



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2016
Số 471

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 57, NĂM 2016



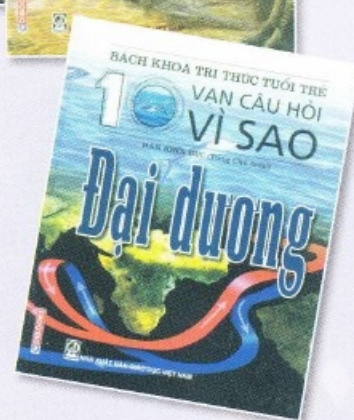
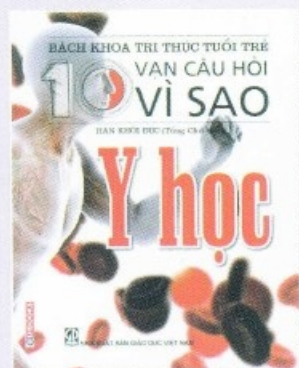
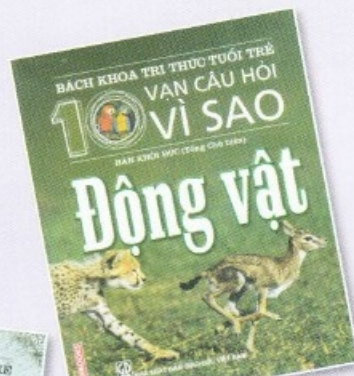
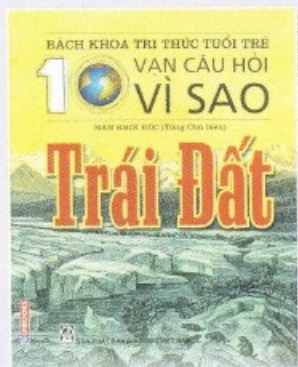


NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách

BÁCH KHOA TRI THỨC TUỔI TRẺ - MƯỜI VẠN CÂU HỎI VÌ SAO



Bách khoa tri thức tuổi trẻ - Mười vạn câu hỏi vì sao được dịch từ nguyên bản tiếng Hán của bộ sách *Mười vạn câu hỏi vì sao* phiên bản thứ sáu, do Nhà xuất bản Thiếu niên Nhi đồng Thượng Hải, Trung Quốc ấn hành.

Bộ sách gồm 18 tập ứng với 18 ngành học thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản và chuyên ngành như: Toán học, Vật Lý, Hóa học, Thiên văn, Trái đất, Động vật, Thực vật, Y học, ... và đặc biệt là những lĩnh vực mũi nhọn như: Sự sống, Năng lượng và Môi trường, Thiên tai và cách phòng chống, Hàng không và Vũ trụ, Dưới hình thức "hỏi-đáp", bộ sách giải thích một cách khoa học, dễ hiểu và hấp dẫn 3.422 khái niệm, hiện tượng, sự kiện khoa học mới hoặc chưa được hiểu tường tận, thậm chí cả một số hiện tượng kỳ bí trong nhận thức của con người, với 6.840 bức ảnh màu minh họa.

Xuất bản lần đầu năm 1961, *Mười vạn câu hỏi vì sao* là bộ sách phổ biến kiến thức khoa học kỹ thuật có sức sống bền lâu, có tầm ảnh hưởng xã hội to lớn tại Trung Quốc, do hơn 100 viện sĩ thuộc Viện Khoa học và Viện Công nghệ Trung Quốc và hơn 700 nhà khoa học trực tiếp biên soạn các mục từ.

Bách khoa tri thức tuổi trẻ - Mười vạn câu hỏi vì sao được xuất bản theo Hợp đồng chuyển nhượng bản quyền giữa Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam và Nhà xuất bản Thiếu niên Nhi đồng Thượng Hải, Trung Quốc.

Bạn đọc có nhu cầu mua sách xin liên hệ:

Phòng kinh doanh, Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội

Tòa nhà văn phòng HEID, ngõ 12 Láng Hạ, quận Ba Đình, Hà Nội.

Tel: 04.35122636 - 35122884. Fax: 04. 351222504.

ĐD: 0988455699, 0917294989

Website: www.heid.vn/ www.sachgiaoduconline.net



ỨNG DỤNG VỀ TÍNH CHẤT CỦA DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

(Tiếp theo kỳ trước)

VŨ HỮU CHÍNH

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài toán 3.1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016}.$$

Chứng minh: $4(a-b).(b-c) = (c-a)^2$.

Lời giải. Cách 1. Từ đề bài áp dụng tính chất của dãy số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016} = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2}.$$

Suy ra: $a-c = 2(a-b) = 2(b-c)$

$$\Rightarrow (a-c).(a-c) = 2.(a-b).2(b-c)$$

$$\Leftrightarrow (c-a)^2 = 4.(a-b)(b-c).$$

Cách 2. Đặt $\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016} = k$.

Suy ra $a = 2014k, b = 2015k, c = 2016k$.

Từ đó biến đổi được VT = VP, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ bài toán 3.1 ta có thể đề xuất bài toán tương tự: Cho ba số a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{k+1} = \frac{c}{k+2}. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$4(a-b).(b-c) = (c-a)^2.$$

Bài toán 3.2. Biết $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2015$;

$$z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009, x^2 + xz + z^2 = 1006, x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z.$$

Chứng minh rằng: $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$.

Lời giải. Vì $1009 + 1006 = 2015$, nên

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = z^2 + \frac{y^2}{3} + x^2 + xz + z^2.$$

$$\Leftrightarrow x(y-z) = 2z^2 \Rightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y-z}{z} \quad (\text{vì } x \neq 0, z \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y-z}{z} = \frac{2z+y-z}{x+z} = \frac{y+z}{x+z} \quad (\text{vì } x \neq -z).$$

$$\text{Vậy } \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}.$$

Nhận xét. Bài toán trên ta có thể đề xuất bài toán

mới: Cho biết $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = a+b, z^2 + \frac{y^2}{3} = a$,

$x^2 + xz + z^2 = b$ và $x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z$.

Chứng minh rằng: $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$.

Bài toán 3.3. Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}.$$

Lời giải. • Xét $a = b = c = 0$, không thỏa mãn

$a+2b+c \neq 0$.

• Xét $a, b, c \neq 0$. Đặt

$$k = \frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\begin{aligned} k &= \frac{x}{a+2b+c} = \frac{2y}{2(2a+b-c)} = \frac{z}{4a-4b+c} \\ &= \frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+2(2a+b-c)+(4a-4b+c)} = \frac{x+2y+z}{9a}. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự:

$$k = \frac{2x+y-z}{2(a+2b+c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)} = \frac{2x+y-z}{9b}$$

$$k = \frac{4x-4y+z}{4(a+2b+c)-4(2a+b-c)+(4a-4b+c)} = \frac{4x-4y+z}{9c}$$

Suy ra: $\frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c}$
(vì $a, b, c \neq 0$).

Vậy $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$.

Nhận xét. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, tính $\frac{x+2y+z}{9a}$ theo k . Tương tự tính được $\frac{2x+y-z}{9b}, \frac{4x-4y+z}{9c}$ theo k . Từ đó suy ra điều chứng minh.

Bài toán 3.4. Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ và

$a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 1$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, z không phụ thuộc vào a, b, c .

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

ta có: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x+y+z$

$a+b+c=1$). Suy ra $\frac{x^2}{a^2} = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$

Mặt khác $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2+y^2+z^2$

(do $a^2+b^2+c^2=1$). Do đó

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Nhận xét. Dựa vào tính chất dãy tỉ số bằng nhau và đề bài để giải bài toán.

Bài toán 3.5. Cho

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)} = \frac{cx+az}{y(ax-by+cz)} = \frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)} \quad (1)$$

Chứng minh: a) $\frac{ay+bx}{c} = \frac{bz+cy}{a} = \frac{cx+az}{b}$;

b) $\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$.

Lời giải. a) Đặt

$$k = \frac{xyz(bz+cy)}{x(-ax+by+cz)} = \frac{xyz(cx+az)}{y(ax-by+cz)} = \frac{xyz(ay+bx)}{z(ax+by-cz)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{yz(bz+cy)}{-ax+by+cz} = \frac{xz(cx+az)}{ax-by+cz} = \frac{xy(ay+bx)}{ax+by-cz}$$

Suy ra $k = \frac{yz(bz+cy)}{-ax+by+cz} = \frac{xz(cx+az)}{ax-by+cz}$

$$= \frac{yz(bz+cy)+xz(cx+az)}{2cz} = \frac{c(x^2+y^2)+z(ax+by)}{2c}$$

Lập luận tương tự có:

$$k = \frac{a(y^2+z^2)+x(by+cz)}{2a} = \frac{b(z^2+x^2)+y(cz+ax)}{2b}$$

Suy ra: $\frac{c(x^2+y^2)+z(ax+by)}{c} = \frac{a(y^2+z^2)+x(by+cz)}{a} = \frac{b(z^2+x^2)+y(cz+ax)}{b}$

Trừ mỗi tử trên với $(x^2+y^2+z^2)$, suy ra

$$\frac{z(ax+by-cz)}{c} = \frac{x(by+cz-ax)}{a} = \frac{y(cz+ax-by)}{b} \quad (2)$$

Nhân các đẳng thức của (2) với các đẳng thức của (1) tương ứng, ta có

$$\frac{ay+bx}{c} = \frac{bz+cy}{a} = \frac{cx+az}{b} = \frac{1}{M}$$

b) Từ phần a) suy ra:

$$c^2 = (ay+bx)cM, b^2 = (cx+az)bM, a^2 = (bz+cy)aM$$

$$\Rightarrow b^2+c^2-a^2 = 2bcxM, c^2+a^2-b^2 = 2cayM,$$

$$a^2+b^2-c^2 = 2abzM.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2abcM} = \frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}$$

$$= \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán khó, phải nhân các tỉ số bằng nhau với cùng $xyz \neq 0$, vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau đưa dãy số đã cho về dãy số đơn giản, sau đó nhân phù hợp với dãy tỉ số ban đầu để được kết quả cần chứng minh.

Bài toán 3.6. Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z và $x^2 - yz \neq 0; y^2 - zx \neq 0; z^2 - xy \neq 0$ thỏa mãn $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$.

Lời giải. Từ đề bài, đặt

$$\frac{a}{x^2 - yz} = \frac{b}{y^2 - zx} = \frac{c}{z^2 - xy} = k$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{a^2}{x^4 - 2x^2yz + y^2z^2} = \frac{bc}{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz}$$

$$= \frac{a^2 - bc}{x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (1)$$

Lập luận tương tự:

$$k^2 = \frac{b^2}{y^4 - 2y^2xz + x^2z^2} = \frac{ac}{x^2z^2 - yx^3 - yz^3 + y^2xz}$$

$$= \frac{b^2 - ac}{y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (2)$$

$$k^2 = \frac{c^2}{z^4 - 2z^2xy + x^2y^2} = \frac{ab}{x^2y^2 - zx^3 - zy^3 + z^2xy}$$

$$= \frac{c^2 - ab}{z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ đề bài để xuất hiện $a^2 - bc$, ta phải xét k^2 . Từ đó xuất hiện dãy tỉ số bằng nhau, suy ra điều cần chứng minh.

DẠNG IV. GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ.

Bài toán 4.1. Một miếng đất hình tam giác có chu vi bằng 99 m. Biết rằng nếu cộng lần lượt độ dài từng 2 đường cao của tam giác đó thì tỉ lệ với 5 : 7 : 8. Tìm độ dài ba cạnh của miếng đất đó.

Lời giải. Gọi ba cạnh của miếng đất hình tam giác ABC lần lượt là a, b, c và ba đường cao tương ứng với ba cạnh là h_a, h_b, h_c ; S là diện tích tam giác ABC . Theo đề bài có

$$\frac{h_a + h_b}{5} = \frac{h_b + h_c}{7} = \frac{h_c + h_a}{8} = \frac{h_a + h_b + h_c}{10} = k.$$

Suy ra: $h_a + h_b = 5k; h_b + h_c = 7k; h_c + h_a = 8k;$

$$h_a + h_b + h_c = 10k.$$

Suy ra $h_c = 5k; h_b = 2k; h_a = 3k$. Ta có

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow a.3k = b.2k = c.5k$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{6} = \frac{a+b+c}{31} = \frac{99}{31}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{990}{31}; b = \frac{1485}{31}; c = \frac{594}{31}.$$

Vậy các cạnh của miếng đất là:

$$\frac{990}{31}(\text{m}); \frac{1485}{31}(\text{m}); \frac{594}{31}(\text{m}).$$

Nhận xét. Trong bài toán trên sử dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao tương ứng trong tam giác, suy ra quan hệ giữa ba cạnh của tam giác. Vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để giải được bài toán.

Bài toán 4.2. Một hỗn hợp gồm 5 chất và nặng 5327256605 gam. Biết rằng tỉ lệ về khối lượng giữa các chất như sau: tỉ lệ giữa chất thứ nhất với chất thứ hai là 2 : 3, tỉ lệ giữa chất thứ hai với chất thứ ba là 4 : 5, tỉ lệ giữa chất thứ ba với chất thứ tư là 7 : 6, tỉ lệ giữa chất thứ tư với chất thứ năm là 11 : 7. Hãy tìm và cho biết mỗi chất có trong hỗn hợp này nặng bao nhiêu gam?

Lời giải. Gọi tên các chất từ thứ nhất đến thứ năm trong hợp chất đó tương ứng là x, y, z, t, u ($x, y, z, t, u > 0$).

Ta có $x + y + z + t + u = 5327256605$,

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \frac{y}{z} = \frac{4}{5}, \frac{z}{t} = \frac{7}{6}, \frac{t}{u} = \frac{11}{7}.$$

Từ đó ta suy ra :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{7} = \frac{t}{6}, \frac{t}{11} = \frac{u}{7} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \\ \frac{z}{77} = \frac{t}{66} = \frac{u}{42} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{616} = \frac{y}{924} = \frac{z}{1155} = \frac{t}{990} = \frac{u}{630}$$

$$= \frac{x+y+z+t+u}{616+924+1155+990+630}$$

$$= \frac{5327156605}{4315} = 1234567.$$

Vậy: $x = 760493272, y = 1140739908,$
 $z = 1425924885, t = 1222221330,$
 $u = 777777210.$

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán khó, phải lập được dãy tỉ số bằng nhau. Trong quá trình tính toán cần sử dụng thêm máy tính thì kết quả sẽ nhanh hơn.

Bài toán 4.3. Một nông trường dự định phân chia diện tích đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 8: 7: 6. Nhưng sau đó vì số người các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ với 7: 6: 5. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là 8 m^2 đất. Tính diện tích đất đã phân chia cho mỗi đội.

Lời giải. Gọi diện tích đất dự định chia cho đội I, II, III lần lượt là $x_1, y_1, z_1 \text{ (m}^2\text{)}.$

Gọi diện tích đất đã chia cho đội I, II, III lần lượt là $x_2, y_2, z_2 \text{ (m}^2\text{)}.$

Theo đề bài và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x_1}{8} = \frac{y_1}{7} = \frac{z_1}{6} = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{8+7+6} = \frac{k}{21}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8k}{21}, y_1 = \frac{k}{3}, z_1 = \frac{2k}{7}$$

$$\frac{x_2}{7} = \frac{y_2}{6} = \frac{z_2}{5} = \frac{x_2 + y_2 + z_2}{7+6+5} = \frac{k}{18}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{7k}{18}, y_2 = \frac{k}{3}, z_2 = \frac{5k}{18}$$

$$\text{Ta có } x_2 - x_1 = \frac{7k}{18} - \frac{8k}{21} = \frac{k}{126} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{126} = 8 \Rightarrow k = 1024$$

Vậy diện tích đất đã chia cho đội I, II, III lần lượt là:

$$\frac{3584}{9} = 398\frac{2}{9} \text{ (m}^2\text{)}, \frac{1024}{3} = 341\frac{1}{3} \text{ (m}^2\text{)},$$

$$\frac{2560}{9} = 284\frac{4}{9} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán thực tế khi chia tỉ lệ có sự thay đổi.

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, x + y + z = 2 \text{ và } x = 4z.$$

2. Cho tỉ lệ thức $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$, chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{\overbrace{a \text{ bbb} \dots \text{b}}^{n \text{ số b}}}{\underbrace{\text{bbb} \dots \text{b}}_{n \text{ số b}} c} = \frac{a}{c}, \text{ (với } n \text{ là số tự nhiên).}$$

3. Cho dãy tỉ số $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{2015}}{a_{2016}}.$

Chứng minh:

$$\frac{a_1}{a_{2016}} = \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2015}}{a_{2016}} \right)^{2015}$$

$$\text{hay } \frac{x}{3y} = \frac{y}{2x-5y} = \frac{6x-15y}{x}.$$

Tìm giá trị $(x + y)$ khi $-4x^2 + 36y - 8$ đạt giá trị lớn nhất.

5. Cho tam giác ABC với ba cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là chiều cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{h_c - h_b}{h_a} + \frac{h_b - h_a}{h_c} + \frac{h_a - h_c}{h_b} \geq 0.$$

6. Cho tam giác ABC . Có góc ngoài của tam giác tại đỉnh A, B, C tỉ lệ với 7: 6: 5. Tính các góc trong của tam giác ABC .

7. Cho $\frac{a}{b} > \frac{x}{y} > \frac{c}{d}$ với $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$. Nếu $ad - bc = 1$. Chứng minh: $x \geq a + c; y \geq b + d$.

8. Tìm giá trị x, y, z để biểu thức

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| + 2016$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 1. TÌM ĐẲNG THỨC

Bạn Mũi đến chơi nhà bạn Thân, thấy trên bàn có dòng chữ

$$\overline{ab.aac} = \overline{ac.adb} = \overline{ad.acd} = \overline{ae.aee} = x$$

Bạn Mũi thắc mắc thì bạn Thân trả lời: Bạn hãy thay a, b, c, d, e bởi các chữ số khác nhau trong hệ thập phân để có đẳng thức đúng. Bạn có thể tìm được các đẳng thức số đó không?

Lời giải. Từ giả thiết $\overline{ad.acd} = \overline{ae.aee}$ ta có $(10a + d)(100a + 10c + d) = (10a + e)(100a + 10e + e)$, hay là

$$100ac + 110ad + 10cd + d^2 = 210ae + 11e^2 \quad (1)$$

Từ đó và $\overline{ab.aac} = \overline{ae.aee}$ suy ra d^2, e^2 và tích bc có cùng số dư r ($0 \leq r \leq 9$) khi chia cho 10, mà d, e phân biệt nên $r \neq 0$ và $r \neq 5$. Do đó (d, e) thể là $(1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 7), (7, 3), (4, 6), (6, 4)$. Xét các trường hợp sau.

- Nếu (d, e) là $(1, 9)$ thì từ (1) có $100ac + 110a + 10c + 1 = 1890a + 891$, nhưng đẳng thức này có vế trái nhỏ hơn vế phải. Nếu (d, e) là $(2, 8)$, hoặc $(3, 7)$ hoặc $(7, 3)$ thì xét tương tự trên đẳng thức (1) có vế trái nhỏ hơn vế phải.

- Nếu (d, e) là $(9, 1)$ hoặc $(8, 2)$ hoặc $(7, 3)$ thì xét tương tự trên đẳng thức (1) có vế trái lớn hơn vế phải.

- Nếu (d, e) là $(4, 6)$ thì từ (1) có

$$100ac + 40c = 820a + 380 \quad (2)$$

Do tích bc có tận cùng là 6 nên (c, b) có thể $(2, 3)$ hoặc $(3, 2)$ hoặc $(2, 8)$ hoặc $(8, 2)$ hoặc $(7, 8)$ hoặc $(8, 7)$. Thay lần lượt c bằng 2, 3, 7, 8 vào đẳng thức (2) đều thấy vế trái nhỏ hơn vế phải.

- Nếu (d, e) là $(6, 4)$ thì từ (1) có

$$100ac + 60c = 180a + 140 \quad (3)$$

Do tích bc có tận cùng là 6 nên (c, b) có thể $(2, 3)$ hoặc $(3, 2)$ hoặc $(2, 8)$ hoặc $(8, 2)$ hoặc $(7, 8)$

hoặc $(8, 7)$. Thay lần lượt c bằng 3, 7, 8 vào đẳng thức (2) đều thấy vế trái lớn hơn vế phải, còn từ đẳng thức (2) với $c = 2$ thì $a = 1$, dẫn đến $b = 8$ thỏa mãn giả thiết.

Vậy bài toán chỉ có một nghiệm là $18.112 = 12.168 = 16.126 = 14.144 = 2016$.

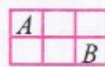
ĐAN QUỲNH (Hà Nội)

Bài 2. QUÂN MÃ ĐI TRÊN BÀN CỜ

Trên một bàn cờ hình chữ nhật kích thước 6×8 ô vuông có một quân mã đứng ở ô có dấu * như hình 1. Quân mã đi theo quy tắc: Từ ô A đến ô B của hình chữ nhật kích thước 2×3 ô vuông theo hướng tùy ý (hình 2). Bạn hãy tìm đường đi của quân mã qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô đúng một lần.



Hình 1



Hình 2

Lời giải. Bài toán có nhiều cách giải. Dưới đây chỉ ra ba đường đi của quân mã, các bước đi được đánh số thứ tự từ 1 đến 47 trên bàn cờ. Đường đi thứ nhất (hình 3) khép kín (theo nghĩa đi tiếp một bước nữa thì về ô xuất phát), các đường đi thứ hai, thứ ba (hình 4, 5) không khép kín.

25	*	15	30	27	46	17	32
4	13	26	47	16	31	28	45
1	24	3	14	29	38	33	18
12	5	40	21	8	35	44	37
23	2	7	10	39	42	19	34
6	11	22	41	20	9	36	43

Hình 3

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HÀ NỘI
NĂM HỌC 2016 - 2017**

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1 (2 điểm)

- 1) Giải phương trình: $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 2 (2 điểm)

- 1) Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$. Tính

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

- 2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

Bài 3 (2 điểm)

- 1) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c.$$

- 2) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

Bài 4 (3 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H . Gọi M là trung điểm của BC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P .

- 1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.
- 2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E và F . Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF ; K là giao điểm của HM và AO' .
- a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.
- b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Bài 5 (1 điểm). Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

DƯƠNG TÚ (Hà Nội) giới thiệu

Lời giải. Gọi số nguyên cần tìm là $\overline{1X}$, trong đó X có k chữ số. Khi đó $\overline{1X} = 10^k + X$. Từ giả thiết ta có:

$$\overline{X1} = 3\overline{1X} \Leftrightarrow 10X + 1 = 3(10^k + X) \Leftrightarrow X = \frac{3 \cdot 10^k - 1}{7}.$$

Để tìm X , ta thực hiện phép chia $3 \cdot 10^k$ cho 7 cho đến khi có số dư là 1:

$$\begin{array}{r} \overline{) 3000...0} \\ \underline{21} \\ 900 \\ \underline{63} \\ 2700 \\ \underline{21} \\ 600 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 5 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

Vậy số nhỏ nhất có thể có của X là 42857 và số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm là 142857.

Sau chữ số đầu là 1 có được, ta thực hiện phép chia cho đến số 1 kế tiếp và cứ thế tiếp tục, ta sẽ được số có dạng: $\underbrace{142857142857...142857}_{n \text{ lần}}$. Những số có

tính chất này thỏa mãn bài toán.

NHU' HOÀNG (Hà Nội)

25	*	15	28	39	8	13	30
16	47	26	9	14	29	38	7
1	24	17	46	27	40	31	
18	45	20	41	10	35	6	
23	2	43	34	21	4		32
44	19	22	3	42	33	36	5

Hình 4

9	*	37	24	21	18	39	26
36	23	8	11	38	25	20	17
7	10	1	22	19	46	27	40
32	35	6	3	12	43	16	45
5	2	33	30	47	14	41	28
34	31	4	13	42	29	44	15

Hình 5

AN MINH (Hà Nội)

Bài 3. SỐ NÀO?

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất được bắt đầu bởi chữ số 1 biết rằng nếu ta chuyển chữ số 1 đến vị trí cuối thì ta được số mới bằng ba lần số ban đầu. hãy tìm tất cả các số có tính chất này.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 470, tháng 8 năm 2016)

VÒNG 1

Câu 1. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} \\ &= \frac{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})^2}{(1+a)-(1-a)} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} \\ &= \frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} = \frac{1-a^2-1}{a^2} = -1. \end{aligned}$$

Câu 2. a) Khi $m = 1$, ta có $d: y = 2x - 1$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $-x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ (1)
Phương trình (1) có hai nghiệm là

$$x_1 = -1 - \sqrt{2}, x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Thay x_1, x_2 vào phương trình của d ta có

$$y_1 = -3 - 2\sqrt{2}, y_2 = -3 + 2\sqrt{2}.$$

Toạ độ các giao điểm

$$A(-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2}), B(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}).$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $-x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \forall m$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của A, B thì x_1, x_2 là nghiệm của (2). Theo định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 = -2m, x_1 x_2 = -1.$$

Ta có $A, B \in (P)$ nên $y_1 = -x_1^2, y_2 = -x_2^2$.

$$\text{Do đó } |y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |x_1^4 - x_2^4| = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 \left[(x_1^2 + x_2^2)^2 - 4x_1^2 x_2^2 \right] = 45.$$

Đặt $t = (x_1^2 + x_2^2)^2 \geq 0$, có:

$$t^2 - 4t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = 9 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Câu 3. Gọi vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h) ($x > 0$). Khi đó vận tốc xe đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại là

$\frac{x}{2}$ (km/h). Vận tốc xe đi từ B về A là $x + 10$

(km/h). Thời gian xe đi $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là

$\frac{60}{x}$ giờ, thời gian xe đi $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại là

$\frac{60}{x+10}$ giờ, thời gian xe đi từ B về A là $\frac{120}{x+10}$ giờ.

Theo giả thiết ta có phương trình

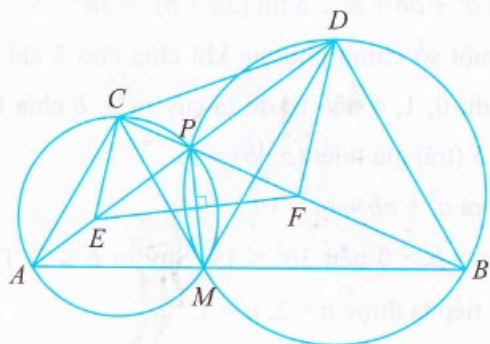
$$\frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x+10} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \Leftrightarrow x = 30.$$

Vậy vận tốc xe khi đi từ B về A là

$$v = 30 + 10 = 40 \text{ (km/h)}.$$

Câu 4.



a) Ta có $\triangle MAD = \triangle MCB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{MAP} = \widehat{MCP}$, $\widehat{MDP} = \widehat{MBP}$. Do đó các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{CMA} = \widehat{MDB}$, suy ra CM là tiếp tuyến của đường tròn ($BMPD$). Do đó $\triangle CMP \sim \triangle CBM$.

$$\text{Suy ra } \frac{CM}{CB} = \frac{CP}{CM} \Rightarrow CP \cdot CB = CM^2 = MA^2.$$

Tương tự, $DP \cdot DA = MB^2$. Do đó

$$\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = MA + MB = AB.$$

c) Do MP là dây cung chung của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ nên EF là trung trực của MP . Suy ra $EP = EM$, $FP = FM$. Xét tứ giác nội tiếp $AMPC$, ta có $\widehat{APM} = \widehat{ACM} = 60^\circ$. Suy ra $\triangle MPE$ đều. Tương tự $\triangle MPF$ đều.

Suy ra $PE = PF = PM$.

Do CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMPD$ nên $\widehat{CMP} = \widehat{MDP}$.

Tương tự $\widehat{MCP} = \widehat{PMD}$. Suy ra $\triangle CMP \sim \triangle MDP$

$$\Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{MP}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD} \Rightarrow CE \parallel DF.$$

Vậy tứ giác $CDFE$ là hình thang.

Câu 5. Đặt $\sqrt{5a+4} = x$, $\sqrt{5b+4} = y$, $\sqrt{5c+4} = z$.

Ta có $2 \leq x, y, z \leq 3$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Đặt $S = x + y + z$. Vì $2 \leq x, y, z \leq 3$ nên

$$(x-2)(x-3) \leq 0, (y-2)(y-3) \leq 0, \text{ và}$$

$$(z-2)(z-3) \leq 0. \text{ Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có } S \geq 7.$$

VÒNG 2

Câu 1. Ta có $4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}$

$$= (\sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1})^2.$$

$$\text{Suy ra } P = (\sqrt{2n^2 + 2n + 1} + \sqrt{2n^2 - 2n + 1})$$

$$\times (\sqrt{2n^2 + 2n + 1} - \sqrt{2n^2 - 2n + 1})$$

$$= (2n^2 + 2n + 1) - (2n^2 - 2n + 1) = 4n.$$

Câu 2. a) Gọi $d = (x, y)$ ($d \geq 1$).

Đặt $x = ad$, $y = bd$ ($a > b > 0$, $(a, b) = 1$).

Ta có $d(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 95(a^2 + b^2)$.

Vì $(a, b) = 1$ nên $(a^2 + ab + b^2, a^2 + b^2) = (ab, a^2 + b^2) = 1$.

Suy ra $(a^2 + ab + b^2) \mid 95$.

Nếu $a^2 + ab + b^2 \vdots 5$ thì $(2a+b)^2 + 3b^2 \vdots 5$.

Vì một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể dư 0, 1, 4 nên từ đó ta suy ra a, b chia hết cho 5 (trái giả thiết $(a, b) = 1$).

Suy ra $a^2 + ab + b^2 = 19$.

Vì $a > b > 0$ nên $3b^2 < 19$. Suy ra $b \leq 2$. Thử trực tiếp ta được $b = 2, a = 3$.

Từ đó có $d = 65$ và $x = 195, y = 130$.

b) ĐK: $x, y \geq 1$. PT tương đương với

$$x + y + \frac{4(x-1)}{y} + \frac{4(y-1)}{x} = 4\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-1}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x}(x-2\sqrt{x-1})^2 + \frac{1}{y}(y-2\sqrt{y-1})^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} = 0 \text{ và } y - 2\sqrt{y-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Câu 3. a) Giả sử $a = m^2 + 3n^2, b = p^2 + 3q^2$ thuộc S . Khi đó $ab = (mp - 3nq)^2 + 3(mq + np)^2 \in S$.

b) Giả sử $N = x^2 + 3y^2 \in S$ và $N \vdots 2$. Ta có các trường hợp sau:

TH1: x chẵn hoặc y chẵn.

Vì $N \vdots 2$ nên $x \vdots 2, y \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1, y = 2y_1$,

$$\text{ta có } \frac{N}{4} = x_1^2 + 3y_1^2 \in S.$$

TH2: x và y cùng lẻ. Ta cần tìm u, v sao cho

$$\frac{N}{4} = u^2 + 3v^2 \Leftrightarrow N = 4(u^2 + 3v^2) = (u - 3v)^2 +$$

$$3(u + v)^2. \text{ Xét các hệ sau}$$

$$\begin{cases} u-3v=x \\ u+v=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{x+3y}{4} \\ v=\frac{y-x}{4} \end{cases},$$

$$\begin{cases} u-3v=-x \\ u+v=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{3y-x}{4} \\ v=\frac{x+y}{4} \end{cases}$$

• Nếu $x \equiv y \pmod{4}$ thì $x+3y \vdots 4$ và $y-x \vdots 4$.

Khi đó $u = \frac{x+3y}{4} \in \mathbb{Z}$, $v = \frac{y-x}{4} \in \mathbb{Z}$.

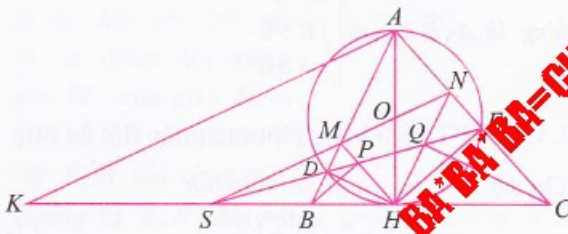
Suy ra $\frac{N}{4} = u^2 + 3v^2 \in S$.

• Nếu $x \not\equiv y \pmod{4}$ thì $x+y \vdots 4$ và $3y-x \vdots 4$.

Khi đó $u = \frac{3y-x}{4} \in \mathbb{Z}$, $v = \frac{x+y}{4} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{N}{4} = u^2 + 3v^2 \in S$.

Câu 4.



a) Xét đường tròn (O): Do AH là đường kính nên $HD \perp AB$, $HE \perp AC$.

Ngoài ra ta có $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (cùng chắn $\widehat{AE}$).

Xét tam giác vuông AHC có

$$\widehat{AHE} = \widehat{ACH} (= 90^\circ - \widehat{CHE}).$$

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ECB}$. Vậy tứ giác BDEC nội tiếp.

b) Ta có SH là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{SHD} = \widehat{SEH}$. Suy ra $\triangle SHD \sim \triangle SEH$ (g.g)

$\Rightarrow SH^2 = SD \cdot SE$. Lại có $\widehat{SDB} = \widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\triangle SBD \sim \triangle SEC$ (g.g)

$\Rightarrow SD \cdot SE = SB \cdot SC$. Vậy $SB \cdot SC = SH^2$.

c) Ta chứng minh AMHN là hình bình hành, từ đó suy ra BP, CQ là đường cao của tam giác ABC. Lấy K đối xứng với H qua S. Ta có:

$$SO \parallel AK \Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{BS}{SK} = \frac{BS}{SH}.$$

Theo câu a), ta có

$$SB \cdot SC = SH^2 \Rightarrow SB(SH + HC) = SH^2$$

$$\Rightarrow SB \cdot HC = SH(SH - SB) = SH \cdot BH$$

$$\Rightarrow \frac{SB}{SH} = \frac{BH}{HC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{BM}{MA} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow MH \parallel AC.$$

Suy ra tứ giác BHPD nội tiếp, kéo theo $BP \perp AM$. Từ đó suy ra BP là đường cao của $\triangle ABC$. Chứng minh tương tự, $NH \parallel AB$ kéo theo $CQ \perp NH$. Từ đó CQ là đường cao của $\triangle ABC$. Do vậy AH, BP, CQ đồng quy.

Câu 5. Xét đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{10}$, nội tiếp đường tròn tâm O. Giả sử O được tô màu đỏ. Nếu có hai đỉnh X, Y của đa giác được tô màu đỏ thì tam giác OXY thỏa mãn.

Nếu có không quá một đỉnh của đa giác được tô màu đỏ thì tồn tại ít nhất 5 đỉnh cùng được tô màu xanh hoặc màu vàng. Giả sử có 5 đỉnh được tô màu xanh. Chia các đỉnh của đa giác đã cho thành hai nhóm: Nhóm 1 gồm các đỉnh A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 và nhóm 2 gồm các đỉnh $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}$. Theo nguyên lý Dirichlet có ba đỉnh màu xanh thuộc cùng một nhóm, chẳng hạn là nhóm 1. Vì $A_1A_3A_5A_7A_9$ là ngũ giác đều nên ba đỉnh đó tạo thành một tam giác cân và ta có điều phải chứng minh.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV trường THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội) giới thiệu.



**CHUẨN BỊ
CHO KỲ THI
TRUNG HỌC
PHỔ THÔNG
QUỐC GIA**

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG NHỮNG PHƯƠNG PHÁP THÔNG DỤNG

PHẠM TRỌNG THU

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Những năm gần đây, hầu như trong đề thi toán THPT quốc gia hay đề thi chọn HSG Toán cấp THPT thường có bài toán *giải bất phương trình (BPT) vô tỉ*. Có lẽ đây là loại toán mà nhiều học sinh lúng túng nhất, HS rất ngại và chần chừ mỗi khi giáo viên cho bài tập về loại này bởi lẽ chúng có rất nhiều cách giải khác và các phương pháp khác. Một số phương pháp thông dụng để giải quyết chúng là:

- Phương pháp sử dụng các phép biến đổi tương đương và các tính chất về căn.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.
- Phương pháp phân khoảng tập xác định.
- Phương pháp nhân liên hợp.
- Phương pháp đánh giá.
- Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- Phương pháp vector,...

Do phạm vi bài báo, chúng tôi chỉ đề cập một số phương pháp giải cho là cần thiết đối với học sinh THPT thông qua một loạt thí dụ minh họa và bài tập tự luyện với hi vọng sẽ giúp ích cho HS một phần nào trong việc rèn luyện kỹ năng giải toán cũng như phát triển tư duy để làm dạng toán này.

1. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp sử dụng các phép đổi tương đương

Thí dụ 1. Giải bất phương trình

$$(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \geq 0 \quad (1)$$

Lời giải. Xét hai trường hợp

$$\text{TH1: } 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 3 \\ x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Từ hai trường hợp trên ta suy ra được tập nghiệm của BPT(1) là

$$S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{3\} \cup [4; +\infty).$$

Nhận xét. Bài toán trên là một dạng BPT đơn giản nhưng rất nhiều HS không tìm ra được đầy đủ các nghiệm của nó. Lỗi HS thường mắc phải khi giải bài

toán này là sử dụng biến đổi $A\sqrt{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \end{cases} (!)$.

Khi đó sẽ bị mất tập nghiệm $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

Đây là biến đổi sai, làm mất nghiệm $x = 3$. Biến đổi

$$A\sqrt{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B > 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

2. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Thí dụ 2. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{2x+1} \leq 2x \quad (2)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2, t \geq 0$. Thay vào BPT(2) ta

$$\text{được: } t + 2\sqrt{2t^2 + 1} \leq 2t^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2t^2 + 1} \leq 2t^2 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - t \geq 0 \\ 4(2t^2 + 1) \leq 4t^4 - 4t^3 + t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t \geq \frac{1}{2} \\ 4t^4 - 4t^3 - 7t^2 - 4 \geq 0 (*) \end{cases}$$

• Với $t \leq 0$, kết hợp ĐK $t \geq 0$ ta được $t = 0$. Khi đó (*) vô nghiệm.

• Với $t \geq \frac{1}{2}$, (*) $\Leftrightarrow (t-2)(4t^3+4t^2+t+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow t \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Kết hợp ĐK $x \geq 0$, ta được tập nghiệm của BPT(2) là $S = [4; +\infty)$.

Thí dụ 3. Giải bất phương trình

$$\sqrt{4x^2-7x+9}-\sqrt{x} \geq 4x-6 \quad (3)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$. Khi đó BPT(3) tương đương với $\sqrt{(2x-3)^2+5x}-\sqrt{x} \geq 2(2x-3)$ (*)

• Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của BPT(3).

• Với $x > 0$, chia hai vế của BPT(*) cho $\sqrt{x}$ ta được $\sqrt{\frac{(2x-3)^2}{x}+5}-1 \geq \frac{2(2x-3)}{\sqrt{x}}$ (**).

Đặt $t = \frac{2x-3}{\sqrt{x}}$. Khi đó (**) trở thành

$$\sqrt{t^2+5} \geq 2t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{1}{2} \\ t > -\frac{1}{2} \\ t^2+5 \geq (2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 6(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} \leq \frac{1+\sqrt{55}}{6} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{28+\sqrt{55}}{18}$$

Từ các trường hợp trên, ta tìm được tập nghiệm của BPT(3) là $S = \left[0; \frac{28+\sqrt{55}}{18}\right]$.

Thí dụ 4. Giải bất phương trình

$$3(x-2)\sqrt{x^3-1} > x^3+x^2-17x+18 \quad (4)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 1$ (*).

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2+x+1}, b > 0 \end{cases}$. Khi đó BPT(4) trở

thành $(3a^2-3)ab > (a^2+1)b^2-18a^2$

$$\Leftrightarrow (3a^3b-a^2b^2)-(3ab-b^2)+(18a^2-2b^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b(3a-b)-b(3a-b)+2(3a-b)(3a+b) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-b)(a^2b+b+6a) > 0 \quad (**)$$

Vì $a \geq 0, b > 0$ nên từ (**) suy ra $3a-b > 0$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x-1} > \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow 9(x-1) > x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow 4-\sqrt{6} < x < 4+\sqrt{6}.$$

Kết hợp với ĐK (*), ta được tập nghiệm của BPT(4) là $S = (4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6})$.

Nhận xét. Qua thí dụ 2, 3, 4 trên ta thấy việc chọn biểu thức nào thích hợp trong bài toán làm ẩn phụ là điều cần thiết, bởi vì đa số bài toán BPT vô tỉ thoạt nhìn ta không thể thấy ngay cách đặt ẩn phụ mà phải qua một số phép biến đổi cơ bản mới tìm được chúng nhằm chuyển BPT ban đầu phức tạp thành BPT mới đơn giản hơn hoặc dễ giải hơn.

3. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp phân khoảng tập xác định

Thí dụ 5. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+2x} \geq \sqrt{x^2+7x+10} \quad (5)$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2+3x+2 \geq 0 \\ x^2+2x \geq 0 \\ x^2+7x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -2 \\ x \leq -5 \end{cases}$$

• Riêng $x = -2$ thỏa mãn BPT(5).

Xét $x \geq 0$, khi đó BPT(5) được viết lại

$$\sqrt{(x+2)(x+1)}+\sqrt{x(x+2)} \geq \sqrt{(x+5)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq \sqrt{x+5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x} \geq 4-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ 4-x \leq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4(x^2+x) \geq (4-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 0 \\ x \geq 4 \\ x \leq 4 \\ 3x^2+12x-16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq \frac{-6-2\sqrt{21}}{3} \\ \frac{-6+2\sqrt{21}}{3} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK $x \geq 0$, suy ra BPT(5) có nghiệm $x \geq \frac{-6+2\sqrt{21}}{3}$.

• Xét $x \leq -5$, khi đó BPT(5) được viết lại

$$\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x} \geq \sqrt{-x-5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x} \geq x-4.$$

Ta thấy BPT này luôn thỏa mãn với mọi $x \leq -5$.

Từ các trường hợp trên, ta tìm được tập nghiệm của BPT(5) là

$$S = (-\infty; -5] \cup \{-2\} \cup \left[\frac{-6+2\sqrt{21}}{3}; +\infty \right).$$

Nhận xét. Để thấy bài toán trên không thể sử dụng phép khai phương được, BPT có xuất hiện nhân tử chung $\sqrt{x+2}$ nên ta sử dụng phương pháp phân khoảng tập xác định là phương pháp chia tập điều kiện của BPT đã cho thành các miền nhỏ và xét những BPT thu được trong từng khoảng ta có thể nhận được các BPT đơn giản hơn hoặc dễ giải hơn.

4. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp nhân liên hợp

Thí dụ 6. Giải bất phương trình

$$\sqrt{10x+11} + \sqrt{3x-2} \geq \sqrt{9x+13} + \sqrt{2x} \quad (6)$$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$.

Khi đó BPT(6) tương đương với

$$(\sqrt{10x+11} - \sqrt{9x+13}) + (\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{10x+11} + \sqrt{9x+13}} + \frac{x-2}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)f(x) \geq 0 \quad (*), \text{ với}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10x+11} + \sqrt{9x+13}} + \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x}}.$$

$$\text{Mà } f(x) > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}, \text{ nên } (*) \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp với ĐK $x \geq \frac{2}{3}$, ta được

tập nghiệm của BPT(6) là $S = [2; +\infty)$.

Thí dụ 7. Giải bất phương trình

$$\sqrt{3x-2} + 3x^2 + 9 > 20x + \sqrt{7-x} \quad (7)$$

Lời giải. ĐK: $\frac{2}{3} \leq x \leq 7$ (*).

Khi đó BPT(7) tương đương với

$$(\sqrt{3x-2} - 4) + (1 - \sqrt{7-x}) + 3x^2 - 20x + 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-18}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{x-6}{1+\sqrt{7-x}} + (x-6)(3x-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{7-x}} + 3x-2 \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)g(x) > 0 \quad (**), \text{ với}$$

$$g(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{7-x}} + 3x-2.$$

$$\text{Mà } g(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; 7 \right], \text{ nên } (***) \Leftrightarrow x > 6.$$

Kết hợp với ĐK (*), ta được tập nghiệm của BPT(7) là $S = (6; 7]$.

Thí dụ 8. Giải bất phương trình

$$4\sqrt{5-x} + \sqrt{13+3x} \leq x^2 - 6x + 17 \quad (8)$$

Lời giải. ĐK: $-\frac{13}{3} \leq x \leq 5$ (*).

Khi đó BPT(8) tương đương với

$$4 \left(\sqrt{5-x} - \left(\frac{7}{3} - \frac{x}{3} \right) \right) + \left(\sqrt{13+3x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3} \right) \right)$$

$$-(x^2 - 5x + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{5-x - \left(\frac{7}{3} - \frac{x}{3} \right)^2}{\sqrt{5-x} + \left(\frac{7}{3} - \frac{x}{3} \right)} + \frac{13+3x - \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3} \right)^2}{\sqrt{13+3x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3} \right)}$$

$$-(x^2 - 5x + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 5x + 4)k(x) \leq 0 \quad (**), \text{ với}$$

$$k(x) = 1 + \frac{4}{3\sqrt{5-x} + 7-x} + \frac{1}{3\sqrt{13+3x} + x+11}.$$

$$\text{Mà } k(x) > 0, \forall x \in \left[-\frac{13}{3}; 5 \right], \text{ nên}$$

$$(**) \Leftrightarrow -(x^2 - 5x + 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}.$$

Kết hợp với ĐK (*) ta được tập nghiệm của

$$\text{BPT(8) là } S = \left[-\frac{13}{3}; 1 \right] \cup [4; 5].$$

Nhận xét. Trong một số dạng BPT vô tỉ nếu biết sử dụng biểu thức liên hợp một cách khéo léo thì ta sẽ

có lời giải rất ngắn gọn và ấn tượng. Vậy khi nào ta dùng chúng, dấu hiệu gì giúp ta suy đoán bài toán đã cho có sử dụng phương pháp đó. Qua thí dụ 6, 7, 8 ta đều biến đổi BPT về một trong các dạng $h(x) > 0$ (hay $\geq, <, \leq$).

- Ở thí dụ 6 ta đã vận dụng trực tiếp phương pháp.
- Ở thí dụ 7 ta cần phát hiện về trái của $h(x) > 0$,

với $h(x) = \sqrt{3x-2} + 3x^2 + 9 - 20x - \sqrt{7-x}$ có một nghiệm đơn $x_0 = 6$ (HS chỉ cần bấm máy tính bỏ túi là xong) để từ đó ta đưa được BPT ban đầu về dạng $(x-6)g(x) > 0$. Tuy nhiên câu hỏi thắc mắc của đa số HS là muốn có điều trên thì phải có BPT (a) dưới đây

$$(\sqrt{3x-2} - 4) + (1 - \sqrt{7-x}) + 3x^2 - 20x + 12 > 0$$

đây là mấu chốt lời giải của bài toán trên.

Điều này không quá khó đối với chúng ta

- Nhẩm được một nghiệm đơn $x_0 = 6$.

- Với $\sqrt{3x-2}$: Giả sử lượng liên hợp là a .

Cần tìm a sao cho $\sqrt{3x_0-2} - a = 0 \Rightarrow a = 4$.

Từ đó trong về trái của $h(x) > 0$ chắc có xuất hiện $\sqrt{3x-2} - 4$. Lập luận tương tự như trên cho $\sqrt{7-x}$ thì về trái của $h(x) > 0$ cũng xuất hiện $1 - \sqrt{7-x}$.

- Từ các điều trên ta sẽ tìm được BPT (a).

- Ở thí dụ 8 ta cần phát hiện về trái của $h(x) \geq 0$,

với $h(x) = 4\sqrt{5-x} + \sqrt{13+3x} - (x^2 - 5x + 4)$

có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 4$ (HS chỉ cần bấm máy tính bỏ túi là xong) để từ đó ta đưa được BPT ban đầu về dạng $(-x^2 + 5x - 4)k(x) \leq 0$. Tuy nhiên câu hỏi thắc mắc của đa số của HS là muốn có điều trên thì phải có BPT (b) dưới đây

$$4\left(\sqrt{5-x} - \left(\frac{7}{3} - \frac{x}{3}\right)\right) + \left(\sqrt{13+3x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3}\right)\right) - (x^2 - 5x + 4) \leq 0$$

đây là mấu chốt lời giải của bài toán trên.

Điều này không quá khó đối với chúng ta

- Theo trên ta nhẩm được hai nghiệm $x_1 = 1;$

$x_2 = 4$.

- Với $\sqrt{5-x}$: Giả sử lượng liên hợp là

$r_1(x) = a_1x + b_1$. Cần tìm a_1, b_1 sao cho

$$\begin{cases} \sqrt{5-x_1} - (a_1x_1 + b_1) = 0 \\ \sqrt{5-x_2} - (a_1x_2 + b_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{3} \\ b_1 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Từ đó trong về trái của $h(x) \leq 0$ chắc có xuất hiện

$$\sqrt{5-x} - \left(\frac{7}{3} - \frac{x}{3}\right).$$

$\sqrt{13+3x}$ thì về trái của $h(x) \leq 0$ cũng xuất hiện

$$\sqrt{13+3x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3}\right).$$

- Từ các điều trên ta sẽ tìm được BPT (b).

5. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp đánh giá

Thí dụ 9. Giải bất phương trình

$$\sqrt[4]{(x-3)(5-x)} + \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{5-x} +$$

$$6(x-1)\sqrt{3(x-1)} \leq x^3 - 3x^2 + 3x + 29 \quad (9)$$

Lời giải. ĐK: $3 \leq x \leq 5$. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\begin{cases} \sqrt[4]{(x-3)(5-x)} \leq \sqrt{\frac{x-3+5-x}{2}} = 1 \\ 6(x-1)\sqrt{3(x-1)} = 2\sqrt{27(x-1)^3} \leq (x-1)^3 + 27 \end{cases}$$

Áp dụng BDT Bunyakovsky, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{5-x} &\leq \sqrt{2(\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x})} \\ &\leq \sqrt{2\sqrt{2(x-3+5-x)}} = 2. \end{aligned}$$

Cộng ba BDT trên lại về theo vế, ta được (9).

Đẳng thức trong (9) xảy ra khi $x = 4$. Từ đó, có tập nghiệm của BPT(9) là $S = [3; 5]$.

Nhận xét. Thông thường giải BPT $f(x) \leq g(x)$ hoặc $f(x) \geq g(x)$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên D bằng phương pháp đánh giá ta thường sử dụng các BDT cổ điển quen thuộc như BDT Cauchy, BDT Bunyakovsky, ... và nắm được tính chất sau:

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(x) \leq h(x), \forall x \in D \\ g(x) \geq h(x), \forall x \in D \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x) \geq h(x), \forall x \in D \\ g(x) \leq h(x), \forall x \in D \end{cases}$$

$$\text{thì } f(x) = g(x) \text{ với } x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x) \\ g(x) = h(x) \end{cases}$$

6. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Thí dụ 10. Giải bất phương trình

$$3x(2+\sqrt{36x^2+3})+(4x+1)(1+\sqrt{4x^2+2x+1})<0.$$

Lời giải. BPT đã cho được viết lại dạng

$$(4x+1)\left(2+\sqrt{(4x+1)^2+3}\right)<(-6x)\left(2+\sqrt{(-6x)^2+3}\right) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có

$$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$$

nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) có $f(4x+1)<f(-6x)$, suy ra

$$4x+1<-6x \Leftrightarrow x<-\frac{1}{10}.$$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là

$$S=\left(-\infty; -\frac{1}{10}\right).$$

Nhận xét. Khi giải các bài toán BPT vô tỉ bằng phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số ngoài việc nhìn ra hàm đại diện, HS cần chú ý thêm:

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến và liên tục trên khoảng K thì $f(u)>f(v) \Leftrightarrow u>v$ trên K .

• Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến và liên tục trên khoảng K thì $f(u)>f(v) \Leftrightarrow u<v$ trên K .

7. Giải BPT vô tỉ bằng phương pháp vector

Thí dụ 11. Giải bất phương trình

$$(3-2x)\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-4x} \geq 2\sqrt{10-17x+10x^2-2x^3}.$$

Lời giải. ĐK: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$ (*). Xét hai vector

$$\vec{u}=(3-2x; 1); \vec{v}=(\sqrt{2x-1}; \sqrt{5-4x}).$$
 Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (3-2x)\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-4x} \\ |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| &= 2\sqrt{10-17x+10x^2-2x^3}. \end{aligned}$$

Suy ra BPT đã cho có dạng $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \frac{3-2x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5-4x}} > 0$$

$$\Rightarrow (3-2x)^2(5-4x) = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(16x^2-52x+46)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu với ĐK (*) ta thấy $x=1$ là nghiệm của BPT đã cho.

Nhận xét. Để giải các bài toán BPT vô tỉ bằng phương pháp vector, ta thường sử dụng các đánh giá sau

• $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$, đẳng thức xảy ra khi hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

• $||\vec{u}|-|\vec{v}|| \leq |\vec{u}-\vec{v}|$, đẳng thức xảy ra khi hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

• $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, đẳng thức xảy ra khi hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các bất phương trình sau

1) $2x^2+5x+\sqrt{x^2+2x+4}+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+4} \leq 6.$

2) $\sqrt{4x^2+30x-35} \geq x+2\sqrt{6x-7}.$

3) $2x+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+1>0.$

4) $(x-1)\sqrt{x^2-2x+3}+x\sqrt{x^2+2}>1-2x.$

5) $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2<2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2\right).$

6) $2x^3-8x^2-16x+73<\sqrt{7x-12}+\sqrt{9x-11}.$

7) $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5})(\sqrt{2x-3}-3) \leq 4.$

8) $8x^3-20x^2+18x-5<\sqrt[3]{8x^2-10x+3}.$

9) $\sqrt{-4x^2+8x+5} \leq x^2-4\left(1-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)x+\frac{36-9\sqrt{5}}{5}.$

10) $2x-3 \geq \sqrt{8x^2-20x+16}-\sqrt{2x-1}.$

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (1 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 2 (1 điểm). Cho hàm số

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x+1}{2}} - e^x + \frac{3}{4}x.$$

- a) Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Câu 3 (1 điểm). Giải phương trình

$$4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x \cos 2x = 0.$$

Câu 4 (1 điểm). Giải phương trình

$$(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6.$$

Câu 5 (1 điểm). Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

$$f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}, f'(1) = 0, f(1) = 4, f(-1) = 2$$

trong đó a, b là các số thực; $f'(x)$ là đạo hàm của hàm số $f(x)$.

Câu 6 (1 điểm). Một đoàn tàu có 7 toa ở một sân ga và có 7 hành khách từ sân ga lên tàu. Mỗi người lên tàu độc lập với nhau và chọn một toa một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để đoàn tàu có một toa có 1 người, một toa có 2 người, một toa có 4 người, bốn toa còn lại không có người nào lên.

Câu 7 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm cạnh AB ; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CH và SD .

Câu 8 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x + \sqrt{3}y = 0$ và $d_2: x - \sqrt{3}y = 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A và cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình đường tròn (C) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Câu 9 (1 điểm). Giải bất phương trình

$$(4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} > 4x - 8x^2 + 10 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+c)(a+4b+c)(a+b+c)^3}{abc[5(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca]}.$$

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/471 (Lớp 6). Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a.b.c = 2015^{2016}$. Tìm số dư của phép chia tổng $19a^2 + 5b^2 + 1890c^2$ cho 24.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/471 (Lớp 7). Chứng minh rằng nếu $(a^2 + ab + b^2) : 10$ thì $(a^3 - b^3) : 1000$, $(a, b \in \mathbb{Z})$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/471. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}}.$$

NGUYỄN THẾ ANH
(GV THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh)

Bài T4/471. Cho ΔABC . Bên ngoài tam giác vẽ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi O là tâm của tam giác đều ACE . Trên tia đối của tia OE lấy điểm F sao cho $OF = OE$. Chứng minh rằng $DF = BO$.

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/471. Cho tam thức $f(x) = 20x^2 - 11x + 2016$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên α sao cho

$$f(\alpha) : 2^{2016}.$$

TRIỆU VĂN HUNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/471. Giải phương trình

$$\frac{\log_2 x}{x^4 - 10x^2 + 26} = \frac{5 - x^2}{\log_2^2 x + 1}.$$

CAO NGỌC TOÀN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T7/471. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{y} + 4) + y \geq 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4}{y} + \frac{y^3}{x} + y$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/471. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cot A + \cot B} \geq \frac{16}{3} \cot A \cdot \cot B \cdot \cot C.$$

PHAN THÀNH NAM
(SV Khoa Toán Tin ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/471. Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=abc$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} + \sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 4.$$

PHẠM VĂN THUẬN
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/471. Một trung tâm mở ra 7 lớp học hè. Biết rằng mỗi học sinh trong trung tâm tham gia ít nhất một trong các lớp học này. Số liệu thống kê sau 7 lớp học cho thấy mỗi lớp học có số học sinh tham dự bằng nhau và bằng 40. Ngoài ra, cứ hai lớp học bất kỳ thì có không quá 9 học sinh học cả hai lớp học đó. Chứng minh rằng trung tâm dạy học có ít nhất 120 học sinh tham dự các lớp học đó.

PHẠM HUY HOÀNG
(SV K58AIT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/471. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + (x-y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

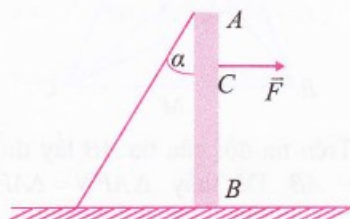
Bài T12/471. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với AI . Các điểm E, F thuộc Δ sao

cho $\widehat{EBA} = \widehat{FCA} = 90^\circ$. Các điểm M, N thuộc BC sao cho $ME \parallel NF \parallel AI$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và AMN tiếp xúc với nhau.

NGUYỄN XUÂN HÙNG

(GV THPT chuyên Hà Nội Amsterdam)

Bài L1/471. Một cột chiều dài $AB = 1,0$ m nặng $P = 500$ N được đặt thẳng đứng trên mặt đất nằm ngang ráp, hệ số ma sát là $\mu = 0,4$. Đầu A được neo chặt vào đất bằng dây thép, trọng lượng không đáng kể, nghiêng góc $\alpha = 37^\circ$ so với cột. Một lực F nằm ngang tác dụng vào điểm C của cột như hình dưới ($F > 0$).



• Thông báo: Tác giả của đề bài T11/471 xin gửi tên và địa chỉ về Tòa soạn.

• Định chính: Trong TH&TT số 470:

- Phần đề ra kỳ này: Bài T1/470, đã viết: Tìm các số nguyên $x, t, z, t, \dots$

xin được sửa là: Tìm các số nguyên dương $x, t, z, t, \dots$

- Phần giải bài kỳ trước: Đề bài L1 và L2 bị đánh máy nhầm. Bạn đọc xem lại đề bài L1, L2 ở TH&TT số 466. Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

a) C là trung điểm của AB . Tính lực F lớn nhất ($F = F_{\max}$) mà đầu B của cột còn chưa bị trượt.

b) C là điểm ứng với $n = \frac{AB}{AC} \geq 1$. Chứng minh rằng nếu C đủ cao, tức là n đủ lớn thì dù F lớn đến mấy đầu B cũng không trượt (giả thiết dây thép không bị đứt hoặc trượt đầu neo). Tính n và BC ứng với độ cao ấy.

c) Cho $n = 3$; $F = 900$ N. Tính lực căng dây T . (Lấy $\cos 37^\circ \approx 0,8$; $\sin 37^\circ \approx 0,6$).

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (Hà Nội)

Bài L2/471. Chứng minh rằng vận tốc của hạt photon trong chân không và trong mọi môi trường đều bằng c ; c là vận tốc của ánh sáng trong chân không có giá trị bằng 3.10^8 m/s.

NGUYỄN QUANG HẬU (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/471 (For 6th grade)

Let a, b , and c be three integers such that $a.b.c = 2015^{2016}$. Find the remainder when $19a^2 + 5b^2 + 1890c^2$ is divided by 24.

Problem T2/471 (For 7th grade).

Let $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove that if $(a^2 + ab + b^2) : 10$ then $(a^3 - b^3) : 1000$.

Problem T3/471. Solve the equation

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}}.$$

Problem T4/471. Given a triangle $\triangle ABC$. Outside the triangle, we draw two equilateral triangles ABD and ACE . Let O be the centroid of ACE . On the opposite ray of the ray OE choose F such that $OF = OE$. Prove that $DF = BO$.

Problem T5/471. Consider the quadratic function $f(x) = 20x^2 - 11x + 2016$. Show that there exists an integer α such that $f(\alpha) : 2^{2011960}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/471. Solve the equation

$$\frac{\log_2 x}{x^4 - 10x^2 + 26} = \frac{5 - x^2}{\log_2^2 x + 1}.$$

Problem T7/471. Let x and y be positive numbers such that $(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{y} + 4) + y \geq 13$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{x^4}{y} + \frac{y^3}{x} + y.$$

Problem T8/471. Given an acute triangle ABC . Prove that $\sqrt[3]{\cot A + \cot B} \geq \frac{16}{3} \cot A \cot B \cot C$.

(Xem tiếp trang 37)



Bài T1/467. Cho dãy số tăng 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 37, 39, 51, 53, ..., sao cho mỗi số hạng của dãy là số được tạo bởi các chữ số lẻ. Tìm số hạng thứ 2016 của dãy số trên.

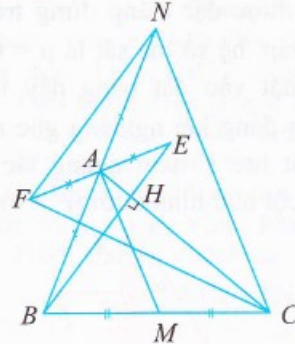
Lời giải. Các số a gồm 1 chữ số lẻ là 1, 3, 5, 7, 9 nên có 5 cách chọn. Các số ba gồm 2 chữ số lẻ với mỗi chữ số a, b có 5 cách chọn chữ số lẻ nên có $5.5 = 25$ số. Các số cba gồm 3 chữ số lẻ với mỗi chữ số a, b, c có 5 cách chọn chữ số lẻ nên có $5.5.5 = 125$ số. Các số dcb gồm 4 chữ số lẻ với mỗi chữ số a, b, c, d có 5 cách chọn chữ số lẻ nên có $5.5.5.5 = 625$ số. Như thế có $5 + 25 + 125 + 625 = 780$ số gồm từ 1 đến 4 chữ số lẻ, còn cần tính $2016 - 780 = 1236$ số nữa mà các số này gồm các chữ số lẻ. Số thứ 780 là 9999, số thứ $780 + 625 = 1405$ là 9999, số thứ $1405 + 625 = 2030$ là 39999. Ta cần tính lùi lại $2030 - 2016 = 14$ số gồm 5 chữ số, mà $14 < 25$ nên chỉ xét với các số $399ba$. Với ba từ 99 đến 91 có 5 số, từ 79 đến 71 có 5 số, từ 59 đến 51 có 5 số, do đó từ 39999 đến 39951 có 15 số, vậy nếu lùi 14 số thì số thứ 2016 là số 39951. $\square$

► **Nhận xét.** Có thể giải theo cách xét các số tăng dần: số thứ 1406 là 31111, số thứ $1406 + 4.125 = 1906$ là 39111, số thứ $1906 + 4.25 = 2006$ là 39911, ..., nhưng cách giải dài hơn một chút. Bạn Lê Đại Việt, 6A2, THCS Hoa Lư, Q. 9, TP. Hồ Chí Minh đưa ra 2 cách giải, cách giải thứ hai dựa vào biểu diễn số trong hệ cơ số 5. Ngoài bạn Lê Đại Việt, các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Vũ Minh Khải, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Khánh Lâm, 61, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; Nguyễn Đình Thành, Lê Hải Phong, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Đăng Diệu Huyền, 6C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; Nguyễn Trung Phú, Cao Thị Ngọc Trâm, Võ Đàm Hương Giang, Phạm Đình Tâm, Phạm Thị Thu Nhung, 6A, Phan Ngọc Tuyết Sương, Trần Thị Thảo

Vân, 6C, Nguyễn Thị Yến Nhi, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/467. Cho ΔABC nhọn có trung tuyến AM . Kẻ $BH \perp AC$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt BH ở E . Trên tia đối của tia AE lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh $CF \perp AB$.



Lời giải. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AB$. Dễ thấy $\Delta AFN = \Delta AEB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AFN} = \widehat{AEB}$, hai góc này ở vị trí so le trong nên $FN \parallel BE$. Theo giả thiết, $CA \perp BE$ suy ra $CA \perp FN$ (1). Vì $AN = AB$, $MB = MC$ nên theo một kết quả quen thuộc ta có $AM \parallel NC$. Vì

$$FE \perp AM \text{ nên } FE \perp NC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A là trực tâm của tam giác NFC , do đó $NA \perp FC$ hay $CF \perp AB$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán không khó song có rất ít bạn tham gia gửi bài. Ngoài cách giải trên đây các bạn có thể chứng minh bài toán dựa vào Bổ đề: "Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi tổng các bình phương của hai cặp cạnh đối diện bằng nhau".

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Nguyễn Đăng Nhật Minh, 7A1, THCS Archimedes, Yên Hòa; Nguyễn Hà Khánh Nam, 7A2, Trường Hanoi Academy, Q. Tây Hồ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/467. Cho a, b, c là các số hữu tỷ khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \leq 2.$$

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{(b-c)^2}{a^2} + \frac{(c-a)^2}{b^2} + \frac{(a-b)^2}{c^2}}$ là một số hữu tỷ.

Lời giải. Ta có hằng đẳng thức

$$\frac{ab}{(c-a)(b-c)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} = -1, \text{ và}$$

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 = \frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2}$$

$$+ 2 \left(\frac{ab}{(c-a)(b-c)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right) \quad (1)$$

Nếu $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \leq 2$ thì từ (1)

ta có $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 \leq 0$ và do đó phải

có $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Khi đó có:

$$\sqrt{\frac{(b-c)^2}{a^2} + \frac{(c-a)^2}{b^2} + \frac{(a-b)^2}{c^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right)^2 - \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)}$$

$$= \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}$$

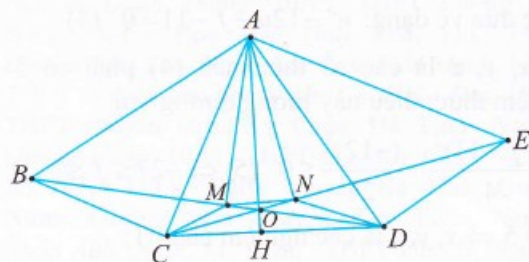
là số hữu tỷ, do a, b, c là các số hữu tỷ. $\square$

► **Nhận xét.** Tuyên dương các bạn có lời giải cơ bản đúng: **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy; Bùi Ngọc Lâm, 8A1 THCS Giảng Võ, B. Đình; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, 8C THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Dương Văn Minh,** 9A THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Mỹ Lan, 8A THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **TP Hồ Chí Minh:** Hoàng Đăng Khoa, 9A5, THCS Lam Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/467. Cho ngũ giác $ABCDE$ có $\widehat{ACB} = \widehat{ADE} = 90^\circ$ và $\widehat{CAB} = \widehat{DAE}$. Gọi O là giao điểm của BD và CE . Chứng minh $AO \perp DC$.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên BD và CE . H là giao điểm của AO và CD .



Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \widehat{ADE} = \widehat{ANE} = 90^\circ$, suy ra các tứ giác $AMCB, ANDE$ là các tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ và $\widehat{DAE} = \widehat{DNE}$.

Kết hợp với giả thiết $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$, suy ra

$$\widehat{DMC} = \widehat{DNC}.$$

Do đó tứ giác $CDNM$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{DCN} = \widehat{DMN} \quad (1)$$

Lại có tứ giác $AMON$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{DMN} = \widehat{OAN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HCN} = \widehat{HAN}$, nên tứ giác $ANHC$ nội tiếp, do đó $\widehat{AHC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$.

Vậy $AO \perp CD$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Một số bạn lấy giao điểm K của đường cao AH của tam giác ABC và đường thẳng qua D , vuông góc với CE , sau đó chứng minh O là trực tâm tam giác CDK . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Các bạn suy cho lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Thu Hiền, Nguyễn Thuỳ Dương, 8A3, Trường Quốc Lập, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Mỹ Lan, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Thanh Hoá:** Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Cống.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/467. Giải phương trình:

$$x^4 - 2x^3 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - 2 = 0 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. ĐK: $2x^3 + x^2 + 2 \geq 0$ (*).

Phương trình (1) tương đương với

$$x^4 + x^2 + \frac{1}{4} - \left(2x^3 + x^2 + 2 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} + x^2)(x^2 + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2}) = 0 \quad (2)$$

Nhận thấy $\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} \geq 0$, $x^2 \geq 0$ và không đồng thời xảy ra dấu bằng nên

$$\sqrt{2x^3 + x^2 + 2} + x^2 > 0.$$

$$\text{Suy ra (2)} \Leftrightarrow x^2 + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{2x^3 + x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^3 + x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$(\text{do } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0) \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(thỏa mãn (*)). Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cách 2. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + x^2 = 2x^3 + x^2 + 2 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2}.$$

Đặt $a = x^2, b = \sqrt{2x^3 + x^2 + 2}$ ($a \geq 0, b \geq 0$), ta có $a^2 + a = b^2 - b \Leftrightarrow (a+b)(a-b+1) = 0$.

TH1: $a + b = 0$ mà $a \geq 0, b \geq 0$ nên $a = b = 0$ (điều này vô lí, vì không có x nào thỏa mãn).

TH2: $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2} = 0$ (3), đến đây giải tiếp như cách 1. $\square$

► **Nhận xét.** Mấu chốt để giải phương trình này là biến đổi dẫn đến giải phương trình (3). Hầu hết các bạn tham gia đều giải theo một trong hai cách trên.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy; Tạ Duy Phương, 9A, THCS Mỹ Hưng, Thanh Oai; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tinh, 9A1, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** Lê Na, 8A, THCS Thị trấn II, Yên Lập; Nguyễn Thu Hiền, 8A3, Trần Quốc Lập, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Thanh Hiền, 8A, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Nghe An:** Nguyễn Đình Tuấn, Đinh Thị Ngọc Châu, 8C, Lê Đức Toàn, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đắk Lắk:** Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tể Thắng, Nông Công; **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Mỹ Lan, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước; **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, 8A10, THCS Kim Hồng, TP Cao Lãnh; **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Định:** Nguyễn Công Khải, 9A2, THCS Tây Ninh, Tây Sơn; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 8H, THCS Trần Hưng Đạo.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/467. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện: $x + y + z = 3$ và $xy + yz + zx = -9$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức xyz .

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 3 - x \\ yz = -9 - x(3 - x) = x^2 - 3x - 9 \end{cases}$$

Do đó y và z là nghiệm phương trình:

$$t^2 - (3 - x)t + x^2 - 3x - 9 = 0 \quad (1).$$

(1) có 2 nghiệm $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (3 - x)^2 - 4(x^2 - 3x - 9) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5 \quad (2).$$

Ta có: $xyz = x(x^2 - 3x - 9) = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ trên đoạn $[-3; 5]$,

$$\text{có: } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-3	-1	3	5		
f'		+	0	-	0	+
f			5		5	
	-27			-27		

Từ BBT ta nhận được:

• $\max_{[-3;5]} f(x) = 5$ đạt được khi $x = -1$ hoặc $x = 5$.

- Với $x = -1$, từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y; z) = (-1; 5) \\ (y; z) = (5; -1) \end{cases}$

- Với $x = 5$, từ (1) $\Rightarrow t_1 = t_2 = -1 \Rightarrow (y; z) = (-1; -1)$

• $\min_{[-3;5]} f(x) = -27$ đạt được khi $x = -3$ hoặc $x = 3$.

- Với $x = -3$, từ (1) $\Rightarrow t_1 = t_2 = 3 \Rightarrow (y; z) = (3; 3)$

- Với $x = 3$, từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y; z) = (-3; 3) \\ (y; z) = (3; -3) \end{cases}$

Kết luận: $\max(xyz) = 5$ khi $(x; y; z) = (-1; -1; 5)$

và các hoán vị; $\min(xyz) = -27$ khi

$(x; y; z) = (-3; 3; 3)$ và các hoán vị.

Cách 2. Đặt $f = xyz$, khi đó: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = -9 \\ xyz = f \end{cases}$

Do vậy x, y, z là 3 nghiệm của PT:

$$t^3 - 3t^2 - 9t - f = 0 \quad (3). \text{ Đặt } t = u + 1 \text{ thì (3)}$$

được đưa về dạng: $u^3 - 12u - f - 11 = 0 \quad (4).$

Do x, y, z là các số thực nên (4) phải có 3 nghiệm thực, điều này tương đương với

$$\frac{(-f - 11)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27} \leq 0 \quad (5) \Leftrightarrow -27 \leq f \leq 5.$$

• $f = 5 \Leftrightarrow x, y, z$ là các nghiệm của PT:

$t^3 - 3t^2 - 9t - 5 = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (-1; -1; 5)$ và các hoán vị.

• $f = -27 \Leftrightarrow x, y, z$ là các nghiệm của PT:

$t^3 - 3t^2 - 9t + 27 = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (-3; 3; 3)$ và các hoán vị. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Không dùng định lý Viète đảo, có thể có (2) bằng cách sử dụng BĐT: $(y+z)^2 \geq 4yz$.

2) Để có BĐT(5) ở Cách 2, ta đã sử dụng cách giải PT bậc ba bằng công thức Cardano, tóm tắt cách giải này như sau:

Xét PT bậc ba: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Đưa PT này về PT: $y^3 + py + q = 0$ (*) bằng cách đặt $x = y - \frac{a}{3}$.

Đặt $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Khi đó: nếu $\Delta > 0$ thì (*) có một

nghiệm thực và hai nghiệm phức liên hợp; nếu $\Delta = 0$ thì (*) có ba nghiệm thực (một nghiệm đơn và một nghiệm kép); nếu $\Delta < 0$ thì (*) có ba nghiệm thực phân biệt.

3) Rất đông các bạn tham gia giải bài này, đa số các bạn giải theo cách 1 (hoặc tương tự cách 1), có ba bạn giải theo cách 2. Một số bạn có kết quả sai vì không xác định được điều kiện (3).

Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hà Giang:** Nguyễn Bình Dương, 11 Toán, THPT chuyên Hà Giang. **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Nam, 10A1, Đỗ Văn Quyết, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Kiên, 11A1-K10, THPT Yên Phong; **Số 2;** **Phú Thọ:** Dương Gia Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Hưng Yên:** Chu Minh Huy, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Dương Hồng Sơn,** Nguyễn Mạnh Hiệp, Trần Thị Bích Hằng, Nguyễn Việt Đức, 11A9, Cao Thành Trung, Hoàng Văn Thái, 10A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy. **Hà Nội:** Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; Trần Nhật Quang, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; Phạm Văn Anh, Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ. **Thanh Hóa:** Nguyễn Bá Tuấn, Nguyễn Danh Thắng, 10A5, THPT Lương Đức Bằng, Hoằng Hóa; **Đỗ Thùy Anh,** 11T, THPT chuyên Lam Sơn. **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh; Cao Hữu Đạt, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu. **Hà Tĩnh:** Nguyễn Quang Hùng, 10A1, THPT Cù Huy Cận; **Nguyễn Bá Hiếu,** 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1; Nguyễn Xuân Anh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh,

10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Vĩnh Long:** Phan Gia Anh, 11T1, Châu Minh Khánh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long. **Quảng Ngãi:** Nguyễn Bảo Huy, 11B2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi. **Đồng Tháp:** Nguyễn Lê Anh Minh, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh. **Phú Yên:** Đặng Bảo Vinh, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa. **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Long An:** Phạm Hoàng Nguyên, 11A1, THPT Hậu Nghĩa, Đức Hòa. **Tây Ninh:** Lê Hiền Khải, Nguyễn Hoàng Nam, 10T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, TP. Tây Ninh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/467. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$.

Lời giải. Theo nguyên lý Dirichlet trong ba số $x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy$ luôn tồn tại hai số có tích không âm, không mất tính tổng quát giả sử là $(y^2 - zx)(z^2 - xy) \geq 0$. Xét hai trường hợp:

TH1: $x^2 - yz \leq 0$. Khi đó $P \leq 0$.

TH2: $x^2 - yz > 0$.

• Với $y^2 - zx \geq 0, z^2 - xy \geq 0$, theo BĐT Cauchy ta có: $P \leq \frac{(x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy)^3}{27}$.

Mặt khác: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{2} - \frac{(x+y+z)^2}{2} \leq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{3}{2}$.

Do đó $P \leq \frac{1}{8}$. Với $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì dấu đẳng thức xảy ra.

• Với $y^2 - zx \leq 0, z^2 - xy \leq 0$, theo BĐT Cauchy ta có: $P = (x^2 - yz)(zx - y^2)(xy - z^2) \leq \frac{(x^2 + xz + xy - y^2 - z^2 - yz)^3}{27}$.

Mặt khác: $x^2 + xz + xy - y^2 - z^2 - yz = \frac{3x^2 - y^2 - z^2}{2} - \frac{(y+z-x)^2}{2} \leq \frac{3x^2}{2} \leq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{3}{2}$.

Do đó $P \leq \frac{1}{8}$. Dễ thấy trường hợp này đẳng thức không xảy ra.

Kết luận: Vậy $\max P = \frac{1}{8}$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Khi $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì $P = \frac{1}{8}$.

Do đó nếu chứng minh được

$$P = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) \leq \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2)^3 \quad (*)$$

thì $\frac{1}{8}$ là giá trị lớn nhất cần tìm. Đến đây có thể

chứng minh (*) bằng biến đổi tương đương.

Một số bạn giải bài toán bằng cách đưa về khảo sát hàm số cũng cho kết quả đúng.

2) Nhiều bạn mắc lỗi khi lập luận: Theo nguyên lý Dirichlet trong ba số $x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy$ có ít nhất hai số cùng dấu. Khi chưa biết ba số đang xét có khác 0 hay không thì lập luận này là không chính xác (số 0 là không có dấu).

Một số bạn giải hệ tìm điều kiện xảy ra dấu đẳng thức bị sai. Cách giải của một số bạn còn dài.

3) Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Hà Nội: Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; Đặng Thanh Tùng, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; Trần Nhật Quang, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm; Chu Minh Vương, 10A, THPT Văn Giang, Văn Giang. **Thanh Hóa:** Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, THPT Lương Đức Bằng, Hoàng Hóa; Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Cống. **Nghệ An:** Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa. **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1; Nguyễn Xuân Anh Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 11T1, THPT chuyên Long An. **Phú Yên:** Đặng Bảo Vinh, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

TH&TT

Bài T8/467. Gọi p, R lần lượt là nửa chu vi và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh rằng $\left(\frac{p}{3R}\right)^2 + \left(\frac{3R}{p}\right)^2 \geq \frac{25}{12}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Sử dụng định lý sin cho tam giác ABC và bất đẳng thức quen thuộc

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ ta có:}$$

$$p = R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3R}{p} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và kết hợp với kết quả (*) ta thu được

$$\left(\frac{p}{3R}\right)^2 + \left(\frac{3R}{p}\right)^2 = \left(\frac{p}{3R}\right)^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{3R}{p}\right)^2 + \frac{7}{16}\left(\frac{3R}{p}\right)^2$$

$$\geq 2\sqrt{\left(\frac{p}{3R}\right)^2 \cdot \frac{9}{16}\left(\frac{3R}{p}\right)^2} + \frac{7}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{25}{12} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ đều. $\square$

► **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tất cả đều giải đúng. Xin nêu tên một số bạn giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Ngô Thị Huệ, 10 Toán 1, Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Trần Nhật Quang, 11 Toán 2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Duy Khương, 10T2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Đặng Thanh Tùng, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa, Nguyễn Văn Dũng, Hoàng Thị Thu Hoài, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Dương Gia Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hưng Yên:** Phạm Quang Nhật, Lê Thùy Dương, 10A1, Nguyễn Thị Thanh Lan, 11A8, Dương Hồng Sơn, Nguyễn Mạnh Hiệp, Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** Trần Thị Nhài, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Quang Hùng, Lê Văn Hưng, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Đức Thọ; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, 10/1, Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Long An:** Đặng Thành Trung, 11T2, THPT chuyên Long An, TP. Tân An.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/467. Tìm tất cả các số thực $k > -2$ sao cho $\frac{x}{x+y+kz} + \frac{y}{y+z+kx} + \frac{z}{z+x+ky} \geq \frac{3}{k+2}$ với

mọi x, y, z không âm và các biểu thức đều có nghĩa.

Lời giải. Cho $x = 0, y = 1, z = 2$ bất đẳng thức (BDT) của bài toán trở thành

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{2+k} \geq \frac{3}{k+2}.$$

Do đó nếu số k thỏa mãn bài toán thì $k \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh với mọi x, y, z là các số thực không âm, không đồng thời bằng 0 và k là số thực, $k \geq 1$ thì

$$A = \frac{x}{x+y+kz} + \frac{y}{y+z+kx} + \frac{z}{z+x+ky} \geq \frac{3}{k+2}.$$

Thật vậy áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$A = \frac{x^2}{x^2+xy+kzx} + \frac{y^2}{y^2+yz+kxy} + \frac{z^2}{z^2+zx+kyz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{F}, \text{ trong đó}$$

$$\begin{aligned} F &= (x^2+xy+kzx) + (y^2+yz+kxy) + (z^2+zx+kyz) \\ &= (x^2+y^2+z^2) + (k+1)(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)^2 + (k-1)(xy+yz+zx) \\ &\leq (x+y+z)^2 + \frac{k-1}{3}(x+y+z)^2 \\ &= \frac{k+2}{3} \cdot (x+y+z)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{do } (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) &= x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx \\ &= \frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{k+2}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3}{k+2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ là số thực dương.

Vậy các số thực $k \geq 1$ là tất cả các số k thỏa mãn bài toán. $\square$

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán BĐT cơ bản, không quá khó. Các bạn học sinh lớp 9 lớp 10 sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Dương Gia Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Quỳnh Hoa, Nguyễn Thị Thùy Linh, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Nam:** Phạm Đức Long, 10T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** Ngô Thị Huế, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa, Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Thanh Hóa:** Lê Tiến Đạt, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Công, Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, THPT Lương Khắc Bảng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, Nguyễn Hoàng Hải, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:**

Lê Thành Lâm, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/467. Tìm tất cả các số tự nhiên x và y thỏa mãn $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{y}-1) = 2017$ (1)

Lời giải. (Theo bạn Dương Gia Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{y}-1) = 2017$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2016 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} - 2016 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow xy + 2016^2 - 4034\sqrt{xy} = x + y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} = \frac{xy + 2016^2 - x - y}{4034} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} = k \in \mathbb{N}^*.$$

Thay vào (2) ta được $k - \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2016$

$$\Leftrightarrow k - 2016 - \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow (k - 2016)^2 + x - 2(k - 2016)\sqrt{x} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{(k - 2016)^2 + x - y}{2(k - 2016)} \in \mathbb{Q}$$

$\sqrt{x} = a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự $\sqrt{y} = b \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (1) ta được $(a-1)(b-1) = 2017$. Vì 2017 là số nguyên tố nên ta có

$$\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=2017 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-1=2017 \\ b-1=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a^2=4 \\ y=b^2=2018^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2018^2 \\ y=4 \end{cases}.$$

Các cặp số x, y tìm được thỏa mãn bài toán. $\square$

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán tương đối dễ với việc sử dụng kết quả quen biết là: Nếu $x \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ thì $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$. Các bạn sau có lời giải tốt: **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Cao Hữu Đạt, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Danh Thắng, 10A5, THPT Lương Khắc Bảng; **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T2, THPT chuyên KHTN. ĐHQG Hà Nội; **Tây Ninh:** Lê Hiền Khái, 10T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/467. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} x_n + n^2 \quad (1), \text{ với } n=1, 2, \dots$$

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x_n}}{n+1} \right)$.

Lời giải (Theo đa số các bạn). Viết lại (1) dưới

dạng $x_1 = 1, x_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} x_k + k^2$ với $k=1, 2, \dots$ hay

$$(k+2)x_{k+1} - (k+1)x_k = k^3 + 2k^2 \text{ với } k=1, 2, \dots$$

Lấy tổng theo k từ 1 đến n , ta thu được

$$\sum_{k=1}^n [(k+2)x_{k+1} - (k+1)x_k] = \sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2) \quad (2)$$

Đề ý rằng $\sum_{k=1}^n (k+2)x_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} (j+1)x_j = \sum_{k=2}^{n+1} (k+1)x_k$

$$\text{và } \sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

nên từ (2), suy ra

$$(n+2)x_{n+1} - 2x_1 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{hay } x_{n+1} = \frac{3n^4 + 14n^3 + 15n^2 + 4n + 24}{12(n+2)}.$$

Từ đây suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{(n+2)^3} = \frac{1}{4}$

Hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(n+1)^3} = \frac{1}{4}.$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x_n}}{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}. \square$

➤ **Nhận xét.** Đây là dạng toán cơ bản về dãy số nên có nhiều bạn gửi bài về tòa soạn. Đa số các bạn đều tìm biểu thức tường minh của dãy x_n rồi sau đó tìm

giới hạn. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Nguyễn Thanh Trung, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bắc Ninh:** Nguyễn Chi, 11A1-K10, THPT Yên Phong 2, Nguyễn Thanh Hiếu, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSPT, Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Trần Nhật Quang, 11T, Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Bá Hiến, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, Nguyễn Mạnh Hiệp, Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Chu Minh Huy, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Long An:** Phạm Hoàng Nguyên, 11A1, THPT

Hậu Nghĩa, Đức Hòa, **Phạm Quốc Thắng**, 11T1, Nguyễn Bình An, 11T2, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11T1, Nguyễn Thanh Huyền, Trần Minh Hiếu, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A, THPT Thái Hòa, Cao Hữu Đạt, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 11T, THPT chuyên Hùng Vương; **Phú Yên:** Đặng Bảo Vinh, 11T1, Lê Thành Lâm, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** Nguyễn Xuân Anh Quân, Nguyễn Phạm Phúc Việt, Trương Nhật Nguyễn Bảo, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 11A1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Đỗ Thủy Anh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 10T1, Phạm Gia Anh, 11T1, THPT chuyên Vĩnh Long; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Văn Quyết, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

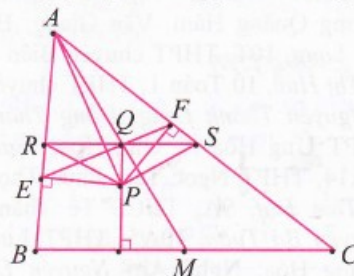
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/467. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, BE, CF . Đường thẳng AO cắt BC tại A' . Gọi M là trung điểm của BC và S là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) . Đường thẳng EF cắt SD, SA' tương ứng tại I, J . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle IJM$ tiếp xúc với BC tại M .

Lời giải. (Theo bạn Phùng Văn Nam, 10 T1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**). Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC . Điểm P thuộc phân giác của góc $\widehat{BAC}$. E, F theo thứ tự là hình chiếu của P trên AB, AC . Q là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với BC và EF . Khi đó AQ đi qua trung điểm của BC .

Chứng minh. Gọi M là giao điểm của AQ và BC ; R, S theo thứ tự là giao điểm của AB, AC và đường thẳng qua Q vuông góc với PQ (h.1).



Hình 1

Dễ thấy $(EP, ER) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv (QP, QR) \pmod{\pi};$

$$(FP, FS) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv (QP, QS) \pmod{\pi};$$

$$(EA, EP) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv (FA, FP) \pmod{\pi}.$$

Do đó các bộ bốn điểm (P, Q, R, E) , (P, Q, S, F) và (P, A, E, F) cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, chú ý rằng AP là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, suy ra

$$\begin{aligned} (RS, RP) &\equiv (RQ, RP) \equiv (EQ, EP) \equiv (EF, EP) \\ &\equiv (AF, AP) \pmod{\pi} \equiv (AP, AE) \equiv (FP, FE) \equiv (FP, FQ) \\ &\equiv (SP, SQ) \equiv (SP, SR) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

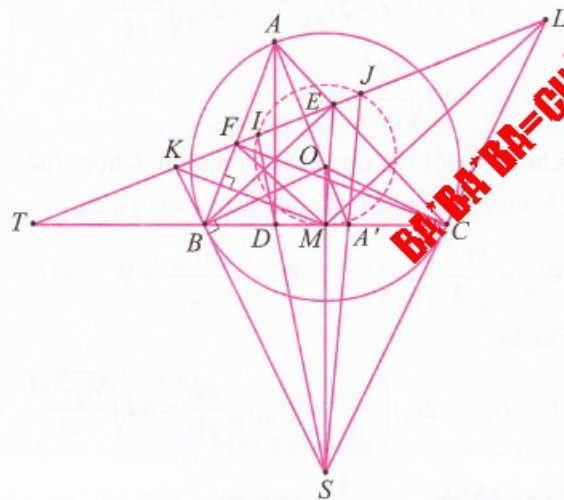
Kết hợp với $PQ \perp RS$, suy ra $QR = QS$.

Kết hợp với $BC \perp PQ \perp RS$, theo định lý Thales, suy ra $MB = MC$.

Trở lại giải bài toán T12/467.

Bỏ qua trường hợp đơn giản: $AB = AC$.

Gọi K, L, T theo thứ tự là giao điểm của SB, SC, BC với EF (h.2).



Hình 2

Dễ thấy SO là phân giác của góc $\widehat{KSL}$, B, C theo thứ tự là hình chiếu của O trên SK, SL và $OA' \perp KL$. Do đó, theo bổ đề trên, $JK = JL$.

Dễ thấy

$$(TJKI) = S(TJKI) = S(TDBC) = (TDBC) = -1.$$

Vậy, theo hệ thức Maclaurin

$$\overline{TI.TJ} = \overline{TK.TL} \quad (1)$$

Vì $\widehat{BFC} = 90^\circ$ và $MB = MC$ nên $MB = MF$.

Vì BK tiếp xúc với (O) và bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn nên $(BK, BF) \equiv (BK, BA) \equiv (CB, CA) \equiv (CB, CE) \equiv (FB, FE) \equiv (FB, FK) \pmod{\pi}$.

Do đó $KB = KF$. Vậy $MK \perp BF$. Kết hợp với $CF \perp BF$, suy ra $MK \parallel CF$.

Tương tự $ML \parallel BE$.

Vậy $(MB, MK) \equiv (CB, CF) \pmod{\pi}$

$$(\text{vì } MB \equiv CB; MK \parallel CF)$$

$$\equiv (EB, EF) \pmod{\pi}$$

(vì B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn)

$$\equiv (LM, LK) \pmod{\pi}$$

$$(\text{vì } EB \parallel LM; EF \equiv LK).$$

Điều đó có nghĩa là BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MKL .

Do đó $\overline{TK.TL} = \overline{TM}^2$ (2).

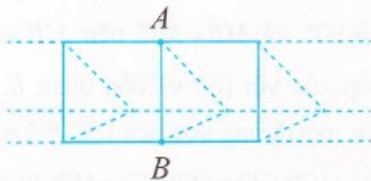
Từ (1) và (2) suy ra $\overline{TI.TJ} = \overline{TM}^2$.

Nói cách khác đường tròn ngoại tiếp tam giác IJM tiếp xúc với BC tại M . $\square$

➤ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Nam*, chỉ có sáu bạn tham gia giải bài toán này. Tất cả các bạn đều không khắc phục được tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ. Mặc dù vậy, vẫn nêu tên cả sáu bạn: **Phú Thọ:** Nguyễn Tiến Long, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Vũ Duy Mạnh, 11T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Nguyễn Bá Tuấn**, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Nội:** Ngô Thị Huế, 10T1, THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội.

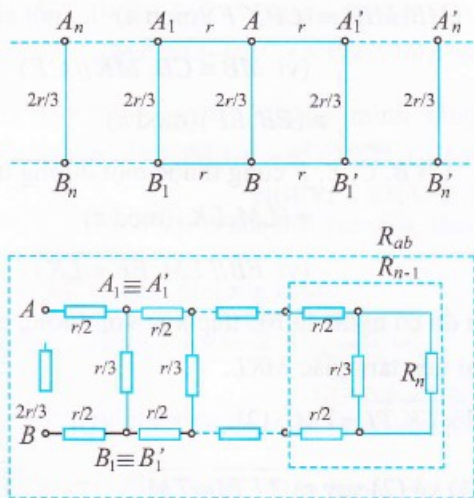
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/467. Cho mạch điện như hình vẽ, dài vô hạn về hai phía.



Mỗi đoạn nối là một điện trở đơn vị r . Tính điện trở tương đương R_{AB} của toàn mạch?

Lời giải. Có thể mô tả đoạn mạch đã cho tương đương với đoạn mạch dưới đây:



Từ hình vẽ, dễ thấy :

$$R_{n+1} = 2 \frac{r}{2} + \left(\frac{3}{r} + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} = \frac{4rR_n + 3r}{3R_n + r} \quad (*)$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow R_n = R_{n+1} = R_{ab} = X$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra: } 3X^2 - 3rX - r^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_{ab} = X = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{6} \right) r$$

$$\text{Suy ra: } R_{ab} = \left(\frac{3}{2r} + \frac{1}{R_{ab}} \right)^{-1} = \frac{2\sqrt{21}}{21} r. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Chúc mừng bạn duy nhất có lời giải đúng đúng: Nguyễn Công Khải, 9A2, THCS Tây Vinh, H. Tây Sơn, Bình Định.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/467. Một tế bào quang điện chân không có anôt và catôt là các tấm kim loại phẳng song

song với nhau, công thoát electron của vật liệu làm catôt là $A = 2,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Một chùm sáng đơn sắc có bước sóng λ được hội tụ trên bề mặt của Catôt. Đặt vào tế bào quang điện một hiệu điện thế không đổi $U = 3V$. Khi mắc anôt với cực dương của nguồn điện, còn catôt nối với cực âm thì đường kính của vết do các electron tạo ra trên bề mặt anôt là d_1 . Nhưng nếu mắc ngược lại, anôt với cực âm còn catôt nối với cực dương của nguồn điện thì đường kính của vết là $d_2 = \frac{d_1}{3}$.

Tính bước sóng λ . Biết khoảng cách giữa anôt và catôt là $d = 1 \text{ cm}$, tính d_2 .

Lời giải. Động năng cực đại của quang electron khi rời khỏi catôt được xác định theo hệ thức

$$\text{Anh -xtanh: } W_d = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A$$

Các electron bay ra gần như song song với catôt sẽ đến anôt ở vị trí xa nhất, ta có:

$$d_1 = 2v_0 t = 2v_0 \sqrt{\frac{2d}{a}} = 2v_0 \sqrt{\frac{2md^2}{eU}}$$

$$\text{Hay } d_1 = 4d \sqrt{\frac{W_d}{eU}} \quad (1).$$

Khi anôt nối với cực âm của nguồn. Chọn trục Oy vuông góc với các tấm kim loại. Ta có:

$$W_{dy} = \frac{mv_{0y}^2}{2} = eU \Rightarrow W_{dx} = \frac{mv_{0x}^2}{2} = W_d - eU$$

Do đó:

$$d_2 = 2v_{0x} t = 2v_{0x} \left(\frac{v_{0y}}{a} \right) = 2v_{0x} v_{0y} \frac{md}{eU} = 4d \sqrt{\frac{W_d - eU}{eU}}$$

Theo đề bài: $d_2 = \frac{4}{3} d_1$ suy ra:

$$W_d = \frac{9eU}{8} = \frac{hc}{\lambda} - A \Rightarrow \lambda = \frac{8hc}{9eU + 8A}$$

Thay số ta được $\lambda = 2,54 \text{ nm}$; $d_2 = 1,41 \text{ cm}$. $\square$

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào tham gia giải bài lý này.

NGUYỄN XUÂN QUANG



MỘT CÁCH PHÂN TÍCH BIỂU THỨC ĐẲNG CẤP BẬC HAI HAI BIẾN VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN TIỀN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài viết này xin giới thiệu về ứng dụng của một cách phân tích biểu thức đẳng cấp bậc hai hai biến $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, với a, b, c là các số thực sao cho $a + b + c > 0$. Biểu thức $P(x, y)$ hoàn toàn phân tích được thành tổng bình phương hoặc hiệu bình phương của hai biểu thức, cụ thể là

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (mx + ny)^2 + p \cdot (x - y)^2$$

trong đó:

$$m = \frac{2a+b}{2\sqrt{a+b+c}}, n = \frac{2c+b}{2\sqrt{a+b+c}}, p = -\frac{b^2-4ac}{4(a+b+c)}.$$

Đặc biệt:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{2a+b}{4}(x+y)^2 + \frac{2a-b}{4}(x-y)^2.$$

Khi đó:

- Nếu $b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 \geq (mx + ny)^2$.

- Nếu $b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 \leq (mx + ny)^2$.

Sau đây là một số thí dụ minh họa cho việc vận dụng cách phân tích này trong giải toán.

Thí dụ 1. Tìm các cặp số (x, y) thỏa mãn

$$\sqrt{22x^2 + 26xy + y^2} + 3\sqrt{6xy + 3y^2} = x^2 + y^2 + 32.$$

Lời giải.

ĐK: $22x^2 + 26xy + y^2 \geq 0$ và $6xy + 3y^2 \geq 0$.

Ta có: $22x^2 + 26xy + y^2 = (5x + 2y)^2 - 3(x - y)^2$,

$$6xy + 3y^2 = (x + 2y)^2 - (x - y)^2.$$

Do đó $\sqrt{22x^2 + 26xy + y^2} + 3\sqrt{6xy + 3y^2}$

$$\leq |5x + 2y| + 3|x + 2y| \leq 8(|x| + |y|).$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Từ phương trình đã cho ta suy ra

$$x^2 + y^2 + 32 \leq 8(|x| + |y|)$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = 4$$

Vì vậy

$$\sqrt{22x^2 + 26xy + y^2} + 3\sqrt{6xy + 3y^2} = x^2 + y^2 + 32$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK) hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \text{ (thỏa}$$

mãn ĐK). Các giá trị $(x = 4, y = -4)$, $(x = -4, y = 4)$

không thỏa mãn ĐK). Vậy các cặp số cần tìm là

$$(x, y) = (4; 4) \text{ và } (x, y) = (-4; -4).$$

Thí dụ 2. (Trích đề thi thử THPT Quốc gia năm 2015, Sở GD&ĐT Bạc Liêu)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x + y) \\ (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-y})\sqrt{2xy+18} = 5(x-3) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -1; y \leq 4; xy \geq -9$.

Ta có $10x^2 + 4xy + 2y^2 = (3x + y)^2 + (x - y)^2$.

Suy ra $\sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} \geq \sqrt{(3x + y)^2} = |3x + y|$.

Tương tự, ta có $\sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} \geq |x + 3y|$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$. Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} \\ \geq |3x + y| + |x + 3y| \geq 4|x + y| \geq 4(x + y). \end{aligned}$$

Vì vậy $\sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x + y) \Leftrightarrow x = y \geq 0$.

Thay $y = x \geq 0$ vào phương trình còn lại của hệ ta được: $(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x})\sqrt{2x^2+18} = 5(x-3)$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-3)}{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x}} \cdot \sqrt{2x^2+18} = 5(x-3)$$

$\Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn ĐK) hoặc

$$\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x^2+18}.$$

Lại có $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x^2+18}$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 16(x+1)(4-x) = (x+1)^2(2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 + 21x - 63 = 0 \text{ (do } 0 \leq x \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(2x^2+7x+21) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

(thỏa mãn ĐK).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là

$$(x; y) = (3; 3) \text{ và } (x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Chú ý. Từ phương trình thứ nhất trong hệ chúng ta cũng có thể chỉ ra $x = y \geq 0$ bằng cách khác như sau:

Ta có:

$$\sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2[(2x)^2 + (x+y)^2]} + \sqrt{2[(x+y)^2 + (2y)^2]} = 4(x+y).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{2[(2x)^2 + (x+y)^2]} \geq |3x+y| \text{ và}$$

$$\text{và } \sqrt{2[(x+y)^2 + (2y)^2]} \geq |x+3y|.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2[(2x)^2 + (x+y)^2]} + \sqrt{2[(x+y)^2 + (2y)^2]} \geq |3x+y| + |x+3y|$$

$$\geq |3x+y| + |x+3y| \geq 4|x+y| \geq 4(x+y).$$

$$\text{Vì vậy } \sqrt{10x^2 + 4xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 4xy + 10y^2} = 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x = y \geq 0.$$

Thí dụ 3 (Trích đề thi thử THPT Quốc gia năm 2015, mathlinks.vn). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^2 + 3xy + 4x^2} = 3(x+y) \\ x^3 - x^2 + 9x + 1 = (y+2)\sqrt{y+3} + (y+3)\sqrt{3-2y} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $-3 \leq y \leq \frac{3}{2}$. Ta có

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 = \frac{1}{36}(7x+11y)^2 + \frac{23}{36}(x-y)^2$$

$$\text{và } 2y^2 + 3xy + 4x^2 = \frac{1}{36}(11x+7y)^2 + \frac{23}{36}(x-y)^2.$$

$$\text{Do đó } \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^2 + 3xy + 4x^2}$$

$$\geq \frac{1}{6}(|7x+11y| + |11x+7y|) \geq 3|x+y|.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{2y^2 + 3xy + 4x^2}$$

$$= 3(x+y) \Leftrightarrow x = y \geq 0.$$

Thế $y = x \geq 0$ vào phương trình còn lại của hệ ta được:

$$x^3 - x^2 + 9x + 1 = (x+2)\sqrt{x+3} + (x+3)\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x+3}-2) + (x+3)(\sqrt{3-2x}-1)$$

$$= x^3 - x^2 + 6x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{2(x+3)(x-1)}{\sqrt{3-2x}+1} = (x-1)(x^2+6)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK) hoặc}$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{2(x+3)}{\sqrt{3-2x}+1} = x^2+6 \quad (*)$$

Với điều kiện $x \geq 0$ thì

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{2(x+3)}{\sqrt{3-2x}+1} < x+2 < x^2+6$$

nên (*) vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Thí dụ 4 (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Ninh Bình năm học 2014 – 2015).

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 = \frac{7}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{7}{4}(x+y)^2$$

$$\text{nên } \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(x+y).$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(y+z),$$

$$\sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(z+x).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$A \geq \sqrt{7}(x+y+z) = 3\sqrt{7}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt{7}$ khi $x = y = z = 1$.

Thí dụ 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} + \frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} + \frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}}.$$

Lời giải. Cách 1. Với các số thực dương x, y ta có $(x-y)^2 \geq 0$ nên suy ra $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{(7a^2 + 6ab + 5b^2)^2}{3a^2 + 10ab + 5b^2} &\geq 2(7a^2 + 6ab + 5b^2) - \\ &\quad - (3a^2 + 10ab + 5b^2) = 11a^2 + 2ab + 5b^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} = \sqrt{\frac{(7a^2 + 6ab + 5b^2)^2}{3a^2 + 10ab + 5b^2}} \geq \sqrt{11a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Ta lại có:

$$11a^2 + 2ab + 5b^2 = 2(2a+b)^2 + 3(a-b)^2 \geq 2(2a+b)^2.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{11a^2 + 2ab + 5b^2} \geq \sqrt{2}(2a+b).$$

$$\text{Do đó } \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} \geq \sqrt{2}(2a+b).$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} \geq \sqrt{2}(2b+c),$$

$$\frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}} \geq \sqrt{2}(2c+a).$$

$$\text{Vì vậy } F \geq 3\sqrt{2}(a+b+c).$$

Mặt khác $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên từ giả thiết, ta có $a+b+c \geq 3$. Suy ra $F \geq 9\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy $\min F = 9\sqrt{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned} 7a^2 + 6ab + 5b^2 &= \frac{2}{9}(5a+4b)^2 + \frac{13}{9}(a-b)^2 \\ &\geq \frac{2}{9}(5a+4b)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a^2 + 10ab + 5b^2 &= \frac{2}{9}(4a+5b)^2 - \frac{5}{9}(a-b)^2 \\ &\leq \frac{2}{9}(4a+5b)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}(4a+5b).$$

$$\text{Do đó } \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5a+4b)^2}{4a+5b}.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5b+4c)^2}{4b+5c},$$

$$\frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5c+4a)^2}{4c+5a}.$$

$$\Rightarrow F \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{(5a+4b)^2}{4a+5b} + \frac{(5b+4c)^2}{4b+5c} + \frac{(5c+4a)^2}{4c+5a} \right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{(5a+4b)^2}{4a+5b} + (4a+5b) \geq 2(5a+4b).$$

Suy ra $\frac{(5a+4b)^2}{4a+5b} \geq 6a+3b$. Tương tự ta có

$$\text{được: } F \geq \frac{\sqrt{2}}{3}(9a+9b+9c) = 3\sqrt{2}(a+b+c).$$

Mặt khác $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên từ giả thiết, ta có $a+b+c \geq 3$. Suy ra $F \geq 9\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy $\min F = 9\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$.

Trên đây là một số ví dụ minh họa cho việc sử dụng cách phân tích biểu thức đẳng cấp bậc hai hai biến thành dạng tổng bình phương hoặc hiệu bình phương. Hy vọng rằng bài viết sẽ giúp các em học sinh có thêm tư liệu để ôn thi. Cuối cùng là một số bài tập tự luyện.

BÀI TẬP

1. Tìm các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn điều

$$\begin{aligned} \text{kiện: } & \sqrt{19x^2+2xy+4y^2} + \sqrt{4x^2+2xy+19y^2} + 32 \\ & = 2\sqrt{xy} + 16(\sqrt{x} + \sqrt{y}). \end{aligned}$$

2 (Bài đăng trên TH&TT tháng 9 năm 2012).

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt[3]{7x+12y+8} = 2xy+y+5 \end{cases}$$

3 (Trích đề thi thử ĐH năm 2014, nguoiithay.vn). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{7x^2+6xy+3y^2} + \sqrt{3x^2+6xy+7y^2} = 4(x+y) \\ \sqrt{x+2y+3} + \sqrt[3]{x-4y+5} = 2 \end{cases}$$

4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{11x^2+8xy+6y^2} + \sqrt{7x^2+10xy+19y^2} \\ \quad = \sqrt{21x^2+68xy+32y^2} \\ x\sqrt{x+3y-3} + (2x+y+3)\sqrt{5x+y-2} \\ \quad = x^2+y^2+6x+8y-3 \end{cases}$$

5. Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \\ & \geq 3\sqrt{xy+yz+zx}. \end{aligned}$$

6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$a^3+b^3+c^3=3. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu}$$

$$\begin{aligned} \text{thức: } M &= \sqrt{2a^2+12ab+2b^2} + \sqrt{4b^2+10bc+4c^2} \\ &+ \sqrt{3c^2+12ca+3a^2}. \end{aligned}$$

7 (Trích đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên Toán - Hải Phòng, năm học 2015 - 2016).

Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{rằng: } & \frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} \\ & + \frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}} \geq \frac{x+y+z}{5}. \end{aligned}$$

8 (Bài đăng trên TH&TT tháng 10 năm 2012).

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều

$$\text{kiện } 15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2012.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}. \end{aligned}$$

9. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^3}{\sqrt{2b^2+7bc+3c^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{2c^2+7ca+3a^2}} \\ &+ \frac{c^3}{\sqrt{2a^2+7ab+3b^2}}. \end{aligned}$$



PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

(Tiếp theo kỳ trước)

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài toán sau xuất hiện trong kỳ thi Romani Master in Mathematic năm 2016

Bài 6. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A . Gọi K là điểm đối xứng với A qua BC . DE, DF lần lượt cắt KB, KC tại M, N . Chứng minh rằng BN, CM và AD đồng quy.

Lời giải. Giả sử BN cắt CM tại S . Ta thấy

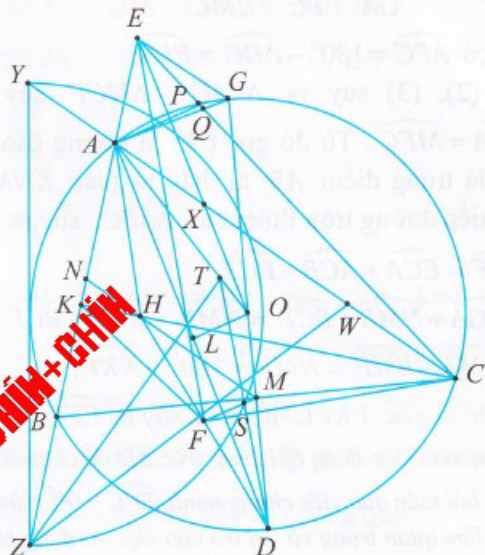
$$\widehat{EDC} = \widehat{BAC} = \widehat{FDB}$$

nên DE, DF đối xứng nhau qua BC . KB đối xứng với AB qua BC , do đó KB cắt DE tại M là điểm đối xứng qua BC của giao điểm DF và AB chính là F , vậy F, M đối xứng qua BC .

Tương tự E, N đối xứng qua BC . Vậy S là giao của BN và CM sẽ là điểm đối xứng qua BC của T là giao của BE, CF . Ta có $\widehat{DET} = \widehat{DAB} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $DTEC$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{TDC} = \widehat{TEA} = \widehat{BDA}$, suy ra DT và DA đối xứng qua BC , nên DT đi qua K hay D, K, T thẳng hàng. Suy ra ảnh đối xứng qua trục BC của D, K, T là D, A, S thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D khác A . Lấy X thuộc AC sao cho $OX \parallel AD$. Y là điểm đối xứng với X qua A . Lấy Z trên tia AB sao cho $AZ = AC$. Lấy T thuộc AO sao cho $ZT \perp AC$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính YZ chia đôi đoạn DT .

Lời giải. Giả sử OX cắt AB tại E . Dễ thấy $\triangle AXE$ cân tại A nên $AY = AX = AE$, suy ra Y và E đối xứng nhau qua AD .



Dễ thấy Z và C đối xứng nhau qua AD , gọi W là điểm đối xứng với B qua AD thì tam giác ABC và AWZ đối xứng nhau qua trục AD . Do ZW và BC đối xứng qua phân giác $\widehat{BAC}$ nên $AO \perp ZW$, từ đó T là trực tâm $\triangle AZW$, vậy T đối xứng với trực tâm H của $\triangle ABC$ qua AD . Gọi S, F lần lượt là trung điểm của DT, DH thì S, F đối xứng nhau qua AD . Ta cần chứng minh $\widehat{YSZ} = 90^\circ$. Qua phép đối xứng trục AD cần chứng minh $\widehat{EFC} = 90^\circ$, thật vậy gọi DG là đường kính của (O) . Dễ thấy $OE \parallel AD \perp AG$ nên $EA = EG$. AG là phân giác $\widehat{EAC}$ nên $\widehat{EGA} = \widehat{EAG} = \widehat{GAC} \Rightarrow EG \parallel AC$. Gọi CE cắt (O) tại P khác C và CE cắt AG tại Q . Ta thấy $\widehat{PGQ} = \widehat{PCA} = \widehat{PEG}$ suy ra

$$\Delta PGQ \sim \Delta QEG \Rightarrow \frac{PG}{GE} = \frac{QG}{QE} = \frac{AG}{CE}.$$

$$\text{Từ đó } \frac{PG}{AG} = \frac{GE}{CE} = \frac{EA}{CE} = \frac{AP}{BC} \Rightarrow \frac{PG}{PA} = \frac{AG}{BC} \quad (1)$$

Gọi L, M lần lượt là trung điểm AD, BC để có OM và FL cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AH$ nên $FMOL$ là hình bình hành. Suy ra

$$FM = OL = \frac{1}{2}AG.$$

$$\text{Từ (1) có } \frac{PG}{GA} = \frac{AG}{BC} = \frac{2FM}{2MC} = \frac{FM}{MC} \quad (2)$$

$$\text{Để có } \widehat{APG} = 180^\circ - \widehat{ADG} = \widehat{FMC} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $\Delta PAG \sim \Delta MCF$ suy ra $\widehat{PGA} = \widehat{MFC}$. Từ đó gọi CK là đường cao và N là trung điểm AB ta thấy tứ giác $KNMF$ nội tiếp đường tròn Euler của ΔABC , suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{ECF} &= \widehat{ECA} + \widehat{ACB} + \widehat{BCF} \\ &= \widehat{PGA} + \widehat{NMB} + \widehat{BCF} = \widehat{NMB} + \widehat{MFC} + \widehat{BCF} \\ &= \widehat{NMA} + \widehat{BMF} = \widehat{NMF} = 180^\circ - \widehat{NKF}. \end{aligned}$$

Từ đó tứ giác $EKFC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EFC} = 90^\circ$.

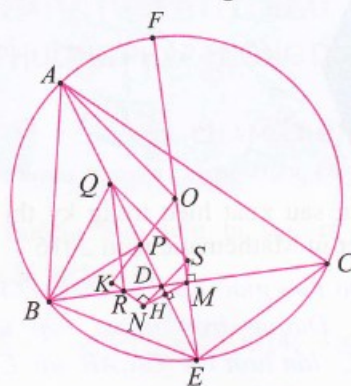
Nhận xét. Việc dùng đối xứng trục AD để chuyển mô-

hình bài toán qua việc chứng minh $\widehat{EFC} = 90^\circ$ là một việc làm quan trọng và vai trò của việc sử dụng phép đối xứng trục ở đây là khá nổi bật. Ta dùng đối xứng trục chuyển toàn bộ mô hình bài toán này thành một bài toán khác là một cách giải đặc trưng cho việc sử dụng phép biến hình trong giải toán.

Bài 8. Cho tam giác ABC cố định với tâm đường tròn ngoại tiếp O và phân giác trong AD . P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC và nằm trên AD . Lấy điểm S sao cho $QS \parallel AO$ và $DS \perp AO$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng đường thẳng qua P vuông góc với SM luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Lời giải. Gọi R là hình chiếu của Q trên BC . Do $DS \perp AO$ nên DS và BC đối xứng nhau qua AD , từ đó dễ thấy R và S đối xứng nhau qua AD . Gọi N, T là các điểm đối xứng với M, O qua AD tương ứng. Ta sẽ chứng minh

$PT \perp MS$, hay đường thẳng qua P vuông góc với SM đi qua T cố định. Xét qua phép đối xứng trục AD thì cần chứng minh $RN \perp OP$.



Thật vậy gọi AD cắt (O) tại E khác A . EF là đường kính của (O) . M là trung điểm của BC . H là trung điểm của MN thì H thuộc AD . Ta có $\widehat{RMN} = \widehat{OEP}$ (1). Theo định lý Thales và chú ý $\Delta HDM \sim \Delta MDE$ ta có $\frac{QE}{RM} = \frac{DE}{DM} = \frac{ME}{HM} = \frac{2ME}{MN} \Rightarrow \frac{MN}{MR} = \frac{2ME}{QE}$ (2)

$$\text{Lại có } \widehat{BE} = \widehat{PBC} + \widehat{CBE} = \widehat{QBA} + \widehat{QAB} = \widehat{BQE}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó có } \Delta EBP \sim \Delta EQB &\Rightarrow EP \cdot EQ = EB^2 = \\ &= EM \cdot EF = 2EM \cdot EO \Rightarrow \frac{2ME}{QE} = \frac{EP}{EO} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow \frac{MN}{MR} = \frac{EP}{EO} \quad (4)$$

Từ (1), (4) $\Rightarrow \Delta EPO \sim \Delta MNR \Rightarrow \widehat{MNR} = \widehat{EPO}$. Giả sử RN cắt OP tại K thì tứ giác $PHNK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NKP} = \widehat{PHN} = 90^\circ$. Vậy $RN \perp OP$.

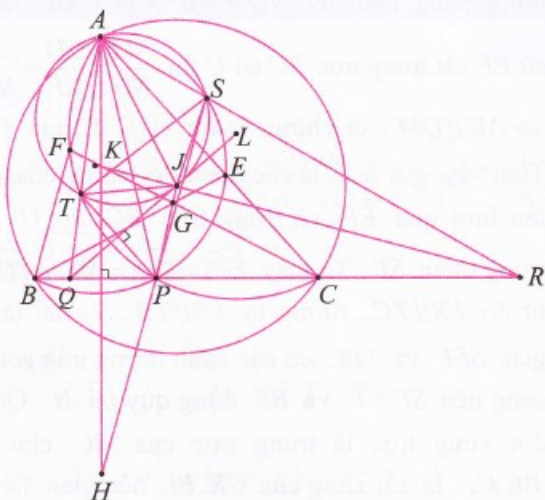
Nhận xét. Việc sử dụng phép đối xứng trục AD chuyển bài toán về chứng minh $RN \perp OP$ là một việc làm quan trọng trong bài toán này.

Ta tiếp tục với bài thi HSG lớp 10 ở Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm 2015

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC . $(K), (L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PAC . Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAST luôn đi qua một điểm J cố định khác A .

b) Giả sử (K) cắt CA tại E khác A . (L) cắt AB tại F khác A . BE cắt CF tại G . Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua $J \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ΔABC .

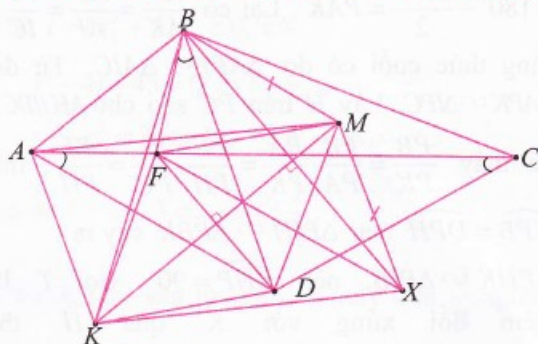


Lời giải. a) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔAST đi qua J cố định. Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R tương ứng. Các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là hình thang cân, do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q . Dễ thấy JK, JL lần lượt là trung trực của AB, AC do đó JK đi qua R và JL đi qua Q . Suy ra trong ΔAQR thì J là tâm đường tròn nội tiếp hay AJ là phân giác $\widehat{SAT}$ (1). Tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT , do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS$ (2). Từ (1), (2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAST .

b) Ta thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EGC} = \widehat{EAF} = \widehat{EPG}$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Gọi H là điểm đối xứng với A qua BC thì $\widehat{BPH} = \widehat{APB} = \widehat{AEB} = \widehat{GPC}$, do đó PG đi qua H . Do đó PG và AP đối xứng nhau qua BC . Từ đó PG đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp J của $\Delta ABC \Leftrightarrow AP$ đi qua điểm đối xứng của J qua $BC \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của ΔABC .

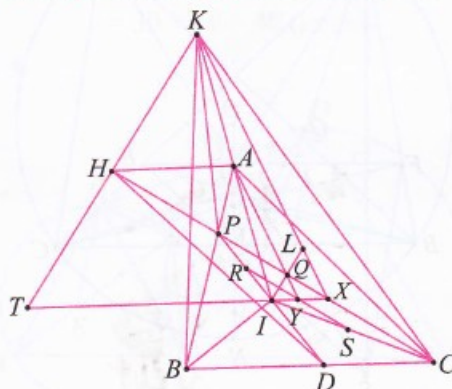
Bài 10. (Mở rộng bài toán 1 thi IMO 2016).

Cho ΔABC có $\widehat{ABC}$ tù và tâm đường tròn ngoại tiếp là D . Đường trung trực của AB cắt AC tại F . K, M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADF, BFC . Dựng hình bình hành $AMXN$. Chứng minh rằng KM, FX, BD đồng quy.



Lời giải. Do $DA = DB$ và $FA = FB$ nên A, B đối xứng nhau qua FD . Từ đó $\widehat{FBD} = \widehat{FAD} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $FBCD$ nội tiếp đường tròn (M) . Hai đường tròn $(BFDC)$ và (AFD) có $\Delta AFD \sim \Delta BFD$ (c.g.c) nên bán kính của chúng bằng nhau. Từ đó $MFKD$ là hình thoi, suy ra B, X đối xứng nhau qua FD . Vậy $ABMK$ là hình thang cân, mà $AMXK$ là hình bình hành nên dễ suy ra B, X đối xứng nhau qua KM . Từ $MFKD$ là hình thoi suy ra F, D đối xứng nhau qua KM , do đó FX, KM, DB đồng quy.

Bài 11. Cho ΔABC với tâm đường tròn nội tiếp I . P thuộc cạnh AB sao cho $IP \perp IB$. R, S lần lượt là trung điểm IP, IC . Q là hình chiếu của I trên PC . Chứng minh rằng AQ chia đôi đoạn RS .



Lời giải. Gọi K, L lần lượt là các điểm đối xứng với I qua A, Q . Ta sẽ chứng minh KL chia đôi PC . Thật vậy,

$$\widehat{PIC} = \widehat{PIA} + \widehat{AIC} = \frac{\widehat{ACB}}{2} + 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{PAK}. \text{ Lại có } \frac{AP}{AK} = \frac{AP}{AI} = \frac{PI}{IC},$$

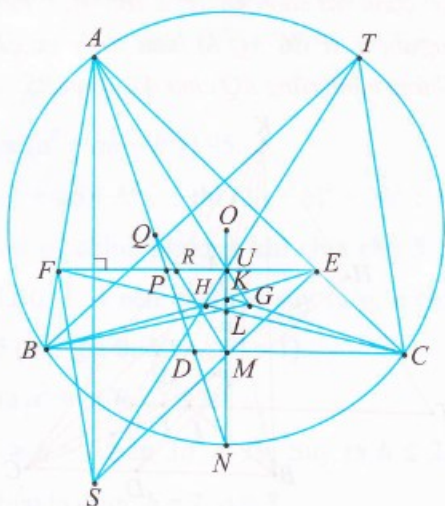
đẳng thức cuối có do $\triangle API \sim \triangle AIC$. Từ đó $\triangle APK \sim \triangle IPC$. Lấy H trên PC sao cho $AH \parallel BC$.

Ta thấy $\frac{PB}{PK} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PA}{PK} = \frac{PC}{PH} \cdot \frac{PI}{PC} = \frac{PI}{PH}$, mà $\widehat{KPB} = \widehat{DPH}$ nên $\triangle PIH \sim \triangle PBK$ suy ra

$\triangle PHK \sim \triangle PIB$, nên $\widehat{KHP} = 90^\circ$. Gọi T là điểm đối xứng với K qua H thì $IT \parallel AH \parallel BC \parallel IX$ với X là trung điểm PC . Từ đó T, I, X thẳng hàng. Qua phép đối xứng trục CP thì K, L, X thẳng hàng.

Nhận xét. Việc sử dụng đối xứng trục CP biến ba điểm T, I, X thành ba điểm K, L, X thẳng hàng đóng vai trò quan trọng trong cách tìm ra lời giải bài toán.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có P, Q là hai điểm đẳng giác trên đường phân giác trong AD góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua P song song với BC cắt AB, AC, AB, AC tại E, F tương ứng. BE, CF cắt nhau tại G ; M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $QM \parallel AG$.



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. AP cắt BC tại D và cắt (O) tại N khác A . Dễ thấy hai tam giác NBP và NQB đồng dạng nên $NP \cdot NQ = NB^2 = ND \cdot NA$. Giả

sử EF cắt trung trực BC tại U thì $\frac{NM}{NU} = \frac{ND}{NP} = \frac{NQ}{NA} \Rightarrow AU \parallel QM$, ta chứng minh AU đi qua G .

Thật vậy, gọi S, T là các điểm đối xứng của A lần lượt qua EF và trung trực BC thì U là trung điểm ST . Ta thấy $\widehat{EFS} = \widehat{EFA} = \widehat{ABC} = \widehat{TCB}$ từ đó $FS \parallel TC$, tương tự $ES \parallel TB$. Vì hai tam giác SEF và TBC có các cạnh tương ứng song song nên ST, CF và BE đồng quy tại H . Qua đối xứng trục là trung trực của BC chú ý BE, CF là đối xứng của CK, BL nên giao điểm G, H đối xứng qua trung trực BC . Chú ý A, U, G lần lượt là ảnh của T, U, H qua phép đối xứng qua trung trực BC , mà T, U, H thẳng hàng nên AU đi qua G .

Nhận xét. Việc sử dụng đối xứng qua trung trực của BC có vai trò quyết định trong lời giải bài toán.

Bài viết mới chỉ dừng lại ở việc nêu bật vai trò của phép đối xứng trục trong việc thực hành giải những bài toán khó khác nhau của chương trình hình học Olympic. Cũng giống như những phép biến hình khác thì phép đối xứng trục còn có những bài tập mang tính lý thuyết rất sâu sắc. Mặt khác những dạng toán có liên quan tới tích của phép đối xứng trục với các phép biến hình khác hoặc là việc vận dụng phép đối xứng trục trong các bài toán về tỷ số kép và hàng điều hòa chúng tôi cũng chưa thể nhắc tới do khuôn khổ bài báo có hạn. Tuy nhiên với việc sử dụng đối xứng trục như là một phần không thể thiếu của lời giải bài toán, thì trong các ví dụ trên chúng tôi cũng đã phần nào làm được nhiệm vụ này. Các ứng dụng của phép đối xứng trục trong cả lý thuyết và thực hành giải toán còn rất nhiều, xin hẹn gặp lại các bạn ở những chuyên đề kế tiếp.

I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 57 năm 2016 (IMO 2016) được tổ chức từ ngày 6/7 đến ngày 16/7/2016, tại HongKong, Trung Quốc. Dự thi IMO 2016 có 602 học sinh, trong đó có 71 học sinh nữ, thuộc 109 Quốc gia và Vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đây cũng là kỳ thi IMO có quy mô lớn nhất từ trước tới nay. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Đào Vũ Quang* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Hà Nội), *Vũ Xuân Trung* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Thái Bình, Thái Bình), *Hoàng Anh Dũng* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá), *Phạm Nguyễn Mạnh* (HS lớp 11, Trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), *Lê Nhật Hoàng* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định) và *Vũ Đức Tài* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định). Đoàn do PGS. TS. *Lê Anh Vinh*, giảng viên Trường ĐH Giáo dục - ĐHQG Hà Nội làm Trưởng đoàn và TS. *Lê Bá Khôi*, giảng viên Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh làm Phó trưởng đoàn; thầy *Nguyễn Khắc Minh*, chuyên viên Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD, Bộ GD&ĐT và TS. *Nguyễn Chu Gia Vượng*, nghiên cứu viên Viện Toán học Việt Nam tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên C (Quan sát viên đi cùng học sinh) có: thầy *Nguyễn Thanh Sơn*, giáo viên Trường THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hoá, thầy *Nguyễn Hữu Tâm*, giáo viên Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định, thầy *Nguyễn Hoàng Cương*, giáo viên Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định, cô *Đào Thị Lê Dung*, giáo viên Trường THPT chuyên Thái Bình, tỉnh Thái Bình và thầy *Nguyễn Khánh Ngọc*, chuyên viên Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD, Bộ GD&ĐT. Lễ Khai mạc IMO 2016 đã được tổ chức vào hồi 16h00 ngày 10/7/2016, và lễ Bế mạc IMO 2016

đã được tổ chức vào hồi 17h00 ngày 15/7/2016, tại Trung tâm Hội nghị HongKong.

II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2016 được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như tại ba kì IMO gần đây (IMO 2013 – IMO 2015). Cụ thể, từ các bài toán thuộc danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm đề thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình (ở IMO 2016, Bài 4 được chọn là bài số học có độ khó xếp ở cả hai mức độ dễ và trung bình của đề thi); từ đó, Hội đồng xây dựng các tổ hợp 4 bài toán gồm 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình và có đầy đủ cả 4 phân môn, Hội đồng biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong Danh sách bài đề xuất và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, Bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Hình học, Bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Tổ hợp, Bài 3 là bài khó thuộc phân môn Số học, Bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Số học, Bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Đại số và Bài 6 là bài khó thuộc phân môn Tổ hợp. Các bài toán trong đề thi IMO 2016 được đề xuất tương ứng bởi Vương quốc Bỉ, Australia, CHLB Nga, Luxembourg, CHLB Nga và CH Séc. Các tác giả của các bài toán là *Art Waeterschoot*, *Trevor Tao*, *Alexander Gaifullin*, *Gerhard Woeginger*, *Nazar Agakhanov* và *Ilya Bogdanov* (hai tác giả cho Bài 5) và *Josef Tkadlec*. Tác giả của Bài 2 trong đề thi IMO, *Trevor Tao*, là người em trai út của thiên tài Toán học *Terence Tao*, người trẻ nhất trong lịch sử đoạt Huy chương Fields. Tuy nhiên, điều không phải ai cũng biết về người em *Trevor* ít hơn *Terence* 7 tuổi là anh bị xác định mắc chứng tự kỷ ngay từ

nhỏ. Với những nỗ lực phi thường, anh đã lấy bằng Tiến sĩ Toán học tại Đại học Flinder, nơi người anh thiên tài của mình đã học tập và lấy bằng Thạc sĩ. Trevor không chỉ giỏi toán mà còn chơi cờ vua rất giỏi (đạt chuẩn Kien tướng Quốc tế) và cũng phát triển rất tốt về năng khiếu âm nhạc. Câu chuyện kỳ kỳ của Trevor Tao cho chúng ta thấy nếu được thụ hưởng môi trường giáo dục phù hợp, người mắc chứng tự kỷ vẫn có thể cống hiến tốt cho xã hội. Dưới đây là phương án tiếng Việt của Đề thi IMO 2016:

Ngày thi thứ nhất, 11/7/2016

Bài 1. Cho tam giác BCF vuông tại B . Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng CF sao cho $FA = FB$ và F nằm giữa A và C . Lấy điểm D sao cho $DA = DC$ và AC là phân giác của $\widehat{DAB}$. Lấy điểm E sao cho $EA = ED$ và AD là phân giác của $\widehat{EAC}$. Gọi M là trung điểm của CF . Gọi X là điểm sao cho $AMXE$ là hình bình hành ($AM \parallel EX$ và $AE \parallel MX$). Chứng minh rằng các đường thẳng BD , FX và ME đồng quy.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n để có thể điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông $n \times n$ một chữ cái I , M hoặc O sao cho:

- Ở mỗi hàng và ở mỗi cột, có đúng một phần ba số ô được điền chữ I , đúng một phần ba số ô được điền chữ M và đúng một phần ba số ô được điền chữ O ; đồng thời
- Ở mỗi đường chéo mà số ô vuông con nằm trên đường chéo đó là một bội của 3, có đúng một phần ba số ô được điền chữ I , đúng một phần ba số ô được điền chữ M và đúng một phần ba số ô được điền chữ O .

Chú ý. Giả sử tất cả các hàng, cũng như tất cả các cột, của bảng ô vuông $n \times n$ được đánh số thứ tự lần lượt bởi các số nguyên từ 1 đến n . Khi đó, mỗi ô vuông con của bảng tương ứng với một cặp số nguyên dương (i, j) , trong đó $1 \leq i, j \leq n$. Với $n > 1$, bảng có $4n - 2$ đường chéo, được chia thành hai loại. Mỗi đường chéo loại 1 là một đường gồm tất cả các ô (i, j) mà $i + j$ là hằng số; mỗi đường chéo loại 2 là một đường gồm tất cả các ô (i, j) mà $i - j$ là hằng số.

Bài 3. Cho $P = A_1 A_2 \dots A_k$ là một đa giác lồi trong mặt phẳng tọa độ. Tất cả các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_k$ đều có tọa độ nguyên và cùng nằm trên một đường tròn. Ký hiệu S là diện tích của P . Cho n là một số nguyên dương lẻ mà bình phương độ dài mỗi cạnh của P là một số nguyên chia hết cho n . Chứng minh rằng $2S$ là một số nguyên chia hết cho n .

Ngày thi thứ hai, 12/7/2016

Bài 4. Một tập hợp các số nguyên dương được gọi là **tập hương** nếu tập đó có ít nhất hai phần tử và mỗi phần tử của nó có ước nguyên tố chung với ít nhất một trong các phần tử còn lại. Đặt $P(n) = n^2 + n + 1$. Hãy tìm số nguyên dương b nhỏ nhất sao cho tồn tại số nguyên không âm a để tập hợp $\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$ là một tập hương.

Bài 5. Người ta viết lên bảng phương trình $(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$, với 2016 nhân tử bậc nhất ở mỗi vế. Hãy tìm số nhân tử trong số 4032 nhân tử bậc nhất nêu trên sao cho ở mỗi vế còn lại ít nhất một nhân tử và phương trình thu được không có nghiệm thực.

Bài 6. Trong mặt phẳng, cho $n \geq 2$ đoạn thẳng sao cho hai đoạn thẳng bất kỳ cắt nhau tại một điểm nằm trong mỗi đoạn và không có ba đoạn nào đồng quy. Với mỗi đoạn thẳng, thầy Minh chọn một đầu mút của nó rồi đặt lên đó một con éch, sao cho mặt éch hướng về đầu mút còn lại. Sau đó thầy vỗ tay $n-1$ lần. Mỗi lần thầy vỗ tay, mỗi con éch ngay lập tức nhảy đến giao điểm gần nhất trên đoạn thẳng của nó. Tất cả các con éch đều không thay đổi hướng nhảy của mình trong toàn bộ quá trình nhảy. Thầy Minh muốn đặt các con éch sao cho sau mỗi lần thầy vỗ tay, không có hai con nào nhảy đến cùng một giao điểm.

a) Chứng minh rằng thầy Minh luôn thực hiện được ý muốn của mình nếu n là số lẻ.

b) Chứng minh rằng thầy Minh không thể thực hiện được ý muốn của mình nếu n là số chẵn.

Sau khi biểu quyết xong đề thi cho IMO 2016, Hội đồng thống nhất các nước có quyền chọn tên riêng trong Bài 6 thay cho tên *Geof* ở bản tiếng Anh. Nhiều nước đã chọn các tên khác như Nga chọn *Ivan*, Đức chọn *Lisa*, Ba Lan chọn *Fredek*. Tác giả bài báo và thầy *Nguyễn Chu Gia Vượng* đã thống nhất đưa tên thầy *Nguyễn Khắc Minh* vào đề thi. Đó cũng là một hành động nhỏ mà chúng tôi, những người trưởng thành từ phong trào Olympic Toán muốn tri ân thầy *Nguyễn Khắc Minh*, người trong suốt 20 năm qua, đã có những đóng góp bền bỉ cho phong trào Olympic Toán của Việt Nam.

III. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2016, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

• Huy chương Vàng (HCV): Từ 29 đến 42 điểm;

• Huy chương Bạc (HCB): Từ 22 đến 28 điểm;

• Huy chương Đồng (HCD): Từ 16 đến 21 điểm.

Theo đó, tại IMO 2016 có 280 học sinh được trao Huy chương; gồm: 44 học sinh được trao HCV, trong đó có 1 học sinh đạt điểm tuyệt đối 42/42; 101 học sinh được trao HCB và 135 học sinh được trao HCD. Cả 6 thí sinh của Đoàn Việt Nam đều được trao Huy chương, gồm 1 em được trao HCV, 4 em được trao HCB và 1 em được trao HCD. Kết quả chi tiết của các học sinh Đoàn Việt Nam như bảng dưới.

Với tổng điểm 151, Đoàn Việt Nam đứng thứ 11 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2016, sau các Đoàn: Mỹ (214 điểm), Hàn Quốc (207 điểm), Trung Quốc (204 điểm), Singapore (196 điểm), Đài Loan (175 điểm), CHDCND Triều Tiên (168 điểm), CHLB Nga (165 điểm), Vương quốc Anh (165 điểm), chủ nhà HongKong (161 điểm) và Nhật Bản (156 điểm).

Stt	Họ và Tên	Điểm thi							HC
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	Đào Vũ Quang	7	7	0	7	4	2	27	Bạc
2	Vũ Xuân Trung	7	7	0	7	7	3	31	Vàng
3	Hoàng Anh Dũng	7	3	0	7	7	0	24	Bạc
4	Phạm Nguyễn Mạnh	7	0	0	7	7	0	26	Bạc
5	Lê Nhật Hoàng	7	0	1	5	4	0	24	Bạc
6	Vũ Đức Tài	0	1	0	7	4	0	19	Đồng

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 3)

Problem T9/471. Let a, b, c be three positive numbers such that $a+b+c=abc$. Prove the following inequality

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} + \sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 4.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/471. A school organizes 7 summer classes. Each student in the school attend at least one class and each class has exactly 40 students. Besides, for any two classes, there are no more than 9 students attending both of them. Prove that the number of students in that school is at least 120.

Problem T11/471. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$f(xy) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + (x - y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/471. Given a triangle ABC and let I be its incenter. Assume that Δ is the line which goes through I and is perpendicular to AI . The points E and F belong to Δ such that $\widehat{EBA} = \widehat{FCA} = 90^\circ$. The points M and N belong to BC such that $ME \parallel NF \parallel AI$. Prove that the circumcircles of the triangles ABC and AMN are tangent to each other.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 12

Problem. Given a closed curve with equation $(x + 2y)^2 + 3(x - y)^2 = 27$. Find the tangent lines to the curve at the y -intercepts of it.

Solution. First we find the y -intercepts of the curve. When $x = 0$, we get $4y^2 + 3y^2 = 27$. Thus two y -intercepts are $\left(0; 3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ and $\left(0; -3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.

Now, we need to find the gradient of the lines. In this case it is not easy to express y as a function of x explicitly, but we can use the technique which is called implicit differentiation.

Differentiating both sides of the given equation with respect to x , we get:

$2(x + 2y)(1 + 2y') + 6(x - y)(1 - y') = 0$
(notice that we used the chain rule). Thus $y' = \frac{4x - y}{x - 7y}$. Therefore the values of y' at the

points $\left(0; 3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ and $\left(0; -3\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ both equal to $\frac{1}{7}$.

So the tangent lines are

$$y = \frac{1}{7}x + 3\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ and } y = \frac{1}{7}x - 3\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

TỪ VỰNG

closed curve	: đường cong đóng
tangent line	: đường tiếp tuyến
y-intercept	: giao điểm với trục tung (của một đường cong)
gradient of a line	: hệ số góc của một đường thẳng
explicitly	: một cách tường minh
implicit differentiation	: quá trình lấy đạo hàm hàm ẩn
differentiating both sides	: đạo hàm hai vế (của một phương trình)
the chain rule	: quy tắc đạo hàm hàm hợp

NGUYỄN PHÚ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)



Bài toán. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn

$$P(0) = 0 \text{ và } P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1.$$

Lời giải. Xét dãy số sau: $a_0 = 0$, và $a_{i+1} = a_i^2 + 1$ với $i > 0$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $P(a_i) = a_i$ với mọi i . Từ đó có thể kết luận $P(x) = x$ vì chúng bằng nhau tại vô hạn điểm.

Từ giả thiết có $P(a_0) = a_0$, giả sử $P(a_i) = a_i$. Khi đó $P(a_{i+1}) = P(a_i^2 + 1) = P(a_i)^2 + 1 = a_i^2 + 1 = a_{i+1}$.

Do đó, theo nguyên lý quy nạp ta có $P(a_i) = a_i$ với mọi i . Vậy $P(x) = x$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài sớm đến Tòa soạn: **Vĩnh Phúc:** Lê Đức Thái, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hưng Yên:** Hoàng Văn Thái, 10A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Dương Văn Minh, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Bình Định:** Lê Phạm Thủy Tiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Vĩnh Long:** Lê Minh Quân, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (Hà Nội)





Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 471 (9.2016)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Vũ Hữu Chín – Ứng dụng về tính chất của dãy tỉ số bằng nhau. (Tiếp theo kỳ trước)

5 Giải đáp đố vui ngày hè (Đợt 1)

6 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

7 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

10 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia

Phạm Trọng Thư – Giải Bất phương trình vô tỉ bằng những phương pháp thông dụng.

15 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 1

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/471 ..., T12/471, L1/471, L2/471.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

27 Diễn đàn dạy học Toán

Nguyễn Tiên Tiến – Một cách phân tích biểu thức đẳng cấp bậc hai hai biến và ứng dụng.

31 Diễn đàn phương pháp giải toán

Trần Quang Hùng – Phép đối xứng trục trong thực hành giải toán. (Tiếp theo kỳ trước)

35 Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 57 năm 2016

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 12

Bài dịch số 9 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Sai ở đâu?

Lê Thế Thông: $1 = 0$?

Ảnh bìa 1: Đoàn Việt Nam tại Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 57 năm 2016.

Biên tập: LÊ MAI

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MAI ANH

MỘT SỐ HÌNH ẢNH HOẠT ĐỘNG CỦA THẦY VÀ TRÒ TRƯỜNG THPT DƯƠNG QUẢNG HÀM



Đồng chí Đinh Thế Huynh - Ủy viên bộ chính trị, Bí thư trung ương Đảng cùng lãnh đạo Huyện Văn Giang với Thầy và trò nhà trường



Ban chấp hành Đảng bộ nhà trường nhiệm kỳ 2012-2015



Các đồng chí lãnh đạo với giáo viên tiêu biểu trong lễ kỷ niệm 45 năm ngày Bác Hồ gửi thư cho ngành giáo dục



Anh hùng phi công Phạm Ngọc Lan với Thầy, trò nhà trường trong buổi tọa đàm nhân chứng lịch sử với thế hệ trẻ Dương Quảng Hàm



Vinh danh học sinh trúng tuyển Đại học trong Đại hội Khuyến học lần thứ IV nhiệm kỳ 2015 - 2020



Văn nghệ chào mừng Liên hoan Anh ngữ Dương Quảng Hàm lần thứ I - năm 2015



TRƯỜNG THPT DƯƠNG QUẢNG HÀM 15 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



ThS. Nguyễn Văn Thiều
Bí thư đảng ủy, Hiệu trưởng nhà trường



Các đại biểu và tập thể sư phạm nhà trường trong buổi Lễ
công bố quyết định bổ nhiệm hiệu trưởng nhiệm kỳ 2013-2018

Trường THPT Dương Quảng Hàm, Tỉnh Hưng Yên tọa bên tả ngạn Sông Hồng, tiếp giáp với thủ đô Hà Nội, nơi phát tích mỗi tỉnh duyên khoáng cổ Chủ Đổng Tử - Tiên Dung. Đây là mảnh đất có truyền thống văn hiến lâu đời, nơi sinh ra nhiều anh hùng hào kiệt, danh nhân văn hóa lớn của dân tộc. Trường được thành lập ngày 27/9/2001. Trải qua 15 năm xây dựng và phát triển trường đã gặt hái được nhiều thành tích đáng khích lệ, đặc biệt được Chủ tịch nước tặng Huân chương lao động hạng III năm 2011 và trở thành địa chỉ giáo dục đáng tin cậy của quê hương Xứ Nhàn.

Trước yêu cầu đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục đào tạo, Trường THPT Dương Quảng Hàm phấn đấu đến năm 2020 trở thành đơn vị hàng đầu về chất lượng giáo dục vùng Châu thổ Sông Hồng, địa chỉ rèn đức, luyện tài, bồi dưỡng các trường Đại học, cơ sở dạy nghề trong nước và Quốc tế bằng các phương tiện hiệu quả, đặc biệt là ngoại ngữ và tin học, đáp ứng hội nhập Quốc tế. Hướng theo sứ mệnh, mục tiêu đó, Ban giám hiệu luôn quan tâm và nỗ lực giáo dục toàn diện cho học sinh, triển khai kế hoạch xây dựng trường điển hình đổi mới dạy học ngoại ngữ theo đề án NNQO 2020, dạy học theo định hướng phát triển năng lực người học và giáo dục kĩ năng sống.

Trong chặng đường 15 năm qua, nhà trường thường xuyên được UBND Tỉnh, Sở Giáo dục và Đào tạo quan tâm, đảm bảo các điều kiện tốt nhất phục vụ hoạt động dạy và học. Đến nay 100% các phòng học, phòng bộ môn, phòng ban chức năng đều được trang bị máy chiếu, máy vi tính, ... đáp ứng việc ứng dụng công nghệ thông tin vào hoạt động dạy học. Đội ngũ cán bộ, giáo viên, học sinh nhà trường không ngừng phát triển về số lượng, chất lượng nên những năm qua nhà trường đã thu hoạch được những thành quả đáng ghi nhận: Trường có 66 cán bộ giáo viên, trong đó 2/3 đạt danh hiệu giáo viên dạy giỏi các cấp, hơn 1/4 giáo viên có trình độ trên chuẩn; đội tuyển học sinh giỏi cấp tỉnh luôn dẫn đầu khối các trường THPT không chuyên; nhiều năm có học sinh đỗ thủ khoa đại học; nhà trường liên tiếp được Bộ Giáo dục và Đào tạo xếp trong top 200 trường THPT có điểm thi đại học cao nhất cả nước. Năm 2010 nhà trường được công nhận trường đạt chuẩn Quốc gia. Bên cạnh thành tích cao về chất lượng giáo dục, nhà trường còn chú trọng các hoạt động trải nghiệm sáng tạo, giáo dục kĩ năng sống, tổ chức cho học sinh giao lưu với các trường THPT trong và ngoài

tỉnh, với nhân chứng lịch sử (Giáo sư Lê Thi - cô gái kéo cò trong ngày Quốc khánh 2/9/1945; anh hùng Phạm Ngọc Lan - chiến sĩ không quân đầu tiên bắn hạ máy bay Mi trên bầu trời Hàm Rồng, Thanh Hóa), thăm hỏi các bà mẹ Việt Nam anh hùng, chăm sóc nghĩa trang liệt sĩ và di tích lịch sử văn hóa, ...

Thực hiện chủ trương xã hội hóa giáo dục của Đảng và Nhà nước, ngày 30 tháng 4 năm 2002 Hội khuyến học Dương Quảng Hàm được thành lập do Anh hùng lao động, nhà giáo Nhân dân, Giáo sư Dương Trọng Bái làm chủ tịch danh dự cùng với Ban đại diện cha mẹ học sinh, Hội khuyến học Dương Quảng Hàm đã đồng hành trong suốt quá trình xây dựng và phát triển của nhà trường. Từ khi thành lập đến nay, Hội đã huy động được các tổ chức, cá nhân ủng hộ tinh thần, vật chất trị giá 1,866 tỷ đồng để nhà trường tăng cường cơ sở vật chất, vinh danh khen thưởng thầy giỏi, trò giỏi, cấp học bổng cho học sinh gia đình chính sách và học sinh vượt khó vươn lên trong học tập. Hội khuyến học Dương Quảng Hàm đã được TW Hội khuyến học Việt Nam, UBND Tỉnh và Hội khuyến học Tỉnh Hưng Yên tặng nhiều bằng khen và giấy khen về thành tích hoạt động khuyến học.

Năm học 2015-2016 là năm diễn ra nhiều sự kiện, các ngày lễ lớn của dân tộc, thầy và trò trường Dương Quảng Hàm đã phát động các phong trào thi đua và gặt hái được nhiều thành tích ấn tượng: 16 đề tài nghiên cứu khoa học của giáo viên được xếp loại cấp ngành; 5/9 đội tuyển học sinh giỏi các môn văn hóa được xếp Nhất đồng đội cấp Tỉnh; 63 học sinh đạt giải trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, 11 học sinh đạt giải học sinh giỏi Quốc gia, tăng 16 giải so với năm học 2014-2015.

Đạt được những thành tích đáng tự hào đó, phần lớn nhờ sự quan tâm, hỗ trợ của các cấp lãnh đạo, các ban ngành, các tổ chức đoàn thể, đặc biệt là sự nỗ lực phấn đấu không ngừng của lãnh đạo, giáo viên, học sinh nhà trường. Với chặng đường 15 xây dựng và phát triển, trường THPT Dương Quảng Hàm đã giữ trọn niềm tin của nhân dân, phụ huynh và các cấp lãnh đạo. Hướng tới kỉ niệm 15 năm ngày thành lập trường (27/9/2001 - 27/9/2016) thầy và trò nhà trường tiếp tục đẩy mạnh học tập và làm theo tư tưởng, đạo đức, phong cách Hồ Chí Minh, ra sức thi đua dạy tốt, học tốt, chinh phục những đỉnh cao tri thức mới, góp phần đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục đào tạo, đáp ứng công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.