TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2016
Số 466

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM NĂM 2015

HÀ HUY KHOÁI
(Viện Toán học Việt Nam)

Giải thưởng Lê Văn Thiêm được Hội Toán học Việt Nam trao hàng năm cho hai thành phần: thầy cô giáo có thành tích xuất sắc trong giảng dạy môn Toán ở bậc phổ thông và học sinh phổ thông đạt thành tích xuất sắc trong học tập môn Toán. Đối với học sinh thì đối tượng được xét là: học sinh đạt thành tích đặc biệt xuất sắc và nếu năm nay đã vào đại học thì theo học ngành Toán – Tin; hoặc học sinh vượt nhiều khó khăn, đạt thành tích xuất sắc.

Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2015 được trao cho các giáo viên và học sinh sau:

I. GIÁO VIÊN

1. Thầy giáo NGUYỄN LƯU

Sinh năm 1959, Giáo viên Trường THPT chuyên Hà Tĩnh.

Thành tích: Tham gia giảng dạy, bồi dưỡng các Đội tuyển Toán của trường THPT chuyên Hà Tĩnh 15 năm liên tục từ năm 1999, góp phần quan trọng vào thành tích của Đội tuyển: (1 Huy Chương Vàng IMO 2013, 1 Huy chương Bạc IMO 2006, 1 Huy chương Đồng IMO 2015; 71 học sinh đạt giải học sinh giỏi Quốc gia, trong đó có 1 giải Nhất, 11 giải Nhì, 25 giải Ba .

2. Cô giáo NGUYỄN THỊ THANH TÂM

Sinh năm 1969, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, KonTum.

Thành tích: Dạy Toán từ 1992, về Trường chuyên từ 2009. Đã khắc phục nhiều khó khăn, có đóng góp đáng kể vào thành tích của Đội tuyển Toán (từ năm học 2010 – 2011 đến nay, năm học nào cũng có giải học sinh giỏi cấp Quốc gia môn Toán, đặc biệt năm học 2012 – 2013, em *Phan Hồng Hạnh Trinh* đạt giải Nhì Quốc gia môn Toán, được nhận giải thưởng Lê Văn Thiêm).

II. HỌC SINH

1. *Vũ Xuân Trung*, hiện đang theo học lớp 12, THPT chuyên Thái Bình
   Huy chương Vàng IMO 2015.
2. *Hoàng Anh Tài*, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
   Huy chương Bạc IMO 2015. Hiện đang theo học tại ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
3. *Nguyễn Tuấn Hải Đăng*, THPT chuyên ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
   Huy chương Bạc IMO 2015. Hiện đang theo học tại ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
4. *Nguyễn Huy Hoàng*, THPT chuyên ĐHQG TP. Hồ Chí Minh
   Huy chương Bạc IMO 2015. Hiện đang theo học tại ĐHKHTN-ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.
5. *Nguyễn Thị Việt Hà*, THPT chuyên Hà Tĩnh. Huy chương Đồng IMO 2015.
   Hiện đang theo học tại ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.
6. *Phạm Lâm Tùng*, hiện đang học lớp 12 THPT chuyên Tuyên Quang,
   Giải Ba Quốc gia 2014-2015; giải Nhì Quốc gia 2015- 2016.

SỬ DỤNG TÍNH BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(3/29, *Phố Đà Nẵng, TP. Hải Phòng*)

Trong quá trình giải toán, chúng ta có gặp một lớp các bài toán mà để giải các bài toán đó ta phải phát hiện được quy luật của chúng. Các quy luật đó là nếu ta thực hiện một số thao tác trên các đối tượng thì đến một lúc nào đó sẽ xuất hiện *bất biến* như tính chẵn lẻ, tổng, tích ... của các biến không thay đổi. Chúng ta sẽ làm rõ hơn khái niệm *bất biến* thông qua hệ thống các bài tập sau.

✪ **Bài toán 1.** *Có một tờ giấy, ta xé nó ra làm năm mảnh. Lại lấy một trong năm mảnh nhỏ xé làm năm mảnh khác, với mỗi mảnh có được ta lại xé làm năm mảnh nhỏ,...Cứ tiếp tục kéo dài quá trình xé như vậy, hỏi có khi nào ta nhận được 2016 mảnh giấy hay không? 2017 mảnh giấy hay không?*

Lời giải. Khi ta xé một mảnh giấy làm năm mảnh nhỏ thì số mảnh giấy sẽ tăng thêm 4. Vì lúc đầu có một mảnh giấy nên tại bất cứ thời điểm nào, số mảnh giấy cũng có dạng $4k + 1$ $\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, biểu thức này chính là *bất biến* trong quá trình xé giấy. Vì 2016 không có dạng $4k + 1$, nên không thể xé được 2016 mảnh. Vì $2017 = 504.4 + 1$, nên ta sẽ xé được 2017 mảnh sau lần xé thứ 504.

✪ **Bài toán 2.** *Trên bảng viết các số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 2002. Ta tiến hành trò chơi như sau: Mỗi lần ta xóa hai số rồi thay vào đó một số mới bằng tổng hoặc hiệu của hai số bị xóa. Kéo dài quá trình đó nhiều lần cho đến khi nào trên bảng chỉ còn một số thì dừng lại. Hỏi số cuối cùng có thể là số 0 hay không?*

Lời giải. Ta thấy quá trình xóa các số như vậy sẽ cho ta các tình huống sau:

- Nếu xóa một số chẵn và một số lẻ thì sẽ thay bằng một số lẻ, như vậy số các số lẻ không thay đổi.
- Nếu xóa hai số chẵn thay bằng một số chẵn thì số các số lẻ cũng không thay đổi.
- Nếu xóa hai số lẻ sẽ thay bằng một số chẵn thì số các số lẻ giảm đi 2 số.

Như vậy sau mỗi lần xóa thì số các số lẻ hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 số. Nghĩa là tại mọi thời điểm thì số các số lẻ không thay đổi tính chẵn lẻ (đây chính là *bất biến* của bài toán). Do lúc đầu trên bảng có 1001 số lẻ nên số còn lại cuối cùng phải là số lẻ, vậy số còn lại cuối cùng là số khác 0.

Qua hai bài toán trên các bạn đã hiểu thêm khái niệm thế nào là "bất biến" của một bài toán. Do đó việc phát hiện ra bất biến của một bài toán là quyết định cho việc giải được bài toán đó. Chúng ta hãy tiếp tục làm quen với các bài toán khác mà việc phát hiện ra bất biến của nó có khó hơn.

✪ **Bài toán 3.** *Trên bảng viết 2016 số, mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị 0, 1 và 2. Mỗi lần ta xóa hai số khác nhau (có giá trị khác nhau) và thay vào đó số thứ ba (có giá trị thứ ba). Chứng minh rằng nếu kéo dài quá trình xóa như vậy cho đến khi trên bảng chỉ còn một số thì số còn lại đó không phụ thuộc vào quá trình xóa.*

Lời giải. Sau mỗi lần xóa như vậy thì số lượng mỗi loại số sẽ giảm đi 1, hoặc tăng thêm 1. Nghĩa là sau mỗi lần xóa, số lượng các loại số thay đổi tính chẵn lẻ của chúng. Vì cuối cùng trên bảng chỉ còn lại một số, nghĩa là hai trong các số 0, 1, 2 có số lượng bằng không, còn số thứ ba có số lượng bằng một. Nghĩa là lúc đầu trong ba số 0, 1, 2 phải có hai số có số lượng cùng tính chẵn lẻ và khác tính chẵn lẻ với số còn lại (đây là *bất biến* của bài toán). Do đó nếu cuối cùng còn lại một số trên bảng thì đó là số mà lúc đầu có số lượng khác tính chẵn lẻ với hai loại số còn lại (không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện cách xóa).

✪ **Bài toán 4.** *Trên bảng ta viết ba số nguyên. Ta thực hiện thao tác sau: Xóa đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Lặp lại thao tác đó nhiều lần, cuối cùng ta nhận được ba số 19, 1945, 2015. Hỏi với thao tác đó thì các số đầu tiên ta có thể bắt đầu từ các số 2, 2, 2 được không?*

Lời giải. Giả sử lúc đầu ta có ba số 2, 2, 2 thì sau bước đầu tiên ta nhận được ba số 2, 2, 3 gồm hai số chẵn và một số lẻ. Từ bước thứ hai trở đi ta luôn nhận được ba số mà trong đó luôn có hai số chẵn và một số lẻ, dù bắt đầu từ bất cứ số nào (vì tổng hai số chẵn trừ 1 là một số lẻ, tổng của một số chẵn với một số lẻ trừ 1 là số chẵn) và đây chính là *bất biến* của bài toán. Do kết quả cuối cùng là ba số lẻ nên ta không thể nhận được ba số 19, 1945, 2015 bắt đầu từ ba số 2.

✪ **Bài toán 5.** *Có ba đống sỏi với số lượng viên tương ứng là 10, 15, 20. Mỗi lần ta chọn hai đống bất kì rồi chuyển từ mỗi đống đó một viên sang đống thứ ba. Cứ làm như vậy một số lần, hỏi có thể nhận được ba đống sỏi có số viên bằng nhau không (mỗi đống có 15 viên)?*

Lời giải. Ta thấy khi đem chia số lượng sỏi lúc đầu trong ba đống cho 3, ta được ba số dư 1, 0, 2. Sau mỗi lần thực hiện theo yêu cầu đầu bài thì dễ thấy dư trong phép chia số viên của ba đống sỏi cho 3 vẫn là các số 0, 1, 2 (*bất biến*). Điều này chứng tỏ không thể thực hiện được yêu cầu đầu bài để được ba đống sỏi có số viên bằng nhau.

✪ **Bài toán 6.** *Trên bảng ta viết 100 dấu cộng và 115 dấu trừ. Ta thực hiện thao tác sau: Mỗi lần xóa hai dấu và thay vào đó dấu cộng nếu hai dấu bị xóa giống nhau, còn thay vào dấu trừ nếu hai dấu bị xóa khác nhau. Hỏi dấu còn lại cuối cùng trên bảng là dấu gì?*

Lời giải. Nếu ta coi thao tác "xóa" như là phép tính nhân các số âm, số dương thì ta có bảng sau: (+).(+) = (+), (–).(–) = (+), (+).(–) = (–), (–).(+) = (–). Như vậy sau mỗi lần xóa thì số dấu trừ không đổi hoặc giảm đi 2, nghĩa là số dấu trừ không thay đổi tính chẵn lẻ của nó (*bất biến*). Vì lúc đầu số dấu trừ là lẻ nên cuối cùng phải còn lại dấu trừ.

✪ **Bài toán 7.** *Trên một cây "thần" mọc 25 quả chuối và 30 quả cam. Mỗi ngày người chủ hái đi hai quả và sau đó cây lại mọc ra một quả mới theo quy luật: Nếu người chủ hái hai quả giống nhau thì quả mới là cam, còn nếu hai quả được hái khác nhau thì quả mới là chuối. Hỏi quả còn lại cuối cùng trên cây là quả gì?*

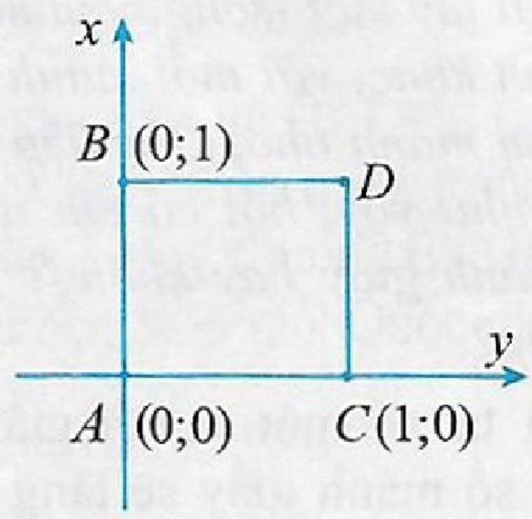
Lời giải. Lý luận giống bài trên ta thấy số quả chuối trên cây luôn là số lẻ. Vậy quả cuối cùng trên cây là quả chuối.

✪ **Bài toán 8.** *Cho ba số 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$. Sau mỗi bước ta thay cả ba số, mỗi số bằng trung bình cộng của hai số kia. Hỏi có thể sau một số bước nào đó ta sẽ nhận được ba số 1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ hay không?*

Lời giải. Dễ thấy với thao tác đã cho trong đề bài thì sau mỗi bước tổng của ba số luôn không đổi (bằng 4), mà tổng ba số cuối bằng 5, nên câu trả lời là không thể.

✪ **Bài toán 9.** *Có ba con châu chấu ở tại ba đỉnh của một hình vuông. Mỗi con đều có thể nhảy qua một trong hai con còn lại đến vị trí mới đối xứng với vị trí ban đầu của nó qua vị trí của con bị nhảy qua. Hỏi có con nào sau một số lần nhảy sẽ đến vị trí đỉnh thứ tư của hình vuông hay không?*

Lời giải



Giả sử ba con châu chấu lúc đầu ở tại ba đỉnh *A*, *B*, *C* của hình vuông *ABCD*. Ta đưa vào một hệ tọa độ *Oxy* với các tọa độ như hình vẽ. Với mỗi cú nhảy theo quy ước của đề bài thì mỗi tọa độ (gồm hoành độ và tung độ) của châu chấu sẽ được tăng lên hoặc giảm đi 2 đơn vị. Như vậy tính chẵn lẻ của mỗi tọa độ luôn được bảo toàn (*bất biến*). Do đó không thể có con châu chấu nào nhảy được vào đỉnh *D*(1; 1) (có hoành độ và tung độ đều lẻ).

✪ **Bài toán 10.** *Cho 2n + 1 số tự nhiên thỏa mãn: Từ 2n số bất kì trong các số đó luôn có thể chia được thành hai nhóm (mỗi nhóm có n số) có tổng bằng nhau. Chứng minh rằng tất cả 2n + 1 số đó bằng nhau.*

Lời giải. Giả sử $2n+1$ số đó là

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{2n+1} \quad (1).$$

- Từ đề bài suy ra tổng của $2n$ số bất kì luôn chẵn, nên cả $2n+1$ số đó có cùng tính chẵn lẻ.
- Vì dãy (1) thỏa mãn đầu bài nên dãy sau cũng thỏa mãn đầu bài:

$$0 = a_1 - a_1 \le a_2 - a_1 \le a_3 - a_1 \le \ldots \le a_{2n+1} - a_1 \quad (2)$$

Suy ra các số của dãy (2) cũng cùng tính chẵn lẻ, mà trong dãy này có số 0 nên tất cả các số của dãy (2) đều chẵn.

- Đem chia tất cả các số của dãy (2) cho 2, ta được dãy mới: $0 = b_1 \le b_2 \le b_3 \le ... \le b_{2n+1}$ (3) cũng thỏa mãn đầu bài.

Do đó lí luận như trên ta cũng có tất cả các số của dãy (3) đều là số chẵn (đây chính là bất biến của bài toán).

- Lại đem các số của dãy (3) chia cho 2 ta được dãy mới: $0 = c_1 \le c_2 \le c_3 \le ... \le c_{2n+1}$ (4) cũng thỏa mãn đầu bài và cũng gồm toàn số chẵn. Lại đem các số của dãy (4) chia cho 2....

Rõ ràng quá trình này kéo dài vô hạn, nghĩa là các số của dãy (2) luôn chia hết cho 2^n với mọi số tự nhiên n. Điều này chỉ xảy ra với tất cả các số của dãy (2) đều bằng 0. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

✪ **Bài toán 11.** *Trong một bảng ô vuông kích thước 100 × 100 ta điền vào mỗi ô một dấu (+). Ta tiến hành biến đổi như sau: Mỗi lần ta đổi dấu tất cả các ô trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột (dấu (+) thành (–), và dấu (–) thì thành (+)). Hỏi sau một số hữu hạn bước biến đổi như trên, liệu trên bảng có đúng 2016 dấu trừ hay không?*

Lời giải. Giả sử sau một số bước biến đổi, trên bảng có đúng 2016 dấu trừ. Giả sử ở hàng thứ i ta đã đổi dấu x_i lần, còn ở cột thứ j ta đã đổi dấu y_j lần. Như vậy dấu ở ô $(i; j)$ đã thay đổi $x_i + y_j$ lần. Suy ra tại ô này có dấu (–) khi và chỉ khi $x_i + y_j$ là số lẻ. Gọi p là số các số lẻ giữa các số x_i, q là số các số lẻ giữa các số y_j. Khi đó tổng số dấu (–) trong bảng sẽ là

$$p(100-q)+(100-p)q = 100p+100q-2pq,$$

do đó ta nhận được đẳng thức

$$100p+100q-2pq = 2016$$

$$\Leftrightarrow (p-50)(q-50) = 1492 = 12.131. \qquad (*)$$

Vì 131 là số nguyên tố nên một trong hai số $p - 50$ hoặc $q - 50$ phải chia hết cho 131.

Giả sử $p - 50 \vdots 131$, nhưng $-50 \le p-50 \le 50$, nên suy ra $p - 50 = 0$, điều này trái với (*). Vậy không thể thực hiện được theo yêu cầu đầu bài.

BÀI TẬP

1. Trên bảng viết một số dấu (+) và một số dấu (–). Mỗi lần ta xóa đi hai dấu bất kì và thay vào đó dấu (+) nếu hai dấu bị xóa cùng loại, còn dấu (–) nếu hai dấu bị xóa khác loại. Chứng minh rằng nếu cuối cùng còn lại một dấu thì dấu đó không phụ thuộc vào quá trình xóa.

2. Trên bảng viết các số 1, 2, 3, ..., 2016. Mỗi lần xóa hai số bất kì và thay vào đó số dư trong phép chia tổng hai số đó cho 13. Cứ làm như vậy đến khi nào trên bảng chỉ còn một số. Hỏi số còn lại có thể là những số nào ?

3. Trên bảng viết 1975 chữ a, 2001 chữ b, 2015 chữ c. Mỗi lần xóa đi hai chữ khác nhau rồi thay vào đó hai chữ của loại thứ ba (ví dụ nếu xóa hai chữ a và b thì thay bằng hai chữ c và c). Hỏi cứ xóa như vậy thì cuối cùng trên bảng có thể chỉ còn lại một loại chữ được không ? (Gợi ý: Giải giống bài toán 5)

4. Cho ba số 2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$. Sau mỗi bước ta thay hai số a và b (là hai số trong ba số đang có) bằng $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$. Hỏi sau một số bước thay thế ta có thể nhận được ba số 1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay không?

(Gợi ý: Xét tổng các bình phương của ba số)

5. Trong một cái hộp có 15 quả cầu xanh, trong một hộp khác có 12 quả cầu đỏ. Có hai người chơi, mỗi lượt đi họ phải lấy đi 3 quả cầu xanh hoặc 2 quả cầu đỏ. Người thắng cuộc là người lấy được những quả cầu cuối cùng. Hỏi người thứ nhất phải chơi như thế nào để luôn giành phần thắng?

6. Trên một hàng ngang có viết 2016 dấu (+). Hai người chơi lần lượt thay một dấu (+) bằng một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Người chơi thứ hai sẽ thắng nếu số nhận được cuối cùng (gồm 2016 chữ số) chia hết cho 9. Chứng minh rằng người chơi thứ hai luôn thắng. (Gợi ý: Nếu người thứ nhất viết số a thì người thứ hai viết số $7 - a$).

7. Cho bảng ô vuông kích thước $5 \times m$ được lát kín bằng những quân bài kích thước 1×2, trên mỗi quân bài được viết hai số 1, –1. Biết rằng tích các số trong một hàng hoặc một cột của bảng đều dương. Chứng minh rằng $m \vdots 4$.

8. Cho bảng số

1, 2, 3, ..., 10
11, 12, 13, ..., 20
21, 22, 23, ..., 30
.....
91, 92, 93, ..., 100

Trong mỗi hàng và mỗi cột ta viết dấu trừ (–) vào đúng 5 số bất kì. Chứng minh rằng ở bảng mới nhận được có tổng các số bằng 0.

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ SỐ HẠNG TỰ DO

NGUYỄN TRỌNG THỌ
(GV THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

Hệ phương trình là một nội dung quan trọng được bắt đầu nghiên cứu trong chương trình Toán THCS. Chính vì thế trong các đề thi chọn HSG lớp 9, thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên, ... các bài toán này thường được khai thác dưới nhiều dạng khác nhau. Trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi thấy rằng nếu các phương trình của hệ đều xuất hiện số hạng tự do thì việc đánh giá để khử chúng là cách mà học sinh nên ưu tiên khi giải. Bài viết này sẽ giới thiệu cách giải hệ phương trình bằng phương pháp đó.

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Nhận xét. Ta thấy hai phương trình của hệ đều chứa số hạng tự do. Để khử số hạng này, ta nhân cả hai vế của phương trình (1) với 4, sau đó trừ cho phương trình (2) vế theo vế.

Lời giải. Ta có : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4xy + 4y^2 = 4 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Suy ra: $3x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3xy - 2xy + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x(x-y) - 2y(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-2y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \frac{2}{3}y \end{array}\right.$$

• Với $x = y$, kết hợp với (1) ta có:

$$x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -1; y = -1 \end{array}\right. \text{(thoả mãn)}$$

• Với $x = \frac{2}{3}y$, kết hợp với (1) ta có:

$$y^2 = \frac{9}{7} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{3\sqrt{7}}{7}; x = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ y = \frac{-3\sqrt{7}}{7}; x = \frac{-2\sqrt{7}}{7} \end{array}\right. \text{(thoả mãn).}$$

Bằng nhận xét tương tự, ta có thể giải các hệ phương trình sau đây :

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Hà Tĩnh năm học 2012 - 2013)

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x & (1) \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 9 = 12x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow (3x^2 + 3y^2 + 9) + (x^3 + 12x + y^3) = 12x + (6x^2 + 9)$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0 \end{array}\right.$$

• Với $x = -y$, kết hợp với phương trình (1) ta được:

$2y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(y+1)^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm)

• Với $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0$, trừ theo từng vế với phương trình (1) ta được :

$xy - x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(y-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 0 \\ y = 1; x = 2 \end{array}\right. \text{(thoả mãn).}$$

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 & (1) \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. Hồ Chí Minh năm học 2004 - 2005)

Lời giải. ĐK: $x, y, z \neq 0$. Từ hai phương trình của hệ suy ra:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)=4-4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0 \ (*).$$

Ta có: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2\ge 0$ và $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\ge 0$, với mọi $x, y, z\ne 0$, kết hợp với (*) ta được :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow x=y=-z,$$

thay vào (1) suy ra :

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ z=-\frac{1}{2} \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x}\\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y}\end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 trường PTNK, ĐHQG TP.Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Lời giải. ĐK: $x\ge 0,\ y\ge 0$. Ta có:

$$\begin{cases}2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x}\ (1)\\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y}\ (2)\end{cases}.$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$2(1+x\sqrt{y})^2-2(1+y\sqrt{x})^2=9y\sqrt{x}-9x\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y-2xy^2+11x\sqrt{y}-11y\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}+11\right)=0 \quad (3).$$

Ta thấy $x=0$, $y=0$ không thỏa mãn hệ, và do $x\ge 0, y\ge 0$ nên $2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}+11>0$,

nên (3) $\Leftrightarrow x=y$, từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là: $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right)$ và $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}x^2-x+xy=2\\ 3x^2-x+3xy+y=4\end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2014 - 2015)

Lời giải. Ta có: $\begin{cases}x^2-x+xy=2\\ 3x^2-x+3xy+y=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2x+2xy=4\\ 3x^2-x+3xy+y=4\end{cases}$$

Suy ra:

$$(3x^2-x+3xy+y)-(2x^2-2x+2xy)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+xy+y=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+1)=0.$$

• Với $x=-1\Rightarrow y=0$ (thỏa mãn).

• Với $x=-y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $y=2$, $x=-2$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(-1;0)$ và $(-2;2)$.

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình*: $\begin{cases}2+3x=\frac{8}{y^3}\\ x^3-2=\frac{6}{y}\end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An, năm học 2009 - 2010)

Lời giải. ĐK: $y\ne 0$. Cộng hai phương trình của hệ ta được: $x^3+3x=\frac{6}{y}+\frac{8}{y^3}$

$$\Leftrightarrow x^3-\frac{8}{y^3}+3x-\frac{6}{y}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{y}\right)\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{y}\right)\left[x^2+\frac{2x}{y}+\frac{4}{y^2}+3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{y}\right)\underbrace{\left[\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{3}{y^2}+3\right]}_{>0}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{y}$$

thay vào phương trình $x^3-2=\frac{6}{y}$ suy ra:

$x^3-3x-2=0$. Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là: $(-1;-2)$ và $(2;1)$.

Thí dụ 7. *Giải hệ phương trình*: $\begin{cases}3y=\frac{y^2+2}{x^2}\\ 3x=\frac{x^2+2}{y^2}\end{cases}$ (I).

Lời giải. Từ hai phương trình của hệ ta suy ra: $x>0$ và $y>0$.

Khi đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2y=y^2+2\ (*)\\ 3xy^2=x^2+2\end{cases}$

$$\Rightarrow 3x^2y-3xy^2+x^2-y^2=0$$

$\Leftrightarrow\ 3xy(x-y)+(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow\ (x-y)(3xy+x+y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 3xy+x+y=0 \text{ (vô nghiệm do } x,y>0) \end{array}\right.$

Với $x=y$ thay vào phương trình (*) ta được :

$3x^3=x^2+2 \Leftrightarrow 3x^3-x^2-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\right]=0$

$\Rightarrow x=1; y=1$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (1; 1).

Thí dụ 8. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\frac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\frac{5}{4} \end{cases} \quad (\mathrm{I})\ (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Ta có:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy+xy(x^2+y)=-\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\frac{5}{4} \ (*) \end{cases}$$

$\Rightarrow (x^2+y)^2-(x^2+y)-xy(x^2+y)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+y)(x^2+y-1-xy)=0.$

• Với $x^2+y=0 \Rightarrow xy=-\frac{5}{4}$. Ta tìm được

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases} \text{ (thoả mãn).}$$

• Với $x^2+y-1-xy=0$, kết hợp với (*) ta có:

$$\begin{cases} x^2+y-1-xy=0 \\ (x^2+y)^2+xy=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=1+xy \\ (1+xy)^2+xy=-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=1+xy \\ (3+2xy)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=-\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+x-3=0 \\ y=-\frac{3}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\right]=0 \\ y=-\frac{3}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \text{ (thoả mãn).}$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2=9 \\ 2x^2+2xy+y^2=2 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, năm học 2002 - 2003)

b) $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10, ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2004 - 2005)

c) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+\frac{1}{\sqrt{y}}=2 \\ y+\frac{1}{\sqrt{x}}=2 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Vinh, vòng 2, năm học 2005 - 2006)

e) $\begin{cases} 2x^2-3y^2+xy=12 \\ 6x+x^2y=12+6y+y^2x \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10, ĐH KHTN-ĐHQG HN, vòng 2, năm học 2014 - 2015)

f) $\begin{cases} (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=2 \\ (x^2-y^2)\left(1-\frac{1}{x^2y^2}\right)=12 \end{cases}$

2. Xác định các giá trị âm của a để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+a=y^2 \\ xy^2+a=x^2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN
NĂM HỌC 2015 - 2016
(*Thời gian làm bài* 150 *phút*)

Câu 1. (2 *điểm*). Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\frac{1}{x-1}$$

với $x\ge 0; x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A}$ là một số tự nhiên.

Câu 2. (2 *điểm*).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $y=x^2$ (P). Xác định tọa độ các điểm A và B trên (P) để tam giác OAB đều.

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn phương trình $(x+2)^2(y-2)+xy^2+26=0$.

Câu 3. (2 *điểm*).

a) Giải phương trình $x^2+\frac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}}=9$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$.

Câu 4. (2 *điểm*). Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB>AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại E. Gọi F là giao điểm của BD và AC.

a) Chứng minh EF song song với BC.

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn (O) cắt nhau tại N. Chứng minh $\frac{1}{BN}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{BM}$.

Câu 5. (1 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC.

Chứng minh $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}\ge 2\frac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

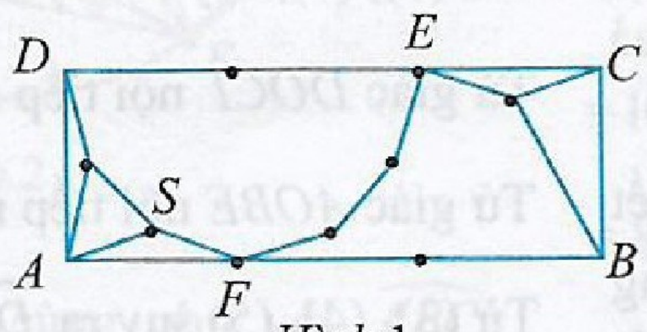
Câu 6. (1 *điểm*). Trong hình vuông cạnh 5cm đặt 2015 đường tròn có đường kính $\frac{1}{20}$ cm. Chứng minh tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn trong 2015 đường tròn trên.

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV THPT chuyên Hưng Yên*)
Sưu tầm và giới thiệu.

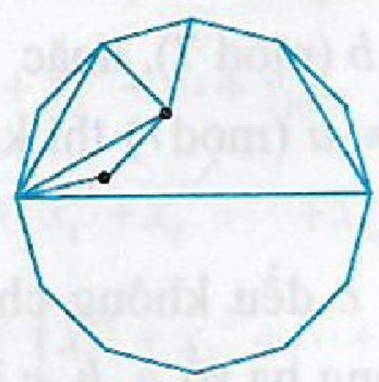
GIẢI ĐÁP: TẠO HÌNH ĐA GIÁC ĐỀU 12 CẠNH

(*Đề ra trong TH&TT số* 459 *tháng* 9 *năm* 2015)

Ta cắt hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3AD$ như hình 1 ra 7 đa giác rồi ghép lại thành đa giác 12 cạnh như ở hình 2.



Hình 1


Hình 2

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG: Bài toán 1 (trang 8, TH&TT số 465) cần bổ sung thêm giả thiết: $x^2+y^2\ne 0$, thì lời giải mới chính xác.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP. Hồ Chí Minh NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 465, tháng 3 năm 2016)

Câu 1. Ta có

$$P=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{(a^3+b^3)(a+b)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right](a+b)+3\left[(a+b)^2-2ab\right]+6}{(a+b)^4}=1$$

(do $ab=1$). Vậy $P=1$.

Câu 2. a) ĐKXĐ: $x\geq -3$. PT đã cho tương đương với:

$$x^2+\frac{x+3}{2}-\frac{3x\sqrt{x+3}}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3\sqrt{x+3}}{4}\right)^2+\frac{x+3}{2}-\frac{9(x+3)}{16}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3\sqrt{x+3}}{4}\right)-\left(\frac{x+3}{16}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3\sqrt{x+3}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x+3}}{4}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)=0.$$

PT đã cho có hai nghiệm $x=1$, $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

b) Nếu có ít nhất một trong các thừa số a, b, c chia hết cho 7, hoặc $a\equiv b \pmod 7$, hoặc $b\equiv c \pmod 7$, hoặc $c\equiv a \pmod 7$ thì kết quả hiển nhiên đúng.

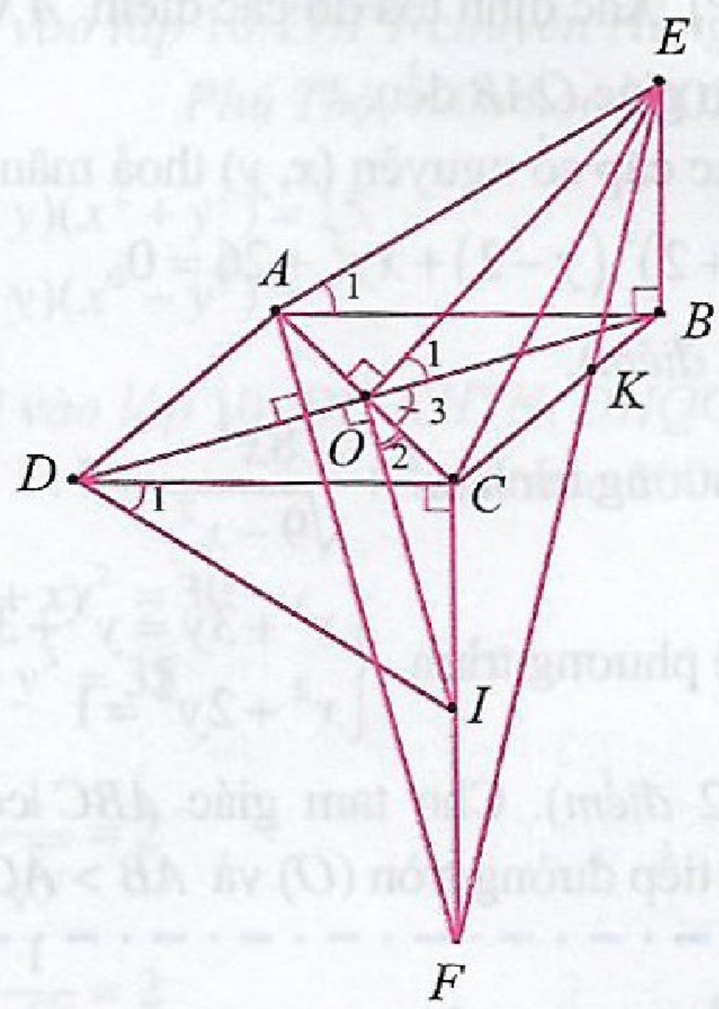
Nếu cả ba thừa số a, b, c đều không chia hết cho 7 và từng cặp hai trong ba số a, b, c không đồng dư với nhau theo mô đun 7 thì không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a\equiv \pm 1 \pmod 7$; $b\equiv \pm 2 \pmod 7$; $c\equiv \pm 3 \pmod 7$

$\Rightarrow a^3\equiv \pm 1 \pmod 7$; $b^3\equiv \pm 1 \pmod 7$; $c^3\equiv \mp 1 \pmod 7$.

Do đó ba số a^3, b^3, c^3 chia cho 7 có số dư là 1 hoặc – 1, theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại hai trong ba số này chia cho 7 có cùng số dư, và hiệu hai số đó chia hết cho 7.

Vậy trong mọi trường hợp của $a, b, c\in\mathbb{Z}$, ta luôn có: $abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)\vdots 7$.

Câu 3. Gọi I là trung điểm của CF, $O=AC\cap BD$ (h.1), ta có $OI\,//\,AF$.



Hình 1

Mặt khác, $AF\perp BD$, do đó $OI\perp BD$

$\Rightarrow \widehat{O_2}+\widehat{O_3}=\widehat{BOI}=90^0$ (1)

Vì $OE\perp AC$ nên $\widehat{O_1}+\widehat{O_3}=\widehat{EOC}=90^0$ (2)

Từ (1), (2), suy ra $\widehat{O_2}=\widehat{O_1}$ (3)

Tứ giác $DOCI$ nội tiếp suy ra $\widehat{O_2}=\widehat{D_1}$ (4)

Tứ giác $AOBE$ nội tiếp nên $\widehat{O_1}=\widehat{A_1}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{A_1}$.

Do đó $\Delta DCI=\Delta ABE$ (g.c.g)

$\Rightarrow BE=CI=\frac{1}{2}CF$.

Từ $BE\,//\,CF$ suy ra $\frac{KE}{KF}=\frac{BE}{CF}=\frac{1}{2}$.

Câu 4. Ta có: $1 \ge a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 1 \ge 4ab > 0$

$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \le -4a^2$. Từ đó

$$A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \le a^2 - \frac{3}{4a} - 4a^2 = -3\left(a^2 + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\Leftrightarrow A \le -3\left(a^2 + \frac{1}{4a}\right) = -3\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{4a}\right) - \frac{1}{4}\right].$$

Với $a > 0$ thì $a + \frac{1}{4a} \ge 2\sqrt{a.\frac{1}{4a}} = 1$.

Do đó

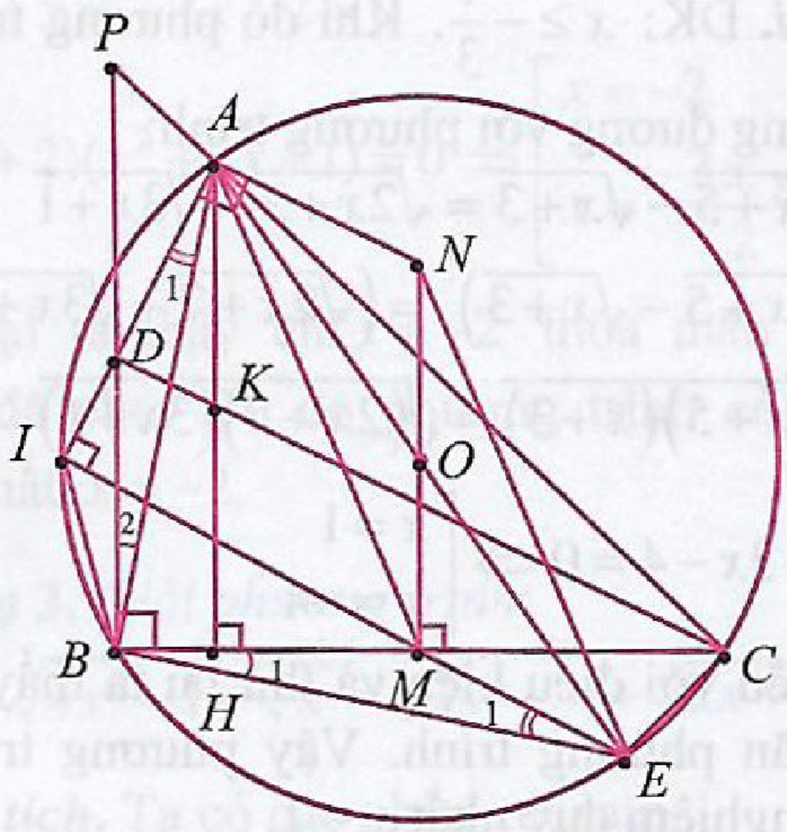
$$A \le -3\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}\right] = -3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \le \frac{-9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Câu 5. a) Gọi I là giao điểm của AD với (O) $(I \ne A)$

Tứ giác $AMEN$ là hình bình hành, nên $AN \parallel ME$.

Mặt khác $AN \perp AD \Rightarrow ME \perp AD$. Ta lại có $\widehat{AIE} = 90^0$, suy ra E, M, I thẳng hàng.



Hình 2

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

nên $\Delta ABD \backsim \Delta EBM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{BD}{\frac{BC}{2}} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{2BD}{BC} = \frac{AB}{BE}$$

$\Leftrightarrow BA.BC = 2BD.BE$.

b) Trên tia BD lấy điểm P sao cho $PD = DB$; gọi $K = CD \cap AH$.

Theo kết quả câu a): $BA.BC = 2BD.BE$

$\Leftrightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{2BD}{BC} = \frac{BP}{BC}$, lại có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Do đó $\Delta ABP \backsim \Delta EBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{BEC}$ (1)

Tứ giác $ABEC$ nội tiếp nên $\widehat{BEC} + \widehat{BAC} = 180^0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{BAP} + \widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow P, A, C$ thẳng hàng.

Xét tam giác CBP có CD là trung tuyến và $AH \parallel BP$ (cùng vuông góc với BC), nên suy ra $AK = KH$. Vậy CD đi qua trung điểm K của AH.

Câu 6. Có 10 vận động viên, mỗi vận động thi đấu đúng 9 trận với 9 người còn lại.

Do đó số trận thua của mỗi người từ người thứ nhất đến người thứ mười lần lượt là:

$y_1 = 9 - x_1, y_2 = 9 - x_2, \ldots, y_{10} = 9 - x_{10}$.

Số trận đấu có tất cả là: $\frac{10.9}{2} = 45$ (trận).

Vì không có trận hòa nên tổng số các trận thắng của 10 vận động viên là:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 9 + 8 + \ldots + 2 + 1 = 45$.

Ta có:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2 = (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + \cdots (9 - x_{10})^2$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2$$

$$= 10.9^2 + \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2\right) - 2.9\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}\right)$$

$$= 810 + \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2\right) - 2.9.45$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2$.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Giới thiệu

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI HỆ QUẢ

CAO HẢI VÂN
(*GV. THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai*)

Trong quá trình giải toán, các phép biến đổi tương đương thường được học sinh ưu tiên. Tuy nhiên, bên cạnh các điều kiện kèm theo nhiều hơn thì có khi phép biến đổi tương đương không phải lúc nào cũng là hướng đi đúng đắn. Trong các trường hợp như vậy thì phép biến đổi hệ quả lại được xem như là một hướng đi tích cực có thể giải quyết được bài toán.

Một số lưu ý trong giải phương trình, hệ phương trình bằng phép biến đổi hệ quả:

i) Phương trình hệ quả có thể chứa một số nghiệm *ngoại lai*. Do đó khi giải xong phương trình, hệ phương trình bằng phép biến đổi hệ quả thì bắt buộc ta phải thử lại nghiệm để loại những nghiệm không là nghiệm của phương trình, hệ phương trình ban đầu.

ii) Cho hai phương trình: $f(x)=g(x)$ (1) và $f_1(x)=g_1(x)$ (2) và giả sử (2) là phương trình hệ quả của (1). Khi đó:

- Nếu (2) vô nghiệm thì (1) vô nghiệm.
- Nếu (1) có n nghiệm phân biệt và (2) có n nghiệm phân biệt thì (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Sau đây tôi xin trao đổi với bạn đọc một số bài toán mà có thể phép biến đổi tương đương không hoặc khó giải quyết được nhưng phép biến đổi hệ quả lại giúp chúng ta giải quyết nó một cách khá dễ dàng.

Thí dụ 1. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}.$$

Phân tích. Rõ ràng với $x\ge -\frac{1}{3}$ ta nhận thấy cả hai vế đều dương. Do đó bình phương hai vế phương trình đã cho ta thu được phương trình tương đương sau:

$$7x+6+2\sqrt{(4x+5)(3x+1)}=3x+10+2\sqrt{(2x+7)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2x-2+\sqrt{(4x+5)(3x+1)}=\sqrt{(2x+7)(x+3)}.$$

Câu hỏi đặt ra "Bước tiếp theo lại bình phương hai vế lên chăng?". Tất nhiên chúng ta sẽ hình dung được một phương trình rất phức tạp sau khi tiếp tục bình phương hai vế của phương trình này.

Nếu chúng ta để ý kỹ hơn thì sẽ rút ra được một nhận xét quan trọng sau:

$$\left(\sqrt{4x+5}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{2x+7}\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}\right)^2.$$

Chính vì thế ta có thể biến đổi phương trình đã cho về dạng: $\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x+1}$.

Sau khi bình phương hai vế ta thu được một phương trình khá đơn giản như sau:

$$\sqrt{(4x+5)(x+3)}=\sqrt{(2x+7)(3x+1)}.$$

Đến đây tiếp tục bình phương hai vế thêm lần nữa ta sẽ thu được một phương trình bậc hai và coi như bài toán đã giải xong.

Lời giải. ĐK: $x\ge -\frac{1}{3}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x+1}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(4x+5)(x+3)}=\sqrt{(2x+7)(3x+1)}$$

$$\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện và thử lại ta thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$$

Phân tích. Ta cũng dễ nhận thấy cả hai vế đều không âm, do đó bình phương hai vế ta sẽ thu được phương trình tương đương như sau:

$$\sqrt{(2x^2-1)(x^2-3x-2)}$$
$$=2x+4+\sqrt{(2x^2+2x+3)(x^2-x+2)}.$$

Đến đây người học sẽ gặp khó khăn vì nếu tiếp tục bình phương hai vế thì bài toán sẽ phức tạp hơn. Chúng ta để ý rằng:

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-x+2}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{x^2-3x-2}\right)^2+\left(\sqrt{2x^2+2x+3}\right)^2$$

Vì vậy, nếu phương trình đã cho được viết dưới dạng sau:

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2},$$

bình phương hai vế thì bài toán sẽ giải được dễ ràng. Tuy nhiên cần lưu ý rằng với phép biến đổi này ta chỉ thu được phương trình hệ quả.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}2x^2-1 \geq 0\\ x^2-3x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x\geq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho được viết lại:

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\left(2x^2-1\right)\left(x^2-x+2\right)}=\sqrt{\left(2x^2+2x+3\right)\left(x^2-3x-2\right)}$$
$$\Rightarrow \left(2x^2-1\right)\left(x^2-x+2\right)=\left(2x^2+2x+3\right)\left(x^2-3x-2\right)$$
$$\Rightarrow x^3+5x^2+7x+2=0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x^2+3x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy chỉ $x=-2$ thỏa mãn phương trình đã cho. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$$

Phân tích. Ta có các nhận xét sau:

$$\left(\sqrt{4x^2-1}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=4x^2+2x$$

và $\left(\sqrt{2x^2-x}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2=2x^2$.

Chính vì lẽ đó mà ta sẽ đưa ra ý tưởng biến đổi phương trình đã cho về phương trình $\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x}$ rồi giải phương trình này theo phép biến đổi hệ quả.

Lời giải. Với $x\geq\dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x}\right)^2$$
$$\Rightarrow 4x^2+2x-2\sqrt{\left(4x^2-1\right)\left(2x+1\right)}=2x^2-2\sqrt{x\left(2x^2-x\right)}$$
$$\Rightarrow x^2+x-\left(x+1\right)\sqrt{2x-1}=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x^2-\sqrt{2x-1})=0$$
$$\Rightarrow x-\sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow x^2=2x-1 \Rightarrow x=1.$$

Thay $x=1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+y}=2\\ \sqrt{x+y}+x-y=1\end{cases}.$$

Phân tích. Nhìn vào phương trình thứ nhất với điều kiện để phương trình có nghĩa, bình phương hai vế ta thu được phương trình tương đương. Tuy nhiên nếu làm như vậy thì bài toán lại phức tạp hơn. Thay vì như vậy, ta chuyển $\sqrt{x+y}$ sang vế phải rồi bình phương hai vế thì ta sẽ có được một phương trình đơn giản hơn.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}3x+y\geq 0\\ x+y\geq 0\end{cases}$. Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{3x+y}=2-\sqrt{x+y}\\ \sqrt{x+y}+x-y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{3x+y}\right)^2=\left(2-\sqrt{x+y}\right)^2\\ \sqrt{x+y}+x-y=1\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}2x-4=-4\sqrt{x+y}\\ \sqrt{x+y}=1-x+y\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}2x-4=-4\left(1-x+y\right)\\ \sqrt{x+y}=1-x+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2y\\ \sqrt{x+y}=1-x+y\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x=5+\sqrt{21}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=5-\sqrt{21}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{cases}.$$

Thử lại ta thấy nghiệm $\left(5-\sqrt{21};\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$ thỏa mãn hệ phương trình ban đầu. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(5-\sqrt{21};\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Thí dụ 5. (*Đề thi thử ĐH lần 4 THPT chuyên Vĩnh Phúc năm 2013*) *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1\\3x+2y=4\end{cases}.$$

Phân tích. Chúng ta dễ nhận thấy rằng $\left(\sqrt{2x+y+1}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2=3x+2y+1$, nếu kết hợp với phương trình thứ hai thì bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn thay vì chuyển vế phương trình thứ nhất rồi bình phương hai vế.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}2x+y+1\ge 0\\x+y\ge 0\end{cases}$. Bình phương hai vế phương trình thứ nhất ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases}3x+2y+1-2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=1\\3x+2y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(2x+y+1)(x+y)}=2\\3x+2y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(2x+y+1)(x+y)=4\\3x+2y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(4-x-y+1)(x+y)=4\\3x+2y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=1\\x+y=4\end{array}\right.\\3x+2y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=-4\\y=8\end{cases}.$$

Thử lại ta thấy (2; –1) thỏa mãn. Do vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (2; –1).

Thí dụ 6. (*Đề thi thử ĐH lần 1 THPT chuyên Lam Sơn*). *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}\\\sqrt{x^2-9}=3\sqrt{y-3x+3}-2\end{cases}.$$

Phân tích. Khi bình phương hai vế của phương trình thứ nhất thì vế trái sẽ có những thuận lợi chúng ta dễ nhận thấy:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{x-\sqrt{y}}\right)^2=2x$$

và $2\sqrt{x+\sqrt{y}}\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\sqrt{x^2-y}$.

Do đó, bài này chúng ta có thể giải bằng phép biến đổi hệ quả như sau

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}x\ge 3, y\ge 0\\\dfrac{y}{4}\le x\le\dfrac{y+3}{3}\\x\ge\sqrt{y}\end{cases}$.

Từ phương trình thứ nhất ta thu được phương trình hệ quả sau: $y-2x=2\sqrt{x^2-y}$

$$\Rightarrow y^2-4xy+4y=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=4x-4\end{array}\right..$$

Thay $y=0$ vào phương trình thứ hai ta thấy phương trình này vô nghiệm.

Thay $y=4x-4$ vào phương trình thứ hai ta có phương trình: $\sqrt{x^2-9}=3\sqrt{x-1}-2$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-9}-(x-1)=3\sqrt{x-1}-(x+1)$$

$$\Rightarrow\frac{2(x-5)}{\sqrt{x^2-9}+(x-1)}=\frac{-x^2+7x-10}{3\sqrt{x-1}+(x+1)}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=0\\\dfrac{2}{\sqrt{x^2-9}+x-1}=\dfrac{-(x-2)}{3\sqrt{x-1}+x+1}\end{array}\right..$$

Rõ ràng với $x\ge 3$ thì phương trình $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-9}+x-1}=\dfrac{-(x-2)}{3\sqrt{x-1}+x+1}$ vô nghiệm.

Với $x=5$ ta có $y=16$. Thử lại ta thấy (5; 16) thỏa mãn hệ phương trình ban đầu.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (5; 16).

Bài tập luyện tập

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+2}+2\sqrt{x}$

2. $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

3. $\begin{cases}\sqrt{x^2-x-4y}=y-x\\\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}-\sqrt{x^2-y^2}=1\end{cases}$

4. $\begin{cases}3\sqrt{xy+x-y^2-y}+x=5y+4\\\sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$

5. $\begin{cases}(x^2-y+2)\left(\sqrt{(x^2+9)(y+7)}-15\right)=0\\\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y+7}=8\end{cases}$

6. $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=\dfrac{13}{2}\\\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}=\dfrac{11}{2}\end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu 1. Bạn đọc tự giải.

Câu 2. *Đáp số*: $m = 1$.

Câu 3. a) $w = (1+2i)(1-i) = 3+i \Rightarrow |w| = \sqrt{10}$.

Vì z có phần thực phần ảo đối nhau nên

$z = a - ai, (a \in \mathbb{R})$; $|z| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{5}$ hoặc $a = -\sqrt{5}$. Vậy $z = \sqrt{5} - \sqrt{5}.i$

hoặc $z = -\sqrt{5} + \sqrt{5}.i$.

b) $3^{x^2}.4^x = 1 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x^2}.4^x\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x\log_3 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\log_3 4$.

Câu 4. a) Ta có $A = 2\sin 3x.\cos x - \sin 4x$

$= \sin 4x + \sin 2x - \sin 4x$

$= \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \dfrac{-3}{4}$.

b) Số phần tử của tập S là: $C_8^2 = 28$.

Gọi M là không gian mẫu, số phần tử của không gian mẫu là $n(M) = C_{28}^2 = 378$.

Gọi A là biến cố: " *hai đoạn thẳng được chọn có ít nhất một đoạn thẳng là cạnh của* (H)"

Biến cố đối của A là $\overline{A}$: " *hai đoạn thẳng được chọn không có đoạn thẳng nào là cạnh của* (H)"

Có 28 – 8 = 20 đoạn thẳng không là cạnh của (H) suy ra $n(\overline{A}) = C_{20}^2$. Vậy xác suất của biến cố A là:

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{20}^2}{C_{28}^2} = \frac{94}{189}.$$

Câu 5. Ta có $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

$I_1 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$, đặt

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, thì $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -1 + \sqrt{2}$.

Vậy $I = \dfrac{-2 + 3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. Đường thẳng d có VTCP: $\vec{u} = (2;2;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d, khi đó mp(P) nhận VTCP của d là $\vec{u} = (2;2;-1)$ làm VTPT. Từ đó PT (P) là:

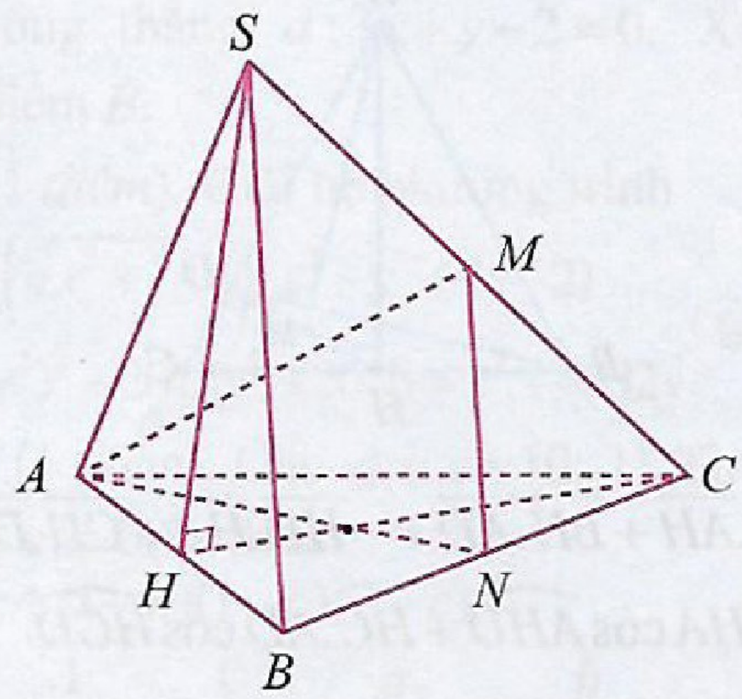
$$2x + 2y - z - 6 = 0.$$

Vì A thuộc d nên $A(1+2t; -1+2t; -t)$;

$OA = \sqrt{(1+2t)^2 + (-1+2t)^2 + t^2} = \sqrt{11} \Leftrightarrow t = 1$

hoặc $t = -1$. Vậy $A(3; 1; -1)$ hoặc $A(-1; -3; 1)$.

Câu 7. *) Gọi H là trung điểm AB, thì $SH \perp (ABC)$. Từ giả thiết ta có $SH = CH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.



Ta có ΔSHC vuông cân tại H

$\Rightarrow SC = CH\sqrt{2} = \dfrac{AB\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = a$.

Suy ra $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{a^3}{8}$ (đvtt).

*) Gọi N là trung điểm BC thì SB // (AMN).

$d(SB, AM) = d(SB, (AMN))$

$= d(S, (AMN)) = \dfrac{3V_{S.AMN}}{S_{AMN}}$; $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACN}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ACN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SH.S_{ACN} = \dfrac{a^3}{32}$.

Có $MN=\frac{SB}{2}=\frac{a}{2}; AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Từ định lý côsin có

$\cos\widehat{ANM}=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow \sin\widehat{ANM}=\frac{\sqrt{13}}{4}$;

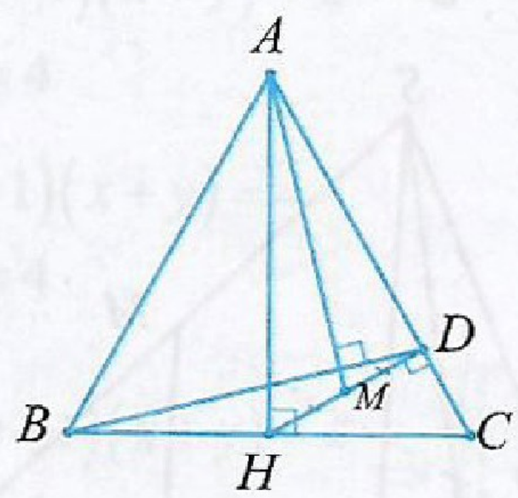
$S_{AMN}=\frac{1}{2}.NM.NA.\sin\widehat{ANM}=\frac{a^2\sqrt{39}}{32}$.

Vậy $d(SB,AM)=\frac{3V_{S.AMN}}{S_{AMN}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 8. Ta có $B(3;1)$. Từ M là trung điểm HD suy ra $2.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}$;

$2.\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}\right)\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD}$.



Mà $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{DA}$

$=-HD.HA\cos\widehat{AHD}+HC.AD\cos\widehat{HCD}$

$=-HD^2+AD.CD=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow BD\perp AM$.

AM: $x-y+2=0$, $A=AM\cap AB$ nên $A(2;4)$; $D(a;4-a)$, M là trung điểm HD nên

$H\left(\frac{3}{2}-a;\frac{3}{2}+a\right)$, $\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{3}{2}-a;\frac{1}{2}+a\right)$;

$\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{1}{2}-a;-\frac{5}{2}+a\right)$, ta có

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{3}{2}-a\right)\left(-\frac{1}{2}-a\right)+\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(-\frac{5}{2}+a\right)=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ hoặc $a=-\frac{1}{2}$.

Với $a=\frac{1}{2}$ thì $H(1;2)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$, $C(-1;3)$.

Với $a=-\frac{1}{2}$ thì $H(2;1)$, $D\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$, $C(1;1)$ loại, vì A, C, D không thẳng hàng. Vậy $C(-1;3)$.

Câu 9. ĐK: $x\ge 3$. PT đã cho tương đương với

$(x-4)(x^2-3x-3)=(x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})\frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-3x-3=\frac{(x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}+1}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-3x-3=\frac{(x-3)(x-2+5\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}+1}\end{array}\right.$ (1)

Ta có $x=3$ không là nghiệm của PT(1), do đó $x>3\Rightarrow x-4>-1$ và

$(1)\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2+5(x-4)+1}{(x-4)+1}=\frac{(\sqrt{x-3})^2+5\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1}$ (2).

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+5t+1}{t+1}$ trên $(-1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{t^2+2t+4}{(t+1)^2}>0, \forall t\in(-1;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Mà (2) có dạng $f(x-4)=f(\sqrt{x-3})\Leftrightarrow \sqrt{x-3}=x-4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-9x+19=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT đã cho có hai nghiệm: $x=4; x=\frac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 10. Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ thì $x>0, y>0, z>0; x^2+y^2+z^2\le 2$, và

$P=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}+\frac{1}{27xyz}$.

Ta chứng minh $\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{2x-y}{3}$ (*) đúng với mọi số dương x, y.

Thật vậy ta có $\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{2x-y}{3}$

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (1 *điểm*). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$.

Câu 2 (1 *điểm*). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$ trên đoạn [2; 5].

Câu 3 (1 *điểm*). a) Cho số phức z thỏa mãn $(2-3i)z + (4+i)\overline{z} = -(1+4i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

b) Giải phương trình

$$\log_{64}(x+1)^6 + 2 = \log_{\sqrt[4]{2}}\sqrt[4]{4-x} + \log_8(x+4)^3.$$

Câu 4 (1 *điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos x - \sin x}{\sin 2x + 2(\sin x + \cos x) + 2}\,dx.$$

Câu 5 (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 2)$, $C(0;\ -1;\ 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên tia Ox sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 2, khi đó hãy viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Câu 6 (1 *điểm*).

a) Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2015\cos 2\alpha + 2016\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin 2\alpha.\sin\alpha}$$

biết rằng $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.

b) Một bộ đề thi học sinh giỏi vòng trường mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "tốt".

Câu 7 (1 *điểm*). Cho tứ diện $OABC$ với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 45^\circ$, $\widehat{COA} = 30^\circ$. Gọi CH và CK lần lượt là đường cao của tam giác OAC và OBC. Tính thể tích tứ diện $OABC$.

Câu 8 (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm cạnh BC, phương trình đường thẳng $DM: x - y - 2 = 0$, đỉnh $C(3;-3)$ và đỉnh A nằm trên đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Xác định tọa độ điểm B.

Câu 9 (1 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)(x^2 - y^3 + 3y - 2) \\ (x^2+y^2)^2 + 2015y^2 + 2016 = x^2 + 4032y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1 *điểm*). Cho $a, b, c \in [0;\ 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = abc + (1-a)(1-b)(2-c) + \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1}.$$

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

$\Leftrightarrow 3x^3 \ge (2x-y)(x^2+xy+y^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \ge 0$ đúng với mọi $x, y > 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Tương tự

$$\frac{y^3}{y^2+yz+z^2} \ge \frac{2y-z}{3};\ \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \ge \frac{2z-x}{3}.$$

Mặt khác $\dfrac{1}{27xyz} \ge \dfrac{1}{(x+y+z)^3}$, nên

$P \ge \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{1}{(x+y+x)^3}$. Ta có

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \le 6 \Rightarrow x+y+z \le \sqrt{6}$.

Đặt $t = x+y+z \Rightarrow t \in (0;\sqrt{6}]$, khi đó

$P \ge f(t) = \dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{t^3}, t \in (0;\sqrt{6}]$;

$f'(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{t^4}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$ (do $t \in (0;\sqrt{6})$).

Lập bảng biến thiên ta được

$P \ge f(t) \ge f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}, \forall t(0;\sqrt{6}]$.

Khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ thì $P = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, vậy $\min P = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

ĐẬU XUÂN NAM
(GV THPT Trần Phú, Tây Ninh)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/466 (Lớp 6). Cho x, y, z là các số nguyên với $x \neq y$ và thỏa mãn $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x^2+z^2}{y^2+z^2}$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2$ không thể là một số nguyên tố.

NGUYỄN CHÍNH TÂM
(Học viên lớp Cao học K20, Viện Toán học Việt Nam)

Bài T2/466 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $AB < AC$, AD là đường phân giác. E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BE = CF$. G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BF, CE. Chứng minh rằng $GH \perp AD$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/466. Cho các số nguyên dương a, b, c phân biệt thỏa mãn $ab+bc+ca \geq 674$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc$.

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài T4/466. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB, HF vuông góc với AC ($E \in AB$, $F \in AC$). Gọi K là giao điểm của HE và BF, G là giao điểm của HF và CE. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc đoạn thẳng HB, HC sao cho tứ giác $EMHG$ và $FNHK$ nội tiếp. Chứng minh rằng $KN = GM$.

NGUYỄN DŨNG
(GV THCS Bắc Bình I, Bình Thuận)

Bài T5/466. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5+y^3=2z \\ y^5+z^3=2x \\ z^5+x^3=2y \end{cases}.$$

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/466. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq \pi$. Chứng minh rằng

$$0 \leq a - \sin a - \sin b - \sin c + \sin(a+b) + \sin(a+c) \leq \pi.$$

VÕ QUỐC BÁ CẨN *(Hà Nội)*

Bài T7/466. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \frac{4\pi}{5}.$$

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài T8/466. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Dựng đường tròn tâm I đường kính AH. Đường tròn (I) cắt AB, AC theo thứ tự tại T, S. Các tiếp tuyến với đường tròn (I) tại T, S cắt nhau tại M. Gọi N là giao điểm của BC và MA, K là giao điểm của BS và CT, J là giao điểm của TS và IM. Chứng minh rằng NJ đi qua trung điểm của AK.

HỒ QUANG VINH *(Hà Nội)*

Bài T9/466. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Tìm

$$\max\left(\min\left\{\frac{a_1+a_2}{1+a_3^2}; \frac{a_2+a_3}{1+a_4^2}; \ldots; \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{1+a_n^2}; \frac{a_{n-1}+a_n}{1+a_1^2}; \frac{a_n+a_1}{1+a_2^2}\right\}\right).$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/466. Chứng minh rằng

$$\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$$

là một số nguyên với mọi số nguyên $n \geq 3$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/466. Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \sqrt{y_n - x_{n+1}^2 + 1} = x_n \\ \sqrt{3 + x_{n+1}^2 - y_n} + \sqrt{10 + y_{n-1} - x_{n-1}^2} + \dfrac{1-5n}{n} = 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng hai dãy số (x_n) và (y_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng, tìm giới hạn của hai dãy số đó.

NGUYỄN LÁI

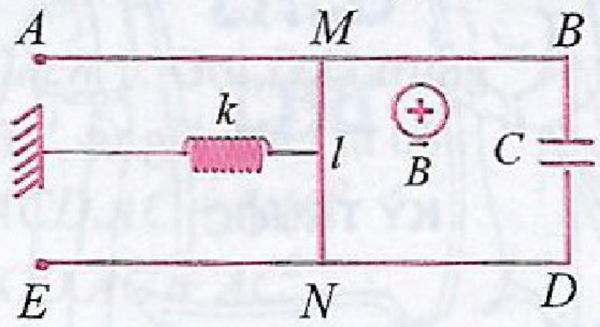
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T12/466. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

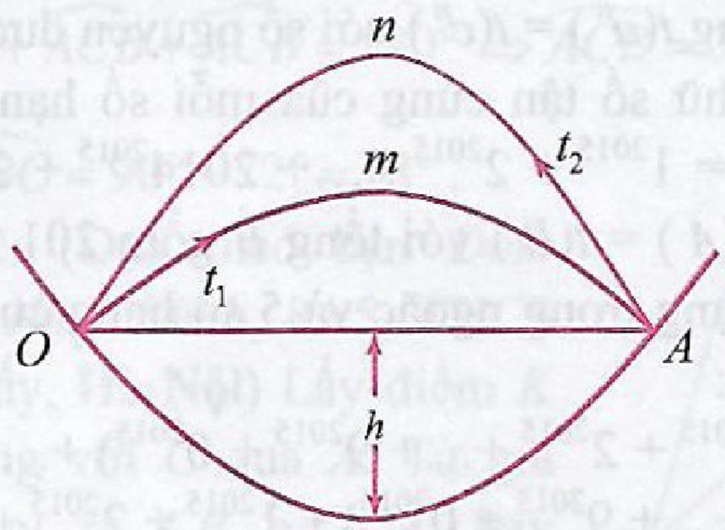
Bài L1/466. Cho hệ như hình dưới. Coi khung dây $ABDE$ không có điện trở và AB // ED đặt nằm ngang ; tụ điện có điện dung C, lò xo có độ cứng k; đoạn dây MN có độ dài l và khối lượng không đáng kể, tiếp xúc với khung và có thể chuyển động tịnh tiến, không ma sát dọc theo khung. Cả hệ được đặt trong từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ có hướng vuông góc với mặt khung. Tịnh tiến MN khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông. Chứng minh rằng MN dao động điều hoà và tìm tần số góc của dao động.



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH *(Hà Nội)*

Bài L2/466. Trong lòng giếng Paraboloid, ở độ cao h, một viên bi nhỏ va chạm liên tiếp tại 2 điểm đối diện nhau trên thành giếng tạo thành một quỹ đạo khép kín ổn định $OmAnO$. Biết thời gian viên bi thực hiện từng đoạn OmA, AnO lần lượt là t_1 và t_2. Bỏ qua năng lượng mất mát do va chạm, ma sát không khí không đáng kể và giả thiết va chạm là tuyệt đối đàn hồi. Xác định:

a) Khẩu độ OA? b) Cao độ h?



NGÔ AN HÒA KỲ *(TP. Hồ Chí Minh*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/466 (For 6th grade). Let x, y, and z be integers satisfying $x \neq y$ and $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x^2+z^2}{y^2+z^2}$. Prove that $x^2+y^2+z^2$ is not a prime number.

Problem T2/466 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $AB < AC$. Let AD be the angle bisector. Let E and F respectively be points on the sides AB and AC such that $BE = CF$. If G and H respectively are the midpoints of BF and CE, prove that $GH \perp AD$.

Problem T3/466. Given 3 different positive integers a, b, and c satisfying $ab+bc+ca \geq 674$. Find the minimum values of the expression

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc.$$

Problem T4/466. Given an acute triangle ABC with the altitude AH. Let $E \in AB$ and $F \in AC$ such that HE is perpendicular to AB and HF is perpendicular to AC. Assume that HE and BF intersect at K and HF and CE intersect at G. Choose M and N respectively on the line segments HB and HC such that $EMHG$ and $FNHK$ are inscribed quadrilaterals. Prove that $KN = GM$.

Problem T5/466. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^5 + y^3 = 2z \\ y^5 + z^3 = 2x \\ z^5 + x^3 = 2y \end{cases}.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/462. *Tìm chữ số tận cùng của tổng gồm 2015 số hạng sau*

$A = 1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \ldots + 2014^{2015} + 2015^{2015}$.

Lời giải. • Gọi chữ số tận cùng bên phải của số x là $t(x)$. Giả sử $a = 10b + c$ và $d = 10g + e$ với các số nguyên dương a, b, c, d, g, e thì $a + d = 10(b + g) + c + e$ nên $t(a + d) = t(c + e)$. Từ $ad = (10b + c)(10g + e) = 10(10bg + be + cg) + ce$ suy ra $t(ad) = t(ce)$.

Nói riêng $t(a^n) = t(c^n)$ với số nguyên dương n.

• Xét chữ số tận cùng của mỗi số hạng trong tổng $A = 1^{2015} + 2^{2015} + \ldots + 2014^{2015} + 2015^{2015}$ ta có $t(A) = t(B)$ với tổng B gồm 201 tổng có 10 số hạng trong ngoặc và 5 số hạng cuối cùng như sau:

$B = (1^{2015} + 2^{2015} + \ldots + 9^{2015} + 0^{2015}) + \ldots + (1^{2015} + 2^{2015} + \ldots + 9^{2015} + 0^{2015}) + 1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015} + 5^{2015} = 201(1 + 2^{2015} + 3^{2015} + \ldots + 9^{2015}) + 1 + 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015} + 5^{2015}$.

• Với số nguyên dương n thì:

$t(5^n) = 5$; $t(6^n) = 6$; $t(9^2) = 1$ nên $t(9^{2n}) = 1$, $t(9^{2n+1}) = 9$; $t(3^{4n}) = t(9^{2n}) = 1$; $t(7^{4n}) = t(49^{2n}) = t(9^{2n}) = 1$; $t(4^{2n}) = t(16^n) = t(6^n) = 6$;

$t(2^{4n}) = t(4^{2n}) = 6$; $t(8^{4n}) = t(64^{2n}) = t(4^{2n}) = 6$.

• Từ đó và $2015 = 4.503 + 3$ nên $t(9^{2015}) = t(9^{4.503}.9^3) = t(1.9) = 9$ suy ra $t(1 + 9^{2015}) = t(1 + 9) = 0$; $t(2^{2015}) = t(2^{4.503}.2^3) = t(6.8) = 8$; $t(8^{2015}) = t(8^{4.503}.8^3) = t(6.2) = 2$ suy ra $t(2^{2015} + 8^{2015}) = t(8 + 2) = 0$; $t(4^{2015}) = t(4^{4.503}.4^3) = t(6.4) = 4$ suy ra $t(4^{2015} + 6^{2015}) = t(4 + 6) = 0$; $t(3^{2015}) = t(3^{4.503}.3^3) = t(1.7) = 7$; $t(7^{2015}) = t(7^{4.503}.7^3) = t(1.3) = 3$ suy ra $t(3^{2015} + 7^{2015}) = t(7 + 3) = 0$. Do vậy $t(A) = t(B) = t(201.5 + 1 + 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015} + 5^{2015}) = t(5 + 1 + 8 + 7 + 4 + 5) = 0$. Vậy tổng A có chữ số tận cùng bằng 0. ❐

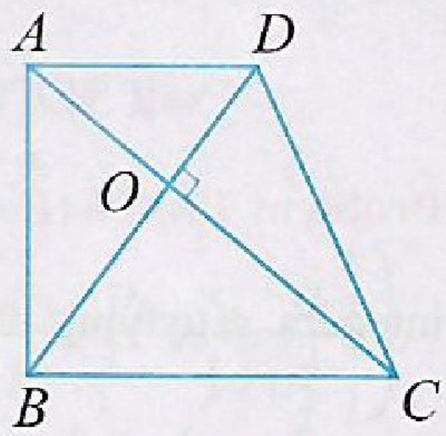
➢***Nhận xét.*** 1) Chú ý rằng có thể $t(c) + t(e) > 9$ nên $t(c + e)$ không chắc bằng $t(c) + t(e)$. Tương tự có thể $t(c)\,t(e) > 9$ nên $t(c)\,t(e)$ không chắc bằng $t(ce)$.

2) *Cách giải khác*: $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1)$ chia hết cho $2.5 = 10$, suy ra $a^{2015} - a^3 = a^3(a^{4.503} - 1) = a(a^4 - 1)k$ chia hết cho 10 (với số nguyên dương k). Từ đó $t(A) = t(C)$ với $C = 1^3 + 2^3 + \ldots + 2014^3 + 2015^3$, sau đó xét $t(C) = t(D)$ với $D = 201(1 + 2^{2015} + 3^{2015} + \ldots + 9^{2015}) + 1 + 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015} + 5^{2015}$.

3) Các bạn sau có lời giải đầy đủ: **Phú Thọ:** *Hạ Hiền Lương*, 6A2, *Cao Ngọc Khoa*, *Vũ Minh Khải*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Quỳnh Anh, Lê Trung Hiếu, Nguyễn Vũ Ngọc Linh, Nguyễn Thị Thu Nga, Nguyễn Thị Hoàng Ngân, Nguyễn Thị Ngọc Ánh*, 6A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Lê Hải Phong*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Ngọc Sơn, Nguyễn Ngọc Mai, Trần Ngọc Khiêm, Đặng Đình Huy, Phan Văn Nam, Nguyễn Tiến Đức, Phạm Huỳnh, Trần Đức Tùng, Nguyễn Hưng Phát, Cao Thị Khánh Linh*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Võ Đình Nguyên*, 6A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **TP. Hồ Chí Minh:** *Ngô Võ Hoàng Việt*, 6A3, TrH thực hành Sài Gòn, Q. 5; **Cần Thơ:** *Văn Tuấn Kiệt, Đoàn Minh Quân*, 6A7, THCS Thốt Nốt, Q. Thốt Nốt, TP. Cần Thơ.

VIỆT HẢI

Bài T2/462. *Cho hình thang vuông ABCD (vuông tại A và B), AD < BC, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2 = 3AB^2 + CD^2$.*



Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABC, ABD, AOB, BOC, COD, DOA, ta có:

$$AC^2 + BD^2 = (AB^2 + BC^2) + (AB^2 + AD^2)$$
$$= 2AB^2 + (OB^2 + OC^2) + (OA^2 + OD^2)$$
$$= 2AB^2 + (OB^2 + OA^2) + (OC^2 + OD^2) = 3AB^2 + CD^2$$

(đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** 1. Bài toán này quá dễ, tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng. Giả thiết $AD < BC$ là không cần thiết.

2. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn giải thích rõ ràng: **Hải Phòng:** *Vũ Dương Bình*, 7A1, THCS

Hồng Bàng; **Vĩnh Phúc:** *Lê Hồng Nhung*, 7A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Lương Thị Minh Huyền, Tống Thu Hà*, 7A1, *Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Chí Công, Triệu Hồng Ngọc, Bùi Tiến Mạnh, Nguyễn Thu Hương, Nguyễn Việt Thu, Tạ Hoàng Hải, Vũ Ngọc Ánh, Nguyễn Hồng Khải, Nguyễn Đức Tân*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 7A, *Thái Bá Tuấn Anh*, 7B, *Nguyễn Sỹ Trọng, Trần Thị Minh Nguyệt, Nguyễn Thu Hiền*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Ngọc Ánh*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Kỳ Duyên, Nguyễn Hoàng Kim Ánh*, 7A, THCS Hành Trung; *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Kim Vang, *Bùi Thị Lệ Giang, Văn Quang Tuệ, Lê Tuấn Kiệt*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/462. *Có tồn tại hay không các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho hai phương trình* $x^2+2ax-b-2=0$ *và* $x^2+bx-a=0$ *đồng thời có nghiệm nguyên?*

Lời giải. Điều kiện cần để hai PT trên đồng thời có nghiệm nguyên là hai biệt thức $\Delta_1'=a^2+b+2$ và $\Delta_2=b^2+4a$ đều là các số chính phương. Do a, b nguyên dương, khi đó ta có

$a^2+b+2>a^2 \Rightarrow a^2+b+2\ge(a+1)^2$

hay $b+1\ge 2a$; (1)

$b^2+4a>b^2 \Rightarrow b^2+4a\ge(b+1)^2$

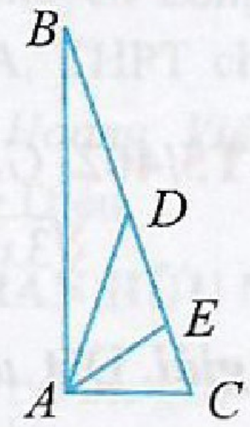
hay $2a\ge b+\dfrac{1}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a=b+1$ hay $b=2a-1$. Thay trở lại Δ_1' và Δ_2 ta được $\Delta_1'=(a+1)^2$ là số chính phương nhưng $\Delta_2=(2a)^2+1$ không phải là số chính phương với mọi a nguyên dương. Do đó không tồn tại cặp số nguyên dương (a, b) nào thỏa mãn yêu cầu của đề bài. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tính toán nhầm lẫn hoặc lập luận sai dẫn đến kết luận không đúng. Các bạn được khen kì này là: **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy, quận Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Thị Liễu Dương, Chu Thị Nhung*, 9A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, *Đinh Viết Tỵ*, 9D, *Tăng Văn Minh Hùng, Nguyễn Văn Mạnh, Hoàng Trần Đức, Nguyễn Thu Giang, Trần Lê Hiệp*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/462. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Các cạnh của tam giác thỏa mãn điều kiện:* $BC^2=2BC.AC+4AC^2$. *Tính số đo góc* $\widehat{ABC}$.



Lời giải. *Cách* 1. Gọi D là trung điểm của BC, từ giả thiết ta có

$(2CD)^2=4CD.AC+4AC^2$

$\Leftrightarrow CD^2=CD.AC+AC^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{CD}{CD+AC}$ (1)

Kẻ phân giác trong AE của ΔACD. Theo tính chất đường phân giác ta có

$\dfrac{EC}{ED}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AC}{DC} \Rightarrow \dfrac{EC}{CD}=\dfrac{AC}{AC+CD}$ (2)

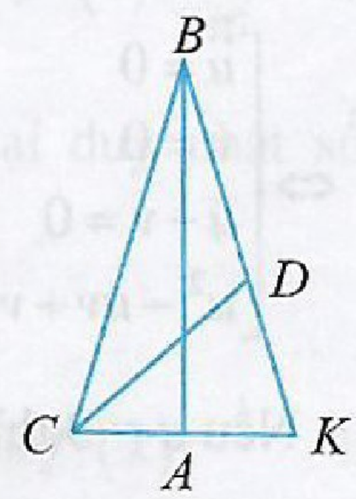
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{CD}{CD+AC}=\dfrac{AC}{CD}$.

Suy ra $\Delta ACE \backsim \Delta DCA$, nên ΔACE cân tại A.

Lại có $\widehat{EAC}=\dfrac{1}{2}\widehat{CAD}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$, do đó

$\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}+\widehat{ACB}+\widehat{ACB}=180^\circ \Rightarrow \widehat{ACB}=72^\circ$.

Vậy $\widehat{ABC}=90^\circ-72^\circ=18^\circ$.



Cách 2. (Dựa theo bạn *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy, **Hà Nội**) Lấy điểm K đối xứng với C qua A. Từ giả thiết suy ra $CB>2CA$, hay $BC>CK \Rightarrow \widehat{KCB}>\widehat{CBK}$.

Lấy điểm D trên đoạn BK sao cho $\widehat{CDK}=\widehat{CKD}$.

Suy ra $\Delta BCK \backsim \Delta CKD$, ta có $\dfrac{BC}{CK}=\dfrac{CK}{KD}$

$\Rightarrow CK^2=BC.KD$, hay $4AC^2=BC(BC-BD)$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $BC.BD=2BC.AC$, hay $BD=CK=CD$, nên ΔCDB cân tại D. Vậy $\widehat{BKC}=\widehat{KDC}=2\widehat{CBK}=4\widehat{ABC}$, từ đó suy ra $\widehat{ABC}+4\widehat{ABC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC}=18^\circ$. ❐

➢***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán trên, một số bạn kết luận $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \Leftrightarrow \widehat{ABC}=18^\circ$ mà không chứng minh. Ngoài bạn *Minh*, các bạn dưới đây cũng cho lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hiếu, Chu Thị Nhung, Trần Đức Duy, Dương Quang Tùng*, 9A4, THCS Yên Lạc; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh

Hoá; *Trần Quốc Phương*, 8A, THCS Thị trấn Thường Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Khánh Hoà:** *Trần Minh Quân*, 9/6, THCS Chu Văn An, Ninh Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/462. *Giải phương trình*

$$\sqrt[5]{3x-2}-\sqrt[5]{2x+1}=\sqrt[5]{x-3}.$$

Lời giải. Đặt $u=\sqrt[5]{3x-2}$, $v=\sqrt[5]{2x+1}$ thì

$$u^5-v^5=(3x-2)-(2x+1)=x-3.$$

Do đó phương trình đã cho trở thành

$$u-v=\sqrt[5]{u^5-v^5}$$

$$\Leftrightarrow (u-v)^5=u^5-v^5$$

$$\Leftrightarrow (u-v)\left((u-v)^4-(u^4+u^3v+u^2v^2+uv^3+v^4)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4$$
$$-u^4-u^3v-u^2v^2-uv^3-v^4)=0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(5u^2v^2-5u^3v-5uv^3)=0$$

$$\Leftrightarrow uv(u-v)(u^2-uv+v^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \\ u-v=0 \\ u^2-uv+v^2=0 \end{array}\right.$$

+ Nếu $u=0$ thì $\sqrt[5]{3x-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

+ Nếu $v=0$ thì $\sqrt[5]{2x+1}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

+ Nếu $u-v=0$ thì

$\sqrt[5]{3x-2}=\sqrt[5]{2x+1}\Leftrightarrow 3x-2=2x+1\Leftrightarrow x=3$.

+ Xét trường hợp $u^2-uv+v^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(u-\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}=0\Leftrightarrow \begin{cases} u-\frac{v}{2}=0 \\ v=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Điều này không thể xảy ra.

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3};3\right\}.$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia đều giải theo cách tương tự như trên. Một số bạn còn thiếu xét trường hợp $u^2-uv+v^2=0$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Nghĩa*, 9D, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Cường*, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Hà Nam:** *Trần Hoài Giang*, 8A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tình*, 9A1, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi*, *Hoàng Thị Hồng Ngát*, *Trần Quốc Lập*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Vũ Phương Anh*, 9D, THCS Lý Tự Trọng; *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Trịnh Thị Kim Chi*, *Nguyễn Văn Mạnh*, 9A, *Đinh Viết Tỵ*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, *9D*, THCS Nhữ Bá Sỹ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/462. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+9}=\sqrt[4]{3^{y+4}} \\ y+\sqrt{y^2+9}=\sqrt[4]{3^{z+4}} \\ z+\sqrt{z^2+9}=\sqrt[4]{3^{x+4}} \end{cases}.$$

Lời giải. Xét các hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+9}$ và $g(t)=\sqrt[4]{3^{t+4}}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}=\frac{\sqrt{t^2+9}+t}{\sqrt{t^2+9}}>\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+9}}\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $g(t)=\sqrt[4]{3^{t+4}}=3^{\frac{t}{4}+1}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$. Đây là hệ hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Xét trường hợp: $x\geq y\geq z\Rightarrow f(x)\geq f(y)\geq f(z)$

$\Rightarrow g(y)\geq g(z)\geq g(x)\Rightarrow y\geq z\geq x\geq y$.

Xét trường hợp: $x\geq z\geq y$

$\Rightarrow f(x)\geq f(z)\geq f(y)\Rightarrow g(y)\geq g(x)\geq g(z)$

$\Rightarrow y\geq x\geq z\geq y$. Cả hai trường hợp ta đều có

$x = y = z$. Do đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành: $\begin{cases} x = y = z \\ x + \sqrt{x^2+9} = \sqrt[4]{3^{x+4}} \quad (1) \end{cases}$.

Ta có : $(1) \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}x+1}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right) = 9$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}x}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right) - 3 = 0.$$

Xét hàm số: $h(x) = 3^{\frac{1}{4}x}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right) - 3$ trên $\mathbb{R}$, có: $h'(x) = 3^{\frac{1}{4}x}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right)\left(\dfrac{\ln 3.\sqrt{x^2+9} - 4}{4\sqrt{x^2+9}}\right)$.

Do $3^{\frac{1}{4}x}\left(\sqrt{x^2+9} - x\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $h'(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm. Khi đó phương trình $h(x) = 0$ có nhiều nhất 3 nghiệm. Mặt khác ta nhận thấy $x = -4, x = 0, x = 4$ thỏa mãn phương trình $h(x) = 0$. Vậy phương trình $h(x) = 3$ có đúng 3 nghiệm là $x = -4$, $x = 0, x = 4$. Vậy hệ đã cho có đúng 3 nghiệm là: $(-4;-4;-4), (0;0;0), (4;4;4)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Lập luận trong lời giải trên thực chất đã sử dụng hệ quả của định lý Rolle: *Nếu hàm f có đạo hàm trên khoảng (a;b) và nếu PT $f'(x) = 0$ vô nghiệm trên (a;b) thì PT $f(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên (a;b); còn nếu PT $f'(x) = 0$ có n nghiệm trên (a;b) thì PT $f(x) = 0$ có nhiều nhất n+1 nghiệm trên (a;b)*. Như vậy để chứng minh PT(1) có nhiều nhất 3 nghiệm ta cũng có thể tìm đạo hàm đến cấp 3 và chứng minh đạo hàm này dương (hoặc âm). Hệ quả trên là khá hiển nhiên nếu ta dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm số trong trường hợp hàm số đồng biến, nghịch biến, cũng như khi hàm số có cực trị. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Cao*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; *Trần Bá Khôi*, 11T2, *Phạm Ngọc Khánh*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; *Nguyễn Tuấn Vượng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1; *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi*, 11A1-K10, THPT Yên Phong số 2; *Lê Huy Cường*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh. **Quảng Nam:** *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An. **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, 12A, THPT chuyên Quang Trung. **Đồng Tháp:** *Đỗ Hoàng Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/462. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (đo bằng radian). Chứng minh rằng*

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{5}{2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\pi^2}.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \sin x - \dfrac{5x}{2\pi} + \dfrac{x^2}{\pi^2}$ với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta có:

$f'(x) = \cos x - \dfrac{5}{2\pi} + \dfrac{2x}{\pi^2}$; $f''(x) = -\sin x + \dfrac{2}{\pi^2}$; $f'''(x) = -\cos x < 0$. Hàm số $f''(x)$ nghịch biến và liên tục trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Có $f''(0) = \dfrac{2}{\pi^2} > 0$; $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 + \dfrac{2}{\pi^2} < 0$ nên tồn tại duy nhất số $x_1 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$:

x	0		x_1		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$1 - \frac{5}{2\pi}$	↗	$f'(x_1)$	↘	$-\frac{3}{2\pi}$

Lại có

$f'(x_1) > f'(0) = 1 - \dfrac{5}{2\pi} > 0$; $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{3}{2\pi} < 0$

nên tồn tại duy nhất $x_2 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (thực chất $x_2 \in \left(x_1; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; x_1)$) sao cho $f'(x_2) = 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	0		x_2		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta được $f(x)>0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Nghĩa là $\sin x > \frac{5x}{2\pi} - \frac{x^2}{\pi^2}, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $\sin A > \frac{5A}{2\pi} - \frac{A^2}{\pi^2}$; $\sin B > \frac{5B}{2\pi} - \frac{B^2}{\pi^2}$;

$\sin C > \frac{5C}{2\pi} - \frac{C^2}{\pi^2}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và thay $A+B+C=\pi$, ta được:

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{5}{2} - \frac{A^2+B^2+C^2}{\pi^2}.$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán khó về ứng dụng hàm số chứng minh bất đẳng thức.

Để khảo sát hàm số $f(x)$, xác định dấu của đạo hàm $f'(x)$, ta phải sử dụng đến $f''(x)$ và $f'''(x)$. Điều then chốt là chứng minh mỗi phương trình $f'(x)=0$; $f''(x)=0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, từ đó suy ra dấu của chúng trong khoảng này. Bạn *Nghiêm Chi*, 11A1, THPT Yên Phong số 2, H. Yên Phong, **Bắc Ninh** có lời giải tương tự như trên.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T8/462. *Tìm độ dài các cạnh của khối diện ABCD nội tiếp trong hình cầu bán kính bằng 1 và có tích độ dài các cạnh là* $\frac{512}{27}$.

Lời giải. Gọi $a_1, a_2, ..., a_6$ là độ dài các cạnh của khối tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong hình cầu tâm O, bán kính 1. Để ý rằng với các điểm M, N, P bất kỳ ta luôn có: $2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = MN^2 + MP^2 - NP^2$.

Do đó: $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 4 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

$+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} \ge 0$

$\Leftrightarrow 16 - \sum_{i=1}^{6} a_i^2 \ge 0$ (*)

Từ đó $16 \ge \sum_{i=1}^{6} a_i^2 \ge 6\sqrt[6]{\prod_{i=1}^{6} a_i^2} = 16$

(áp dụng BĐT Cauchy cho 6 số $a_i^2 (i=\overline{1,6})$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$ và $a_1=a_2=...=a_6=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vậy các cạnh của tứ diện $ABCD$ có độ dài bằng nhau và bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều sử dụng định lý Lagrange: *Giả sử G là trọng tâm của hệ m điểm* $A_1, A_2, ..., A_m$ *và M là một điểm tùy ý trong không gian. Khi đó ta có hệ thức*

$MG^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} MA_i^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} A_iA_j^2$ để đi đến BĐT (*).

Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Anh Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Quảng Nam:** *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đăk Nông:** *Phan Nguyễn Huy Hoàng*, 10A1, *Trương Tiến Hoàng*, *Trần Văn Trí*, 11A1, THPT Chu Văn An, TX. Gia Nghĩa; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/462. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng*

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \le 2 \quad (1)$$

Lời giải (*Theo đa số các bạn*). Ta có:

$(1) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2 + (ab+bc+ca)(a+b+c)^2$

$\le 2(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2 + (ab+bc+ca)$

$\times [(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)]$

$\le 2(a^2+b^2+c^2)^2 + 4(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2-3(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$$
$$+2(ab+bc+ca)^2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow [(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)][(a^2+b^2+c^2)$$
$$-2(ab+bc+ca)] \le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\,[a(a-b-c)$$
$$+b(b-c-a)+c(c-a-b)] \le 0, \text{đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán về bất đẳng thức cơ bản trong tam giác thuộc loại dễ của THCS nên có nhiều bạn lớp 7, 8 và 9 cũng giải được (theo đúng cách đã trình bày ở trên). Những bạn sau có lời giải tốt và ngắn gọn nhất: **Hà Nội:** *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Trần Nhật Quang*, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Tuấn Vượng*, *Lê Anh Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, H. Văn Giang; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Đặng Duy Bảo Khánh*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Võ Việt Anh*, *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, *Nguyễn Huy Hùng Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Trần Hướng*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Huy Mân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Long:** *Trần Phước Phú Khánh*, *Lê Nguyễn Minh Long*, 11T1, *Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, *Đặng Thành Trung*, 11T2, THPT chuyên Long An, TP. Tân An; **Tây Ninh:** *Lê Hiền Khải*, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, TP. Tây Ninh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/462. *Với các số nguyên dương a, b, c thuộc đoạn* $[1;2015]$, *hỏi có tất cả bao nhiêu bộ (a, b, c) sao cho* $a^3+b^3+c^3$ *chia hết cho 9?*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Giáp Phương Duy*, 12A1, THPT Hậu Nghĩa, **Long An** và bạn *Hoàng Công Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**).

Với mỗi số nguyên x đặt $x=3k+r,\ r\in\{0,1,2\}$.

Ta có $x^3=(3k+r)^3\equiv r^3 \pmod 9$.

Từ đó $x^3\equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow x\equiv 0 \pmod 3$;

$x^3\equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow x\equiv 1 \pmod 3$;

$x^3\equiv -1 \pmod 9 \Leftrightarrow x\equiv 2 \pmod 3$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3\equiv 0 \pmod 9$ khi và chỉ khi:

Trường hợp 1. Cả ba số a, b, c chia hết cho 3.

Trường hợp 2. Có một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1 và một số chia cho 3 dư 2.

Dễ thấy trong đoạn [1; 2015] có 671 số chia hết cho 3, 672 số chia 3 dư 1 và 672 số chia 3 dư 2. Vậy số bộ (a, b, c) ở trường hợp 1 là 671^3; số bộ (a, b, c) ở trường hợp 2 là

$$3!(671)(672)(672)=6.671.672^2.$$

Thành thử số bộ (a, b, c) thỏa mãn điều kiện đề bài là $671^3+6.671.672^2=2120188895$. ❐

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Bình Phước: *Bùi Công Minh*, 12A, THPT chuyên Quang Trung; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Minh Hải*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Cà Mau:** *Trần Quốc Việt*, 11 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Tây Ninh:** *Lê Hiền Khải*, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Lê Kha; **Hà Nam:** *Nguyễn Mạnh Cường*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy, *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/462. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\left|6a^3+bc\right|+\left|6b^3+ca\right|+\left|6c^3+ab\right|$.

Lời giải. Áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có $\left|6a^3\right|=\left|(6a^3+bc)-bc\right|\le\left|6a^3+bc\right|+\left|bc\right|$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(6a^3+bc).bc\le 0$.

Suy ra $\left|6a^3+bc\right|\ge\left|6a^3\right|-\left|bc\right|\ge\left|6a^3\right|-\dfrac{b^2+c^2}{2}$ (1)

(theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số b^2, c^2)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số $|a|^3, |a|^3, \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ta có $|a|^3 + |a|^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$\geq 3\sqrt[3]{|a|^3.|a|^3.\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3}a^2 \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta nhận được

$$|6a^3 + bc| \geq 3.2|a^3| - \frac{b^2+c^2}{2}$$

$$\geq 3\left(\sqrt{3}.a^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \frac{b^2+c^2}{2} = 3.\sqrt{3}.a^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{b^2+c^2}{2}.$$

Tương tự $|6b^3 + ac| \geq 3.\sqrt{3}.b^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{c^2+a^2}{2}$,

$$|6c^3 + ab| \geq 3.\sqrt{3}.c^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$$P = |6a^3 + bc| + |6b^3 + ca| + |6c^3 + ab|$$

$$\geq (3\sqrt{3} - 1)(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 1.$$

$P = 2\sqrt{3} - 1$ khi và chỉ khi

$(6a^3 + bc)bc \leq 0, (6b^3 + ca)ca \leq 0, (6c^3 + ab)ab \leq 0,$

$|a| = |b| = |c| = \frac{1}{\sqrt{3}}, a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (a,b,c) \in \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

và các hoán vị$\Big\}$. Vậy $\min P = 2\sqrt{3} - 1$. □

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán bất đẳng thức giá trị tuyệt đối hay, khó. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy.

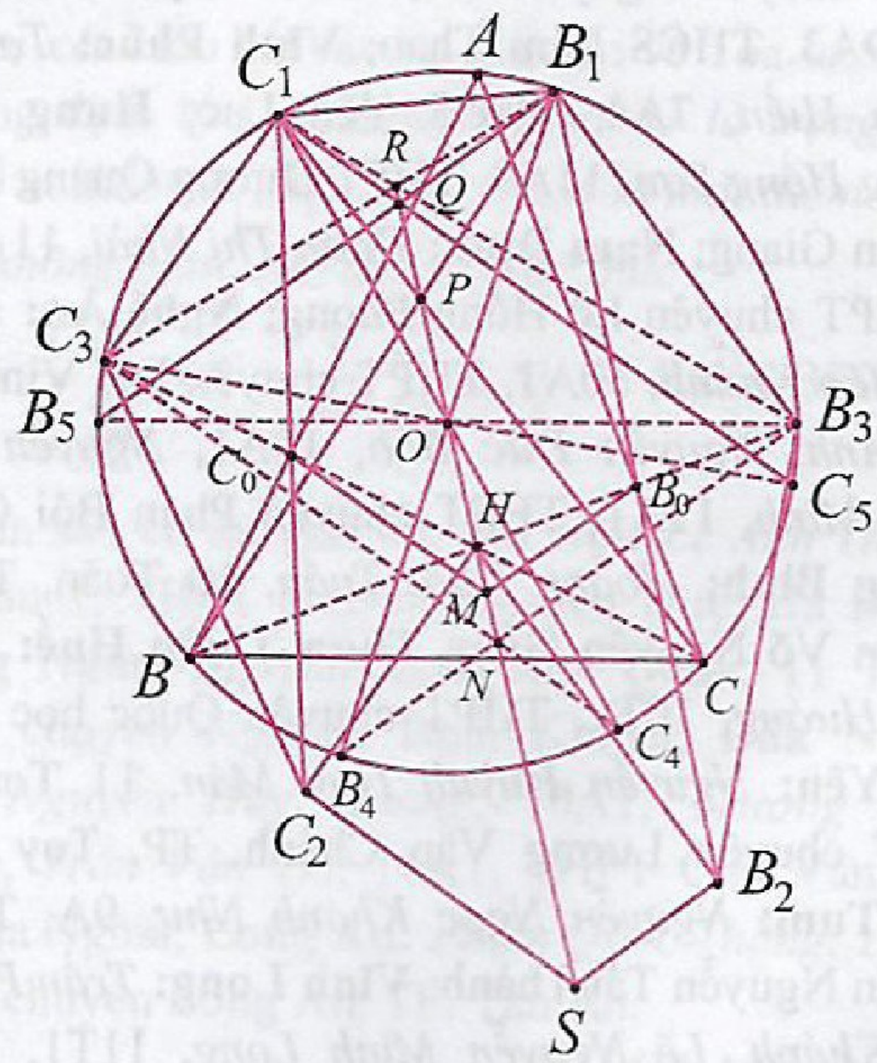
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 12/462. *Cho tam giác ABC với (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác. P là điểm bất kỳ trên OH. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là giao điểm của AH, BH, CH và BC, CA, AB. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP và (O). A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng H, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc OH.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. P là điểm bất kì thuộc OH. B_0, C_0 theo thứ tự là giao điểm của BH, CH và AC, AB. B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BP, CP và (O). B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của B_1, C_1 qua B_0, C_0. S là giao điểm của đường thẳng qua B_2 vuông góc với HB_2 và đường thẳng qua C_2 vuông góc với HC_2. Khi đó S thuộc OH.

Chứng minh.



Gọi B_3, C_3 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BH, CH và (O); B_4, C_4 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của B_1O, C_1O và (O); B_5, C_5 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của B_3O, C_3O và (O); $N = B_3B_4 \cap C_3C_4; Q = B_1B_5 \cap C_1C_5; R = B_1C_3 \cap C_1B_3$; M là trung điểm của HN.

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B_1B_3C \\ C_1C_3B \end{pmatrix}$, chú ý rằng $R = B_1C_3 \cap C_1B_3$; $P = B_1B \cap C_1C$; $H = B_3B \cap C_3C$, suy ra R, P, H, thẳng hàng (1).

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B_1B_3C_4 \\ C_1C_3B_4 \end{pmatrix}$,

chú ý rằng $R = B_1C_3 \cap C_1B_3$; $O = B_1B_4 \cap C_1C_4$; $N = B_3B_4 \cap C_3C_4$, suy ra R, O, N thẳng hàng (2)

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B_1B_3C_5 \\ C_1C_3B_5 \end{pmatrix}$, chú ý rằng $R = B_1C_3 \cap C_1B_3$; $Q = B_1B_5 \cap C_1C_5$; $O = B_3B_5 \cap C_3C_5$, suy ra R, Q, O thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng O, H, P thẳng hàng, suy ra O, H, N, Q thẳng hàng (4)

Dễ thấy B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của HB_3, HC_3.

Kết hợp với M là trung điểm của HN, suy ra $B_0M \,//\, B_3N$; $C_0M \,//\, C_3N$.

Từ đó, chú ý rằng $HB_1B_3B_2$, $HC_1C_3C_2$ là hình bình hành và $B_3N \perp B_3B_1$; $B_1Q \perp B_3B_1$; $B_2S \perp B_2H \,//\, B_3B_1$, suy ra $B_0M \,//\, B_1Q \,//\, B_2S$ (5)

Tương tự $C_0M \,//\, C_1Q \,//\, C_2S$ (6). Từ (5) và (6), chú ý rằng B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của B_1B_2, C_1C_2, suy ra M, Q, S thẳng hàng (7).

Từ (4) và (7), chú ý rằng H, M, N thẳng hàng, suy ra S thuộc OH.

Trở lại giải bài toán trên. Gọi S là giao điểm của đường thẳng qua A_2 vuông góc với HA_2 và đường thẳng qua B_2 vuông góc với HB_2; S' là giao điểm của đường thẳng qua A_2 vuông góc với HA_2 và đường thẳng qua C_2 vuông góc với HC_2. Theo bổ đề trên, S và S' cùng thuộc OH và đường thẳng qua A_2 vuông góc với HA_2.

Điều đó có nghĩa là S trùng S'. Vậy H, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường tròn đường kính HS.

Nói cách khác H, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc OH (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này khó, chỉ có 4 bạn tham gia giải: **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Khánh*, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP Đồng Hới; **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, 12A, THPT chuyên Quang Trung, TX Đồng Xoài.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/462. *Đặt điện áp $u = U_0\cos\omega t$ (U_0 không đổi còn ω thay đổi) vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $\frac{4}{5\pi}H$ và tụ điện mắc nối tiếp. Khi $\omega = \omega_0$ thì dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch đạt giá trị cực đại I_m. Khi $\omega = \omega_1$ hoặc $\omega = \omega_2$ thì cường độ dòng điện qua đoạn mạch bằng nhau và bằng I_m. Biết $\omega_1 - \omega_2 = 200\pi$ rad/s. Tính giá trị của R.*

Lời giải. Khi cho biết hai giá trị $\omega_1 = \omega_2$ mà $I_1 = I_2 = \frac{I_{max}}{n}$ thì $Z_1 = Z_2 = nR$ hay

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right)^2} = nR$$

Vì $\omega_1 > \omega_2$ thì chỉ có thể xảy ra trường hợp :

$$\begin{cases} L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1} = R\sqrt{n^2-1} \\ L\omega_2 - \dfrac{1}{C\omega_2} = -R\sqrt{n^2-1} \end{cases}$$

Vì cho biết L mà không biết C nên khử C

$$\begin{cases} L\omega_1^2 - \dfrac{1}{C} = \omega_1 R\sqrt{n^2-1} \\ L\omega_2^2 - \dfrac{1}{C} = -\omega_2 R\sqrt{n^2-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\omega_1^2 - \omega_2^2) = R\sqrt{n^2-1}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Rightarrow R = \frac{L(\omega_1 - \omega_2)}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{\frac{0,8}{\pi}.200\pi}{\sqrt{\sqrt{2}^2-1}} = 160(\Omega).$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tham gia giải bài kì này và đã có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, THPT Ngọc Tảo, H. Phúc Thọ; **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, H. Phước Long; **Đồng Nai:** *Ôn Từ Quốc Đạt*, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Nam Định:** *Trần Trung Đức*, *Phạm Ngọc Nam*, *Nguyễn Văn Quân*, *Đỗ Thuỳ Trang*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Việt Đức*, *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, H. Văn Giang, *Vũ Minh Thành*, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 12A2 THPT, Bắc Đông Quang, Đông Hưng.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/462. *Một nguồn phát sóng dao động điều hòa tạo ra sóng tròn đồng tâm O truyền trên mặt nước với tần số f và bước sóng λ. Hai điểm M và N thuộc mặt nước, nằm trên hai phương truyền sóng mà các phần tử nước dao động. Biết OM = 8,5λ; ON = 12,8λ và OM vuông góc với ON. Phương trình dao động của phần tử nước tại M là $u_M = A\cos 2\pi ft$ (cm). Cho rằng năng lượng sóng truyền đi không mất mát do sức cản của môi trường nhưng phân bố đều trên mặt sóng tròn làm cho biên độ sóng giảm dần khi truyền ra xa nguồn.*

1) Viết phương trình dao động của phần tử nước tại N.

2) Trên đoạn MN, số điểm mà phần tử nước dao động ngược pha với dao động của phần tử nước tại điểm I là trung điểm của MN là bao nhiêu?

a) ***Lời giải.*** Ta có $\frac{A_N}{A_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_N}} = \frac{\sqrt{170}}{16}$

$$\varphi_M - \varphi_N = -\frac{2\pi}{\lambda}(OM - ON) + k2\pi \Rightarrow \varphi_N = -\frac{3}{5}\pi.$$

Vậy $u_N = \frac{\sqrt{170}}{16}\cos\left(2\pi ft - \frac{3\pi}{5}\right)$.

b) Ta có $OI = \frac{\sqrt{OM^2 + ON^2}}{2} \approx 7,68\lambda$.

Khoảng cách từ O đến đoạn thẳng MN là $OH \approx 7,08\lambda$.

Để dao động tại điểm P trên đoạn MN ngược pha với dao động tại I thì: $OP - OI = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

Khi $P \in HN : OH \le OP \le ON$, ta tìm được 6 giá trị của k thỏa mãn.

Khi $P \in HM : OH \le OP \le OM$, ta tìm được 2 giá trị của k thỏa mãn.

Vậy trên MN có 8 điểm dao động ngược pha với dao động tại I. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng: **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 12A2, THPT Bắc Đông Quan, H.Đông Hưng; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quân, Phạm Ngọc Nam*,12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/466. Let a, b, and c be nonnegative numbers such that $a + b + c \le \pi$. Prove that

$$0 \le a - \sin a - \sin b - \sin c + \sin(a+b) + \sin(a+c) \le \pi.$$

Problem T7/466. Let a, b, and c be three sides of a triangle. Prove that

$$\frac{3}{2} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \frac{4\pi}{5}.$$

Problem T8/466. Given a triangle ABC with the altitude AH ($H \in BC$). Let (I) be the circle with the diameter AH and the center I. The circle (I) intersects AB and AC respectively at T and S. The tangents of (I) at T and S intersect at M. Let N, K, J respectively be the intersections of BC and MA, BS and CT, TS and IM. Prove that NJ goes through the midpoint of AK.

Problem T9/466. Given $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$. Find

$$\max\left(\min\left\{\frac{a_1 + a_2}{1 + a_3^2}; \frac{a_2 + a_3}{1 + a_4^2}; \ldots; \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{1 + a_n^2}; \frac{a_{n-1} + a_n}{1 + a_1^2}; \frac{a_n + a_1}{1 + a_2^2}\right\}\right).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/466. Let $n \ge 3$ be a natural number. Prove that $\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ is also a natural number.

Problem T11/466. Given two sequences (x_n) and (y_n) such that

$$\begin{cases} \sqrt{y_n - x_{n+1}^2 + 1} = x_n \\ \sqrt{3 + x_{n+1}^2 - y_n} + \sqrt{10 + y_{n-1} - x_{n-1}^2} + \frac{1-5n}{n} = 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prove that (x_n) and (y_n) converge. Find the limits.

Problem T12/466. Given an acute triangle ABC which is not isosceles and is inscribed in a circle (O). Let P be a point inside the triangle such that $AP \perp BC$. Let E and F respectively be the perpendicular projections of P on CA and AB. The circumcircle of the triangle AEF intersects (O) at another point G besides A. Prove that GP, BE and CF are concurrent.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***

(*College of Science-Vietnam National University, Hanoi*)

CÁCH TIẾP CẬN VÀ KỸ THUẬT KHÁM PHÁ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

HUỲNH DUY THỦY
(*GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định*)

Khi đối diện với một bài toán, mỗi người đều có một cách tiếp cận, một cách nghĩ dựa theo hiểu biết của riêng mình. Tuy nhiên không phải bao giờ cách tiếp cận ấy, cách nghĩ ấy cũng đúng hướng và khả thi. Chính vì thế bài viết này đi sâu luận bàn về *cách tiếp cận và kỹ thuật khám phá* một bài toán. Cụ thể là về cách tiếp cận và kỹ thuật khám phá trong bài toán chứng minh BĐT, bài toán thường xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi

Với mỗi bài toán, có thể có những cách tiếp cận sau:

• **Cách tiếp cận algorit:** Cách tiếp cận này được thực hiện theo tuyến, với quy tắc định sẵn mà trình tự được dựa theo dạng bài, kiểu bài có tính khuôn mẫu.

• **Cách tiếp cận suy lý:** Tiếp cận dựa trên hệ thống các suy luận có ràng buộc tương hỗ, nhằm bắc được nhịp cầu, gắn kết giữa điều đã biết với điều cần tìm.

• **Tiếp cận bằng kinh nghiệm:** Dựa trên những trải nghiệm, va chạm đã được tích lũy, đúc kết qua cả một quá trình để tìm ra những đặc điểm, tính chất tiềm ẩn trong bài toán, phát hiện được sợi dây ràng buộc, liên lạc giữa nội dung ẩn dấu với nội dung cần hướng tới.

• **Tiếp cận sáng tạo:** Cách tiếp cận này có tính đột phá, được tạo ra từ những ý nghĩ mới mang tính bước ngoặc, khác lạ, độc lập, tinh tế trong tư duy.

• **Tiếp cận kết nối:** Để giải quyết được một bài toán khó ngoài việc nắm chắc kiến thức căn bản, nền tảng như định nghĩa, định lý, ... ta còn cần phải tập dượt, rèn luyện kỹ năng giải quyết những bài toán đơn giản hơn, vừa sức hơn. Những bài toán này đóng vai trò như những bài toán trung gian, và việc kết nối những bài toán trung gian này một cách hợp lý ta sẽ nhận được những bài toán hay. Cách tiếp cận này rất phổ biến trong học toán, nghiên cứu toán.

Bài viết được trình bày chi tiết kể cả phần biến đổi ở lời giải mỗi bài toán nhằm tạo ra cách nhìn đa chiều, rõ ràng về cách tiếp cận và kỹ thuật khám phá bài toán BĐT.

Bài toán 1 (*IMO 42 – USA*). *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

Bất đẳng thức này xuất hiện trong kì thi IMO 42 năm 2001 tổ chức tại Mỹ, bài toán này do đoàn Hàn Quốc đề nghị. Một bất đẳng thức thật là đẹp! Đẹp không chỉ ở hình thức của nó mà còn bởi có nhiều cách tiếp cận. Tác giả đã tìm hiểu và đưa ra 4 lời giải từ các tài liệu hiện hành. Ngoài ra, tác giả cũng tự đưa ra một lời giải mới, độc lập với 4 lời giải trên.

***Lời giải* 1** (*Vận dụng hàm số*). Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có

$$f'(x)=-\frac{1}{2.\sqrt{x^3}},\ f''(x)=\frac{3}{4}.\frac{1}{\sqrt{x^5}}>0,\ \forall x>0.$$

Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ lõm trên $(0;+\infty)$.

Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

$$=a.f\left(a^2+8bc\right)+b.f\left(b^2+8ca\right)+c.f\left(c^2+8ab\right)$$

$$\ge(a+b+c).f\left[\frac{a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)}{a+b+c}\right]$$

$$=(a+b+c).f\left(\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{a+b+c}{\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{a+b+c}}}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}}}$$

$$=\frac{a+b+c}{\sqrt{(a+b+c)^2}}=1.$$

Lời giải 2 (*Vận dụng BĐT Chebyshev, BĐT Cauchy và BĐT Bunyakovsky*). Đặt P bằng vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$.

Sử dụng các BĐT Chebyshev, Cauchy và Bunyakovsky, ta có:

$$P \ge \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6bc}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ca}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ab}}$$

$$\ge \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6bc}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ca}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ab}}\right)$$

$$\ge \frac{1}{3}(a+b+c).$$

$$\frac{9}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+6bc}+\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ca}+\sqrt{a^2+b^2+c^2+6ab}}$$

$$\ge \frac{1}{3}(a+b+c).$$

$$\frac{9}{\sqrt{3\left[(a^2+b^2+c^2+6bc)+(a^2+b^2+c^2+6ca)+(a^2+b^2+c^2+6ab)\right]}} = 1.$$

Lời giải 3 (*Vận dụng BĐT Bunyakovsky*).

Sử dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) \times \left(a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) \times \left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc} + \sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right)$$

$$\le \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) \times \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}$$

$$\le \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right) \times \sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3}.$$

Vậy $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1.$

Lời giải 4 (*Sử dụng bất đẳng thức trung gian*).

Trước hết ta chứng minh BĐT đại diện

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \ge a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right).$$

Thật vậy ta có: $\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2$

$$= \left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\ge \left(2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\right)\left(4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}\right) = 8a^{\frac{2}{3}}bc.$$ Suy ra

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \ge \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right).$$

Vậy: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$; $\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \ge \dfrac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$;

$\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \dfrac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$. Từ đó ta nhận được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} = 1.$$

Lời giải 5. Đặt

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\ y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}},\ z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

Do đó $\dfrac{a^2}{8bc} = \dfrac{x^2}{1-x^2}$, $\dfrac{b^2}{8ca} = \dfrac{y^2}{1-y^2}$, $\dfrac{c^2}{8ab} = \dfrac{z^2}{1-z^2}$.

Nhận xét rằng: $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$.

Từ đó ta có:

$$\frac{a^2}{8bc}.\frac{b^2}{8ca}.\frac{c^2}{8ab} = \frac{x^2}{1-x^2}.\frac{y^2}{1-y^2}.\frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2}.\frac{y^2}{1-y^2}.\frac{z^2}{1-z^2} = \frac{1}{512}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) = 512x^2y^2z^2.$$

Như vậy ta chuyển việc bài toán đã cho về bài toán tương đương sau: Cho ba số thực x, y, z thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn điều kiện: $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512x^2y^2z^2$ (*). Chứng minh rằng: $x+y+z\geq 1$.

Ta chứng minh bài toán này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $0<x+y+z<1$.

Khi đó ta có: $1-x^2>(x+y+z)^2-x^2>0$, $1-y^2>(x+y+z)^2-y^2>0$, $1-z^2>(x+y+z)^2-z^2>0$.

Do đó: $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)>$

$$\left[(x+y+z)^2-x^2\right]\left[(x+y+z)^2-y^2\right]\left[(x+y+z)^2-z^2\right].$$

Mặt khác

$$\left[(x+y+z)^2-x^2\right]\left[(x+y+z)^2-y^2\right]\left[(x+y+z)^2-z^2\right]$$

$$=(y+z)(x+y+z+x)(x+z)$$

$$\times(x+y+z+y)(x+y)(x+y+z+z)$$

$\geq 2\sqrt{yz}.4\sqrt[4]{x^2yz}.2\sqrt{xz}.4\sqrt[4]{xy^2z}.2\sqrt{xy}.4\sqrt[4]{xyz^2}$

$\geq 512x^2y^2z^2$. Từ đó ta nhận được:

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)>512x^2y^2z^2,$$

kết quả này trái với giả thiết (*). Vậy $x+y+z\geq 1$.

BĐT đã cho được chứng minh.

Nhận xét. Mỗi cách tiếp cận bài toán mang một ý tưởng riêng, cho ta một cách khám phá bài toán theo những khía cạnh khác nhau. Điều đáng ghi nhận ở bài toán này là tính đồng bậc của các biểu thức được khai thác triệt để, dưới nhiều góc độ khác nhau. Bài toán như một bức tranh thật nhiều màu sắc!

Bài toán 2 (*Italia MO*) *Cho a, b, c là ba số thực thuộc đoạn* [0; 1]. *Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1.$$

Lời giải 1 (*Đáp án của ban tổ chức kỳ thi*). Biến đổi BĐT cần chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1$$

$\Leftrightarrow (b-1)a^2+b^2c+c^2a+1-b^2-c^2\geq 0.$

Vì $0\leq a\leq 1$ nên $a\geq a^2\Leftrightarrow c^2a\geq c^2a^2$.

Do đó: $(b-1)a^2+b^2c+c^2a+1-b^2-c^2$

$\geq (b-1)a^2+b^2c+c^2a^2+1-b^2-c^2$

$=(c^2+b-1)a^2+b^2c+1-b^2-c^2$.

Xét hàm số $f(a^2)=(c^2+b-1)a^2+b^2c+1-b^2-c^2$ trên đoạn [0; 1]. Lúc này bài toán được chuyển về việc chứng minh: $f(a^2)\geq 0, \forall a^2\in[0,1]$.

• TH1: $c^2+b-1=0\Leftrightarrow c^2=1-b$.

Khi đó $f(a^2)=b^2c+1-b^2-1+b=b^2c+(b-b^2)\geq 0$.

BĐT này luôn đúng vì $b\in[0,1]$ nên $b\geq b^2$.

• TH2: $c^2+b-1\neq 0$. Khi đó $f(a^2)$ là hàm số bậc nhất với biến là a^2 trên đoạn [0; 1], đồ thị hàm số $f(a^2)$ là một đoạn thẳng. Như vậy để chứng minh $f(a^2)\geq 0$, ta cần phải chứng minh:

$\begin{cases} f(0)\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \end{cases}$. Thật vậy: $f(0)=b^2c+1-b^2-c^2$

$=-b^2(1-c)+(1-c)(1+c)=(1-c)(-b^2+1+c)$

$=(1-c)[c+(1-b^2)]\geq 0.$

Điều này hiển nhiên đúng vì $b,c\in[0;1]$.

$f(1)=c^2+b-1+b^2c+1-b^2-c^2$

$=b^2c+(b-b^2)\geq 0.$

BĐT này đúng vì $b,c\in[0;1]$.

Với cả hai trường hợp đã xét, ta đều có:

$$f(a^2)\geq 0 \text{ với } a\in[0,1] \text{ (đpcm).}$$

Lời giải 2 (*của tác giả*). Từ giả thiết $a,b,c\in[0;1]$ suy ra: $(a-1)(b-1)(c-1)\leq 0$

$\Leftrightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\leq 0$

$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\leq 1-abc\leq 1$ (1)

(do $abc\geq 0$). Mặt khác , vì $a,b,c\in[0;1]$, nên

$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$

$\geq a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\leq 1$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(1,1,0)$ hoặc $(a,b,c)=(0,0,1)$ và các hoán vị của 2 bộ số trên.

Lời giải 3 (*của tác giả*). BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le 1.$$

Mặt khác: $a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)$

$$\le a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)+abc.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)+abc\le 1.$$

Ta có: $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)+abc\le 1$

$\Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca+abc\le 1,$

BĐT này hiển nhiên đúng do $a,b,c\in[0;1]$.

Nhận xét. • Trong ba cách tiếp cận trên, giả thiết $a,b,c\in[0;1]$ được khai thác dưới nhiều khía cạnh.

• Điểm hay trong cách xử lý của lời giải 1 là ta đã vận dụng được tính chất của đoạn thẳng để chứng minh $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[\alpha;\beta]$ mà không phải xét tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số *f*(*x*).

Như vậy để chứng minh $f(x)\le 0,\ \forall x\in[\alpha;\beta]$ với *f* là hàm bậc nhất trên $[\alpha;\beta]$ thì ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} f(\alpha)\le 0\\ f(\beta)\le 0\end{cases}$.

Bài toán 3 (*USA MO*). *Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng:* $x^3+y^3+z^3+6xyz\ge\frac{1}{4}$ (1).

Lời giải 1 (*Đáp án của ban tổ chức kỳ thi*).

Từ giả thiết, suy ra: $x,y,z\in[0;1]$. Ta có:

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)+6xyz-\frac{1}{4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3+(1-x)^3-3yz(1-x)+6xyz-\frac{1}{4}\ge 0$$

(do $y+z=1-x$)

$$\Leftrightarrow x^3+1-3x+3x^2-x^3-3yz+3xyz+6xyz-\frac{1}{4}\ge 0$$

$\Leftrightarrow (3x-1)yz+x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0$. Ta đánh giá tích số *yz*. Ta có: $0\le yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{4}$.

Xét hàm số: $f(yz)=(3x-1)yz+x^2-x+\frac{1}{4}$; trên đoạn $\left[0;\frac{(1-x)^2}{4}\right]$. Như vậy ta phải chứng minh BĐT $f(yz)\ge 0,\ \forall yz\in\left[0;\frac{(1-x)^2}{4}\right]$.

Thật vậy: Nếu $3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, khi đó $f(yz)=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{36}>0$. Suy ra BĐT: $f(yz)\ge 0$ hiển nhiên đúng.

Nếu $3x-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{1}{3}$, khi đó *f*(*yz*) là hàm số bậc nhất. Trên đoạn $\left[0;\frac{(1-x)^2}{4}\right]$ đồ thị hàm số *f*(*yz*) là một đoạn thẳng. Lúc này để chứng minh $f(yz)\ge 0$ ta sẽ chứng minh: $\begin{cases} f(0)\ge 0\\ f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right]\ge 0\end{cases}$.

Thật vậy: $f(0)=x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$;

$$f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right]=(3x-1)\frac{(1-x)^2}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}x\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}x\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right]\ge 0$$

(vì $0\le x\le 1$). Trong cả hai trường hợp ta đều có $f(yz)\ge 0$. BĐT (1) được chứng minh.

Lời giải 2 (*của tác giả*). Ta có

$$(1)\Leftrightarrow(3x-1)yz+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\ge 0\quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh BĐT (*). Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Do $x,y,z\in[0;1]$ nên $x\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3x-1\ge 0$. Hiển nhiên: $yz\ge 0$ và $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$.

Vậy BĐT (*) được chứng minh.

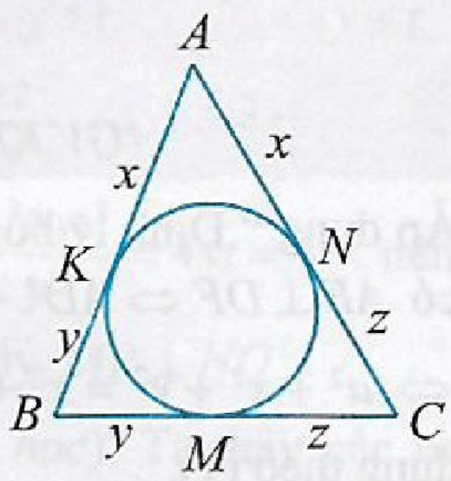
Nhận xét. Ở cách tiếp cận thứ 2 với việc giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ đem lại hiệu quả thật bất ngờ, một cách tiếp cận của sự trải nghiệm.

Bài toán 4 (*IMO 24 – France*). *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0 \quad (1).$$

Lời giải 1 (*Khai thác yếu tố hình học*).

Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, K.



Đặt $AN = AK = x > 0$,

$BK = BM = y > 0$,

$CM = CN = z > 0$.

Ta có: $a = y+z, b = z+x, c = x+y$. Khi đó BĐT (1) được viết thành

$$(y+z)^2(x+z)(y-x)+(x+z)^2(x+y)(z-y)$$
$$+(x+y)^2(y+z)(x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3+yz^3+zx^3-xyz(x+y+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3+yz^3+zx^3\ge xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\ge x+y+z.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho các bộ số $\sqrt{z};\sqrt{x};\sqrt{y}$ và $\frac{y}{\sqrt{z}};\frac{z}{\sqrt{x}};\frac{x}{\sqrt{y}}$, ta có:

$$\left(\sqrt{z}.\frac{y}{\sqrt{z}}+\sqrt{x}.\frac{z}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}.\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^2\le(x+y+z)\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\le(x+y+z)\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\ge x+y+z \quad \text{(đpcm)}.$$

Lời giải 2 (*Phương pháp hàm số*). Do BĐT (1) không đổi qua phép hoán vị vòng quanh nên ta giả sử $a = \max(a, b, c)$. Xét trường hợp: $a\ge b\ge c$. Chia 2 vế BĐT (1) cho c^4, ta được:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2.\frac{b}{c}\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+\frac{a}{c}.\left(1-\frac{a}{c}\right)\ge 0 \ (2).$$

Đặt $x=\frac{a}{c}; y=\frac{b}{c}$ với $x\ge y\ge 1$. Khi đó BĐT (2) trở thành: $x^3y-x^2y^2+y^3-y^2+x-x^2\ge 0$. Xét hàm số $f(x)=yx^3-(y^2+1)x^2+x+y^3-y^2$ trên khoảng $[1;+\infty)$. Ta có

$$f'(x)=3yx^2-2(y^2+1)x+1$$

$$f''(x)=2\left[3yx-(y^2+1)\right]\ge 2\left[3y^2-(y^2+1)\right]$$
$$=2(2y^2-1)\ge 0, \forall y\ge 1.$$ Suy ra hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Khi đó:

$$f'(x)\ge f'(y)=y^3-2y+1=(y-1)(y^2+y-1)\ge 0, \forall y\ge 1.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó $f(x)\ge f(y)=y^3-2y^2+y=y(y-1)^2\ge 0$.

Vậy $yx^3-(y^2+1)x^2+x+y^3-y^2\ge 0$.

Làm tương tự đối với trường hợp $a\ge c\ge b$ ta cũng nhận được kết quả trên.

Lời giải 3 (*Vận dụng BĐT hoán vị*). Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $bc\le ac\le ab$. Xét hiệu:

$$(a^2+bc)-(b^2+ac)=(a-b)(a+b)-c(a-b)$$
$$=(a-b)(a+b-c)\ge 0$$ (vì a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác). Chứng minh tương tự, ta được: $(b^2+ac)-(c^2+ab)\ge 0$. Sử dụng BĐT hoán vị với 2 dãy số sắp thứ tự ngược chiều nhau: $bc\le ac\le ab$, $a^2+bc\ge b^2+ac\ge c^2+ab$, ta có: $bc(a^2+bc)+ac(b^2+ac)+ab(c^2+ab)$

$$\le bc(b^2+ac)+ac(c^2+ab)+ab(a^2+bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^3b+b^3c+c^3a.$$

Làm như trên với trường hợp $a\ge c\ge b$, ta cũng có kết quả tương tự.

Kết luận. Với nhiều cách tiếp cận khác nhau, giúp ta lột tả được bản chất của bài toán, nhìn được bài toán từ phía bên trong, nắm chắc "cái lý", "cái ý tưởng" khai thác bài toán. Điều quan trọng là ta cần cập nhật, tập dượt, tự mình rèn luyện nhiều cách tiếp cận, khám phá giả thiết của bài toán, tạo cho mình những kinh nghiệm, nhằm tiếp cận bài toán một cách hợp lý, thông minh. Qua đó hình thành được những lời giải hay.

SUY NGHĨ THÊM VỀ ĐỊNH LÝ BỐN ĐIỂM

LÊ THỊ NGỌC THÚY
(GV Khoa Tự nhiên, CĐSP Nghệ An)

Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ (số 237, Tháng 3 năm 1997) đã đăng một bài viết khá hay của tác giả Võ Kim Huệ về " Định lý bốn điểm và cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau". Sau đó, tạp chí có giới thiệu thêm một số bài viết xung quanh vấn đề này. Nội dung " Định lý bốn điểm" như sau:

Mệnh đề 1. *Với bốn điểm* A,B,C,D *thì* $AC \perp BD$ $\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

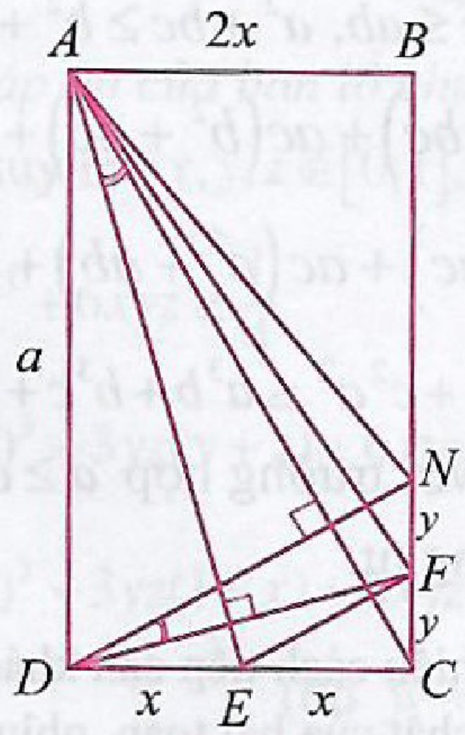
Chúng tôi muốn bàn thêm một vài khía cạnh khác về định lý trên.

1. Khi sử dụng " Định lý bốn điểm" phải dùng các phép biến đổi đại số. Nếu các phép biến đổi ấy phức tạp, cần cân nhắc xem có thể giải thuần túy bằng hình học không. Xin nêu một vài thí dụ:

Bài toán 1. *Cho hình chữ nhật ABCD. Đường thẳng đi qua D vuông góc với đường chéo AC cắt BC tại N. Gọi E và F tương ứng là trung điểm của CD và CN. Chứng minh rằng* $AE \perp DF$.

Lời giải. *Cách* 1. Sử dụng " Định lý bốn điểm" (TH&TT số 237 tháng 3 năm 1997).

Đặt $DE = EC = x, CF = FN = y, AD = BC = a$ (h.1).



Hình 1

Khi đó $AB = 2x, BN = a - 2y, BF = a - y$.

Vì $DN \perp AC$ theo giả thiết, nên

$AD^2 + CN^2 = DC^2 + AN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 4y^2 = 4x^2 + 4x^2 + (a - 2y)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = ay$ (1).

Áp dụng " Định lý bốn điểm" cho tứ giác lồi $ADEF$ có $AE \perp DF \Leftrightarrow AD^2 + EF^2 = DE^2 + AF^2$

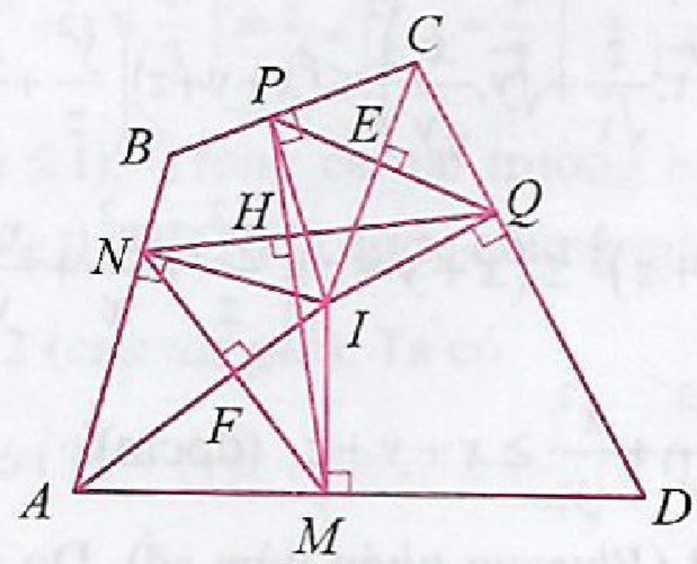
$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 = x^2 + 4x^2 + (a - y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = ay$,

đúng theo (1).

Cách 2 (*Dùng thuần túy hình học*). Vì hai tam giác vuông DAC và CDN đồng dạng, nên hai trung tuyến tương ứng AE và DF chia hai tam giác đó thành những tam giác tương ứng đồng dạng. Nói riêng, hai tam giác AEC và DFN đồng dạng. Từ đó $\widehat{CAE} = \widehat{NDF}$, mà $AC \perp DN$ theo giả thiết nên $AE \perp DF$.

Bài toán 2. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn* $(O;R)$ *và ngoại tiếp đường tròn* $(I;r)$. *Gọi M, N, P, Q tương ứng là các tiếp điểm của* $(I;r)$ *với* DA, AB, BC, CD. *Chứng minh rằng* $MP \perp NQ$.

Lời giải. *Cách* 1. Dùng "Định lý bốn điểm" (TH&TT, số 367, 1/ 2008). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với CI ; MN với AI (h.2).



Hình 2

Khi đó vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$. Từ tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{IAM} + \widehat{ICQ} = \frac{1}{2}\left(\widehat{DAB} + \widehat{BCD}\right) = 90^0$.

Từ đó $\widehat{IAM} = \widehat{CIQ} \Rightarrow \Delta IAM \backsim \Delta CIQ$

$\Rightarrow \frac{IM}{CQ} = \frac{MA}{QI} \Rightarrow IM^2 = AM.CQ$.

Tương tự, hai tam giác INB và DMI đồng dạng với nhau nên $IN^2 = DQ.BN$.

Đặt $AM = AN = x$, $BN = BP = y$, $CP = CQ = z$,

$DQ = DM = t$. Từ đó $r^2 = xz = yt$.

Mặt khác $\frac{1}{MF^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MI^2} \Rightarrow \frac{4}{MN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}$

nên $MN^2 = \frac{4x^2r^2}{x^2+xz} = \frac{4x^2xz}{x^2+xz} = \frac{4x^2z}{x+z}$.

Tương tự, $PQ^2 = \frac{4xz^2}{x+z}$, $NP^2 = \frac{4y^2t}{y+t}$, $MQ^2 = \frac{4yt^2}{y+t}$.

Từ đó $MN^2 + PQ^2 = \frac{4x^2z}{x+z} + \frac{4xz^2}{x+z} = 4xz = 4r^2$.

Tương tự $NP^2 + MQ^2 = \frac{4y^2t}{y+t} + \frac{4yt^2}{y+t} = 4yt = 4r^2$ nên $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + MQ^2$. Vậy $MP \perp NQ$.

Cách 2 (*Dùng thuần túy hình học*). Ta thấy các tứ giác $AMIN, CPIQ$ nội tiếp nên

$$\widehat{MIN} + \widehat{PIQ} = \left(180^0 - \widehat{BAD}\right) + \left(180^0 - \widehat{BCD}\right)$$

$$= 360^0 - \left(\widehat{BAD} + \widehat{BCD}\right) = 360^0 - 180^0 = 180^0.$$

Gọi H là giao điểm của MP và NQ.

Trong đường tròn $(I;r)$, có sđ $\widehat{MHN}$ = sđ $\frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{2}$

= sđ $\frac{\widehat{MIN} + \widehat{PIQ}}{2} = 90^0$ nên $MP \perp NQ$.

2. Nói vậy không phải hạ thấp giá trị "Định lý bốn điểm". Thực tế, có nhiều bài toán giải được nhờ sử dụng "Định lý bốn điểm", nhưng một lời giải "thuần túy hình học" chúng tôi chưa tìm được (xem thêm phần bài tập). Nhưng điều thứ hai chúng tôi muốn lưu ý: chính nhờ vào "các phép biến đổi đại số" mà việc sử dụng "Định lý bốn điểm" giúp chúng ta dễ mở rộng bài toán đã cho hơn, đặc biệt khi phải có sự hỗ trợ của "công cụ lượng giác".

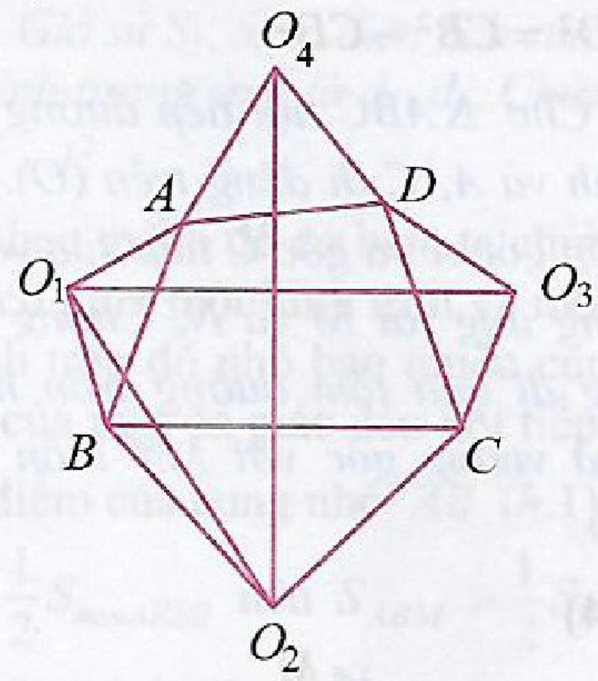
Bài toán sau đây rất quen thuộc với các học sinh yêu toán.

Bài toán 3. *Dựng về phía ngoài tứ giác ABCD các hình vuông ABMN, BCPQ, CDRS, DATV và gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm các hình vuông đó. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_2O_4$.*

Cách giải thường gặp là sử dụng "thuần túy hình học": Gọi M là trung điểm của AC, chứng minh hai tam giác O_1MO_4, O_2MO_3 vuông cân tại M. Sau đó chứng minh hai tam giác O_1MO_3, O_2MO_4 bằng nhau để suy ra $O_1O_3 \perp O_2O_4$. Bạn đã thử dùng "Định lý bốn điểm" để giải bài toán này chưa? Riêng chúng tôi khi dùng "Định lý bốn điểm" để giải bài toán này đã thu được nhiều kết quả thú vị và tổng quát hơn. Sau đây là một trong chúng.

Bài toán 4. *Dựng về phía ngoài tứ giác ABCD các tam giác cân tại O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng: AO_1B, BO_2C, CO_3D, DO_4A sao cho $\widehat{O_1AB} = \widehat{O_1BA} = \alpha$, $\widehat{O_2BC} = \widehat{O_2CB} = \beta$, $\widehat{O_3CD} = \widehat{O_3DC} = \alpha$, $\widehat{O_4DA} = \widehat{O_4AD} = \beta$ với $\alpha + \beta = 90^0$. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_2O_4$.*

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.

Từ giả thiết suy ra

$O_1B = \frac{a}{2\cos\alpha}$, $O_2B = \frac{b}{2\cos\beta}$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác O_1BO_2 có

$$O_1O_2^2 = O_1B^2 + O_2B^2 - 2.O_1B.O_2B.\cos\left(90^0 + \widehat{ABC}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} + 2.\frac{ab}{2\cos\alpha.2\cos\beta}.\sin\widehat{ABC}$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ABC}.$$

Tương tự

$$O_3O_4^2 = \frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ACD}.$$

Do đó $O_1O_2^2 + O_3O_4^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} +$

$$+ \frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ABCD}$$

Tương tự $O_2O_3^2 + O_1O_4^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} +$

$$+ \frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ABCD}$$

nên $O_1O_2^2 + O_3O_4^2 = O_2O_3^2 + O_1O_4^2$.

Từ đó $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

Bài toán 3 là trường hợp đặc biệt của bài toán 4 khi $\alpha = \beta = 45^0$. Với $\alpha = 30^0, \beta = 60^0$ nhận được.

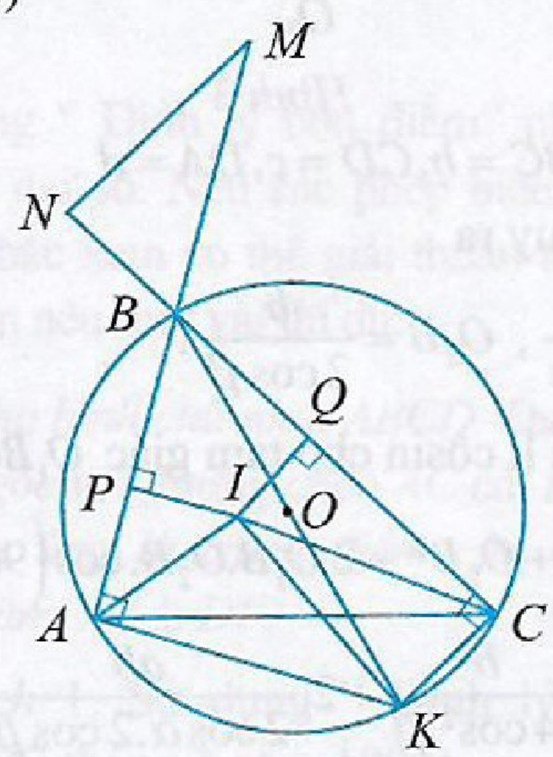
Bài toán 5. *Dựng về phía ngoài tứ giác ABCD các tam giác đều ABM, BCE, CDN, DAF và gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm các tam giác đều đó. Chứng minh $O_1O_3 \perp EF$; $O_2O_4 \perp MN$.*

3. Để chứng minh $AC \perp BD$ trong nhiều trường hợp nên dùng kết quả sau tương đương với "Định lý bốn điểm".

Mệnh đề 2. *Với bốn điểm A, B, C, D thì $AD \perp BC$ $\Leftrightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$.*

Bài toán 6. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O với B cố định và A, C di động trên (O). Các đường tròn bàng tiếp góc A và góc C tiếp xúc với AB và CB kéo dài tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và vuông góc với MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Gọi K là điểm đối xứng của B qua O và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì K cố định. Ta sẽ chứng minh $KI \perp MN$.

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và $2p = a + b + c$. Khi đó $AM = CN = p$. Gọi P, Q thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC trên các cạnh AB, BC thế thì $AP = p - a, CQ = p - c$, $BP = BQ = p - b$.

Ta có $KM^2 - KN^2 = (KA^2 + AM^2) - (KC^2 + CN^2)$

$= KA^2 - KC^2$ (vì $AM = CN$) $= BC^2 - BA^2$ (1)

Mặt khác $IM^2 - IN^2 = (IP^2 + PM^2) - (IQ^2 + QN^2)$

$= PM^2 - QN^2$ (vì $IP = IQ$)

$= (AM - AP)^2 - (CN - CQ)^2$

$= [p - (p - BC)]^2 - [p - (p - AB)]^2 = BC^2 - BA^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KM^2 - KN^2 = IM^2 - IN^2$ nên $KI \perp MN$ (đpcm).

Lời kết. Sau khi viết bài này, chúng tôi càng thấm thía bài học: Có không ít bài báo đã đăng trên Tạp chí *Toán học & Tuổi trẻ* đang ở dạng mở, còn bao điều bí mật giấu sau chúng chờ bạn đọc khai thác, phát hiện.

BÀI TẬP

Giải các bài toán sau đây bằng hai phương pháp: sử dụng "Định lý bốn điểm" hoặc dùng kiến thức "hình học thuần túy" (nếu được).

1. Dựng về phía ngoài ΔABC các hình vuông $ABDE, ACFG$ và hình bình hành $EAGH$. Chứng minh rằng:

a) $AH \perp BC$;

b) Các đường thẳng AH, BF, CD đồng quy.

2. Cho ΔABC cân tại A. Từ trung điểm M của cạnh BC kẻ MH vuông góc với AC. Gọi N là trung điểm của MH. Chứng minh rằng $AN \perp BH$ (Olympic Toán Bắc Kinh, 1968).

3. Dựng ngoài hình chữ nhật $ABCD$ các hình vuông $CDFE$ và $BCHK$.

Chứng minh rằng $AE \perp FH$.

4. a) Trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ ta lấy đoạn $BE = \frac{BC}{3}$, trên cạnh DC kéo dài ta lấy đoạn $CF = \frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng giao điểm của AE và BF nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (Olympic Toán Hungari, 1951).

b) Phát biểu bài toán tổng quát.

5. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB và E là trọng tâm ΔACD. Chứng minh rằng $OE \perp CE$ (Olympic Toán Anh, 1983).

6. Cho ngũ giác $ABCDE$ với $\widehat{EAB} = \widehat{ABC} = 90^0$, $AE = BC$. Chứng minh ba đường thẳng đi qua ba đỉnh A, B, D tương ứng vuông góc với các cạnh CD, DE, AB đồng quy.

7. Giả sử H là trực tâm và P là một điểm nằm trong ΔABC. Gọi L, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên PA, PB, PC. Giả sử D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng HL, HM, HN với BC, CA, AB. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Ghi chú. Ba bài toán cuối cùng chúng tôi chưa tìm được cách giải "thuần túy hình học".

NGUỒN GỐC NGUYÊN THỦY CỦA PHÉP TÍNH VI - TÍCH PHÂN

LÊ QUỐC HÁN
(GV Khoa Toán ĐH Vinh, Sưu tầm và biên soạn)

Việc phát minh ra phép tính vi - tích phân được xem là thành tựu toán học vĩ đại nhất của thế kỷ XVII. Thành tựu này cơ bản đã kết thúc giai đoạn lịch sử toán học sơ cấp để bước sang một kỷ nguyên mới - kỷ nguyên toán học cao cấp. Phát minh vĩ đại trên gắn liền với tên tuổi của hai nhà toán học thiên tài: *Isaac Newton* (1642 - 1727) và *Gottfried Wilhem Lebniz* (1646 - 1716), nhưng thực ra ý tưởng về nó đã được hình thành hơn hai nghìn năm trước và đã trải qua bao thăng trầm lịch sử để thăng hoa được vào thời đại văn hóa phục hưng của loài người. Trong lần nói chuyện với các sinh viên và giảng viên Trường Đại học Vinh (15/12/2015), Giáo sư *Ngô Bảo Châu* đã nhấn mạnh rằng, cái quan trọng nhất viết nên những trang chói lọi của lịch sử toán học là những *ý tưởng độc đáo* của các nhà toán học. Trong bài báo này, tôi xin điểm qua những *ý tưởng nguyên thủy* dẫn tới việc phát minh ra phép tính vi - tích phân.

1. PHƯƠNG PHÁP VÉT KIỆT CỦA EUDOXUS

Một trong những đóng góp quan trọng sớm nhất cho bài toán cầu phương hình tròn thuộc về nhà bác học Hy Lạp cổ đại *Antiphon* (khoảng 430 năm TCN). Theo ông, bằng cách liên tiếp nhân đôi số cạnh của một đa giác đều nội tiếp một đường tròn thì hiệu số giữa diện tích của hình tròn với diện tích của đa giác cuối cùng sẽ bị vét kiệt. Lập luận này vừa được công bố đã bị phê phán quyết liệt, vì bị xem là vi phạm vào nguyên lý các đại lượng là chia được vô giới hạn, rằng quá trình của *Antiphon* không bao giờ sử dụng được cho tới khi đa giác cuối cùng lấp đầy hình tròn đã cho!

Tuy nhiên, *Eudoxus* (khoảng 370 năm TCN) lại dựa trên ý tưởng của *Antiphon* để đưa ra *phương pháp vét kiệt*, được xem là một phát minh độc đáo của người Hy Lạp cổ đại. Phương pháp vét kiệt thừa nhận tính chia hết vô hạn của độ lớn và dựa trên mệnh đề cơ bản sau đây: "*Nếu từ bất kỳ một đại lượng nào bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó, rồi từ chỗ còn lại bỏ đi một phần khác không nhỏ hơn một nửa của nó, vân vân thì cuối cùng sẽ còn lại một đại lượng nhỏ hơn bất kỳ đại lượng nào được ấn định cùng loại*".

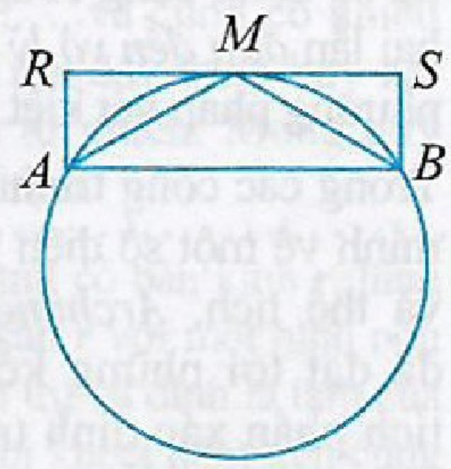
Ta hãy sử dụng phương pháp vét kiệt để giải bài toán sau:

Bài toán 1. *Giả sử S_1, S_2 là diện tích của hai hình tròn có đường kính tương ứng là d_1, d_2. Chứng minh rằng $S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2$.*

Trước hết, theo mệnh đề cơ bản, ta chứng minh rằng hiệu diện tích giữa một hình tròn và một đa giác đều nội tiếp hình tròn đó nhỏ bao nhiêu cũng được. Gọi AB là cạnh của một đa giác đều nội tiếp hình tròn và M là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (h.1).

Vì $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{hcnARSB}$ nên $S_{ABM} > \frac{1}{2}S_{hvpAMB}$.

Suy ra, bằng cách tăng gấp đôi số cạnh của đa giác đều nội tiếp ta sẽ làm tăng diện tích của đa giác hơn một nửa hiệu diện tích giữa hình tròn và đa giác. Do đó với số lần tăng gấp đôi số cạnh đủ lớn thì ta có thể làm cho hiệu diện tích giữa hình tròn và đa giác nhỏ hơn bất kỳ một diện tích nào đã được ấn định.



Hình 1

Trở về bài toán đã cho. Giả thiết phản chứng rằng $S_1 : S_2 > d_1^2 : d_2^2$. Theo chứng minh trên, ta có thể nội tiếp đường tròn có diện tích S_1 một đa giác đều có diện tích $P_1 < S_1$ để cho $P_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2$. Gọi P_2 là một đa giác đều nội tiếp đường tròn có diện tích S_2 và đồng dạng với đa giác đều có diện tích P_1. Theo một định lý đã biết về đa giác đồng dạng ta có $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$. Từ đó $P_1 : S_2 = P_1 : P_2$, suy ra $S_2 = P_2$, là điều không thể xảy ra. Lập luận tương tự, ta thấy không thể có $S_1 : S_2 < d_1^2 : d_2^2$.

Từ đó suy ra $S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2$.

Từ *Bài toán* 1 trực tiếp suy ra diện tích S của một hình tròn đường kính d là $S = kd^2$ với k là hằng số cho mọi hình tròn. Về sau người ta xác định được $k = \frac{\pi}{4}$.

Trong số các nhà toán học Hy Lạp cổ đại thì *Archimedes* (286 - 212 TCN) là người có những ứng dụng đẹp nhất về phương pháp vét kiệt và ông trở thành người đầu tiên tiệm cận với phép tính vi - tích phân hiện nay. Sau đây là lời giải của ông về cách tính diện tích (cầu phương) một phần của parapol.

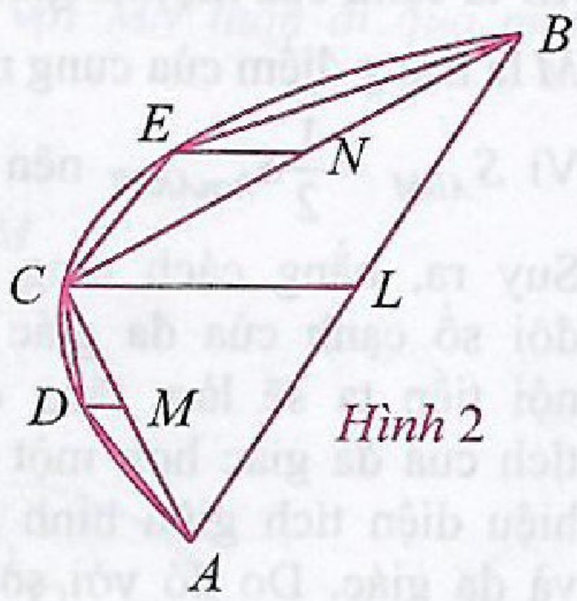
Bài toán 2. *Cho trước một phần parabol với dây trương cung AB. Đường thẳng đi qua trung điểm L của AB và song song với trục của parabol cắt $\overset{\frown}{AB}$ tại C (h.2). So sánh diện tích phần parabol đó với diện tích tam giác ABC.*

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Các đường thẳng kẻ từ M và N song song với CL cắt $\overset{\frown}{AB}$ tương ứng tại D và E. *Archimedes* đã chỉ ra rằng $S_{CDA}+S_{CEB}=\frac{S_{ACB}}{4}$. Bằng cách lặp lại ý tưởng này suy ra diện tích của phần parabol đã cho bằng

$$S_{ABC}+\frac{1}{4}S_{ABC}+\frac{1}{4^2}S_{ABC}+\frac{1}{4^3}S_{ABC}+\ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)S_{ABC}=\frac{4}{3}S_{ABC}.$$

Ở đây ta đã làm gọn bằng cách lấy giới hạn tổng của một cấp số nhân; còn *Archimedes* thì sử dụng cùng công cụ hai lần *đưa đến vô lý* của phương pháp vét kiệt.



Hình 2

Trong các công trình của mình về một số diện tích và thể tích, *Archimedes* đã đạt tới những kết quả tương đương của một số tích phân xác định trong các sách giáo khoa về phép tính vi - tích phân hiện lưu hành.

II. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG CỦA ARCHIMEDES

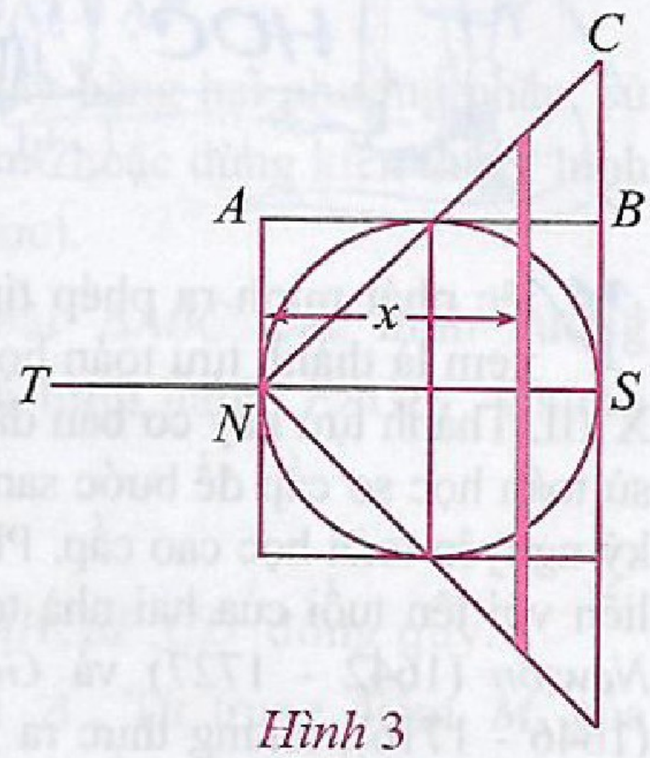
Phương pháp vét kiệt là một công cụ tốt để chứng minh một công thức khi đã biết kết quả, nhưng lại khó khám phá ra các kết quả. Để khắc phục điều đó, *Archimedes* đã đưa ra *phương pháp cân bằng*. Nó được tìm thấy trong một bản sao luận văn của *Archimedes* gửi *Eratosthenes* (khoảng 230 năm TCN).

Tư tưởng chính của phương pháp này là: để tìm một diện tích hoặc một thể tích thì cắt nó thành một số rất lớn các giải phẳng mỏng song song hoặc các lớp mỏng song song và tưởng tượng treo chúng ở một đầu tâm đã được xác định.

Bài toán 3. *Tính thể tích hình cầu biết bán kính của nó bằng r.*

Đặt hình cầu đã cho cùng đường kính cực của nó dọc theo một cực nằm ngang $x'x$ với cực bắc N tại gốc (*h*.3). Dựng một hình trụ và một hình nón tròn xoay bằng cách cho quay hình chữ nhật $NABS$ quanh trục $x'x$. Bây giờ cắt từ ba hình khối đó những lát cắt thẳng đứng (thừa nhận rằng chúng đều là những hình trụ dẹt) cách N một khoảng bằng x và có chiều dày là Δx. Theo kết quả *Bài toán* 2, thể tích của các lát cắt này xấp xỉ bằng: * hình cầu: $V=\pi x(2r-x)\Delta x$; * hình trụ: $V_1=\pi r^2\Delta x$; * hình nón: $V_2=\pi x^2\Delta x$.

Ta treo các lát cắt ở hình cầu và hình nón tại T trong đó $TN=2r$. Moment hợp của chúng quanh N là $\left[\pi x(2r-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x\right].2r=4\pi r^2x\Delta x$ (moment của một thể tích vật thể quanh một điểm là tích của thể tích đó với khoảng cách vuông góc từ điểm ấy tới đường thẳng đứng đi qua trọng tâm vật thể đã cho). Kết quả này bằng bốn lần moment của lát cắt từ hình trụ mà ta để nguyên vị. Cộng một số đủ lớn các lát cắt này ta được $2r\left(V+V_2\right)=4r.V_1$.



Hình 3

Từ đó $2r\left(V+\frac{8\pi r^3}{3}\right)=8\pi r^4$. Suy ra $V=\frac{4\pi r^3}{3}$.

Đây là lời giải của *Archimedes* trong *method*. Tuy nhiên bản thân ông không yên tâm với lời giải đó và đã sử dụng phương pháp vét kiệt để đưa ra một phép chứng minh chặt chẽ.

Trong phương pháp cân bằng, ta nhìn thấy sự đẹp đẽ của ý tưởng về một độ lớn thể tích có thể xem là hợp bởi một số đủ lớn các bộ phận nguyên tử. Rõ ràng so với phương pháp hiện đại về giới hạn thì phương pháp cân bằng của *Archimedes* có thể làm cho nó trở thành chặt chẽ và về cơ bản giống như phép tính tích phân hiện nay.

III. NHỮNG BƯỚC KHỞI ĐẦU CỦA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN Ở TÂY ÂU

Đến giữa thế kỷ XVI, các công trình của *Archimedes* mới đến được Tây Âu qua bản dịch được *Johann Muller*, thường gọi là *Regiomontanus* (1436 - 1475) ấn hành năm 1540. Nhưng mãi đầu thế kỷ XVII các tư tưởng của *Archimedes* mới được phát triển xa hơn ở lục địa này.

Hai tác giả đầu tiên của thời cận đại đã dùng những phương pháp có thể so sánh với các phương pháp của *Archimedes* là hai kỹ sư *Simon Stevin* (1548 - 1620) và *Luca Valerio* (1552 - 1618). Mỗi người đã cố gắng tránh việc hai lần *đưa đến vô lý* của phương pháp vét kiệt bằng cách cho qua giới hạn. Chẳng hạn trong một công trình về thủy tĩnh học, *Simon Stevin* đã tìm ra áp lực của chất lỏng lên một đập hình chữ nhật thẳng đứng bằng cách chia đập đó thành những dải mỏng nằm ngang rồi cho quay các giải đó quanh các các cạnh bên cho tới khi chúng song song với một mặt phẳng nằm ngang.

CÁCH TÌM BỘ BA PYTHAGORE VỚI SỐ TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN HIẾU
(GV THCS Vĩnh Hưng, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Một số thầy cô khi dạy bài định lí Pythagore (*Hình học* 7), thường hay lúng túng khi ra đề kiểm tra hay bài tập làm thế nào để chọn độ dài các cạnh của tam giác vuông là các số tự nhiên. Sau một thời gian tìm tòi nghiên cứu chúng tôi xin trình bày hai cách tìm bộ ba với số tự nhiên sau đây

Bài toán: *Cho ΔABC; $\hat{A} = 90^0$, $AB = c$; $AC = b$ và $BC = a$. Tính a và b theo c. Để tiện cho việc tìm công thức ta giả thiết rằng:* $0 < c < b < a$, $3 \le c; b; a \in \mathbb{N}$.

A. Trường hợp *c* là số lẻ

Ta có: $(2n+1)^2 + \left[\frac{(2n+1)^2-1}{2}\right]^2 = \left[\frac{(2n+1)^2-1}{2}+1\right]^2$.

Do đó: $c = 2n + 1$ thì $b = \frac{(2n+1)^2-1}{2} = \frac{c^2-1}{2}$,

và $a = \frac{(2n+1)^2+1}{2} = \frac{c^2+1}{2}$

Ví dụ: với $c = 7$ thì $b = \frac{7^2-1}{2} = 24$ và $a = \frac{7^2+1}{2} = 25$

Vậy $(c; b; a) = (7; 24; 25)$.

B. Trường hợp *c* là số chẵn

Ta có: $(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$

Do đó: $c = 2n$ thì $b = n^2 - 1$ và $a = n^2 + 1$

Ví dụ: Với $c = 8$ thì $b = 4^2 - 1 = 15$ và $a = 4^2 + 1 = 17$

Vậy $(c; b; a) = (8, 15, 17)$.

Tóm lại. Ta có công thức tìm bộ ba Pythagore:

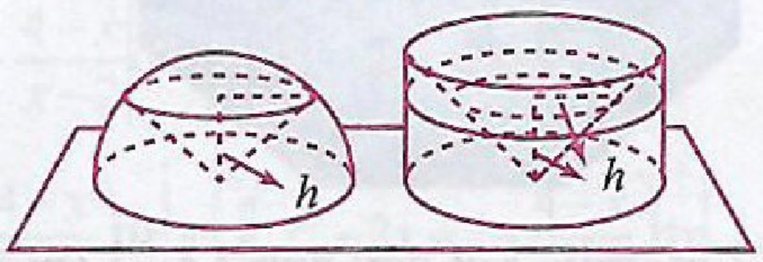
Với $c = 2n + 1$ thì $b = \frac{c^2-1}{2}$ và $a = \frac{c^2+1}{2}$

Với $c = 2n$ thì $b = n^2 - 1$ và $a = n^2 + 1$ $(3 \le n; n \in \mathbb{N})$.

Nhận xét. Ta có nhiều bộ ba Pythagore khác nhau, ví dụ như: (12, 16, 20), (12, 35, 37),.....và cũng có nhiều cách tìm bộ ba Pythagore khác. Trên đây trình bày hai cách tìm bộ ba Pythagore với số tự nhiên. Mong quý thầy cô và các bạn đọc đóng góp thêm.

Đây là phương pháp hiện được trình bày trong các sách giáo khoa sơ cấp về phép tính tích phân. Nhà thiên văn học vĩ đại *Johann Kepler* (1571 - 1630) là một trong số các nhà khoa học châu Âu sớm phát triển ý tưởng về vô cùng bé liên quan đến phép tính tích phân. Theo ông, mỗi đường tròn có thể xem như một đa giác có vô hạn cạnh. Nếu mỗi cạnh dùng làm đáy của một tam giác có đỉnh tại tâm hình tròn thì hình tròn đó được chia thành vô hạn các tam giác nhỏ có chiều cao xấp xỉ bán kính hình tròn. Vì diện tích mỗi tam giác bằng nửa tích của đáy nhân với chiều cao nên diện tích của hình tròn bằng nửa tích của chu vi đường tròn nhân với bán kính. Tương tự có thể xem hình cầu là hợp vô hạn các hình nón hẹp có chung đỉnh là tâm hình cầu, do đó thể tích hình cầu bằng một phần ba diện tích bề mặt nhân với bán kính. Mặt dù phương pháp suy luận trên không chặt chẽ theo quan điểm toán học thuần túy, nhưng lại đưa đến những kết quả đúng khá đơn giản. Đó là những "suy luận có lý" tiệm cận đến phép tính vi - tích phân theo quan điểm toán học hiện đại. Nhà toán học Ý *Bonaventura Cavalieri* (1598 - 1629) đã phát triển những ý tưởng của *Johann Kepler* thành nguyên lý mang tên ông: (1) *Nếu hai mẩu phẳng được chứa giữa hai đường thẳng song song và mẩu hai đoạn thẳng trên một đường thẳng bất kỳ song song với hai đường thẳng trên bị chúng cắt có chiều dài bằng nhau thì diện tích của các mẩu phẳng đó bằng nhau*; (2) *Nếu hai hình khối được chứa giữa hai mặt phẳng song song và hai thiết diện mà chúng cắt trên một mặt phẳng song song với hai mặt phẳng trên có diện tích bằng nhau thì thể tích của hai hình khối đó bằng nhau.*

Nguyên lý Cavalieri là một công cụ có giá trị trong việc tính diện tích hình phẳng và thể tích hình khối. Chẳng hạn trong *Bài toán* 3, xét hình bán cầu ở bên trái có bán kính *r*, hình trụ ở bên phải có bán kính *r*, chiều cao *r* với một hình nón khoét ra, có đáy là đáy trên của hình trụ và đỉnh là tâm của đáy dưới. Hình bán cầu và hình trụ bị khoét nằm trên cùng mặt phẳng (*h*.4).



Hình 4

Cắt cả hai hình khối này bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng đáy và cách nó một khoảng *h*. Mặt phẳng này cắt bán cầu theo một thiết diện tròn và khối trụ bị khoét theo một thiết diện hình vành khuyên. Bằng hình học sơ cấp ta tính được mỗi thiết diện đều có diện tích bằng $\pi(r^2 - h^2)$. Theo nguyên lý Cavalieri, hai hình khối đó có thể tích bằng nhau. Do đó thể tích hình cầu $V = 2(V_1 - V_2)$, trong đó $V_1 = \pi r^3$ là thể tích hình trụ và $V_2 = \frac{\pi r^3}{3}$ là thể tích hình nón. Từ đó $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Nguyên lý Cavalieri được nhiều nhà toán học sau đó như *Torricelli, Fermat, Pascal, Saint - Vicent, Barrow* áp dụng có hiệu quả trong việc lấy tích phân các hàm x^n, sinx, $\sin^2 x$, xsinx, ... Tuy nhiên có không ít những phê phán nghiêm túc xung quanh nguyên lý này. Mãi về sau *Isaac Newton* và *Gottfried Wilhem Lebniz*, độc lập với nhau xây dựng được một lý thuyết chặt chẽ về phép tính vi - tích phân như trong các giáo trình giải tích chuẩn ngày nay.

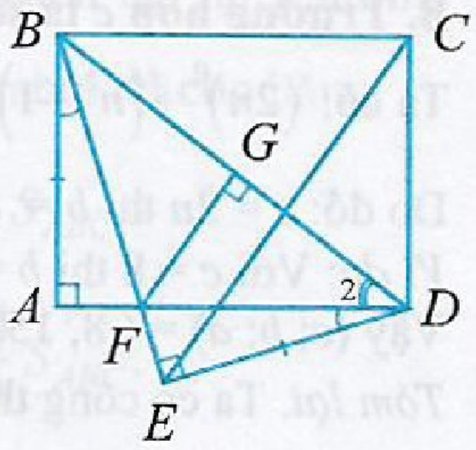
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 7

Problem. *Given a rectangle paper of size* 15 cm × 20 cm, *fold it along a diagonal. Determine the area of the common part of two halfs of the paper?* (*Question* 12, HOMC 2014 *exam*).

Remark. HOMC: *Hanoi Open Mathematics Competition.*

Solution. We need to compute the area of the triangle BFD. Using the fact that $AB = ED$, it is easy to see that two triangles ABF and EDF are equal (asa). Therefore, the triangle FBD is isosceles with the base BD. Let FG be the altitude of FBD. In the right triangle FGD, we have $GD = \frac{BD}{2} = \frac{25}{2}$ and $\cos(D_2) = \frac{AD}{BD} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.



Hence $FD = \frac{GD}{\cos(D_2)} = \frac{25}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{8}$. Thus the area of the triangle BFD is $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot FD = \frac{1875}{16}$.

TỪ VỰNG

rectangle : hình chữ nhật
fold : gấp
diagonal : đường chéo
area : diện tích
triangle : tam giác
right triangle : tam giác vuông
angle-side-angle (asa) : góc-cạnh-góc (g-c-g)
isosceles : tam giác cân (tính từ)
altitude : đường cao

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Hạn gửi bài dịch: *Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.*

BÀI TOÁN

Chứng minh rằng dãy số $\{A_n\}$ ($n = 1, 2, 3\ldots$), *trong đó* $A_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ *tiến tới dương vô cùng.*

Lời giải. Xét dãy con $\{A_{2^m}\}$ ($m = 1, 2, 3\ldots$), ta có

$$A_2 = 1 + \frac{1}{2},\ A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2},$$

$$A_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}, \ldots$$

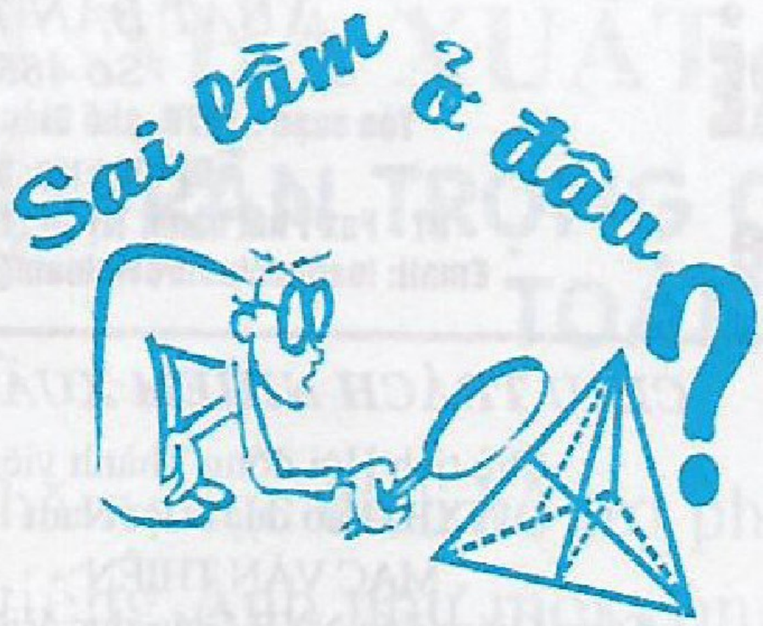
Bằng cách nhóm các số hạng theo cách trên, dễ thấy rằng $A_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$. Vì thế dãy con $\{A_{2^m}\}$ tiến tới dương vô cùng. Nhưng dãy số đã cho là dãy dương tăng dần, nên dãy này cũng tiến tới dương vô cùng.

Lưu ý. Ý tưởng phép chứng minh trên là của *Nicole Oresme* (người Pháp, khoảng 1323 - 1382). Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu tiểu sử của ông tại đường dẫn

http://www.nicole-oresme.com/seiten/oresme-biography.html

Nhận xét. Các bạn sau có lời dịch chính xác, gửi bài sớm về Tòa soạn: **Hà Nội:** *Tạ Duy Phương*, 9A, THCS Mỹ Hưng, Thanh Oai, *Trương Thị Ngọc Bích*, *Trần Thị Hồng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo; **Yên Bái:** *Hoàng Ngọc Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Yên Bái; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thu Trang*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Tăng Văn Minh Hùng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CÓ HAI ĐÁP ÁN ?

(*Đề đăng trên TH&TT số 462, tháng 12 năm 2015*)

Nhận xét. 1) Bạn *Bình* đã sai ở bước biến đổi:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2=\log_{\frac{1}{4}}((x+2)^2)^{\frac{3}{2}}=\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^3$$

vì với ĐK $\begin{cases} x\neq -2 \\ -6<x<4 \end{cases}$ thì $x+2<0$, do đó

$(x+2)^3<0$. Khi đó $\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^3$ không có nghĩa.

Cần nhớ rằng công thức: $\alpha\log_a x=\log_a x^\alpha$ chỉ đúng với điều kiện $x>0$.

Còn cách giải của bạn *Phương* đúng vì bạn đã thực hiện phép biến đổi chính xác:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2=3\log_{\frac{1}{4}}|x+2|.$$

Và bạn *Phương* đã tìm đúng được nghiệm của PT đã cho là $x=2$ và $x=1-\sqrt{33}$. Tuy nhiên bạn *Phương* đã viết nhầm $-2<x<4$ thành $-2<x<-4$ ở hai phép biến đổi cuối.

2) Các bạn sau đã tìm đúng sai lầm và gửi bài sớm về Tòa soạn: **Hà Nội:** *Đinh Vân Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân; *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ. **Nam Định:** *Trịnh Tuấn Giang*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Sơn*, 12A, THPT Bến Tắm, Chí Linh. **Hưng Yên:** *Nguyễn Việt Đức*, *Dương Hồng Sơn*, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU ?

Trong giờ bài tập ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng ở lớp 12A3, Thầy giáo có nêu bài tập sau: *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=x^2-2x-2$ và $y=\dfrac{4-x}{x-2}$.

Sau khi ghi bài tập trên bảng, bạn *Tính* liền xung phong lên bảng giải. Sau đây là lời giải của bạn *Tính*:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=x^2-2x-2$ và $y=\dfrac{4-x}{x-2}$ là :

$$x^2-2x-2=\frac{4-x}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-2)(x-2)=4-x\ \ (x\neq 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x=0\Leftrightarrow x(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^1\left|x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right|dx+\int_1^3\left|x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right|dx$$

$$=\left|\int_0^1\left(x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right)dx\right|+\left|\int_1^3\left(x^2-2x-2-\frac{4-x}{x-2}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x-2}\right)dx\right|+\left|\int_1^3\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x-2}\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-2\ln|x-2|\right)\Bigg|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x-2\ln|x-2|\right)\Bigg|_1^3\right|$$

$$=\left|\frac{-5}{3}+2\ln 2\right|+\left|-3+\frac{5}{3}\right|$$

$=3-\ln 4$ (đvdt).

Sau khi bài giải được trình bày xong, cả lớp đều công nhận lời giải trên là đúng. Thầy giáo khẳng định lời giải trên chưa đúng. Các bạn hãy chỉ giúp các bạn lớp 12A3 chỗ sai của lời giải trên!

NGUYỄN ANH VŨ

(*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 466 (4.2016)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở
For Lower Secondary School
Nguyễn Khánh Nguyên – Sử dụng tính bất biến để giải toán.

4 *Nguyễn Trọng Thọ* – Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử số hạng tự do.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Hưng Yên, năm học 2015 – 2016.

8 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên TP Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016.

10 Chuẩn bị cho kỳ thi Trung học phổ thông Quốc gia
Cao Hải Vân – Giải phương trình, hệ phương trình bằng phép biến đổi hệ quả.

13 Hướng dẫn giải - Đề số 7.

15 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 8.

16 Đề ra kì này
Problems in This Issue
T1/466 ..., T12/466, L1/466, L2/466.

18 Giải bài kì trước
Solutions to Previous Problems

27 Diễn đàn dạy học Toán
Huỳnh Duy Thủy – Cách tiếp cận và kỹ thuật khám phá bài toán bất đẳng thức.

32 Diễn đàn phương pháp giải toán
Lê Thị Ngọc Thúy – Suy nghĩ thêm về định lý bốn điểm.

35 Lịch sử Toán học
Lê Quốc Hán – Nguồn gốc nguyên thủy của phép tính vi - tích phân.

37 Bạn đọc tìm tòi
Nguyễn Văn Hiếu – Cách tìm bộ ba Pythagore với số tự nhiên.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - *Bài số 7*
Bài dịch số 4 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?
Giải đáp: Phương trình Lôgarit có hai đáp án?
Nguyễn Anh Vũ – Sai ở đâu?

Ảnh Bìa 1. (*Từ trái qua phải*): GS.TSKH *Hà Huy Khoái*, Thầy giáo *Nguyễn Lưu*, GS.TSKH *Đỗ Long Vân*, Cô giáo *Nguyễn Thị Thanh Tâm*, em *Vũ Xuân Trung*, em *Hoàng Anh Tài*, em *Nguyễn Huy Hoàng*, em *Nguyễn Tuấn Hải Đăng*, em *Nguyễn Thị Việt Hà*, em *Phạm Lâm Tùng*, PGS.TS *Phan Thị Hà Dương* (học sinh đầu tiên được giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 1990), GS.TS *Nguyễn Hữu Dư*.

Trưởng ban biên tập: *ThS.* NGUYỄN ANH QUÂN ***Mĩ thuật***: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN ***Thiết kế, chế bản***: VŨ MAI ANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

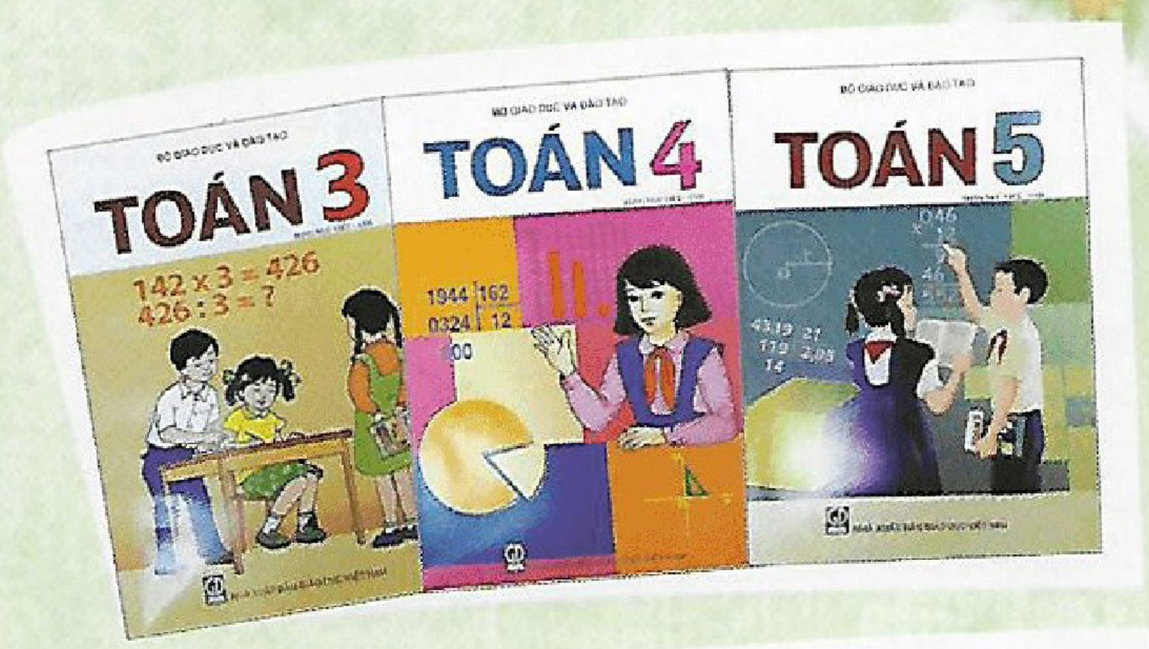
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU BỘ SÁCH GIÁO KHOA TOÁN SONG NGỮ VIỆT - ANH

Nhằm mục đích hỗ trợ phát triển kỹ năng giao tiếp và khả năng sử dụng tiếng Anh như một công cụ để học toán, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam phát hành **Bộ sách giáo khoa Toán song ngữ Việt – Anh** từ lớp 3 đến lớp 12.

Bộ sách được biên soạn, biên dịch theo đúng cấu trúc, nội dung và chương trình của sách giáo khoa đang được sử dụng hiện nay và sẽ giúp các em từng bước làm quen với việc học toán bằng tiếng Anh: từ việc biết đọc từ toán, biết viết các phép tính đến việc tận dụng vốn kiến thức tiếng Anh đã học vào việc học toán và các môn học khác.

Sách do NXB Giáo dục Việt Nam ấn hành.

Sách được in 2 màu khổ lớn (20,5 x 29,5 cm), trên giấy chất lượng cao.

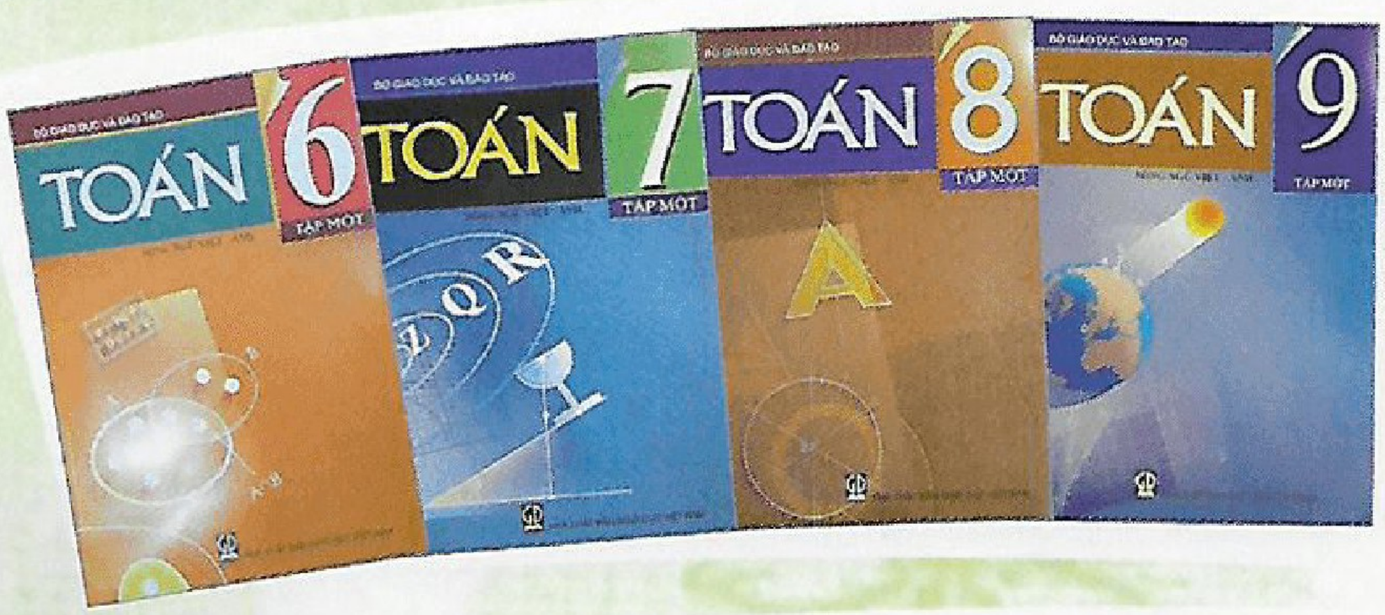


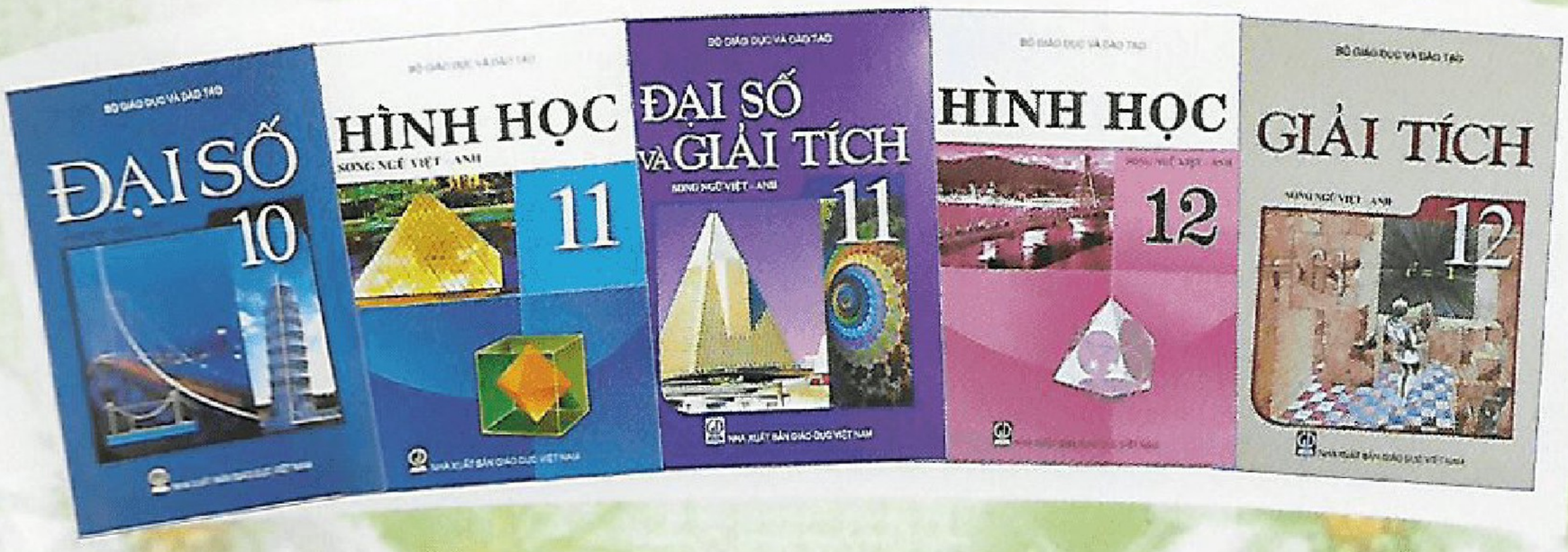
Địa chỉ liên hệ:

Công ty Cổ phần Thiết bị giáo dục và Công nghệ Việt Nam.

187B Giảng Võ, quận Đống Đa, Hà Nội.

Điện thoại: 04.35124198





ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT4M6

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2016

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng