất cả các số nguyên, từ 1 đến 150 thì lớn hơn số mũ của lũy thừa của 5 chứa trong tích số này. Do đó số số mũ cao nhất của lũy thừa của 10 mà tích $150!$ chia hết (số mũ này chính là số các số 0 ở vị trí cuối của tích) thì bằng số mũ của lũy thừa của 5 chứa trong tích.

Giữa những số từ 1 đến 150 có 30 số là bội của 5; trong 30 số là bội của 5 đó có 6 số là bội của $25 = 5^2$ (25, 50, 75, 100, 125, 150); trong 6 số là bội của 25 có một số là bội của $125 = 5^3$ (là 125) (xem bảng số dưới).

Như vậy tổng các số mũ của lũy thừa của 5 chứa trong tích $150! = 1.2.3 \dots 150$ bằng 37. Vì vậy có đúng 37 số 0 đứng ở vị trí cuối của số $150!$.

1	2	3	4	5	6	7	8	10
11		15		20		25		30
21		25		30		35		40
31		35		40		45		50
41		45		50		55		60
51		55		60		65		70
61		65		70		75		80
71		75		80		85		90
81		85		90		95		100
91		95		100		105		110
101		105		110		115		120
111		115		120		125		130
121		125		130		135		140
131		135		140		145		150
141		145		150				

Cách 2. Lập luận như cách 1 đi đến khẳng định: Số số mũ cao nhất của lũy thừa của 10 mà tích $150!$ chia hết thì bằng số mũ của lũy thừa của 5 chứa trong tích.

Sử dụng công thức Polignac, ta có số mũ cao nhất của 5 trong phân tích $150!$ ra thừa số nguyên tố là:

$$\left[\frac{150}{5} \right] + \left[\frac{150}{5^2} \right] + \left[\frac{150}{5^3} \right] + \left[\frac{150}{5^4} \right] + \dots = \left[\frac{150}{5} \right] + \left[\frac{150}{5^2} \right] + \left[\frac{150}{5^3} \right] = 37.$$

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)

Bài 5. LẬP MA PHƯƠNG TỪ SỐ 2016

Bạn hãy phân tích số 2016 thành tổng của 9 số tự nhiên liên tiếp rồi điền mỗi số hạng đó vào một ô vuông của hình vuông kích thước 3×3 ô vuông ở hình bên để tạo thành một ma phương bậc ba (tổng

ba số mỗi hàng bằng tổng ba số mỗi cột và bằng tổng ba số mỗi đường chéo hình vuông) với a là số hạng nhỏ nhất và b là số hạng lớn nhất.

a		b

Lời giải. Theo giả thiết có $2016 = x + (x + 1) + \dots + (x + 8) = 9x + 36$, suy ra $x = 220$ và $x + 8 = 228$. Tổng ba số của một hàng bằng $2016 : 3 = 672$. Từ đó số ở tâm hình vuông bằng $672 - (220 + 228) = 224$. Tổng hai số còn lại ở cột thứ nhất, thứ hai, thứ ba theo thứ tự bằng 452, 458, 444. Bài toán có hai nghiệm như sau.

225	226	221
220	224	228
227	222	223

227	222	223
220	224	228
225	226	221

Nhận xét. Nhiều bạn chỉ nêu ra một nghiệm. Chú ý rằng trong một ma phương bậc ba nếu đổi hàng thứ nhất và ba cho nhau thì lại được ma phương.

HOÀNG NGUYỄN (Nghệ An)

Bài 6. CHIA ĐÔI HÌNH TAM GIÁC

Cho tam giác ABC và điểm E nằm bên trong tam giác ABC . Hãy tìm một điểm G nằm trên cạnh của tam giác ABC sao cho đường gấp khúc AEG phân chia tam giác ABC thành hai đa giác với diện tích bằng nhau.

Lời giải. Gọi D, M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AB, AC . Xét các trường hợp sau:

1) Điểm E nằm trên đoạn AD thì điểm G trùng với điểm D .

2) Điểm E nằm trên đoạn MD thì $S_{AEC} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

(đáy chung là AC , chiều cao bằng nhau), lúc đó điểm G trùng với điểm C . Xét tương tự khi điểm E nằm trên đoạn ND , khi đó điểm G trùng với điểm B .

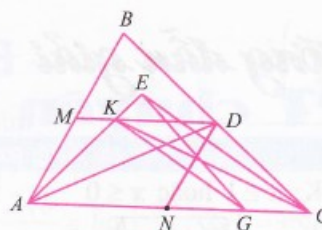
3) Điểm E nằm trong tam giác BMD , giả sử đoạn AE cắt đoạn MD tại điểm K (hình 1). Nối EC . Kẻ $KG \parallel EC$ và cắt AC tại G thì $S_{KEG} = S_{KCG}$ (đáy chung là KG , chiều cao bằng nhau), từ đó $S_{AEG} = S_{AKG} + S_{KEG} =$

$S_{AKG} + S_{KCG} = S_{AKC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Xét tương tự khi điểm E nằm trong tam giác CND , khi đó điểm G thuộc cạnh AB .

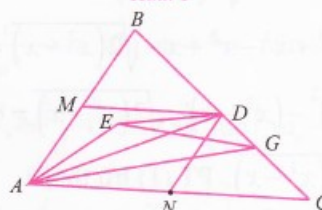
4) Điểm E nằm trong tam giác AMD (hình 2). Nối ED . Kẻ $AG \parallel ED$ và cắt DC tại G thì $S_{AEG} = S_{ADG}$ (đáy chung là AG , chiều cao bằng nhau), từ đó $S_{AEGC} = S_{AEG} + S_{AGC} = S_{ADG} + S_{AGC} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Xét tương tự

khi điểm E nằm trong tam giác AND , khi đó điểm G thuộc đoạn BD .

Nhận xét. Nhiều bạn không xét đầy đủ các vị trí của điểm E .



Hình 1



Hình 2

PHI PHI (Hà Nội)



**Kết quả cuộc thi
ĐÓ VUI NGÀY HÈ 2016**



☆ Giải Nhất (1 giải)

1. **Đàm Ngọc Hiếu**, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa, **Phú Yên**.

☆ Giải Nhì (2 giải)

1. **Trương Nhật Nguyên Bảo**, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Quảng Nam**.

2. **Nguyễn Huy Hải**, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Quảng Nam**.

☆ Giải Ba (5 giải)

1. **Châu Minh Khánh**, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**.

2. **Nguyễn Phùng Thái Cường**, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An**.

3. **Nguyễn Thanh Trung**, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

4. **Cao Ngọc Toàn**, Giáo viên THPT Tân Quang, Phong Điền, **Thừa Thiên Huế**.

5. **Đoàn Thị Nhài**, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

☆ Giải Khuyến khích (12 giải)

1. **Trần Tiến Mạnh**, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.

2. **Nguyễn Huỳnh Ngọc Anh**, 5B, TH Số 2 Hòa Xuân Tây, Đông Hòa, **Phú Yên**.

3. **Lê Trí Phú**, 10T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.

4. **Lê Minh Quân**, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**.

5. **Phạm Ngọc Thanh Học**, 5A, TH Số 2 Hòa Xuân Tây, Đông Hòa, **Phú Yên**.

6. **Phan Thị Ánh Hồng**, 5E, TH Số 2 Hòa Vinh, Đông Hòa, **Phú Yên**.

7. **Nguyễn Ngọc Khánh Như**, 10T0, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**.

8. **Mẫn Đức Bình Minh**, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

9. **Trần Trung Kiên**, 10A1, THPT Số 2 Phú Cát, **Bình Định**.

10. **Trần Thị Hồng**, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội**.

11. **Đặng Duy Bảo Khánh**, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.

12. **Lê Ngọc Tài Tâm**, 11A, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, **Hà Tĩnh**.

Giải thưởng của Tạp chí:

Giải Nhất: Giấy Chứng nhận + Cuốn sách mới *Những con đường sáng tạo trong giải Toán hình học* + Tiền thưởng.

Giải Nhì: Giấy Chứng nhận + Cuốn sách mới *Những con đường sáng tạo trong giải Toán hình học* + Tiền thưởng.

Giải Ba: Giấy Chứng nhận + Cuốn sách mới *Những con đường sáng tạo trong giải Toán hình học* + Tiền thưởng.

Giải Khuyến Khích: Giấy Chứng nhận + Cuốn sách mới *Những con đường sáng tạo trong giải Toán hình học*.

Các bạn đoạt giải gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT chuyên TP. Hà Nội NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 471, tháng 9 năm 2016)

Bài 1. 1) ĐK: $x \geq 1$ hoặc $x \leq 0$

$$x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{2(x^2 - x)}$. PT (1) trở thành

$$\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t = 0 \Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 2$$

TH1: $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn ĐK)

TH2: $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x)} = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy tập nghiệm của PT là $S = \{-1; 0; 1; 2\}$.

2) Cộng theo vế hai PT trong hệ ta được

$$4x^2 - 4xy^2 + y^4 + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y^2)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Thử lại ta được $x = y = 2$. Vậy nghiệm (x; y) của hệ PT đã cho là (2; 2).

Bài 2. 1) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a=b=c \end{cases}$$

Vì a, b, c đôi một khác nhau nên $a+b+c = 0$.

$$P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$$

$$= \frac{ab^2}{-2ab} + \frac{bc^2}{-2bc} + \frac{ca^2}{-2ca} = \frac{-1}{2}(a+b+c) = 0.$$

$$2) 2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16 \Leftrightarrow 2^x \cdot x^2 = (3y+1)^2 + 15$$

TH1: x lẻ $\Rightarrow x = 2k+1 \Rightarrow 2^{2k+1} \cdot x^2 = 2 \cdot 4^k \cdot x^2$.

Vì 4^k chia 3 dư 1 và x^2 chia 3 dư 0 hoặc 1 nên $2 \cdot 4^k \cdot x^2$ chia 3 dư 0 hoặc 2. Mà $(3y+1)^2 + 15$ chia 3 dư 1.

Vậy trường hợp này không thỏa mãn.

TH2: Nếu x chẵn $\Rightarrow x = 2k$ thì

$$2^{2k} \cdot x^2 - (3y+1)^2 = 15$$

$$\Rightarrow (2^k \cdot x - 3y - 1)(2^k \cdot x + 3y + 1) = 15.$$

Vì $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (2^k \cdot x + 3y + 1) > (2^k \cdot x - 3y - 1)$ nên

$$*) \begin{cases} 2^k \cdot x - 3y - 1 = 1 \\ 2^k \cdot x + 3y + 1 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2^k \cdot 2k = 8 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$*) \begin{cases} 2^k \cdot x - 3y - 1 = 3 \\ 2^k \cdot x + 3y + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2^k \cdot 2k = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ và } 2^k = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$ và $y = 0$.

$$\begin{aligned} B. 1) & \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \\ &= \left(2a - \frac{2ab^2}{a+b^2}\right) + \left(2b - \frac{2bc^2}{b+c^2}\right) + \left(2c - \frac{2ca^2}{c+a^2}\right) \\ &= 2(a+b+c) - \left(\frac{2ab^2}{a+b^2} + \frac{2bc^2}{b+c^2} + \frac{2ca^2}{c+a^2}\right). \end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $a+b^2 \geq 2b\sqrt{a}$; $b+c^2 \geq 2c\sqrt{b}$; $c+a^2 \geq 2a\sqrt{c}$, suy ra

$$\begin{aligned} \left(\frac{2ab^2}{a+b^2} + \frac{2bc^2}{b+c^2} + \frac{2ca^2}{c+a^2}\right) &\leq (b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}) \\ &\leq \frac{b+ab}{2} + \frac{c+bc}{2} + \frac{a+ca}{2}. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2(a+b+c) - \frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2} \geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) - (ab+bc+ca) \geq 0.$$

Vì $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9$ nên $a+b+c \leq 3$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c.$$

2) Đặt $A = 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$. Ta có

$$A-2=2\sqrt{12n^2+1} \Rightarrow A^2-4A=48n^2 \quad (1)$$

Từ (1) ta có $A^2:4 \Rightarrow A:2 \Rightarrow A=2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Thay vào (1) ta được $k^2 - 2k = 12n^2$ (2)

Từ (2) có $k:2 \Rightarrow k=2m$.

Thay vào (2) được $m(m-1) = 3n^2$.

Vì $(m, m-1) = 1$ nên $m \vdots 3$ hoặc $(m-1) \vdots 3$.

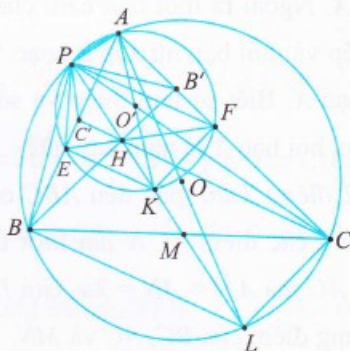
$$\text{TH1: } m \equiv 3 \Rightarrow m = 3a^2 \text{ và } m-1 = b^2 \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\Rightarrow 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow b^2 + 1 = 3a^2 : 3 \text{ (vô lý).}$$

TH2: $m-1 \vdots 3 \Rightarrow m = a^2$ và $m-1 = 3b^2 (a, b \in \mathbb{Z}^+)$

$$\Rightarrow A = 4m = 4a^2 = (2a)^2 \text{ là số chính phương.}$$

Bài 4. 1)



Gọi L là điểm đối xứng của A qua $O \Rightarrow BHCL$ là hình bình hành $\Rightarrow HL$ đi qua trung điểm của BC . Do đó P, H, M, L cùng nằm trên một đường thẳng $\Rightarrow \widehat{APH} = 90^\circ \Rightarrow A, P, C', H, B'$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \widehat{APC'} = \widehat{AC'P}$

$$\Rightarrow \widehat{PC'B} = \widehat{PB'C}. \text{ Lại có:}$$

$$\widehat{PBC'} = \widehat{PBA} = \widehat{PCA} = \widehat{PCB'}$$

$$\Rightarrow \Delta PBC' \sim \Delta PCB'.$$

2) PE là phân giác $\widehat{BPC'} \Rightarrow \frac{EB}{EC'} = \frac{PB}{PC'}$ (1)

tương tự $\frac{FC}{FB'} = \frac{PC}{PB'}$ (2).

$$\text{Mà } \frac{PB}{PC'} = \frac{PC}{PB'} \quad (3).$$

$$\text{Tür (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{EB}{EC'} = \frac{FC}{FB'} \quad (4)$$

Ta có $\Delta BHC' \sim \Delta CHB'$ (5)

Từ (4), (5) suy ra E, H, F thẳng hàng và

$$\frac{PE}{PF} = \frac{HE}{HF} \Rightarrow PH \text{ là phân giác của góc}$$

$\widehat{EPF} \Rightarrow PH$ đi qua điểm chính giữa của cung

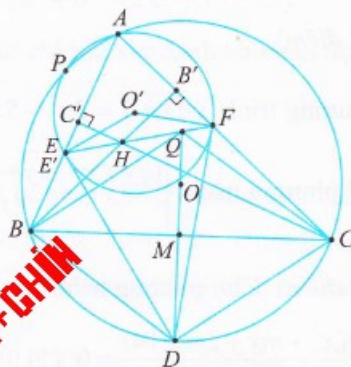
$\widehat{EF}$ không chứa A .

Lại có $\triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow AO'$ là phân giác

của $\widehat{EAF} \Rightarrow AO'$ đi qua điểm chính giữa của
cung EF không chứa A .

Từ đó K là giao điểm AO' với PH thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Suy ra tứ giác $PEKF$ nội tiếp

3) Gọi D là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, Q là điểm đối xứng của D qua BC thì tứ giác $BHQC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBQ} = \widehat{HCQ}$.



Gọi E' là giao điểm của HQ và AB

$$\Rightarrow \widehat{BHE'} = \widehat{QCB}.$$

Lại có $\begin{cases} \widehat{QHC} = \widehat{QBC} \\ \widehat{QHC} = \widehat{E'HC'} \Rightarrow \widehat{BHE'} = \widehat{C'HE'} \\ \widehat{QBC} = \widehat{QCB} \end{cases}$

$$\Rightarrow HE' \text{ là phân giác của } \widehat{BHC'} \Rightarrow E' \equiv E,$$

hay $Q \in EF$. Ta có DQ là phân giác của $\widehat{BDC}$

$$\Rightarrow \widehat{QDB} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \widehat{AEF}$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BDQE$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{BED} = \widehat{BQD} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{AEO'} + \widehat{BED} = 90^\circ \Rightarrow O'E \perp DE$$

$\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của (O') .

Tương tự DF là tiếp tuyến đường tròn (O') .

Do đó các tiếp tuyến của đường tròn (O') tại E và F cắt nhau tại điểm D nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ (đpcm).

(Xem tiếp trang 9)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK, ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1 (không chuyên)

(Thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1. (1 điểm) Biết a và b là các số dương,

$$a \neq b \text{ và } \left(\frac{a(a-4b)+b(b+2a)}{a+b} \right):$$

$$\left[\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) \right] = 2016$$

Tính $S = a + b$.

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình $x\sqrt{x+5} = 2x^2 - 5x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (\sqrt{y}+x-3)(y+\sqrt{x})=0 \\ x^2+y=5 \end{cases}$.

Câu 3. (2 điểm) Cho phương trình

$$\frac{(x+1)(x^2+mx+2m+14)}{\sqrt{x}} = 0 \quad (1)$$

a) Giải phương trình (1) khi $m = -8$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$$\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m+14} = \sqrt{x_1}.$$

Câu 4. (2 điểm) a) Ông An định cải tạo một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng 2,5 chiều rộng. Ông thấy rằng nếu đào một cái hồ có mặt hồ là hình chữ nhật thì sẽ chiếm mất 3%

diện tích mảnh vườn, còn nếu giảm chiều dài 5m và tăng chiều rộng 2m thì mặt hồ là hình vuông và diện tích mặt hồ giảm được $20m^2$. Hãy tính các cạnh của mảnh vườn.

b) Lớp 9A có 27 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Nhân dịp sinh nhật bạn X (là một thành viên trong lớp), các bạn trong lớp có rất nhiều món quà tặng X. Ngoài ra mỗi bạn nam của lớp làm 3 tấm thiệp và mỗi bạn nữ xấp 2 hoặc 5 con hạc để tặng bạn X. Biết số tấm thiệp và số con hạc bằng nhau, hỏi bạn X là nam hay nữ?

Câu 5. (2 điểm) Tam giác đều ABC có tâm O , $AB = a$ và các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, AC mà $AM = AN = 2a$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC và MN .

a) Chứng minh các điểm M, N, B, C cùng thuộc một đường tròn T . Tính diện tích tứ giác $BMNC$ theo a .

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK . Chứng minh đường tròn đường kính NC tiếp xúc với AI .

c) AE tiếp xúc với đường tròn T tại E (E và B cùng phía đối với đường thẳng AI). Gọi F là trung điểm của OE , tính số đo của $\widehat{AFJ}$.

VÒNG 2 (chuyên)

(Thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1. (2.5 điểm) a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-2y)(x+my) = m^2 - 2m - 3 \\ (y-2x)(y+mx) = m^2 - 2m - 3 \end{cases} \text{ khi } m = -3 \text{ và}$$

tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm (x_0, y_0) thỏa $x_0 > 0, y_0 > 0$.

b) Tìm $a \geq 1$ để phương trình

$ax^2 + (1-2a)x + 1-a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, y_2 thỏa mãn $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Câu 2. (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên dương mà $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy .



a) Chứng minh x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

b) Chứng minh $k = \frac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Câu 3. (1,5 điểm) Biết $x \geq y \geq z, x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

a) Tính $S = (x - y)^2 + (x - y)(y - z) + (y - z)^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = |(x - y)(y - z)(z - x)|.$$

Câu 4. (3 điểm) Tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} > 45^\circ$. Dựng các hình vuông $ABMN, ACPQ$ (M và C khác phía đối với AB, B và Q khác phía đối với AC). AQ cắt đoạn BM tại E và NA cắt đoạn CP tại F .

a) Chứng minh $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ và tứ giác $EFQN$

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 7)

Bài 5

Không mất tính tổng quát ta cho là các số đều là số nguyên dương và không cùng chẵn.

Gọi S là tổng của tất cả các số trong đề bài. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: S là số chẵn.

Ta có các số không thể cùng là số lẻ, suy ra có ít nhất một số chẵn, do đó có hai số cạnh nhau khác tính chẵn lẻ, bỏ đi hai số này ta thấy các số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở hai nhóm bằng nhau.

Trường hợp 2: S là số lẻ.

là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

c) MN cắt PQ tại D , các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K ($K \neq D$), các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J . Chứng minh các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5. (1 điểm) Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, ký hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m . Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số $n_1 = n_0 - s(n_0)$, $n_2 = n_1 - s(n_1), \dots, n_{i+1} = n_i - s(n_i), \dots$. Chứng minh tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16} \cdot 14^{17}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)

Giới thiệu

lên tại hai số cạnh nhau có cùng tính chẵn lẻ (vì nếu không chúng sẽ chẵn-lẻ luân phiên, không thể xảy ra điều này vì 2017 là số lẻ), bỏ đi hai số này ta thấy các số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở hai nhóm bằng nhau.

Vậy luôn tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn để khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

DƯƠNG TÚ (Hà Nội)

Giới thiệu

THÔNG BÁO CHUYỂN TRỤ SỞ LÀM VIỆC

Từ ngày 2 tháng 10 năm 2016, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ chuyển Trụ sở về địa điểm mới:

Tầng 12 - Tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội.

Bạn đọc liên hệ, gửi bài về Tòa soạn theo địa chỉ trên.

Số điện thoại và Email của Tạp chí vẫn giữ nguyên, SĐT: 04.35121606 - 04.35121607,

Email: toanhocvuotrivietnam@gmail.com.



MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC VUÔNG CÂN

NGUYỄN VĂN HOÀNG

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

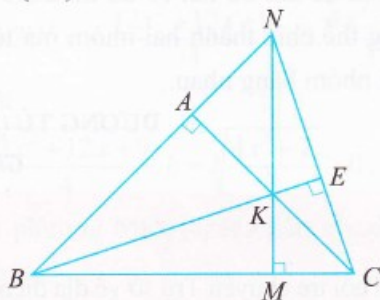
Các hình đặc biệt luôn có nhiều tính chất đẹp, tam giác vuông cân là một trong những hình như thế. Khi khai thác tam giác vuông cân ta thấy xuất hiện nhiều tính chất khá thú vị. Một trong những yêu cầu của bài toán hình học tọa độ là phát hiện ra một số tính chất hình học như: vuông góc, song song, hai góc bằng nhau, đường trung trực, ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường tròn,... và có kiến thức cũng như kỹ năng chứng minh các tính chất trên. Trong bài viết này tác giả đưa ra một số tính chất của tam giác vuông cân và các thí dụ tương ứng để giúp thêm học sinh chuẩn bị tốt kiến thức về hình học tọa độ và có thể tiếp cận với nhiều bài toán mới.

Tính chất 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại

A . Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Thí dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , ΔABC vuông cân tại A . Gọi K là trung điểm đoạn AC . Đường thẳng qua C vuông góc với BK cắt đường thẳng AB tại $N(2;3)$. Tìm tọa độ A, B, C biết $BC:3x+y-15=0$ và điểm B có tung độ nhỏ hơn 2.

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Đường thẳng AB qua N và tạo với đường thẳng BC một góc 45° nên ta lập phương trình đường

thẳng như sau: Gọi $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là một VTPT của đường thẳng AB và $\vec{n}_1 = (3; 1)$ là một VTPT của đường thẳng BC . Khi đó:

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|3a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = -2b \end{cases}$$

Với $a = -2b \Rightarrow AB: -2x + y - 5 = 0 \Rightarrow B(2; 9)$ (loại).

Với $b = 2a \Rightarrow AB: x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow B(5; 0)$ (thỏa mãn).

Gọi M là hình chiếu vuông góc của N trên đường thẳng BC . Khi đó PT đường thẳng MN là: $x - 3y + 10 = 0$.

Vì $M = MN \cap BC$ nên $M\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Từ $\Delta CMK \sim \Delta CAB$ suy ra: $CM \cdot CB = CK \cdot CA$

$$\Rightarrow CM = \frac{CK \cdot CA}{CB} = \frac{CA^2}{2\sqrt{2}CA} = \frac{CA}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}CB.$$

Suy ra $\overline{CM} = \frac{1}{4}\overline{CB}$, tìm được $C(3; 6)$.

Đường thẳng AC có PT: $2x - y = 0$.

Từ đó $A(1; 2)$. Vậy $A(1; 2)$, $B(5; 0)$ và $C(3; 6)$.

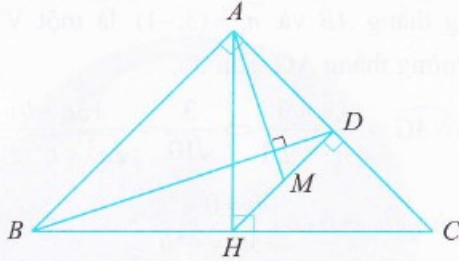
Bình luận. Có thể tìm tọa độ B bằng cách khác như sau: Viết PT đường thẳng NM và tìm tọa độ của M . Vì ΔMBN là tam giác vuông cân nên tìm được tọa độ điểm B . Ta có thể tìm tọa độ điểm C bằng cách khác như sau: Vì ΔANK và ΔMKC là các tam giác

$$\text{vuông cân nên: } \frac{NK}{MK} = \frac{\sqrt{2}AK}{\frac{KC}{\sqrt{2}}} = 2 \Rightarrow \overline{NK} = 2\overline{KM}.$$

Từ đó tìm được tọa độ điểm K . Viết phương trình đường thẳng AC qua K và tạo với đường thẳng BC một góc 45° . Khi đó tìm được tọa độ điểm C và B .

Tính chất 2. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên đường thẳng AC và M là trung điểm của đoạn HD . Khi đó $AM \perp BD$.

Chứng minh. (h.2)



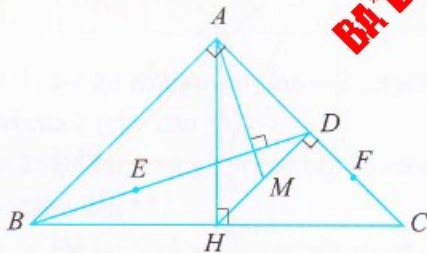
Hình 2

Vì $\frac{AB}{AD} = 2 = \frac{AD}{DM}$ nên $\triangle ABD \sim \triangle DAM$, suy ra

$\widehat{DAM} = \widehat{ABD}$. Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại A nên AM là đường cao của $\triangle ABD$ hay $AM \perp BD$ (đpcm).

Thí dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có H là trung điểm của BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC và M là trung điểm HD . Đường thẳng BD qua $E(0;4)$ và đường thẳng AC qua $F(-1;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết đường thẳng AM có phương trình $x - 3y + 14 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Đường thẳng BD qua E và $BD \perp AM$ (chứng minh trên) nên có PT: $3x + y - 4 = 0$.

Đường thẳng AC qua F tạo với AM góc $\widehat{DAM}$ mà: $\tan \widehat{DAM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \widehat{DAM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Gọi $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là một VTPT của đường thẳng AC và $\vec{n}_1 = (1; -3)$ là một VTPT của đường thẳng AM . Khi đó:

$$\cos \widehat{DAM} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 + 6ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ b = 7a. \end{cases}$$

Với $b = -a \Rightarrow AB: x - y + 6 = 0$

$\Rightarrow A(-2; 4)$ (thỏa mãn).

Với $b = 7a \Rightarrow AC: x + 7y - 34 = 0$

$\Rightarrow A\left(\frac{2}{5}; \frac{24}{5}\right)$ (loại).

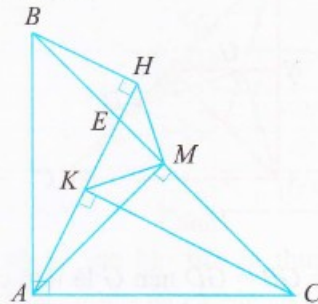
Vì $D = AC \cap BD$ nên $D\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ và $C(1; 7)$.

Phương trình của HD : $x + y - 5 = 0 \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{19}{4}\right)$
 $\Rightarrow H(1; 4) \Rightarrow B(1; 1)$.

Vậy $A(-2; 4), B(1; 1), C(1; 7)$.

Tính chất 3. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC . Lấy E là điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng AE . Khi đó $\triangle MHK$ là tam giác vuông cân tại M .

Chứng minh. (h.4)



Hình 4

Ta có hai tứ giác $AKMC$ và $ABHM$ là các tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{MKH} = \widehat{ACM} = 45^\circ, \widehat{MHK} = \widehat{MBA} = 45^\circ$$

Suy ra $\triangle MHK$ vuông cân tại M .

Thí dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $M\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm BC . Lấy điểm E trên cạnh BC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên AE . Tìm tọa độ A, B, C biết $H(2; 4)$, K là trung điểm của HA và K có hoành độ nhỏ hơn 2.

Lời giải. (h.4) Theo chứng minh trên ΔMHK là tam giác vuông cân tại M , nên đường thẳng MK qua M vuông góc HM có PT: $x - 3y + 5 = 0$.

Gọi $K(3a - 5; a) \in MK$. Vì $MH = MK$ nên tìm được $K(1; 2)$ hoặc $K(4; 3)$ (loại).

Vì K là trung điểm HA nên $A(0; 0)$.

Đường thẳng BH qua H và vuông góc AH nên có PT: $x + 2y - 10 = 0$.

Gọi $B(10 - 2b; b) \in BH$. PT đường trung trực của HM là $d: 2x - 6y + 15 = 0$.

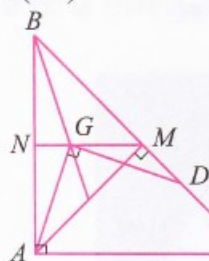
Trung điểm AB thuộc d nên có PT

$$2\left(\frac{10 - 2b}{2}\right) - 6\frac{b}{2} + 15 = 0 \Leftrightarrow b = 5.$$

Do đó $B(0; 5)$. Vì M là trung điểm BC nên $C(5; 0)$. Vậy $A(0; 0), B(0; 5), C(5; 0)$.

Tính chất 4. Cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC . Gọi G là trọng tâm tam giác ABM và D là điểm thuộc đoạn MC sao cho $GA = GD$. Khi đó ΔAGD vuông cân tại G .

Chứng minh. (h.5)



Hình 5

Ta có $GA = GB = GD$ nên G là tâm của đường tròn (ABD) .

Mặt khác $\widehat{B} = 45^\circ$ nên $\widehat{AGD} = 2\widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AGD$ vuông cân tại G .

Thí dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A , gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABM . Điểm $D(7; -2)$ thuộc đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình đường thẳng AB biết $AG: 3x - y - 13 = 0$ và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 4.

Lời giải. (h.5) Ta có

$$GA = GD = d(D; AG) = \sqrt{10} \Rightarrow AD^2 = 20.$$

$$\text{Gọi } A(a; 3a - 13), a < 4. \text{ Từ } AD^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow (a - 7)^2 + (3a - 11)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = 5 \text{ (loại), suy ra } A(3; -4).$$

Gọi $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là một VTPT của đường thẳng AB và $\vec{n}_1 = (3; -1)$ là một VTPT của đường thẳng AG . Khi đó:

$$\cos \widehat{NAG} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|3a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 6ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a = -4b \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 0 \Rightarrow AB: x - 3 = 0.$$

$$\text{Với } 3a = -4b \Rightarrow AB: 4x - 3y - 24 = 0.$$

Nhận thấy với $AB: 4x - 3y - 24 = 0$ ta có

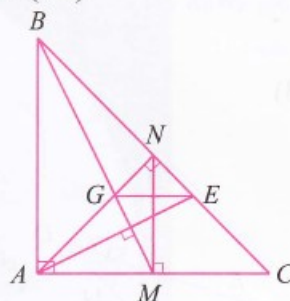
$$d(D; AB) = 2 < d(D; AG) = \sqrt{10},$$

trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy $A(3; -4)$ và $AB: x - 3 = 0$.

Tính chất 5. Cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AC và BC , G là trọng tâm ΔABC . Đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt BC tại E . Khi đó NM là đường trung trực của GE .

Chứng minh. (h.6)



Hình 6

Ta có G là trọng tâm ΔABE nên $GE \perp NM$, mặt khác ΔABC vuông cân nên ΔNAC vuông cân nên ΔNGE vuông cân, do đó NM là đường trung trực của GE .

Thí dụ 5. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . M là trung điểm AC . Đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt AC tại $E(2; 1)$. Trọng tâm ΔABC là $G(2; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C .

Lời giải. (h.6) Theo chứng minh trên NM là đường trung trực của GE nên phương trình $MN: y = \frac{3}{2}$.

Gọi $N\left(n; \frac{3}{2}\right) \in MN$. Ta có $GN = \frac{1}{\sqrt{2}}GE = \frac{1}{\sqrt{2}}$

nên: $(n-2)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$ hoặc $n = \frac{5}{2}$.

Do đó ta tìm được $N\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $N\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Với $N\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN} \Rightarrow A(3;3)$.

Đường thẳng $AC: x+y-3=0$. Vì $AC=3$ nên phương trình đường tròn tâm A bán kính AC có phương trình: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$. Từ đó tìm được $B(0;3), C(3;0)$.

Với $N\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$, giải tương tự ta tìm được

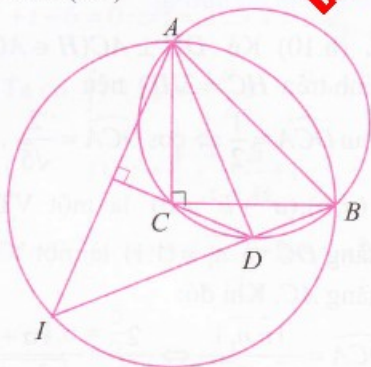
$A(1;3), B(4;3), C(1;0)$.

Vậy $A(3;3), B(0;3), C(3;0)$

hoặc $A(1;3), B(4;3), C(1;0)$.

Tính chất 6. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại C . Trên đường tròn (ABC) lấy điểm D (khác các điểm A, B, C). Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm C bán kính CA với đường thẳng BD . Khi đó CD là đường trung trực của AI .

Chứng minh. (h.7)



Hình 7

Do $\widehat{ACB} = 90^\circ$ nên $\widehat{AIB} = 45^\circ$ hoặc $\widehat{AIB} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 45^\circ$. Do đó $\triangle AID$ vuông cân tại D nên $DA = DI$, mà $CA = CI$ nên CD là đường trung trực của AI .

Thí dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho $\triangle ABC$ vuông cân tại $C(-2;1)$. Trên đường tròn đường kính AB lấy điểm $D(-1;-1)$. Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn $(C; CA)$ với BD . Tìm tọa độ A, B biết đường thẳng AI qua $M(-1;4)$ và A có hoành độ dương.

Lời giải. (h.7) Theo chứng minh trên đường thẳng CD là đường trung trực của AI nên phương trình $AI: x-2y+9=0$.

Gọi $A(2a-9;a) \in AI$. Vì $DA = \sqrt{2}d(D;AI) = 2\sqrt{10}$ nên ta có PT: $\sqrt{(2a-8)^2 + (a+1)^2} = 2\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = 5$.

Suy ra $A(1;5)$ hoặc $A(-7;1)$ (loại).

Ta có phương trình $BD: x+3y+4=0$.

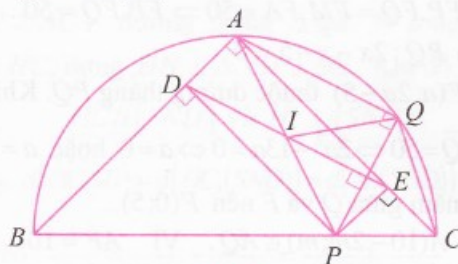
Gọi $B(-3b-4;b) \in BD$. Khi đó

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow 3(-3b-2) + 4(b-1) = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Do đó $B(2;-2)$. Vậy $A(1;5)$ và $B(2;-2)$.

Tính chất 7. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Lấy P là điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AC . Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng DE . Khi đó $PQ \perp QA$ và Q thuộc đường tròn (ABC) .

Chứng minh. (h.8)

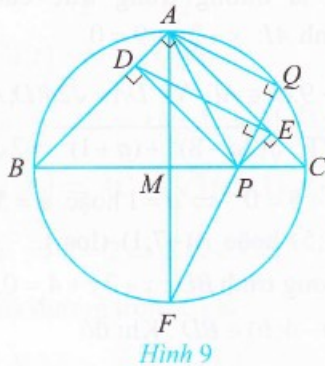


Hình 8

Gọi $I = AP \cap DE$. Khi đó $IA = IP = IQ$ nên $\triangle AQP$ vuông tại Q hay $AQ \perp QP$. Tiếp theo, vì $EP = EQ$ (P và Q đối xứng qua ED), mà $\triangle EPC$ vuông cân nên $EC = EP = EQ$. Do đó E là tâm của đường tròn (PQC) , do đó $\widehat{PQC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AQC} = 135^\circ$. Suy ra $\widehat{AQC} + \widehat{ABC} = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABCQ$ nội tiếp, nên Q thuộc (ABC) .

Thí dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm $P\left(\frac{5}{2}; 0\right)$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB và AC . Tìm tọa độ A, B, C biết $DE: 12x + 24y - 75 = 0$ và $BC = 10$ và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2.

Lời giải. (h.9)



Hình 9

Vì Q đối xứng với P qua DE nên $Q(4;3)$. Theo chứng minh trên $AQ \perp QP$ nên PT đường thẳng AQ là: $x + 2y - 10 = 0$.

Gọi $F = QP \cap AM$ với M là trung điểm BC . Theo chứng minh trên Q thuộc đường tròn (ABC) nên AF là đường kính của đường tròn (ABC) suy ra $AF = BC$. Khi đó tứ giác $AQPF$ nội tiếp nên:

$$FP \cdot FQ = FM \cdot FA = 50 \Rightarrow \overline{FP} \cdot \overline{FQ} = 50$$

Ta có $PQ: 2x - y - 5 = 0$.

Gọi $F(a; 2a - 5)$ thuộc đường thẳng PQ . Khi đó

$$\overline{FP} \cdot \overline{FQ} = 50 \Leftrightarrow 2a^2 - 13a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{13}{2}.$$

Vì P nằm giữa Q và F nên $F(0;5)$.

Gọi $A(10 - 2m; m) \in AQ$. Vì $AF = 10$ nên $A(0;5)$ hoặc $A(8;1)$. Chọn $A(0;5)$.

Khi đó $M(0;0)$ nên $MP: x = 0$.

Do đó $B(-5;0), C(5;0)$. Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $A(0;5), B(-5;0), C(5;0)$.

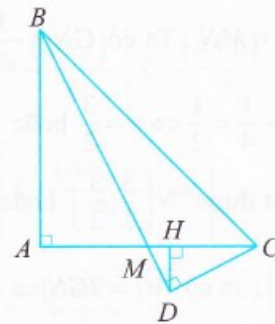
Bình luận. Việc lấy điểm F ở thí dụ 7 là tự nhiên vì đề bài cho đường kính của đường tròn (ABC) , mặt khác tọa độ điểm P, Q đã có. Đây có lẽ là mấu chốt để có lời giải bài toán như trên.

Tính chất 8. Cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm AC . Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BM . Gọi H là hình

chiếu vuông góc của D trên đường thẳng AC .

$$\text{Khi đó } \overline{AH} = \frac{3}{2} \overline{HC}.$$

Chứng minh. (h.10)



Hình 10

$$\text{Ta có } \cos \widehat{MBC} = \frac{MB^2 + BC^2 - MC^2}{2MB \cdot MC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{CAD} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan \widehat{CAD} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $AH = 3HD$. Mặt khác

$$\Delta CHD \sim \Delta AMD \Rightarrow \frac{HD}{HC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow HD = \frac{1}{2} HC$$

$$\text{Suy ra } \overline{AH} = \frac{3}{2} \overline{HC} \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm AC . Gọi $D(1; -3)$ là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BM . Tìm tọa độ A, B, C biết đường thẳng AC có PT: $x + y = 0$ và điểm C có hoành độ dương.

Lời giải. (h.10) Kê $DH \perp AC (H \in AC)$ theo chứng minh trên $HC = 2HD$ nên

$$\tan \widehat{DCA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \widehat{DCA} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Gọi $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ là một VTPT của đường thẳng DC và $\vec{n}_1 = (1; 1)$ là một VTPT của đường thẳng AC . Khi đó:

$$\cos \widehat{DCA} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = 3a \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 33)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp điểm có hoành độ bằng 2.

Câu 2. (1 điểm) a) Cho góc α thỏa mãn:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ và } 12\sin^2 \alpha - \cos \alpha - 6 = 0.$$

Tính $A = \frac{1 + \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$.

b) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức

$$(1-i)\bar{z} + (2+i)z = 5-4i.$$

Tính môđun của iz .

Câu 3. (0.5 điểm) Giải bất phương trình:

$$9^x \geq 3^{x+1} - 2.$$

Câu 4. (0.5 điểm) Một vé xổ số gồm có 5 chữ số. Khi quay số, nếu vé của bạn trúng 3 chữ số của kết quả kể cả vị trí, thì bạn trúng giải Ba. An mua một vé xổ số. Tính xác suất để An trúng giải Ba.

Câu 5. (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^1 [3x^2 + \ln(x+1)] dx.$$

Câu 6. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Đường thẳng CA tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 30° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và cosin của

góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) , biết rằng $SA = SB = SC = BC = 2a$.

Câu 7. (1 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;-3;-2),$

$C(0;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) , từ đó viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng 6 và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $M(7; -2)$ là trung điểm của BC . Các điểm $N(2;7), P\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$

thuộc các đường thẳng CD và AC (N, C nằm khác phía so với D). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết trung điểm của AD thuộc đường thẳng PN .

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} xy - 3x - y + 4 = 0 \\ \frac{(y^3 - y^2 - 8x)(5y - xy)}{(\sqrt{x-1} + 2)(x^4 + x^3 + 8)} = \sqrt{x-1} - 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $b > 0, a+1 \geq c \geq b+2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ac-2a-c+2}{b^2+bc-2b} + \frac{b^2}{ac+bc-2(b+c)-c+2} + \frac{c-2}{a+c-3}.$$

BÙI ANH DŨNG

(GV THPT Hạ Hòa, Phú Thọ)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/472 (Lớp 6). Tìm số chính phương có ba chữ số thỏa mãn: Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau ta được số mới là số chính phương liền sau số chính phương đã cho $((n+1)^2$ là số chính phương liền sau số chính phương n^2).

NGUYỄN THỊ NGÀ
(SV - K27C - Toán Tin - ĐHSPT Hà Nội 2,
Xuân Hòa, Vĩnh Phúc)

Bài T2/472 (Lớp 7). Một dãy biểu thức có dạng sau: $1; 3+5; 7+9+11; 13+15+17+19; 21+23+25+27+29; \dots$. Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy đều là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương nào đó.

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T3/472. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2x = 27y^3$.

LÊ SƠN TÙNG
(GV THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T4/472. Cho tam giác ABC có góc BAC tù thỏa mãn hệ thức $AB^2 - AC^2 = \frac{BC^2}{2}$. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $BC = 2CD$. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AC tại điểm E , K là giao điểm của đường thẳng CD và cạnh BE . Chứng minh rằng K là trung điểm của BE .

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quý Hợp 2, Quý Hợp, Nghệ An)

Bài T5/472. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{1+ab} + \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) ab + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/472. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x^3+6} = x + \sqrt{x^2-3x+3}.$$

LÂM VŨ CÔNG CHÍNH
(GV THPT Nguyễn Du, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/472. Tìm nghiệm nguyên của bất phương trình $x^6 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 17 < 0$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/472. Cho tam giác ABC không cân có I là tâm đường tròn nội tiếp và H là trực tâm. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1 . Đường thẳng d_1 đi qua I , song song với BC cắt đường thẳng B_1C_1 tại A_2 . Tương tự ta có B_2, C_2 . Chứng minh các điểm A_2, B_2, C_2 thẳng hàng và đường thẳng qua A_2, B_2, C_2 vuông góc với IH .

PHAN CUNG ĐỨC

(THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/472. Cho phương trình

$$+a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

có các hệ số thỏa mãn các điều kiện

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)a_i = 2-n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} (n-i)(n-i-1)a_i = 3-n(n-1).$$

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức:

a) $E = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}.$

b) $F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-x_i)^2}.$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/472. Có 20 viên sỏi được xếp thành ba đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù ban đầu các đống sỏi được xếp thế nào, sau một

số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đồng số có đúng 10 viên số.

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/472. Với mỗi số nguyên dương t , ta ký hiệu $\varphi(t)$ là số các số nguyên dương không vượt quá t và nguyên tố cùng nhau với t . Cho n , k là các số nguyên dương và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh tồn tại số nguyên dương a sao cho p^k là ước của tất cả các số $\varphi(a), \varphi(a+1), \dots, \varphi(a+n)$.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T12/472. Cho tam giác nhọn ABC có AD , BE , CF là các đường cao. Các đường tròn đường kính AB , AC theo thứ tự cắt các tia DF , DE tại Q và P . N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Chứng minh rằng:

- 1) $AN \perp PQ$.
- 2) AN, BP, CQ đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài L1/472. Đặt một điện áp xoay chiều ổn định $u = U_0 \cos(\omega t)$ (V) (U_0 và ω không đổi) vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần $R = 150 \Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C thay đổi được. Điều chỉnh điện dung C của tụ điện sao cho điện áp hiệu dụng của tụ điện đạt giá trị cực đại. Khi đó, điện áp cực đại của điện trở là 120 V; tại thời điểm t , điện áp tức thời hai đầu mạch là 160 V và hai đầu tụ điện là 70 V. Xác định dung kháng của tụ điện.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (Hà Nội)

Bài L2/472. Một quả cầu thủy tinh trong suốt đặt trong không khí, chiếu một tia sáng đơn sắc đến mặt cầu với góc $i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, biết chiết suất

của quả cầu đối với tia sáng là $n > n_{kk} = 1$.

a) Xác định góc lệch $\delta^k(i)$ của tia tới và tia ló thứ k ($k \geq 1$).

b) Với $n = \sqrt{3}$, xác định i để $\delta^{10}(i)$ cực tiểu, xác định $\delta_{\min}^{10}(i)$.

NGÔ AN HÒA KỲ (TP. Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/472 (For 6th grade). Find all 3 digit perfect squares such that if we pick any 2 of those numbers, say n^2 , and then interchange the tens digit and the units digit of that one, we will get $(n+1)^2$.

Problem T2/472 (For 7th grade). Consider the following sequence $1; 3+5; 7+9+11; 13+15+17+19; 21+23+25+27+29; \dots$. Prove that each term of the sequence is a cube of some positive integer.

Problem T3/472. Find integers x and y such that $x^2 - 2x = 27y^3$.

Problem T4/472. Given a triangle ABC with $AB^2 - AC^2 = \frac{BC^2}{2}$. Suppose furthermore that the angle BAC is obtuse. Let D be the point on the side AB such that $BC = 2CD$. The line which goes through D and is perpendicular to AB intersects the line through AC at E . Let K be the intersection between the line through CD the line through BE .

Prove that K is the midpoint of BE .

Problem T5/472. Given positive numbers a and b . Show that

$$\frac{a+b}{1+ab} + \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) ab + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3.$$

When does the equality happen?

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/472. Solve the equation

$$\sqrt[3]{2x^3 + 6} = x + \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

Bài T7/472. Find the integral solutions of the inequality $x^6 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 17 < 0$.

Bài T8/472. Given a scalene triangle ABC with the orthocenter H . The incircle (I) of the triangle is tangent to the sides BC , CA , AB respectively at A_1, B_1, C_1 . The line d_1 which goes through I and is parallel to BC intersects the line through (B_1, C_1) at A_2 . Similarly, we construct the point B_2, C_2 . Prove that A_2, B_2, C_2 are collinear and the line through these points is perpendicular to IH .

(Xem tiếp trang 26)



Bài T1/468. Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $2^x + 3^y + 5^z = 136$.

Lời giải. Từ $5^z < 136$, suy ra $z \leq 3$.

• Với $z = 1$ thì $2^x + 3^y = 131$, suy ra $y \leq 4$. Nếu $y = 1$ thì $2^x = 128$ có $x = 7$ thỏa mãn. Nếu y bằng 2, 3, 4 thì 2^x tương ứng bằng 122, 104, 50 đều không có số mũ x nào thỏa mãn.

• Với $z = 2$ thì $2^x + 3^y = 111$, suy ra 2^x chia hết cho 3 nên không có x nào thỏa mãn.

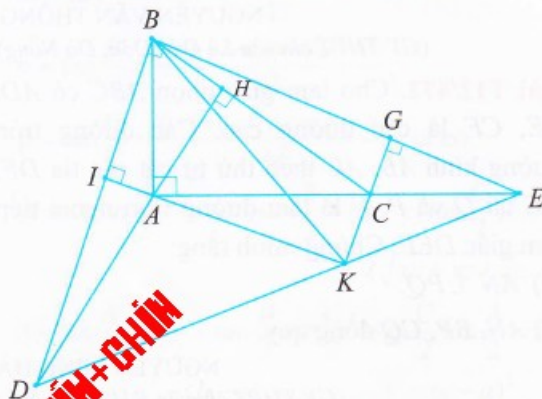
• Với $z = 3$ thì $2^x + 3^y = 11$, suy ra $y \leq 2$. Nếu $y = 1$ thì $2^x = 8$ có $x = 3$ thỏa mãn. Nếu $y = 2$ thì $2^x = 2$ có $x = 1$ thỏa mãn. Vậy bài toán có ba nghiệm $(x; y; z)$ là $(7; 1; 1)$, $(3; 1; 3)$, $(1; 2; 3)$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Vũ Minh Khai, Đào Nhân Độ, 6A3, THCS Tam Thao, Lâm Thao; **Nguyễn Ngọc Ánh,** 6A, THCS Đông Cửu, Thanh Sơn; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Lê Quỳnh Anh, Đỗ Nguyễn Hùng Phong, Nguyễn Thị Thu Nga, Nguyễn Thị Hoàng Ngân, 6A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Khánh Lâm, 6I, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Nguyễn Đình Thành,** Lê Hải Phong, Lê Văn Mạnh, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đặng Diệu Huyền, 6C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Nguyễn Trung Phú,** Cao Thị Ngọc Trâm, Võ Đàm Hương Giang, Phạm Đình Tâm, Phạm Thị Thu Nhung, Văn Quang Tuệ, Ngô Ngọc Huân, Cao Huỳnh Thùy Lan, 6A, Phan Ngọc Tuyết Sương, Trần Thị Thảo Vân, Lưu Huỳnh Phúc Phúc, 6C, Nguyễn Thị Yến Nhi, Đỗ Thị Như Nguyệt, 6D, THCS Phạm Văn Đồng; **Điệp Diệu Châu,** 5A, Tiểu học số 1 Hành Phước; **Nguyễn Hoàng Kim Ánh,** Phạm Nhật Lâm Hoàng, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Mai Thị Thu Thảo,** Mai Thành Nguyên, 6C, THCS Sông Vệ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Đại Việt, 6A2, THCS Hoa Lư, Q. 9.

VIỆT HẢI

Bài T2/468. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $AB = CE$. Đường vuông góc với BD kẻ từ A cắt BD tại I và cắt DE tại K. Tính số đo góc $\widehat{CKE}$.

Lời giải. Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$) nên $\widehat{BAD} = \widehat{ECB}$, suy ra $\triangle BAD = \triangle ECB$ (c.g.c), từ đó có $BD = BE$, $\widehat{ABD} = \widehat{CEB}$, $\widehat{ADB} = \widehat{CBE}$ và $\widehat{DBE} = \widehat{ABD} + \widehat{ABE} = \widehat{AEB} + \widehat{ABE} = 90^\circ$.



Dễ dàng tam giác BDE vuông cân tại B, $\widehat{BDE} = \widehat{BED} = 45^\circ$. Vì IK vuông góc với BD nên tam giác IDK vuông cân tại I, $ID = IK$ và $IK \parallel BE$. Kẻ CG vuông góc với BE tại G, ta có $\triangle CGB = \triangle AID$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra $BG = ID$ hay $BG = KI$, từ đó $\triangle GBK = \triangle IKB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BGK} = \widehat{KIB} = 90^\circ$. Ta có CG và KG cùng vuông góc với BE nên K, C, G thẳng hàng. Vì $KG \parallel DB$ nên $\widehat{GKE} = \widehat{BDE} = 45^\circ$. Vậy $\widehat{CKE} = 45^\circ$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1. Bài toán khá đơn giản, hầu hết các bạn đều có lời giải đúng. Có một số bạn kẻ KG vuông góc với BE rồi chứng minh K, C, G thẳng hàng, nhưng có sự ngộ nhận tam giác BCG vuông.
2. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Thanh Hiền, 7A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Quảng Ngãi:** Mai Thị Thu Thảo, Lưu Huỳnh Phúc Phúc, 7C, THCS TT Sông Vệ, Tư Nghĩa, Phạm Đình Tâm, Phạm Thị Thu Nhung, Võ Đàm Hương Giang, Cao Thị Ngọc Trâm, 6A, Trần Thị Thảo Vân, 6C, Nguyễn Thị Yến Nhi, 6D, Lê Văn Sỹ, Cao Huỳnh Thùy Lan, Nguyễn Đức Lộc, Lưu Gia Nhất, Văn Quang Tuệ, Huỳnh Quang Diệu, Lê Tuấn Kiệt, 7A, THCS Phạm

Văn Đồng, Nguyễn Hoàng Kim Ánh, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/468. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $p^2 - pq - q^3 = 27$ (1)

Lời giải. (Theo bạn Lê Hồng Nhung, 8A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow p^2 - pq = q^3 + 27$

$\Leftrightarrow p(p-q) = (q+3)(q^2 - 3q + 9) > 0$ (2) $\Rightarrow p > q$.

Vì p là số nguyên tố nên $\begin{cases} q+3 \vdots p \\ q^2 - 3q + 9 \vdots p \end{cases}$

• TH1: $q+3 \vdots p \Rightarrow q+3 \geq p$

$\Rightarrow q^2 - 3q + 9 \leq p - q \leq q + 3 - q = 3$, điều này vô lý vì $q^2 - 3q + 9 \geq 7$.

• TH2: $q^2 - 3q + 9 \vdots p \Rightarrow q^2 - 3q + 9 = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

- Nếu $k = 1$ thì: $\begin{cases} q^2 - 3q + 9 = p \\ p - q = q + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0 \Rightarrow q = 2, q = 3$.

Với $q = 2$ thì

(1) $\Leftrightarrow p^2 - 2p - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = -5 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$

Cặp $(p = 7, q = 2)$ thỏa mãn (1).

Với $q = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow p^2 - 3p - 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 9 \text{ (loại)} \\ p = -6 \text{ (loại)} \end{cases}$

- Nếu $k \geq 2$ thì dễ thấy $q > 3$. Ta có:

$p - q = k(q + 3) \Leftrightarrow p = q + qk + 3k$

$\Rightarrow pk = qk + qk^2 + 3k^2 = q^2 - 3q + 9$

$\Leftrightarrow 3(k^2 - 3) = q(q - 3 - k - k^2)$ (3).

Do q nguyên tố và $q > 3$ nên $(q, 3) = 1$. Từ (3) suy ra: $(k^2 - 3) \vdots q \Rightarrow k^2 - 3 \geq q$ (4). Lại kết hợp

với (3) ta có: $3 \leq q - 3 - k - k^2$ hay

$\Leftrightarrow q \geq k^2 + k + 6$ (5). Từ (4) và (5) suy ra:

$k^2 - 3 \geq q \geq k^2 + k + 6$: vô lý.

Vậy cặp số nguyên tố (p, q) cần tìm là $(7; 2)$. $\square$

► **Nhận xét.** Ba bạn có lời giải đúng nhưng theo đề chép sai nên lời giải không được chấp nhận. Một số bạn đã mắc sai lầm khi lập luận:

... Từ đẳng thức (2), xét $q > 2$, do p, q là các số nguyên tố lẻ, $q^2 - 3q + 9$ là số lẻ, còn $p - q$ và

$q + 3$ là các số chẵn nên $\begin{cases} p - q = q + 3 \\ p = q^2 - 3q + 9 \end{cases}$, Lập

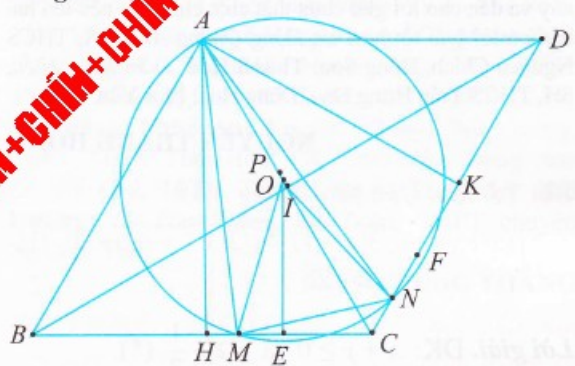
luận này không đúng, vì chẳng hạn: từ $3.6 = 9.2$, thì mặc dù 3, 9 là các số lẻ; 6, 2 là các số chẵn, nhưng không thể suy ra $3 = 9, 6 = 2, \dots$

Ngoài bạn **Nhung**, các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc**: Lê Hồng Nhung, 8A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Nguyễn Trúc Quỳnh**, 9A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Hà Nội**: Bùi An Duy, 7D, THCS Hà Nội- Amsterdam; **Nguyễn Đặng Nhật Minh**, THCS Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy. **Thanh Hóa**: Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn. **Nghệ An**: Lê Hải Phong, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Quảng Ngãi**: Huỳnh Đặng Diệu Huyền, 8C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa. **Lê Minh Ngọc**, 7B, THCS Lê Quý Đôn, Quận (huyện), Tỉnh (Thành): ?.

NHƯ HOÀNG

Bài T4/468. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Các điểm M, N tương ứng di động trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

Lời giải



Ta có $\widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OMN$ đều. Hơn nữa tứ giác $CMON$ nội tiếp ($\widehat{MON} + \widehat{MCN} = 180^\circ$) nên $\widehat{NCO} = \widehat{NMO} = 60^\circ$, do đó ba điểm A, O, C thẳng hàng.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . E và F lần lượt là chân đường phân giác trong đỉnh A của các tam giác AHC, AKC .

Khi đó $\widehat{HAC} = \widehat{KAC} = \widehat{EAF} = 30^\circ$.

Khi $M \equiv H, N \equiv C$, lúc đó O trùng tâm I của hình thoi $ABCD$. Khi $M \equiv E, N \equiv F$, lúc đó O trùng tâm P của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Ta sẽ chứng minh quỹ tích O là đoạn PI .

Trước hết, ta sẽ chứng minh $AP \leq AO \leq AI$. Thật vậy, giả sử M không trùng H, E, C và N không trùng K, F, C .

Vì $\widehat{MCN} = 120^\circ < 180^\circ - \widehat{MAN}$ nên C nằm ngoài đường tròn $(O) \Rightarrow OA < OC \Rightarrow AO < AI$.

Lại có $\triangle PEF$ đều, $\widehat{EFC} = \widehat{FEC} = \widehat{FPC} = 30^\circ \Rightarrow BC, CD$ tiếp xúc với đường tròn (AEF) . Mà đường tròn (AMN) cắt BC, CD nên $AP < AO$. Vậy O thuộc đoạn PI .

Ngược lại, giả sử O là một điểm bất kì thuộc đoạn PI .

Do các đường tròn $(P; PA), (O; OA), (I; IA)$ tiếp xúc nhau tại A nên dễ thấy đường tròn $(O; OA)$ cắt đoạn BC tại hai điểm phân biệt. Gọi một trong hai giao điểm đó là M , ta có

$$\widehat{MOC} < \widehat{MIC} < \widehat{HIC} = 60^\circ.$$

Gọi N là điểm trên đoạn CD sao cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Suy ra tứ giác $CMON$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{OMN} = \widehat{OCN} = 60^\circ, \widehat{ONM} = \widehat{OCM} = 60^\circ.$$

Do đó $\triangle OMN$ đều, nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$.

Vậy quỹ tích điểm O là đoạn thẳng PI . $\square$

► **Nhận xét.** Không có nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều cho lời giải chưa thật chặt chẽ. Xin nêu tên hai bạn có lời giải tốt hơn cả: **Đặng Quang Anh**, 9A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, **Thanh Hoá**; **Đàm Ngọc Hiếu**, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hoà, **Phú Yên**.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/468. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} = \sqrt{2(x+y+1)} + 4 & (1) \\ (x^2 + y - 2)\sqrt{2x+1} = x^3 + 2y - 5 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x+y \geq 0$ và $x \geq -\frac{1}{2}$.

Đặt $x+y = u$ ($u \geq 0$), khi đó PT (1) trở thành

$$u^2 + \sqrt{3u} = \sqrt{2(u+1)} + 4$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 4 + \sqrt{3u} - \sqrt{2(u+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-2)(u+2) + \frac{3u-2(u+1)}{\sqrt{3u} + \sqrt{2(u+1)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-2) \left(u+2 + \frac{1}{\sqrt{3u} + \sqrt{2(u+1)}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow u-2=0 \Leftrightarrow u=2.$$

(Do $u \geq 0$ nên biểu thức $u+2 + \frac{1}{\sqrt{3u} + \sqrt{2(u+1)}} > 0$).

Suy ra $y = 2 - x$. Thay vào PT (2) ta thu được

$$(x^2 - x)\sqrt{2x+1} = x^3 - 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2\sqrt{2x+1} + 2x + 1 - x^3 - x\sqrt{2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(x^2 + \sqrt{2x+1}) - x(x^2 + \sqrt{2x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+1} - x) = 0.$$

Với điều kiện (*) thì $x^2 + \sqrt{2x+1} > 0$ suy ra

$$\sqrt{2x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}. \text{ Từ đó } y = 2 - (1 + \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}.$$

Nhận thấy $x = 1 + \sqrt{2}; y = 1 - \sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$. $\square$

► **Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia gửi bài và đa số giải theo cách trên. Tuy nhiên, một số bạn không đặt ẩn phụ nên biến đổi còn dài dòng; có bạn không đề ý đến điều kiện xác định của phương trình nên chọn cả $(x; y) = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ làm nghiệm. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, 8C, Nguyễn Thái Bào, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Dương Văn Minh**, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Thanh Hóa:** Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Cống; **Quảng Ngãi:** Mai Thị Thanh Thảo, 8C, THCS Thị Trấn Sông Vệ; **Huỳnh Đức Diệu Huyền**, 9C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bà Rịa:** Ngô Quốc Bảo, 7/1, THCS Mỹ Hòa, TP Bà Rịa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/468. Giải phương trình

$$\begin{aligned} & -3x^2 + x + 3 + (\sqrt{3x+2} - 4)\sqrt{3x-2x^2} \\ & + (x-1)\sqrt{3x+2} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Lời giải. ĐK: } \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 3x-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(3x-2x^2) - (x^2+2x-3) + (\sqrt{3x+2}-x-3)\sqrt{3x-2x^2}$$

$$+ (x-1)\sqrt{3x-2x^2} + (x-1)\sqrt{3x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2x^2}(\sqrt{3x-2x^2} + \sqrt{3x+2} - x - 3)$$

$$+ (x-1)(\sqrt{3x-2x^2} + \sqrt{3x+2} - x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2x^2} + x - 1)(\sqrt{3x-2x^2} + \sqrt{3x+2} - x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-2x^2} = 1 - x & (1) \\ \sqrt{3x-2x^2} + \sqrt{3x+2} = x + 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

(thỏa mãn điều kiện bài toán).

Xét phương trình (2).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có $\sqrt{3x-2x^2} \leq \frac{1+(3x-2x^2)}{2}$;

$\sqrt{3x+2} \leq \frac{1+(3x+2)}{2}$, đẳng thức không xảy ra khi $x \geq 0$. Do đó:

$$\sqrt{3x-2x^2} + \sqrt{3x+2} < -x^2 + 3x + 2 \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra:

$$x+3 < -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow (x-1)^2 < 0.$$

Vô lí. Phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất $x = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán không khó. Chủ yếu là kĩ năng biến đổi đại số để đưa về phương trình tích.

Có thể đặt $t = \sqrt{3x-2x^2}$, $t \geq 0$ để được phương trình bậc hai đối với t và giải ra được $t = 1-x$;

$t = 3+x-\sqrt{3x+2}$. Quy về hai trường hợp như trên.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Tây Ninh:** Lê Hiền Khải, 10T, THPT chuyên Hoàng Lệ Kha, TP Tây Ninh;

Quảng Bình: Lê Hoàng Long, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới;

Quảng Trị: Nguyễn Thục Anh, 8A, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà;

Hà Tĩnh: Nguyễn Quang Hùng, 10A1, THCS Cù Huy Cận;

Bến Tre: Lê Ngọc Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP Bến Tre;

Phú Yên: Lê Thành Lâm, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa;

Thanh Hóa: Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Cống;

Bắc Giang: Dương Ngô Kiên, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang;

Vĩnh Long: Châu Minh Khánh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm;

Vĩnh Phúc: Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên;

Nghệ An: Đinh Thị Quỳnh Châu, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/468. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C > 4(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C).$$

Lời giải. (Của bạn Dương Hồng Sơn, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên).

Đặt $\tan A = x, \tan B = y, \tan C = z$. Do A, B, C là các góc nhọn nên $x, y, z > 0$. Vì A, B, C là ba góc của tam giác nên ta có hệ thức quen biết $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ tức là

$$x + y + z = xyz \quad (*)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^2 + y^2 + z^2 > 4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2) > 4(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 (x^2 + y^2 + z^2) > 4(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)$$

(do $(*)$)

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(xy + yz + xz)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$> 4(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \quad (2)$$

$$\text{và } 2(xy + yz + xz)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq 2(xy + yz + xz)^2 > x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) theo vế ta suy ra (1). $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt (không cần dùng đến đạo hàm để khảo sát hàm số):

Vĩnh Phúc: Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc;

Thừa Thiên Huế: Phan Trần Hương, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế;

Nam Định: Đoàn Thị Nhài, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong;

Cà Mau: Trần Quốc Việt, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển;

Thái Bình: Nguyễn Bá Tuấn, 10A, THPT Lương Văn Can;

Nghệ An: Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa;

Long An: Lê Trí Phú, 10T1, THPT chuyên Long An;

Hải Dương: Lê Duy Dũng, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/468. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O , bán kính $R = 1$ và O nằm trong tứ diện. Chứng minh rằng tồn tại một mặt của tứ diện có chu vi lớn hơn $2\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta cần có bốn bổ đề.

Bổ đề 1. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$(BC + CA + AB)^2 > 2(BC^2 + CA^2 + AB^2).$$

Bổ đề 2. Nếu điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$ và V_A, V_B, V_C, V_D theo thứ tự là thể tích của các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC$ thì

$$V_A \cdot \overline{MA} + V_B \cdot \overline{MB} + V_C \cdot \overline{MC} + V_D \cdot \overline{MD} = \vec{0}.$$

Bổ đề 1 và bổ đề 2 rất quen thuộc, không trình bày phép chứng minh ở đây.

Bổ đề 3. Nếu tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O , bán kính bằng 1 và O nằm trong tứ diện thì

$$|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}| < 2.$$

Chứng minh. Gọi V, V_A, V_B, V_C, V_D theo thứ tự là thể tích của các tứ diện $ABCD, OBCD, OCDA, ODAB, OABC$. Theo bổ đề 2

$$V_A \overline{OA} + V_B \overline{OB} + V_C \overline{OC} + V_D \overline{OD} = \vec{0}.$$

Vì $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ đôi một không cùng phương và $OA = OB = OC = OD = 1$ nên $2V_A = V_A + |-V_A \overline{OA}|$
 $= V_A + |V_B \overline{OB} + V_C \overline{OC} + V_D \overline{OD}| < V_A + |V_B \overline{OB}| + |V_C \overline{OC}| + |V_D \overline{OD}| = V_A + V_B + V_C + V_D = V.$

Do đó $V - 2V_A > 0$.

Tương tự $V - 2V_B > 0; V - 2V_C > 0; V - 2V_D > 0$.

Vậy, lại theo bổ đề 2 và chú ý rằng $OA = OB = OC = OD = 1$, ta có

$$\begin{aligned} V|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}| &= |V\overline{OA} + V\overline{OB} + V\overline{OC} + V\overline{OD}| \\ &= |(V - 2V_A)\overline{OA} + (V - 2V_B)\overline{OB} + (V - 2V_C)\overline{OC} + (V - 2V_D)\overline{OD}| \\ &< (V - 2V_A) + (V - 2V_B) + (V - 2V_C) + (V - 2V_D) \\ &= 4V - 2V = 2V. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}| < 2$.

Bổ đề 4. Nếu tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O , bán kính bằng 1 và O nằm trong tứ diện thì $AB^2 + CD^2 + AC^2 + DB^2 + AD^2 + BC^2 > 12$.

Chứng minh. Chú ý rằng $OA = OB = OC = OD = 1$, theo bổ đề 3, ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 + AC^2 + DB^2 + AD^2 + BC^2 &= (\overline{OA} - \overline{OB})^2 + (\overline{OC} - \overline{OD})^2 + (\overline{OA} - \overline{OC})^2 \\ &\quad + (\overline{OD} - \overline{OB})^2 + (\overline{OA} - \overline{OD})^2 + (\overline{OB} - \overline{OC})^2 \\ &= 12 - 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD} + \overline{OA} \cdot \overline{OC} + \overline{OD} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OD} + \overline{OB} \cdot \overline{OC}) \\ &= 12 + 4 - (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})^2 > 12 + 4 - 4 = 12. \end{aligned}$$

Trở lại giải bài toán T8/468.

Nếu chu vi các mặt của tứ diện $ABCD$ không lớn hơn $2\sqrt{3}$ thì, theo bổ đề 1,

$$12 = (2\sqrt{3})^2 \geq (BC + CD + DB)^2 > 2(BC^2 + CD^2 + DB^2);$$

$$12 = (2\sqrt{3})^2 \geq (CD + DA + AC)^2 > 2(CD^2 + DA^2 + AC^2);$$

$$12 = (2\sqrt{3})^2 \geq (DA + AB + BD)^2 > 2(DA^2 + AB^2 + BD^2);$$

$$12 = (2\sqrt{3})^2 \geq (AB + BC + CA)^2 > 2(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

$$\text{Do đó } 4.12 \geq 4(AB^2 + CD^2 + AC^2 + DB^2 + AD^2 + BC^2).$$

Vậy, theo bổ đề 4, $12 > AB^2 + CD^2 + AC^2 + DB^2 + AD^2 + BC^2 > 12$, mâu thuẫn.

Điều đó có nghĩa là tồn tại một mặt của tứ diện $ABCD$ có chu vi lớn hơn $2\sqrt{3}$.

Nhận xét. Bài toán này khó, không bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T9/468. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^4 + y^4 + 2xy + 9}{x^4 + y^4 + 3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có $A = \frac{x^4 + y^4 + 2xy + 9}{x^4 + y^4 + 3} = 1 + 2B$,

trong đó $B = \frac{xy + 3}{x^4 + y^4 + 3}$.

Nhận xét. Nếu $t \in \mathbb{R}$, $p = \frac{t+3}{2t^2+3}$ thì

$$\begin{aligned} 2pt^2 + 3p &= t + 3 \Rightarrow 2pt^2 - t + 3(p - 1) = 0 \\ \Rightarrow 1 - 24p(p - 1) &\geq 0 \Rightarrow 0 \geq p^2 - p - \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{6}}}{2} \geq p \geq \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{6}}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6 + \sqrt{42}}{12} \geq p \geq \frac{6 - \sqrt{42}}{12}.$$

Kí hiệu $p = xy$, dùng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

$$*) \frac{6 + \sqrt{42}}{6} (x^4 + y^4 + 3) - 2(xy + 3)$$

$$\geq \frac{6 + \sqrt{42}}{6} \cdot (2p^2 + 3) - 2(p + 3)$$

$$= \frac{6 + \sqrt{42}}{3} \cdot p^2 - 2p + \frac{6 + \sqrt{42}}{2} - 6$$

$$= \frac{6 + \sqrt{42}}{3} \cdot p^2 - 2p + \frac{\sqrt{42} - 6}{2} \geq 0$$

$$\text{do } \frac{6 + \sqrt{42}}{3} \cdot \frac{\sqrt{42} - 6}{2} = \frac{42 - 36}{6} = 1.$$

$$*) 2(xy + 3) - \frac{6 - \sqrt{42}}{6} (x^4 + y^4 + 3)$$

$$= \frac{\sqrt{42} - 6}{6} (x^4 + y^4 + 3) + 2xy + 6$$

$$\geq \frac{\sqrt{42}-6}{6}(2p^2+3)+2p+6$$

$$= \frac{\sqrt{42}-6}{3}p^2+2p+\frac{\sqrt{42}+6}{2} \geq 0.$$

Do đó

$$\bullet A \leq 1 + \frac{6+\sqrt{42}}{6} = \frac{12+\sqrt{42}}{6} \text{ đẳng thức xảy ra}$$

$$\text{khi và chỉ khi } x = y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{42}-6}{2}}.$$

$$\bullet A \geq 1 + \frac{6-\sqrt{42}}{6} = \frac{12-\sqrt{42}}{6} \text{ đẳng thức xảy ra}$$

$$\text{khi và chỉ khi } x = -y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{42}+6}{2}}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } A \text{ bằng } \frac{12+\sqrt{42}}{6},$$

$$\text{giá trị nhỏ nhất của } A \text{ bằng } \frac{12-\sqrt{42}}{6}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt (không cần dùng đến đạo hàm để khảo sát hàm số): **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Nguyễn Văn Hiến, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Danh Thắng, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Thừa Thiên Huế:** Phan Trần Hương, Lê Long, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/468. Một người thợ luôn phải lát các lát những căn phòng có kích thước $2^n \times 2^n$ ô vuông bằng các mảnh đá lát hình đô-mi-nô kích thước 1×3 ô vuông và các mảnh đá lát hình thước thợ kích thước 3 ô vuông. Anh ta phải lát kín căn phòng, chỉ trừ lại duy nhất 1 ô vuông để trống không lát đá để trang trí đặc biệt. Do giá thành một viên đá lát hình thước thợ đắt hơn nhiều giá thành một viên đá lát hình đô-mi-nô, cho nên anh ta muốn sử dụng càng ít viên đá hình thước thợ càng tốt. Anh ta nhận thấy rằng dù vị trí ô vuông đặc biệt ở đâu chẳng nữa, chưa lần nào anh ta phải dùng nhiều hơn n mảnh đá lát hình thước thợ để hoàn thành công việc của mình. Hãy chứng minh rằng khẳng định của người thợ luôn đúng với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Trước khi chứng minh bài toán, ta chứng minh một số bổ đề. Bổ đề 1 sau là hiển nhiên:

Bổ đề 1. Mọi hình chữ nhật có kích thước một cạnh chia hết cho 3 lát được bởi các viên đá hình đô-mi-nô 1×3 ô vuông.

Bổ đề 2. Mọi hình thước thợ tạo bởi 3 hình vuông kích thước $2^n \times 2^n$ đều lát được bởi một số viên đá hình đô-mi-nô và 1 viên đá hình thước thợ.

Chứng minh: Hiển nhiên kết luận đúng cho $n = 1$.

Giả sử kết luận đúng cho $n = k - 1$

thì ta chia một hình thước thợ

tạo bởi 3 hình vuông kích thước

$2^k \times 2^k$ thành các hình chữ nhật

có một cạnh chia hết cho 3 và

một thước thợ tạo bởi 3 hình

vuông kích thước $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ như

trong (h.1).

Dễ nhận thấy các hình chữ nhật thu được đều có

độ dài một cạnh chia hết cho 3, cho nên chúng

lát được bởi các viên đá đô-mi-nô theo Bổ đề 1.

Hình thước thợ gồm 3 ô vuông kích thước

$2^{k-1} \times 2^{k-1}$ còn lại thì theo giả thiết quy nạp lát

được bởi viên đá đô-mi-nô và 1 viên đá

hình thước thợ.

Bây giờ ta chứng minh kết luận của bài toán.

Rõ ràng kết luận của người thợ hiển nhiên đúng

cho trường hợp $n = 1$.

Giả sử kết luận của người thợ đã đúng cho

$n = k - 1 \geq 1$.

Xét một căn phòng hình vuông kích thước

$2^k \times 2^k$ ô vuông.

Chia hình vuông này thành 4

hình vuông bằng nhau, thì ô

vuông trống phải rơi vào một

trong 4 phần này, chẳng hạn vào

góc phần tư thứ nhất (h.2).

Theo giả thiết quy nạp thì căn không quá $k - 1$

thước thợ để lát hình vuông ở góc phần tư thứ

nhất, và để lát hình thước thợ gồm 3 hình vuông

kích thước $2^{k-1} \times 2^{k-1}$, thì theo Bổ đề 2 ta cần 1

viên đá hình thước thợ. Tóm lại, số đá hình

thước thợ cần dùng để lát căn phòng hình

vuông kích thước $2^k \times 2^k$ ô vuông không quá

$k - 1 + 1 = k$ viên đá hình thước thợ 1×3 . Kết

luận bài toán được chứng minh. $\square$

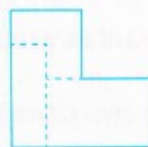
► **Nhận xét.** Tuyên dương các bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: Trần Bá Khôi, 11T2, ĐHSP Hà Nội, Lê

Viết Lưu Thanh, chuyên ĐHKHTN; **Nghệ An:**

Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX.

Thái Hòa; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1



Hình 1



Hình 2

THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Trần Quang Ninh, 11A1 THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Vĩnh Long:** Phan Gia Anh, 11T1 THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP Vĩnh Long; **Phú Yên:** Lê Thành Lâm, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11T1, chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 10T, chuyên THPT Võ Nguyên Giáp, Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Minh Hải, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/468. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S và x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng

$$1) xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S \quad (1)$$

$$2) (y+z)bc + (z+x)ca + (x+y)ab - xa^2 - yb^2 - zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S \quad (2)$$

Lời giải. Ta có bổ đề: Cho m, n, p là ba số thực thỏa mãn $m + n + p > 0, mn + np + pm > 0$; x, y, z là ba số dương. Khi đó:

$$(y+z)m + (z+x)n + (x+y)p \geq 2\sqrt{(xy + yz + zx)(mn + np + pm)} \quad (3)$$

Chứng minh. Đặt $u = \sqrt{2(xy + yz + zx)}$,

$v = \sqrt{2(mn + np + pm)}$. Khi đó $u > 0, v > 0$ và

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2,$$

$$v^2 + m^2 + n^2 + p^2 = (m + n + p)^2;$$

$$(3) \Leftrightarrow (x + y + z)(m + n + p) - mx - ny - zp \geq uv$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(u^2 + x^2 + y^2 + z^2)(v^2 + m^2 + n^2 + p^2)}$$

$$\geq uv + mx + ny + zp.$$

Đây chính là BĐT Bunyakovsky. Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v}{u} = \frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} \\ uv + mx + ny + pz \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m, n, p > 0 \\ \frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} \end{cases}$$

Bây giờ ta áp dụng bổ đề để giải bài toán:

1) Gọi A, B, C là 3 góc của tam giác ứng với các cạnh a, b, c . Dễ thấy khi cho $m = \cot A, n = \cot B, p = \cot C$ hay

$$m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}, n = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}, p = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

thì chúng thỏa mãn điều kiện ở bổ đề. Do đó

$$(y+z)\cot A + (z+x)\cot B + (x+y)\cot C \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

(do $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$)

$$\Leftrightarrow (y+z)\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + (z+x)\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + (x+y)\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S} \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

$$\Leftrightarrow xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{\cot A}{x} = \frac{\cot B}{y} = \frac{\cot C}{z}$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{x} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{y} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{z}.$$

2) Tương tự, cho

$$m = \tan \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4S},$$

$$n = \tan \frac{B}{2} = \frac{(b+c-a)(b+a-c)}{4S},$$

$$p = \tan \frac{C}{2} = \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4S}, \text{ ta có:}$$

$$(y+z)\tan \frac{A}{2} + (z+x)\tan \frac{B}{2} + (x+y)\tan \frac{C}{2} \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

$$(\text{vì } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1)$$

$$(y+z)\frac{a^2 - (b-c)^2}{4S} + (z+x)\frac{b^2 - (c-a)^2}{4S}$$

$$+ (x+y)\frac{c^2 - (a-b)^2}{4S} \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

$$\Leftrightarrow (y+z)bc + (z+x)ca + (x+y)ab \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{\tan \frac{A}{2}}{x} = \frac{\tan \frac{B}{2}}{y} = \frac{\tan \frac{C}{2}}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2 - (a-b)^2}{x} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{y} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{z}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Không nhiều bạn tham gia giải bài này. Lời giải ý 2 của một số bạn còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng:

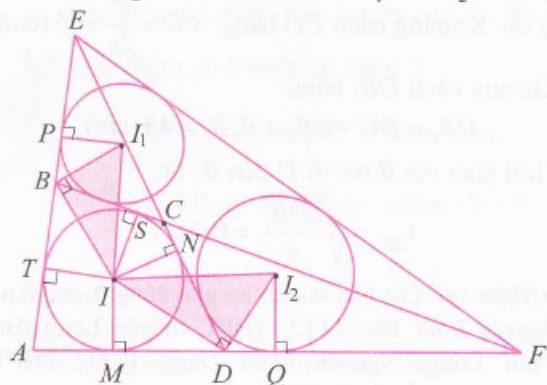
Vĩnh Phúc: Phùng Văn Nam, 10A1, Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; Đặng Thanh Tùng, 11A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội. **Thanh Hóa:** Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, Nguyễn Danh Thắng, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa. **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Nam:** Nguyễn Xuân Anh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/468. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Tia AB giao tia CD tại E , tia DA giao tia CB tại F . Gọi (I_1) , (I_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác EFB , EFD .

Chứng minh rằng $\widehat{I_1IB} = \widehat{I_2ID}$.

Lời giải. Giả sử M, N, S, T lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AD, CD, BC, AB . Gọi P là tiếp điểm của đường tròn (I_1) với EB ; Q là tiếp điểm của (I_2) với DF . Ta có $\widehat{IBI_1} = \widehat{IDI_2} = 90^\circ$.



Xét $\triangle ITB$ và $\triangle BPI_1$ có $\widehat{ITB} = \widehat{I_1PB} = 90^\circ$;

$\widehat{I_1BP} = \widehat{BIT}$ (cùng phụ với $\widehat{TBI}$)

$$\Rightarrow \triangle ITB \sim \triangle BPI_1 \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IB}{BI_1} = \frac{IT}{BP} \quad (1)$$

Tương tự $\triangle IMD \sim \triangle DQI_2 \Rightarrow \frac{ID}{DI_2} = \frac{IM}{DQ}$

Mặt khác ta có $BP = \frac{BE + BF - EF}{2}$;

$DQ = \frac{DE + DF - EF}{2}$. Sử dụng tính chất tứ giác

ngoại tiếp đường tròn ta thấy

$$BE + BF = TE - TB + BF = EN - BS + BF$$

$$= EN + FS = DE - DN + FM$$

$$= DE - DN + DF + DM = DE + DF. \text{ Từ đó suy ra } BP = DQ, \text{ mà } IT = IM, \text{ từ đây kết hợp với (1)}$$

và (2) ta thu được $\frac{IB}{BI_1} = \frac{ID}{DI_2}$.

Do đó $\triangle IBI_1 \sim \triangle IDI_2$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{I_1IB} = \widehat{I_2ID} \text{ (đpcm). } \square$$

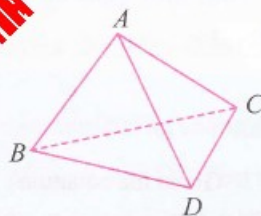
► **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng và trình bày tương tự cách giải trên. Những bạn sau có bài làm tốt hơn cả: **Hà Nội:** Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Nguyễn Duy Khương, 10T2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Nam, 10A1,

THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Trần Quốc Lập, 10 Toán, Nguyễn Đức Thuận, 12 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** Đỗ Thùy Anh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Hoàng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Bình:** Hoàng Nhật Tuấn, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đắk Nông:** Nguyễn Thị Ngọc Quyên, 12CT, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, TX. Gia Nghĩa; **Quảng Nam:** Nguyễn Xuân Anh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/468. Có bốn electron đứng yên ở bốn đỉnh của một tứ diện đều cạnh a . Xác định vận tốc cực đại của các electron khi chúng được tự do. Coi các electron chuyển động chỉ do tương tác tĩnh điện.

Lời giải. Có thể lập luận: năng lượng của hệ bốn electron ($W_{\text{hệ}}$) ở bốn đỉnh của tứ diện đều cạnh a bằng năng lượng tạo thành hệ đó.



Khi đưa electron thứ nhất tới đỉnh A:

$$\begin{cases} W = 0 \\ v_B = v_C = v_D = -k \frac{e}{a} \end{cases}$$

Khi đưa thêm electron thứ hai tới đỉnh B:

$$\begin{cases} W_1 = k \frac{e^2}{a} \\ v_C = v_D = -2k \frac{e}{a} \end{cases}$$

Khi đưa thêm electron thứ ba tới đỉnh C và electron cuối cùng tới đỉnh D:

$$\begin{cases} \Delta W_1 = 2k \frac{e^2}{a} \\ v_C = v_D = -3k \frac{e}{a} \end{cases} \Rightarrow \Delta W_2 = 3k \frac{e^2}{a}$$

Năng lượng hệ: $W = W_1 + \Delta W_1 + \Delta W_2$

$$= 6k \frac{e^2}{a}$$

Khi hệ được tự do: $W' = 4 \cdot \frac{1}{2}mv^2 + W_i$, với $W_i \geq 0$. Theo định luật bảo toàn năng lượng:

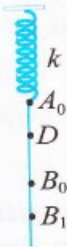
$$W' = W \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}mv^2 + W_i = 6k \frac{e^2}{a}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = e \sqrt{\frac{3k}{ma}}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng bài này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/468. Một con lắc lò xo thẳng đứng (lò xo $k = 20 \text{ N/m}$) treo vật nhỏ A ($m_A = 100 \text{ gam}$); dưới A là vật nhỏ B ($m_B = 100 \text{ gam}$) được nối với A bằng một sợi dây mềm A_0B_0 đủ dài. Kéo B từ vị trí cân bằng B_0 của B xuống tới B_1 với $B_0B_1 = 20 \text{ cm}$ rồi thả nhẹ B ra thì B sẽ đi từ B_0 lên tới vị trí cao nhất là D . Nếu tại D dây nối bị tuột nên B bị rơi xuống. Tính thời gian để vật B rơi từ D tới B_1 .



Lời giải. Phương trình định luật II Newton:

$$mg - T = ma = -m\omega^2 x.$$

Tại vị trí C dây bị chùng thì:

$$T = 0 \Rightarrow x = \frac{-g}{\omega^2} = \frac{-2mg}{k} = -10 \text{ cm}.$$

Vận tốc của vật B lúc ấy:

$$v = -\omega \sqrt{A^2 - x^2} = -\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

Tại D vận tốc của vật B bằng 0, sau đó vật B rơi tự do. Khoảng cách CD bằng: $CD = \frac{v^2}{2g} = 15 \text{ (cm)}$

Khoảng cách DB_1 bằng:

$$DB_1 = DC + CB_0 + B_0B_1 = 45 \text{ (cm)}.$$

Thời gian vật B rơi từ D đến B_1 là:

$$t_{DB_1} = \sqrt{\frac{2DB_1}{g}} = 0,3 \text{ s}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Long An:** Nguyễn Bình Yên, 11T2, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** Nguyễn Minh Long, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/472. Given the equation

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

where the coefficients satisfy

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)a_i = 2-n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} (n-i)(n-i-1)a_i = 3-n(n-1).$$

Suppose that $x_1, x_2, \dots, x_n$ are n solutions of the above equation. Compute the value the following expressions:

a) $E = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}.$

b) $F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-x_i)^2}.$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/472. There are 20 stones and we divide them into 3 piles. Then we start to moving stones from one pile to another with the follow rule. Each time we can move half of a pile with even number of stones to any other pile. Prove that no

matter how we divide the stones into 3 piles, after finite of moves, we will get a pile with 10 stones.

Problem T11/472. For each positive integer t , let $\varphi(t)$ denote the numbers of positive integers which are not greater than t and are relatively prime to t (Euler phi function). Now assume that n, k are positive integers and p is an odd prime number. Prove that there exists a positive integer a such that p^k is a divisor of all numbers $\varphi(a), \varphi(a+1), \dots$, and $\varphi(a+n)$.

Problem T12/472. Given an acute triangle ABC with the altitudes AD, BE , and CF . The circles with the diameters AB and AC respectively intersect the rays DF and DE at Q and P . Let N be the circumcenter of the triangle DEF . Prove that:

1) $AN \perp PQ$.

2) AN, BP , and CQ are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Bạn đọc tự giải.

Câu 2. a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{2e^x+2}} - e^x + \frac{3}{4}.$$

b) Ta có

$$f'(x) = \frac{(2 - \sqrt{2e^x+2})(3 + 4e^x + 3\sqrt{2e^x+2})}{4\sqrt{2e^x+2}}.$$

Lập bảng biến thiên, ta được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

$f'(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$; do đó

$$\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(0) = 0,$$

$$\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt{\frac{1+e}{2}} - e + \frac{3}{4}.$$

Câu 3. Biến đổi PT như sau

$$4 \sin 3x + \sin 5x - (\sin 3x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin 3x + (\sin 5x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2 \cos 2x) = 0$$

Do $3 + 2 \cos 2x > 0$ nên $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

Câu 4. Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x, t > 0 \Rightarrow$ ta có PT:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = \log_{2+\sqrt{3}} 2.$$

Câu 5. Ta có $\int f'(x) dx = \frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{x} + c$ nên

$$f(x) = \frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{x} + c.$$

Từ $a + b = 0, \frac{a}{2} - b + c = 4, \frac{a}{2} + b + c = 2$, suy ra

$$a = 1, b = -1, c = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}.$$

Câu 6. + Mỗi người chọn một toa ngẫu nhiên để lên có 7^7 cách.

+ Một người trong 7 người lên một toa trong 7 toa có: $C_7^1 \cdot C_7^1$ cách; hai người trong 6 người còn lại lên cùng một toa trong 6 toa còn lại có: $C_6^2 \cdot C_6^1$ cách; bốn người còn lại lên cùng một toa trong 5 toa còn lại có: $C_4^4 \cdot C_5^1$ cách.

+ Vậy có $C_7^1 C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_6^1 \cdot C_4^4 \cdot C_5^1 = 22050$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Xác suất theo yêu cầu bài toán:

$$P = \frac{22050}{7^7} = \frac{450}{16807}.$$

Câu 7. Theo giả thiết $SH \perp (ABCD)$, vẽ

$$HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ.$$

$$\Delta AHK \sim \Delta CBH \Rightarrow HK = \frac{CB \cdot AH}{AC} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Do } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}.$$

Gọi M là điểm đối xứng của D qua A ; dựng $DP \perp AC$; đường thẳng Δ qua D song song với HC ; dựng $HN \perp \Delta, HI \perp SN$. Khi đó

$$HC \parallel (SND) \text{ và } HI \perp (SND).$$

$$\text{Vậy } d(HC, SD) = d(HC, (SND)) = d(H, (SND)) = HI.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{DP^2} \\ = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{DM^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{25}{8a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(HC, SD) = HI = \frac{2\sqrt{2}a}{5}.$$

Câu 8. d_1 cắt d_2 tại $O(0; 0)$;

$$d_1 \text{ có VTPT } \vec{n}_1 = (1; \sqrt{3});$$

$$d_2 \text{ có VTPT } \vec{n}_2 = (1; -\sqrt{3}).$$

Khi đó

$$\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{d_1, d_2}) = 60^\circ.$$

+ Tam giác OAC vuông tại A có đường cao AB nên $BC = AB\sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3}.$$

Gọi $A(-\sqrt{3}t; t)$ với $t < 0$ thì

$$d(A, d_2) = AB \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A(\sqrt{3}; -1).$$

$$\text{Gọi } C(\sqrt{3}t'; t') \Rightarrow \overline{AC} = (\sqrt{3}(t'-1); t'+1).$$

$$\text{Vì } \overline{AC} \parallel \vec{n_1} \Rightarrow t' = 2 \Rightarrow C(2\sqrt{3}; 2).$$

Vậy tâm của đường tròn (C) là

$$I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (C): \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

Câu 9. ĐK: $x \geq -2$. Biến đổi BPT

$$2(4x^2 - x - 7) + (4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} + 2[4 - (x+2)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{x+2})(4x^2 - x - 3 - 2\sqrt{x+2}) > 0.$$

$$\text{Vì } 2 + \sqrt{x+2} > 0 \text{ nên } 4x^2 - x - 3 - 2\sqrt{x+2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - (1 + \sqrt{x+2})^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1 - \sqrt{x+2})(2x + 1 + \sqrt{x+2}) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1 - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+2} - 1)(2\sqrt{x+2} + 3) > 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t \geq 0, x = t^2 - 2 \text{ và } 2t + 3 > 0.$$

$$\text{BPT (1) trở thành } (t^2 - t - 5)(t - 1) > 0.$$

Lập bảng xét dấu, suy ra

$$0 \leq t < 1 \text{ hoặc } \frac{1 + \sqrt{41}}{4} < t.$$

Từ đó suy ra tập nghiệm BPT đã cho là

$$S = [-2; -1) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{8}; +\infty\right).$$

Câu 10. Vì $P(a, b, c) = P(b, c, a) = P(c, a, b)$, $\forall a, b, c, t > 0$

nhên có thể đặt $a + b + c = 3$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{9(3-b)(b+1)}{abc(b^2 - 3b + 5 - ac)}.$$

Đặt $k = b^2 - 3b + 5$. Ta có

$$\begin{aligned} & ac(k - ac) - \frac{(a+c)^2}{4} \left[k - \frac{(a+c)^2}{4} \right] \\ &= -\frac{(a-c)^2}{4} \left[k - \frac{(a+c)^2}{4} - ac \right] \\ &\leq -\frac{(a-c)^2}{4} \left[k - \frac{(a+c)^2}{2} \right] = -\frac{(a-c)^2}{8} (b^2 + 1) \leq 0. \\ &\Rightarrow ac(k - ac) \leq \frac{(a+c)^2}{4} \left[k - \frac{(a+c)^2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{16} (3-b)^2 (3b^2 - 6b + 11). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{144(b+1)}{(3-b)(3b^2 - 6b + 11)}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x+1}{x(3-x)(3x^2 - 6x + 11)}, \quad x \in (0; 3).$$

Khi đó $f(x) > 0$, và

$$\ln f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \ln(3-x) - \ln(3x^2 - 6x + 11)$$

Đạo hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} - \frac{6(x-1)}{3x^2 - 6x + 11} \\ &= \frac{(x-1)(9x^3 - 9x^2 - 25x + 33)}{x(x+1)(3-x)(3x^2 - 6x + 11)} \end{aligned}$$

$$\text{Do } 9x^3 - 9x^2 - 25x + 33$$

$$= 9x(x-1)^2 + (3x - \sqrt{33})^2 + 2(3\sqrt{33} - 17)x > 0$$

$$\text{nhên } f'(x) > 0, \forall x \in (1; 3), f'(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \min_{x \in (0; 3)} f(x) = f(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow \min P = 18 \text{ đạt được}$$

khi $a = b = c$.

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

BẠN CÓ BIẾT

ERATOSTHENES NHÀ TOÁN HỌC, NHÀ THIÊN VĂN HỌC CỔ HY LẠP

TRẦN ĐÌNH VIỆN (Hà Nội)



Eratosthenes sinh năm - 276 tại Cyrene (ngày nay thuộc Lybia), mất năm - 194 tại Alexandria (Ai Cập) là nhà Toán học, Địa lý và Thiên văn Hy Lạp.

Người cùng thời gọi ông là Bêta (β) do ông là người nổi tiếng thứ hai (không biết ai là người nổi tiếng nhất: Acsimét hay Oclic?).

I. VỀ TOÁN HỌC

Ông tìm ra *thuật toán tìm các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên từ 1, 2, ..., n* gọi là *Sàng Eratosthenes*.

Thí dụ. Tìm các số nguyên tố trong dãy số từ 1 đến 100 gồm các bước: Lập dãy số 2, ..., 100.

	2	3	4*	5	6*	7	8*	9**	10*
11	12*	13	14*	15**	16*	17	18*	19	20*
21**	22*	23	24*	*25	26*	27*	28*	29	30*
31	32*	33**	34*	*35	36*	37	38*	39**	40*
41	42*	43	44*	*45	46*	47	48*	**49	50*
51**	52*	53	54*	*55	56*	57**	58*	59	60*
61	62*	**63	64*	*65	66*	67	68*	69**	70*
71	72*	73	74*	**75	76*	**77	78*	79	80*
81**	82*	83	84*	*85	86*	87**	88*	89	90*
91	92*	93	94*	*95	96*	97	98*	99**	100*

Bước 1: Để lại số nguyên tố $p = 2$, gạch tất các bội số của 2 (cho dấu *).

Bước 2: Để lại 3 và gạch các bội số của 3 bằng cách đánh dấu **.

Bước 3: Để lại 5 và gạch các bội số của 5 bằng cách đánh dấu * ở trước số đó.

Bước 4: Để lại 7 và gạch các bội số của 7 bằng cách đánh dấu ** ở trước. Các bội số của 11 đã bị gạch.

Bước 5: Các số không bị gạch đều là số nguyên tố trong phạm vi 100, gồm: 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 (24 số).

Tương truyền, sau khi tìm ra thuật toán trên, ông lấy lá cọ có ghi tất cả các số từ 2 đến 100, rồi chọc thủng các hợp số, chiếc lá cọ chứa các số nguyên tố còn lại như một cái sàng (dân ta có câu *lọt sàng xuống nia*). Nên thuật toán được đặt tên là *Sàng Eratosthenes*.

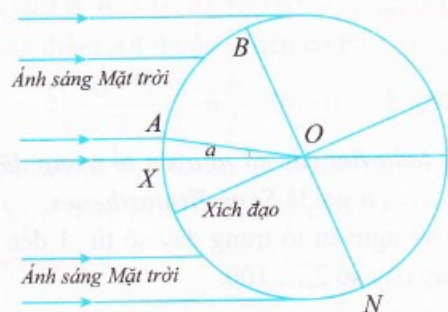
II. VỀ THIÊN VĂN

Đo bóng nắng Mặt trời suy ra chu vi Quả đất
Thành phố Xyene ở gần chí tuyến Bắc (vĩ tuyến $23^0,5$). Thành phố Alexandria cùng kinh tuyến với Xyene nhưng có vĩ độ cao hơn.

Vào ngày Hạ chí (21-6), giữa trưa ở Xyene, Mặt trời ở Thiên đỉnh (đứng bóng), người ta

nhìn thấy ảnh Mặt trời dưới đáy một giếng sâu ở trong thành phố.

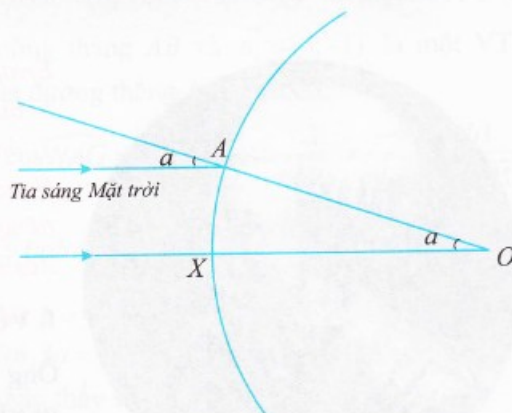
Cũng vào giữa trưa ngày Hạ chí năm sau tại Alexandria (phải chờ năm sau Eratosthenes mới có mặt ở Alexandria được), bóng Mặt trời **ngiêng một góc $a = 7^{\circ}2' = 7^{\circ},033$** . a là góc tạo bởi tia sáng Mặt trời và đường thẳng đứng tại Alexandria vào lúc chính trưa. Ta có $a = \widehat{AOX}$ (xem hình vẽ).



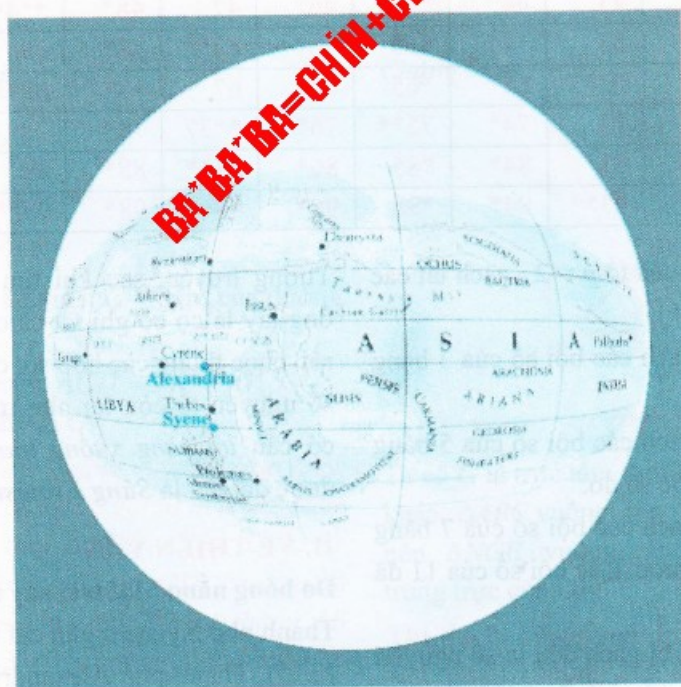
Độ dài cung $\widehat{AX}$, tức khoảng cách giữa hai thành phố đo được là 5000 stadion (đơn vị đo

chiều dài của Ai Cập thời đó, 1 stadion = 157m,5). Suy ra chu vi Quả đất:

$2p = 5000 \times 360 : 7,03$ gần bằng 252808 stadion = 39817km. Sai số không quá 1%.



Ký hiệu trên hình vẽ trái: B - cực Bắc, N - cực Nam của Trái đất, nửa vòng tròn lớn BAXN là kinh tuyến qua thành phố Alexandria (A) và Xylene (X). $\widehat{AOX} = a$, góc nghiêng của tia sáng mặt trời so với chiều thẳng đứng tại Alexandria vào giữa trưa ngày Hạ chí.



Bản đồ có vị trí của Xylene và Alexandria



BẢN THÊM VỀ:

**DÙNG PHƯƠNG PHÁP ẨN PHỤ
ĐỂ GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ ĐẶC BIỆT**

LÊ LÊ

(THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận)

Trong bài “Dùng phương pháp ẩn phụ để giải một dạng phương trình vô tỷ đặc biệt” (TH&TT số 459, tháng 9/2015), tác giả Vũ Hồng Phong đưa ra một điều kiện đủ để áp dụng phương pháp 2 ẩn phụ giải phương trình $u\sqrt[n]{P} + v\sqrt[n]{Q} = w$ là:

Tồn tại $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} uP_0 + vQ_0 = w \\ e.P_0^m + f.Q_0^n = e.P + f.Q \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $(a; b) = (\sqrt[n]{P}; \sqrt[n]{Q}) = (P_0; Q_0)$.

Khó khăn của học sinh khi dùng phương pháp này là phải tìm được $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ của hệ (*). Trong bài viết này, chúng tôi nêu ra cách dùng máy tính cầm tay (MTCT) và suy luận để tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$. Lời giải chi tiết mời các bạn tham khảo Tạp chí TH&TT số 459, tháng 9/2015.

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{2+4x-x^2} + \sqrt[3]{2x^2-6x+7} = x+1.$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ trong (*).

Bước 1. Nhập vào MTCT biểu thức

$$\sqrt{2+4x-x^2} + \sqrt[3]{2x^2-6x+7} - x - 1.$$

Bước 2. Dùng SOLVE, suy ra $x_1 \approx 3,15...$
SHIFT STO A (gán kết quả x_1 vào tham số A).

Bước 3. Tính $\sqrt[3]{2A^2-6A+7} = 2$.

$$\text{Vậy } (P_0, Q_0) = (x-1; 2).$$

Bước 4. Lập

$$\begin{aligned} e(x-1)^2 + 1.2^3 &= e.(2+4x-x^2) + 1.(2x^2-6x+7) \\ \Rightarrow e+8 &= 2e+7 \Rightarrow e=1 \end{aligned}$$

$$\text{Hệ } (*) \begin{cases} (x-1)+2=x+1 \\ (x-1)^2+2^3=(2+4x-x^2)+(2x^2-6x+7) \end{cases}$$

Phân tích như trên, ta có đủ cơ sở khoa học để đặt $a = \sqrt{2+4x-x^2} \geq 0, b = \sqrt[3]{2x^2-6x+7}$.

Dẫn đến hệ phương trình (chắc chắn tìm được

$$a, b): \begin{cases} a+b=x+1 \\ a^2+b^3=x^2-2x+9 \end{cases}$$

Bạn đọc có thể xem lời giải chi tiết ở Tạp chí TH&TT số 459, tháng 9/2015.

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{7x^2+20x-86} + x\sqrt{31-4x-x^2} = 3x+2.$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ trong (*).

Bước 1. Nhập vào MTCT biểu thức

$$\sqrt{7x^2+20x-86} + x\sqrt{31-4x-x^2} - 3x - 2.$$

Bước 2. Dùng SOLVE, suy ra $x_1 \approx 3,83...$
SHIFT STO A (gán kết quả x_1 vào tham số A).

Bước 3. Tính $\sqrt{31-4A-A^2} = 1$.

$$\text{Vậy } (P_0, Q_0) = (2x+2; 1).$$

Bước 4. Lập

$$\begin{aligned} e(2x+2)^2 + 1.1^2 &= e.(7x^2+20x-86) \\ &\quad + 1.(31-4x-x^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4e+1 = -86e+31 \Rightarrow e = \frac{1}{3}.$$

Hệ (*)

$$\begin{cases} (2x+2)+x.1=3x+2 \\ 1.(2x+2)^2+3.1^2=1.(7x^2+20x-86)+3.(31-4x-x^2) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt

$$a = \sqrt{7x^2 + 20x - 86} \geq 0, b = \sqrt{31 - 4x - x^2} \geq 0.$$

Dẫn đến hệ phương trình (chắc chắn tìm được

$$a, b): \begin{cases} a + xb = 3x + 2 \\ a^2 + 3b^2 = 4x^2 + 8x + 7 \end{cases}$$

Thí dụ này cho thấy sự thú vị khi dùng số hạng $3b^2$ ở phương trình thứ hai. Bạn đọc có thể xem lời giải chi tiết ở Tạp chí TH&TT số 459, tháng 9/2015.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{12x^2 + 12x + 9}{4}} = x + \sqrt[4]{\frac{4x^3 - 2}{3}}.$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ trong (*).

Bước 1. Nhập vào MTCT biểu thức

$$\sqrt[3]{\frac{12x^2 + 12x + 9}{4}} - \sqrt[4]{\frac{4x^3 - 2}{3}} - x.$$

Bước 2. Dùng SOLVE, suy ra $x_1 = 1,07...$

SHIFT STO A (gán kết quả x_1 vào tham số A)

Bước 3. Tính $\sqrt[4]{\frac{4A^3 - 2}{3}} = 1.$

$$\text{Vậy } (P_0, Q_0) = (x + 1; 1).$$

Bước 4. Lập

$$e(x+1)^3 + 1.1^4 = e \left(\frac{12x^2 + 12x + 9}{4} \right) + 1. \left(\frac{4x^3 - 2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow e + 1 = \frac{9}{4}e - \frac{2}{3} \Rightarrow e = \frac{4}{3}.$$

Hệ (*)

$$\begin{cases} (x+1) - 1.1 = x \\ 4.(x+1)^3 + 3.1^4 = 4. \frac{12x^2 + 12x + 9}{4} + 3. \frac{4x^3 - 2}{3} \end{cases}$$

Lời giải. Đặt

$$a = \sqrt[3]{\frac{12x^2 + 12x + 9}{4}}, b = \sqrt[4]{\frac{4x^3 - 2}{3}} \geq 0.$$

Dẫn đến hệ phương trình (chắc chắn tìm được

$$a, b): \begin{cases} a - b = x \\ 4a^3 + 3b^4 = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 7 \end{cases}$$

Thí dụ này cho thấy tại sao phải dùng hệ số (4;3) ở phương trình thứ hai. Lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 20x^3 - 11x = 4y^2 & (1) \\ \sqrt{1-2xy} + y\sqrt{x^2 + y^2} = x & (2) \end{cases}$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ của (2).

Bước 1. Biểu thức $\sqrt{1-2xy}$ và vế phải (2) không có căn thức, cho ta hướng dự đoán

$$1 = x^2 + y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow (P_0; Q_0) = (x - y; 1)$$

Bước 2. Lập

$$e(x-y)^2 + 1.1^3 = e.(1-2xy) + 1.(x^2 + y^2) \Rightarrow 1 = e.$$

Hệ (*) cho phương trình (2) là:

$$\begin{cases} (x-y) + y.1 = x \\ (x-y)^2 + 1^2 = (1-2xy) + (x^2 + y^2) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{1-2xy} \geq 0, b = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a + yb = x \\ a^2 + b^3 = (x-y)^2 + 1 \end{cases}$$

Bạn đọc có thể xem lời giải chi tiết ở Tạp chí TH&TT số 459, tháng 9/2015.

Thí dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = \frac{65}{8} & (1) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2} - y\sqrt{2xy - 1} = x & (2) \end{cases}$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ của (2).

Bước 1. Biểu thức $\sqrt{x^2 + y^2 + 2}$ và vế phải (2) không có căn thức, cho ta hướng dự đoán

$$2 = 2xy \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow \sqrt{2xy - 1} = 1 \Rightarrow (P_0; Q_0) = (x + y; 1).$$

Bước 2. Lập

$$e(x+y)^2 + 1^2 = e.(x^2 + y^2 + 2) + (2xy - 1) \Rightarrow 1 = 2e - 1 \Rightarrow e = 1.$$

$$\text{Hệ (*) } \begin{cases} (x+y) - y.1 = x \\ (x+y)^2 + 1^2 = (x^2 + y^2 + 2) + (2xy - 1) \end{cases}$$

 **Lời giải.** Đặt

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + 2} \geq 0, b = \sqrt{2xy - 1} \geq 0.$$

Ta có
$$\begin{cases} a - yb = x \\ a^2 + b^2 = (x + y)^2 + 1 \end{cases}$$

Lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Thí dụ 6.
$$\begin{cases} 3x^3 + 3y^3 + x^3y^3 = 35 & (1) \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2xy + 4} - y & (2) \end{cases}$$

Cách tìm $e, f \in \mathbb{R}, P_0, Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ của (2).

Bước 1. Biểu thức $\sqrt{x^2 - 2xy + 4}$ cho ta hướng dự đoán $4 = y^2 \Rightarrow (P_0; Q_0) = (-x; y - x)$

Bước 2. Lập

$$e(-x)^2 + (y-x)^2 = e(x^2 + y^2 - 4) + (x^2 - 2xy + 4) \\ \Rightarrow 0 = -4e + 4 \Rightarrow e = 1$$

Hệ (*) cho phương trình (2) là:

$$\begin{cases} -x - (y - x) = -y \\ ((-x)^2 + (y - x)^2 = (x^2 + y^2 - 4) + (x^2 - 2xy + 4)) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \geq 0, b = \sqrt{x^2 - 2xy + 4} \geq 0.$$

Ta có
$$\begin{cases} a - b = -y \\ a^2 + b^2 = 2x^2 + y^2 - 2xy \end{cases}$$

Lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc.

MỘT SỐ TÍNH CHẤT ... (Tiếp theo trang 14)

Với $a = 3b \Rightarrow CD : 3x + y = 0 \Rightarrow C(0; 0)$ (loại).

Với $b = 3a \Rightarrow CD : x + 3y + 8 = 0 \Rightarrow C(4; -4)$ (nhận).

PT đường thẳng DH là: $x - y - 4 = 0$.

Do đó $H(2; -2)$.

Theo chứng minh trên $\overline{AH} = \frac{3}{2} \overline{HC}$ thì được $A(-1; 1)$, từ đó $B(4; 6)$.

Vậy $A(-1; 1)$, $B(4; 6)$, $C(4; -4)$.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . Biết $BC : x + 7y - 31 = 0$, điểm $N\left(1; \frac{5}{2}\right)$ thuộc đường thẳng AC , điểm $M(2; -3)$ thuộc đường thẳng AB . Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC biết rằng A có hoành độ âm.
2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A có H là trung điểm của

BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC và M là trung điểm HD . Đường thẳng BD qua $E(0; 4)$ là đường trung bình của tam giác ABC

với cạnh AC có phương trình: $y = x + 3$.

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết rằng $AM : x - 3y + 14 = 0$ và điểm A có hoành độ âm.

3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm $E(2; 0)$ Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên AB và AC . Tìm tọa độ A, B, C biết điểm A thuộc đường thẳng $d : 3x - y + 4 = 0$ và đường thẳng $PQ : x + 2y - 5 = 0$.

4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A . Lấy $P\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ trên cạnh BC sao cho $PC = 3PB$. Lấy $Q(4; 3)$ thuộc đường tròn (ABC) sao cho $QA \perp QP$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết rằng bán kính của đường tròn (ABC) bằng 5.



GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

KIỀU ĐÌNH MINH
TẠ ANH DŨNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Gới hạn của dãy số là bài toán cơ bản và quan trọng của giải tích. Trong các số báo trước chúng tôi đã đề cập đến việc tìm giới hạn của nhiều loại dãy số thực. Lần này chúng tôi gửi đến bạn đọc bài toán về giới hạn của dãy số nguyên và ứng dụng của nó trong giải toán. Ta bắt đầu bằng tính chất quan trọng sau

Định lý: Chứng minh rằng nếu dãy số nguyên (a_n) hội tụ về a thì a là một số nguyên và tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $a_n = a$.

Chứng minh. Hiển nhiên $a \in \mathbb{Z}$. Theo giả thiết

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_0 : |a_n - a| < \frac{1}{2}, \forall n > n_0$$

$$\Rightarrow |a_n - a| = 0, \forall n > n_0 \Rightarrow a_n = a, \forall n > n_0. (\text{đpcm})$$

Thí dụ 1. Cho dãy số nguyên $(a_n) (n=0, 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $0 \leq a_n + 7a_{n+1} + 10a_{n+2} \leq 9, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $a_n = 0$.

Lời giải. Đặt $x_k = \min\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$;

$y_k = \max\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ thì (x_k) là dãy tăng, (y_k) là dãy giảm và $x_k \leq y_k, \forall k$. Dãy (a_n) bị chặn nên hai dãy $(x_k), (y_k)$ cũng bị chặn. Do đó cả hai dãy này đều hội tụ. Giả sử $\lim x_n = x; \lim y_n = y$. Do $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $x_n = x; y_n = y$. Tồn tại $n \geq n_0$ sao cho

$$a_{n+2} = y; a_n, a_{n+1} \geq x \Rightarrow 0 \leq 8x + 10y \leq 9 \quad (1)$$

Tương tự, tồn tại $m \geq n_0$ sao cho

$$a_{m+2} = x; a_m, a_{m+1} \leq y \Rightarrow 9 \geq 10x + 8y \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $x, y \in \mathbb{Z}$ suy ra $x = y = 0$.

Do đó $\lim a_n = 0$.

Thí dụ 2 (Polish TST). Cho a và b là các số nguyên sao cho $a \cdot 2^n + b$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng $a = 0$.

Lời giải. Giả sử rằng $a \neq 0$. Thế thì $a > 0$, vì ngược lại $a < 0$ thì với n lấy các giá trị lớn số $a \cdot 2^n + b$ là âm. Từ giả thiết, tồn tại một dãy số nguyên dương $(x_n)_{n \geq 1}$ sao cho

$$x_n^2 = a \cdot 2^n + b, \forall n \Leftrightarrow x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}, \forall n.$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n+2})$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{a \cdot 2^n + b} - \sqrt{a \cdot 2^{n+2} + b})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3b}{2\sqrt{a \cdot 2^n + b} + \sqrt{a \cdot 2^{n+2} + b}} = 0.$$

Suy ra tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $2x_n = x_{n+2}, \forall n \geq n_0$. Nhưng $2x_n = x_{n+2}$ là tương đương với $b = 0$. Khi đó a và $2a$ đều là các số chính phương, điều này là không thể với $a \neq 0$. Vậy giả sử của ta là sai, do đó $a = 0$.

Thí dụ 3. A, B, C là 3 số nguyên sao cho với mọi số nguyên n , thì $f(n) = An^2 + Bn + C$ là bình phương của một số nguyên. Chứng tỏ rằng tồn tại hai số nguyên a, b sao cho

$$f(n) = (an + b)^2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Nếu $A = 0$, thì $f(n) = Bn + C$ chỉ là bình phương của một số nguyên, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, khi $B = 0$ và $C = c^2, c \in \mathbb{Z}$. Xét $A \neq 0$. Khi đó ta phải có $A > 0$, vì nếu n đủ lớn thì $f(n)$ cùng dấu với A . Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đặt $An^2 + Bn + C = M_n^2$, với M_n là một số nguyên dương khi n đủ lớn.

Hiển nhiên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{n} = \sqrt{A}$. Ta có

$$\begin{aligned} (M_{n+1} - M_n)(M_{n+1} + M_n) &= M_{n+1}^2 - M_n^2 \\ &= [A(n+1)^2 + B(n+1) + C] - [An^2 + Bn + C] \\ &= 2An + A + B. \text{ Suy ra} \end{aligned}$$

$$M_{n+1} - M_n = \frac{2An + A + B}{M_{n+1} + M_n} = \frac{2A + \frac{A+B}{n}}{\frac{M_{n+1} + M_n}{n}}.$$

Thành thử ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_{n+1} - M_n) = \sqrt{A}$.

Nhưng $M_{n+1} - M_n$ chỉ nhận những giá trị nguyên. Suy ra $\sqrt{A} = a$ là một số nguyên dương và với n đủ lớn ta có $M_{n+1} - M_n = a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{n+1} &= M_n + a \Rightarrow M_{n+1}^2 = M_n^2 + 2aM_n + a^2 \\ \Rightarrow 2aM_n + a^2 &= M_{n+1}^2 - M_n^2 = 2a^2n + a^2 + B \\ \Rightarrow 2aM_n &= 2a^2n + B. \end{aligned}$$

Như vậy B chia hết cho $2a$, tức $B = 2ab$, suy ra $M_n = an + b$, hay $An^2 + Bn + C = M_n^2 = (an + b)^2$.

Tuy rằng ta có hệ thức này với n đủ lớn, nhưng theo tính chất của các đa thức, ta thấy nó đúng với mọi số nguyên n .

Thí dụ 4. Cho $u, v, a, b, c \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u^2 = av^2 + bv^2 + c$ và dãy số (x_n) xác định bởi $x_n = au^n + bv^n + c$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có vô số số hạng không là số chính phương.

Lời giải. Giả sử phản chứng. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, tồn tại $a_n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a_n^2 = au^n + bv^n + c$. Suy ra

$$\frac{a_n^2}{v^n} = a \left(\frac{u}{v} \right)^n + b + \frac{c}{v^n}.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ thì $\frac{a_n^2}{v^n} \rightarrow b$ (vì $u^2 < v \Rightarrow \frac{u}{v} < 1$),

suy ra $\frac{a_n}{v^{\frac{n}{2}}} \rightarrow \sqrt{b}$. Ta có $a_n^2 - bv^n = au^n + c$

$$\Leftrightarrow \left(a_n - \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}} \right) \left(a_n + \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}} \right) = au^n + c$$

$$\Rightarrow \left(a_n - \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}} \right) \cdot \frac{a_n + \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}}}{u^n} = a + \frac{c}{u^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}}}{u^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_n}{v^{\frac{n}{2}}} + \sqrt{b} \right)}{u^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v^{\frac{n}{2}} \cdot 2\sqrt{b}}{u^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v}{u^2} \right)^n 2\sqrt{b} = +\infty \text{ (vì } \frac{v}{u^2} > 1). \end{aligned}$$

Mà $a + \frac{c}{u^n} \rightarrow a$, khi $n \rightarrow +\infty$ nên suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_n - \sqrt{bv^{\frac{n}{2}}} \right) = 0. \text{ Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(va_n - \sqrt{bv^{\frac{n+2}{2}}} \right) = 0.$$

$$\text{Lại do } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_{n+2} - \sqrt{bv^{\frac{n+2}{2}}} \right) = 0.$$

Nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+2} - va_n) = 0$. Mặt khác $a_n, v \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra tồn tại số nguyên dương n_1 sao cho $a_{n+2} - va_n = 0$ với mọi $n \geq n_1$.

$$\text{Ta có } a_{n+2}^2 = au^{n+2} + bv^{n+2} + c.$$

Mà $a_{n+2}^2 = au^{n+2} + bv^{n+2} + c$. Suy ra

$$au^{n+2} + bv^{n+2} + c = au^n v^2 + bv^{n+2} + cv^2 = 0 \Leftrightarrow au^n (u^2 - v^2) = cv^2 - c$$

$$u^2 - v^2 = \frac{cv^2 - c}{au^n}, \forall n \geq n_1. \text{ Cho } n \rightarrow +\infty \text{ ta có}$$

$$u^2 - v^2 \rightarrow 0 \Rightarrow u^2 = v^2 \Rightarrow u = v \text{ (vì } u, v \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Điều vô lý này cho ta kết quả cần chứng minh.

Thí dụ 5 (IMO SL2003) Giả sử b là một số nguyên lớn hơn 5. Với mỗi số nguyên dương n , xét số $x_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n-1} \underbrace{22 \dots 2}_n 5$ được viết dưới dạng

cơ số b . Chứng minh rằng điều kiện sau đúng khi và chỉ khi $b = 10$:

Tồn tại số nguyên dương M sao cho với mọi số nguyên n lớn hơn M , số x_n là số chính phương.

Lời giải. Giả sử rằng $b \geq 6$ có tính chất thỏa mãn bài toán. Ta có

$$\begin{aligned} x_n &= 5 + 2(b + b^2 + \dots + b^n) + (b^{n+1} + \dots + b^{2n-1}) \\ &= 5 + 2b(1 + b + \dots + b^{n-1}) + b^{n+1}(1 + b + \dots + b^{n-2}) \\ &= \frac{b^{2n} + b^{n+1} + 3b - 5}{b - 1}. \end{aligned}$$

Xét dãy số $y_n = (b-1)x_n$. Từ định nghĩa của x_n ta có $y_n = b^{2n} + b^{n+1} + 3b - 5$.

Khi đó $y_n y_{n+1} = (b-1)^2 x_n x_{n+1}$ là số chính phương với mọi $n > M$. Đặt $z_n = \sqrt{x_n}$.

Từ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{2n}}{(b-1)^2 x_n} = 1$, ta suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{z_n} = \sqrt{b-1}$.

Hơn nữa từ $(bz_n + z_{n+1})(bz_n - z_{n+1}) = b^2 x_n - x_{n+1} = b^{n+2} + 3b^2 - 2b - 5$ ta có

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (bz_n - z_{n+1}) = \frac{b\sqrt{b-1}}{2}$. Từ z_n là số nguyên

với mọi $n \geq M$, ta có $bz_n - z_{n+1} = \frac{b\sqrt{b-1}}{2}$ với

n đủ lớn. Do đó $b-1$ là số chính phương và hơn nữa b chia hết $2z_{n+1}$ với mọi n đủ lớn. Điều này dẫn đến $b \mid 10$. Do đó chỉ có thể $b = 10$.

Thí dụ 6 (Putnam). Ta nói số nguyên t là số tam giác nếu $t = \frac{n(n+1)}{2}$ với số nguyên dương n . Tìm tất cả cặp số nguyên (a, b) có tính chất: Với mọi số nguyên t , t là số tam giác khi và chỉ khi $at + b$ là số tam giác.

Lời giải. Đầu tiên ta có nhận xét: Số nguyên t là số tam giác khi và chỉ khi $8t+1$ là số chính phương lẻ, $8t+1 \geq 9$. Giả sử cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn t là số tam giác khi và chỉ khi $at+b$ là số tam giác (1). Ta sẽ chứng minh $a=1, b=0$, nghĩa là cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn (1) là cặp số $(1, 0)$. Ta có $8(at+b)+1 = a(8t+1)+c$, trong đó kí hiệu $c = 8b+1-a$. Do đó tính chất (1) tương đương với tính chất: Với mọi $u \in \mathbb{Z}, u \equiv 1 \pmod{8}$, u là số chính phương lẻ, $u \geq 9$ khi và chỉ khi $au+c$ là số chính phương lẻ, $au+c \geq 9$ (2). Ta thấy ngay $a > 0$, vì nếu $a < 0$ thì tồn tại số chính phương lẻ $u \geq 9$ mà $au+c < 0$, và nếu $a=0$, lấy $u=9$ suy ra c là số chính phương lẻ, $c \geq 9$, khi đó $au+c=c$ là chính phương lẻ với mọi u dẫn đến tính chất (2) sai.

Xét $v \in \mathbb{N}^*, v$ lẻ, $v \geq 3$. Giả sử $t_v, t_{v+2} \in \mathbb{N}^*$, đều là số nguyên lẻ, đều lớn hơn 2 và thỏa mãn

$$\begin{cases} av^2 + c = t_v^2 \\ a(v+2)^2 + c = t_{v+2}^2 \end{cases} \quad (3)$$

Từ $a > 0$, ta có $\lim_{v \rightarrow +\infty} t_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} t_{v+2} = +\infty$.

Do đó $\lim_{v \rightarrow +\infty} (t_v + \sqrt{a} \cdot v) = +\infty$.

Nhưng $c = (t_v + \sqrt{a} \cdot v)(t_v - \sqrt{a} \cdot v)$.

Suy ra $\lim_{v \rightarrow +\infty} (t_v - \sqrt{a} \cdot v) = 0$ (4)

Bởi vậy $\lim_{v \rightarrow +\infty} (t_{v+2} - t_v)$

$$= \lim_{v \rightarrow +\infty} [(t_{v+2} - \sqrt{a}(v+2)) - (t_v - \sqrt{a}v) + 2\sqrt{a}] = 2\sqrt{a} \quad (5).$$

Chú ý $t_{v+2} - t_v$ ($v=3, 5, 7, \dots$) là dãy các số nguyên nên từ (5) suy ra trừ một số hữu hạn số v thì $t_{v+2} - t_v = 2\sqrt{a}$. Hệ quả là $\sqrt{a} \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với (4) và nhận xét rằng nếu $t_v - \sqrt{a} \cdot v \neq 0$ thì $|t_v - \sqrt{a} \cdot v| \geq 1$ ta nhận được $c=0$. Tức là

$b = \frac{a-1}{8}$, mà theo giả thiết thì b nguyên nên a là số chính phương lẻ. Nhưng nếu $a \geq 3^2$ thì (2) sai khi $u=1$. Vậy $a=1, b=0$.

Thí dụ 7 (Gabriel Dospinescu).

Cho $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn có ít nhất một số trong chúng không nguyên. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n mà $\gcd(n, \lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \dots + \lfloor a_k n \rfloor) = 1$.

Lời giải. Giả sử phản chứng: Không tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn đề bài. Suy ra tồn tại số nguyên dương n_0 mà với mọi $n \geq n_0$ thì $\gcd(n, \lfloor a_1 n \rfloor + \lfloor a_2 n \rfloor + \dots + \lfloor a_k n \rfloor) > 1$.

Cho $n = p_i$ là số nguyên tố tùy ý, ta có

$\lfloor a_1 p_i \rfloor + \lfloor a_2 p_i \rfloor + \dots + \lfloor a_k p_i \rfloor \leq p_i$, suy ra tồn tại số nguyên x_i để $\lfloor a_1 p_i \rfloor + \lfloor a_2 p_i \rfloor + \dots + \lfloor a_k p_i \rfloor = x_i p_i$.

$$\text{Hay } p_i(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = x_i p_i + \{a_1 p_i\} + \dots + \{a_k p_i\} \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_k - x_i = \frac{\{a_1 p_i\} + \{a_2 p_i\} + \dots + \{a_k p_i\}}{p_i}$$

Vì $0 < \{a_j p_i\} < 1, \forall j = \overline{1, k}$, suy ra

$$0 < a_1 + a_2 + \dots + a_k - x_i < \frac{k}{p_i}.$$

Cho $i \rightarrow +\infty$, ta có $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

Mà $x_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i$ nên suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_k \in \mathbb{N}^*$ và tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = x_i, \forall i \geq n_1.$$

Do đó $\{a_1 p_i\} + \{a_2 p_i\} + \dots + \{a_k p_i\} = 0, \forall i \geq n_1$

$$\Rightarrow \{a_1 p_i\} = \{a_2 p_i\} = \dots = \{a_k p_i\} = 0.$$

Suy ra a_j có dạng $\frac{b_j}{p_i}, \forall i \geq n_0, b_j \in \mathbb{N}^*$.

Mà p_i là số nguyên tố nên $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Thí dụ 8 (Romanian TST 2004). Tìm tất cả các đơn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Cố định $a \in \mathbb{N}^*$. Đặt $f(\underbrace{f(\dots f(a))}_k) = a_k$.

Từ giả thiết, cho $n = u_k$, ta có

$$u_{k+2} \leq \frac{u_{k+1} + u_k}{2}. \text{ Đặt } A_k = \max\{u_{k+1}; u_k\},$$

$$B_k = \min\{u_{k+1}; u_k\} \text{ thì } u_{k+2} \leq \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \leq A_k, \text{ suy}$$

$$\text{ra } \max\{u_{k+1}; u_{k+2}\} \leq A_k \Rightarrow A_{k+1} \leq A_k. \text{ Mà } A_k \geq 0,$$

nên tồn tại $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$.

Nếu tồn tại vô số i sao cho $u_{i+1} > B_{i+1}$ thì

$$u_{i+2} \leq \frac{B_{i+1} + u_i}{2} \leq \frac{B_{i+1} + A_i}{2} \text{ hay } A_{i+1} \leq \frac{B_{i+1} + A_i}{2}.$$

Do $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại

$N \in \mathbb{N}$ sao cho $|A_k - A| < \varepsilon, \forall k > N$. Cho $i > N$,

$$\text{ta có } A - \varepsilon < A_{i+1} \leq \frac{B_{i+1} + A_i}{2} < \frac{B_{i+1} + A + \varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 2A - 2\varepsilon < B_{i+1} + A + \varepsilon$$

$$\Rightarrow A - 3\varepsilon < B_{i+1} \leq A_{i+1} < A + \varepsilon < A + 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow |B_{i+1} - A| < 3\varepsilon, \forall i > N.$$

Do đó $\lim_{i \rightarrow +\infty} B_{i+1} = A$. Mà (A_k) là dãy số nguyên

nên tồn tại $T \in \mathbb{N}$ sao cho $A_k = B_k, \forall k > T$.

$$\text{Hay } u_{k+1} = u_k \Rightarrow f(u_k) = f(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow u_k = u_{k-1} = \dots = u_1 \Rightarrow f(a) = a.$$

Thử lại thỏa mãn.

Nếu tồn tại hữu hạn i sao cho $u_{i+1} = B_{i+1}$ thì suy ra tồn tại vô số i sao cho $u_{i+2} = B_{i+1}$. Tức là tồn tại $T \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{i+2} = B_{i+1}, \forall i > T$
 $\Rightarrow u_{i+2} < u_{i+1}, \forall i > T$, điều này vô lý vì (u_n) là dãy số nguyên dương.

Tóm lại: $f(a) = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho số tự nhiên $c \geq 3$. Xét dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_{n-1} - \left\lfloor \frac{a_{n-1}}{2} \right\rfloor + 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $a_n = 3$.

Bài 2. Cho $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_m$. Chứng minh rằng nếu tồn tại dãy số nguyên (a_n) và các hằng số $c_2, \dots, c_m$ khác 0 sao cho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_m x_m^n - a_n) = 0$$

thì $x_2, \dots, x_m$ là các số nguyên.

Bài 3. Cho (p_n) và (q_n) là các dãy số nguyên

dương sao cho dãy $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ hội tụ. Chứng minh rằng

nếu dãy (p_n) hoặc (q_n) bị chặn thì giới hạn

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n}$ là một số hữu tỷ.

Bài 4 (IMO SL 2012). Cho f và g là hai đa thức khác 0 với các hệ số nguyên và $\deg f > \deg g$. Giả sử rằng với vô hạn số nguyên tố p thì đa thức $pf + q$ có một nghiệm hữu tỷ. Chứng minh rằng f có một nghiệm hữu tỷ.

Bài 5 (Moldova TST 2005)

Cho $f, g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ là các hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(a) g là hàm toàn ánh;

$$(b) 2f^2(n) = n^2 + g^2(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+;$$

$$(c) |f(n) - n| \leq 2016\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

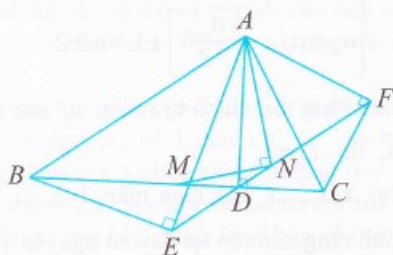
Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có vô số nghiệm.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 13

Problem. (1998 APMO) Let ABC be a triangle and D be the foot of the altitude from A . Let E and F be on a line passing through D such that AE is perpendicular to BE , AF is perpendicular to CF , and E and F are different from D . Let M and N be the midpoints of the line segments BC and EF , respectively. Prove that AN perpendicular to MN .

Solution. Set the origin at A and x -axis parallel to EF . Let the coordinates of D, E, F be $(d; m), (e; m), (f; m)$, respectively. The case $m=0$ leads to $D \equiv E$, which is not allowed.



So we may assume $m \neq 0$. Since $BE \perp AE$ so the line BE passing through E and the slope of it is $-\frac{e}{m}$. Thus, the equation of line BE works out to be $ex + my - e^2 - m^2 = 0$. Similarly, the equations of CF and BC are $fx + my - f^2 - m^2 = 0$ and $dx + my - d^2 - m^2 = 0$, respectively.

On the other hand, the lines BE and BC intersect the lines BC and CF at B and C , respectively. We find:

$$B\left(d+e; m-\frac{de}{m}\right), C\left(d+f; m-\frac{df}{m}\right)$$

Because M and N are the midpoints of the line segments BC and EF , respectively. Therefore,

$$M\left(d+\frac{e+f}{2}; m-\frac{de+df}{2m}\right), N\left(\frac{e+f}{2}; m\right) \text{ and}$$

$$\overrightarrow{MN}\left(-d; \frac{de+df}{2m}\right), \overrightarrow{AN}\left(\frac{e+f}{2}; m\right).$$

Hence $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow MN \perp AN$.

Remark. We can set the origin at D and the x -axis on line BC . However, the computing the coordinates of E and F will be a bit messy. A better choice is to set the line through D, E, F horizontal.

TỪ VỰNG

altitude (n): độ cao, chiều cao, đường cao.

coordinate (n): tọa độ.

origin (n): gốc.

parallel (adj): song song với.

perpendicular (adj): vuông góc với.

segments (n): đoạn thẳng.

slope (n): hệ số góc.

PHAN THỊ KIM NGÂN

(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)



Bài toán. Cho hình chữ nhật kích thước 18×24 . Hỏi có bao nhiêu hình vuông sẽ đi xuyên qua bởi một đường chéo của hình chữ nhật này?

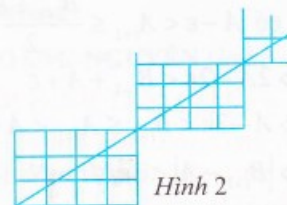
Lời giải. Xét hình chữ nhật kích thước 3×4 . Một đường chéo của hình chữ nhật này sẽ đi xuyên qua 6 hình vuông (Hình 1). Khi đó một đường chéo của hình chữ nhật kích thước 18×24 sẽ đi xuyên qua 6 hình chữ nhật nhỏ kích thước 3×4 (Hình 2). Do đó nó sẽ đi xuyên qua $6 \times 6 = 36$ hình vuông.

Câu hỏi thêm

- Ở bài toán trên ta đã quy về một hình chữ nhật nhỏ (kích thước 3×4) từ đó dễ dàng đếm được số hình vuông mà một đường chéo của hình chữ nhật lớn (kích thước 18×24) đi xuyên qua. Làm thế nào với một hình chữ nhật kích thước 17×25 ?
- (Gợi ý: Bạn có thể dùng kiến thức hình học giải tích).
- Làm thế nào nếu ta thay một hình chữ nhật bởi một hình hộp chữ nhật kích thước $3 \times 4 \times 5$?



Hình 1



Hình 2

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** Triệu Quốc Tùng, 10A3, Nguyễn Thị Quỳnh Hoa, Nguyễn Thu Trang, 10A1, Lê Văn Trang, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Chu Minh Huy, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** Lê Phạm Thủy Tiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI “HOÀN HẢO” !

(Đề đăng trên TH&TT số 468, tháng 6 năm 2016)

Phân tích. Sai lầm của Nghĩa là từ $u^2 \geq u$ và $u \geq 0$ suy ra $u \geq 1$. Do đó miền giá trị của u sai, kéo theo miền giá trị tương ứng của $f(u)$ sai.

Lời giải đúng. Biến đổi

$$\begin{cases} 2x-3y-8xy=-1 \\ 4x^2+y^2-2xy+4x-y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)+y=4(2x+1)y \\ (2x+1)^2+y^2-(2x+1)y=m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)+y=4(2x+1)y & (1) \\ (2x+1+y)^2-3(2x+1)y=m+1 & (2) \end{cases}$$

Đặt $u=(2x+1)+y \geq 0$ (vì $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$) thì từ

(1) suy ra $(2x+1)y = \frac{u}{4}$. Vì $((2x+1)+y)^2 \geq 4(2x+1)y$

nên $u^2 \geq u$ dẫn tới $u \in \{0\} \cup [1; +\infty)$. Mặt khác, do

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$ nên

$(1-y)x \leq 0 \Leftrightarrow 1+y(2x+1) \geq y+(2x+1)$ hay

$1+\frac{u}{4} \geq u \Leftrightarrow u \leq \frac{4}{3}$. Chứng tỏ $u \in \{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$. PT(2)

trở thành $u^2 - \frac{3}{4}u = m+1$ (3). Bài toán trở thành: Tìm

m để PT(3) có nghiệm $u \in \{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$. Xét hàm số

$f(u) = u^2 - \frac{3}{4}u$ với $u \in \{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$. Ta thấy

$f'(u) = 2u - \frac{3}{4} > 0, \forall u \in [1; \frac{4}{3}]$ và có bảng biến thiên

u	1	$\frac{4}{3}$
$f'(u)$		+
$f(u)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{9}$

Mặt khác $f(0) = 0$. Như vậy, với $u \in \{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$ thì

tập giá trị của $f(u)$ là $\{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$. Phương trình (3) có

nghiệm trên $u \in \{0\} \cup [1; \frac{4}{3}]$ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \leq m+1 \leq \frac{7}{9} \\ m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{2}{9} \\ m=-1 \end{cases}$$

Vậy với $u \in \{-1\} \cup [-\frac{3}{4}; -\frac{2}{9}]$ thì hệ đã cho có nghiệm

thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$.

Nhận xét. Chỉ có hai bạn tìm đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Hưng Yên:** Chu Minh Huy, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Nghệ An:** Hà Gia Bảo, 10A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò.

KIHI VI



ĐÃ ĐÚNG CHƯA !

Trong tiết học, khi THPT Quốc gia ở lớp THPT 12A4, Thầy giáo đưa ra một bài toán sau:

“Cho x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính giá trị của

biểu thức $P = |\sin x| + \cos x$ ”.

Bạn Thành xung phong lên giải. Sau đây là lời giải của bạn Thành.

Nếu $\sin x \geq 0$ thì $P = |\sin x| + \cos x = \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

Nếu $\sin x < 0$ thì $P = |\sin x| + \cos x = -\sin x + \cos x$.

Ta có: $\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{5} \\ -\sin x + \cos x = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - P) \\ \cos x = \frac{1}{2}(\frac{1}{5} + P) \end{cases}$;

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\frac{1}{5} - P)^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{5} + P)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{25} + 2P^2 = 4 \Leftrightarrow P^2 = \frac{49}{25} \Leftrightarrow P = \pm \frac{7}{5}$$

Vậy $P = \frac{1}{5}$ hoặc $P = \frac{7}{5}$ hoặc $P = -\frac{7}{5}$.

Sau khi giải xong cả lớp trầm trồ “hay”. Thầy giáo hỏi lời giải trên đúng chưa? Cả lớp im lặng, nhìn nhau với ánh mắt ngờ vực. Các bạn hãy giúp các bạn 12A4 trả lời câu hỏi trên nhé!

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 472 (10.2016)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Dương Văn Duy – Giải phương trình bằng phương pháp hằng số biến thiên.

4 Giải đáp đố vui ngày hè (Đợt 2) Kết quả Cuộc thi đố vui ngày hè 2016.

6 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

8 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016 – 2017.

10 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia Nguyễn Văn Hoàng – Một số tính chất của tam giác vuông cân.

15 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 2.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/472 ..., T12/472, L1/472, L2/472.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

27 Hướng dẫn giải đề số 1.

29 Bạn có biết

Trần Đình Viện – Eratosthenes, Nhà Toán học, Nhà Thiên văn học cổ Hy Lạp.

31 Diễn đàn dạy học Toán

Lê Lễ – Dùng phương pháp ẩn phụ để giải một dạng phương trình vô tỷ đặc biệt.

34 Diễn đàn phương pháp giải toán

Kiều Đình Minh - Tạ Anh Dũng – Giới hạn của dãy số nguyên và ứng dụng.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 13

Bài dịch số 10 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Lời giải hoàn hảo.

Nguyễn Anh Vũ: Đã đúng chưa!

Biên tập: LÊ MAI

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MAI ANH

MỘT SỐ HÌNH ẢNH HOẠT ĐỘNG CỦA THẦY VÀ TRÒ TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC - HUẾ



Sinh hoạt kỷ niệm sinh nhật Chủ tịch Hồ Chí Minh



Dạy khoa học bằng tiếng Anh



Văn nghệ chào mừng kỷ niệm 119 năm ngày thành lập Trường



Đổi mới phương pháp dạy - học



Cuộc thi Tiếp lửa tài năng lần thứ 9



Tọa đàm nhân ngày Nhà giáo Việt Nam



Hội thi học sinh thanh lịch



Giao lưu văn hóa với một trường trung học của Thái Lan



QUỐC HỌC - HUẾ

NGÔI TRƯỜNG HỒNG VẺ VANG CÙNG NĂM THÁNG



ThS. Nguyễn Phước Bửu Tuấn
Bí thư đảng ủy, Hiệu trưởng nhà trường



Đồng chí Võ Văn Thường, Ủy viên Bộ chính trị, Bí thư Trung ương Đảng
và các đồng chí lãnh đạo Tỉnh, Sở Giáo dục & Đào tạo tỉnh Thừa thiên Huế
cùng với Hội đồng giáo dục nhà trường trong Lễ khai giảng năm học mới

Trường Quốc Học - Huế được thành lập vào ngày 23/10/1896 theo sắc dụ của Vua Thành Thái. Đến nay trường đã bước sang tuổi 120 và là một trong những ngôi trường lâu đời nhất của Việt Nam. Tọa lạc bên dòng sông Hương thơ mộng, Trường Quốc Học - Huế nổi tiếng bởi vẻ đẹp kết hợp giữa nét cổ kính thâm nghiêm của những toà nhà kiến trúc kiểu Pháp và nét lãng mạn nên thơ của những khoảng sân trường rợp bóng cây. Trường có những dãy nhà học rộng rãi được sơn màu hồng nổi bật tô thêm vẻ uy nghi, cổ kính, ghi đậm dấu ấn biểu tượng Ngôi trường hồng bên dòng sông Hương.

Qua bao năm tháng thăng trầm cùng lịch sử dân tộc, thực hiện các mục tiêu đào tạo khác nhau nhưng truyền thống yêu nước, đấu tranh cách mạng; truyền thống dạy tốt, học tốt và truyền thống thương yêu, đùm bọc và giúp đỡ lẫn nhau giữa các người đồng môn vẫn được bao thế hệ thầy và trò Trường Quốc Học - Huế gìn giữ và phát huy. Suốt chặng đường 120 năm xây dựng và phát triển, tâm niệm *Hiến tài là nguyên khí quốc gia* luôn được cháy mãi trong tâm thức của thầy và trò Trường Quốc Học - Huế. Từ mái trường này, lớp lớp học sinh như ngàn vạn cánh chim đã bay về bốn phương làm rạng danh đất nước. Nơi đây đã ươm mầm cách mạng, nuôi chí lớn cho nhiều nhà lãnh đạo cao cấp của Đảng và Nhà nước Việt Nam như Chủ tịch *Hồ Chí Minh*, Đại tướng *Võ Nguyên Giáp*, các Tổng Bí thư *Trần Phú*, *Hà Huy Tập*, *Lê Duẩn*, Thủ tướng *Phạm Văn Đồng*,...; đã gieo ước mơ, lí tưởng, tri thức cho nhiều nhà khoa học lỗi lạc như GS. *Tôn Thất Tùng*, GS. *Đặng Thai Mai*, GS. *Nguyễn Khánh Toàn*,...; đã khơi dậy tình yêu nghệ thuật cho những nhà văn hóa, giáo dục lớn như nhà thơ *Tố Hữu*, nhà thơ *Xuân Diệu*, nhà thơ *Huy Cận*, nhà điêu khắc *Điểm Phùng Thị*, nhạc sĩ *Nguyễn Văn Thương*, nhạc sĩ *Trần Hoàn*, ...

Tiếp nối truyền thống ấy, thế hệ học sinh Trường Quốc Học - Huế hôm nay không ngừng học tập, rèn luyện để viết tiếp những trang sử vàng hiu học của mảnh đất địa linh nhân kiệt. Hằng năm có trên 97% học sinh của trường đỗ vào các trường Đại học theo nguyện vọng 1, trong đó có nhiều Thủ khoa và Á khoa; nhiều học sinh nhận được học bổng du học tại các Đại học của Hoa Kỳ, Australia, Nhật Bản, Hàn Quốc và Singapore. Học sinh của trường

cũng đoạt hàng chục giải Quốc gia hàng năm và đã có nhiều học sinh đoạt Huy chương Vàng, Bạc, Đồng trong các kỳ thi Olympic Quốc tế môn Toán, Vật lý, Hóa học và Tin học. Ghi nhận sự đóng góp của nhà trường đối với sự nghiệp giáo dục, Nhà nước đã trao tặng cho Quốc Học - Huế nhiều danh hiệu cao quý như: *Anh hùng Lao động trong thời kỳ đổi mới*, *Huân chương Độc lập hạng Nhất* (hai lần), Trường Quốc Học - Huế được công nhận là *Trường đạt chuẩn Quốc gia*, ...

Chào mừng kỷ niệm 120 năm thành lập trường (1896-2016), trong năm học 2015 - 2016 học sinh Trường Quốc Học - Huế đã đoạt 43 giải Quốc gia, trong đó có 1 giải Nhất, 12 giải Nhì, 14 giải Ba và 16 giải Khuyến khích; 3 học sinh dự tuyển HSG Quốc tế; em *Nguyễn Hy Hoài Lâm* đã đoạt Huy chương Đồng tại kỳ thi Olympic Tin học Châu Á - Thái Bình Dương; hai đề tài NCKH Intel Isef được chọn tham gia dự thi cấp Quốc gia đạt 1 giải Nhì và 1 giải Khuyến khích; em *Hồ Đắc Thanh Chương*, lớp 12 Toán 1 (năm học 2016-2017), đã vô địch cuộc thi "Đường lên đỉnh Olympia" lần thứ 16 do VTV3 tổ chức; Trường cũng đoạt giải Nhất toàn đoàn trong Hội khỏe Phù Đổng cấp tỉnh cùng với rất nhiều giải thưởng trong các kỳ thi học sinh giỏi cấp Tỉnh và cấp Quốc gia các môn: Toán, Vật lý, Hóa học, Sinh học, Tiếng Anh trên Internet, Máy tính cầm tay, ... Những thành tích ấy là sự ghi nhận xứng đáng cho tâm huyết của thầy và sự nỗ lực không ngừng của trò Trường Quốc Học - Huế hôm nay. Đó là động lực, là khí thế để thầy và trò Trường Quốc Học - Huế càng vững tin trong sự nghiệp đào tạo nhân tài, góp trí tuệ xây dựng nền văn hiến nước nhà.

Hon một thế kỷ đi qua, những thành tích vẻ vang của trường xưa và nay đã khẳng định tầm vóc và uy tín của một ngôi trường giàu truyền thống - một trong những cánh chim đầu đàn và là niềm tự hào của ngành giáo dục Việt Nam. Thầy và trò THPT chuyên Quốc Học - Huế hôm nay nhìn lại một chặng đường đã đi qua để tiếp tục phát huy cao hơn nữa những truyền thống đã có, bắt kịp với sự nghiệp giáo dục chung của đất nước trong thời kì công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước, để luôn xứng đáng với tên tuổi Quốc Học - Huế - ngôi trường hồng vẻ vang cùng năm tháng.