



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2016
Số 468

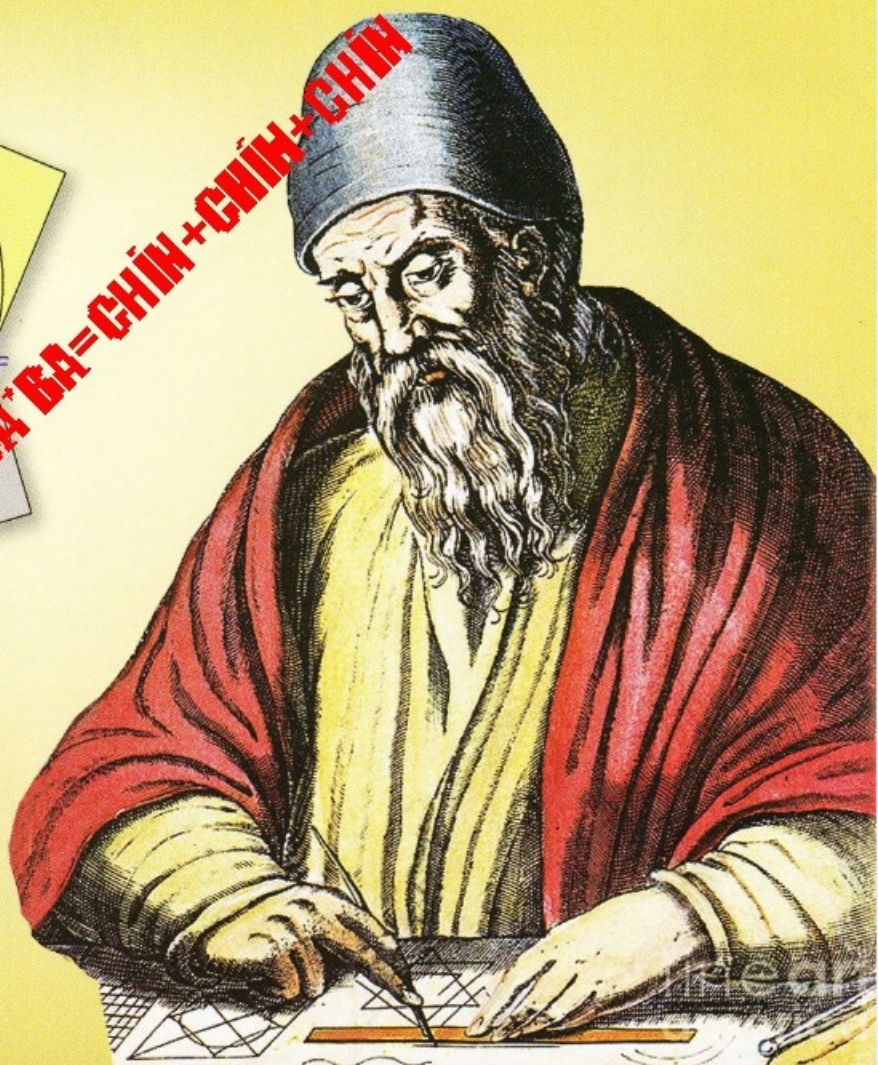
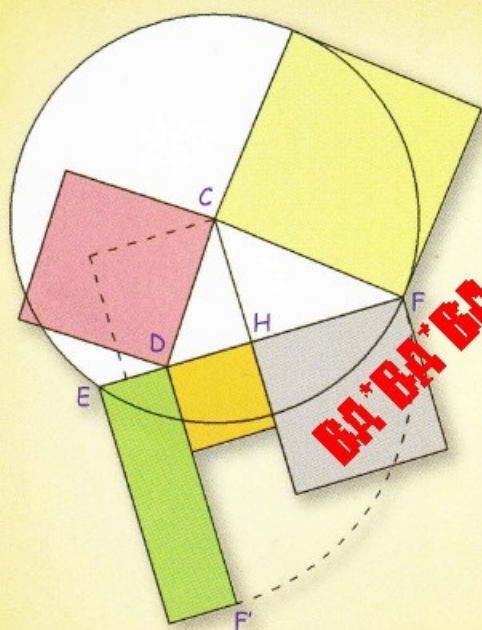
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



"There is no royal road to Geometry."

- Euclid -

<https://ieulun.hopto.org>



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu

Bộ Từ điển Bách khoa Britannica

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam vừa cho ra mắt phiên bản tiếng Việt của cuốn Từ điển Bách khoa Britannica của Mỹ.

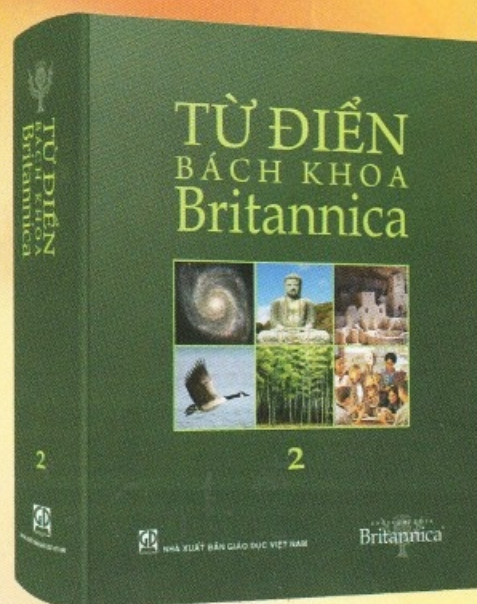
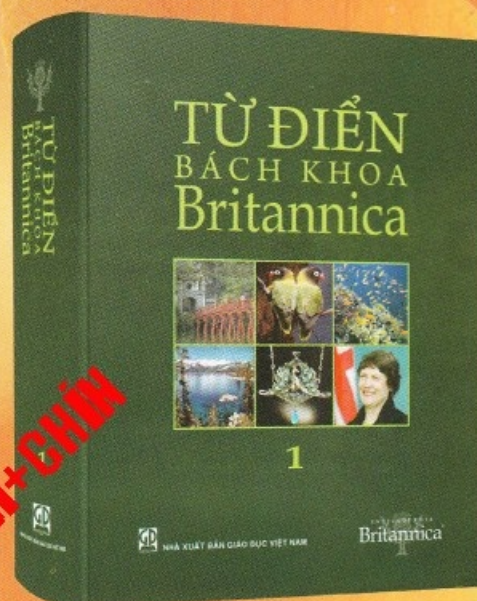
Từ điển Bách khoa Britannica gồm 25.000 mục từ, 2.500 hình minh họa và bản đồ, 51 lĩnh vực khoa học và đời sống, gần 300 mục từ về Việt Nam do các tác giả Việt Nam biên soạn theo thỏa thuận với phía Mỹ, Công ty Bách khoa thư Britannica Mỹ xét duyệt.

Việc chuyển dịch sang tiếng Việt được thực hiện rất công phu, do 54 dịch giả, 62 chuyên gia (trong đó có các chuyên gia từ điển) hiệu đính, thẩm định, biên tập dưới sự chỉ đạo của Hội đồng biên soạn - biên dịch, do ông Ngô Trần Ái - Chủ tịch Hội đồng thành viên - Tổng giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - làm chủ tịch.

Bộ sách gồm hai tập, tổng cộng 3.000 trang. Hình thức trình bày công phu, trang trọng, in bốn màu toàn bộ, đóng bìa cứng chữ chì, ép nhũ vàng, có bìa áo cho từng cuốn, đặt trong hộp cứng, được phát hành từ ngày 10/11/2014.

Giáo sư, Viện sĩ Phạm Minh Hạc, Nguyên Bộ trưởng Bộ Giáo dục - Đào tạo, đánh giá bộ sách đạt ba tiêu chí: Khách quan, Chính xác, "Quyền uy" và việc phát hành Từ điển Bách khoa Britannica tại Việt Nam có thể được coi là một sự kiện lớn trong đời sống văn hoá - giáo dục nước nhà. Theo Giáo sư, mỗi trường nên có một cuốn để các nhà giáo và các em học sinh tham khảo.

Theo Nguyên Bộ trưởng: "Như Lời nhà xuất bản viết: công việc hết sức khó khăn, các dịch giả, người hiệu đính và biên tập viên đã làm việc cật lực trong nhiều năm, tuy thế cũng 'khó tránh khỏi sai sót'.



Bạn đọc có nhu cầu xin liên hệ:

Công ty CP Sách dịch và Từ điển Giáo dục. Tel: 04.38266359 - 0904608096.

Hoặc tìm thêm thông tin tại www.facebook.com/pages/Từ-diễn-Bách-khoa-Britannica/

Bộ sách có giá 3 triệu đồng. Giao sách tận nơi, miễn phí.



LTS. Mùa hè này Toán học và Tuổi trẻ xin mời các bạn tham gia Cuộc thi ĐỒ VUI NGÀY HÈ 2016. Cuộc thi được chia làm hai đợt, đề ra được đăng lần lượt trên Tạp chí TH&TT các số 468 (tháng 6/2016) và 469 (tháng 7/2016). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu thích Toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải ba bài đồ vui Đợt 1 về Tòa soạn trước ngày 31/8/2016 (theo dấu Bưu điện) và lời giải ba bài Đợt 1 sẽ đăng trong TH&TT số 471 (tháng 9/2016).

Bài 1. TÌM ĐẲNG THỨC

Bạn Mùi đến chơi nhà bạn Thân, thấy trên bàn có dòng chữ

$$\overline{ab.aac} = \overline{ac.adb} = \overline{ad.acd} = \overline{ae.aee} = x$$

Bạn Mùi thắc mắc thì bạn Thân trả lời: Bạn hãy thay a, b, c, d, e bởi các chữ số khác nhau trong hệ thập phân để có đẳng thức đúng. Bạn có thể tìm được các đẳng thức số đó không?

DAN QUỲNH (Hà Nội)

Bài 2. QUÂN MÃ ĐI TRÊN BÀN CỜ

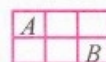


Trên một bàn cờ hình chữ nhật kích thước 6×8 ô vuông có một quân mã đứng ở ô có dấu * như ở hình 1. Quân mã đi theo quy tắc: Từ ô A đến ô B của hình chữ nhật kích thước

2×3 ô vuông theo hướng tùy ý (hình 2). Bạn hãy vẽ một đường đi của quân mã qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô đúng một lần.



Hình 1



Hình 2

Bài 3. SỐ NÀO?

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất được bắt đầu bởi chữ số 1 biết rằng nếu ta chuyển chữ số 1 đến vị trí cuối thì ta được số mới bằng ba lần số ban đầu. Hãy tìm tất cả các số có tính chất này.

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)





Đặt ẩn phụ là một phương pháp hay giúp ta giải quyết được nhiều phương trình vô tỉ. Bài viết này xin giới thiệu tới các bạn cách giải một số dạng phương trình có chứa tam thức bậc hai trong căn khá thú vị và hữu ích.

DẠNG 1. Phương trình có chứa

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \text{ với } a > 0$$

Cách giải: Đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax}+t$.

★Thí dụ 1. Giải phương trình

$$(2x+1)(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{16x+153}{16x-45} = 0.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x^2+1} = -x+t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+t \geq 0 \\ x^2+1 = (t-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+t \geq 0 \\ 2xt = t^2-1. \end{cases} \quad (*)$$

Để thấy $t=0$ không thỏa mãn (*). Khi $t \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+t^2}{2t} \geq 0 \\ x = \frac{t^2-1}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x = \frac{t^2-1}{2t}. \end{cases} \quad (**)$$

Thay vào PT đã cho ta được:

$$\left(\frac{t^2-1}{t}+1\right)t + \frac{8 \cdot \frac{t^2-1}{2t} + 153}{8 \cdot \frac{t^2-1}{2t} - 45} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2+t-1 + \frac{8t^2+153t-8}{8t^2-45t-8} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+t-1)(8t^2-45t-8) + 8t^2+153t-8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^4-37t^3-53t^2+190t=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-2)(t-5)(8t+19)=0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t=2 \text{ hoặc } t=5 \text{ hoặc } t=\frac{-19}{8}.$$

$$\text{Loại } t=0; t=\frac{-19}{8} \text{ ta được } t=2 \text{ và } t=5.$$

$$\text{Thay vào } (**) \text{ ta được } x = \frac{3}{4} \text{ và } x = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Vậy PT đã cho có hai nghiệm là } \frac{3}{4} \text{ và } \frac{12}{5}.$$

★Thí dụ 2. Giải phương trình

$$16x^3 + (8x^2-1)\sqrt{4x^2+1} = \frac{15}{16x+9}.$$

$$\text{Lời giải. ĐK: } x \neq \frac{-9}{16}.$$

PT đã cho tương đương với

$$32x^3 + (16x^2+1)\sqrt{4x^2+1} = \frac{30}{16x+9} \quad (*).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (2x+\sqrt{4x^2+1})^3 &= 8x^3+12x^2\sqrt{4x^2+1} \\ &\quad + 6x(4x^2+1) + (4x^2+1)\sqrt{4x^2+1} \\ &= 32x^3+6x+(16x^2+1)\sqrt{4x^2+1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \text{VT} (*) &= 32x^3+6x+(16x^2+1)\sqrt{4x^2+1} \\ &\quad - 3(2x+\sqrt{4x^2+1}) \\ &= (2x+\sqrt{4x^2+1})^3 - 3(2x+\sqrt{4x^2+1}). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } 2x+\sqrt{4x^2+1} = t \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} = t-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-2x \geq 0 \\ 4x^2+1 = (t-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2x \geq 0 \\ 4tx = t^2-1 \end{cases} \quad (1)$$

Để thấy $t=0$ không thỏa mãn (*).

Xét $t \neq 0$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+t^2}{2t} \geq 0 \\ x = \frac{t^2-1}{4t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x = \frac{t^2-1}{4t} \end{cases}$$

Khi này PT(*) trở thành

$$t^3-3t = \frac{30}{16 \cdot \frac{t^2-1}{4t} + 9} \Leftrightarrow t^3-3t = \frac{30t}{4t^2+9t-4}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3 = \frac{30}{4t^2 + 9t - 4} \quad (\text{do } t \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 3)(4t^2 + 9t - 4) = 30$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 + 9t^3 - 16t^2 - 27t - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+3)(4t^2 + 5t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \\ 4t^2 + 5t + 3 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $4t^2 + 5t + 3 = 0$ có $\Delta < 0$ nên vô nghiệm. Do $t > 0$ nên ta chỉ lấy $t = 2$.

Với $t = 2$ thay vào (1) ta được $x = \frac{3}{8}$.

Vậy PT(*) có nghiệm $x = \frac{3}{8}$.

DẠNG 2. Phương trình có chứa

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ với } c > 0$$

Cách giải: Khi $x \neq 0$ đặt

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$$

★Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1}\right)^3 = \frac{11x^3 + 70x^2}{3}$$

Lời giải.

+ Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn PT đã cho

+ Xét $x \neq 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} = tx - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ \frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = t^2x^2 - 2tx + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ 3t^2x^2 - 7x^2 = 6tx + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ (3t^2 - 7)x = 6t + 2 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{do } x \neq 0).$$

Dễ thấy khi $3t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ không thỏa mãn (1).

$$\text{Khi } t \neq \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t+2}{3t^2-7} \\ t \cdot \frac{6t+2}{3t^2-7} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t+2}{3t^2-7} \\ \frac{3t^2+2t+7}{3t^2-7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t+2}{3t^2-7} \\ t < -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ t > \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases} \quad (2)$$

Với cách đặt trên thay vào PT đã cho ta được

$$(1+tx-1)^3 = \frac{11x^3+70x^2}{3} \Leftrightarrow t^3x^3 = \frac{11x+70}{3} \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow 3t^3x = 11x + 70$$

$$\Leftrightarrow 3t^3 \cdot \frac{6t+2}{3t^2-7} = 11 \cdot \frac{6t+2}{3t^2-7} + 70$$

$$\Leftrightarrow 3(6t+2)t^3 = 11(6t+2) + 70(3t^2-7)$$

$$\Leftrightarrow 18t^4 + 6t^3 - 210t^2 - 66t + 468 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(t-3)(t+2)(3t^2+4t-13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \\ 3t^2 + 4t - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3} \\ t = -2 \end{cases}$$

đổi điều kiện của t ở (2) ta loại

$$t = \frac{-2 + \sqrt{43}}{3}$$

Với các t còn lại thay vào (2) ta được

$$x = 1; x = -2; x = \frac{-3 - 3\sqrt{43}}{13 + 2\sqrt{43}}$$

Vậy PT đã cho có ba nghiệm:

$$x = 1; x = -2; x = \frac{-3 - 3\sqrt{43}}{13 + 2\sqrt{43}}$$

DẠNG 3. Phương trình có chứa

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Cách giải. Khi $x \neq x_1$ đặt

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t.$$

★Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\frac{6x^2+17x+11}{2+\sqrt{(x+1)(6x+11)}} = \frac{27}{28}x + \frac{41}{14}$$

Lời giải. Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq -1$, đặt

$$\sqrt{(x+1)(6x+11)} = (x+1)t \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(6x+11) = (x+1)^2 t^2$$

$$\Rightarrow 6x+11 = (x+1)t^2$$

$$\Rightarrow (t^2 - 6)x = 11 - t^2 \quad (2).$$

Để thấy $t = \pm\sqrt{6}$ không thỏa mãn (2)

Với $t \neq \pm\sqrt{6}$ suy ra $x = \frac{11-t^2}{t^2-6}$ (3), thay vào (1)

ta được:

$$\sqrt{(x+1)(6x+11)} = \frac{5t}{t^2-6} \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t > \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < t \leq 0 \end{cases} \quad (4).$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\left(\frac{5t}{t^2-6}\right)^2}{2+\frac{5t}{t^2-6}} = \frac{27}{28} \cdot \frac{11-t^2}{t^2-6} + \frac{41}{14}$$

$$\Leftrightarrow 700t^2 = (55t^2 - 195)(2t^2 + 5t - 12)$$

$$\Leftrightarrow 140t^2 = (11t^2 - 39)(2t^2 + 5t - 12)$$

$$\Leftrightarrow 22t^4 + 55t^3 - 350t^2 - 195t + 468 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(22t^2 + 143t + 156) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \\ t = \frac{-143 \pm \sqrt{6721}}{44} \end{cases}$$

Kiểm tra điều kiện ở (4) ta lấy $t = 3$ và

$$t = \frac{-143 + \sqrt{6721}}{44}.$$

Thay các giá trị t vào (3) ta được

$$x = \frac{2}{3} \text{ và } x = \frac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}}.$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm:

$$x = \frac{2}{3} \text{ và } x = \frac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}}$$

Ta thử sức thêm với một phương trình phức tạp xem khả năng của cách đặt ẩn phụ khi này chuyển từ tìm nghiệm xấu sang tìm nghiệm đẹp như thế nào nhé!

★ Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})}}{x+1} + \frac{3x+\sqrt{2}}{x+1} \left(\frac{6x+21-5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-12} \right) = -1.$$

Lời giải. Do $x \neq -1$ đặt

$$\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})} = (x+1)t \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(3x+\sqrt{2}) = (x+1)^2 t^2$$

$$\Rightarrow 3x+\sqrt{2} = (x+1)t^2$$

$$\Rightarrow (t^2 - 3)x = \sqrt{2} - t^2 \quad (2).$$

Để thấy $t = \pm\sqrt{3}$ không thỏa mãn (2).

Với $t \neq \pm\sqrt{3}$ suy ra $x = \frac{\sqrt{2}-t^2}{t^2-3}$ (3), thay vào (1)

ta được: $\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-3)t}{t^2-3} \geq 0.$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t < -\sqrt{3} \\ 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases} \quad (4). \text{ Từ cách đặt có } \frac{3x+\sqrt{2}}{x+1} = t^2.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\left(\frac{t}{1} + t^2 \right) \left(\frac{6\frac{\sqrt{2}-t^2}{t^2-3} + 21 - 5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-12} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow t+1+t^2 \left(\frac{(15-5\sqrt{2})t^2 + 21\sqrt{2} - 63}{(4\sqrt{2}-12)(t^2-3)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(4\sqrt{2}-12)(t^2-3) + (15-5\sqrt{2})t^4 + (21\sqrt{2}-63)t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (15-5\sqrt{2})t^4 + (4\sqrt{2}-12)t^3 + (25\sqrt{2}-75)t^2 + (36-12\sqrt{2})t + 36-12\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+2)$$

$$\times \left((15-5\sqrt{2})t^2 + (9\sqrt{2}-27)t + 6\sqrt{2}-18 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \\ t = \frac{9 \pm \sqrt{201}}{10} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện (4) ta chỉ lấy $t = 1$ và

$t = -2$. Suy ra $x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$; $x = \sqrt{2}-4$ là tất cả

các nghiệm của PT đã cho.

(Xem tiếp trang 27)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT chuyên Lê Khiết - TỈNH QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 467, tháng 5 năm 2016)

Bài 1. a) ĐK: $x \geq 3$. Ta có

$$P = \frac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x-3}+\sqrt{x}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x})}{x-3-x} + \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$$

$$= x - 2\sqrt{x-3}.$$

$$P > 2 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-3} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 4. \end{cases}$$

b) PT hoành độ giao điểm của (P): $y = -x^2$ và (d): $y = mx - 1$ là $x^2 + mx - 1 = 0$. (*)

Hai hệ số a và c của (*) trái dấu nên (*) luôn có hai nghiệm trái dấu. Vậy đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt (có hoành độ x_1, x_2). Do $x_1 x_2 = -1$ nên

$$|x_1 - x_2| = \left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = |x_1| + \left| \frac{1}{x_1} \right| \geq 2.$$

Bài 2. a) Với $a = 1$ không thỏa mãn. Vậy $a \neq 1$.

Đề $\frac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên thì $a^2-2 \vdots ab+2$

$$\Rightarrow b(a^2-2) = a(ab+2) - 2(a+b)$$

$$\Rightarrow 2(a+b) \vdots ab+2.$$

Do đó tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ để $2(a+b) = k(ab+2)$.

Nếu $k \geq 2$ thì $a+b \geq ab+2$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) + 1 \leq 0, \text{ vô lý.}$$

Suy ra $k = 1$ và $2(a+b) = ab+2$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ b-2=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-2=2 \\ b-2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}. \text{ Ta chọn được cặp số}$$

$(a; b) = (4; 3)$ thỏa mãn bài toán.

b) $2^a = b^c + 1$ (1). Do $a > 1$ nên $2^a \vdots 4$.

Từ (1) suy ra b là số nguyên dương lẻ. Giả sử

$$b = 2n + 1 \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Nếu c là số nguyên dương chẵn, đặt $c = 2m$ với

$$m \in \mathbb{Z}^+ \text{ thì ta có: } b^c = (b^2)^m = ((2n+1)^2)^m$$

$$= (4n^2 + 4n + 1)^m = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra $2^a = b^c + 1 = 4k + 2 \vdots 4$, vô lý.

Do đó c là số nguyên dương lẻ. Đặt $c = 2m + 1$ với $m \in \mathbb{N}$, ta có $2^a = b^c + 1 = b^{2m+1} + 1$

$$= (b+1)(b^{2m} - b^{2m-1} + \dots + b^2 - b + 1) = (b+1)A.$$

Với $b \in \mathbb{Z}^+$, ta cũng có $A \in \mathbb{Z}^+$ và A lẻ.

Suy ra A là ước lẻ của $2^a \Rightarrow A = 1 \Rightarrow b^c + 1 = b + 1 \Rightarrow b^c = b$. Vậy $c = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. a) Ta có: $x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 = -y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) = -y^2$$

$$\Leftrightarrow (S-1)(S+2) = -y^2$$

$$\Rightarrow (S-1)(S+2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq S \leq 1. \text{ Từ đó ta có:}$$

$\min S = -2$ khi $y = 0$ và $x = -5$;

$\max S = 1$ khi $y = 0$ và $x = -2$.

$$\text{b) } (x+4)^2 - 6\sqrt{x^3+3x} = 13. \quad (1)$$

ĐK: $x \geq 0$. Ta nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của (1). Do đó (1) tương đương với

$$x^2 + 8x + 3 - 6\sqrt{x^3+3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{x} + 8 - 6\sqrt{x + \frac{3}{x}} = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{x + \frac{3}{x}} \geq \sqrt{2\sqrt{3}}$, ta có (2) trở thành

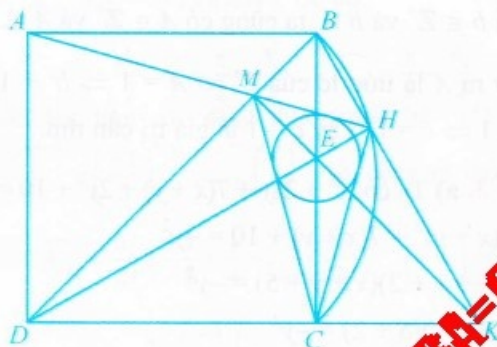
$$t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK } t \geq \sqrt{2\sqrt{3}}).$$

- Với $t = 2$ thì $\sqrt{x + \frac{3}{x}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$;
- Với $t = 4$ thì $\sqrt{x + \frac{3}{x}} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + \sqrt{61} \\ x = 8 - \sqrt{61} \end{cases}$.

Vậy PT(1) có bốn nghiệm x là: 1; 3; $x = 8 + \sqrt{61}$; $x = 8 - \sqrt{61}$.

Bài 4. a) Ta nhận thấy tứ giác $ABHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{ABD} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$) $\Rightarrow \widehat{MHK} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \Rightarrow$ tứ giác $DMHK$ nội tiếp (vì có $\widehat{MDK} + \widehat{MHK} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$) $\Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{DHK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DK}$).

Tam giác DBK có ba đường cao DH , BC , KM mà DH cắt BC tại E nên E là trực tâm của tam giác DBK . Do đó ba điểm M , E , K thẳng hàng.



b) Tứ giác $CMBK$ nội tiếp nên $\widehat{BCE} = \widehat{MKB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MB}$).
Tứ giác $CEHK$ nội tiếp nên $\widehat{ECH} = \widehat{MKH}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EH}$).

Do đó $\widehat{MCE} = \widehat{ECH}$ hay CE là phân giác của $\widehat{MCH}$. Tương tự ta có HE là phân giác của $\widehat{MHC}$. Suy ra E là giao điểm của hai đường phân giác trong của tam giác MCH . Vậy E là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MCH .

c) Ta có $\widehat{AHD} = \widehat{ABD} = 45^\circ$ mà $AD = a$ cố định nên điểm H nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AD .

Khi $E \equiv B$ thì $H \equiv B$, khi $E \equiv C$ thì $H \equiv C$.

Do đó khi E di chuyển trên cạnh BC thì điểm H di chuyển trên cung BC chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AD (cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$).

d) Do $\widehat{MCH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MDE} = \widehat{MCE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{CDE} = 30^\circ$. Trong $\triangle DHK$ vuông tại H ta có

$$HK = DK \cdot \sin 30^\circ = \frac{DK}{2} \quad (1).$$

Trong $\triangle CDE$ vuông tại C ta có

$$CE = CD \cdot \tan 30^\circ = CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2).$$

Dễ thấy $\triangle MDK$ vuông cân tại M nên $\triangle ECK$ vuông cân tại C , suy ra $CE = CK$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$HK = \frac{DK}{2} = \frac{CD + CK}{2} = \frac{CD + CE}{2} = \frac{(3 + \sqrt{3})a}{6}.$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ là các số tự nhiên bất kì. Xét dãy:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{2014} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2014}.$$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2014 ta có các trường hợp sau:

- Nếu có một số hạng của dãy chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.
- Nếu không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2014 thì khi chia 2014 số hạng của dãy cho 2014 có nhiều nhất 2013 số dư khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất hai số hạng của dãy có cùng số dư khi chia cho 2014. Gọi hai số hạng đó là S_i và S_j . Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leq i < j \leq 2014$ thì $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$; $S_j = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_j$. Khi đó $S_j - S_i : 2014$, suy ra $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j : 2014$ (đpcm).

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng – Quảng Ngãi) giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - THPT CHUYÊN VINH PHÚC

NĂM HỌC 2015 - 2016

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (2 điểm) Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x^2 - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases} \quad (\text{với } x, y \text{ là ẩn; } m \text{ là tham số}).$$

- a) Giải hệ phương trình đã cho với $m = 1$.
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3x - y + 1 = 0$.

Câu 2. (2 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y = -3x + m$ (m là tham số). Xác định tất cả các giá trị của tham số m để:

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.
b) Đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 9.

Câu 3. (2 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}.$$

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(\sqrt{x} + 3)P = m$ có nghiệm.

Câu 4. (3 điểm) Cho BC là một dây cung (không phải là đường kính) của đường tròn tâm O bán kính $R > 0$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H (D, E, F là các chân đường cao).

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC .

b) Gọi A' là trung điểm BC , A_1 là trung điểm EF , K là điểm đối xứng với B qua O . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành và $RAA_1 = OA'AA'$.

c) Xác định vị trí của A để $DE + EF + FD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (1 điểm) Cho n là số nguyên dương lớn hơn 2 và kí hiệu $n! = 1.2.3...n$ (tích của n số nguyên dương đầu tiên). Chứng minh rằng: với mỗi số nguyên dương lớn hơn 2 và không vượt quá $n!$ đều phân tích được thành tổng gồm không quá n số nguyên dương, sao cho hai số bất kỳ đều khác nhau và mỗi số này đều là ước số của $n!$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (3 điểm) a) Giải phương trình:

$$\frac{4\sqrt{x}}{4x - 8\sqrt{x} + 7} + \frac{3\sqrt{x}}{4x - 10\sqrt{x} + 7} = 1.$$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^3y = 8 \\ xy^3 - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (2 điểm)

a) Tìm số nguyên tố p để $2p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

b) Trong bảng 11×11 ô vuông ta đặt các số tự nhiên từ 1 đến 121 vào các ô đó một cách tùy ý (mỗi ô đặt duy nhất một số và hai ô khác nhau thì đặt hai số khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông kề nhau (tức là hai ô vuông có chung một cạnh) sao cho hiệu của hai số đặt trong hai ô đó lớn hơn 5.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H và nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi E, F tương ứng là chân các đường cao từ A, B ; gọi M là giao điểm của tia AO và cạnh BC ; gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh CA, AB .

a) Chứng minh rằng $HE.MN = HF.MP$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $EFPN$ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $\frac{BD \cdot BM}{CD \cdot CM} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Câu 4. (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2+a^2b} + \frac{1}{2+b^2c} + \frac{1}{2+c^2a} \geq 1$.

Câu 5. (1 điểm) Điểm $M(x; y)$ của mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên, nếu cả x và y đều là các số nguyên. Tìm số nguyên dương n bé nhất sao cho từ mỗi bộ n điểm nguyên, đều tìm được bộ ba điểm nguyên là đỉnh của một tam giác có diện tích nguyên (trong trường hợp ba điểm thẳng hàng thì coi diện tích tam giác bằng 0).

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường) giới thiệu

HANOI OPEN MATHEMATICAL COMPETITION 2016**(SENIOR SECTION)****NGUYỄN VĂN MẬU**

(Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội) Giới thiệu

Saturday, 12 March 2016 (8h30 - 11h30)

Question 1. How many are there 10-digit numbers composed from the digits 1, 2, 3 only and in which, two neighbouring digits differ by 1.

- (A): 48 (B): 64 (C): 72
(D): 128 (E): None of the above.

Question 2. Given an array of numbers $A = (672, 673, 674, \dots, 2016)$ on table. Three arbitrary numbers $a, b, c \in A$ are step by step replaced by number $\frac{1}{3} \min(a, b, c)$. After 672 times,

on the table there is only one number m , such that
(A): $0 < m < 1$ (B): $m = 1$ (C): $1 < m < 2$
(D): $m = 2$ (E): None of the above.

Question 3. Give two positive numbers a, b such that the condition $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$, then the greatest value of $M = a^2 + b^2 - ab$ is

- (A): $\frac{1}{4}$ (B): $\frac{1}{2}$ (C): 2
(D): 1 (E): None of the above.

Question 4. In Zoo, a monkey becomes lucky if he eats three different fruits. What is the largest number of monkeys one can make lucky having 20 oranges, 30 bananas, 40 peaches and 50 tangerines? Justify your answer.

- (A): 30 (B): 35 (C): 40
(D): 45 (E): None of the above.

Question 5. There are positive integers x, y such that $3x^2 + x = 4y^2 + y$ and $(x - y)$ is equal to

- (A): 2013 (B): 2014 (C): 2015
(D): 2016 (E): None of the above.

Question 6. Let A consist of 16 elements of the set $\{1, 2, 3, \dots, 106\}$, so that the difference of two arbitrary elements in A are different from 6, 9, 12, 15, 18, 21. Prove that there are two elements of A for which their difference equals to 3.

Question 7. Nine points form a grid of size 3×3 . How many triangles are there with 3 vertices at these points?

Question 8. Determine all 3-digit numbers which are equal to cube of the sum of all its digits.

Question 9. Let rational numbers a, b, c satisfy the conditions $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Z}$. Prove that there exist two relative prime numbers m, n such that $abc = \frac{m^2}{n^3}$.

Question 10. Given natural numbers a, b such that $2015a^2 + a = 2016b^2 + b$. Prove that $\sqrt{a-b}$ is a

natural number.

Question 11. Let I be the incenter of triangle ABC and ω be its circumcircle. Let the line AI intersect ω at point $D \neq A$. Let F and E be points on side BC and arc BDC respectively such that $\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2} \widehat{BAC}$. Let X be the second point of intersection of line EI with ω and T be the point of intersection of segment DX with line AF . Prove that $TF \cdot AD = ID \cdot AT$.

Question 12. Let A be point inside the acute angle xOy . An arbitrary circle ω passes through O, A ; intersecting Ox and Oy at the second intersection B and C , respectively. Let M be the midpoint of BC . Prove that M is always on a fixed line (when ω changes, but always goes through O and A).

Question 13. Find all triples (a, b, c) of real numbers such that $|2a + b + c| \leq 1$ and $|ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$.

Question 14. Let $f(x) = x^2 + px + q$, where p, q are integers. Prove that there is an integer m such that $f(m) \mid f(2015) \cdot f(2016)$.

Question 15. Let a, b, c be real numbers satisfying the condition $18ab + 9ca + 29bc = 1$.

Find the minimum value of the expression

$$T = 42a^2 + 34b^2 + 43c^2.$$

HINTS AND SOLUTIONS

Question 1. (B) We solve the problem by counting the numbers satisfying the condition, starting from 1 - digit, 2 - digit, 3 - digit numbers

Digit	1	2	3	4
	1	12	121	1212
	2	21	123	1232
	3	23	212	2121
		32	232	2123
			321	2321
			323	2323
				3212
				3232
Σ	3	4	6	8

We can see that a number ending by 2 in previous column generates 2 numbers for next column (we can add 1 or 3 at the end), but a number ending by 1 or 3 generate 1 number for next column (we can add only 2 at the end). From this, we can make a table. The first row is number of digits, the second row is

the number of k - digit numbers satisfying the condition and ending with 1, 3, the third row is number of k - digit numbers satisfying the condition and ending with 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
1	2	2	4	4	8	8	16	16	32

Question 2. (A). Note that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{\min\{a,b,c\}} = \frac{1}{\frac{1}{3}\min\{a,b,c\}}.$$

So after each operation, the sum of all inverse elements of A is non decreasing.

On the other hand, for every positive integer n , we

have $S := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n} > 1$. Indeed,

$$S = \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2n-k} + \frac{1}{2n+k} \right) = \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{4n}{4n^2 - k^2} > \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \right) > \frac{1}{2n} + \frac{n}{n} > 1.$$

Hence, if on the table there is one number m then

$$\frac{1}{m} > 1, \text{ i.e. } 0 < m < 1.$$

Question 3. (D). We have

$$ab(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^3b^3 \leq ab^5 + a^5b \\ \Leftrightarrow (a^3 + b^3)^2 \leq (a+b)(a^5 + b^5) \quad (1).$$

Combining $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$ and (1), we find

$$a^3 + b^3 \leq a + b \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 1.$$

The equality holds if $a = 1, b = 1$.

Question 4. (D). First we leave tangerines on a table. We have $20 + 30 + 40 = 90$ fruits. As we feed the happy monkey is not more than one tangerine, each monkey eats fruits of these 90 at least 2.

Hence, the monkeys are not more than $\frac{90}{2} = 45$.

We will show how you can bring happiness to 45 monkeys:

5 monkeys eat: orange, banana, tangerine;

15 monkeys eat: orange, peach, tangerine;

25 monkeys eat: peach, banana, tangerine.

At all 45 lucky monkeys - and left five unused tangerines!

Question 5. (E). We have

$$3x^2 + x = 4y^2 + y \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+1) = y^2.$$

We prove that $(x-y; 3x+3y+1) = 1$.

Indeed, if $d = (x-y; 3x+3y+1)$ then y^2 is divisible by d^2 and y is divisible by d ; x is divisible by d , i.e. 1 is divisible by d , i.e. $d = 1$.

Since $x-y$ and $3x+3y+1$ are prime relative then $x-y$ is a perfect square.

Question 6. Divide numbers $1, 2, \dots, 106$ into three groups $X = \{1, 4, 7, \dots, 106\}$,

$Y = \{2, 5, 8, \dots, 104\}$ and $Z = \{3, 6, 9, \dots, 105\}$.

A has 16 elements, so one of the sets X, Y, Z contains at least 6 numbers from A . Without loss of generality, let X contains 6 numbers from A . Let they be $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_6 \leq 106$. Since

$$105 \geq a_6 - a_1 = (a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1),$$

there is an index i for which $0 < a_{i+1} - a_i \leq 21$.

By the choice of X , $a_{i+1} - a_i$ is multiple of 3, so $a_{i+1} - a_i \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$.

Finally, apply the given condition, it follows that $a_{i+1} - a_i = 3$, which was to be proved.

Question 7. We divide the triangles into two types:

Type 1: Two vertices lie in one horizontal line, the third vertex lies in another horizontal lines.

For this type we have 3 possibilities of choosing the first line, 2 possibilities of choosing the 2-nd line. In total we have $3 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$ triangles of first type.

Type 2: Three vertices lie in distinct horizontal lines.

We have 27 triangles of these type. But we should remove degenerated triangles from them.

There are 5 of those (3 vertical lines and two diagonal lines). So, we have $27 - 5 = 22$ triangles of this type. In total, we have $54 + 22 = 76$ triangles.

For those students who know about C_n^k this problem can be also solved as $C_9^3 - 8$ where 8 is the number of degenerated triangles.

Question 8. Let $\overline{abc}$, where $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$$a \neq 0 \text{ and } \overline{abc} = (a+b+c)^3.$$

Note that $100 \leq (a+b+c)^3 \leq 999$ and

$$\sqrt[3]{100} \leq a+b+c \leq \sqrt[3]{999}.$$

Hence $5 \leq a+b+c \leq 9$. If $a+b+c = 5$ then

$$\overline{abc} = (a+b+c)^3 = 5^3 = 125 \text{ and } a+b+c = 8 \text{ (not suitable).}$$

If $a+b+c = 6$ then $\overline{abc} = (a+b+c)^3 = 6^3 = 216$ and $a+b+c = 9$ (not suitable).

If $a+b+c = 7$ then $\overline{abc} = (a+b+c)^3 = 7^3 = 343$ and $a+b+c = 10$ (not suitable).

If $a+b+c = 8$ then $\overline{abc} = (a+b+c)^3 = 8^3 = 512$ and $a+b+c = 8$ (suitable).

If $a+b+c = 9$ then $\overline{abc} = (a+b+c)^3 = 9^3 = 729$ and $a+b+c = 18$ (not suitable).

Conclusion: $\overline{abc} = 512$.

Question 9. Put $a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = t$.

$$\text{We have } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2,$$

then $t \in [0; 3]$.

Since $t \in \mathbb{Z}$ then $t \in \{0; 1; 2; 3\}$. If $t = 0$ then

$a = b = c = 0$ and $abc = 0 = \frac{0}{1}$. If $t = 3$ then

$$(a-1) + (b-1) + (c-1) = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0.$$

That follows $a = b = c = 1$ and $abc = 1 = \frac{1^2}{1^3}$.

If $t = 1$. Without loss of generality, assume that

$$c > 0; a = \frac{m_1}{n_1}; b = \frac{m_2}{n_2}; c = \frac{m_3}{n_3}; d = |n_1 n_2 n_3|.$$

$$\text{Put } \begin{cases} x = ad \\ y = bd \text{ then } x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ and } z > 0. \\ z = cd \end{cases}$$

$$\text{We have } \begin{cases} x + y + z = d(a + b + c) = d \\ x^2 + y^2 + z^2 = d^2(a^2 + b^2 + c^2) = d^2 \end{cases}$$

$$\text{It follows } xy + yz + zx = 0 \Leftrightarrow (z+x)(z+y) = z^2 = c^2 d^2.$$

Hence, there exist $r, p, q \in \mathbb{Z}^*$ such that

$$x + z = rp^2; y + z = rq^2; z = |r|qp; (p, q) = 1; p, q \in \mathbb{Z}^*.$$

On the other hand

$$d = x + y + z = r(p^2 + q^2) - |r|pq > 0 \text{ then } r > 0.$$

$$\text{Hence } \begin{cases} y = rq(q-p) \\ x = rp(p-q) \Rightarrow abc = -\frac{[pq(p-q)]^2}{(p^2 + q^2 - pq)^3} \\ z = rpq \end{cases}$$

$$\text{We prove that } (pq(p-q); p^2 + q^2 - pq) = 1.$$

$$\text{Suppose that } s = (pq(p-q); p^2 + q^2 - pq) \neq 1$$

then $s \mid pq(p-q)$.

Case 1. Let $s \mid p$. Since $s \mid (p^2 + q^2 - pq)$ then $s \mid q$ and $s = 1$ (not suitable).

Case 2. Let $s \mid q$. Similarly, we find $s = 1$ (not suitable).

Case 3. If $s \mid (p-q)$ then

$$s \mid (p-q)^2 - (p^2 + q^2 - pq) \Rightarrow s \mid pq \Rightarrow \begin{cases} s \mid p \\ s \mid q \end{cases} \text{ (not suitable).}$$

$$\text{If } t = 2 \text{ then } a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 2.$$

We reduce it to the case where $t = 1$, which was to be proved.

Question 10. From equality

$$2015a^2 + a = 2016b^2 + b(1), \text{ we find } a \geq b.$$

If $a = b$ then from (1) we have $a = b = 0$ and $\sqrt{a-b} = 0$.

If $a > b$, we write (1) as $b^2 = 2015(a^2 - b^2) + (a-b)$

$$\Leftrightarrow b^2 = (a-b)(2015a + 2015b + 1)(2).$$

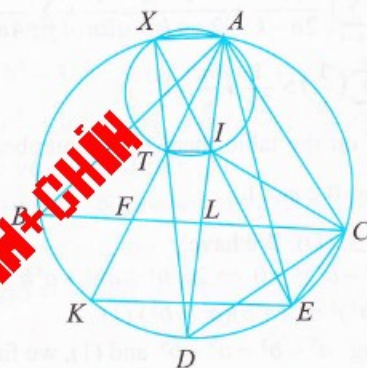
Let $(a, b) = d$ then $a = md; b = nd$, where $(m, n) = 1$.

Since $a > b$ then $m > n$; and put $m - n = t > 0$.

Let $(t, n) = u$ then n is divisible by u ; t is divisible by u and m is divisible by u . That follows $u = 1$ and then $(t, n) = 1$. Putting $b = nd$; $a - b = td$ in (2), we find $n^2 d = t(2015dt + 4030dn + 1)(3)$. From (3) we get $n^2 d$ is divisible by t and compare with $(t, n) = 1$, it follows d is divisible by t . Also from (3) we get $n^2 d = 2015dt^2 + 4030dnt + t$ and then $t = n^2 d - 2015dt^2 - 4030dnt$.

Hence $t = d(n^2 - 2015t^2 - 4030nt)$, i.e. t is divisible by d , i.e. $t = d$ and then $a - b = td = d^2$ and $\sqrt{a-b} = d$ is a natural number.

Question 11. Let the line AF intersect ω at point $K \neq A$ and L be the foot of the bisector of angle BAC .



Since $\widehat{BAK} = \widehat{CAE}$ we have $\widehat{BK} = \widehat{CE}$, hence $KE \parallel BC$. Notice that $\widehat{IAT} = \widehat{DAK} = \widehat{EAD} = \widehat{IXT}$, so the points I, A, X, T are concyclic.

Hence, $\widehat{ITA} = \widehat{IXA} = \widehat{EXA} = \widehat{EKA}$, so $IT \parallel KE \parallel BC$.

Therefore, $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$. Since CI is bisector of $\widehat{ACL}$,

we get $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Furthermore,

$$\widehat{DCL} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}.$$

Hence, the triangles DCL and DCA are similar.

$$\text{Therefore, } \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}.$$

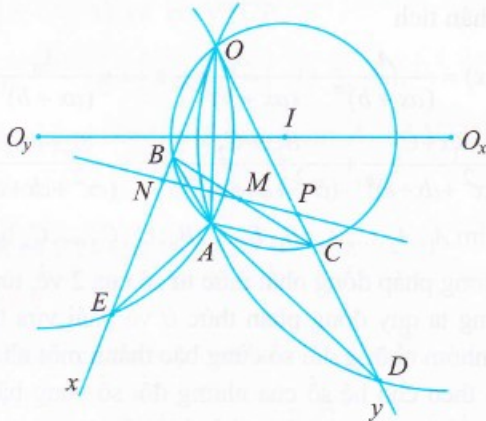
Finally, we have $\widehat{DIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{ICL} + \widehat{LCD} = \widehat{ICD}$. It follows DIC is an isosceles triangle at D .

$$\text{Hence } \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}.$$

Summarizing all these equalities, we get

$$\begin{aligned} \frac{TF}{AT} &= \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD} \\ \Rightarrow \frac{TF}{AT} &= \frac{ID}{AD} \Rightarrow TF \cdot AD = ID \cdot AT \text{ as desired.} \end{aligned}$$

Question 12. Let $(O_x), (O_y)$ be circles passing through O, A and tangent to Ox, Oy , respectively. Circle (O_x) intersects the ray Oy at D , distinct from O and circle (O_y) intersects the ray Ox at E , distinct from O . Let N and P be midpoint of OE and OD , respectively. Then N, P are fixed. We'll show that M, N, P are collinear. For this, it is sufficient to prove that $\frac{NO}{NB} = \frac{PO}{PC}$.



Since (O_x) is tangent to Ox , $\widehat{ADC} = \widehat{AOB}$. Since $OBAC$ is cyclic, $\widehat{ABO} = \widehat{ACD}$. So triangles AOB, ADC are similar.

Therefore $\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{DC}$ (1).

Similarly, $\triangle ABE \sim \triangle ACO$, so $\frac{BE}{CO} = \frac{AB}{AC}$.

From (1) and (2), we deduce that

$$\frac{OB}{CD} = \frac{BE}{OC} \Rightarrow \frac{OB}{BE} = \frac{CD}{OC}.$$

Hence $\frac{OE}{BE} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow \frac{ON}{BE} = \frac{OP}{OC}$.

$$\Rightarrow \frac{ON}{NB} = \frac{ON}{BE - NO} = \frac{OP}{OC - OP} = \frac{OP}{CP}$$

It follows, if NP intersects BC at M , then

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{PC}{PO} \cdot \frac{NO}{NB} = 1 \text{ (by Menelaus' Theorem in triangle } OBC)$$

conclusion $\frac{MB}{MC} = 1$, it follows NP passes through M is midpoint of BC .

Question 13. From the assumptions, we have $|f(\pm 1)| \leq 1, |f(0)| \leq 1$ and

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c \\ f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)] - f(0) \\ b = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)] \\ c = f(0) \end{cases}$$

That follows $4 \leq |2a + b|$

$$\begin{aligned} &= \left| [f(1) + f(-1)] - 2f(0) + \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)] \right| \\ &= \left| \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0) \right| \\ &\leq \frac{3}{2}|f(1)| + \frac{1}{2}|f(-1)| + 2|f(0)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4. \end{aligned}$$

Hence $|2a + b| = 4$ and then

$$\begin{cases} |f(1)| = |a + b + c| = 1 \\ |f(-1)| = |a - b + c| = 1 \\ |f(0)| = |c| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) = (2, 0, -1) \\ (a, b, c) = (-2, 0, 1) \end{cases}$$

It is easily seen that both two triples $(2, 0, -1)$ and $(-2, 0, 1)$ satisfy the required conditions.

Question 14. We shall prove that

$$f[f(x) + x] = f(x)f(x+1) \quad (1).$$

Indeed, we have

$$\begin{aligned} f[f(x) + x] &= [f(x) + x]^2 + p[f(x) + x] + q \\ &= f^2(x) + 2f(x)x + x^2 + pf(x) + px + q \\ &= f(x)[f(x) + 2x + p] + x^2 + px + q \\ &= f(x)[f(x) + 2x + p] + f(x) \\ &= f(x)[f(x) + 2x + p + 1] \\ &= f(x)[x^2 + px + q + 2x + p + 1] \\ &= f(x)[(x+1)^2 + p(x+1) + q] = f(x)f(x+1), \end{aligned}$$

which proves (1). Putting

$$m = f(2015) + 2015 \text{ gives}$$

$$\begin{aligned} f(m) &= f[f(2015) + 2015] = f(2015)f(2015 + 1) \\ &= f(2015)f(2016), \text{ as desired.} \end{aligned}$$

Question 15. We have

$$\begin{aligned} T - 2(18ab + 9ca + 29bc) &= (5a - 3b)^2 + (4a - 3c)^2 \\ &\quad + (4b - 5c)^2 + (a - 3b + 3c)^2 \geq 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

That follows $T \geq 2$. The equality occurs if and only if

$$\begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ 4a - 3c = 0 \\ 4b - 5c = 0 \\ a - 3b + 3c = 0 \\ 18ab + 9ca + 29bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ 4a - 3c = 0 \\ 4b - 5c = 0 \\ 18ab + 9ca + 29bc = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3t, b = 5t, c = 4t \\ (18 \times 15 + 9 \times 12 + 29 \times 20)t^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pm 3}{\sqrt{958}}, b = \frac{\pm 5}{\sqrt{958}}, c = \frac{\pm 4}{\sqrt{958}}.$$



NÉT ĐẸP TRONG GIẢI TOÁN TÍNH TÍCH PHÂN KHI ĐƯA KỸ THUẬT TÁCH TÍCH PHÂN VÀO

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Những năm gần đây, hầu như trong đề thi toán THPT quốc gia thường có bài toán tính tích phân. Đối với học sinh THPT thì tính tích phân là một phần mới và khó trong quá trình học và thi. Không phải bất cứ bài toán tính tích phân nào chúng ta cũng giải được bằng các phương pháp thông thường đã học chẳng hạn phương pháp đổi biến, phương pháp tích phân từng phần,... mà để giải nó ta cần phải phối hợp các phương pháp đó với một số kỹ thuật biến đổi trong đó có kỹ thuật tách tích phân thì hiệu quả mới cao. Về mặt phương pháp luận thì kỹ thuật nêu trên không phải là một phương pháp tính tích phân mà nó chỉ là một kỹ thuật biến đổi nhằm giúp ta chuyển bài toán tính tích phân phức tạp thành nhiều tích phân đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải.

Trong phạm vi bài báo này, tôi chỉ đề cập một số công thức tách tích phân thường gặp nhất trong chương trình toán THPT với hi vọng sẽ giúp ích cho học sinh một phần nào về cách tính tích phân và dụng kỹ thuật nêu trên.

I. CÁCH THỨC TÁCH TÍCH PHÂN

Tách tích phân thường được thấy áp dụng cho các bài toán tính tích phân có phân thức tối giản (tức là bậc của tử nhỏ hơn bậc mẫu, còn nếu bài toán có bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu thì ta chỉ việc lấy tử số chia cho mẫu số). Do giới hạn của nội dung chương trình toán sơ cấp ở cấp THPT nên chúng tôi chỉ trình bày một số công thức tách mang tính phổ biến.

Khi gặp biểu thức $g(x)$ dưới dấu tích phân có dạng:

$$1) g(x) = \frac{f(x)}{(x^m - a)(x^m - b)} \quad (a, b \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{ta phân tích } g(x) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{f(x)}{x^m - a} - \frac{f(x)}{x^m - b} \right).$$

$$2) g(x) = \frac{f(x)}{(ax+b)^m (cx^2+dx+e)^n} \quad (a, b, c, d, e \in \mathbb{R};$$

$m, n \in \mathbb{N}^*$), ta tiến hành:

- Phân tích

$$g(x) = \frac{A_1}{(ax+b)^m} + \frac{A_2}{(ax+b)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(ax+b)^1} + \frac{B_1x+C_1}{(cx^2+dx+e)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(cx^2+dx+e)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(cx^2+dx+e)^1}.$$

- Tìm $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_n; C_1, C_2, \dots, C_n$ bằng phương pháp đồng nhất thức tử số của 2 vế, tức là chúng ta quy đồng phân thức ở vế phải vừa tách rồi nhóm những đối số cùng bậc thành một nhóm, tiếp theo cho hệ số của những đối số cùng bậc ở hai vế bằng nhau ta được hệ nhiều ẩn.

Giải hệ này ta tìm được $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_n; C_1, C_2, \dots, C_n$. Trên cơ sở đó chúng ta đã tách phân thức ban đầu thành $(m+n)$ phân thức nhỏ.

Tuy nhiên ta có thể tìm $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_n; C_1, C_2, \dots, C_n$ bằng cách khác mà chúng tôi sẽ trình bày cho các em ở phần thí dụ minh họa.

$$3) g(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}), \text{ ta phân}$$

$$\text{tích } g(x) = A \left(\frac{c \sin x + d \cos x}{c \sin x + d \cos x} \right) + B \left(\frac{c \cos x - d \sin x}{c \sin x + d \cos x} \right).$$

Việc tìm A, B thực hiện tương tự như mục I.2.

$$4) g(x) = \frac{a \sin x + b \cos x + e}{c \sin x + d \cos x + h}, (a, b, c, d, e, h \in \mathbb{R}),$$

$$\text{ta phân tích } g(x) = A \left(\frac{c \sin x + d \cos x + h}{c \sin x + d \cos x + h} \right) + B \left(\frac{c \cos x - d \sin x}{c \sin x + d \cos x + h} \right) + C \left(\frac{1}{c \sin x + d \cos x + h} \right).$$

Việc tìm A, B, C thực hiện tương tự như mục I.2.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HẠ

1. Tính tích phân hàm số hữu tỉ bằng kỹ thuật tách tích phân

Thí dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(4x^2+16x+15)}$$

Lời giải. Theo công thức tách tích phân ta có:

$$\frac{1}{(x+2)(4x^2+16x+15)} = \frac{1}{(x+2)(2x+3)(2x+5)} \\ = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x+5}$$

Quy đồng rồi bỏ mẫu số chung

$(x+2)(2x+3)(2x+5)$ hai vế ta được:

$$1 = A(2x+3)(2x+5) + B(x+2)(2x+5) \\ + C(x+2)(2x+3) \quad (*)$$

$$\text{hay } 1 = (4A+2B+2C)x^2 + (16A+9B+7C)x \\ + 15A+10B+6C.$$

Đồng nhất thức 2 vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4A+2B+2C=0 \\ 16A+9B+7C=0 \\ 15A+10B+6C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

Như vậy tích phân I sẽ tách thành ba phần nhỏ

$$I = -\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \int_0^1 \frac{dx}{2x+3} + \int_0^1 \frac{dx}{2x+5}$$

$$= -\ln|x+2| \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln|2x+3| \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln|2x+5| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{7}{27} + \ln 2.$$

Nhận xét. Ta có thể tìm A, B, C ở đẳng thức (*) bằng cách cho những giá trị x tùy ý. Để thuận lợi ta thường cho x những giá trị là nghịch đảo của mẫu số. Khi đó ta sẽ tính được các hệ số A, B, C . Chẳng hạn

- Cho $x = -2 \Rightarrow 1 = A(-1) \Rightarrow A = -1$.

- Cho $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow B = 1$.

- Cho $x = -\frac{5}{2} \Rightarrow C = 1$.

2. Tính tích phân bằng cách phối hợp kỹ thuật tách tích phân với phương pháp đổi biến số

Thí dụ 2. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_{-1}^0 \frac{|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx \\ + \int_0^1 \frac{|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx \quad (1)$$

$$\text{Xét tích phân } J = \int_{-1}^0 \frac{|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: với $x = -1$ thì $t = 1$; với $x = 0$ thì $t = 0$.

$$\text{Khi đó } J = -\int_1^0 \frac{|-t|}{(2016^{-t}+1)(t^4-t^2-12)} dt \\ = \int_0^1 \frac{|x| \cdot 2016^x}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$I = \int_0^1 \frac{|x| \cdot 2016^x}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx \\ + \int_0^1 \frac{|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx \\ = \int_0^1 \frac{(2016^x+1)|x|}{(2016^x+1)(x^4-x^2-12)} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4-x^2-12} dx$$

Lấy $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$. Đổi cận: với $x = 0$ thì $u = 0$; với $x = 1$ thì $u = 1$. Khi đó

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{u^2-u-12} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{(u+3)(u-4)} \\ = \frac{1}{14} \left(\int_0^1 \frac{du}{u-4} - \int_0^1 \frac{du}{u+3} \right) = \frac{1}{14} \ln \left| \frac{u-4}{u+3} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \ln \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Do biểu thức dưới dấu tích phân của bài toán nêu trên là một phân thức nên ta thường có 2 hướng giải quyết đó là rút gọn hoặc tách ra thành những tích phân nhỏ. Ở bài toán tích phân trên ta chọn theo hướng thứ hai là phân tích nó thành tổng của hai tích phân. Sau đó ta chọn một tích phân trong phân tích đó để sử dụng phương pháp đổi biến nhằm chuyển bài toán đã cho về bài toán mới có cách giải đơn giản hơn thông qua kỹ thuật tách tích phân ở mục I.1.

Thí dụ 3. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{4\sqrt{3+e^x}+3e^x+10} dx.$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+e^x} \Rightarrow t^2 = 3+e^x \Rightarrow 2tdt = e^x dx.$$

Đổi cận: với $x=0$ thì $t=2$; với $x=\ln 6$ thì $t=3$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{2tdt}{4t+3(t^2-3)+10} = 2 \int_2^3 \frac{tdt}{3t^2+4t+1} \\ &= 2 \int_2^3 \frac{tdt}{(t+1)(3t+1)} = 2 \int_2^3 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3t+1} \right) dt \\ &= \left(\ln|t+1| - \frac{1}{3} \ln|3t+1| \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Thí dụ 4. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx.$$

Lời giải. Theo công thức I.4

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= A \left(\frac{4 \sin x + 3 \cos x + 5}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) \\ &+ B \left(\frac{4 \cos x - 3 \sin x}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) + C \left(\frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) \\ \Leftrightarrow \sin x + 7 \cos x + 6 &= (4A - 3B) \sin x \\ &+ (3A + 4B) \cos x + (5A + C). \end{aligned}$$

Đồng nhất thức 2 về ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4A - 3B = 1 \\ 3A + 4B = 7 \\ 5A + C = 6 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = 1.$$

Như vậy tích phân I sẽ tách thành ba phần

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(4 \sin x + 3 \cos x + 5)}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \\ &= \left(x + \ln|4 \sin x + 3 \cos x + 5| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + J = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + J \end{aligned}$$

với $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$. Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \text{ Đổi cận: với } x=0 \text{ thì } t=0; \text{ với}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t=1. \text{ Khi đó } J = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + \frac{1}{6}.$$

3. Tính tích phân bằng cách phối hợp kỹ thuật tách tích phân với phương pháp tích phân từng phần

Thí dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(4x^2 + 16x + 15)}{(x+2)^3} dx.$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(4x^2 + 16x + 15) \\ dv = \frac{dx}{(x+2)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{8(x+2)}{4x^2 + 16x + 15} dx \\ v = -\frac{1}{2(x+2)^2} \end{cases}.$$

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln(4x^2 + 16x + 15)}{2(x+2)^2} \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(4x^2 + 16x + 15)} \\ &= -\frac{\ln 35}{18} + \frac{\ln 15}{8} + 4J. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } J = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(4x^2 + 16x + 15)} = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{27} + \ln 2$$

(kết quả bài toán tích phân ở thí dụ 1) nên

$$I = -\frac{\ln 35}{18} + \frac{\ln 15}{8} + \ln \frac{784}{729}.$$

Nhận xét. Cần nhận đầu tiên về bài tích phân này thuộc loại khá quen thuộc, đó là sử dụng phương pháp tích phân từng phần để giải quyết. Sau khi đã áp dụng phương pháp trên vào bài toán thì trong bài toán lại xuất hiện thêm bài tính tích phân mới, để giải quyết nó các em cần phải nắm vững kỹ thuật tách tích phân được nêu ở I.2.

4. Tính tích phân bằng cách phối hợp kỹ thuật tách tích phân với nhiều phương pháp khác nhau

Thí dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x + 3} \left(\sqrt{e^x - 1} + \frac{x}{e^x + 3} \right) dx.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx + \int_0^{\ln 5} \frac{x e^x}{(e^x + 3)^2} dx = J + K.$$

• Tính $J = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x - 1}, x \in [0; \ln 5]$$

$$\Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx.$$

Đổi cận: với $x=0$ thì $t=0$; với $x=\ln 5$ thì $t=2$.

$$\text{Khi đó } J = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 dt - 8 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4} \\ = 4 - 8 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4} = 4 - 8A.$$

$$\text{- Tính } A = \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4}.$$

Đặt $t = 2 \tan u \Rightarrow dt = 2(1 + \tan^2 u)du$. Ta có

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 u)}{4(1 + \tan^2 u)} du = \frac{u}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Suy ra $J = 4 - \pi$.

$$\bullet \text{ Tính } K = \int_0^{\ln 5} \frac{xe^x}{(e^x + 3)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{e^x}{(e^x + 3)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{e^x + 3} \end{cases}.$$

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$K = -\frac{x}{e^x + 3} \Big|_0^{\ln 5} + \int_0^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 3} = -\frac{\ln 5}{8} + B.$$

$$\text{- Tính } B = \int_0^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 3}. \text{ Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx.$$

$$\text{Khi đó } B = \int_1^5 \frac{dt}{t(t+3)} = \frac{1}{3} \int_1^5 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t}{t+3} \right| \Big|_1^5 = \frac{\ln 5}{3} - \frac{\ln 2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } K = -\frac{\ln 5}{8} + \frac{\ln 5}{3} - \frac{\ln 2}{3} = \frac{5 \ln 5}{24} - \frac{\ln 2}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = J + K = 4 - \pi + \frac{5 \ln 5}{24} - \frac{\ln 2}{3}.$$

Nhận xét. Bài tích phân này cũng thuộc dạng khá quen thuộc. Bản chất I gộp từ 2 phần:

$$\begin{cases} J = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx. \\ K = \int_0^{\ln 5} \frac{xe^x}{(e^x + 3)^2} dx. \end{cases}$$

Với J chỉ cần sử dụng phương pháp đổi biến và lượng giác hóa để giải quyết. Với K thì yêu cầu kiến thức chúng ta vững vàng hơn, đó là sử dụng phương pháp đổi biến số có phối hợp kỹ thuật tách tích phân được nêu ở I.1 để giải quyết. Nhìn chung bài này

giống như bài kiểm tra mức độ kiến thức sách giáo khoa thuộc chương trình nâng cao.

Thí dụ 7. Tính tích phân

$$I = \int_0^3 (x+2) \left(\frac{4x-2+(x^3+2x^2+x+2)|x^2-3x+2|}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4} \right) dx.$$

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^3 (x+2) \left(\frac{4x-2+(x+2)(x^2+1)|x^2-3x+2|}{(x+2)^2(x^2+1)} \right) dx \\ = \int_0^3 \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} dx + \int_0^3 |x^2-3x+2| dx = J + K.$$

$$\bullet \text{ Tính } J = \int_0^3 \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} dx. \text{ Ta có}$$

$$J = \int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx - 2 \int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \int_0^3 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 2 \int_0^3 \frac{dx}{x+2} \\ = \ln(x^2+1) \Big|_0^3 - 2 \ln(x+2) \Big|_0^3 = \ln \frac{8}{5}.$$

$$\bullet \text{ Tính } K = \int_0^3 |x^2-3x+2| dx. \text{ Ta có}$$

$$K = \int_0^1 (x^2-3x+2) dx + \int_1^2 (x^2-3x+2) dx + \int_2^3 (x^2-3x+2) dx \\ = \int_0^1 (x^2-3x+2) dx - \int_1^2 (x^2-3x+2) dx + \int_2^3 (x^2-3x+2) dx \\ = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^3 = \frac{11}{6}.$$

$$\text{Vậy } I = J + K = \ln \frac{8}{5} + \frac{11}{6}.$$

Nhận xét. Để giải quyết các bài toán có dạng tương tự trên thì ngoài việc nhận xét như thí dụ 6, các em cần nắm thêm một số kiến thức về dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai hoặc dấu của hàm lượng giác... nhằm để phá giá trị tuyệt đối ở những loại tích phân các hàm số chứa giá trị tuyệt đối.

(Xem tiếp trang 26)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/468 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $2^x + 3^y + 5^z = 136$.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/468 (Lớp 7). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $AB = CE$. Đường vuông góc với BD kẻ từ A cắt BD tại I và cắt DE tại K . Tính số đo góc $\widehat{CKE}$.

TRẦN NGỌC ĐẠI

(GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T3/468. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $p^2 - pq - q^3 = 27$.

TRẦN XUÂN ANH

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T4/468. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Các điểm M, N di động trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

TRẦN XUÂN UY

(13 Hoàng Ngân, Nam Định)

Bài T5/468. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} = \sqrt{2(x+y+1)} + 4 \\ (x^2 + y - 2)\sqrt{2x+1} = x^3 + 2y - 5 \end{cases}$$

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/468. Giải phương trình

$$-3x^2 + x + 3 + (\sqrt{3x+2} - 4)\sqrt{3x-2x^2} + (x-1)\sqrt{3x+2} = 0.$$

CAO XUÂN NAM

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T7/468. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C > 4(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C).$$

ĐẶNG THANH HẢI

(GV khoa Cơ bản, Học viện PK-KQ, Sơn Tây)

Bài T8/468. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm O , bán kính $R = 1$ và O nằm trong tứ diện. Chứng minh rằng tồn tại một mặt của tứ diện có chu vi lớn hơn $2\sqrt{3}$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T9/468. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

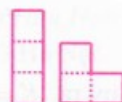
$$x + \frac{x^2 + y^4 + 2xy + 9}{x^4 + y^4 + 3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/468. Một người thợ luôn phải lát những căn phòng có kích thước $2^n \times 2^n$ ô vuông bằng các mảnh đá lát hình đô-mi-nô kích thước 1×3 ô vuông và các mảnh đá lát hình thớt kích thước 3 ô vuông. Anh ta phải lát kín căn phòng, chỉ trừ lại duy nhất 1 ô vuông để trống không lát đá để trang trí đặc biệt. Do giá thành một viên đá lát hình thớt đắt hơn nhiều giá thành một viên đá lát hình đô-mi-nô, cho nên anh ta muốn sử dụng càng ít viên đá lát hình thớt càng tốt. Anh ta nhận thấy rằng dù vị trí ô vuông đặc biệt ở đâu chẳng nữa, chưa lần nào anh ta phải dùng nhiều hơn n mảnh đá lát hình thớt để hoàn thành công việc của mình. Hãy chứng minh rằng khẳng định của người thợ luôn đúng với mọi số nguyên dương n .



VŨ ĐÌNH HÒA

(Khoa Toán Tin ĐHSPT Hà Nội)

Bài T11/468. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S và x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

- 1) $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$;
- 2) $(y+z)bc + (z+x)ca + (x+y)ab - xa^2 - yb^2 - zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

VŨ THANH TÙNG

(KS-ĐTCNKHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/468. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Tia AB giao tia CD tại E , tia DA giao tia CB tại F . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác EFB, EFD . Chứng minh rằng $\widehat{I_1IB} = \widehat{I_2ID}$.

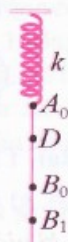
NGUYỄN VĂN LINH (Hà Nội)

Bài L1/468. Có bốn electron đứng yên ở bốn đỉnh của một tứ diện đều cạnh a . Xác định vận tốc cực đại của các electron khi chúng được tự do. Coi các electron chuyển động chỉ do tương tác tĩnh điện.

VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

Bài L2/468. Một con lắc lò xo thẳng đứng (lò xo $k = 20 \text{ N/m}$) treo vật nhỏ A ($m_A = 100 \text{ gam}$); dưới A là vật nhỏ B ($m_B = 100 \text{ gam}$) được nối với A bằng một sợi dây mềm A_0B_0 đủ dài. Kéo B từ vị trí cân bằng B_0 của B xuống tới B_1 với $B_0B_1 = 20 \text{ cm}$ rồi thả nhẹ B ra thì B sẽ đi từ B_0 lên tới vị trí cao nhất là D . Nếu tại D dây nối bị tuột nên B bị rơi xuống. Tính thời gian để vật B rơi từ D tới B_1 .

NGUYỄN QUANG HẬU (Hà Nội)



PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/468 (For 6th grade). Find positive integers x, y, z such that $2^x + 3^y + 5^z = 136$.

Problem T2/468 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A . Let AH be the altitude. Choose a point D on the opposite ray of the ray AH such that $AD = AC$ and choose E on the opposite ray of the ray CA such that $AB = CE$. The line which goes through A and is perpendicular to BE intersects BD and DE respectively at I and K . Find the angle $\widehat{CKE}$.

Problem T3/468. Find all pairs of primes (p, q) such that $p^2 - pq - q^3 = 27$.

Problem T4/468. Given a rhombus $ABCD$ with $\widehat{BAD} = 120^\circ$. The points M and N respectively vary on the sides BC and CD such that $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Find the locus of the circumcenter O of the triangle AMN .

Problem T5/468. Solve the system of equations

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} = \sqrt{2(x+y+1)} + 4 \\ (x^2 + y - 2)\sqrt{2x+1} = x^3 + 2y - 5 \end{cases}$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/468. Solve the equation

$$-3x^2 + x + 3 + (\sqrt{3x+2} - 4)\sqrt{3x-2x^2} + (x-1)\sqrt{3x+2} = 0.$$

Problem T7/468. Let ABC be an acute triangle. Prove that

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C > 4(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C).$$

Problem T8/468. Let $ABCD$ be a tetrahedron inscribed in a unit sphere O . Assume furthermore that O lies inside the $ABCD$. Prove that at least one face of $ABCD$ has perimeter greater than $2\sqrt{3}$.

Problem T9/468. Find the maximum and minimum values of the expression

$$A = \frac{x^4 + y^4 + 2xy + 9}{x^4 + y^4 + 3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/464. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn: $3^m - 2^n = 5$.

Lời giải. Xét $3^m = 2^n + 5$ (1).

- Với $n = 1$ thì không có số tự nhiên m thỏa mãn.
- Với $n = 2$ thì có $m = 2$ thỏa mãn $3^2 = 2^2 + 5$.
- Với $n \geq 3$ thì $m \geq 3$. Đặt $n = 3 + v$ với số tự nhiên $v \geq 0$ ta chuyển về xét $3^m = 8 \cdot 2^v + 5$ (2).
- + Nếu $m = 2k$, (k là số tự nhiên) thì $3^m = 9^k$ chia cho 8 luôn có dư bằng 1 nên không thỏa mãn (2).
- + Nếu $m = 2k + 1$, (k là số tự nhiên) thì $3^m = 3 \cdot 9^k$ chia cho 8 luôn có dư bằng 3 nên không thỏa mãn (2).

Vậy chỉ có cặp số tự nhiên $(m, n) = (2, 2)$ thỏa mãn $3^m - 2^n = 5$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Vũ Minh Khải, 6A3, THCS Lâm Thao; **Lâm Thao:** Hà Nội: Cao Hoàng Minh, 6C1, Trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Thành, 6B, THCS Lý Nhật Quang; **Đô Lương:** **Quảng Ngãi:** Cao Thị Ngọc Trâm, Nguyễn Trung Phú, Phạm Thị Thu Nhung, Phan Đình Tâm, 6A, Trần Thị Thảo Vân, Phan Ngọc Tuyết Sương, 6C, Trần Thị Thanh Huyền, Nguyễn Thị Yến Nhi, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

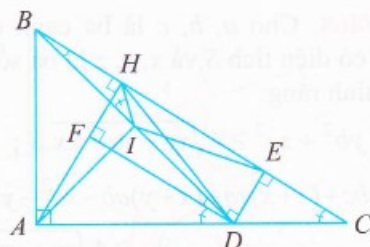
VIỆT HẢI

Bài T2/464. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$.

Lời giải. Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F. Vì AI và EI là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của các tam giác vuông ABD và EBD nên $AI = EI = \frac{BD}{2}$.

Ta có $\triangle ABH = \triangle DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow AH = DF$ (1)

$\triangle HED = \triangle DFH$ (cạnh huyền, góc nhọn)
 $\Rightarrow HE = DF$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $AH = HE$.

Từ đó $\triangle IHA = \triangle IHE$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IHE} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Ta có $\widehat{BIH} + \widehat{IBH} = \widehat{IHE} = 45^\circ$;

$\widehat{ADF} + \widehat{FDI} = \widehat{ADI} = 45^\circ$ (do $\triangle ABD$ vuông cân)

mà $\widehat{IBH} = \widehat{FDI}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{ADF}$.

Lại có $\widehat{ADF} = \widehat{ACB}$ (đồng vị), suy ra $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán không khó và có nhiều cách giải. Ngoài cách giải trên đây các bạn có thể chứng minh trực tiếp $\widehat{BIH} = \widehat{BAH}$ rồi suy ra ngay $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, chính xác: **Vĩnh Phúc:** Trần Minh Huy, 7A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Phú Thọ:** Lương Thị Minh Hiền, Tống Thu Hà, 7A1, Triệu Thị Ngọc Ánh, Trần Tiến Đạt, Nguyễn Kim Khải, Triệu Hồng Ngọc, Nguyễn Công Hiếu, Vũ Ngọc Ánh, Nguyễn Thị Công, Phạm Thùy Linh, Nguyễn Trung Hiếu, Khổng Doãn Hưng, Lê Phương Lan, Cao Đức Học, Nguyễn Vũ Hà, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** Nguyễn Trinh Tuấn Đạt, Nguyễn Sỹ Trọng, Lê Đình Thành, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Nguyễn Thị Thi, 6A, Nguyễn Tất Hân, 7A, THCS Thượng Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Ngô Minh Châu, Lê Cẩm Đường, 7C, THCS Xuân Diệu, T.T Nghèn, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Quang Diên, Cao Huỳnh Thùy Lan, Lê Tuấn Kiệt, Văn Quang Tuệ, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Thị Kỳ Duyên, Nguyễn Hoàng Kim Ánh, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, Mai Thị Thu Thảo, 7C, THCS Sông Vệ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** Ngô Võ Hoàng Việt, 6A3, Trung học Thực Hành Sài Gòn, Q.5.

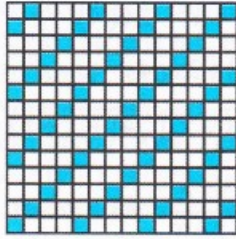
NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/463. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm $\times$ 100cm mà không cắt gạch được hay không?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh không thể lát được sân theo yêu cầu. Thật vậy:

Trước hết ta vẽ hình cái sân và chia nó thành các ô vuông đơn vị có cạnh bằng 25cm (gọi tắt

là ô), ta được tất cả $14 \times 14 = 196$ ô.



Sau đó tô màu các ô theo đường chéo như trong hình vẽ, các ô còn lại để trắng. Ta nhận thấy, để lát gạch không phải cắt thì hiển nhiên mỗi viên gạch phải đặt trọn trong 4 ô kề nhau.

Như vậy, khi lát một viên gạch hình chữ nhật có kích thước $25\text{cm} \times 100\text{cm}$ vào một vị trí 4 ô kề nhau bất kì trong sân thì viên gạch đó đều chiếm 1 ô màu và 3 ô trắng. Do đó để lát kín được sân mà không cắt gạch số ô trắng phải gấp ba lần số ô màu. Ta dễ dàng kiểm chứng điều kiện này không được thỏa mãn. $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán không khó, tuy nhiên một vài bạn suy nghĩ quá đơn giản nên đã lập luận sai, thậm chí kết luận là “có thực hiện được” (bạn ấy không chỉ ra cách thực hiện). Các bạn có lời giải tốt nhất là:

Kon Tum: Nguyễn Ngọc Khánh Như, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Mai Linh, 7A4, THCS Yên Lạc, Vĩnh Yên; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Hà Nội:** Nguyễn Hà Khánh Nam, 7A2, Trường Hanoi Academy, Từ Liêm; **Đinh Hoàng Nhật Minh**, 8A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** Dương Văn Minh, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Nguyễn Đình Tuấn**, 8C, Tăng Văn Minh Hùng, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH QUÂN

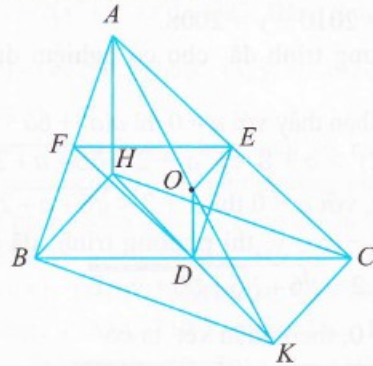
Bài T4/464. *Dựng tam giác ABC biết ba đường thẳng d_a, d_b, d_c chứa ba đường trung trực của tam giác (giả thiết ba đường này đồng quy tại O) và biết độ dài đoạn AH, ở đây H là trực tâm của tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB; K là điểm đối xứng với A qua O. Khi đó dễ thấy BHCK là hình bình hành, nên

D là trung điểm của HK. Từ đó suy ra

$$OD = \frac{1}{2}AH. \text{ Vậy ta dựng được điểm D.}$$

Mặt khác, dễ thấy O là trực tâm tam giác DEF, từ điểm D, ta dựng được các đường thẳng DE, DF, từ đó xác định được E, F.



Từ D, E, F kẻ các đường tương ứng vuông góc với d_a, d_b, d_c , ta xác định được tam giác ABC.

Nhận xét. Vì vị trí của điểm D nên bài toán có hai nghiệm hình. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt.

Nghệ An: Nguyễn Đình Tuấn, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** Nguyễn Vũ Hà, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/464. *Giải phương trình:*

$$2010 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{2016 - x}}} = x.$$

Lời giải. Cách 1. Đặt $y = 2010 - x$ thì phương trình đã cho trở thành $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + y}}} = y.$

Đặt $t = \sqrt[3]{6 + y}; z = \sqrt[3]{6 + t}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 = z + 6 \\ z^3 = t + 6 \\ t^3 = y + 6 \end{cases} \quad (*)$$

Không giảm tổng quát, giả sử $y = \max\{y, z, t\}.$

• Nếu $y \geq z \geq t$ thì $y^3 \geq z^3 \geq t^3$. Kết hợp với (*) ta có $z + 6 \geq t + 6 \geq y + 6 \Leftrightarrow z \geq t \geq y.$

Suy ra $y = z = t.$

• Nếu $y \geq t \geq z$ thì $y^3 \geq t^3 \geq z^3$. Kết hợp với hệ (*) ta có $z + 6 \geq y + 6 \geq t + 6 \Leftrightarrow z \geq y \geq t$.

Suy ra $y = z = t$.

Vì vậy luôn có $y = z = t$, nên hệ (*) trở thành phương trình $y^3 = y + 6 \Leftrightarrow y^3 - y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+3)=0 \Leftrightarrow y=2$ (do $y^2+2y+3=(y+1)^2+2>0$ với mọi số thực y).

Do đó $x = 2010 - y = 2008$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2008$.

Cách 2. Nhận thấy với $a > 0$ thì $a(a^2 + 6a + 11) > 0$

$\Leftrightarrow (a+2)^3 > a+8 \Leftrightarrow a+2 > \sqrt[3]{a+8}$.

Tương tự, với $a < 0$ thì $a+2 < \sqrt[3]{a+8}$.

Đặt $2008 - x = y$ thì phương trình đã cho trở

thành $y+2 = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+y+2}}}$ (1)

• Nếu $y > 0$, theo nhận xét ta có

$y+2 > \sqrt[3]{6+y+2} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+y+2}}$
 $> \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+y+2}}} \quad (2)$

(1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

• Nếu $y < 0$, theo nhận xét ta có

$y+2 < \sqrt[3]{6+y+2} < \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+y+2}}$
 $< \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+y+2}}} \quad (3)$

(1) và (3) mâu thuẫn với nhau.

• Xét khi $y = 0$ thì nghiệm đúng (1). Suy ra $x = 2008$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

➤ **Nhận xét.** Các bạn tham gia đều giải theo cách tương tự theo hai cách trên. Có nhiều bạn đưa ra nhận xét (2) và (3) nhưng không chứng minh. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt. **Giải Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** Trần Quốc Lập, 9A3, THCS Lê Lợi; **Nghệ An:** Dương Văn Minh, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Tăng Văn Minh Hùng, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đồng Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/464. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{12y}{x} = 3 + x - 2\sqrt{4y-x} \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 4y-x \geq 0 \\ y \geq -3 \end{cases}$

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow 12y = 3x + x^2 - 2x\sqrt{4y-x}$$

$$\Leftrightarrow 3(4y-x) + 2x\sqrt{4y-x} - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{4y-x} - x)(\sqrt{4y-x} + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{4y-x} \\ x = -\sqrt{4y-x} \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (2):

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - (y+3) - (x+\sqrt{y+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+\sqrt{y+3})(x-\sqrt{y+3}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{y+3} \\ x = \sqrt{y+3} + 1 \end{cases}$$

Ta có các trường hợp:

$$\text{TH1. } \begin{cases} x = 3\sqrt{4y-x} \geq 0 \\ x = -\sqrt{y+3} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} x = 3\sqrt{4y-x} \geq 0 \\ x = \sqrt{y+3} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9(4y-x) \\ y = (x-1)^2 - 3 \end{cases}$$

Thay phương trình thứ 2 vào phương trình thứ 1 và rút gọn, ta được:

$$35x^2 - 81x - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{24}{35} \end{cases}$$

Vì $x \geq 0$, suy ra: $x = 3 \Rightarrow y = 1$.

$$\text{TH3. } \begin{cases} x = -\sqrt{4y-x} \leq 0 \\ x = -\sqrt{y+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = x^2 + x \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 3x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{145}}{6} \\ x = \frac{1-\sqrt{145}}{6} \end{cases}$$

Vì $x < 0$, ta được:

$$x = \frac{1-\sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{19-\sqrt{145}}{18}$$

$$\text{TH4. } \begin{cases} x = -\sqrt{4y-x} \Rightarrow x \leq 0 \\ x = \sqrt{y+3} + 1 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{loại}).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là: $(x; y) = (3; 1)$ và

$$(x; y) = \left(\frac{1-\sqrt{145}}{6}; \frac{19-\sqrt{145}}{18} \right). \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán không khó nên nhiều bạn gửi bài giải. Số đông các bạn làm theo cách trên. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thanh Ca, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tình, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Kon Tum:** Nguyễn Ngọc Khánh Như, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum; **Thanh Hóa:** Trần Quốc Phương, 9A, THCS Thị Trấn Thường Xuân; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Đồng Hòa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/464. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau

$$H = |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|.$$

Lời giải. • Do $|x^3 - y^3| \geq 0, |y^3 - z^3| \geq 0, |z^3 - x^3| \geq 0$

$$\text{nên } H \geq 0, H = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{hoặc } x = y = z = -\frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Vậy } \min H = 0.$$

• Do vai trò x, y, z là như nhau nên ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó

$$\begin{aligned} H &= x^3 - y^3 + y^3 - z^3 - z^3 + x^3 = 2(x^3 - z^3) \\ \Rightarrow H^2 &= 4(x^3 - z^3)^2 = 4(x - z)^2(x^2 + xz + z^2)^2 \\ &= 4(x^2 - 2xz + z^2)(x^2 + xz + z^2)(x^2 + xz + z^2)^2 \\ &\leq 4 \left(\frac{x^2 - 2xz + z^2 + x^2 + xz + z^2 + x^2 + xz + z^2}{3} \right)^3 \\ &= 4(x^2 + z^2)^3 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 4.8^3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H \leq \sqrt{4.8^3} = 32\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} H = 32\sqrt{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ x \geq y \geq z; y = 0 \\ x^2 - 2xz + z^2 = x^2 + xz + z^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = z = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = y = 0 \\ z = -2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max H = 32\sqrt{2}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Có thể áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối để tìm $\max H$ như sau:

$$\text{Vì } |a - b| \leq |a| + |b| \text{ nên } H = 2(|x|^3 + |y|^3 + |z|^3).$$

Mặt khác từ $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ suy ra

$$|x| \leq 2\sqrt{2}, |y| \leq 2\sqrt{2}, |z| \leq 2\sqrt{2}. \text{ Do đó:}$$

$$|x|^3 \leq 2\sqrt{2}x^2, |y|^3 \leq 2\sqrt{2}y^2, |z|^3 \leq 2\sqrt{2}z^2.$$

$$\text{Vậy } H \leq 4\sqrt{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 32\sqrt{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi}$$

$(x; y; z) = (2\sqrt{2}; 0; 0)$ hoặc $(x; y; z) = (-2\sqrt{2}; 0; 0)$ và các hoán vị.

2) Ngoài hai cách giải trên, một số bạn sử dụng những phương pháp khác như phương pháp hàm số, phương pháp lượng giác, ... cũng tìm ra $\max H$. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hà Nội:** Đặng Thanh Tùng, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; Nguyễn Tuấn Anh, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Phú Thọ:** Hoàng Đức Thuận, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì. **Hưng Yên:** Trần Tiến Đạt, 11A1, THPT Trần Quang Khải, Khoái Châu; Chu Minh Vương, 10A, THPT Văn Giang, Văn Giang; Dương Hồng Sơn, Nguyễn Phúc Hoàng, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Thanh Hóa:** Đỗ Thùy Anh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn. **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 10A1, Hoàng Thị Thảo Hiền, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa. **Quảng Trị:** Hoàng Thị Nhật Lệ, Lê Thị Tình Nhi, Nguyễn Thị Phương Linh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Minh Hải, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phạm Duy Hải, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

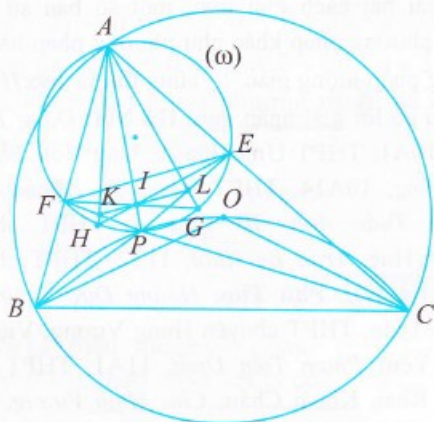
TRẦN HỮU NAM

Bài T8/464. Cho tam giác ABC nhọn có tâm đường tròn ngoại tiếp là O . P là điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC và P nằm trong tam giác ABC (P khác B, C). Phân giác của góc $\widehat{CPA}$ cắt CA tại E , phân giác của góc $\widehat{APB}$ cắt AB tại F . Gọi I, L, K lần lượt là

tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEF , PCA , PAB . Chứng minh rằng I, K, L thẳng hàng.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Vì P nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle BOC$ và P nằm trong $\triangle ABC$, nên $\widehat{BPC} = \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ ($\triangle ABC$ nhọn).

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } \widehat{EPF} &= \widehat{EPA} + \widehat{FPA} = \frac{1}{2}(\widehat{APC} + \widehat{APB}) \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{BPC}) = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\widehat{BAC}) = 180^\circ - \widehat{BAC}. \end{aligned}$$



Do đó bốn điểm A, E, P, F cùng nằm trên đường tròn (ω) . Gọi H, G theo thứ tự là điểm chính giữa các cung nhỏ $\widehat{PF}$ và $\widehat{PE}$ của (ω) thì rõ ràng AH cắt FP tại K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle PAB$; AG cắt PE tại L là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle PAC$; FG và CH cắt nhau tại I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle PEF$. Vậy đây, áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, E, P, F, H, G ta suy ra ba điểm I, K, L thẳng hàng (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn sử dụng định lý Menelaus kết hợp với định lý Ptolemy cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Duy Khương, 10T2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Nguyễn Văn Cao, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa, Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo; **Vĩnh Phúc:** Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** Phạm Đức Long, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Thanh Hóa:** Đỗ Thùy Anh, Vũ Duy Mạnh, Nguyễn Đình Lương, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** Thái Phi Hoàng, 10A1, THPT chuyên

ĐH Vinh, Nguyễn Đức Bảo, Hoàng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Vĩnh Long:** Phan Gia Anh, Lê Nguyễn Minh Long, 11T1, THPT Nguyễn Bình Khiêm, TP Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/464. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^3 + y^3 = x^2 + 12xy + y^2$.

Lời giải. (Của bạn Phùng Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc) Đặt $d = (x, y)$, $x = ad, y = bd$ với $(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 = x^2 + 12xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow d^3(a^3 + b^3) = d^2(a^2 + 12ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow d(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 + 12ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow (da + db - 1)(a^2 - ab + b^2) = 13ab \quad (1).$$

$$\text{Đặt } k = da + db - 1 \text{ ta có } ka^2 - kab + kb^2 = 13ab$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ka^2 : b \Rightarrow k : b \\ kb^2 : a \Rightarrow k : a \end{cases} \Rightarrow k : ab \text{ (do } (a, b) = 1).$$

$$\text{Đặt } k = mab \Rightarrow m(a^2 - ab + b^2) = 13$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 \mid 13 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 1 \\ a^2 - ab + b^2 = 13 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 1 - ab \geq 0. \text{ Vậy suy ra } a = b = 1.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } d = 7. \text{ Vậy } x = y = 7.$$

$$\bullet \text{ Nếu } a^2 - ab + b^2 = 13. \text{ Giả sử } x \geq y \Rightarrow a \geq b.$$

$$\text{Khi đó } 13 = a^2 - ab + b^2 \geq ab \geq b^2 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3\}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } b = 1 \text{ thì } a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow a = 4.$$

$$\bullet \text{ Nếu } b = 2 \text{ thì } a^2 - 2a - 9 = 0 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}^* \text{ loại.}$$

$$\bullet \text{ Nếu } b = 3 \text{ thì } a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4.$$

$$\text{Với } b = 1, a = 4, \text{ thay vào (1) ta được}$$

$$5d - 1 = 4 \Rightarrow d = 1. \text{ Vậy } x = 4, y = 1.$$

$$\text{Với } b = 3, a = 4, \text{ thay vào (1) ta được } 7d = 13 \text{ loại.}$$

$$\text{Vậy tất cả các số } (x, y) \text{ cần tìm là}$$

$$(7; 7), (4; 1), (1; 4). \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài này được nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn cho lời giải đúng và đầy đủ với nhiều cách giải khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghệ An:** Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thị xã Thái Hòa; **Nam Định:** Trịnh Tuấn Giang, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Danh Thắng, 10A5, THPT Lương Đắc

Bảng, Hoàng Hóa; **Hưng Yên:** Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy Mân, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Long:** Trịnh Thế Chương, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Cà Mau:** Trần Quốc Việt, 11 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/464. Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 3$) thỏa mãn điều kiện:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \text{ và } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2.$$

Chứng minh rằng: $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 2$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Giả sử $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} < 2$. Đặt $2 - a_k = x_k$ thì $x_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2 - x_k) \geq n \Leftrightarrow 2n - \sum_{k=1}^n x_k \geq n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k \leq n.$$

Vậy nên

$$n^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n (2 - x_k)^2 = 4n - 4 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$< 4n - 4 \sum_{k=1}^n x_k + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = 4n - 4 \sum_{k=1}^n x_k + n \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n - \sum_{k=1}^n x_k) < 0.$$

Điều này là vô lý vì $n-4 \geq 0$ và $n - \sum_{k=1}^n x_k \geq 0$.

Vậy $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán lấy từ đề thi Olympic Mỹ năm 1999. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bà Rịa - Vũng Tàu: Trần Trung Hiếu, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** Trần Nhật Quang, 11T2, Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T2, THPT chuyên KHTN, Trần Bá Khôi, 11T2, Vũ Đức Văn, 11T1, Ngô Thị Huệ, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Nguyễn Tuấn Anh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Nguyễn Văn Dũng, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Minh Đức, 12A, THPT Lê Quảng Chí, Nguyễn Văn Dũng, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Triệu Ninh Ngân, 11A9, Chu

Minh Vương, 10A, THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Ngãi:** Vũ Thị Thi, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Trị:** Hoàng Thị Nhật Lê, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Phương Linh, Trần Quang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh; **Thanh Hóa:** Đỗ Thùy Anh, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Minh Hải, 10T, THPT chuyên Quốc học; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, Nguyễn Khiêm, 10T1, Đoàn Hoàng Gia Bảo, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/464. Cho dãy số thực (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ a_{n+1} = 10^n a_n^2, n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm các giá trị của a_1 để $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Lời giải. Nếu $a_1 = 0$ ta thấy ngay

$$a_n = 0, \forall n \geq 1, \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Xét trường hợp $a_1 > 0$. Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi n ta có $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

Đặt $x_n = \lg a_n$ (logarit cơ số 10).
Rõ ràng $a_{n+1} = 10^n a_n^2, \forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} = n + 2x_n$

$$\Rightarrow x_{n+1} + n + 2 = 2(x_n + (n+1)).$$

$$\text{Do đó } x_n + (n+1) = 2(x_{n-1} + n)$$

$$= 2^2(x_{n-2} + n - 1) = \dots = 2^{n-1}(x_1 + 2)$$

$$\Rightarrow x_n = 2^{n-1}(x_1 + 2) - n - 1, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

$$\text{Nếu } x_1 + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq -2 \Leftrightarrow 0 < a_1 \leq \frac{1}{100} \text{ thì}$$

$$x_n \leq -n - 1 \text{ và hệ quả } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

$$\text{Nếu } x_1 + 2 > 0 \text{ ta có } x_n = 2^{n-1}(x_1 + 2) - n - 1$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{n+1} \cdot (x_1 + 2) - 1 \right) \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{vì } \frac{2^{n-1}}{n+1} = \frac{C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}}{n+1} \geq \frac{C_{n-1}^2}{n+1}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2(n+1)} \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

► **Nhận xét.** Bài toán này không khó nhưng chỉ có 7 bạn tham gia giải: **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Anh, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông; **Thanh Hoá:** Vũ Duy Mạnh, Nguyễn Đình Lương, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hoá; **Nguyễn Bá Tuấn**, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, Hoàng Văn Nam, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 11T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/464. Một thiên thạch có khối lượng 1600 kg chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo tròn ở độ cao 4200 km so với Mặt Đất. Thiên thạch đó bất ngờ va chạm trực diện với một thiên thạch khác bé hơn nhiều và bị mất 2,0% động năng, nhưng không bị lệch hướng chuyển động và giữ nguyên khối lượng.

1) Mô tả hình dạng quỹ đạo thiên thạch sau va chạm.

2) Tìm khoảng cách ngắn nhất của quỹ đạo thiên thạch sau va chạm so với mặt đất.

Nhận xét. Cho biết bán kính Trái đất là 6400 km.

Lời giải.

1) Để ban đầu thiên thạch lớn chuyển động tròn thì cơ năng $E < 0$, như vậy sau va chạm ta vẫn có $E < 0$. Sau khi mất 2% động năng, thiên thạch lớn sẽ chuyển động trên quỹ đạo elip.

2) Ta có: $\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{r}$, suy ra động năng của

thiên thạch lớn trước va chạm $E = \frac{GmM}{2r}$. Thế

năng của thiên thạch lớn không thay đổi trong quá trình va chạm và vẫn bằng $-\frac{GmM}{r}$, còn động

năng mất 2% và chỉ còn bằng: $0,98 \frac{GmM}{2r}$.

Cơ năng tổng cộng của thiên thạch sau va chạm:

$$E = 0,98 \frac{GmM}{2r} + \left(-\frac{GmM}{r} \right) = -0,51 \frac{GmM}{r} \quad (1)$$

Kí hiệu a là bán trục lớn của quỹ đạo elip của thiên thạch sau va chạm, ta có:

$$E' = -\frac{GmM}{2a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$2a = \frac{r}{0,51} = \frac{6400 + 4200}{0,51} \approx 2,08.10^4 \text{ km} \quad (3).$$

Sau khi va chạm, vận tốc thiên thạch lớn vẫn vuông góc với bán kính từ tâm Trái đất nên ở điểm viễn địa của quỹ đạo elip, khoảng cách đến tâm Trái đất là $6400 + 4200 = 10600 \text{ km}$, và khoảng cách của cận điểm tới tâm Trái đất là

$$r_{\min} = 20800 - 10600 = 10200 \text{ km}.$$

Do đó, khoảng cách cực tiểu giữa thiên thạch và mặt đất sau va chạm là $10200 - 6400 = 3800 \text{ km}$.

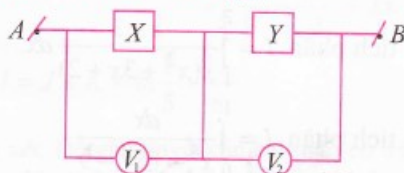
Ta thấy kết quả này không phụ thuộc vào khối lượng thiên thạch. □

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/464. Cho mạch điện có sơ đồ như hình dưới. X, Y là hai hộp linh kiện, mỗi hộp chỉ chứa 2 trong 3 linh kiện mắc nối tiếp gồm: điện trở thuần, cuộn cảm thuần, tụ điện. Biết ampe kế A rất nhỏ, vôn kế có điện trở rất lớn, ampe kế A mắc 2 điểm A, M vào hai cực của nguồn không đổi thì V_1 chỉ 45V, ampe kế chỉ 1,5A. Sau đó mắc A, B vào nguồn xoay chiều có điện áp $U_{AB} = 120\sin 100\pi t$ (V) thì ampe kế chỉ 1A, hai vôn kế chỉ cùng một giá trị và U_{AM} lệch pha góc $\frac{\pi}{2}$ so với U_{MB} .

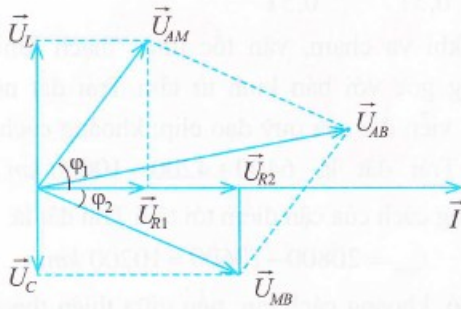
a) Hỏi hộp X, Y chứa các linh kiện nào, tính trị số của chúng? Viết biểu thức của cường độ dòng điện.

b) Thay tụ C trong mạch bằng tụ C' thì số chỉ V_2 lớn nhất. Tính C' và $U_{2\max}$.



Lời giải. a) Khi mắc hai đầu của AM với nguồn điện không đổi, ampe kế chỉ giá trị khác không nên hộp X không thể chứa tụ điện, do đó trong hộp X chỉ có thể chứa điện trở thuần R_1 và cuộn cảm thuần.

Theo đề bài ta có : $R_1 = \frac{45}{1,5} = 30 (\Omega)$.



Khi mắc vào A, B một điện áp xoay chiều thì $\vec{U}_{AM}$ vuông pha so với $\vec{U}_{MB}$. Do vậy trong Y chứa tụ điện C và điện trở thuần R_2 .

Vì $I = 1 \text{ A}$, $U_{AB} = 60\sqrt{2} \text{ (V)}$

$\Rightarrow U_{AM} = U_{MB} = 60 \text{ V}$; $U_{R1} = IR_1 = 30 \text{ (V)}$

$\Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{U_{R1}}{U_{AM}} \Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = -30^\circ$.

$U_L = U_{AM} \cdot \sin\varphi_1 = 30\sqrt{3} \text{ (V)}$

$Z_L = \frac{U_L}{I} = 30\sqrt{3} \Omega \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = 0,165 \text{ (H)}$

$U_{R2} = U_{AB} \cdot \cos\varphi_2 = 30\sqrt{3} \text{ (V)}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{U_{R2}}{I} = 30\sqrt{3} (\Omega)$

$\tan\varphi_2 = \frac{U_C}{U_{R2}} \Rightarrow U_C = 30 \text{ V}$, $Z_C = 30 (\Omega)$

$\Rightarrow C = \frac{1}{3\pi} \cdot 10^{-4} \text{ (F)}$

U_{AB} sớm pha so với i một góc $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

Suy ra : $i = \sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right) \text{ (A)}$

b) Khi thay tụ C bằng tụ C' .

Ta có : $U_2 = I\sqrt{R_2^2 + Z_c'^2}$. Đặt $Z_c' = x$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_2 &= I\sqrt{R_2^2 + x^2} = \frac{U_{AB}\sqrt{R_2^2 + x^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (Z_L - x)^2}} \\ &= \frac{U_{AB}\sqrt{R_2^2 + x^2}}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 + Z_L^2 + x^2 - 2Z_Lx}} \end{aligned}$$

Đặt : $a = R_1^2 + 2R_1R_2 + Z_L^2$; $b = 2Z_L$; $c = R_2^2$.

Ta có : $U_2 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{1 + \frac{a - bx}{c + x^2}}}$.

U_2 đạt giá trị cực đại (max) khi mẫu số cực tiểu (min).

$\Leftrightarrow \left(\frac{a - bx}{c + x^2}\right)_{\text{min}}$

$f(x) \Rightarrow x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2c}}{b}$ (xét $x > 0$).

Đạo hàm $f(x)$ ta suy ra: $Z_c' = 147,6 (\Omega)$

$\Rightarrow C' = 21,6 \mu\text{F} \Rightarrow U_{2\text{max}} \approx 109,5 \text{ (V)}$. □

► **Nhận xét.** Chúc mừng hai bạn có lời giải đúng: Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, H. Văn Giang, Hưng Yên; Trần Hữu Hoàng, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

NÉT ĐẸP ... (Tiếp theo trang 15)

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-3}{x(x^2+3x+2)} dx$.

2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 8x^2 - 9}$.

3. Tính tích phân $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{6e^x + e^{-x} - 5}$.

4. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 5x + 1 + 2\ln x}{(x+1)^3} dx$.

5. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x - 3\cos x}{13 - \cos 2x - 10\sin x} dx$.

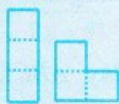
6. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7\sin 2x - 8\cos x}{2\sin^3 x - 6\sin x + 4} dx$.

7. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^x \left(\frac{x}{(3e^x+1)^2} + |e^x - x - 1| \right) dx$.

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/468. A worker has to tile floors of sizes $2^n \times 2^n$ units square either by domino shaped tiles or by set square shaped tiles which are both 3 units square (figure). For every floor, he has to cover all except one 1×1 unit square spot which is finished later for decoration purpose. Since set square shaped tiles are much more expensive than the other ones, he wants to use them the fewer the better. He observes that no matter where the special spot is, he never needs more than n set square shaped tiles. Show that his observation is mathematically correct for any positive integer n .



Problem T11/468. Let a , b , c and S respectively the sides and the area of a given triangle. Let x , y , and z be positive real numbers. Prove that

- 1) $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$;
- 2) $(y+z)bc + (z+x)ca + (x+y)ab - xa^2 - yb^2 - zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$.

When do the equalities happen?

Problem T12/468. Let $ABCD$ be a quadrilateral circumscribed about a circle (I) . The rays AB and CD intersect at E , the rays DA and CB intersect at F . Let (I_1) , (I_2) respectively be the incircles of the triangles EFB and EFD . Prove that $\widehat{I_1IB} = \widehat{I_2ID}$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ... (Tiếp theo trang 4)

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $4x^3 + 5x + (4x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 1} = \frac{89x}{105 - 11x}$.
2. $10 + x^2(\sqrt{x^2 + 5} - x)^3 = \frac{20 + 5x^2}{x^2 + 5}$.
3. $3(2 + \sqrt{4 - 2x - x^2})^2 = 5x^3 + 22x^2$.
4. $10 + (\sqrt{x^2 + 5} - x)^3 = \frac{20 + 25x^2}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$.
5. $(2x + \sqrt{4x^2 + x + 2})^3 = \frac{315x + 82}{19}$.
6. $\sqrt{(7x - 6)(x - 1)} = x^2 + \frac{13}{30}x - \frac{7}{5}$.
7. $\frac{8x^3 - 141x^2 - 409x}{(3 + \sqrt{12x^2 - 4x + 9})^3} = \frac{105}{4}$.
8. $\frac{366x^2 + 635x + 114}{(6x + 1)\sqrt{6x^2 + 17x + 11}} = 28$.
9. $(2x^2 - 5x - 2)\sqrt{6x^2 - 17x + 11} = (2x - 2)^2$.
10. $4\sqrt{3x^2 + x + 4} - 15x - 8 = \frac{2x^4 - 14x^3}{(\sqrt{3x^2 + x + 4} - 2)^2}$.
11. $2x^3 + (2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} = \frac{24x - 13}{5}$.
12. $(2 + \sqrt{2x^2 + 3x + 4})^3 + \frac{581x^4}{47} = \frac{8493x^3}{94} - \frac{7425x^2}{94}$.
13. $\frac{(\sqrt{x^2 + x + 5} - x)^2 + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5} - x + 3} = \frac{4204 + 3175x - 1025x^2}{504}$.
14. $\frac{13}{28} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{x - 1} \right)^3 + \frac{65}{7} = \frac{31\sqrt{2x^2 - x - 1}}{4x - 4} - x$.
15. $\left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} \right)^3 + x^2 \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} = \frac{-230}{27}x^3 + \frac{373}{27}x^2 + \frac{640}{27}x$.

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 10

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (1 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Câu 2. (1 điểm) Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx + 1}{2x - 1}$

đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 3. (1 điểm)

1) Tìm phần thực và phần ảo của số phức z

biết $\frac{9}{5}(1-z) = \frac{2-5i}{1+2i} + (5-i)(1+2i)$.

2) Giải phương trình

$$2 + \log_2(3-2x) + \log_2 x = \log_2(x^2 - 6x + 9).$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^1 e^x \sin(1-x) dx$.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;1;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;1;2)$, $D(-1;1;2)$.

Tìm điểm M thuộc đường thẳng AB sao cho tam giác MCD cân tại M .

Câu 6. (1 điểm)

1) Cho $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Tính $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

2) Bốn bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông, mỗi bạn lựa chọn một môn thi tự chọn từ bộ môn Lý, Hóa, Sinh

một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau. Tính xác suất để ba trong số bốn bạn nói trên chọn cùng một môn thi tự chọn.

Câu 7. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa SC và mặt phẳng (DBC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC, BD .

Câu 8. (1 điểm) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $K(2;\frac{3}{2})$, tâm đường tròn nội tiếp $I(1;2)$. Tìm tọa độ các điểm B, C biết rằng tung độ điểm B lớn hơn 3.

Câu 9. (1 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + y + 8 = 11x + \sqrt{x+3y} \\ 3x + y + 3\sqrt{x+3y} = 3y - 5x + 10 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10. (1 điểm) Cho ba số thực x, y, z không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \frac{xy + 2yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

Câu 1. Bạn đọc tự giải

Câu 2. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 1 = 3(x_0 - 1)^2 - 2 \geq -2.$$

Do đó k nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 1$. Khi đó PT tiếp tuyến cần tìm là $y = -2x$.

Câu 3. a) Tập hợp các điểm M biểu diễn z là đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R = 2$.

b) Các cột điện được dựng tại các điểm có khoảng cách 3000m, 3300m, ..., 6000m. Như

vậy các khoảng cách này lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là 3000, số hạng cuối là 6000 và công sai là 300.

Số cột điện chính là số số hạng của cấp số. Gọi n là số số hạng. Ta có

$$6000 = u_n = u_1 + (n-1)d = 3000 + 300(n-1) \Rightarrow n = 11.$$

Vậy có tất cả 11 cột điện được dựng.

Câu 4. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t dt$, do đó

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt. \text{ Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

Suy ra $I = -2t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2$.

Câu 5. (P) , (Q) , (α) lần lượt có VTPT

$$\vec{n}_P = (1; 1; -2), \vec{n}_Q = (2; -1; 1), \vec{n}_\alpha = (3; -1; 2).$$

Giao tuyến của (P) và (Q) đi qua điểm $A(0; -7; -3)$ và có VTCP

$$\vec{u} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (-1; -5; -3).$$

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm A , có VTPT

$$\vec{n} = [\vec{n}_\alpha; \vec{u}] = (13; 7; -16)$$

nên có PT: $13x + 7y - 16z + 1 = 0$.

Câu 6.

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Mà $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do đó $P = 4 \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha = \frac{14\sqrt{2}}{9}$.

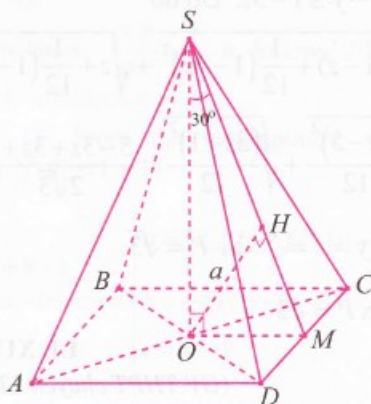
b) Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{40}^{10}$.

Có 20 tấm thẻ mang số lẻ, 4 tấm thẻ mang số chẵn và chia hết cho 10, 16 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 10. Gọi A là biến cố đã cho, suy ra $|\Omega_A| = C_{20}^5 \cdot C_{16}^4 \cdot C_4^1$.

Vậy xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{20}^5 \cdot C_{16}^4 \cdot C_4^1}{C_{40}^{10}} = \frac{1680}{12617}.$$

Câu 7



• Gọi M là trung điểm của CD , kẻ đường cao OH của tam giác SOM , thì

$OH = a, \widehat{OSM} = (\widehat{OS, (SCD)}) = 30^\circ$. Ta có

$$SO = \frac{OH}{\sin 30^\circ} = 2a, OM = SO \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AD = 2OM = \frac{4a\sqrt{3}}{3}. \text{ Do đó}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AD^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \left(\frac{4a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot 2a = \frac{32a^3}{9} \text{ (đvtt)}.$$

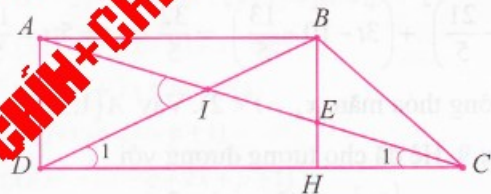
• Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SCB)$, suy ra

$$d(AD, SC) = d(AD, (SCB)) = d(A, (SCB)).$$

Mặt khác $\frac{d(A, (SCB))}{d(O, (SCB))} = \frac{CA}{CO} = 2$, suy ra

$$d(A, (SCB)) = 2a. \text{ Vậy } d(AD, SC) = 2a.$$

Câu 8



Gọi $I = AC \cap BD$, kẻ $BH \perp CD$.

Ta có $\tan \widehat{AID} = \tan(D_1 + C_1)$

$$= \frac{\tan D_1 + \tan C_1}{1 - \tan D_1 \tan C_1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{AID} = 45^\circ.$$

PT AC có dạng: $a(x-4) + b(y-2) = 0$

$$\Leftrightarrow ax + by - 4a - 2b = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$$

Góc giữa AC và BD bằng 45° , nên

$$\cos 45^\circ = \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0.$$

Chọn $b = 1$ được $a = \frac{1}{3}; a = -3$.

Từ đó $AC: x + 3y - 10 = 0$ hoặc

$$AC: 3x - y - 10 = 0.$$

Gọi $E = BH \cap AC$, ta có

$$\frac{BE}{EH} = \frac{AB}{CH} = 2 \Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{AD}{BE} = \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{(2AD + 3AD) \cdot AD}{2} = 10 \Leftrightarrow AD = 2.$$

Từ đó tìm được $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

* Nếu $AC: x + 3y - 10 = 0$, thì $I\left(\frac{17}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Gọi $A(10 - 3t; t)$, từ $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ta có

$$\left(10 - 3t - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(t - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{32}{5} \Leftrightarrow t = 3; t = \frac{7}{5}.$$

Suy ra $A(1; 3); A\left(\frac{29}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Do $x_A < 2 \Rightarrow A(1; 3)$.

* Nếu $AC: 3x - y - 10 = 0$, thì $I\left(\frac{21}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

Gọi $A(t; 3t - 10)$ thì từ $AI = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ta có

$$\left(t - \frac{21}{5}\right)^2 + \left(3t - 10 - \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{32}{5} \Leftrightarrow t = 5; t = \frac{17}{5}$$

(không thỏa mãn $x_A = t < 2$). Vậy $A(1; 3)$.

Câu 9. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 - x)(3x + y) = 2m \\ (x^2 - x) + (3x + y) = 6 - m \end{cases}$$

Đặt $x^2 - x = a, a \geq -\frac{1}{4}; 3x + y = b$, ta có:

$$\begin{cases} ab = 2m \\ a + b = 6 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(6 - m - a) = 2m \\ b = 6 - m - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6a - a^2}{a + 2} = m & (1) \\ b = 6 - m - a \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm thỏa mãn $a \geq -\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(a) = \frac{6a - a^2}{a + 2}; a \geq -\frac{1}{4}$.

Ta có $f'(a) = -\frac{a^2 + 4a - 12}{(a + 2)^2}$.

Với $a \geq -\frac{1}{4}$ thì $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Bảng biến thiên:

a	$-\frac{1}{4}$	2	$+\infty$
$f'(a)$		+	-
$f(a)$		$\frac{2}{28}$	$-\infty$

Suy ra giá trị cần tìm của m là $m \leq 2$.

Câu 10. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Đặt $u = y - z; v = x - z$ và $k = \frac{1}{12}$.

* Ta chứng minh BĐT:

$$\sqrt{x + ku^2} + \sqrt{y + kv^2} \leq \sqrt{2(x + y) + k(u + v)^2} \quad (1)$$

Thật vậy,

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{(x + ku^2)(y + kv^2)} \leq x + y + 2kuv$$

$$\Leftrightarrow 4(x + ku^2)(y + kv^2)$$

$$\leq (x + y + 2kuv)^2 + 4k^2u^2v^2 + 4kuv(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + x(u - v)(xv - yu) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + [1 - 4k(x + y - z)] \geq 0.$$

Bổ rằng với $x + y + z = 1$ và $k = \frac{1}{12}$ thì

$1 - 4k(x + y - z) \geq 0$, nên (1) đúng.

* Áp dụng (1) ta được:

$$P \leq \sqrt{2(x + y) + \frac{1}{12}(x + y - 2z)^2} + \sqrt{z + \frac{1}{12}(x - y)^2}$$

$$= \sqrt{2(1 - z) + \frac{1}{12}(1 - 3z)^2} + \sqrt{z + \frac{1}{12}(x - y)^2}.$$

Ta có $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 1$ nên $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$

và $0 \leq x - y \leq 1 - 3z$. Do đó

$$P \leq \sqrt{2(1 - z) + \frac{1}{12}(1 - 3z)^2} + \sqrt{z + \frac{1}{12}(1 - 3z)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(3z - 5)^2}{12}} + \sqrt{\frac{(3z + 1)^2}{12}} = \frac{5 - 3z + 3z + 1}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì $P = \sqrt{3}$.

Vậy $\max P = \sqrt{3}$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)



PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN MỞ RỘNG

ĐẶNG XUÂN SƠN
và Lớp chuyên Tin khóa 2014 - 2017
(THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Chúng ta biết đến phương pháp tiếp tuyến từ khá lâu, nó được dùng để ước lượng một biểu thức phức tạp một biến về một biểu thức bậc nhất. Trong các bài toán BĐT nhiều biến đối xứng mà biểu thức cần đánh giá có dạng $S = f(a) + f(b) + f(c)$ (chúng tôi gọi là biểu thức này là *phân ly biến*) thì phương pháp này được xem như là cách đánh giá *đại diện*. Tuy nhiên nếu dừng lại ở việc đánh giá độc lập từng biến thì lãng phí một ý tưởng tốt và hơn nữa có nhiều các biểu thức mà không thể phân ly biến được. Bài viết này khai thác theo hướng ấy để làm giàu thêm một lớp các bài toán BĐT.

Định lý. Cho hàm f có đạo hàm cấp 2 trên khoảng D thỏa mãn $f''(x) \geq 0, \forall x \in D$. Khi ấy, nếu $f''(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x, x_0 \in D$$

$$\text{Nếu } f''(x) \leq 0, \forall x \in D \text{ thì}$$

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x, x_0 \in D \quad (**).$$

Nhận xét. Điều kiện $f''(x) \geq 0$ (hay $f''(x) \leq 0$) $\forall x \in D$ chỉ là điều kiện đủ để có (*) (hay (**)). Do vậy, trong thực tế giải toán nhiều khi ta không quan tâm đến dấu của $f''(x)$ mà chỉ xem (*) hoặc (**) như là một dự đoán, một định hướng giải, còn trong lời giải BĐT sẽ được chứng minh chặt chẽ bằng các biến đổi tương đương. Điều này được thể hiện thông qua các thí dụ trong bài viết này.

A. Biểu thức phân ly biến

Thí dụ 1. Cho $a, b, c > -1$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

Phân tích. Với điều kiện $a + b + c = 1$ ta chọn điểm rơi tại $a = b = c = \frac{1}{3} = x_0$ và đặt

$f(a) = a^3 + 5a^2$. Khi đó

$$f'(a) = 3a^2 + 10a, \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}.$$

Lời giải. Ta chứng minh

$$a^3 + 5a^2 \geq \frac{11}{3}\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 5a^2 - \frac{11}{3}a + \frac{17}{27} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \left(a + \frac{17}{3}\right) \geq 0$$

(BĐT cuối cùng đúng với điều kiện $a > -1$). Chứng minh tương tự với các biến còn lại:

$$b^3 + 5b^2 \geq \frac{11}{3}\left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27},$$

$$c^3 + 5c^2 \geq \frac{11}{3}\left(c - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}.$$

Cộng vế với vế, ta được

$$S \geq \frac{11}{3}(a + b + c - 1) + \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $S = \frac{16}{9}$.

Vậy $\min S = \frac{16}{9}$ tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Thí dụ 2. Cho $a + b + c = -6$ với $a, b, c < -1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = \frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{b}{b^2 + b + 1} + \frac{c}{c^2 + c + 1}.$$

Phân tích. Chọn điểm rơi $a = b = c = -2$ và đặt

$$f(a) = \frac{a}{a^2 + a + 1}. \text{ Tính được } f'(-2) = -\frac{1}{3},$$

$$f(-2) = -\frac{2}{3}. \text{ Ghép vào công thức (**).}$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{a^2 + a + 1} \leq -\frac{1}{3}(a + 2) - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -a^3 - 5a^2 - 8a - 4 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (a+2)^2(a+1) \leq 0$ (luôn đúng với $a < -1$).
 Chứng minh tương tự với các biến b, c , ta có:

$$\frac{b}{b^2+b+1} \leq -\frac{1}{3}(b+2) - \frac{2}{3},$$

$$\frac{c}{c^2+c+1} \leq -\frac{1}{3}(c+2) - \frac{2}{3}.$$

Cộng vế với vế được

$$S \leq -\frac{1}{3}(a+b+c) - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Với $a=b=c=-2$ thì $S=-2$.

Vậy $\max S = -2$ tại $a=b=c=-2$.

Nhận xét. Đề ra đề toán, chỉ việc chọn những hàm số thỏa mãn định lý đã trình bày ở trên và có nhiều tác giả đã khai thác theo hướng này.

B. Biểu thức không phân ly biến được

Thí dụ 3. Cho $a, b, c > -\frac{2}{3}$ và

$$4(ab+bc+ca) + a+b+c \geq 15.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Phân tích. Lần này 3 biến không còn đối xứng nữa (chỉ là hoán vị vòng quanh) và cũng không nhóm dạng phân ly biến được. Ta sẽ nhóm riêng $(a^3 + 2a^2b)$ để đánh giá và coi b là tham số (hoặc có thể nhóm $a^3 + 2c^2a$). Từ điều kiện ta có thể nhẩm ra dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ và đặt $f(a) = a^3 + 2a^2b$.

$$\Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 4ab, f'(1) = 3 + 4b, f(1) = 1 + 2b.$$

Lời giải. Ta có

$$a^3 + 2a^2b \geq (3+4b)(a-1) + (1+2b)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 1) + (2a^2b - 2b) - (3+4b)(a-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2b+2) \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng với điều kiện ban đầu).

Chứng minh tương tự, ta có:

$$b^3 + 2b^2c \geq (3+4c)(b-1) + (1+2c),$$

$$c^3 + 2c^2a \geq (3+4a)(c-1) + (1+2a).$$

Cộng vế với vế được:

$$S \geq 4(ab+bc+ca) + a+b+c - 6 \geq 15 - 6 = 9.$$

Với $a=b=c=1$ thì $S=9$.

Vậy $\min S = 9$ tại $a=b=c=1$.

Thí dụ 4. Cho $a, b, c \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ và

$$-2(ab+bc+ac) + 3(a+b+c) = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S = 2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Phân tích. Từ điều kiện đề bài nhẩm ra

$$a=b=c=1. \text{ Đặt } f(a) = 2a^3 - 3a^2b$$

$$\Rightarrow f'(1) = 6 - 6b, f(1) = 2 - 3b.$$

Lời giải. Ta có

$$2a^3 - 3a^2b \geq (6-6b)(a-1) + 2-3b$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-3b+4) \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng bởi điều kiện xác định).

Chứng minh tương tự, ta có:

$$2b^3 - 3b^2c \geq (6-6c)(b-1) + 2-3c,$$

$$2c^3 - 3c^2a \geq (6-6a)(c-1) + 2-3a.$$

Cộng vế với vế được:

$$S \geq 9(a+b+c) - 6(ab+bc+ac) - 12 \geq 3 \cdot 3 - 12 = -3.$$

Với $a=b=c=1$, thì $S=-3$.

Vậy $\min S = -3$ tại $a=b=c=1$.

Thí dụ 5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = 5(a^3 + b^3 + c^3) + 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Phân tích. Đặt $f(a) = 5a^3 + 2a^2b$, tính được

$$f'(1) = 15 + 4b, f(1) = 5 + 2b.$$

Lời giải. Ta có

$$5a^3 + 2a^2b \geq (15+4b)(a-1) + 5+2b$$

$$\Leftrightarrow 5(a-1)(a^2+a+1) + 2b(a-1)(a+1) - (15+4b)(a-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)[5a^2+5a-10+2b(a-1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(5a+2b+10) \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được

$$S \geq 13(a+b+c) + 4(ab+bc+ac) - 30.$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c) \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = 3$$

$$\Rightarrow S \geq 13 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 30 = 21. \text{ Với } a=b=c=1 \text{ thì}$$

$S=21$. Vậy $\min S = 21$ tại $a=b=c=1$.

Thí dụ 6. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ và

$$ab + bc + ca + 9 = 4(a + b + c)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Phân tích. Đặt $f(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a}$, tính được

$$f'(1) = -2 + b, \quad f(1) = 1 - b.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{a^2} - \frac{b}{a} \geq (-2 + b)(a - 1) + 1 - b$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)\left(\frac{1 + a}{a^2}\right) + b\left(\frac{a - 1}{a}\right) + (-2 + b)(1 - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)\left(\frac{1 + a}{a^2} - 2 + b - \frac{b}{a}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)^2\left(\frac{2a + 1}{a^2} - \frac{b}{a}\right) \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được:

$$T \geq -4(a + b + c) + ab + bc + ca + 9 = 0.$$

Với $a = b = c = 1$, thì $T = 0$.

Vậy $\min T = 0$ tại $a = b = c = 1$.

Thí dụ 7. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn

$$3(ab + bc + ca) - (a + b + c) \geq 6.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = a^5 + b^5 + c^5 + 3(a^4 + b^4 + c^4).$$

Phân tích. Đặt $f(a) = a^5 + 3a^4$, tính được

$$f'(1) = 5 + 12b, \quad f(1) = 1 + 3b$$

Lời giải. Ta có

$$a^5 + 3a^4 \geq (5 + 12b)(a - 1) + 1 + 3b$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + 3b(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) - (5 + 12b)(a - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)[3b(a^3 + a^2 + a - 3) + a^4 + a^3 + a^2 + a - 4] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2[3b(a^2 + 2a + 3) + a^3 + 2a^2 + 3a + 4] \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được

$$A \geq 12(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) - 12 = 24 - 12 = 12$$

Với $a = b = c = 1$ thì $A = 12$.

Vậy $\min A = 12$ tại $a = b = c = 1$.

Thí dụ 8. Cho $a, b, c \in [0, 4]$ thỏa mãn

$ab + bc + ac \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B = (a^2 + b^2 + c^2) + \sqrt{3a + 1}b + \sqrt{3b + 1}c + \sqrt{3c + 1}a.$$

Phân tích. Đặt $f(a) = a^2 + \sqrt{3a + 1}b$, tính được

$$f'(1) = 2 + \frac{3}{4}b, \quad f(1) = 1 + 2b.$$

Lời giải. Ta có

$$a^2 + \sqrt{3a + 1}b \geq \left(2 + \frac{3}{4}b\right)(a - 1) + 1 + 2b$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)\left(a + 1 + \frac{3b}{\sqrt{3a + 1} + 2} - 2 - \frac{3}{4}b\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2\left(1 - \frac{9b}{4(\sqrt{3a + 1} + 2)^2}\right) \geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được

$$B \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{13}{4}(a + b + c) - 3 = 9.$$

Với $a = b = c = 1$ thì $B = 9$.

Vậy $\min B = 9$ tại $a = b = c = 1$.

Trên đây là một số bài toán được vận dụng bởi phương pháp tiếp tuyến, từ đó bạn đọc có thể tiếp cận và giải quyết các bài toán khác theo mô hình này, đồng thời có thể sáng tạo những bất đẳng thức hay hơn nữa. Sau đây là một số bài tập thực hành

1. (HongKong 2002) Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$3(a + b + c) + 6abc \geq ab + bc + ca + 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + abc(a + b + c).$$

3. (Romania 2005) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. (Russia 2002) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$



ỨNG DỤNG CỦA DÃY SỐ VÀO HÌNH HỌC

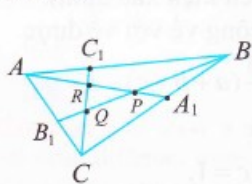
NGUYỄN THÀNH NHÂN

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương)

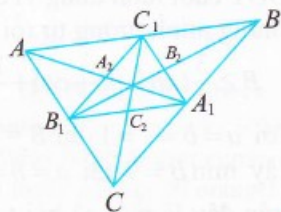
Giới hạn của dãy số là một nội dung rất quan trọng trong phần giải tích của chương trình toán phổ thông. Chủ đề dãy số thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi. Tuy nhiên việc ứng dụng của dãy số vào giải bài toán hình học thì rất ít gặp. Trong bài viết này ta tìm hiểu một vài ứng dụng của giới hạn dãy số để giải quyết một số bài toán hình học.

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong một tam giác, ba đường trung tuyến luôn đồng quy tại một điểm và điểm đó chia đường trung tuyến theo tỉ lệ 2:1.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Giả sử các trung tuyến $AA_1; BB_1; CC_1$ không đồng quy. Khi đó chúng sẽ đôi một cắt nhau tại P, Q, R (h.1). ΔPQR khi đó nằm trong ΔABC .

Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các trung tuyến $AA_1; BB_1; CC_1$ với các đường trung bình $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$ (h.2).

Sử dụng định lý Thales ta cũng chứng minh được A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$. Do đó $A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2$ lại là các trung tuyến của $\Delta A_1B_1C_1$. Nên đường trung tuyến của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trùng nhau.

Vì vậy ΔPQR nằm trong $\Delta A_1B_1C_1$. Ta lặp lại quá trình trên sẽ tạo ra được dãy các tam giác $\{A_nB_nC_n\}_n$ luôn chứa ΔPQR . Theo tính chất độ dài đường trung bình của tam giác ta thu được

$$A_nB_n = \frac{1}{2^n} AB; B_nC_n = \frac{1}{2^n} BC; C_nA_n = \frac{1}{2^n} CA.$$

Theo tính chất tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng (bằng bình phương tỉ số độ dài) ta có

$$S_{A_nB_nC_n} = \frac{1}{4^n} S_{ABC}. \text{ Cho } n \rightarrow +\infty \text{ ta được } S_{A_nB_nC_n} \rightarrow 0.$$

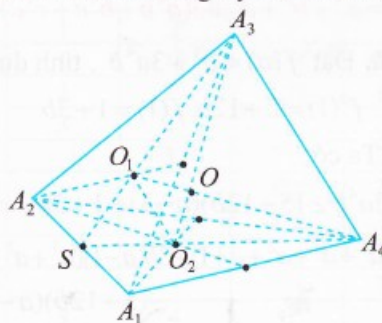
Điều này chứng tỏ từ một chỉ số n nào đó trở đi thì $\Delta A_nB_nC_n$ nằm trong ΔPQR . Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng dãy $\{A_n, B_n, C_n\}_n$ ở trên. Do đó ba đường trung tuyến phải đồng quy tại điểm G .

Ta chứng minh điểm G chia độ dài đoạn AA_1 theo tỉ lệ 2:1. Thật vậy đặt $AA_1 = m$. Khi đó

$$AG = AA_2 + A_2A_4 + A_4A_6 + \dots = \frac{m}{2} + \frac{m}{8} + \frac{m}{16} + \dots = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{m}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}m \text{ (đpcm).}$$

Bài toán tổng quát. Ta gọi trung tuyến của một n -giác là đoạn thẳng nối các đỉnh của n -giác đến trung tâm của các $n-1$ giác được tạo bởi $n-1$ đỉnh còn lại. Chứng minh rằng các trung tuyến đó đồng quy tại một điểm và điểm này chia các trung tuyến theo tỉ số $(n-1):n$.

Lời giải. Với $n=3$ thì ta hiểu trọng tâm của một đoạn thẳng chính là trung điểm của cạnh đó. Theo Bài toán 1 ở trên ta đã chứng minh được các trung tuyến của tam giác đồng quy tại trọng tâm G của nó và điểm G chia các trung tuyến theo tỉ số 2:1.



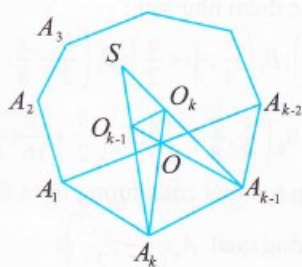
Hình 3

Với $n=4$, ta xét tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ (h.3). Ta gọi S là trung điểm A_1A_2 . O_1, O_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A_1A_2A_3; A_1A_2A_4$. Gọi O là giao điểm của A_3O_2 và A_4O_1 . Áp dụng tính chất trọng

tâm và định lý *Thales* ta có $O_1O_2 \parallel A_3A_4$ và $\frac{O_1O_2}{A_3A_4} = \frac{1}{3}$. $\Delta OO_2O_1 \sim \Delta OA_3A_4$, nên $\frac{OA_4}{O_1O_4} = \frac{3}{4}$.

Như vậy khẳng định đúng với $n = 4$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k - 1$. Nghĩa là các trung tuyến của $(k - 1)$ -giác đồng quy tại điểm O và điểm này chia mỗi trung tuyến theo tỉ lệ $(k - 2):(k - 1)$. Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k$, hay các trung tuyến của k -giác đồng quy tại O và O chia mỗi trung tuyến theo tỷ lệ $(k - 1):k$.



Hình 4

Thật vậy, gọi S là trọng tâm của $(k - 2)$ -giác $A_1A_2A_3 \dots A_{k-2}$ (h.4). Khi đó theo định nghĩa thì SA_{k-1}, SA_k là các trung tuyến của $(k - 1)$ -giác $A_1A_2A_3 \dots A_{k-1}$ và $A_1A_2A_3 \dots A_{k-2}A_k$. Gọi O_{k-1}, O_k theo thứ tự là trọng tâm của hai đa giác trên. Theo giả thiết quy nạp ta có $\frac{SA_{k-1}}{SO_{k-1}} = \frac{SA_k}{SO_k} = \frac{k - 1}{k}$. Theo định lý *Thales* suy ra $O_{k-1}O_k \parallel A_{k-1}A_k$. Gọi O là giao điểm của $A_{k-1}O_{k-1}$ và A_kO_k (đều là các trung tuyến).

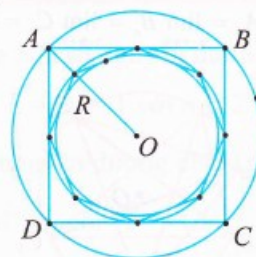
Từ $\Delta OO_{k-1}O_k \sim \Delta OA_{k-1}A_k$ ta có $\frac{OA_{k-1}}{OO_{k-1}} = \frac{OA_k}{OO_k} = \frac{k - 1}{k}$.

Khẳng định được chứng minh.

Bài toán 2. Trong đường tròn bán kính đơn vị cho trước ta nội tiếp một hình vuông, trong hình vuông mới ta lại nội tiếp một đường tròn, trong đường tròn này ta nội tiếp một bát giác đều, trong bát giác đều ta nội tiếp một đường tròn thứ ba, trong đường tròn này ta nội tiếp một hình 16 cạnh đều. Quá trình được tiếp tục theo quy luật là trong đường tròn thứ n ta nội tiếp một đa giác đều 2^{n+1} cạnh ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$). Gọi R_n là bán kính của đường tròn thứ n . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

Lời giải. Để lời giải được tổng quát, gọi R là bán kính đường tròn ban đầu. Ta có cạnh hình vuông là $\sqrt{2}R$. Hình tròn thứ hai có bán kính là

$\frac{R}{\sqrt{2}} = R \cos \frac{\pi}{4}$. Tương tự đường tròn thứ ba có bán kính là $R \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3}$.



Hình 5

Ta dự đoán đường tròn thứ n có bán kính là

$$R_n = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \quad (1).$$

Ta chứng minh nhận định (1) bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 2$ khẳng định đúng, vì bán kính đường tròn thứ hai là $\frac{R}{\sqrt{2}} = R \cos \frac{\pi}{4}$.

Giả sử bán kính đường tròn thứ k ($k \geq 2$) là

$$R_k = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^k}.$$

Bán kính đường tròn thứ $k+1$ sẽ ứng với cạnh tam giác vuông cân có góc ở đáy bằng góc ở tâm và có số đo $\frac{\pi}{2^{k+1}}$ và tam giác đó có cạnh huyền là R_k . Do đó ta tính được cạnh góc vuông chính là

$$R_{k+1} = R_k \cdot \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \left(R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^k} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Khẳng định (1) được chứng minh. Mặt khác

$$R_n = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow R_n \sin \frac{\pi}{2^n} = R \cos \frac{\pi}{2^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$$

Sử dụng công thức nhân đôi n lần bên vế phải và

$$R = 1 \text{ ta thu được } R_n \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{Từ đó } R_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \right) \cdot \frac{2}{\pi}.$$

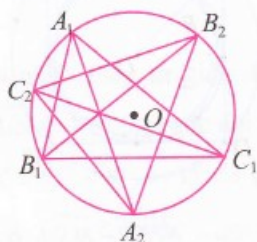
$$\text{Từ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ tìm được } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \frac{2}{\pi}.$$

Bài toán 3. Cho đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Các đường phân giác của các góc trong của $\Delta A_1B_1C_1$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tại các điểm A_2, B_2, C_2 . Những đường phân giác góc trong của tam giác $\Delta A_2B_2C_2$ lại cắt đường tròn lần lượt tại

$A_3, B_3, C_3 \dots$ Quá trình cứ thế tiếp tục. Chứng minh rằng $\Delta A_n B_n C_n$ tiến tới một tam giác đều khi n tiến ra vô tận.

Lời giải (h.6). Cần chứng minh

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \frac{\pi}{3}.$$



Hình 6

Ta có $\widehat{A_{n+1}} = \widehat{B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}} = \widehat{B_{n+1}A_{n+1}A_n} + \widehat{A_nA_{n+1}C_{n+1}}$
 $= \widehat{B_{n+1}B_nA_n} + \widehat{A_nC_nC_{n+1}} = \frac{\widehat{B_n}}{2} + \frac{\widehat{C_n}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A_n}}{2}.$

Vậy $\widehat{A_{n+1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A_n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Do đó

$$\widehat{A_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A_1}}{2}, \widehat{A_3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A_2}}{2}, \dots, \widehat{A_{k+1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A_k}}{2} \quad (*).$$

Nhân lần lượt các đẳng thức trong hệ (*) với $\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}; \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-2}; \dots; \left(\frac{-1}{2}\right)$ rồi cộng vế theo vế

$$\text{được } \widehat{A_{n+1}} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1} \right) + \widehat{A_1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k$$

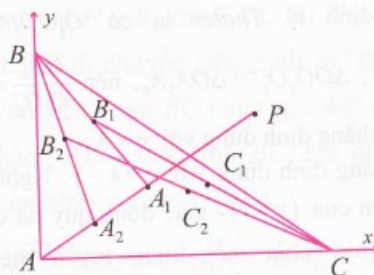
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^k}{1 + \frac{1}{2}} + \widehat{A_1} \left(\frac{-1}{2}\right)^k$$

Cho $k \rightarrow +\infty$ ta thu được $\widehat{A_{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{3}.$

Tương tự $\widehat{B_{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{3}; \widehat{C_{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{3}.$

Bài toán 4. Cho ΔABC vuông tại A và điểm P bất kỳ. Dụng điểm A_1 là trung điểm PA , B_1 là trung điểm A_1B , C_1 là trung điểm B_1C . Ta nhận được tam giác $A_1B_1C_1$. Tiếp tục quá trình bằng cách thay A_1 vào vai trò của P , ta nhận được $\Delta A_2B_2C_2$, ở đây A_2, B_2, C_2 là các trung điểm của $A_1A, A_2B, B_2C, \dots$ Chứng minh rằng dãy điểm A_n, B_n, C_n có giới hạn là A_0, B_0, C_0 mà vị trí của chúng không phụ thuộc vào vị trí điểm P ban đầu và $S_{ABC} = 4S_{A_0B_0C_0}.$

Lời giải (h.7). Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox$



Hình 7

Đặt $a=AB, b=AC$. Khi đó $A(0;0); B(0;a); C(b;0)$ và $P(x;y)$. Theo cách dựng trên ta xây dựng được dãy tọa độ các điểm như sau:

$$A_1\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right); B_1\left(\frac{x}{4}; \frac{y}{4} + \frac{a}{2}\right); C_1\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{8}; \frac{y}{8} + \frac{a}{4}\right);$$

$$A_2\left(\frac{x}{4}; \frac{y}{4}\right); B_2\left(\frac{x}{8}; \frac{y}{8} + \frac{a}{2}\right); C_2\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{16}; \frac{y}{16} + \frac{a}{4}\right) \dots$$

Quá trình tiếp tục một cách tương tự ta thu được dãy với số hạng tổng quát $A_n\left(\frac{x}{2^n}; \frac{y}{2^n}\right);$

$$B_n\left(\frac{x}{2^{n+1}}; \frac{y}{2^{n+1}} + \frac{a}{2}\right); C_n\left(\frac{b}{2} + \frac{x}{2^{n+2}}; \frac{y}{2^{n+2}} + \frac{a}{4}\right).$$

Bằng thuật tính giới hạn ta thu được dãy $\{A_n, B_n, C_n\}$ có giới hạn là $\{A_0, B_0, C_0\}$ với $A_0(0;0); B_0\left(0; \frac{a}{2}\right); C_0\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{4}\right)$ không phụ thuộc

$(x;y)$, tức là không phụ thuộc vị trí điểm P . Ta cũng dễ dàng chứng minh được $S_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$

Bài toán 5. Cho ΔABC vuông cân tại C . Ta dựng các điểm $P_0 \equiv A, P_1$ là trung điểm BC, P_{2k} là trung điểm của AP_{2k-1} và P_{2k+1} là trung điểm của BP_{2k} với $k=1,2,3,\dots$ Chứng minh rằng các giới hạn M, N của dãy $\{P_{2k}\}$ và $\{P_{2k+1}\}, k=1,2,3,\dots$ nằm trên cạnh huyền của tam giác ABC .

Lời giải. Ta chọn hệ trục Oxy sao cho $C(0;0); A(1;0); B(0;1)$ (h.8). Ta ký hiệu $(x_n; y_n)$ là tọa độ các điểm P_n với $n=0,1,2,\dots$. Từ công thức tính tọa độ trung điểm ta có

$$x_0=1, y_0=0, x_1=0, y_1=\frac{1}{2}$$

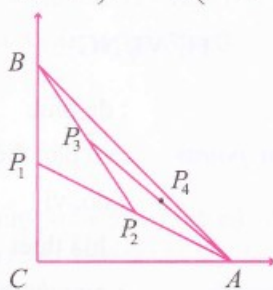
$$x_{2k} = \frac{1+x_{2k-1}}{2}, y_{2k} = \frac{y_{2k-1}}{2},$$

$$x_{2k+1} = \frac{x_{2k}}{2}, y_{2k+1} = \frac{1+y_{2k}}{2}, \text{ với } k=1,2,3,\dots$$

Từ đó tính được tọa độ $(x_n; y_n)$ như sau:

$$x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right), x_5 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

$$x_6 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right), x_7 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right).$$



Hình 8

Bằng quy nạp thu được

$$x_{2k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right);$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right), k = 1, 2, 3, \dots$$

Ta chứng minh khẳng định trên đúng. Thật vậy giả sử khẳng định trên đúng tới $n = k \geq 1$.

$$\text{Khi đó } x_{2(k+1)} = \frac{1 + x_{2k+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k}\right)$$

$$x_{2(k+1)+1} = \frac{x_{2(k+1)}}{2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k}\right)$$

Khẳng định đúng với $n = k + 1$. Tương tự ta cũng

$$\text{xây dựng được } y_{2k} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right);$$

$$y_{2k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right), k = 1, 2, 3, \dots,$$

Bằng kỹ thuật giới hạn thu được

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}, \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{2k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra}$$

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \text{ Tương tự } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{1}{3}, \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{2k+1} = \frac{2}{3},$$

$$\text{suy ra } N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \text{ Ta có } M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ lần}$$

lượt là giới hạn của các dãy $\{P_{2k}\}, \{P_{2k+1}\}$. Dễ dàng chứng minh được tọa độ các điểm M, N thỏa mãn phương trình cạnh huyền AB .

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho ΔABC với diện tích S và chu vi $2p$ nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Kéo dài đường phân giác trong của ΔABC cắt đường tròn tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho S_1 là diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$. Kéo dài những đường phân giác trong của $\Delta A_1B_1C_1$ cắt đường tròn tương ứng tại các điểm A_2, B_2, C_2 và S_2 là diện tích $\Delta A_2B_2C_2$. Tiếp tục như vậy ta dựng được dãy tam giác $(A_nB_nC_n)$ với diện tích tương ứng là dãy (S_n) và nửa chu vi tương ứng là dãy (p_n) . Chứng minh rằng dãy $(S_n), (p_n)$ đều không giảm và bị chặn trên. Tính $\lim S_n, \lim p_n$.

2. Trong một hình tròn bán kính R ta nội tiếp một hình vuông. Trong hình vuông này ta lại nội tiếp một hình tròn khác, trong hình tròn mới này ta lại nội tiếp thêm một hình vuông nữa, ... Quá trình được lặp lại vô hạn lần. Hãy tính tổng diện tích của vô hạn các đường tròn nói trên.

3. Cho ΔABC không đều ngoại tiếp đường tròn. Những tiếp điểm của tam giác thứ hai. Trong tam giác thứ hai ta lại nội tiếp một đường tròn và các tiếp điểm tạo ra tam giác thứ ba. Quá trình cứ thế tiếp tục đến vô hạn lần. Có tồn tại hay không cặp tam giác bất kỳ trong dãy các tam giác vừa được tạo ra đồng dạng với nhau?

4. Cho $\Delta A_0B_0C_0$. Chọn điểm P bất kỳ trong tam giác và hạ từ P những đường vuông góc xuống các cạnh của $\Delta A_0B_0C_0$ như sau $PA_1 \perp B_0C_0; PB_1 \perp A_0C_0; PC_1 \perp A_0B_0$. Nối các điểm $A_1; B_1; C_1$ tạo ra $\Delta A_1B_1C_1$. Từ P tiếp tục hạ $PA_2 \perp B_1C_1; PB_2 \perp A_1C_1; PC_2 \perp A_1B_1$. Quá trình cứ thế được tiếp tục. Hỏi trong dãy các tam giác $\{A_nB_nC_n\}_n$ có tồn tại tam giác đồng dạng với tam giác ban đầu không?

5. Cho ΔABC có diện tích S , gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A qua B , của B qua C , của C qua A . Ta lặp lại quá trình này sau n lần và đạt đến $\Delta A_nB_nC_n$. Gọi S_n là diện tích của $\Delta A_nB_nC_n$. Tính $\lim S_n$.

6. Cho M_1 là một điểm bất kỳ trên cạnh AC của ΔABC , $M_1N_1 \parallel BC$ và điểm N_1 nằm trên cạnh AB , $N_1P_1 \parallel AC$, P_1 nằm trên BC , $P_1M_2 \parallel BC$. Quá trình cứ thế được tiếp tục. Hỏi có tồn tại giới hạn của các dãy $\{M_n\}; \{N_n\}; \{P_n\}$ hay không? Tức là các điểm $\{M_n\}; \{N_n\}; \{P_n\}$ hội tụ về các điểm $\{M_0\}; \{N_0\}; \{P_0\}$ cố định.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 9

Problem. Find all polynomials $P(x)$ such that $P(0) = 0$ and $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

Solution. Consider the following sequence:

$$a_0 = 0, \text{ and } a_{i+1} = a_i^2 + 1 \text{ for } i > 0.$$

We will prove that $P(a_i) = a_i$ for every i . From that, we can conclude that $P(x) = x$ since they are equal at infinitely many points. By hypothesis, $P(a_0) = a_0$. Assume that $P(a_i) = a_i$.

Now $P(a_{i+1}) = P(a_i^2 + 1) = P(a_i)^2 + 1 = a_i^2 + 1 = a_{i+1}$. Thus, by induction principle we have $P(a_i) = a_i$ for every i . So $P(x) = x$.

TỪ VỰNG

<i>polynomial</i>	: đa thức
<i>infinitely many points</i>	: vô hạn điểm
<i>since</i>	: do, vì
<i>hypothesis</i>	: giả thiết
<i>induction principle</i>	: nguyên lý qui nạp

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)



Bài toán. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 > 0$. Chứng minh rằng mỗi nghiệm $z \in \mathbb{C}$ của f đều thỏa mãn $|z| < 1$.

Chú ý. Kết quả trên được chứng minh bằng định lý của Enestrom - Kakeya.

Lời giải. Giả sử tồn tại nghiệm $z \in \mathbb{C}$ của f sao cho $|z| > 1$. Từ $f(z) = 0$, ta có $f(z)(z-1) = 0$. Do đó $(a_n z^{n+1} + a_{n-1} z^n + \dots + a_0 z) - (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) = 0$.

Điều này tương đương với $a_n z^{n+1} = (a_n - a_{n-1})z^n + (a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + \dots + (a_1 - a_0)z + a_0$.

Vì vậy $|a_n z^{n+1}| \leq |(a_n - a_{n-1})z^n| + |(a_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1}| + \dots + |(a_1 - a_0)z| + |a_0|$

$$\leq (|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_1 - a_0| + |a_0|) |z^n| = |a_n z^n|$$

(đối với bất đẳng thức thứ hai ta sử dụng giả thiết phản chứng $|z| > 1$ và với đẳng thức cuối ta sử dụng tính chất $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_0 > 0$). Nhưng bất đẳng thức $|a_n z^{n+1}| \leq |a_n z^n|$ không thể xảy ra nếu $|z| > 1$ và $a_n > 0$. Đó là điều mâu thuẫn (đpcm).

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài sớm đến Tòa soạn: **Hà Nội:** Nguyễn Văn Cao, 10A1, THPT Ứng Hòa, Nguyễn Văn Dũng, Hoàng Thị Thu Hoài, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Bắc Ninh:** Mẫn Đức Bình Minh, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong; **Hưng Yên:** Nguyễn Thu Trang, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 10 T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: XÁC SUẤT ÂM!

(Đề đăng trên TH&TT số 464, tháng 2 năm 2016)

Nhận xét. Khi tính số phần tử của $\bar{A}$ ta chú ý, lấy ra 4 viên bi thuộc ba màu khác nhau thì có 2 viên bi mỗi viên một màu và 2 viên còn lại cùng màu, 2 viên cùng màu này không tính thứ tự. Cách giải đã đưa coi 2 viên bi cùng màu này có thứ tự, dẫn đến kết quả không đúng.

Lời giải đúng. Số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365.$$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: “4 viên bi được chọn ra có đủ cả 3 màu”. Ta xét các khả năng sau:

TH1: 4 viên bi chọn ra có 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng, số cách chọn là: $C_4^2 C_5^1 C_6^1$.

TH2: 4 viên bi chọn ra có 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng, số cách chọn là: $C_4^1 C_5^2 C_6^1$.

TH3: 4 viên bi chọn ra có 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng, số cách chọn là: $C_4^1 C_5^1 C_6^2$.

$$\text{Vậy } n(\bar{A}) = C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1 C_5^2 C_6^1 + C_4^1 C_5^1 C_6^2 = 720.$$

$$\text{Đến tới } P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{720}{1365} = \frac{48}{91}.$$

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{48}{91} = \frac{43}{91}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đã tìm đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, Nguyễn Việt Đức, Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Đặng Văn Hùng**, 11a2, THPT Yên Mỹ, Tân lập, Yên Mỹ. **Thanh Hóa:** Lê Hà Linh, 11A1, THPT Hoàng Hóa IV, Hoàng Hóa. **Bến Tre:** Ngô Nhật Huy, Đỗ Thành An, 12B1, THPT Lạc Long Quân TP. Bến Tre.

KIHI VI



LỜI GIẢI “HOÀN HẢO”!

Tuấn trao đổi với Nghĩa bài toán: “Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y - 8xy = -1 \\ 4x^2 + y^2 - 2xy + 4x - y = m \end{cases}$

có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$ ”.

Nghĩa đưa ra cách giải như sau: Biến đổi

$$\begin{cases} 2x - 3y - 8xy = -1 \\ 4x^2 + y^2 - 2xy + 4x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1) + y = 4(2x+1)y \\ (2x+1)^2 + y^2 - (2x+1)y = m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1) + y = 4(2x+1)y & (1) \\ (2x+1+y)^2 - 3(2x+1)y = m+1 & (2) \end{cases}$$

Đặt $u = (2x+1) + y \geq 0$ (vì $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$) thì từ

(1) suy ra $(2x+1)y = \frac{u}{4}$. Vì $((2x+1) + y)^2 \geq 4(2x+1)y$

nên $u^2 \geq u$ dẫn tới $1 \leq u \leq \frac{4}{3}$. Mặt khác, do $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$

nên $(1-y)x \leq 0 \Leftrightarrow 1 + y(2x+1) \geq y + (2x+1)$ hay

$$1 + \frac{u}{4} \leq u \leq \frac{4}{3}. \text{ Chứng tỏ } 1 \leq u \leq \frac{4}{3}.$$

PT(2) trở thành $u^2 - \frac{3}{4}u = m+1$ (3). Bài toán trở thành:

Tìm m để PT(3) có nghiệm $u \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$. Xét hàm số

$f(u) = u^2 - \frac{3}{4}u$ trên đoạn $\left[1; \frac{4}{3}\right]$. Ta thấy

$f'(u) = 2u - \frac{3}{4} > 0, \forall u \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$ và có bảng biến thiên

u	1	$\frac{4}{3}$
$f'(u)$		+
$f(u)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{9}$

Do đó (3) có nghiệm trên $\left[1; \frac{4}{3}\right]$ khi $\frac{1}{4} \leq m+1 \leq \frac{7}{9}$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{2}{9}. \text{ Vậy với } -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{2}{9} \text{ thì hệ đã cho}$$

có nghiệm thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq 1$.

Tuấn cảm ơn Nghĩa về lời giải thật hoàn hảo. Các bạn có đồng ý với suy nghĩ của Tuấn và Nghĩa không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 468 (6.2016)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Cuộc thi đồ vui ngày hè 2016 (Đợt 1)

2 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Vũ Hồng Phong – Phương pháp đặt ẩn phụ
phương trình có chứa tam thức bậc hai
trong căn.

5 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 -
THPT chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi, năm
học 2014 - 2015.

7 Đề thi vào lớp 10 - THPT chuyên Vĩnh Phúc
năm học 2015 - 2016.

8 Nguyễn Văn Mậu – Hanoi Open Mathematical
Competition 2016 (senior section).

12 Chuẩn bị cho kỳ thi Trung học phổ
thông Quốc gia

Phạm Trọng Thư – Nét đẹp trong giải toán
tính tích phân khi đưa kỹ thuật tách tích
phân vào.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/468 ..., T12/468, L1/468, L2/468.

4 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

28 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 10.

Hướng dẫn giải - Đề số 9.

31 Diễn đàn phương pháp giải toán

Đặng Xuân Sơn và Lớp chuyên Tin khóa
2014 - 2017 – Phương pháp tiếp tuyến mở
rộng.

34 Diễn đàn dạy học Toán

Nguyễn Thành Nhân – Ứng dụng của dãy
số vào hình học.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 9

Bài dịch số 6 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Xác suất âm!

Nguyễn Văn Xá – Lời giải “hoàn hảo”!

Ảnh bìa 1: Nhà Toán học cổ Hy Lạp Euclid (khoảng 330 - 275 Trước Công Nguyên) - Nguồn Internet

Biên tập: LÊ MAI

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

MỘT SỐ HÌNH ẢNH HOẠT ĐỘNG CỦA THẦY VÀ TRÒ TRƯỜNG CAO ĐẲNG SƯ PHẠM THỪA THIÊN HUẾ



Tổ chức Tết Bunpimay Lào 2558 tại trường CĐSP Thừa Thiên Huế



Ban Chấp hành Đảng bộ trường CĐSP Thừa Thiên Huế nhiệm kỳ 2015-2020



Lễ ký kết hợp tác đào tạo với Học viện Công nghệ Canberra



Hoạt động chào năm học mới 2015-2016



Hoạt động của trường Mầm non Hoa Mi - Trường CĐSP Thừa Thiên Huế



Lễ bế giảng và trao bằng tốt nghiệp Đại học ngành TĐTT, liên kết với Đại học sư phạm TĐTT Hà Nội



Triển lãm thiết kế đồ họa - thời trang của Sinh viên khoa Nghệ thuật



Tuổi trẻ Trường CĐSP Thừa Thiên Huế ra quân Chiến dịch hè năm 2015
<https://tieulun.hopto.org>

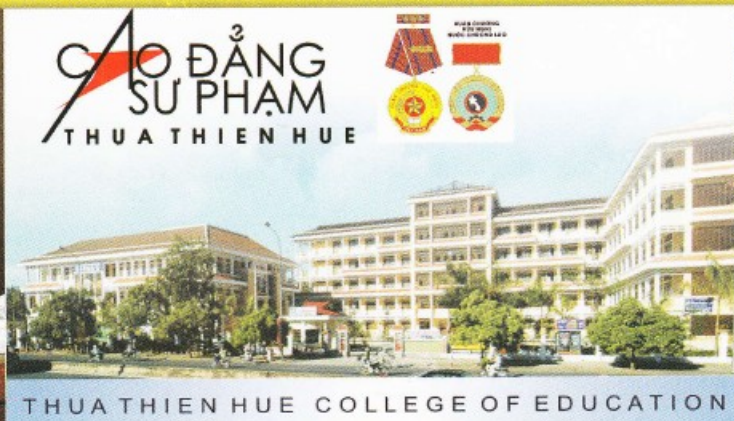
TRƯỜNG CAO ĐẲNG SƯ PHẠM THỪA THIÊN HUẾ

40 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN



TS. Hồ Văn Thành

Bí thư Đảng ủy, Hiệu trưởng Nhà trường



THUATHIENHUE COLLEGE OF EDUCATION

Trường CDSP Thừa Thiên Huế thành lập từ năm 1976 theo Quyết định số 391/UB-QĐ ngày 02/7/1976 của Ủy ban nhân dân Cách mạng tỉnh Bình Trị Thiên. Trải qua 4 thập kỷ xây dựng và phát triển, Trường sớm trở thành một trong những Trung tâm đào tạo đa ngành, đa cấp và là một trong những địa chỉ đáng tin cậy, có uy tín trong đào tạo nguồn nhân lực, đào tạo tiếng Việt cho người nước ngoài với chất lượng cao, đáp ứng nhu cầu cho tỉnh nhà cũng như trong và ngoài nước.

Hiện nay, Trường có 3 phòng chức năng: Phòng Tổ chức-Công tác sinh viên, Phòng Đào tạo-Quản lý khoa học và Phòng Hành chính-Quản trị; 2 trung tâm: Trung tâm Ngoại ngữ-Tin học, đào tạo tiếng Việt cho người nước ngoài và Trung tâm Hỗ trợ sinh viên - Liên lạc, đào tạo; 1 trường Mầm non thực hành và 6 khoa: Khoa Ngoại ngữ-Tin học, Khoa Xã hội, Khoa Giáo dục mầm non, Khoa Nghệ thuật, Khoa Tự nhiên - Kinh tế và Khoa Quản trị - Nghiệp vụ. Đối với nguồn nhân lực của Trường ngày càng phát triển cả số lượng và chất lượng: nếu cuối năm 2000, Trường mới chỉ có 19 cán bộ, giảng viên trình độ sau đại học thì đến năm 2008 Trường có 3 Tiến sĩ (chiếm tỉ lệ 2,63%), 54 Thạc sĩ (chiếm tỉ lệ 47,37%), và hiện nay Trường có 7 Tiến sĩ, 5 Nghiên cứu sinh, 105 Thạc sĩ và 8 đang học Thạc sĩ; số giảng viên đạt trình độ sau đại học trở lên chiếm hơn 90%. Tổng số giảng viên toàn trường, một đội ngũ tương đối vững vàng so với hệ thống các trường cao đẳng trong toàn quốc hiện nay; Sự vững mạnh cả về số lượng và chất lượng của đội ngũ giảng viên hiện nay là điều kiện cơ bản để nhà trường tiếp tục phát triển ổn định, bền vững theo hướng đa ngành, đa cấp, đa hệ và đa phương thức đào tạo theo nhu cầu xã hội. Đến nay, Trường tổ chức đào tạo hơn 30 ngành học thuộc các lĩnh vực sư phạm, ngoại ngữ, kinh tế, kỹ thuật, công nghệ, xã hội nhân văn, nghệ thuật, thời trang, giáo dục mầm non, ... với các loại hình khác nhau: chính quy; vừa học vừa làm; đào tạo bằng hai; đào tạo liên thông từ TCCN lên cao đẳng, liên kết đào tạo liên thông lên đại học; tổ chức bồi dưỡng cán bộ quản lý giáo dục các bậc học từ mầm non, tiểu học đến trung học cơ sở, ... Đặc biệt, việc đào tạo và giảng dạy tiếng Việt cho lưu học sinh Lào trong gần 15 năm qua làm cho tình đoàn kết hữu nghị Việt - Lào ngày càng thâm thiết, số lượng lưu học sinh Lào học tại trường ngày càng nhiều theo các năm học, hiện nay có gần 400 lưu học sinh Lào do trường quản lý, chiếm hơn 70% số lượng sinh viên đang ở tại khu KTX của trường.

Bên cạnh sự phát triển về nguồn nhân lực và đào tạo, cơ sở vật chất phục vụ dạy học cũng được Trường đầu tư thích đáng theo hướng hiện đại, đồng bộ; các phòng học đều được trang bị thiết bị nghe nhìn, tivi, projector, phòng học đa phương tiện, phòng lab; Thư viện nhà trường

là một trong những Thư viện điện tử có uy tín trên toàn quốc, được Hiệp hội thư viện các trường đại học đánh giá rất cao về chất lượng phục vụ bạn đọc cũng như tra cứu thông tin. Chính vì vậy, bình quân hàng năm Trường tổ chức tuyển sinh và đào tạo cho hơn 5000 sinh viên từ bậc học mầm non, trung cấp chuyên nghiệp đến cao đẳng và liên thông lên đại học và các ngành học.

Theo dòng chảy thăng trầm, băng thành tích của nhà trường ngày càng phong phú và đậm nét bởi những danh hiệu cao quý như: Huân chương Lao động hạng Ba (năm 1996), hạng Nhì (năm 2001), hạng Nhất (năm 2011), Huân chương Hữu nghị của nước Cộng hòa dân chủ nhân dân Lào (năm 2011); Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ "Đã có nhiều thành tích trong công tác từ năm học 2000-2001 đến năm học 2004-2005 góp phần vào sự nghiệp xây dựng CNXH và bảo vệ Tổ quốc"; Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo: Giải nhất về "Đổi mới mục tiêu, phương thức, đa dạng hoá các loại hình đào tạo" năm 1994; Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo và Bộ trưởng - Chủ nhiệm Ủy ban TDTT Trung ương về thành tích thể dục thể thao (1999); Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo: "Đơn vị đạt thành tích xuất sắc 10 năm đổi mới 1990 - 2000"; Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo "Đạt thành tích xuất sắc trong phong trào thi đua yêu nước ngành giáo dục 5 năm (2001-2005)"; 7 cá nhân được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú; Cờ thi đua đơn vị Xuất sắc của UBND tỉnh và Bằng khen của UBND tỉnh Thừa Thiên Huế về thành tích: Trường tiên tiến xuất sắc trong các năm học từ 2001 - 2002 đến 2004-2005; Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo về Hợp tác quốc tế và nghiên cứu khoa học trong các trường Đại học, Cao đẳng (2007); Giấy chứng nhận Thương hiệu Việt ưu tú, Cúp Vàng thương hiệu Việt hội nhập WTO - 2007; Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo về Giáo dục dân tộc giai đoạn 1986 - 2008 (2008); Cờ thi đua của Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam trao cho đơn vị xuất sắc nhất trong khối Cao đẳng toàn quốc năm học 2000-2001, 2009-2010 và nhiều Bằng khen của Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam, Công đoàn Giáo dục Việt Nam; Cờ đơn vị xuất sắc công tác Đoàn và phong trào Thanh niên; Giấy chứng nhận Top 500 Thương hiệu hàng đầu Việt Nam - 2008; Cúp vàng "Vị sự phát triển cộng đồng" - 2009; Giấy chứng nhận hệ thống quản lý chất lượng ISO 9001 năm 2009, ...

Đạt được những thành tích đáng tự hào đó, phần lớn nhờ sự quan tâm hỗ trợ của các cấp, các ngành, các tổ chức, đoàn thể cùng sự đoàn kết, nỗ lực phấn đấu của đội ngũ cán bộ lãnh đạo, quản lý, giảng viên, học sinh - sinh viên của nhà trường qua nhiều thế hệ. Hướng đến kỷ niệm 40 năm ngày thành lập trường CDSP Thừa Thiên Huế 2/7/1976 - 2/7/2016, các cán bộ, giáo viên, học sinh, sinh viên nhà trường tiếp tục phấn đấu để đạt được những kết quả tốt hơn nữa, đáp ứng nhu cầu của xã hội, xây dựng môi trường văn hóa nhân văn, hiện đại, đảm bảo chất lượng đào tạo, cung ứng cho người học các dịch vụ giáo dục tiên tiến, tạo cơ hội để người học phát triển toàn diện và hội nhập quốc tế.

ISSN: 0866-8035

Chỉ số: 12884

Mã số: 8BT6M6

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Xi nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2016

Giá: 12.500 đồng

Mười hai nghìn năm trăm đồng