TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2016
Số 465

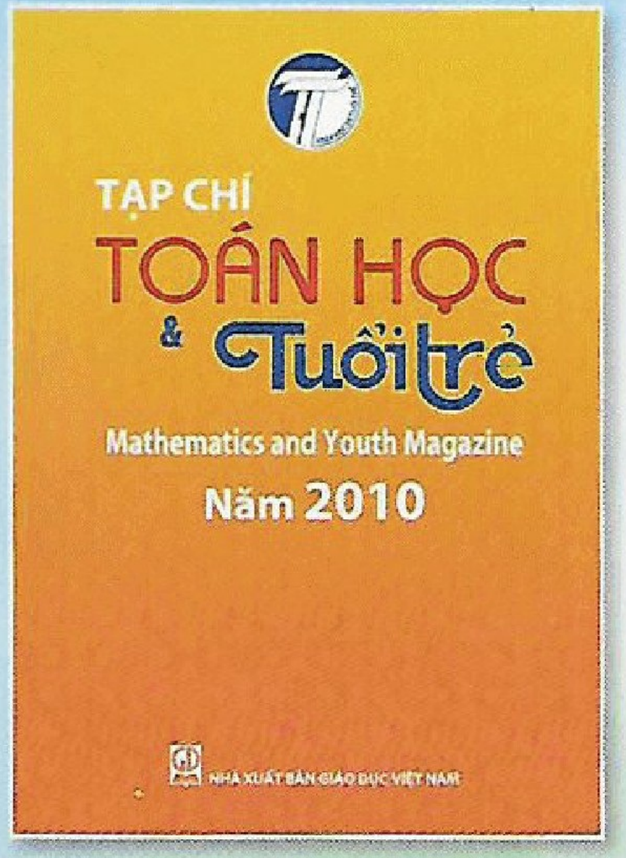
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

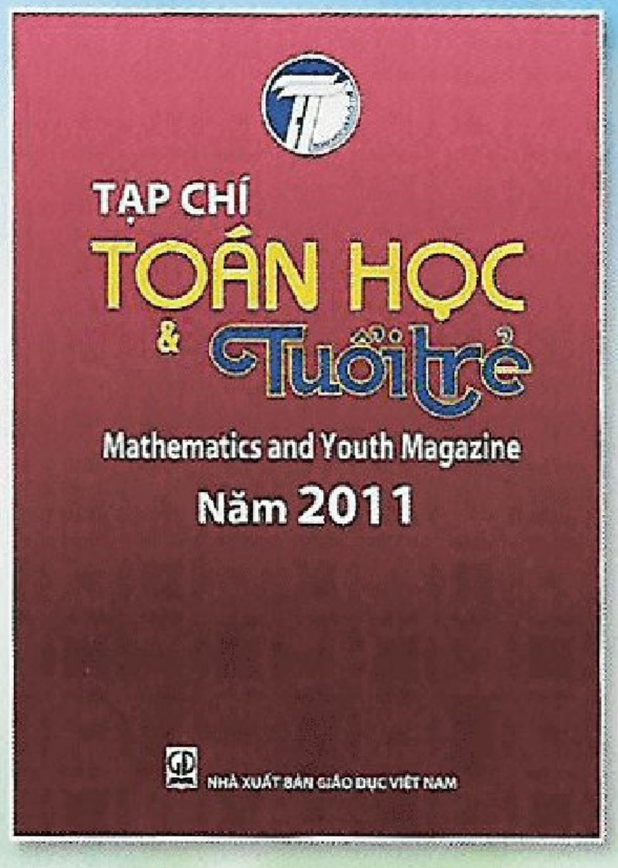
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

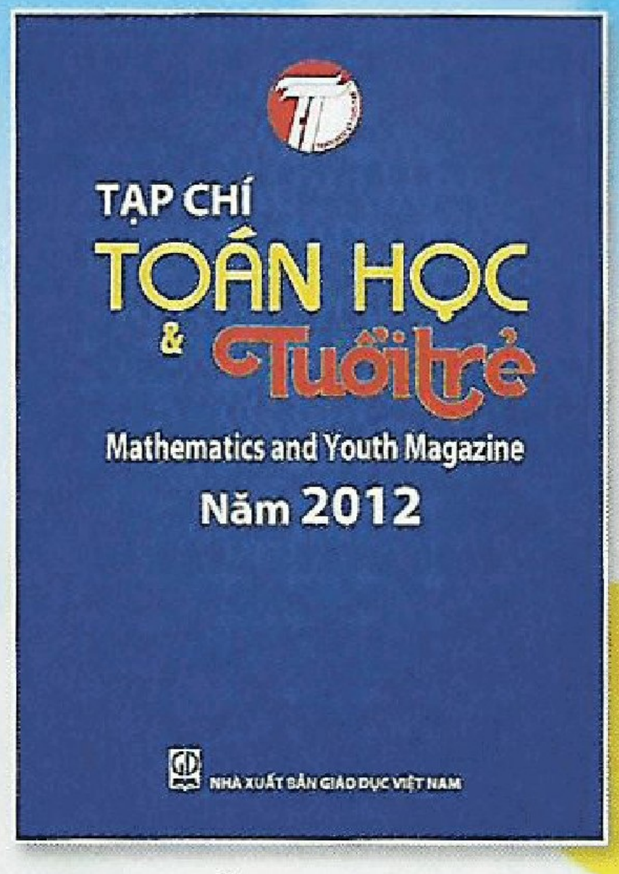
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



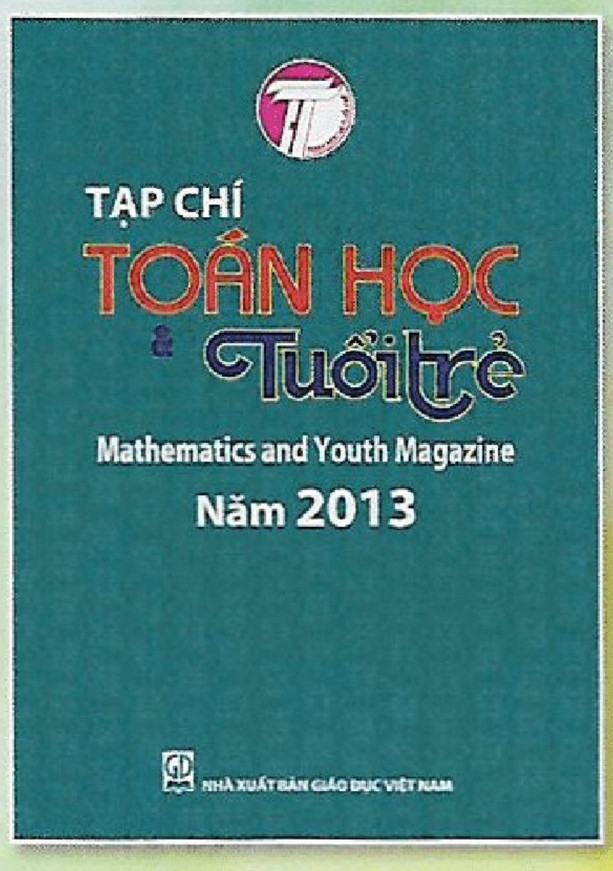
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



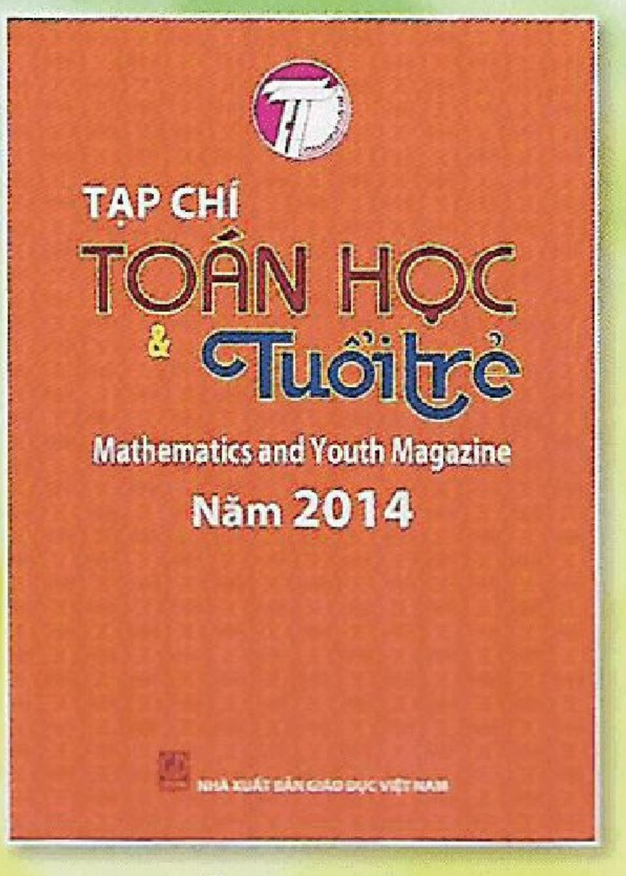
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



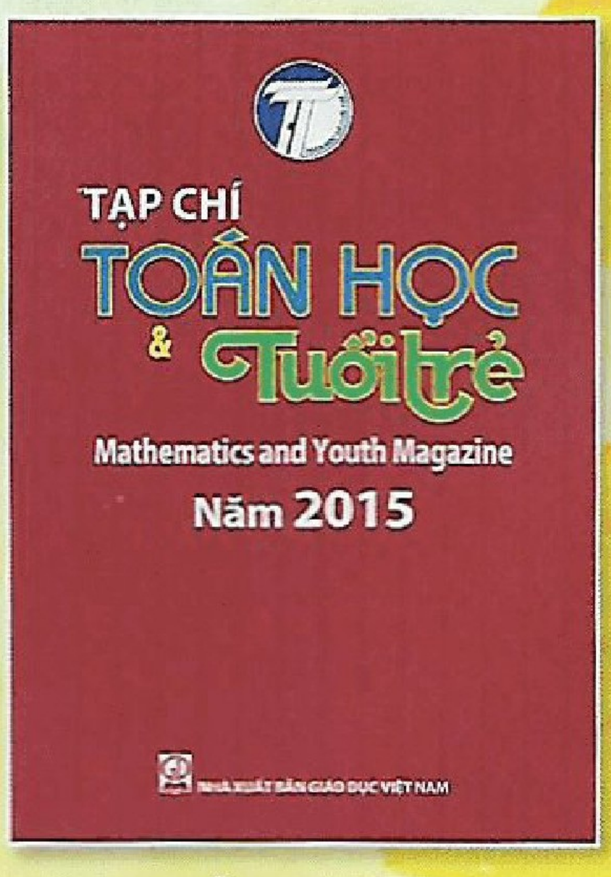
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI
- Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

QUY TRÌNH SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO VÀ VINACAL

ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Trong chương trình bậc học THCS một số bài toán về dãy số được học sinh học từ năm lớp 6, sau đó học sinh sẽ được học tiếp tục vào các năm tiếp theo và được học tiếp tục học nâng cao ở bậc THPT. Một số bài toán về dãy số nếu chỉ sử dụng kiến thức của toán học thì học sinh không thể giải được, nhưng nếu kết hợp thêm sử dụng MTCT thì có thể tính được kết quả gần đúng. Từ kết quả các bài toán rút ra được các tính chất của dãy số.

DẠNG I. CHO DÃY SỐ, SỬ DỤNG MÁY TÍNH VIẾT QUY TRÌNH BẤM PHÍM LIÊN TỤC VÀ TÍNH.

A. *DÃY SỐ CHỈ CÓ MỘT BIẾN.*

Bài toán 1.1. *Cho dãy số* $S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ldots,$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

1) *Viết quy trình bấm phím tính* S_n *theo* n;

2) *Tìm n nhỏ nhất để cho* $S_n > 5$.

Lời giải. **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Quy trình bấm phím:

0 [SHIFT] [STO] [A] 0 [SHIFT] [STO] [B]

1 [+] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] (2)

[ALPHA] [B] [+] 1 [÷] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [B] (3)

[Δ] [SHIFT] [COPY] (4)

$\underbrace{[=][=]}_{2}\ \underbrace{[=][=]}_{3}\ \underbrace{[=][=]}_{4} \ldots\ldots \underbrace{[=][=]}_{n}$ ($2n - 2$ dấu bằng) (5)

2) n nhỏ nhất bằng 83.

Nhận xét. Trong bài toán 1.1 đã nêu cách xây dựng quy trình và được giải thích từng bước của quy trình như sau:

Dòng (1) ghi nhớ các biến.

Dòng (2) ghi nhớ các chỉ số chạy.

Dòng (3) ghi nhớ biểu thức dãy.

Dòng (4) tổ hợp nhóm phím để ghi vòng lặp.

Dòng (5) là kết quả.

Trong bài toán 1.1 học sinh không thể lập được công thức tổng quát tính tổng S_n, và khó tính được S_n (dù là gần đúng) với n khá lớn. Nhưng nếu kết hợp với máy tính CASIO thì có thể tính gần đúng được S_n với n khá lớn. Từ bài toán 1.1 ta có bài toán 1.2.

Bài toán 1.2. *Cho* $U_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{3}{4^2} + \ldots\ldots + i.\frac{n-1}{n^2}$

($i = 1$ *nếu n lẻ,* $i = -1$ *nếu n chẵn,* $n \in \mathbb{N}^*$).

1) *Tính chính xác dưới dạng phân số các giá trị* U_4, U_5, U_6;

2) *Tính giá trị gần đúng các giá trị của* U_{20}, U_{25}, U_{30}.

3) *Nêu quy trình bấm phím để tính giá trị của* U_n.

Lời giải. **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS.**

1) Kết quả: $U_4 = \frac{113}{144}, U_5 = \frac{3401}{3600}, U_6 = \frac{967}{1200}$.

2) Kết quả: $U_{20} \approx 0,8474920248$,

$U_{25} \approx 0,8895124152, U_{30} \approx 0,8548281618$.

3) Quy trình bấm phím:

1 [SHIFT] [STO] [B] (1)

0 [SHIFT] [STO] [A] [ALPHA] [A] [ALPHA] (2)

[=] 1 [+] [ALPHA] [A] [ALPHA] [:]

[ALPHA] [B] [ALPHA] [=] [ALPHA] [B]

+ [(] [(] [−] 1 [)] [^] [(] [ALPHA] [A] [−] 1 [)] [)]

[×] [(] [ALPHA] [A] [−] 1 [)] [÷] [ALPHA] [A] [x^2] (3)

Bấm dấu "=" liên tiếp theo dõi số đếm A ứng với giá trị U_A.

Giải thích: Dòng (1) ghi nhớ các biến.
Dòng (2) ghi nhớ các chỉ số chạy.
Dòng (3) ghi nhớ biểu thức dãy.

Nhận xét. Có thể giải bài toán 1.2 tương tự theo cách của bài toán 1.1. Tuy nhiên lời giải đưa ra quy trình sử dụng phím đỏ của máy tính để giải. Phím [ALPHA] [A] [ALPHA] [=], [ALPHA] [:] là các phím đỏ. Quy trình sử dụng phím đỏ gọn hơn, người học dễ nhớ hơn. Bài toán 1.2 khác với bài toán 1.1 là bài toán 1.2 tính giá trị của U_n phụ thuộc vào chỉ số chẵn, chỉ số lẻ.

Trong quá trình giải bài toán 1.2, nên viết quy trình bấm phím trước, sau đó sẽ tính được các giá trị tương ứng của U_n, ($n = 4, 5, 6, \ldots, 30$).

Bài toán 1.3. 1) *Viết quy trình bấm phím tính*

$$A_n = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2}}}}}}_{n\ \text{căn}} \quad (n \text{ dấu căn});$$

2) *Tìm các giá trị gần đúng của* $A_1, A_2, A_8, A_9, A_{17}, A_{18}$.

Lời giải. **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Quy trình bấm phím:

0 [SHIFT] [STO] [A]

[√] [(] 2 [+] [ALPHA] [A] [)] [SHIFT] [STO] [A]

1 [a b/c] 2 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [B]

[Δ] [SHIFT] [COPY]

$\underbrace{[=][=]}_{2}\ \underbrace{[=][=]}_{3}\ \underbrace{[=][=]}_{4} \cdots \underbrace{[=][=]}_{n}$

2)

A_1	A_2	A_8
0,707106781	0,923879532	0,999981175
A_9	A_{17}	A_{18}
0,999995293	0,999999999	1

Nhận xét. Trong bài toán 1.3 học sinh không thể rút gọn được A_n, và do đó khó tính được A_n với n khá lớn. Nhưng nếu kết hợp với máy tính CASIO thì có thể tính gần đúng được A_n với n khá lớn.

Dựa vào kết quả bài toán 1.3 ta có khi giá trị của n càng lớn thì giá trị của A_n tiến dần về giá trị 1. Do đó rút ra tính chất dãy A_n là dãy hội tụ về giá trị 1.

B. DÃY SỐ CÓ BIẾN KẾT HỢP VỚI CÁC CHỈ SỐ THAY ĐỔI.

Bài toán 1.4. *Cho dãy số* $\{u_n\}$, *biết* $u_1 = 1$;

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{3}{n}\right).u_n + 2 - \frac{3}{n}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right).$$

1) *Viết quy trình bấm phím tính giá trị* u_n *của dãy số* $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$;

2) *Tính giá trị* $u_2, u_3, u_4, ..., u_{31}$.

***Lời giải*:** **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Quy trình bấm phím:

1 [SHIFT] [STO] [B] 0 [SHIFT] [STO] [A] 1 [+] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] [(] 1 [+] 3 [a b/c] [ALPHA] [A] [)] [ALPHA] [B] [+] 2 [−] 3 [a b/c] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [B] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] [=] .... [=] [=]

($2n - 2$ dấu bằng)

2)

u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
3	8	17	31	51	78
u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
113	157	211	276	353	443
u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	u_{19}
547	666	801	953	1123	1321
u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}
1521	1751	2003	2278	2577	2901
u_{26}	u_{27}	u_{28}	u_{29}	u_{30}	u_{31}
3251	3628	4033	4467	4931	5426

Nhận xét. Trong bài toán 1.4 phần biến là u_n, phần chỉ số là n. Phần biến và phần chỉ số cùng thay đổi. Bài toán 1.4 đã xây dựng quy trình bấm phím tương tự như bài toán 1.1.

Bài toán 1.5. (*Đề thi HSG toàn quốc năm* 2013)
Lập quy trình bấm máy và tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

1) $P = \sqrt[2013]{2012 + \sqrt[2012]{2011 + ... + \sqrt[1992]{1991 + \sqrt[1991]{1990}}}}$

2) $Q = \sqrt[2013]{2012\sqrt[2012]{2011\sqrt[2011]{2010...\sqrt[1992]{1991\sqrt[1991]{1990}}}}}$

Lời giải. **1) Sử dụng máy tính CASIO fx 570MS** ta dùng lệnh:

1989 [SHIFT] [STO] [A] 0 [SHIFT] [STO] [B] [ALPHA] [A] [+] 1 [SHIFT] [STO] [A] [(] [ALPHA] [A] [+] 1 [)] [SHIFT] [^] [(] [ALPHA] [A] [+] [ALPHA] [B] [)] [SHIFT] [STO] [B] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] [=] .....

Tiếp tục ấn phím [=] khi nào trên màn hình hiện dòng lệnh: $A+1 \to A$ và đồng thời trên dòng kết quả hiện lên 2012 thì ấn tiếp một dấu [=] nữa ta có kết quả của biểu thức cần tính:

Kết quả: P = 1,003786277

2) Sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS ta dùng lệnh:

1989 [SHIFT] [STO] [A] 1 [SHIFT] [STO] [B] [ALPHA] [A] [+] 1 [SHIFT] [STO] [A] [(] [ALPHA] [A] [+] 1 [)] [SHIFT] [^] [(] [ALPHA] [A] [×] [ALPHA] [B] [)] [SHIFT] [STO] [B] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] [=] ...

Tiếp tục ấn dấu [=] khi nào trên màn hình hiện dòng lệnh: $A+1 \to A$ và đồng thời trên dòng kết quả hiện lên 2012 thì ấn tiếp một dấu [=] nữa ta có kết quả của biểu thức cần tính:

Kết quả: Q = 1,003787915.

Nhận xét. Để giải bài toán 1.5 phải đưa bài toán đưa về việc xét dãy số, tính số hạng thứ n của dãy số.

1) $S_1=\sqrt{1};\ S_2=\sqrt[3]{2+S_1};\ S_3=\sqrt[4]{3+S_2};\ ....;$

$$S_n=\sqrt[n+1]{n+S_{n-1}}\ \left(1990\le n\le 2012\right).$$

2) $S_1=\sqrt{1};\ S_2=\sqrt[3]{2S_1};\ S_3=\sqrt[4]{3S_2};\ ....;$

$$S_n=\sqrt[n+1]{nS_{n-1}}\ \left(1990\le n\le 2012\right).$$

Từ việc lập được dãy số, sau đó lập quy trình bấm phím liên tục để tính số hạng thứ n của dãy số. Bài toán 1.5 đã xây dựng quy trình bấm phím đối với bài toán dãy số chứa căn thức.

C. VIẾT QUY TRÌNH BẤM PHÍM KẾT HỢP NHIỀU DÃY SỐ KHÁC NHAU

Bài toán 1.6. (*Bài này lấy gần đúng với **hai chữ số thập phân***). *Ta có bất đẳng thức sau:*

$$\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ \left(n\in\mathbb{N},n\ge 2\right).$$

1) *Hãy viết quy trình bấm phím tính lần lượt theo thứ tự các giá trị:* $\sqrt{n};\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}};2\sqrt{n}$ (*có thể lẫn vào đó các giá trị biến đếm*).

2) *Tính bộ giá trị* $\sqrt{n};\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}};\ 2\sqrt{n}$ *với n nhận giá trị từ 1 đến 10.*

Lời giải. **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Quy trình bấm phím:

0 [SHIFT] [STO] [A] 0 [SHIFT] [STO] [B] [ALPHA] [A] [+] 1 [SHIFT] [STO] [A] [√] [ALPHA] [A] [=] [ALPHA] [B] [+] 1 [÷] [√] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [B] 2 [√] [ALPHA] [A] [=] [Δ] [Δ] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] ..... [=] [=] [=] [=] (4n – 4 dấu bằng)

2) Kết quả: (1; 1; 2), (1,41; 1,71; 2,82), (1,73; 2,28; 3,46), (2; 2,78; 4), (2,24; 3,23; 4,47), (2,45; 3,64; 4,90), (2,65; 4,02; 5,29), (2,83; 4,37; 5,66), (3; 4,70; 6), (3,16; 5,02; 6,32).

Nhận xét. Bài toán 1. 6 gồm có ba dãy là

$$\sqrt{n};\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}};\ 2\sqrt{n}.$$

Quy trình bấm phím tương tự như bài toán 1.1, nhưng mỗi nhóm dấu "=" gồm 4 dấu bằng để chỉ (chỉ số; $\sqrt{n};\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}};\ 2\sqrt{n}$). Từ các kết quả tính ở các bộ giá trị, ta rút ra được dự đoán $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ \left(n\in\mathbb{N},n\ge 2\right)$.

Tương tự từ bài toán 1. 6 ta có bài toán.

Bài toán 1.7. *Cho dãy số U_n được xác định như sau:* $U_1=1;U_2=3;$

$$\begin{cases}U_n=4.U_{n-1}+2U_{n-2}, & \text{với } n \text{ lẻ}\\ U_n=3.U_{n-1}, & \text{với } n \text{ chẵn}\end{cases}.$$

1) *Lập quy trình bấm phím tính U_n;*

2) *Tính $U_{10};U_{11};U_{12};U_{13};U_{14}$.*

Lời giải.

1) Quy trình bấm phím:

1 [SHIFT] [STO] [A] 3 [SHIFT] [STO] [B] 4 [ALPHA] [B] [+] 2 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] (tính U_3)

3 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [B] (tính U_4)

[Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] ..... [=]

2) Kết quả: $U_{10}=115248;\ U_{11}=537824;$

$U_{12}=1613472;\ U_{13}=7529536;\ U_{14}=22588608.$

Nhận xét: Bài toán 1.7 gồm hai dãy khác nhau, dãy theo chỉ số chẵn, dãy theo chỉ số lẻ. Quy trình bấm phím bài toán 1.7 tương tự như bài toán 1.1.

DẠNG II. CHỨNG MINH CÔNG THỨC TRUY HỒI, VIẾT QUY TRÌNH BẤM PHÍM LIÊN TỤC CỦA DÃY SỐ ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA TỔNG.

Bài toán 2.1. *Cho* $A_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+...+\frac{n-1}{n!}$.

$\left(n\in\mathbb{N},\ n>1,\ n!=1.2.3....n\right)$.

1) *Thu gọn A_n;*

2) *Viết quy trình bấm phím liên tục để tính A_n;*

3) *Khi bấm quy trình tính, máy báo Math ERROR, khi đó n bằng bao nhiêu?*

Lời giải. **Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Thu gọn A_n:

$$A_n=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$$

2) Viết quy trình bấm phím liên tục để tính A_n:

0 [SHIFT] [STO] [A] 1 [+] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] 1 [−] [(] 1 [÷] [ALPHA] [A] [SHIFT] [x!] [)] [=] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] [=] ... [=] [=]

3) Kết quả: $n=70$.

Nhận xét. Sử dụng kiến thức toán học rút gọn biểu thức đã cho để được biểu thức đơn giản hơn, từ đó viết quy

trình bấm phím liên tục dễ dàng hơn. Sau đó bấm phím dấu "=" liên tục để tính được giá trị của A_n.

Bài toán 2.2. *Cho dãy số*

$$u_n = \frac{\left(5+\sqrt{7}\right)^n - \left(5-\sqrt{7}\right)^n}{2\sqrt{7}}, \quad \text{với } n = 0, 1, 2, 3, ...$$

1) *Tính 5 số hạng đầu tiên của dãy số;*

2) *Chứng minh* $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 18u_n$;

3) *Lập quy trình bấm phím liên tục tính* u_{n+2} *trên máy tính.*

***Lời giải*: Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 10, u_3 = 82, u_4 = 640$.

2) Chứng minh: $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 18u_n$.

Xét $10u_{n+1} - 18u_n = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left[10\left(5+\sqrt{7}\right)^{n+1} - \right.$

$$\left. -10\left(5-\sqrt{7}\right)^{n+1} - 18\left(5+\sqrt{7}\right)^n + 18\left(5-\sqrt{7}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}.\left\{\left(5+\sqrt{7}\right)^n\left[10\left(5+\sqrt{7}\right)-18\right] - \right.$$

$$\left. -\left(5-\sqrt{7}\right)^n\left[10\left(5-\sqrt{7}\right)-18\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}.\left[\left(5+\sqrt{7}\right)^n\left(32+10\sqrt{7}\right) - \left(5-\sqrt{7}\right)^n\left(32-10\sqrt{7}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}.\left[\left(5+\sqrt{7}\right)^{n+2} - \left(5-\sqrt{7}\right)^{n+2}\right] = u_{n+2}.$$

3) Quy trình bấm phím liên tục:

Cách 1. 0 [SHIFT] [STO] [A] 1 [SHIFT] [STO] [B] [ALPHA] [A] [ALPHA] [=] 10 [ALPHA] [B] [−] 18 [ALPHA] [A] [ALPHA] [:] [ALPHA] [B] [ALPHA] [=] 10 [ALPHA] [A] [−] 18 [ALPHA] [B] $\underbrace{[=]}_{u_3}\underbrace{[=]}_{u_4}\underbrace{[=]}_{u_5}...\underbrace{[=]}_{u_n}$ ($n-2$ dấu bằng)

Cách 2. 0 [SHIFT] [STO] [A] 1 [SHIFT] [STO] [B] 10 [ALPHA] [B] [−] 18 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] 10 [ALPHA] [A] [−] 18 [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] [Δ] [SHIFT] [COPY] [=] [=] [=] ... [=] ($n-4$ dấu bằng)

Nhận xét. Bài toán 2.2 đã nêu hai cách xây dựng quy trình sử dụng máy tính CASIO để giải bài toán về dãy số.

DẠNG III. CHO BIẾT QUY TRÌNH BẤM PHÍM TRÊN MÁY TÍNH. HÃY NÊU KẾT QUẢ BIỂU THỨC CẦN TÍNH, DÃY SỐ TỔNG QUÁT.

Bài toán 3.1. *Cho quy trình sau (trên các máy Casio, Vinacal)*

1 [SHIFT] [STO] [A] 0 [SHIFT] [STO] [B]

1 [+] [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A]

[ALPHA] [B] [+] 1 [÷] 2 [^] [ALPHA] [A] [SHIFT]

[STO] [B] [Δ] [SHIFT] [COPY] $\underbrace{[=][=]}\underbrace{[=][=]}.....\underbrace{[=][=]}$

($2n-2$ *nhóm*)

1) *Giá trị nhỏ nhất A bằng bao nhiêu thì* $B \approx 0,5$;

2) *Quy trình này tính gì ?*

Lời giải. 1) min $A = 35$ thì $B \approx 0,5$.

2) Tính tổng $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ...$

Nhận xét. Từ quy trình bấm phím trên máy tính đã có, ta tìm được kết quả bài toán, công thức thể hiện quy trình bấm phím. Là bài toán ngược lại của các bài toán 1.

Bài toán 3.2. *Một quy trình máy tính viết:*

1 [SHIFT] [STO] [A] 5 [ALPHA] [A] [+] [√] [(] 24 [ALPHA] [A] [x^2] [−] 8 [SHIFT] [STO] [A] [=] [=] ... [=]

Bấm liên tiếp 1, 2, 3, ..., $n-1$ *dấu "=" để được* u_{n+1}

1) *Tính đúng các giá trị* $u_1; u_2; ....; u_{11}$;

2) *Quy trình này tính* u_n *có công thức như thế nào?*

3) *Nếu máy tính hỏng phím* [SHIFT] *và phím* [ALPHA] *có thể khắc phục để tính liên tục các giá trị* u_n *được không ? Nếu được, quy trình được viết như thế nào ?*

Lời giải. 1) Kết quả:

$u_1 = 1; u_2 = 9; u_3 = 89; u_4 = 881; u_5 = 8721;$

$u_6 = 86329; u_7 = 854569; u_8 = 8459361;$

$u_9 = 83739041; u_{10} = 828931049; u_{11} = 8205571449.$

2) $u_1 = 1, u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 - 8}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

3) Quy trình mới có thể là:

1 [=] 5 [Ans] [+] [√] [(] 24 [Ans] [x^2] [−] 8 [=] [=] [=] .... [=]

Nhận xét: Từ quy trình bấm phím trên máy tính đã có, ta tìm được kết quả bài toán, công thức thể hiện quy trình bấm phím. Là bài toán ngược lại của các bài toán 1.

Trong trường hợp máy tính hỏng phím [SHIFT] và phím [ALPHA] ta có thể khắc phục bằng việc sử dụng các phím khác thay thế vẫn giải được bài toán.

DẠNG IV. TÍNH TỔNG, TÍCH CÁC SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ.

Bài toán 4.1. *Cho dãy số* u_n *được xác định như sau:* $u_1 = 1; u_2 = 2; u_{n+2} = \begin{cases} \sqrt[3]{u_{n+1}.u_n^2 + 2012}, & n \text{ lẻ} \\ \sqrt[3]{u_{n+1}^2.u_n + 2013}, & n \text{ chẵn} \end{cases}$.

1) *Tính đúng các giá trị* $u_{10}; u_{15}; u_{21}$. *Gọi* S_n *là tổng của n số hạng đầu tiên của dãy* u_n. *Tính*

S_{10}; S_{15}; S_{21} *(kết quả làm tròn đến 6 chữ số thập phân);*

2) *Viết quy trình bấm phím tính* S_n.

***Lời giải*: Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Kết quả: $u_{10} \approx 22,070563$; $u_{15} \approx 25,571101$;

$u_{21} \approx 29,018365$; $S_{10} \approx 144,227692$;

$S_{15} \approx 265,461899$; $S_{21} \approx 431,961988$.

2) Quy trình bấm phím liên tục:

1 [SHIFT] [STO] [A] 2 [SHIFT] [STO] [B] 3 [SHIFT] [STO] [C] [SHIFT] [$\sqrt[3]{\ }$] [(] [ALPHA] [B] [ALPHA] [A] [x^2] [+] 2012 [)] [SHIFT] [STO] [A] [+] [ALPHA] [C] [SHIFT] [STO] [C] [SHIFT] [$\sqrt[3]{\ }$] [(] [ALPHA] [A] [x^2] [ALPHA] [B] [+] 2013 [)] [SHIFT] [STO] [B] [+] [ALPHA] [C] [SHIFT] [STO] [C] [Δ] [Δ] [Δ] [SHIFT] [COPY] $\underbrace{[=][=]}_{U_5\ S_5}$ $\underbrace{[=][=]}_{U_6\ S_6}$....

Nhận xét. Trong bài toán 4.1 đã xây dựng quy trình sử dụng máy tính CASIO để giải bài toán về dãy số. Trong bài toán 4.1 viết quy trình bấm phím tính giá trị của U_n kết hợp với tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy.

Bài toán 4.2. *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *với n là số tự nhiên khác 0, có* $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ *và*

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n.$$

1) *Viết quy trình bấm máy tính* u_{n+3} *rồi tính* $u_{19}, u_{20}, u_{66}, u_{67}, u_{68}$;

2) *Viết quy trình bấm máy để tính tổng của 20 số hạng đầu tiên của dãy số đó.*

***Lời giải.* Sử dụng Máy tính CASIO fx – 570MS**

1) Quy trình bấm phím:

1 [SHIFT] [STO] [A] 2 [SHIFT] [STO] [B] 3 [SHIFT] [STO] [C] 2 [ALPHA] [C] [−] 3 [ALPHA] [B] [+] 2 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] 2 [ALPHA] [A] [−] 3 [ALPHA] [C] [+] 2 [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] 2 [ALPHA] [B] [−] 3 [ALPHA] [A] [+] 2 [ALPHA] [C] [SHIFT] [STO] [C] [Δ] [Δ] [SHIFT] [Δ] $\underbrace{[=]}_{u_7}$ $\underbrace{[=]}_{u_8}$....

Kết quả:

$u_{19} = 315$; $u_{20} = -142$; $u_{66} = 2\,777\,450\,630$;

$u_{67} = -3\,447\,965\,925$; $u_{68} = -9\,002\,867\,182$.

2) Tính tổng 20 số hạng đầu tiên của dãy (S_{20})

1 [SHIFT] [STO] [A] 2 [SHIFT] [STO] [B] 3 [SHIFT] [STO] [C] 6 [SHIFT] [STO] [D] 2 [ALPHA] [C] [−] 3 [ALPHA] [B] [+] 2 [ALPHA] [A] [SHIFT] [STO] [A] [ALPHA] [A] [+] [ALPHA] [D] [SHIFT] [STO] [D] 2 [ALPHA] [A] [−] 3 [ALPHA] [C] [+] 2 [ALPHA] [B] [SHIFT] [STO] [B] [ALPHA] [B] [+] [ALPHA] [D] [SHIFT] [STO] [D] 2 [ALPHA] [B] [−] 3 [ALPHA] [A] [+] 2 [ALPHA] [C] [SHIFT] [STO] [C] [ALPHA] [C] [+] [ALPHA] [D] [SHIFT] [STO] [D] [Δ] [Δ] [Δ] [Δ] [Δ] [SHIFT] [Δ] $\underbrace{[=][=]}_{u_7\ S_7}$ $\underbrace{[=][=]}_{u_8\ S_8}$....

Kết quả: $S_{20} = 272$.

ĐỀ XUẤT CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Cho $S_n = \frac{1}{2.3} + \frac{2}{3.4} + ... + \frac{n}{(n+1)(n+2)}, n \in \mathbb{N}^*$.

1) Viết quy trình bấm phím tính S_n;

2) Tính chính xác S_{10}. Tính giá trị gần đúng với 6 chữ số thập phân của S_{15};

3) Tìm n nhỏ nhất để $S_n > 2$.

2. Cho $A_n = \left(7+\sqrt{48}\right)^{2n+1} + \left(7-\sqrt{48}\right)^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Đặt $x_1 = 7+\sqrt{48}$, $x_2 = 7-\sqrt{48}$.

Viết quy trình bấm phím liên tục tính $A_n = x_1^{2n+1} + x_2^{2n+1}$.

3. Cho dãy số $U_1 = 3; U_2 = 12; U_3 = 6; U_4 = 6\sqrt{2}; ...$ trong đó mỗi số kể từ số thứ ba bằng căn bậc hai của tích hai số đứng trước đó. $(U_n = \sqrt{U_{n-1}.U_{n-2}}\ ; n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$.

1) Lập quy trình bấm phím tính U_n theo $U_{n-1}; U_{n-2}$.

2) Tính $U_{15}; U_{263}; U_{30032007}$.

4. (*Đề thi HSG Toàn quốc năm* 2014)

Cho dãy số: $x_1 = x_2 = 1; x_3 = 2$;

$$x_{n+3} = x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n, \text{ với } n = 1, 2, 3, ...$$

Thực hiện quy trình bấm máy tính x_n rồi sử dụng quy trình đó để tính x_{15}, x_{20}, x_{25}.

5. Cho hai số x_1 và x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = 1$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) Chứng minh rằng: $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$;

2) Viết quy trình bấm phím liên tục tính được S_{n+2} theo S_{n+1} và S_n $(n = 1, 2, 3, ...)$.

6. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{1}{2}(3+u_n)$.

Tính tổng 20 số hạng đầu tiên của dãy.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 Tỉnh Đồng Nai NĂM HỌC 2013 - 2014

(Đề thi đăng trên TH&TT số 464, tháng 2 năm 2016)

Câu 1. $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0 \quad (*)$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (*) nên khi chia cả hai vế cho x^2, (*) tương đương với:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{2} \\ x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

- Xét $x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1=0.$

Ta có $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2-4=-2\sqrt{2}-1<0$ nên PT vô nghiệm.

- Xét $x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0.$

Ta có $\Delta=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4=2\sqrt{2}-1>0$ nên PT có hai nghiệm $x=\frac{-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Vậy nghiệm của (*) là: $x=\frac{-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Câu 2. Cộng theo từng vế của hai PT ta được:

$$x^3+y^3+2(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$$

(do $x^2-xy+y^2+2>0$ với mọi x, y).

Thay vào PT thứ nhất của hệ ta được:

$$x^3-2x-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{-1;\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Từ đó suy ra HPT có ba nghiệm $(x; y)$ là:

$$(-1;1);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu 3. 1) Xét cặp số $(m; n)=(3; 11)$, ta có: $m^2+2=11 \vdots n$ và $n^2+2=123 \vdots m$. Do đó $(m; n)=(3; 11)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện.

2) Theo giả thiết ta có:

$m^2+2 \vdots n \Rightarrow m^2+n^2+2 \vdots n;$

$n^2+2 \vdots m \Rightarrow m^2+n^2+2 \vdots m.$

Suy ra $m^2+n^2+2 \vdots mn$ (do $(m, n)=1$).

(***Lưu ý:*** *đề bài trên Tạp chí số 464 in thiếu giả thiết* $(m, n)=1$).

Dễ thấy m, n là những số lẻ nên $m^2+n^2+2 \vdots 4$ và $(mn; 4)=1$.

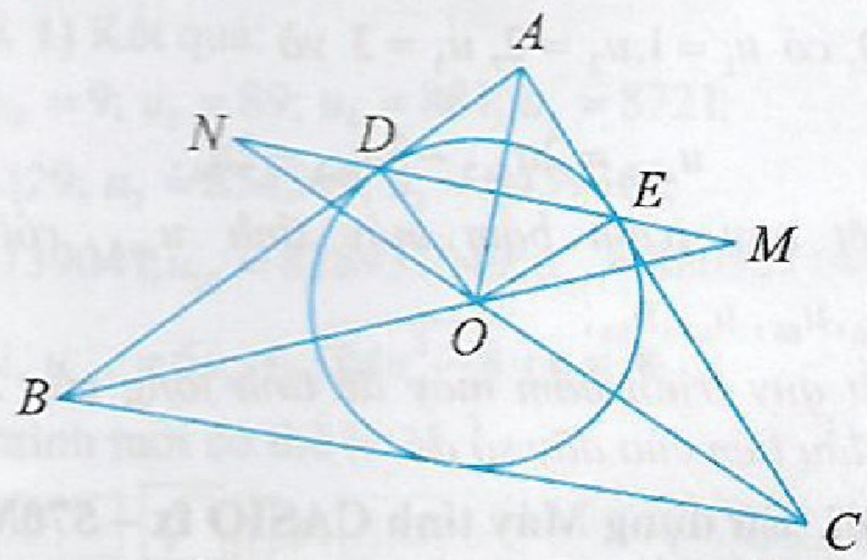
Suy ra $m^2+n^2+2 \vdots 4mn$ (đpcm).

Câu 4.

1) Ta có $1000=2^3.5^3$, do đó các ước số dương của 1000 có dạng $2^x.5^y$ với $0\le x\le 3; 0\le y\le 3$. Do đó có $4.4=16$ ước số dương của 1000.

2) Ước số dương chẵn của 1000 có dạng $2^x.5^y$ với $1\le x\le 3; 0\le y\le 3$. Do đó có $3.4=12$ ước số dương chẵn của 1000.

Câu 5.



Theo giả thiết ta có OA, OB, OC lần lượt là phân giác của các góc A, B, C của tam giác ABC và $ADOE$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{ODM}=\widehat{ODE}=\widehat{OAE}=\frac{\widehat{A}}{2};$$

$$\widehat{BDM}=\widehat{BDO}+\widehat{ODM}=90^\circ+\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{BMN}=\widehat{BMD}=180^\circ-\widehat{DBM}-\widehat{BDM}$

$$=180^\circ-\frac{\widehat{B}}{2}-90^\circ-\frac{\widehat{A}}{2}=90^\circ-\frac{\widehat{A}}{2}-\frac{\widehat{B}}{2}=\frac{\widehat{C}}{2}=\widehat{BCN}.$$

Do đó $BCMN$ là tứ giác nội tiếp.

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Giới thiệu.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2015 - 2016

(*Thời gian làm bài* 150 *phút*)

Câu 1. (1,5 *điểm*)

Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $ab = 1$, $a + b \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Câu 2. (2,5 *điểm*)

a) Giải phương trình: $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$.

b) Chứng minh rằng:

$$abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$$

chia hết cho 7 với mọi số nguyên a, b, c.

Câu 3. (2 *điểm*) Cho hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A vuông góc với BD tại F. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt đường trung trực của AC tại E. Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K. Tính tỉ số $\frac{KE}{KF}$.

Câu 4. (1 *điểm*) Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq -\frac{9}{4}.$$

Câu 5. (2 *điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC và N là điểm đối xứng của M qua O. Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D. Kẻ đường kính AE. Chứng minh rằng:

a) $BA.BC = 2BD.BE$;

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC.

Câu 6. (1 *điểm*)

Mười vận động viên tham gia cuộc thi đấu quần vợt. Cứ hai người trong họ chơi với nhau đúng một trận. Người thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, người thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận, ..., người thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu quần vợt không có trận hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

BÙI VĂN CHI

(*GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

giới thiệu.

THÔNG BÁO

Kỳ thi tìm kiếm tài năng toán học (viết tắt tiếng Anh là MYTS), năm 2016 được tổ chức nhằm khơi dậy tình yêu toán học cho học sinh. Học sinh trong lứa tuổi phù hợp (từ 10 đến 14), ở tất cả các trường trên phạm vi cả nước có thể tham gia trên cơ sở tự nguyện.

Cùng với Hội Toán học Việt Nam (VMS), Hexagon of Maths & Science là đơn vị đồng tổ chức và điều phối chương trình MYTS. MYTS được tổ chức hàng năm, với sự ủng hộ và tham gia làm đề thi của nhiều nhà toán học, giáo dục toán ở Việt Nam và thế giới.

Đồng trưởng ban: GS.TS. Nguyễn Hữu Dư, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam; TS. Vũ Thế Khôi, Viện Toán học; Phạm Văn Thuận, Hexagon of Maths & Science.

Hạn đăng ký được nới rộng sang ngày 20 tháng 3 năm 2016.

Thông tin chi tiết xem tại www.hexagon.edu.vn/myts

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ MIỀN GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ

TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ TÀI THẮNG
(GV THPT Yên Phong Số 1, Bắc Ninh)

Trong kì thi THPT Quốc gia 2015, cũng như một số đề thi đại học những năm trở lại đây, bất đẳng thức và bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bao giờ cũng là vấn đề khó khăn và hóc búa nhất. Có rất nhiều cách giải khác với các phương pháp khác nhau. Bài viết này trình bày ***Phương pháp đánh giá miền giá trị của biến số trong bài toán chứng minh bất đẳng thức.*** Phương pháp này mặc dù đơn giản nhưng lại vô cùng hiệu quả. Hy vọng nó sẽ giúp ích cho các em học sinh trong các kỳ thi sắp tới.

Ta chú ý các đánh giá sau:

- $x\in[a;b]\Rightarrow(x-a)(x-b)\le 0.$
- $x,y\in[a;b]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(x-a)(y-b)\le 0\\(x-a)(y-a)\ge 0\\(x-b)(y-b)\ge 0\end{array}\right.$.
- $x,y,z\in[a;b]$
$\Rightarrow(x-a)(y-a)(z-a)+(x-b)(y-b)(z-b)\ge 0.$
- $x\le y\le z\Rightarrow(y-x)(y-z)\le 0.$

Bài toán 1. *Cho $0\le x,y\le 1$; $x+y=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $A=x^2+y^2-xy$.*

Lời giải. Ta có $A=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$ $=(x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)$. Từ giả thiết ta có

$$(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(x+y)+1\ge x+y\Leftrightarrow x+y\le\frac{4}{3}.$$

Lại có $x+y=4xy\le(x+y)^2\Rightarrow x+y\ge 1.$

Vậy $1\le x+y\le\frac{4}{3}.$

Đặt $t=x+y\in\left[1;\frac{4}{3}\right]\Rightarrow A=f(t)=t^2-\frac{3}{4}.t$

Khảo sát hàm số $f(t)$ ta được

t	1		$\frac{4}{3}$
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{9}$

Vậy $\min A=\frac{1}{4}$ xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$; $\max A=\frac{7}{9}$ xảy ra khi $x=1;y=\frac{1}{3}$ hoặc $x=\frac{1}{3};y=1.$

Bình luận. Do vai trò của x, y là như nhau nên ta lầm tưởng về việc đẳng thức xảy ra tại $x=y$. Tuy nhiên thực tế bài toán lại không hoàn toàn như vậy.

Bài toán 2. *Cho $x,y,z\in(0;1]$; $x+y\ge z+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{xy+z^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $(x-1)(y-1)\ge 0$ $\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$. Mà $x+y\ge z+1$ nên $z\le xy$.

Ta có: $xy+z^2\le xy+(xy)^2\le 2xy\le\frac{(x+y)^2}{2}\le x+y$ (do $xy\le 1$; $x+y\le 2$)

$$\Rightarrow B=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{xy+z^2}\ge\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}.$$

Cuối cùng ta sẽ chứng minh

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$$

Đây là bất đẳng thức quen thuộc, độc giả tự chứng minh. Dấu '=' xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy $\min B=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Bài toán 3. *Cho $a,b,c\in[1;2]$, $a+b+c\le 4$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{bc+2}+\frac{b^2}{ca+2}+\frac{c^2}{ab+2}>\frac{2}{3}.$*

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases}(b-1)(c-2)\le 0\\(b-2)(c-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc+2\le 2b+c\\bc+2\le b+2c\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(bc+2)\le 3(b+c)\le 3(4-a).$$

Do đó ta có $\frac{a^2}{bc+2}\ge\frac{2}{3}.\frac{a^2}{4-a}$, đẳng thức xảy ra khi $a=2;b=c=1.$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{ca+2} \ge \frac{2}{3}.\frac{b^2}{4-b}; \frac{c^2}{ab+2} > \frac{2}{3}.\frac{c^2}{4-c}$.

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{bc+2}+\frac{b^2}{ca+2}+\frac{c^2}{ab+2} > \frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{4-a}+\frac{b^2}{4-b}+\frac{c^2}{4-c}\right) \quad (*)$$

(do dấu bằng không xảy ra).

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{4-t}, t\in[1;2]$. Dễ chứng minh hàm số đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(t)\ge f(1)=\frac{1}{3}$. Thay t lần lượt bởi a,b,c ta được điều phải chứng minh.

Bình luận. Bài này cho ta thấy rõ hơn sự lợi hại của cách giải. Tuy nhiên phải kết hợp các phép biến đổi một cách thành thục thì mới đạt được kết quả của bài toán.

Bài toán 4 (D-2014). *Cho x,y thỏa mãn $1\le x\le 2; 1\le y\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x\in[1,2] \\ y\in[1,2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)=x^2-3x+2\le 0 \\ (y-1)(y-2)=y^2-3y+2\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 3x-2 \\ y^2\le 3y-2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$P\ge \frac{x+2y}{3x+3y+3}+\frac{y+2x}{3y+3x+3}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4(x+y-1)}=Q.$$

Đặt $u=x+y$ thì $2\le u\le 4$, khi đó

$$Q=f(u)=\frac{u}{u+1}+\frac{1}{4(u-1)}.$$

Ta có: $f'(u)=\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{4(u-1)^2}=\frac{(3u-1)(u-3)}{4(u+1)^2(u-1)^2}$.

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $f(u)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $u=3$. Khi đó $P\ge Q\ge\frac{7}{8}$. Từ đó $\min P=\frac{7}{8}$ xảy ra $\Leftrightarrow (x,y)$ là bộ số (1, 2) hoặc (2,1).

Bài toán 5 (THPTQG 2015). *Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn [1,3] và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc.$$

Lời giải. Ta có:

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$$

Đặt $x=ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=12$.

Ta có: $a,b,c\in[1;3]\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$\Rightarrow abc-(ab+bc+ac)+a+b+c-1\ge 0$

$\Rightarrow abc-x+5\ge 0 \Rightarrow abc\ge x-5$.

Lại có: $(a-3)(b-3)(c-3)\le 0$

$\Rightarrow abc-3(ab+bc+ac)+9(a+b+c)-27\le 0$

$\Rightarrow abc\le 3x-27$.

Vậy: $3x-27\ge abc\ge x-5\Rightarrow 2x\ge 22\Rightarrow x\ge 11$.

Ta có: $P=\frac{x^2+72}{x}-\frac{1}{2}abc$

$$\le\frac{x^2+72}{x}-\frac{1}{2}(x-5)=\frac{x}{2}+\frac{72}{x}+\frac{5}{2}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{72}{x}+\frac{5}{2}, x\in[11;12]$.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{72}{x^2}\le 0\ \forall x\in[11;12]$ nên

$$P\le f(x)\le f(11)=\frac{11}{2}+\frac{72}{11}+\frac{5}{2}=\frac{160}{11}.$$

$P=\frac{160}{11}$ khi $a=1, b=2, c=3\Rightarrow \max P=\frac{160}{11}$.

Bình luận. Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến $a;b;c\in[1;3]$ để tìm ra miền giá trị của $x=ab+bc+ca$ và đánh giá được P thông qua biến x.

Bài toán 6 (Dự bị THPTQG 2015). *Cho các số $a,b\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b).$$

Lời giải. Do $a,b\le 1\Rightarrow(a-1)(b-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow ab\ge a+b-1\ge 0$. Khi đó

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\le(a+b)^2-2(a+b-1)$.

Mà $a^5b+ab^5=ab(a^4+b^4)\ge ab.\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$

$$\ge\frac{1}{8}ab(a+b)^4\ge\frac{1}{8}(a+b-1)(a+b)^4$$

nên $P\ge\frac{1}{8}(a+b-1)(a+b)^4$

$$+\frac{6}{(a+b)^2-2(a+b-1)}-3(a+b).$$

Đặt $t=a+b\in[1;2]$, xét hàm số

$$f(t)=\frac{1}{8}(t-1)t^4+\frac{6}{(t-1)^2+1}-3t,\ t\in[1;2] \text{ có}$$

$$f'(t)=\frac{1}{8}(5t^4-4t^3-24)-\frac{12(t-1)}{(t^2-2t+2)^2}<0,\ \forall t\in[1;2],$$

nên đây là hàm số nghịch biến .

Do đó $f(t)\ge f(2)=-1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1, đạt được khi $a=b=1$.

Bài toán 7. *Cho $x,y,z\ge -1$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$C=\frac{x^2}{x^2+y^2+4(xy+1)}+\frac{y^2-1}{z^2-4z+5}.$$

Lời giải. Do giả thiết ta có: $(x+1)(y+1)\ge 0$

$$\Rightarrow x^2+y^2+4(xy+1)\ge x^2+y^2+4(xy+1)-2(x+1)(y+1)$$

$$=x^2+y^2+2xy-2x-2y+2=(x+y-1)^2+1$$

$$=(3-z-1)^2+1=z^2-4z+5\Rightarrow C\le\frac{x^2+y^2-1}{z^2-4z+5}$$

$$=\frac{x^2+y^2+1+2x+2y+2xy-2(x+y+xy+1)}{z^2-4z+5}$$

$$=\frac{(x+y+1)^2-2(x+1)(y+1)}{z^2-4z+5}\le\frac{(4-z)^2}{z^2-4z+5}.$$

Khảo sát hàm số $f(z)=\dfrac{(4-z)^2}{z^2-4z+5}$ trên $[-1;5]$ ta được $f(z)\le f\left(\dfrac{3}{2}\right)=5$. Vậy $\max C=5$ khi $z=\dfrac{3}{2},x=-1,y=\dfrac{5}{2}$ hoặc $z=\dfrac{3}{2},x=\dfrac{5}{2},y=-1$.

Bài toán 8. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a\le 1,b\le 2,c\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$D=\frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c}+\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}.$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}$

$$=\sqrt{3(4a^2+b^2+9c^2)}\ge 2a+b+3c\ (1).$$

Mặt khác $2a+b+3c-b-c-b(a+c)$

$$=(a+c)(2-b)\ge 0\Rightarrow 2a+b+3c\ge b+c+b(a+c)\ (2).$$

Lại có $2ab+ac+bc-b-c-b(a+c)=(b+c)(a-1)\le 0$

$$\Rightarrow 2ab+ac+bc\le b+c+b(a+c)\ (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$D\le\frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)}+\frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8}+\frac{b}{b+c+b(a+c)+8}$$

$$=\frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)}+\frac{8}{b+c+b(a+c)+8}.$$

Đặt $t=b+c+b(a+c)\Rightarrow 0\le t\le 13$

$$\Rightarrow D\le f(t)=\frac{2t}{t+1}+\frac{8}{t+8},\ 0\le t\le 13.$$

$$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{8}{(t+8)^2}=\frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2}=0\Leftrightarrow t=6.$$

Bảng biến thiên

t	0		6		13
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	$\frac{16}{7}$	↘	

Từ đó suy ra $D\le f(t)\le\dfrac{16}{7}\Rightarrow \max D=\dfrac{16}{7}$ xảy ra khi $a=1,b=2,c=\dfrac{2}{3}$.

Bài toán 9. *Cho $x,y,z\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$E=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}.$$

Lời giải. Vì $x,y,z\in[1;2]$, nên ta có

$$(x-1)(y-2)(z-2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xyz+2(2x+y+z)\ge 2(y+z)x+yz+4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$ hoặc $y=2$ hoặc $z=2$. Do đó và do $x\ge 1$ nên ta có

$$E=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$\le\frac{2(xy+yz+zx)}{2x(y+z)+yz+4}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$=\frac{2x(y+z)+yz+4+yz+4}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$=1+\frac{yz+4}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$\le 1+\frac{yz+4}{2(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$\le 1+\frac{yz+4}{yz+4\sqrt{yz}+4}-\frac{2\sqrt{yz}+4}{\sqrt{yz}+1}.$$

Đặt $t=\sqrt{yz}\in[1;2]$.

Xét $f(t)=1+\frac{t^2+4}{(t+2)^2}-\frac{2t+4}{t+1}$ trên $[1;2]$.

Ta có $f'(t)=\frac{4t-8}{(t+2)^3}+\frac{2}{(t+1)^2}\ge-\frac{4}{27}+\frac{2}{9}>0$, $f(t)$ liên tục trên $[1;2]$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Suy ra $E\le f(t)\le f(2)=-\frac{7}{6}$.

Vậy $\max E=-\frac{7}{6}$ khi $x=1; y=z=2$.

Bình luận. Các bài toán **8, 9** nhìn thì rất cồng kềnh, tạo cảm giác khó và ngại. Tuy nhiên sau khi sử dụng miền giá trị của các biến ta đã đánh giá, đưa được về một biến để khảo sát và bài toán trở nên đơn giản.

Bài toán 10. *Cho $x,y,z\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $F=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.*

Lời giải. Ta có

$$F=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$ khi đó

$$\begin{cases}\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Rightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\ge 0\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le 1+\frac{x}{z}\\ \left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Rightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\ge 0\Rightarrow\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le 1+\frac{z}{x}\end{cases}$$

Khi đó $F=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$=3+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\le 5+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right).$$

Đặt $t=\frac{x}{z}\in[1;2]\Rightarrow G=5+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=5+2\left(t+\frac{1}{t}\right)$.

Ta nhận thấy

$$G-10=2\left(t+\frac{1}{t}-\frac{5}{2}\right)=\frac{(2t-1)(t-2)}{t}\le 0\Rightarrow F\le G\le 10.$$

Vậy $\max F=10$ khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 2 một số bằng 1 hoặc một số bằng 2 hai số bằng 1.

Bài toán 11. *Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn [0; 1]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$H=\frac{a^3+2}{b^2+1}+\frac{b^3+2}{c^2+1}+\frac{c^3+2}{a^2+1}.$$

Lời giải. Vì $a, b\in[0;1]$ nên ta có $\frac{a^3+2}{b^2+1}\le\frac{a^2+2}{b^2+1}$

$$=(a^2+2)\left(1-\frac{b^2}{b^2+1}\right)=(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{b^2+1}$$

$$\le(a^2+2)-(a^2+2).\frac{b^2}{2}=a^2-b^2+2-\frac{1}{2}a^2b^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a, b\in\{0, 1\}$.

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^3+2}{c^2+1}\le b^2-c^2+2-\frac{1}{2}b^2c^2;\ \frac{c^3+2}{a^2+1}\le c^2-a^2+2-\frac{1}{2}c^2a^2.$$

Suy ra $H\le 6-\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le 6$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a, b, c\in\{0, 1\}$ và $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$ hay trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0. Vậy $\max H=6$, đạt được khi trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.

Nhận xét. Mặc dù xuất phát từ giả thiết sẵn có của bài toán, và là một công đoạn nhỏ trong cả quá trình giải nhưng việc đánh giá lại có sự hiệu quả vô cùng to lớn. Thông qua các ví dụ trên ta đã thấy được các kĩ năng đánh giá biến số hết sức đa dạng và phong phú.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho $a,b\in[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{b+3}{a^3-2a^2+b+4}+\frac{a+3}{b^3-2b^2+a+4}+\frac{a+b}{25}.$$

2. Cho $a,b,c\in[0;2]$ thỏa mãn $ab+bc+ca=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{16}{c^4}+\frac{abc}{2}$.

3. Cho $a,b,c\in[0;2]$ thỏa mãn $ab+bc+ca=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+9abc$.

4. Cho các số thực $\frac{1}{2}\le a\le 1\le b\le 2\le c\le 3$ thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2+2}+\frac{5}{c^2+6}+\frac{3abc+8}{24}.$$

5. Cho $a;b\in[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{8+6(a+b)+(a+b)^2}{4+2(a+b)+ab}.$$

6. Cho $a;b;c;d\in[1;2]$. Chứng minh rằng :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\le 25.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

Câu 1

1) Bạn đọc tự giải.

2) PT hoành độ giao điểm

$$\frac{2x-1}{x-1}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-3)x+1-m=0 \quad (*)$$

($x=1$ không là nghiệm)

Đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm $A(x_1;x_1+m)$, $B(x_2;x_2+m)$ thỏa mãn ΔOAB vuông tại O khi và chỉ khi PT (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow 2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=0$, với x_1,x_2 là 2 nghiệm của PT (*). *Đáp số*. $m=-2$.

Câu 2

1) Đặt $t=\log_2 x$, BPT đã cho có dạng

$$\frac{t}{t-2}>\frac{t+1}{t+2}\Leftrightarrow\frac{3t+2}{t^2-4}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>2\\-2<t<-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x>2\\-2<\log_2 x<-\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\\frac{1}{4}<x<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\end{array}\right..$$

2) Hàm số $y=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4-x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right..$$

Đáp số. $\min y=\sqrt{6}$, $\max y=2\sqrt{3}$.

Câu 3

1) Từ $(1-2i)(z-1)=(2+3i)z$, suy ra $z=\frac{9+7i}{26}$.

Ta có: $z.\bar{z}=|z|^2=\left(\frac{9}{26}\right)^2+\left(\frac{7}{26}\right)^2=\frac{5}{26}$.

2) Gọi A là biến cố: "*Ba cuốn lấy được đều là sách bài tập*". Các kết quả đồng khả năng là:

$$C_{10}^1.C_{12}^1.C_{10}^1=1200.$$

Các kết quả thuận lợi là: $C_5^1.C_6^1.C_5^1=150$.

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\frac{150}{1200}=\frac{1}{8}$.

Câu 4. Ta có

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}\,d(\cos x)=2.$$

Câu 5

PT mặt phẳng (Q) vuông góc với Δ có dạng

$$(Q): x+y+z+d=0.$$

Gọi $H=\Delta\cap(Q)\Rightarrow H\left(-\frac{d}{3};-\frac{d}{3};-\frac{d}{3}\right)$.

Gọi $M=Oy\cap(Q)\Rightarrow M(0;-d;0)$. Khoảng cách từ $M(0;-d;0)$ đến mp(P) là $\frac{|2d-3|}{3}$.

Theo giả thiết $d(M,(P))=MH$

$\Leftrightarrow\frac{|2d-3|}{3}=\sqrt{\frac{6d^2}{9}}\Leftrightarrow d=\frac{-6-3\sqrt{6}}{2}$ hoặc $d=\frac{-6+3\sqrt{6}}{2}$. Vậy $M\left(0;\frac{6+3\sqrt{6}}{2};0\right)$ hoặc $M\left(0;\frac{6-3\sqrt{6}}{2};0\right)$.

Câu 6

Vì $A'ABC$ là tứ diện đều, nên nếu gọi H là tâm tam giác đều ABC thì $A'H\perp(ABC)$.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}A'H$, với

$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$,

suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $V_{A'B'BC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Từ $CC' // \text{mp}(A'AB)$, suy ra $d(AB, CC') =$

$= d(C,(A'AB)) = d(A',(ABC)) = A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7

Gốc tọa độ O nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$ và I là trung điểm OB suy ra $B(2;4)$. Đặt $A(x;y)$, ta có:

$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Leftrightarrow OB^2 = OA^2 + (2OA)^2$

$\Leftrightarrow OB^2 = 5.OA^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. Giải hệ PT

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\frac{-6}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases}.$$

Suy ra $A(2;0) \Rightarrow C(0;4)$

hoặc $A\left(-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Câu 8

ĐK: $x > 0,\ y > 0$.

Ta có $4\sqrt{1+x} - xy\sqrt{4+y^2} = 0$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x} = xy\sqrt{4+y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x}\sqrt{4+4x} = y\sqrt{4+y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{4+\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2} = y\sqrt{4+y^2}$

$\Leftrightarrow t\sqrt{4+t^2} = y\sqrt{4+y^2}\ \left(y>0, t=\frac{2}{\sqrt{x}}>0\right)$

$\Leftrightarrow (t^2-y^2)(t^2+y^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = y^2 \Leftrightarrow y = t \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y\sqrt{x} = 2.$

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ y\sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}.$$

Câu 9. Hệ ĐK

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=8 \\ xy+yz+zx=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x(y+z)+yz=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=-x \\ yz=x^2-4 \end{cases} \quad (*).$$

Áp dụng BĐT $(y+z)^2 \ge 4yz$, từ (*) suy ra

$x^2 \ge 4(x^2-4) \Leftrightarrow x^2 \le \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Ta có

$x^3+y^3+z^3 = x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)$

$= x^3+(-x)^3-3(x^2-4)(-x) = 3x^3-12x$ và

$x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$= 64-2\left[x^2(y^2+z^2)+y^2z^2\right]$

$= 64-2\left[x^2(8-x^2)+(x^2-4)^2\right] = 32.$

Suy ra $P = \frac{3x^3-12x}{32}$, $x \in \left[-\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$.

Xét hàm số $y = \frac{3x^3-12x}{32}, x \in \left[-\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$ có

$y' = \frac{9x^2-12}{32} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \in \left[-\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta thấy

$y\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}; y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}; y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6};$

$y\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \min P = -\frac{\sqrt{3}}{6}; \max P = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

NGUYỄN VĂN SÁNG

(GV Bộ môn Toán Đại học Cần Thơ)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 7

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

Câu 1 (1 *điểm*). Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x^4 - 2x^2 - 1.$$

Câu 2 (1 *điểm*). Tìm m để hàm số

$$y = x^3 + (4m+2)x^2 + (m^2+8)x + 2$$

đạt cực đại tại $x = -3$.

Câu 3 (1 *điểm*).

a) Tìm số phức z biết z có phần thực và phần ảo đối nhau, z có mođun bằng mođun của

$$w = (1+2i)(1-i).$$

b) Giải phương trình: $3^{x^2}.4^x = 1$.

Câu 4 (1 *điểm*).

a) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính

$$A = 2\sin 3x.\cos x - \sin 4x.$$

b) Cho đa giác (H) có 8 cạnh, gọi S là tập các đoạn thẳng nối hai đỉnh bất kì của đa giác (H). Từ S chọn 2 đoạn thẳng bất kì, tính xác suất để trong hai đoạn thẳng được chọn có ít nhất một đoạn thẳng là cạnh của đa giác (H).

Câu 5 (1 *điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Câu 6 (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;-1;-2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng qua M và vuông góc với d. Tìm tọa độ điểm A thuộc d sao cho $OA = \sqrt{11}$.

Câu 7 (1 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC và ΔSAB là các tam giác đều, hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trung điểm của $AB, SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, gọi M là trung điểm của SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa AM với SB.

Câu 8 (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC cân tại A, H là trung điểm của BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, $M\left(\frac{3}{4};\frac{11}{4}\right)$ là trung điểm của HD, phương trình đường thẳng BD: $x + y - 4 = 0$; phương trình đường thẳng AB: $3x + y - 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 9 (1 *điểm*). Giải phương trình:

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)\left(x-2+5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3}-1\right).$$

Câu 10 (1 *điểm*). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+\sqrt{bc}+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+\sqrt{ca}+a} + \frac{1}{27\sqrt{abc}}.$$

ĐẬU XUÂN NAM

(*GV THPT Trần Phú, Tân Biên, Tây Ninh*)

NGÀY TOÁN TUỔI THƠ

Sáng ngày 19.1.2016 tại Trường Tiểu học Đoàn Thị Điểm, Hà Nội, tạp chí Toán Tuổi thơ đã tổ chức Ngày Toán Tuổi thơ. Đến dự có GS. TS. *Vũ Văn Hùng*, Tổng Giám đốc, Tổng biên tập NXBGD Việt Nam; Bà *Đỗ Thị Phương*, Phó Giám đốc NXBGD tại Hà Nội; Ông *Phạm Quỳnh*, Phó Giám đốc Công ty CP sách Giáo dục tại thành phố Hà Nội; TS. *Đinh Văn Vang*, Tổng biên tập tạp chí Văn học và Tuổi trẻ; Đại diện Phòng Giáo dục Tiểu học và Phòng Giáo dục Trung học của Sở Giáo dục và Đào tạo các tỉnh phía Bắc; NGƯT. *Nguyễn Thị Hiền*, Hiệu trưởng trường Tiểu học Đoàn Thị Điểm Hà Nội; Ông *Hoàng Mạnh Ánh*, Phó Tổng Giám đốc Công ty CP Văn phòng phẩm Hồng Hà; Bà *Đinh Hương Ly*, Đại diện Trung tâm phát triển tư duy và kĩ năng IEG; Ông *Bùi Minh Mẫn*, Giám đốc Công ty CP dịch vụ Giáo dục Việt Nam; Ông *Phạm Thọ Hoàn*, đại diện website: Olm.vn; TS. *Chu Cẩm Thơ*, Giám đốc Trung tâm Toán POmath; các thầy cô giáo nguyên là lãnh đạo Tạp chí; các Ủy viên Hội đồng biên tập Tạp chí Toán Tuổi thơ; các câu lạc bộ Toán Tuổi thơ đến từ: **Nam Định, Thái Bình, Sơn La, Hưng Yên, Quảng Ninh, Vĩnh Phúc, Hà Nội** và các em học sinh khối lớp 5 Trường tiểu học Đoàn Thị Điểm Hà Nội. Các nhà tài trợ: NXBGD Việt Nam; Công ty CP Văn phòng phẩm Hồng Hà; Trường tiểu học Đoàn Thị Điểm Hà Nội; website: Hocmai.vn; website: Olm.vn; Trung tâm phát triển tư duy và kĩ năng IEG.

Trong lễ kỉ niệm 15 năm Toán Tuổi thơ, ThS. *Vũ Kim Thủy*, Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ đã có bài báo cáo về 15 năm hoạt động của Toán Tuổi thơ. Tạp trí Toán tuổi thơ cũng đã trao thưởng bốn cuộc thi trên tạp chí là: Cuộc thi ra đề kiểm tra, đề thi toán; cuộc thi đặc biệt nhân 15 năm Toán Tuổi thơ; cuộc thi tìm hiểu Cộng đồng ASEAN, cuộc thi vui chào hè 2015. Trong ngày Toán Tuổi thơ cũng đã **tổ chức thi đấu câu lạc bộ Toán Tuổi thơ liên tỉnh** cho 9 câu lạc bộ. Ngày hội Toán Tuổi thơ đã diễn ra trong không khí vui tươi và phấn khởi.

TH&TT

ĐỊNH LÍ SIN DẠNG ĐẠI SỐ

Bạn *Phạm Nam Khánh*, 10T, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam có gửi tới Tòa soạn Tạp chí TH&TT bức thư sau.

Kính gửi các thầy cô trong Ban biên tập Tạp chí TH&TT, năm nay em học lớp 10, bước đầu làm quen với khái niệm độ dài đại số và khái niệm góc định hướng, sau những bỡ ngỡ ban đầu, em cũng hiểu ra rằng khái niệm độ dài đại số và khái niệm góc định hướng là những công cụ quan trọng giúp ta đại số hoá hình học về phương diện độ dài đoạn thẳng và số đo góc. Tuy nhiên sử dụng thành thạo khái niệm độ dài đại số và khái niệm góc định hướng lại là vấn đề không đơn giản. Có rất nhiều bài toán em biết chắc chắn rằng để giải chúng cần phải sử dụng khái niệm độ dài đại số và khái niệm góc định hướng nhưng em vẫn không giải được. Kính mong các thầy cô trong Ban biên tập giúp em giải một bài toán như vậy.

✪**Bài toán.** *Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM và BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là giao điểm của BC, CA, AB với AA_2, BB_2, CC_2. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.*

Nhận thấy đề nghị của bạn *Phạm Nam Khánh* cũng là đề nghị của rất nhiều bạn khác, Tòa soạn Tạp chí TH&TT giới thiệu với các bạn lời giải bài toán trên của TS *Nguyễn Minh Hà*.

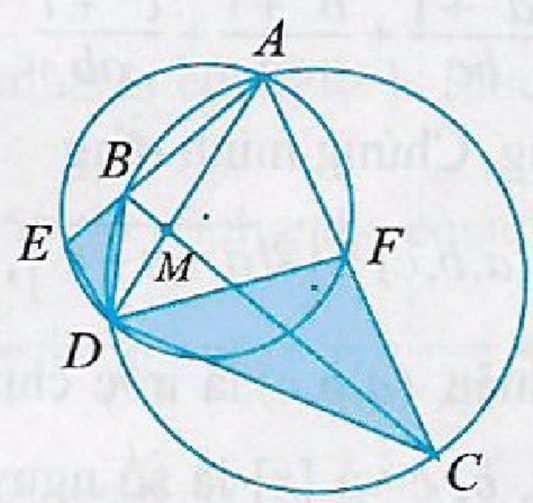
Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác *ABC*, $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ theo thứ tự là vectơ định hướng của các đường thẳng *BC*, *CA*, *AB*. Khi đó $\dfrac{\sin(\vec{\beta},\vec{\gamma})}{\overline{BC}}=\dfrac{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}{\overline{CA}}=\dfrac{\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\overline{AB}}$.

Bổ đề 1 được gọi là định lí sin dạng đại số, có thể tìm thấy phép chứng minh nó trong cuốn sách **Hình học phẳng định hướng**, tr 137, 138.

Bổ đề 2. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *E*, *F* theo thứ tự thuộc các đường thẳng *AB*, *AC* (khác *A*, *B*, *C*). *D* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABC*, *AEF*. Khi đó $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{AB}.\overline{EB}}{\overline{AC}.\overline{FC}}$.

Chứng minh (h.1).



Hình 1

Định hướng các đường thẳng *BC*, *CA*, *AB*, *DM*, *DB*, *DC*, *DE*, *DF* bởi các vectơ $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{m},\vec{b},\vec{c},\vec{e},\vec{f}$.

Dễ thấy

$(BE,BD)\equiv(BA,BD)\equiv(CA,CD)\equiv(CF,CD)(\bmod\pi)$;

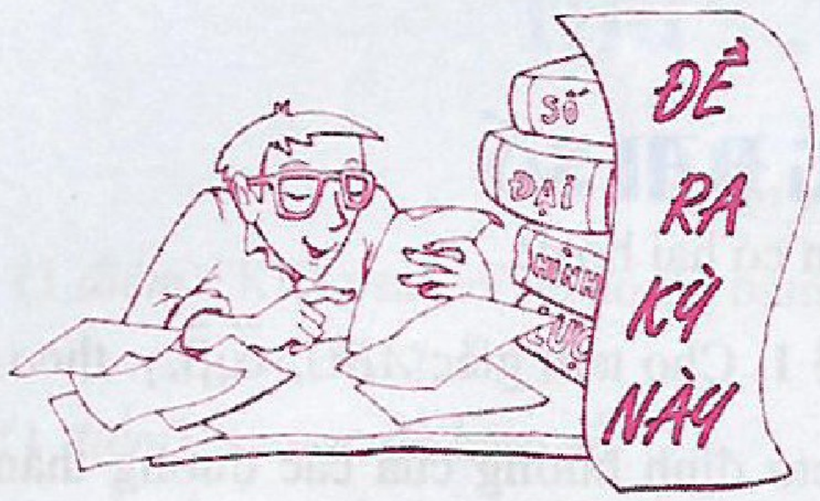
$(EB,ED)\equiv(EA,ED)\equiv(FA,FD)\equiv(FC,FD)(\bmod\pi)$.

Do đó các tam giác *DBE*, *DCE* đồng dạng cùng hướng. Vậy không mất tính tổng quát giả sử

$(\vec{\gamma},\vec{b})\equiv(\vec{\beta},\vec{c})(\bmod 2\pi)$; $(\vec{\gamma},\vec{e})\equiv(\vec{\beta},\vec{f})(\bmod 2\pi)$;

$(\vec{b},\vec{e})\equiv(\vec{c},\vec{f})(\bmod 2\pi)$.

(*Xem tiếp trang 27*)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/465 (lớp 6). Đặt

$$S = 1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + ... + 2016.2^{2015}$$

và quy ước $2^0 = 1$. Hãy so sánh S với số 2015.2^{2016}.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T2/465 (lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$; trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = AD$. Tia DC cắt BE tại F. Tính số đo góc CFB.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN *(Hải Phòng)*

Bài T3/465. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{a^2+1}{bc} + \frac{b^2+1}{ca} + \frac{c^2+1}{ab}$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(a,b,c) \le \left[\sqrt[3]{a+b+c}\right],$$

trong đó kí hiệu (a,b,c) là ước chung lớn nhất của các số a, b, c và $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/465. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có $BC = 2 + 2\sqrt{3}$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1. Tính số đo các góc B và C.

VŨ HỮU BÌNH *(Hà Nội)*

Bài T5/465. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD - ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/465. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x = y + \sqrt{z^2+1} \\ e^y = z + \sqrt{x^2+1} \\ e^z = x + \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

Bài T7/465. Số nào lớn hơn:

$$\sin(\cos x) \text{ hay } \cos(\sin x)?$$

HOÀNG CHI *(Hà Nội)*

Bài T8/465. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \le \frac{2}{3}\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right).$$

LÊ VĂN CHÁNH

(GV Khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/465. Tìm giá trị dương lớn nhất của số thực T sao cho với mọi a, b, c dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$ thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a+b}{b(a+1)} + \frac{b+c}{c(b+1)} + \frac{c+a}{a(c+1)} \ge T.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/465. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho x^2 chia hết cho $2xy^2 - y^3 + 1$.

PHẠM THANH HÙNG

(Lớp Cao học Toán giải tích K19, ĐH Cần Thơ)

Bài T11/465. Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) = x^{2016} f\left(\frac{1}{x^{2015}}\right) + y^{2016} f\left(\frac{1}{y^{2015}}\right)$$

với mọi x, y dương.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/465. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} < 90^0$, đường cao CD. Gọi E là trung điểm

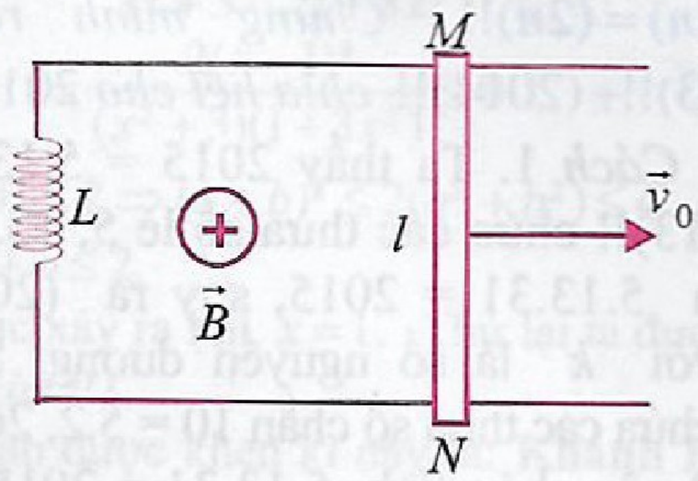
của BD, M là trung điểm của CE, phân giác của góc $\widehat{BDC}$ cắt CE tại P. Đường tròn tâm C bán kính CD cắt AC tại Q. Gọi $K = PQ \cap AM$. Chứng minh rằng tam giác CKD vuông.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(*GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam*)

Bài L1/465. Một bình hình trụ cách nhiệt, kín hai đầu, đặt thẳng đứng, được ngăn làm hai phần bởi một pittông mỏng, nặng dẫn nhiệt lý tưởng. Ban đầu hai phần có thể tích bằng nhau, chứa cùng một lượng khí lý tưởng đơn nguyên tử ở áp suất p, nhiệt độ T. Buông pittông, nó dịch chuyển xuống dưới một khoảng nào đó và dừng lại ở vị trí cân bằng khi mà hiệu áp suất của khí ở trên và ở dưới bằng Δp. Tính độ biến thiên nhiệt độ của khí khi đó. Nhiệt dung của pittông và của thành bình không đáng kể.

VŨ THANH KHIẾT (*Hà Nội*)

Bài L2/465. Cho hệ thống như hình dưới. Thanh dẫn $MN = l$ nằm ngang, có khối lượng m và có thể trượt không ma sát dọc theo hai thanh ray song song. Đầu dưới của hai ray nối với một cuộn dây có độ tự cảm L. Bỏ qua điện trở của mạch. Hệ thống được đặt trong một từ trường đều có vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ thẳng đứng hướng xuống, ở thời điểm ban đầu thanh MN có vận tốc $\vec{v}_0$ như hình vẽ. Viết phương trình chuyển động của thanh MN.



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/465 (For 6th grade). Let

$$S = 1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \ldots + 2016.2^{2015}$$

where $2^0 = 1$. Compare S and 2015.2^{2016}.

Problem T2/465 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A and $AB < AC$. On the opposite ray of the ray AB choose D so that $BD = AC$ and on the opposite ray of the ray CA choose E so that $CE = AD$. The ray DC intersects BE at F. Find the angle $\widehat{CFB}$.

Problem T3/465. Let a, b, and c be positive integers such that $\frac{a^2+1}{bc} + \frac{b^2+1}{ca} + \frac{c^2+1}{ab}$ is also a positive integer. Prove that

$$(a,b,c) \le \left[\sqrt[3]{a+b+c}\right],$$

where (a,b,c) is the greatest common divisor of a, b, and c and $[x]$ is the integral part of x.

Problem T4/465. Given a right triangle ABC with the right angle A, $AB < AC$, $BC = 2 + 2\sqrt{3}$, and the inradius is equal to 1. Find the angles B and C.

Problem T5/465. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/465. Solve the system of equations

$$\begin{cases} e^x = y + \sqrt{z^2+1} \\ e^y = z + \sqrt{x^2+1} \\ e^z = x + \sqrt{y^2+1} \end{cases}.$$

Problem T7/465. Which number is bigger

$$\sin(\cos x) \text{ or } \cos(\sin x)?$$

Problem T8/465. Let A, B, and C be the angles of a triangle. Prove that

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \le \frac{2}{3}\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right).$$

(*Xem tiếp trang 27*)

Bài T1/461. *Ký hiệu* $1.3.5...(2n-1)=(2n-1)!!$, $2.4.6...(2n)=(2n)!!$. *Chứng minh rằng số* $A=(2013)!!+(2014)!!$ *chia hết cho* 2015.

Lời giải. *Cách* 1. Ta thấy 2015 = 5.13.31. Số hạng (2013)!! chứa các thừa số lẻ 5, 13, 31 nên chứa tích 5.13.31 = 2015, suy ra (2013)!! = $2015k$ với k là số nguyên dương. Số hạng (2014)!! chứa các thừa số chẵn 10 = 5.2, 26 = 13.2, 62 = 31.2 nên chứa tích 5.13.31 = 2015, suy ra (2014)!! = $2015h$ với h là số nguyên dương. Từ đó A = (2013)!! + (2014)!! = $2015(k+h)$ chia hết cho 2015.

Cách 2. Ta biến đổi (2014)!! = 2.4…2012.2014 = (2015 – 2013)(2015 – 2011) …(2015 – 3) (2015 – 1) = $2015k$ – 1.3….2011.2013 = $2015k$ – (2013)!! với k là số nguyên dương, suy ra A = (2013)!! + (2014)!! = $2015k$ chia hết cho 2015. ❐

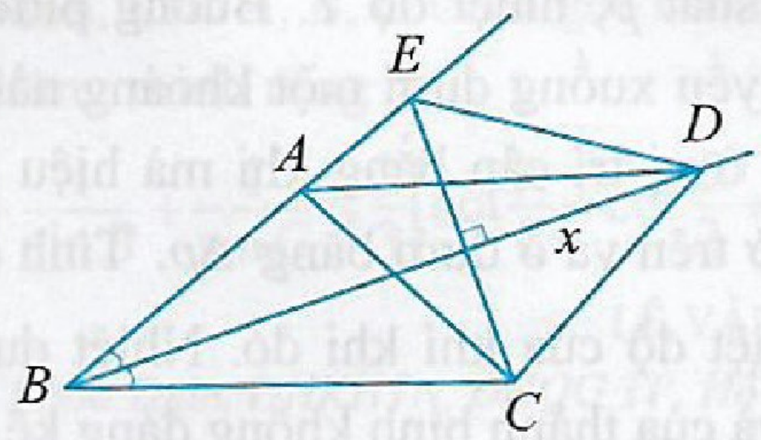
➢***Nhận xét.*** 1) Xét bài toán tổng quát: *Chứng minh rằng số* $A=(2n-1)!!+(2n)!!$ *chia hết cho* $2n+1$. Trong trường hợp số chia là hợp số thì sử dụng *cách* 1, còn khi số chia là số nguyên tố thì sử dụng *cách* 2 (của tác giả *Đoàn Cát Nhơn*).

2) Rất nhiều bạn đã giải đúng bài này. Xin nêu tên một số bạn trình bày chính xác, rõ ràng, gọn: **Phú Thọ**: *Cao Thúy Quỳnh, Nguyễn Minh Thùy, Nguyễn Công Hùng, Nguyễn Công Hải, Nguyễn Ngọc Lan, Kiều Mạnh Tiến, Trần Anh Tú*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An**: *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 6I, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh, *Nguyễn Đình Thành, Lê Văn Quang Trung, Trần Đức An*, 6B, *Thái Thị Hoài Thương*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Trần Hà Nhi, Lê Văn Việt Hoàng, Nguyễn Thị Việt Trà, Hà Trung Chiến, Nguyễn Thị Ngọc Trâm, Đậu Khánh Linh, Trần Đức Tùng, Phạm Thị Khánh Huyền, Nguyễn Hưng Phát, Nguyễn Hữu Đức, Nguyễn Tiến Đức, Lê Nguyễn Gia Huy, Cao Thị Khánh Linh*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Thiều Thị Hạnh Nguyên*, 6B, *Nguyễn Thị Thúy Ngân*, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi**: *Cao Thị Ngọc Trâm, Phạm Thị Thu Nhung*, 6A, *Phan Ngọc Tuyết Sương, Trần Thị Thảo Vân*, 6C, *Nguyễn Thị Yến Nhi, Trần Thị Thanh Huyền*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh**: *Ngô Võ Hoàng Việt*, 6A3, Trung học Thực hành Sài Gòn, Q.5; **Cần Thơ**: *Trần Danh Nhân*, 6A5, THCS Đoàn Thị Điểm.

VIỆT HẢI

Bài T2/461. *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A}=3\widehat{B}$. *Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho* $\widehat{BCy}=132^\circ$. *Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB.*

Lời giải



Từ giả thiết ΔABC cân tại A và $\widehat{A}=3\widehat{B}$ suy ra $\widehat{B}=\widehat{C}=36^\circ$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE=BC$ (E nằm ngoài đoạn AB), khi đó Bx là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ đồng thời là trung trực của đoạn EC. Tam giác EBC cân tại B có

$$\widehat{BEC}=\widehat{BCE}=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ,$$

$\widehat{EAC}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=72^\circ \Rightarrow \Delta ACE$ cân tại C nên $CA=CE$ (1). Ta lại có ΔDEC cân tại D, và $\widehat{ECD}=132^\circ-72^\circ=60^\circ$ nên ΔDEC là tam giác đều (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔCAD cân tại C, có $\widehat{ACD}=132^\circ-36^\circ=96^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADC}=\dfrac{180^\circ-96^\circ}{2}=42^\circ$. Trong ΔBCD có

$\widehat{BDC}=180^\circ-132^\circ-18^\circ=30^\circ$, suy ra

$\widehat{ADB}=\widehat{ADC}-\widehat{BDC}=42^\circ-30^\circ=12^\circ$.

Vậy $\widehat{ADB}=12^\circ$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán tương đối quen thuộc và có nhiều cách giải. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, vẽ hình chính xác:

Hà Nội: *Nguyễn Hà Khánh Nam*, 7A2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Vĩnh Phúc:** Lê *Hồng Nhung*, 7A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** *Trần Cao Kỳ Duyên*, 7A1, *Phạm Thùy Linh*,

Triệu Hồng Ngọc, Trần Hải Nam, Lê Thị Phương Lan, Nguyễn Kim Khải, Nguyễn Chí Công, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** *Bùi Thị Minh Thư, Phạm Yến Nhi, Phạm Thị Thu Hoài, Phạm Hiếu Ngân, Thái Thị Thu Sang, Nguyễn Hải Ly*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng; *Nguyễn Hoàng Kim Ánh, Nguyễn Thị Kỳ Duyên*, 7A, THCS Hành Trung, *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, *Nghĩa Hành*; *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THCS Sông Vệ; *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/461. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}=\frac{2}{x+1}.$$

Lời giải. ĐK: $x \neq -1$. PT tương đương với:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}=2.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{x^2+3}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2+3}\right),$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\leq\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}.\frac{x^2+1}{x^2+3}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{3}{2}\right)\quad(1);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}.\frac{x^2+1}{1+3x^2}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{1+3x^2}\right),$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\leq\frac{|x|}{\sqrt{1+3x^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2x^2}{1+3x^2}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{1+3x^2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{3}{2}\right)\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}+3\right)=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$, thỏa mãn ĐK.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Bạn *Đỗ Hoài Phương*, THPT Quốc Oai, **Hà Nội** đã phát hiện ra "bài toán có ý tưởng giống bài T3/449".

2) Sau đây là một lời giải khác, ngắn gọn của bạn *Nguyễn Đình Tuấn*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

Dễ nhận thấy, để PT có nghiệm thì $x+1>0$.

PT tương đương với $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}=2.$

Đặt $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}=a>0;\ \frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}=b>0$ ta có:

$$a^2+b^2-2=\frac{(x+1)^2}{x^2+3}+\frac{(x+1)^2}{1+3x^2}-2=...$$

$$=\frac{-2(x-1)^4}{(x^2+3)(1+3x^2)}\leq 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\leq 2\Rightarrow(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)\leq 4$$

$$\Rightarrow 0<a+b\leq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Thử lại ta được $x=1$ là nghiệm của PT.

3) Các bạn được khen kì này là: **Khánh Hòa:** *Trần Minh Quân*, 9/6, THCS Chu Văn An, Ninh Đa, Ninh Hòa; **Bình Thuận:** *Nguyễn Quốc Phú*, 9G, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **TP. Hải Phòng:** *Phùng Quang Minh*, 9A1, THCS Hồng Bàng, Hồng Bàng; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành, *Võ Thị Hồng Kiều*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Thọ:** *Lê Nguyễn Quỳnh Trang*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, *Đào Tuấn Minh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Linh Đan*, 7D, *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, *Đinh Viết Tỵ*, 9D, *Nguyễn Cảnh Giang*, 9B, *Hoàng Trần Đức, Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, Tăng Văn Minh Hùng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Thị Diễm Quỳnh*, 9G, *Dương Văn Minh*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/461. *Cho tam giác đều ABC và O là một điểm nằm trong tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AO, BO, CO với ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng*

a) $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}+\frac{1}{OP}\right)$;

b) $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\leq\frac{2}{3}\left(\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}\right)$.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Đặt $S_{ABC}=S$, $S_{OBC}=x$, $S_{OCA}=y$, $S_{OAB}=z$. Không giảm tính tổng quát giả sử $OA\geq OB\geq OC$ (1)

Từ $OA \geq OB$ suy ra hoặc O thuộc trung trực của AB hoặc O và B nằm cùng phía so với trung trực của AB, do đó $\widehat{OCA} \geq \widehat{OCB}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, ta có

$OH = OC \sin\widehat{OCB} \leq OC \sin\widehat{OCA} = OK$.

Suy ra $x \leq y$. Tương tự, ta có $x \leq y \leq z$ (2)

Mặt khác, từ $OA \geq OB \Rightarrow \widehat{OBA} \geq \widehat{OAB}$ (3)

$\Rightarrow \widehat{OBM} \leq \widehat{OAN}$, suy ra B nằm ngoài (hoặc trên) đường tròn (AMN), và A nằm trong (hoặc trên) đường tròn (BMN), do đó $\widehat{OBA} \leq \widehat{OMN}$ và $\widehat{OAB} \geq \widehat{ONM}$. Kết hợp với (3) suy ra $\widehat{OMN} \geq \widehat{ONM} \Rightarrow OM \leq ON$.

Tương tự, ta có $OM \leq ON \leq OP$ (4)

a) Ta có kết quả quen thuộc

$$\frac{OM}{AM} = \frac{x}{S}, \frac{ON}{AM} = \frac{y}{S}, \frac{OP}{AM} = \frac{z}{S},$$

suy ra $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{S}\left(\frac{x}{OM} + \frac{y}{ON} + \frac{z}{OP}\right)$.

Từ (2), (4), áp dụng BĐT Chebyshev, ta có

$$\frac{x}{OM} + \frac{y}{ON} + \frac{z}{OP} \leq \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} + \frac{1}{OP}\right).$$

Suy ra

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} + \frac{1}{OP}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là tâm ΔABC.

b) Ta có kết quả quen thuộc

$$\frac{OA}{AM} = \frac{y+z}{S}, \frac{OB}{BM} = \frac{z+x}{S}, \frac{OC}{CM} = \frac{x+y}{S}.$$

Suy ra $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{S}\left(\frac{y+z}{OA} + \frac{z+x}{OB} + \frac{x+y}{OC}\right)$.

Từ (1), (2), áp dụng BĐT Chebyshev ta có

$$\frac{y+z}{OA} + \frac{z+x}{OB} + \frac{x+y}{OC} \leq \frac{2}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}\right).$$

Vậy $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là tâm ΔABC. ❐

➢***Nhận xét.*** Không có bạn nào cho lời giải đúng bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/461. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt[3]{9(x\sqrt{x} + y^3 + z^3)} = x + y + z & (1) \\ x^2 + \sqrt{y} = 2z & (2) \\ \sqrt{y} + z^2 = \sqrt{1-x} + 2 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức: Với a, b, c là các số không âm luôn có $(a+b+c)^3 \leq 9(a^3+b^3+c^3)$ (*), đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Thật vậy, ta có

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Mà $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$

$\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3} = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

(BĐT Cauchy)

nên $(a+b+c)^3 \leq a^3+b^3+c^3+(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$.

Lại có $4(a^3+b^3)-(a+b)^3 = 3[a^3+b^3-ab(a+b)]$ $=3(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, suy ra $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$; tương tự $4(b^3+c^3) \geq (b+c)^3$; $4(c^3+a^3) \geq (c+a)^3$.

Do đó $(a+b+c)^3 \leq 9(a^3+b^3+c^3)$. Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b = b+c = c+a \\ a-b = b-c = c-a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Trở về bài T5/461. ĐKXĐ: $0 \leq x \leq 1; y \geq 0$.

Từ PT (2) suy ra $z \geq 0$. Do $0 \leq x \leq 1$ nên $\sqrt{x} \leq x \Leftrightarrow x\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^3 \geq x^3$. Áp dụng BĐT (*) cho ba số không âm x, y, z ta có

$9(x\sqrt{x}+y^3+z^3) \geq 9(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)^3$,

suy ra $\sqrt[3]{9(x\sqrt{x}+y^3+z^3)} \geq x+y+z$.

Do đó, từ PT(1) suy ra đẳng thức xảy ra nên

$$\begin{cases} x = y = z \\ \sqrt{x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 0 \\ x = y = z = 1 \end{array}\right.$$

Với $x = y = z = 0$ không nghiệm đúng PT (3) nên loại. Với $x = y = z = 1$ nghiệm đúng cả PT (2) và (3). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 1; 1)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia đều vận dụng bất đẳng thức (*) để giải, tuy nhiên một số bạn đã không chứng minh BĐT (*) là chưa đạt yêu cầu. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn văn Hiếu*, 9A4, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Trần Quốc Lập, Trần Thị Thu Huyền, Nguyễn Thảo Chi*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Trần Thị Diễm Quỳnh*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Văn Mạnh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Trần Quốc Phương*, 8A, THCS Thị Trấn huyện Thường Xuân.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/461. *Giải phương trình*:

$$(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{720}{(x+4)(x+5)(x+6)}.$$

Lời giải. ĐK: $x \notin \{-6,-5,-4\}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$0=((x+1)(x+6)).((x+2)(x+5)).((x+3)(x+4))-720$$
$$=(x^2+7x+6).(x^2+7x+10).(x^2+7x+12)-720$$
$$=y.(y+4).(y+6)-720 \quad (y=x^2+7x+6)$$
$$=y^3+10y^2+24y-720$$
$$=(y^3-6y^2)+(16y^2-96y)+(120y-720)$$
$$=(y-6)(y^2+16y+120)$$
$$=x(x+7)((y+8)^2+56) \Leftrightarrow x \in \{-7,0\}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-7$; $x=0$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán đơn giản. Các bạn lớp 7. lớp 8 sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, *Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Trúc Quỳnh*, 8A2, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Nguyễn Văn Cường*, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Linh Đan, Lê Đình Thành, Nguyễn Sỹ Trọng*, 7D; *Hoàng Sĩ Đạt, Nguyễn Thị Mỹ Hoa, Trần Văn Nhâm, Nguyễn Đăng Quang, Lê Đức Toàn*, 8A1, THCS Nghi Hương, Thị xã Cửa Lò; **Phú Yên:** *Đàm Ngọc Hiếu*, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Thị trấn Hòa Vinh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

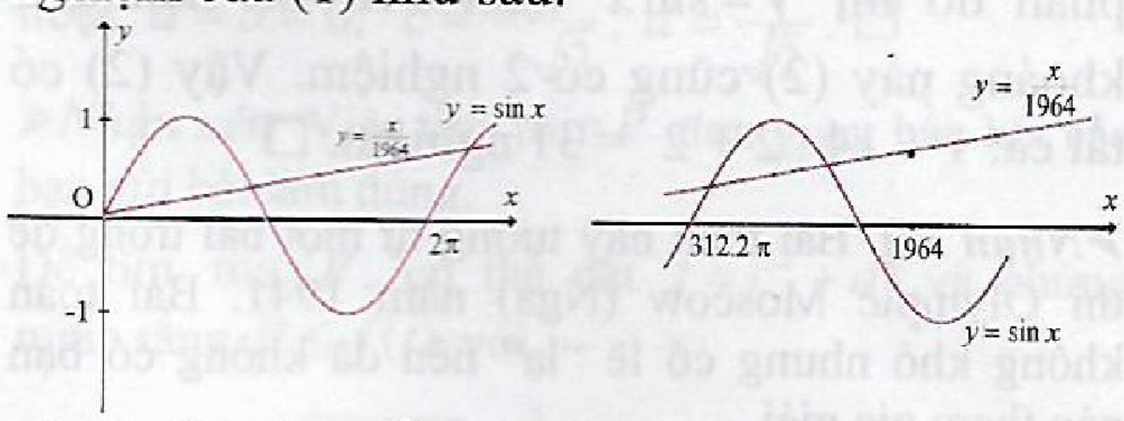
Bài T7/461. *Xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:*

a) $\sin x = \dfrac{x}{1964}$ (1);

b) $\sin x = \log_{100} x$ (2).

Lời giải. a) Nhận xét: $x=0$ là nghiệm của (1). Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của (1) $\Rightarrow$ số nghiệm âm của (1) bằng số các nghiệm dương (nếu có) $\Rightarrow$ ta chỉ cần tìm số các nghiệm dương. Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=\sin x$ và đường thẳng $y=\dfrac{x}{1964}$. Ta có: $x=1964.\sin x \le 1964$ $\Rightarrow$ nghiệm lớn nhất của (1) không vượt quá 1964.

Ta chia trục Ox, từ 0 đến 1964 thành các khoảng bằng nhau, độ dài mỗi khoảng là 2π (trừ khoảng cuối có độ dài ngắn hơn). Ta được 312 khoảng, mỗi khoảng độ dài 2π, và khoảng cuối có độ dài $1964-312.2\pi>3,64>\pi$. Dựa vào tính chất đồ thị hàm $y=\dfrac{x}{1964}$ và $y=\sin x$ trên khoảng (0; 1964) ta xác định được số nghiệm của (1) như sau:

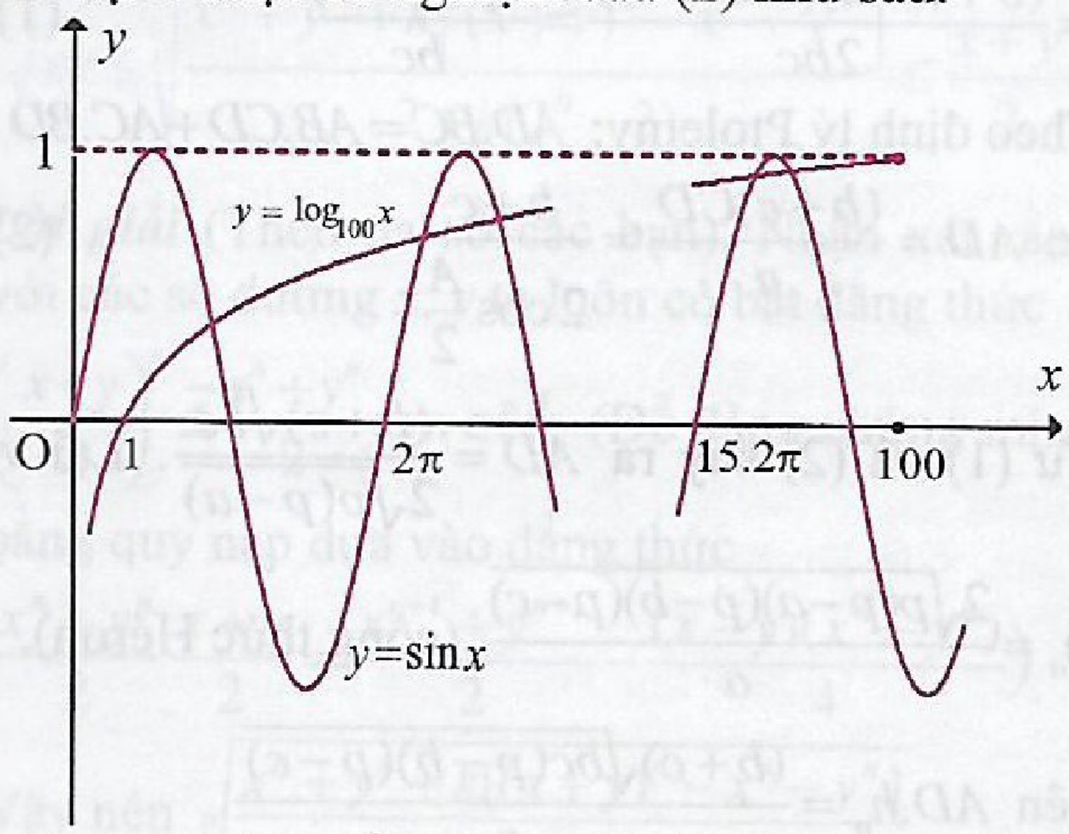


- Trên khoảng đầu (0; 2π) thì (1) có 1 nghiệm dương.
- Trên mỗi khoảng tiếp theo (trừ khoảng cuối), (1) có 2 nghiệm dương.
- Trên khoảng cuối (312.2π; 1964), vì khoảng này có độ dài lớn hơn π lên khoảng này "chứa" đủ phần đồ thị $y=\sin x$ nằm trên Ox ($\sin x>0$) nên trên khoảng này (1) cũng có 2 nghiệm dương. Suy ra số nghiệm dương của (1) là: 1 + 311.2 + 2 = 625.

Vậy (1) có tất cả: 1 + 625 . 2 = 1251 nghiệm.

b) ĐK: $x>0$. Ta có: $\log_{100} x = \sin x \le 1 \Rightarrow x \le 100$.

Tương tự câu a), ta cũng chia trục Ox, từ 0 đến 100 thành 16 khoảng, gồm 15 khoảng có độ dài bằng nhau và bằng 2π, khoảng 16 có độ dài $100-15.2\pi>5,75>\pi$. Từ đồ thị hàm $y=\log_{100} x$ và đồ thị hàm $y=\sin x$ trên khoảng (0; 100) ta xác định được số nghiệm của (2) như sau:



- Trên khoảng đầu (0; 2π) thì (2) có 1 nghiệm dương.
- Trên mỗi khoảng tiếp theo (trừ khoảng cuối), chẳng hạn trên khoảng ($k2\pi$; $(k+1)\,2\pi$), $k=1$, 2, …, 14 ta có:

với $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Rightarrow \sin x=1>\log_{100} x$,

với $x = \pi + k2\pi \Rightarrow \sin x = 0 < \log_{100} x$.

Vậy trên mỗi khoảng này (2) có 2 nghiệm.

- Trên khoảng cuối (15.2π; 100), khoảng này có độ dài lớn hơn π lên khoảng này "chứa" đủ phần đồ thị $y = \sin x$ nằm trên Ox nên trên khoảng này (2) cũng có 2 nghiệm. Vậy (2) có tất cả: 1 + 14 . 2 + 2 = 31 nghiệm. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này tương tự một bài trong đề thi Olympic Moscow (Nga) năm 1941. Bài toán không khó nhưng có lẽ "lạ" nên đã không có bạn nào tham gia giải.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/461. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc A, B, C lần lượt cắt đường tròn tại các điểm D, E, F. Ký hiệu h_a, h_b, h_c, S thứ tự là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C và diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $ADh_a + BEh_b + CFh_c \geq 4\sqrt{3}S$.*

Lời giải. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Áp dụng định lý côsin cho ΔABC ta có

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ suy ra}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \quad (1)$$

Theo định lý Ptolemy: $AD.BC = AB.CD + AC.BD$

$$\Rightarrow AD = \frac{(b+c)CD}{a} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2\sqrt{p(p-a)}}$. Lại vì

$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ (công thức Héron),

nên $AD.h_a = \frac{(b+c)\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{a}$.

Tương tự $BE.h_b = \frac{(a+c)\sqrt{ac(p-a)(p-c)}}{b}$;

$CF.h_c = \frac{(a+b)\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}{c}$.

Do đó $\mathscr{P} = (AD.h_a).(BE.h_b).(CF.h_c)$

$$= (a+b)(b+c)(c+a)(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)S^2}{p}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta được $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, suy ra

$\mathscr{P} \geq \frac{8abc.S^2}{p} = 32S^3.\frac{R}{p}$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Lại có $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \frac{3\sqrt{3}.R}{2}$

$\Rightarrow \frac{R}{p} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Vậy $\mathscr{P} \geq 32S^3.\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{64S^3}{3\sqrt{3}}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương thu được

$$AD.h_a + BE.h_b + CF.h_c \geq 3\sqrt[3]{AD.h_a.BE.h_b.CF.h_c}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{64S^3}{3\sqrt{3}}} = 4\sqrt{3}.S.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Trần Nhật Quang*, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Vương Tiến Đạt*, 10 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Nguyễn Văn Cao*, *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thu Thủy*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, *Mẫn Đức Bình Minh*, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong; **Hưng Yên:** *Vũ Tấn Khang*, *Vũ Tấn Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Huy Hùng Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Thừa Thiên Huế:** *Tống Ngọc Chung*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đắk Lắk:** *Lê Anh Tuấn*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **Long An:** *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 10T1, *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Bình Phước:** *Dương Thái Đức Sơn*, 11T2, THPT chuyên Bình Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *La Trần Hải Đăng*, 10A4, THPT Bùi Thị Xuân, Quận 1; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/461. *Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của*

$$P=ab+ac+ad+bc+bd+3cd.$$

Lời giải.

• Tìm $\max P$: Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $2ab\le a^2+b^2$, với x là số thực dương bất kì, ta có: $2xP=(2ab)x+2a(xc)+2a(xd)$

$$+2b(xc)+2b(xd)+(2cd)(3x)$$

$$\le(a^2+b^2)x+a^2+(xc)^2+a^2+(xd)^2+b^2$$

$$+(xc)^2+b^2+(xd)^2+(c^2+d^2)(3x)$$

$$\Rightarrow 2xP\le(x+2)(a^2+b^2)+(2x^2+3x)(c^2+d^2).$$

Chọn $x>0$ sao cho: $x+2=2x^2+3x\Leftrightarrow x^2+x-1=0$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$. Ta được

$$2xP\le(x+2)(a^2+b^2+c^2+d^2)=x+2$$

$$\Rightarrow P\le\frac{x+2}{2x}=\frac{2+\sqrt5}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b=xc=xd\\ x=\dfrac{\sqrt5-1}{2}\\ a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2=\dfrac{5-\sqrt5}{20}\\ c^2=d^2=\dfrac{5+\sqrt5}{20}\end{cases}.$$

Vậy $\max P=\dfrac{2+\sqrt5}{2}$ khi $\begin{cases}a=b=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt5}{20}}\\ c=d=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt5}{20}}\end{cases}$

hoặc $\begin{cases}a=b=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt5}{20}}\\ c=d=-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt5}{20}}\end{cases}$.

• Tìm $\min P$: Ta có $(a+b+c+d)^2\ge0$

$$\Rightarrow 1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\ge0$$

$$\Rightarrow ab+ac+ad+bc+bd+cd\ge-\frac12\Rightarrow P\ge-\frac12+2cd.$$

Lại có $(c+d)^2+a^2+b^2\ge0$

$$\Rightarrow 2cd\ge-(a^2+b^2+c^2+d^2)=-1$$

Do đó $P\ge-\dfrac12+2cd\ge-\dfrac32$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b=0;\ c=-d,\ c^2+d^2=1$.

Vậy $\min P=-\dfrac32$. Giá trị đó đạt được khi

$$a=b=0;\ c=\frac{1}{\sqrt2};\ d=-\frac{1}{\sqrt2}$$

hoặc $a=b=0;\ c=-\dfrac{1}{\sqrt2};\ d=\dfrac{1}{\sqrt2}$. □

➢***Nhận xét.*** Việc tìm $\min P$ đơn giản, hầu hết các bạn gửi bài làm đúng.

Để tìm $\max P$, có thể đặt $t=c^2+d^2$ và chứng minh rằng $P\le f(t)$ với

$f(t)=t+2\sqrt{t(1-t)}+\dfrac12,\ t\in[0;1]$; sử dụng đạo hàm, khảo sát hàm số $f(t)$; suy ra kết quả.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Nội: *Nguyễn Thành Long*, 10A1, THPT Ứng Hòa, *Lê Thành Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nghệ An:** *Phạm Công Hoàng, Nguyễn Huy Hùng Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Hưng*, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Ngãi:** *Vũ Văn Tiên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết, TP Quảng Ngãi; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Đồng Hới; **Thừa Thiên – Huế:** *Tống Ngọc Chung*, 10 Toán, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP Huế.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T10/461. *Cho $k\ge1$ và các số dương x, y. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\ge2$ ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{xy}\le\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n+k\left[(x+y)^n-x^n-y^n\right]}{2+k(2^n-2)}}\le\frac{x+y}{2}.$$

Lời giải (Theo đa số các bạn). Nhận xét rằng với các số dương x, y ta luôn có bất đẳng thức $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\le\dfrac{x^n+y^n}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$. (Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp dựa vào đẳng thức

$$\frac{x^n+y^n}{2}\cdot\frac{x+y}{2}=\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}-\frac{(x-y)(x^n-y^n)}{4}).$$

Vậy nên $\sqrt[n]{\dfrac{x^n+y^n+k[(x+y)^n-x^n-y^n]}{2+k(2^n-2)}}$

$$=\sqrt[n]{\frac{k(x+y)^n-(k-1)(x^n+y^n)}{2+k(2^n-2)}}\le$$

$$\le\sqrt[n]{\frac{k(x+y)^n-2(k-1)\left(\frac{x+y}{2}\right)^n}{2+k(2^n-2)}}=\frac{x+y}{2}.$$

Mặt khác, từ khai triển nhị thức Newton, ta thu được $(x+y)^n - x^n - y^n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(C_n^i x^i y^{n-i} + C_n^{n-i} x^{n-i} y^i)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i (x^i y^{n-i} + x^{n-i} y^i)$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i 2\sqrt{(xy)^n} = (2^n - 2)\sqrt{(xy)^n}.$$

Từ đây suy ra

$$\sqrt[n]{\frac{x^n + y^n + k[(x+y)^n - x^n - y^n]}{2 + k(2^n - 2)}}$$

$$\geq \sqrt[n]{\frac{2\sqrt{(xy)^n} + k(2^n - 2)\sqrt{(xy)^n}}{2 + k(2^n - 2)}} = \sqrt{xy}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở các vế khi và chỉ khi $x = y$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng bất đẳng thức cơ bản của đa thức đồng bậc đối xứng hai biến nên có nhiều bạn giải được và hầu hết theo cách đã trình bày ở trên. Một số bạn sử dụng phương pháp khảo sát tính đơn điệu của hàm

$$M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, 0 \neq p \in \mathbb{R}, \lim_{p \to 0} M_p(x,y) = \sqrt{xy}$$

cũng cho lời giải ngắn gọn.

Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bắc Giang**: *Nghiêm Văn Nghĩa*, 11A1 THPT Lạng Giang 3; **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi*, 11A1 - K10 Yên Phong 2, *Lê Huy Cường*, 12T, *Nguyễn Thanh Hiếu*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh. **Bình Phước:** *Dương Thái Đức Sơn*, *Lê Thanh Bình*, 11T2, THPT chuyên Bình Long; **Hà Nội:** *Trần Nhật Quang*, 11A2, *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, *Đặng Thanh Tùng*, *Nguyễn Văn Cao*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, *Lê Anh Thành*, 11T1, *Vương Tiến Đạt*, 10TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Trần Bá Khôi*, *Vũ Đức Văn*, 11T1, THPT Chuyên ĐHSP, Hà Nội; **TP. Hồ Chí Minh:** *La Trần Hải Đăng*, 10A4, THPT Bùi Thị Xuân; **Gia Định:** *Đoàn Quang Minh*, 10CT, THPT Gia Định; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Minh Hải*, 10T1, THPT Quốc học Huế; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, *Đoàn Thị Nhài*, *Bùi Thị Tuyết Chinh*, 11T1, *Đặng Thiên Hùng*, 10T2 THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Đặng Duy Bảo Khánh*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** *Lê Tấn Đồng Tâm*, 11/1, THPT Lê Thánh Tông; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Danh Thắng*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên *Nguyễn Bỉnh Khiêm*; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/461. *Cho n số nguyên dương khác nhau. Mỗi cặp số được lấy từ n số nguyên dương đã cho được gọi là tốt nếu tỷ số giữa hai số này là 2 hoặc 3. Hỏi khi cho* $n = 2015^{2016}$ *số nguyên dương khác nhau tùy ý thì số cặp số tốt lớn nhất bằng bao nhiêu ?*

Lời giải. (Của bạn *Trần Nhật Quang*, 11A2 Toán THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội** và bạn *Trần Bá Khôi*, 11T2, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**).

Ta giải bài toán tổng quát với n là số chính phương $n = m^2$. Đặt $a_i = 2^{r_i}3^{s_i}t_i, (t_i, 6) = 1$.

Ta thấy nếu (a_i, a_r) là cặp tốt thì $t_i = t_r$ do đó số cặp tối trong n số $a_1, ..., a_n$ không vượt qua số cặp tốt trong n số $2^{r_1}3^{s_1}, ..., 2^{r_n}3^{s_n}$.

Cặp $(2^{r_i}3^{s_i}, 2^{r_j}3^{s_j})$ là cặp tốt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} r_i = r_j \\ |s_i - s_j| = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} s_i = s_j \\ |r_i - r_j| = 1 \end{cases}$$

Trên hệ trục tọa độ Oxy xét n điểm $A_i = (r_i, r_j)$.

Như vậy cặp $(2^{r_i}3^{s_i}, 2^{r_j}3^{s_j})$ là cặp tốt nhất khi và chỉ khi $A_iA_j = 1$ hay A_iA_j là đoạn thẳng đơn vị.

Giả sử n điểm $A_1, ..., A_n$ nằm trên k đường thẳng song song với trục Ox, kí hiệu là $d_1, d_2, ..., d_k$.

Gọi m_l là số điểm $A_i (i = 1, ..., n)$ nằm trên $d_l (l = 1, ..., k)$ và d_h là đường thẳng chứa nhiều điểm A_i nhất. Khi đó

$$n = m_1 + m_2 + ... + m_k \leq km_h \Rightarrow \frac{n}{k} \leq m_h.$$

Ta có nhận xét sau:

1) Số đoạn thẳng đơn vị A_iA_j trên đường thẳng d_l không vượt quá $m_l - 1$.

2) Số đoạn thẳng đơn vị A_iA_j song song với Oy nằm giữa hai đoạn thẳng d_l, d_{l+1} không vượt quá $\min\{m_l, m_{l+1}\}$. Vì thế số đoạn thẳng đơn vị A_iA_j không vượt quá $\sum_{l=1}^{k}(m_l - 1) + \sum_{l=1}^{k-1}\min\{m_l, m_{l+1}\}$

$$=n-k+\sum_{l=1}^{h-1}m_l+\sum_{l=h}^{k-1}m_{l+1}=n-k+n-m_h=2n-k-m_h$$

$$=2n-k-\frac{n}{k}\le 2n-2\sqrt{n}=2m(m-1).$$

Ta chỉ ra trường hợp có dấu đẳng thức. Xét $n=m^2$ số $\left\{2^i3^j, 1\le i\le m, 1\le j\le m\right\}$. Dễ thấy có $m(m-1)$ cặp có tỷ số bằng 3: đó là các cặp $(2^i3^j, 2^i3^{j+1})$, $(1\le i\le m, 1\le j\le m-1)$ và $m(m-1)$ cặp có tỷ số bằng 2: đó là các cặp $(2^i3^j, 2^{i+1}3^j)$, $(1\le i\le m-1, 1\le j\le m)$.

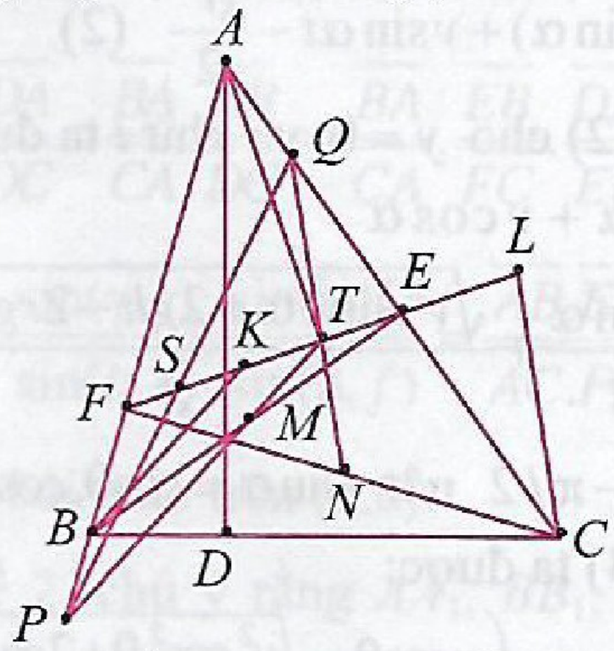
Do vậy đáp số bài toán là $2m(m-1)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này chỉ có sáu bạn gửi lời giải. Ngoài hai bạn *Quang* và *Khôi*, hai bạn *Nghiêm Văn Nghĩa*, 11A1, THPT Lạng Giang 3, **Bắc Giang** và bạn *Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** cũng có lời giải đúng tuy chưa thật chặt chẽ và ngắn gọn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/461. *Cho tam giác ABC. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu của B, C trên AC, AB; T là hình chiếu của A trên EF và M, N lần lượt là trung điểm của BE, CF. Giả sử TM, TN cắt AB, AC tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Thu Uyên*, 10T2, THPT chuyên, ĐHSP **HàNội**).



Gọi S là trung điểm của PQ. Lấy K, L thuộc EF sao cho $BK//MT; CL//NT$. Gọi D là hình chiếu của A trên BC. Vì M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CF và $BK//MT; CL//NT$ nên, theo định lí Thales và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{\overline{TK}}{\overline{TE}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{ME}}=-1=\frac{\overline{NF}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{TF}}{\overline{TL}}=\frac{\overline{TK}-\overline{TF}}{\overline{TE}-\overline{TL}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{LE}}.$$

Do đó $\overline{EL}=\overline{FK}$ (1).

Vì E, F theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên AC, AB nên B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$. Kết hợp với $AH\perp EF; AD\perp BC$, suy ra $\frac{\overline{ET}}{\overline{FT}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ (2).

Vì $AD\perp BC; BE\perp CA; CF\perp AB$ nên AD, BE, CF đồng quy. Do đó, theo định lí Ceva, $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$ (3). Vậy $\frac{\overline{SP}}{\overline{SQ}}.\frac{\overline{EQ}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FP}}=(-1).\frac{\overline{EQ}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FP}}$

(vì S là trung điểm của PQ)

$$=-\frac{\overline{EQ}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}.\frac{\overline{FB}}{\overline{FP}}=-\frac{\overline{ET}}{\overline{EL}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}.\frac{\overline{FK}}{\overline{FT}}$$

(vì $QT//CL; PT//BK$)

$$=-\frac{\overline{ET}}{\overline{FT}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \text{ (vì (1))}=-\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \text{ (vì (2))}$$

$$=-\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-(-1) \text{ (vì (3))}=1.$$

Từ đó, áp dụng theo định lí Menelaus cho ΔAPQ, suy ra S, E, F thẳng hàng (đpcm). ❐

➢***Nhận xét.***

1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên, ngoài bạn *Thu Uyên*, chỉ có 5 bạn có ý thức khắc phục tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ: **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT Đông Thuỵ Anh, Thái Thuỵ; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Minh Hải*, 10T1, THPT chuyên Quốc Học Huế.

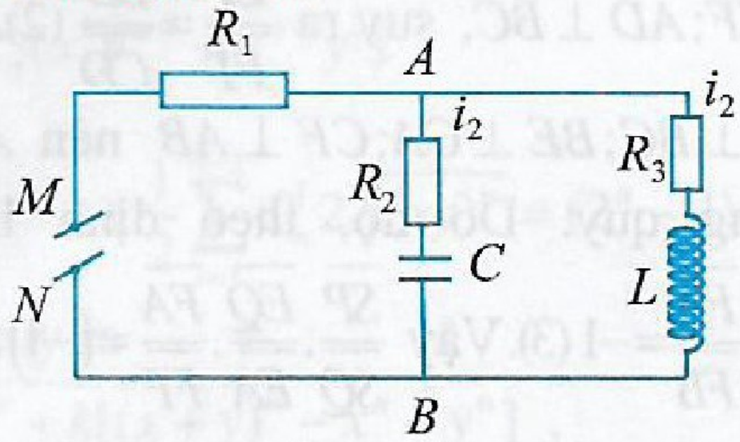
2) Một vài bạn đề xuất bài toán tổng quát sau:

Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. Điểm T thuộc EF sao cho $\frac{\overline{TE}}{\overline{TF}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$; *M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CF; P, Q theo thứ tự là giao điểm của TM, TN và AB, AC. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của PQ.*

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/461. *Một mạch điện xoay chiều có sơ đồ như hình vẽ. Trong đó* $R_1=R_2=R_3=R$. *Cuộn dây có điện trở không đáng kể. Độ tự cảm L của cuộn dây và điện dung C của tụ điện được chọn sao cho* $LC\omega^2=1$. *Với* ω *là tần số góc của dòng điện xoay chiều. Với giá trị nào của R thì cường độ dòng điện trong mạch chính nhỏ*

hơn cường độ dòng điện qua mỗi nhánh n lần (giá trị hiệu dụng)? Tính tổng trở đoạn AB và công suất tiêu thụ toàn đoạn mạch trong trường hợp đó. Cho $U_{AB} = U$.



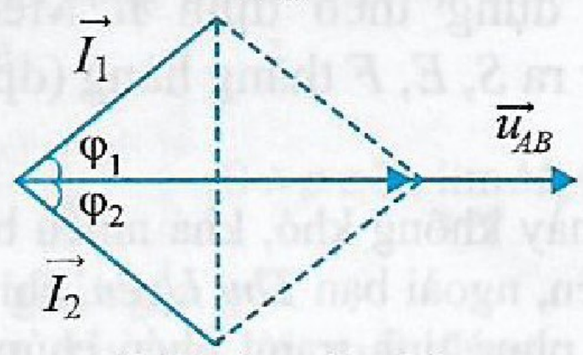
Lời giải. Theo giả thiết ta có: $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

$$LC\omega^2 = 1 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow Z_L = Z_C$$

Gọi I, I_1, I_2 là cường độ hiệu dụng qua R_1, R_2, R_3.

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2}\ ;\ Z_2 = \sqrt{R^2 + Z_L^2};\ Z_3 = Z_2 \Rightarrow I_1 = I_2.$$

Mặt khác: $\left.\begin{array}{l}\tan\varphi_1 = \dfrac{Z_C}{R}\\ \tan\varphi_2 = -\dfrac{Z_L}{R}\end{array}\right\} \varphi_1 = -\varphi_2$



(góc lệch pha so với U_{AB}) $\Rightarrow I = 2I_1\cos\varphi_1 = 2I_2\cos\varphi_2$

Giản đồ vectơ quay :

$$I = \frac{2nIR}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{2n}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\omega C\sqrt{4n^2 - 1}} \text{ hoặc } R = \frac{\omega L}{\sqrt{4n^2 - 1}}$$

Tổng trở đoạn AB :

$$Z_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{Z_1 I_1}{I}\left\{\begin{array}{l} Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2}\\ \dfrac{I_1}{I} = \dfrac{1}{2\cos\varphi_1} = \dfrac{1}{2\dfrac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}}\end{array}\right.$$

$$Z_{AB} = \frac{R^2 + Z_C^2}{2R} \Rightarrow Z_{AB} = \frac{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}{2R} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{2R}$$

Công suất tiêu thụ trong mạch : $\mathcal{P} = RI^2 + RI_1^2 + RI_2^2$

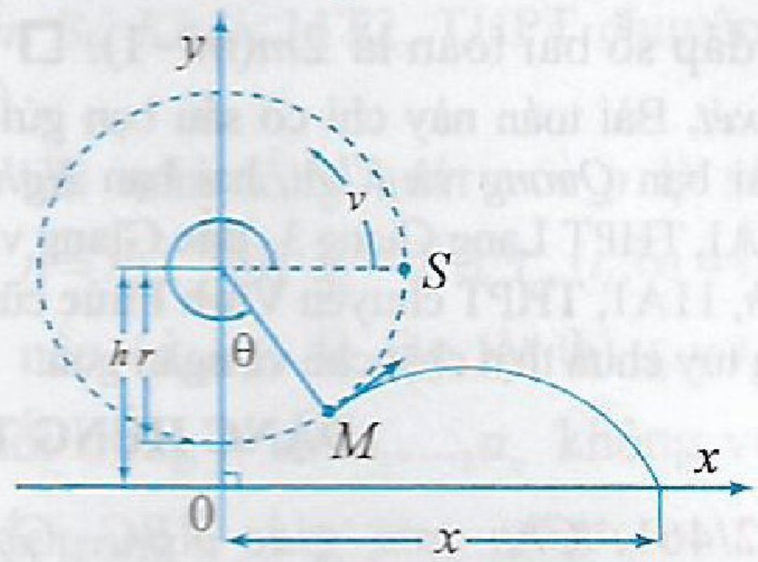
$$\mathcal{P} = R(I^2 + 2I_1^2) = R\left(\frac{I_1^2}{n^2} + 2I_1^2\right) = RI_1^2\left(\frac{1}{n^2} + 2\right)$$

$$\mathcal{P} = \frac{RU_{AB}^2}{R^2 + L^2\omega^2}\left(\frac{1}{n^2} + 2\right). \square$$

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng hai bạn có lời giải đúng : *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Ngô Văn Khoa*, 12A2, THPT Bắc đông Quan, H. Đông Hưng, **Thái Bình**.

ĐỊNH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/461. *Một vật được treo vào dây tại một điểm cố định, thực hiện một chuyển động tròn đều xuất phát từ S. Tại M - góc quay θ dây đột ngột bị đứt. Xác định li độ x của điểm vật rơi đối với gốc tọa độ theo θ. Các dữ liệu khác cho trong hình vẽ. Giả thiết dây mảnh, không giãn, khối lượng không đáng kể và h > r.*



Lời giải. Gọi α là góc mà bán kính OM lập với phương thẳng đứng. Đây chính là góc mà vận tốc của vật lập với phương ngang tại M. Kí hiệu C là điểm vật chạm đất. Phương trình chuyển động của vật theo hai phương sau khi dây đứt:

$$x = r\cos\alpha + v\cos\alpha.t \quad (1)$$

$$y = (h - r\sin\alpha) + v\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho $y = 0$ và khử t ta được:

$$x = r\sin\alpha + v\cos\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g} + \frac{\sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh - 2rg\cos\alpha}}{g}\right) (3)$$

Mà $\alpha = \theta - \pi/2$ nên $\sin\alpha = \cos\theta, \cos\alpha = -\sin\theta$, thay vào (3) ta được:

$$x = r\cos\theta - v\sin\theta\left(\frac{v\cos\theta}{g} + \frac{\sqrt{v^2\cos^2\theta + 2gh - 2rg\sin\theta}}{g}\right)$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Huyện Văn Giang; *Vũ Tuấn Đạt*, 10Toán 1, THPT chuyên; **Nam Định:** *Nguyễn Nam Khánh, Phạm Ngọc Nam*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bến Tre:** *Hồ Trần Minh Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/465. Find the maximal positive value of T such that the following inequality

$$\frac{a+b}{b(a+1)}+\frac{b+c}{c(b+1)}+\frac{c+a}{a(c+1)}\geq T$$

always holds for all positive numbers a, b, c satisfying $abc=1$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/465. Find all pairs of positive integers x and y so that x^2 is divisible by $2xy^2-y^3+1$.

Problem T11/465. Find all monotonic functions $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ such that

$$f(x+y)=x^{2016}f\left(\frac{1}{x^{2015}}\right)+y^{2016}f\left(\frac{1}{y^{2015}}\right)$$

for all positive numbers x and y.

Problem T12/465. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle $\widehat{A}<90^0$. Let CD be the altitude from C. Let E be the midpoint of BD and let M be the midpoint of CE. The angle bisector of $\widehat{BDC}$ intersects CE at P. The circle with center at C and with radius $|CD|$ intersects AC at Q. Let $K=PQ\cap AM$. Prove that CKD is a right triangle.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***

(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

ĐỊNH LÝ SIN ... (Tiếp theo trang 15)

Từ đó, áp dụng bổ đề 1 cho các tam giác AMB, AMC, ABC, ABD, ACD, DBE, DCF, suy ra

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=\frac{\sin(\vec{\gamma},\vec{m})}{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}.\frac{\sin(\vec{\beta},\vec{\alpha})}{\sin(\vec{\beta},\vec{m})}$$

$$=\frac{\sin(\vec{\beta},\vec{\alpha})}{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}.\frac{\sin(\vec{\gamma},\vec{m})}{\sin(\vec{\beta},\vec{m})}=\frac{\sin(\vec{\beta},\vec{\alpha})}{\sin(\vec{\gamma},\vec{\alpha})}.\frac{\sin(\vec{\gamma},\vec{m})}{\sin(\vec{\gamma},\vec{b})}.\frac{\sin(\vec{\beta},\vec{c})}{\sin(\vec{\beta},\vec{m})}$$

$$=\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}.\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}.\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}.\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}.\frac{\overline{EB}}{\overline{FC}}.\frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{DC}}$$

$$=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.\frac{\overline{EB}}{\overline{FC}}.\frac{\sin(\vec{\gamma},\vec{e})}{\sin(\vec{b},\vec{e})}.\frac{\sin(\vec{c},\vec{f})}{\sin(\vec{\beta},\vec{f})}=\frac{\overline{AB}.\overline{EB}}{\overline{AC}.\overline{FC}}.$$

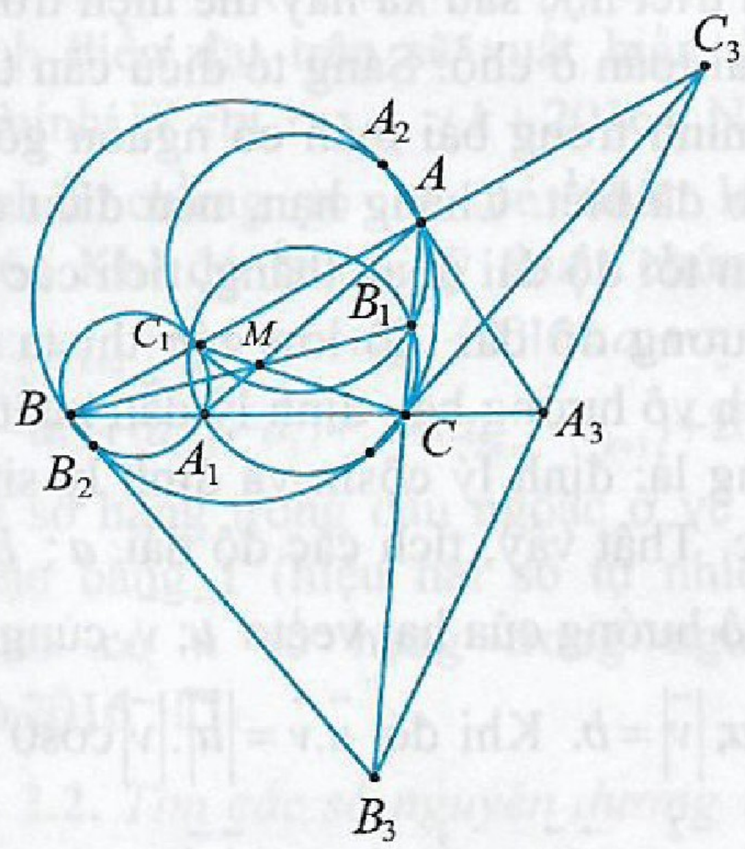
Trở lại giải bài toán trên (h.2).

Theo bổ đề 2, chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại M, theo định lí Ceva, ta có

$$\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}.\frac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}}.\frac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}}=\frac{\overline{AB}.\overline{C_1B}}{\overline{AC}.\overline{B_1C}}.\frac{\overline{BC}.\overline{A_1C}}{\overline{BA}.\overline{C_1A}}.\frac{\overline{CA}.\overline{B_1A}}{\overline{CB}.\overline{A_1B}}=$$

$$=\frac{\overline{AB}}{\overline{BA}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{CA}}{\overline{AC}}.\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}.\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}}.\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}}$$

$$=(-1).(-1).(-1).(-1)=1.$$



Hình 2

Theo định lí Menelaus, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

TH&TT

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG: Trong TH&TT số 463

- Biểu thức trong đề bài T11/463 (trang 17) bị in sót, xin sửa đúng là: $\dfrac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n$.

- Có một sai sót trong hệ điều kiện của đề bài thí dụ 8 (trang 31), xin được sửa đúng là: $\begin{cases}x+2y+z\leq 25\\ 3x+z\leq 33\end{cases}$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

CÁC PHƯƠNG THỨC ĐỊNH HƯỚNG CÓ CĂN CỨ NHẰM TÌM TÒI LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

ĐÀO TAM
(GV Khoa Toán, Đại học Vinh)

Khi tìm tòi để phát hiện hướng giải một bài toán không mẫu mực người ta quan tâm tìm câu trả lời cho các câu hỏi then chốt sau:

- Căn cứ vào đâu để định hướng đúng đắn đường lối giải một bài toán?
- Những loại hình tri thức nào đã biết là chủ yếu trong việc điều chỉnh các hoạt động tìm tòi lời giải?
- Hoạt động ngôn ngữ tham gia vào việc tìm tòi lời giải một bài toán như thế nào?

Bài viết này đề cập tới một số phương thức định hướng đúng cách huy động kiến thức để giải một bài toán và từ đó làm sáng tỏ kỹ thuật thực hiện lời giải.

***Phương thức* 1. Tạo nhiều cơ hội để học sinh nhận thức vai trò của mối liên hệ nhân quả trong hoạt động tìm kiếm lời giải.**

Ý nghĩa triết học sâu xa này thể hiện trong hoạt động giải toán ở chỗ: Sáng tỏ điều cần tìm, cần chứng minh trong bài toán có nguồn gốc từ tri thức nào đã biết. Chẳng hạn, nếu điều cần tìm liên quan tới độ dài đoạn thẳng, tích các độ dài, bình phương độ dài, độ lớn góc thì ta thường dùng tích vô hướng hay định lý dẫn xuất từ tích vô hướng là: định lý côsin và định lý sin trong tam giác. Thật vậy, tích các độ dài a; b chính là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cùng hướng và $|\vec{u}| = a; |\vec{v}| = b$. Khi đó $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos 0^0 = a.b$.

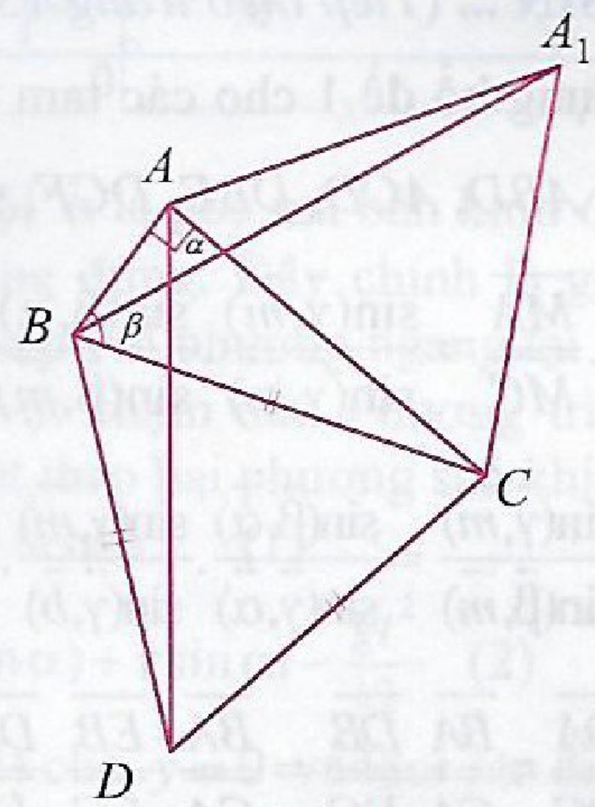
Đặc biệt $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = a^2$; $\cos\alpha = \vec{i}.\vec{j}$; trong đó $\vec{i}; \vec{j}$ là các vectơ đơn vị và góc giữa chúng bằng α.

Có thể lập luận khi gặp dạng toán liên quan tới độ dài, tích các độ dài, bình phương độ dài và độ lớn góc thì người ta sử dụng hình học đồng dạng. Điều này có thể giải thích là từ hình học đồng dạng và dời hình là trường hợp riêng của nó, có thể chứng minh định lý Pythagore. Từ định lý này có thể chứng minh định lý côsin trong tam giác. Từ định lý côsin có thể suy ra định lý sin trong tam giác và từ đó xây dựng được các kiến thức về hệ thức lượng.

Thí dụ 1.1. *Xét ΔABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$ thay đổi $(0^0 < \alpha < 180^0)$, các cạnh $AB = 2$; $AC = 5$. D là điểm thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC không chứa đỉnh A sao cho ΔBCD đều. Hãy xác định α để độ dài đoạn AD lớn nhất.*

Có thể định hướng theo hai cách giải bài toán trên như sau:

***Cách* 1**



Hình 1

Biểu thị AD qua biểu thức phụ thuộc α: $AD = f(\alpha)$. Bài toán xác định độ dài AD nên theo nhận xét trên ta sẽ sử dụng định lý côsin cho các tam giác thích hợp (h.1). Áp dụng định lý côsin cho ΔABC ta có $BC^2 = 29 - 20\cos\alpha$ (1). Đặt $\widehat{ABC} = \beta$. Khi đó nhờ định lý côsin áp dụng cho ΔABC ta có $\cos\beta = \dfrac{2 - 5\cos\alpha}{\sqrt{29 - 20\cos\alpha}}$. Áp dụng định lý côsin cho ΔABD ta có:

$$AD^2 = 33 - 20\cos\alpha - 4\sqrt{29 - 20\cos\alpha} \times (\cos 60^0 \cos\beta - \sin 60^0 \sin\beta) \quad (2)$$

Thay $\sin\beta = \sqrt{1 - \dfrac{(2 - 5\cos\alpha)^2}{29 - 20\cos\alpha}} = \dfrac{5\sin\alpha}{\sqrt{29 - 20\cos\alpha}}$ vào (2) ta nhận được $AD^2 = 29 - 20\cos(60^0 + \alpha)$.

AD lớn nhất $\Leftrightarrow AD^2$ lớn nhất. Điều đó xảy ra

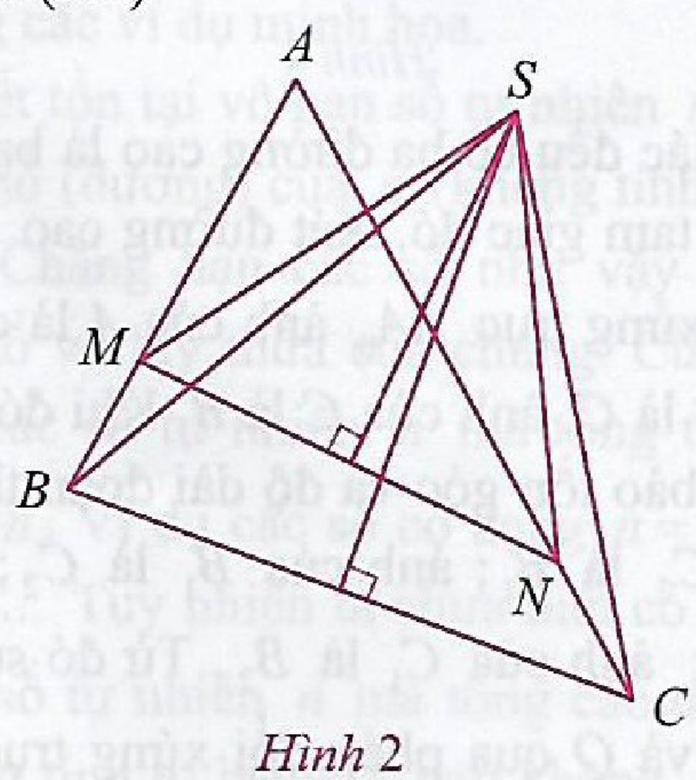
khi và chỉ khi $20\cos(60^0+\alpha)$ bé nhất, khi đó $\alpha = 120^0$ và giá trị lớn nhất của $AD = 7$.

Cách 2. *Nhận xét.* Bài toán liên quan đến độ dài nên ta sử dụng phép dời hình (h.1).

Thực hiện phép quay Q có tâm C, góc quay bằng 60^0 (cùng chiều kim đồng hồ). Khi đó qua phép quay $Q_c^{60^0}$ ảnh của D là B; ảnh của A là A_1. Từ đó ảnh của đoạn AD là A_1B và $AD = A_1B$. Sử dụng BĐT tam giác ta có $AD = A_1B \le AB + AA_1$; đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A \in BA_1$. Khi đó do $\widehat{CAA_1} = 60^0$ nên $\widehat{BAC} = 120^0$ và BA_1 lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất. Từ đó AD nhận giá trị lớn nhất bằng 7. ❐

Thí dụ 1.2. *Cho tam giác ABC với $AB \ne AC$. Các điểm M, N di động trên các tia BA, CA sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Cách giải (h.2)



Hình 2

Điều kiện của bài toán liên quan tới độ dài các đoạn thẳng BM và CN ($BM = CN$) và chúng thuộc hai đường thẳng khác phương nên có một phép quay biến B thành C và M thành N.

Từ đó điểm cố định được dự đoán là tâm của phép quay nói trên. Phép quay biến B thành C và M thành N nên tâm của phép quay đó là giao của các trung trực của đoạn BC và đoạn NM. Giả sử S là giao của hai đường trung trực nói trên, khi đó $\Delta SBM = \Delta SCN$ (c.c.c). Từ đó $\widehat{SBM} = \widehat{SCN}$. Khi đó $\widehat{SBA} = \widehat{SCA}$, suy ra S thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp ΔABC. Vậy S là giao của $(\mathscr{C})$ và trung trực của đoạn BC nên S cố định. ❐

***Phương thức 2.* Diễn đạt lại giả thiết và kết luận của bài toán về dạng sáng tỏ được cách kết nối với tri thức đã có để phát hiện hướng giải.**

Có thể làm sáng tỏ các phương thức này qua thí dụ sau đây:

Thí dụ 2.1. *Cho $2k+1$ số tự nhiên đôi một khác nhau ($k \ge 1; k \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn tổng của $k+1$ số tự nhiên bất kỳ trong các số đã cho lớn hơn tổng của k số còn lại cộng với 2016. Chứng minh rằng mỗi số tự nhiên trong $2k+1$ đã cho lớn hơn $k+2016$.*

Cách giải. Rõ ràng với mỗi $k \ge 1$ có vô số bộ $2k+1$ số thỏa mãn điều kiện đã cho. Từ đó học sinh (HS) gặp khó khăn khi tìm lời giải cho mọi bộ $2k+1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do mỗi bộ $2k+1$ số tự nhiên hữu hạn nên có thể sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $a_1 < a_2 < a_3 ... < a_{2k} < a_{2k+1}$ (1). Từ đó có thể diễn đạt lại bài toán như sau: *Cho $2k+1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện* (1) *và tổng của $k+1$ số bất kỳ lấy trong* (1) *lớn hơn tổng của k số còn lại cộng với* 2016. *Chứng minh rằng mỗi số trong các số lấy từ* (1) *lớn hơn $k+2016$.*

Với cách diễn đạt trên sẽ xuất hiện ý tưởng chứng minh là chỉ ra $a_1 > k+2016$. Nói cách khác, phải chứng tỏ số bé nhất lớn hơn $k+2016$. Khi đó ta có kỹ thuật chứng minh như sau: $a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_{2k+1} + 2016 < a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}$

$\Leftrightarrow (a_{k+2} - a_2) + (a_{k+3} - a_3) + ... + (a_{2k+1} - a_{k+1}) + 2016 < a_1$.

Do mỗi số hạng trong dấu ngoặc ở vế trái lớn hơn hoặc bằng 1 (hiệu hai số tự nhiên khác nhau) do có k số hạng trong ngoặc nên $a_1 > k+2016$. ❐

Thí dụ 2.2. *Tìm các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 12 < ab + 3b + 6c + 2d$* (1)

Cách giải. Vì các số cần tìm nguyên, dương nên vế trái và vế phải của BĐT (1) là những số nguyên, dương, sai khác nhau ít nhất một đơn vị. Khi đó có thể diễn đạt lại bài toán: *Tìm các số nguyên, dương a, b, c, d thỏa mãn*:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 13 \le ab + 3b + 6c + 2d \quad (2)$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 13$

$$-ab - 3b - 6c - 2d \le 0 \quad (3)$$

Vế trái của BĐT (3) gợi cho HS liên tưởng đưa về dạng tổng các bình phương đúng:

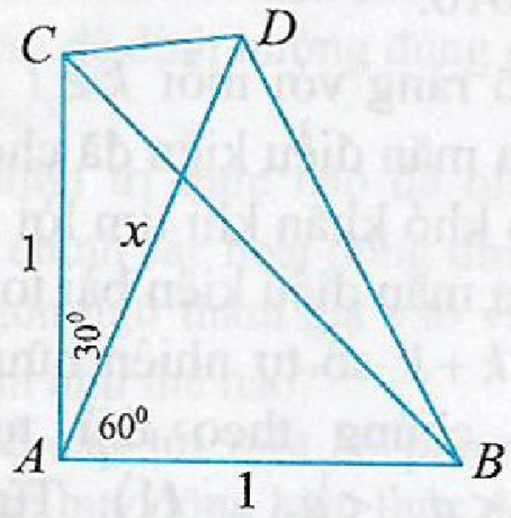
$$(3) \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+3\left(\frac{1}{2}b-1\right)^2+(c-3)^2+(d-1)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow a=1;\ b=2;\ c=3;\ d=1.\ \square$$

***Phương thức 3.* Diễn đạt cái đã cho, điều cần tìm, cần chứng minh theo các ngôn ngữ khác nhau và lựa chọn ngôn ngữ thuận tiện cho việc kết nối với tri thức đã có.**

Thí dụ 3.1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}.$$



Hình 3

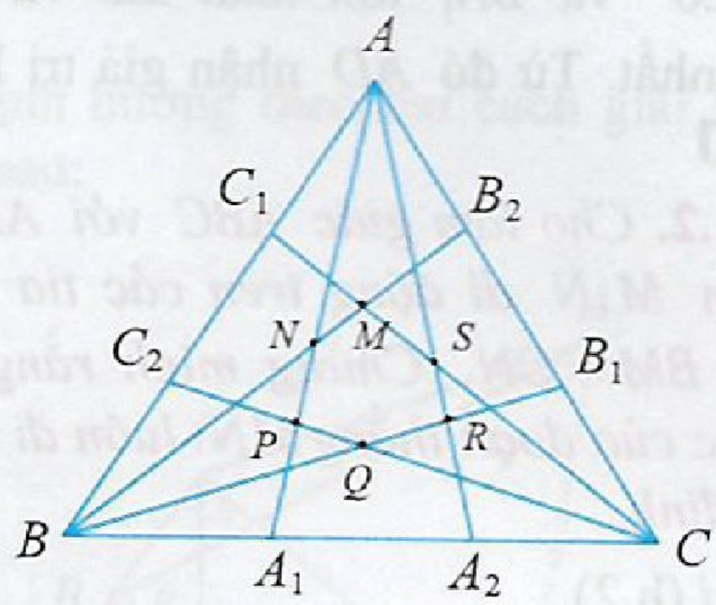
Qua trải nghiệm của HS giải bài toán trên cho thấy họ gặp khó khăn khi sử dụng đạo hàm để giải quyết bài toán. Có thể hướng dẫn HS nhận xét các biểu thức trong căn dương. Với hai giá trị của x đối nhau thì với x âm giá trị của biểu thức lớn hơn khi x dương.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức chỉ đạt với x dương. Từ đó có thể hướng dẫn HS liên tưởng $\sqrt{1+x^2-x}$ là độ dài cạnh BD của tam giác ABD có $AB=1;\ AD=x$. Có thể kiểm tra điều đó nhờ sử dụng định lý côsin cho ΔABD có $\widehat{BAD}=60^0$ (h.3). Tương tự $\sqrt{1+x^2-\sqrt{3}x}$ là độ dài cạnh CD của ΔACD có $AC=1;\ AD=x$ và $\widehat{CAD}=30^0$. Từ đó nhờ BĐT tam giác ta có $BD+DC \ge BC$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D \in BC$. Khi đó $BD+DC=BC=\sqrt{2}$. Từ đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức nói trên bằng $\sqrt{2}$.

Thí dụ 3.2. *Cho tam giác đều ABC, trên cạnh BC lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $BA_1=A_1A_2=A_2C$. Trên cạnh CA lấy các điểm B_1, B_2 sao cho $CB_1=B_1B_2=B_2A$. Trên AB lấy các điểm C_1, C_2 sao cho $AC_1=C_1C_2=C_2B$. Chứng minh rằng các giao điểm của các cặp đường thẳng: $(BB_2;CC_1)$, $(AA_1;BB_2)$, $(AA_1;CC_2)$, $(CC_2;BB_1)$, $(BB_1;AA_2)$, $(AA_2;CC_1)$, là các đỉnh của một lục giác có các đường chéo đồng quy.*

Gọi M,N,P,Q,R,S theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng nêu trên. Khi giải bài này nhiều HS ngộ nhận lục giác $MNPQRS$ là lục giác đều và chứng tỏ các đường chéo đồng quy, việc ngộ nhận như vậy là sai vì các cặp cạnh đối của lục giác này thuộc hai đường thẳng cắt nhau.

Sau đây là cách giải được diễn đạt theo ngôn ngữ gần gũi với HS.



Hình 4

Do tam giác đều có ba đường cao là ba trục đối xứng của tam giác đó. Xét đường cao AA_0 qua phép đối xứng trục AA_0 ảnh của A là chính nó; ảnh của B là C; ảnh của C là B. Khi đó do phép đối xứng bảo tồn góc và độ dài đoạn thẳng nên ảnh của C_2 là B_1; ảnh của B_1 là C_2; ảnh của B_2 là C_1; ảnh của C_1 là B_2. Từ đó suy ra các điểm M và Q qua phép đối xứng trục AA_0 có ảnh là chính nó (h.4). Lập luận tương tự P và S là hai điểm thuộc trục đối xứng BB_0; N và R thuộc trục đối xứng CC_0. Từ đó do các đường cao đồng quy nên suy ra các đường chéo của lục giác $MNPQRS$ đồng quy tại trực tâm H của tam giác ABC.

Trên đây chúng tôi trình bày ba phương thức giúp định hướng tìm tòi lời giải các bài toán, bạn đọc có thể nghiên cứu đề xuất thêm các phương thức khác giúp cho việc định hướng tìm tòi lời giải các bài toán ở trường phổ thông thêm phong phú hơn.

SỐ HOÀN HẢO Và ỨNG DỤNG

NGUYỄN CỬU HUY - NGUYỄN ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đã Nẵng)

Một bài toán trong kì thi học sinh giỏi quốc gia trung học phổ thông môn Toán năm 2016 (Bài 7) đã đề cập đến một vấn đề khá kinh điển trong số học, đó là số hoàn hảo (hay còn gọi là số hoàn chỉnh), một chủ đề bị lãng quên lại được chọn trong đề thi năm nay. Để giải bài toán này, ngoài các định lí đã biết về số hoàn hảo, thí sinh còn phải biết vận dụng tính chất nhân tính của hàm $\sigma(n)$ (hàm tổng các ước số của n) là có thể giải quyết được. Nhân bài toán nêu trên, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc làm quen một số tính chất của số hoàn hảo cùng các ví dụ minh họa.

Ta đã biết tồn tại vô hạn số tự nhiên n mà tổng các ước số (dương) của n (không tính n) là nhỏ hơn n. Chẳng hạn các số như vậy là các số nguyên tố và lũy thừa của chúng. Cũng tồn tại vô hạn các số tự nhiên n mà tổng tương ứng lớn hơn n. Ví dụ các số có dạng $n=2^k\cdot 3$, với $k=2, 3, \ldots$ Tuy nhiên ta chưa biết có tồn tại vô hạn các số tự nhiên n mà tổng các ước số của n (không tính n) bằng n hay không. Các số có tính chất này được gọi là các số hoàn hảo. Cụ thể, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, $56=1+2+4+7+14+28$. Tổng các ước số của n được kí hiệu là $\sigma(n)$. Do đó một số tự nhiên là hoàn hảo khi và chỉ khi $\sigma(n)=2n$.

1. Một số tính chất của số hoàn hảo

Định lí 1.1 (Euclide-Euler). Số nguyên dương chẵn n là số hoàn hảo nếu và chỉ nếu $n=2^{m-1}\left(2^m-1\right)$, trong đó m là số nguyên dương sao cho 2^m-1 là số nguyên tố.

Định lí 1.2 (Euler). Nếu n là số hoàn hảo lẻ thì n phải có dạng $n=p^{4s+1}m^2$, với p là số nguyên tố dạng $4k+1$ và m là số nguyên dương không chia hết cho p.

Định lí 1.3 (Cataldi-Fermat). Nếu 2^m-1 là số nguyên tố thì m là số nguyên tố.

Định lí 1.4. Nếu $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ là phép phân tích nhân tử của n thành các số nguyên tố, thì

$$\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

Định lí 1.5. Nếu n là một số hoàn hảo lẻ, thì $n=p^{\alpha}q_1^{2\beta_1}q_2^{2\beta_2}\cdots q_r^{2\beta_r}$, với $\alpha, \beta_r\in\mathbb{Z}^+; p, q_1, \ldots, q_r$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt và $p\equiv\alpha\equiv 1 \pmod 4$.

Hệ quả 1.6. Mọi số hoàn hảo chẵn cho bởi công thức $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$, với p và 2^p-1 là các số nguyên tố.

Hệ quả 1.7. Nếu n là số hoàn hảo thì $\sum_{d|n}\frac{1}{d}=2$, trong đó d là các ước dương của n không kể 1 và chính n.

Từ định lí 1.1 suy ra việc tìm tất cả các số hoàn hảo chẵn tương đương với việc tìm tất cả các số *Mersenne* (là các số nguyên tố có dạng $M_n=2^n-1, n\in\mathbb{N}, n\geq 1$). Các định lí và hệ quả trên có thể chứng minh khá ngắn gọn dựa vào định nghĩa số hoàn hảo, định lí cơ bản của số học và các tính chất của hàm $\sigma(n)$.

Tính đến nay, người ta đã tìm ra được 48 số hoàn hảo, tất cả chúng đều là số chẵn và vẫn chưa biết có tồn tại số hoàn hảo lẻ hay không. Năm 1993, R. P. Brent, G. L. Cohen và H. J. J. te Riele trong bài báo của mình đã chứng minh được rằng nếu tồn tại các số hoàn hảo lẻ n, thì nó phải là $n > 10^{300}$. Dưới đây là một số ví dụ khai thác từ các tính chất của số hoàn hảo nêu trên.

2. Các ví dụ

Thí dụ 2.1. *Chứng minh rằng nếu n là một số hoàn hảo chẵn thì số $8n+1$ là số chính phương.*

Lời giải. Vì n là số hoàn hảo chẵn, nên ta có $n = 2^{k-1}M_k = \frac{2^k}{2}\left(2^k - 1\right) = \frac{m(m+1)}{2}$, trong đó $m = 2^k - 1$. Khi đó

$$8n+1 = 4m(m+1)+1 = (2m+1)^2.$$

Thí dụ 2.2. *Chứng minh rằng mọi số hoàn hảo lẻ có ít nhất ba nhân tử nguyên tố phân biệt.*

Lời giải. Giả sử tồn tại một số hoàn hảo lẻ n mà không có ít nhất ba nhân tử nguyên tố phân biệt. Trong trường hợp này n hoặc có dạng $n = p^k$, với p là số nguyên tố ($p \geq 3$) và k là một số nguyên dương; hoặc có dạng $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$, với p_1, p_2 là các số nguyên tố ($3 \leq p_1 < p_2$) và k_1, k_2 là các số nguyên dương.

Do đó, nếu $n = p^k$ thì $\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^k$. Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $1 + p + p^2 + \cdots + p^k < 2p^k = 2n$. Từ đây suy ra $\sigma(n) < 2n$, vô lí vì theo giả thiết n là một số hoàn hảo.

Nếu $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ ta có $\sigma(n) = \sigma\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\right)$ $= \sigma\left(p_1^{k_1}\right)\sigma\left(p_2^{k_2}\right)$, vì $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}$ là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó,

$$\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{k_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{k_2}\right)$$

$$= p_1^{k_1}\left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^{k_1}}\right)p_2^{k_2}\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_2^{k_2}}\right)$$

$$< p_1^{k_1}p_2^{k_2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^m}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_2^m} = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq p_1^{k_1}p_2^{k_2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{8}p_1^{k_1}p_2^{k_2} < 2p_1^{k_1}p_2^{k_2} = 2n.$$

Do đó $\sigma(n) < 2n$, vô lí vì n là một số hoàn hảo.

Thí dụ 2.3. *Cho a, n là các số nguyên dương sao cho a^n là một số hoàn hảo. Chứng minh rằng $a^{\frac{n}{\mu}} > \frac{\mu}{2}$, trong đó μ kí hiệu là số các ước nguyên tố phân biệt của a^n.*

Lời giải. Ta biết rằng với mọi số hoàn hảo m thì đều có: $\sum_{d|m}\frac{1}{d} = 2$. Do đó, ta có $\sum_{d|a^n}\frac{1}{d} = 2$.

Giả sử $a^n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_\mu^{k_\mu}$ là phân tích nguyên tố duy nhất của số a^n. Rõ ràng là

$$\frac{1}{p_1^{k_1}} + \frac{1}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{1}{p_\mu^{k_\mu}} < 2. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức trung bình nhân – trung bình điều hòa suy ra được

$$\sqrt[\mu]{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_\mu^{k_\mu}} \geq \frac{\mu}{\frac{1}{p_1^{k_1}} + \frac{1}{p_2^{k_2}} + \cdots \frac{1}{p_\mu^{k_\mu}}},$$

hay $\frac{1}{p_1^{k_1}} + \frac{1}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{1}{p_\mu^{k_\mu}} \geq \frac{\mu}{\sqrt[\mu]{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_\mu^{k_\mu}}}$.

Do đó $\frac{1}{p_1^{k_1}} + \frac{1}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{1}{p_\mu^{k_\mu}} \geq \frac{\mu}{a^{\frac{n}{\mu}}}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2 > \frac{\mu}{a^{\frac{n}{\mu}}} \Leftrightarrow a^{\frac{n}{\mu}} > \frac{\mu}{2}$.

Thí dụ 2.4. *Cho n là một số hoàn hảo. Chứng minh rằng:*

a) *Nếu số hoàn hảo lớn hơn 6 chia hết cho 3, thì nó cũng chia hết cho 9.*

b) *Nếu số hoàn hảo lớn hơn 28 chia hết cho 7, thì nó cũng chia hết cho 49.*

Lời giải. Với số nguyên dương n, kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng của tất cả các ước dương của n. Vì σ là hàm nhân tính, nên nếu a và b là nguyên tố cùng nhau, thì $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$. Để ý rằng n là số hoàn hảo nếu và chỉ nếu

$\sigma(n)=2n$, $\sigma(n)\geq n$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=1$.

Giả sử $p\in\{3,7\}$ và n là số hoàn hảo chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2. Ta viết $n=2^a pm$ với các số nguyên a và m sao cho $a\geq 0$ và ƯCLN$(m,2p)=1$. Khi đó

$$2^{a+1}pm=2n=\sigma(n)=\sigma(2^a)\sigma(p)\sigma(m)$$
$$=(2^{a+1}-1)(p+1)\sigma(m).$$

Bởi vì $p+1$ là một lũy thừa của 2, ta có $2^{a+1}\geq p+1$. Do đó,

$$2^{a+1}pm=(2^{a+1}-1)(p+1)\sigma(m)$$
$$\geq\left(2^{a+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{a+1}}\right)\right)(p+1)m$$
$$\geq 2^{a+1}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)(p+1)m=2^{a+1}pm,$$

trong đó đẳng thức xảy ra chỉ nếu $\sigma(m)=m$ (tức là $m=1$) và $2^{a+1}=p+1$. Nếu $p=3$, thì ta tìm được $(m,a)=(1,1)$ và $n=2^1\cdot 3\cdot 1=6$. Nếu $p=7$, thì ta tìm được $(m,a)=(1,2)$ và $n=2^2\cdot 7\cdot 1=28$. Do đó, nếu số hoàn hảo lớn hơn 6 (tương ứng 28) mà chia hết cho 3 (tương ứng 7), thì nó cũng chia hết cho 9 (tương ứng 49).

Thí dụ 2.5. *Một số nguyên được gọi là bình phương - tự do nếu nó không chia hết cho một bình phương của bất kì số nguyên tố.*

a) *Tìm tất cả các số nguyên bình phương - tự do mà là số hoàn hảo.*

b) *Chứng minh rằng không có số chính phương là số hoàn hảo.*

Lời giải. Để ý rằng nếu $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, thì tổng các ước dương của n là $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{\alpha_i}p_i^j\right)$, trong đó $p_1<p_2<\cdots<p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ là các số nguyên dương.

a) Giả sử n là một số hoàn hảo bình phương - tự do. Trong trường hợp này, $n=p_1p_2\cdots p_k$ với các số nguyên tố nào đó $p_1<p_2<\cdots<p_k$ và $2p_1p_2\cdots p_k=(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$.

- Nếu $p_1\neq 2$ thì $p_1+1, p_2+1, \ldots, p_k+1$ đều là các số chẵn, trong khi $p_1p_2\cdots p_k$ là một số lẻ. Ta kết luận $k=1$ và $2p_1=p_1+1$, điều này là không thể.

- Nếu $p_1=2$ thì $p_1+1=3=p_2$ và nếu $k>2$, ta có $p_3p_4\cdots p_k=(p_3+1)(p_4+1)\cdots(p_k+1)$,

Điều này lại không thể xảy ra vì cả hai vế có tính chẵn lẻ khác nhau. Do đó $k=2$ và $n=6$. Vậy chỉ có duy nhất số hoàn hảo bình phương - tự do là 6.

b) Giả sử n là một số chính phương. Khi đó tồn tại các số nguyên tố $p_1<p_2<\cdots<p_k$ và các số nguyên dương $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sao cho $n=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}$.

Bởi vì $\sum_{j=0}^{2\alpha_i}p_i^j$ là một số lẻ, với $i=1,2,\ldots,k$, nên tổng $\sigma(n)$ các ước dương của n là số lẻ trong khi $2n$ là số chẵn. Khi đó n không thể là một số hoàn hảo.

Thí dụ 2.6. *Cho p và q là các số nguyên tố khác nhau.*

a) *Tìm các số hoàn hảo nếu biết dạng phân tích tiêu chuẩn của nó là một trong các dạng sau:*

$$n=pq;\ n=p^2q.$$

b) *Chứng minh rằng không tồn tại số hoàn hảo mà phân tích tiêu chuẩn của nó là một trong các dạng sau:* $n=p^\alpha$; $n=p^3q$.

Lời giải

a) • Với $n=pq$ ta có $\sigma(n)=(p+1)(q+1)=2pq$ nên suy ra $(p-1)(q-1)=2$, từ đó ta có $n=6$.

• Với $n=p^2q$ ta có $\sigma(n)=(p^2+p+1)(q+1)=2p^2q$ nên suy ra $(q-1)(p^2-p-1)=2(p+1)$. Nhưng ta thấy ƯCLN$(p+1,p^2-p-1)=1$ cho nên $p^2-p-1=1$ hoặc $p^2-p-1=2$. Nếu $p^2-p-1=1$ thì $p=2$, khi đó $q=7$, do đó $n=2^2\cdot 7=28$. Rõ ràng $n=28$ là một số hoàn hảo. Nếu $p^2-p-1=2$ thì p là ước của 3, nhưng 3

không là nghiệm của phương trình $p^2-p-3=0$. Vậy chỉ có $n=28$.

b) Ta chứng minh bằng phản chứng.

• Với $n=p^\alpha$. Giả sử $n=p^\alpha$ là một số hoàn hảo thì $\sigma(n)=2n$, thế thì $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}=2p^\alpha$, suy ra $p^{\alpha+1}-p^\alpha=p^\alpha-1$. Đẳng thức này không thể xảy ra với p là số nguyên tố, bởi vì $p\ge 2$ ta có $p-1\ge 1$ cho nên $p^{\alpha+1}-p^\alpha=p^\alpha(p-1)\ge p^\alpha>p^\alpha-1$.

• Với $n=p^3q$. Giả sử $n=p^3q$ là một số hoàn hảo thì $(p^3+p^2+p+1)(q+1)=2p^3q$, suy ra $(p^3-p^2-p-1)(q-1)=2(p^2+p+1)$. Nhưng ƯCLN$(p^3-p^2-p-1,p^2+p+1)=1$ nên hoặc $p^3-p^2-p-1=1$ hoặc $p^3-p^2-p-1=2$, nghĩa là $p^3-p^2-p-2=0$ hoặc $p^3-p^2-p-3=0$.

Phương trình $p^3-p^2-p-2=0$ (1) có nghiệm nguyên p thì $p|2$. Do p là số nguyên tố nên ta có $p=2$. Với $p=2$ (là nghiệm của (1)) suy ra $q=15$. Khi đó $n=2^3.15=120$, không là số hoàn hảo. Dễ thấy phương trình $p^3-p^2-p-3=0$ cũng không có nghiệm nguyên tố. Do đó không thể có các số hoàn hảo dạng $n=p^3q$.

Thí dụ 2.7. *Chứng minh rằng nếu $n=2^{m-1}(2^m-1)$ là một số hoàn hảo chẵn, thì*

$$n=1^3+3^3+\cdots+\left(2^{\frac{m+1}{2}}-1\right)^3.$$

Lời giải. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh được tổng $\sum_{i=1}^{m} i^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$. Giả sử $k=2^{\frac{m-1}{2}}$, thế thì ta có $1^3+3^3+\cdots+(2k-1)^3$

$$=\left(1^3+2^3+\cdots+(2k)^3\right)-\left(2^3+4^3+\cdots+(2k)^3\right)$$

$$=\frac{(2k)^2(2k+1)^2}{4}-2^3\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$=k^2(2k+1)^2-2k^2(k+1)^2$$

$$=k^2\left(4k^2+4k+1-2k^2-4k-2\right)=k^2\left(2k^2-1\right).$$

Thay giá trị của k vào đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

3. Các bài toán dành cho bạn đọc

1. Một số n được gọi là số *tam giác* nếu tồn tại số $k\in\mathbb{N}$ sao cho $n=\frac{k(k+1)}{2}$. Chứng minh rằng mọi số hoàn hảo chẵn là số tam giác.

2. Tìm tất cả các số tự nhiên n có tính chất n và $\sigma(\sigma(n))$ là các số hoàn hảo, hoặc ngược lại chứng tỏ không tồn tại số n như thế.

3. Chứng tỏ rằng một số hoàn hảo có k nhân tử nguyên tố phân biệt thì có ít nhất một nhân tử nguyên tố không vượt quá k.

4. Giả sử $q_1,\ldots,q_k$ là các số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{(q_1+1)(q_2+1)\cdots(q_k+1)}{q_1q_2\cdots q_k}\le 2<\frac{q_1q_2\cdots q_k}{(q_1-1)(q_2-1)\cdots(q_k-1)}$$

là điều kiện cần để $n=\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$ là một số hoàn hảo.

5. a) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lẻ, thì lũy thừa p^k không là số hoàn hảo.

b) Chứng minh rằng số có dạng $3^i\cdot 5^j$ không là số hoàn hảo.

6. Chứng minh rằng nếu $n=q^e a_1^2a_2^2\cdots a_n^2$, với q, a_i là các số nguyên tố phân biệt, $q, e\equiv 1 \pmod 4$ và nếu 3 chia hết n, thì n không là số hoàn hảo lẻ.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Cửu Huy (2015), *Lí thuyết chia hết và đồng dư: Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học phổ thông*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[2]. Malik Talbi (2014), *Saudi Arabia Mathematical Competitions*, Riyadl.

[3]. Michael Th. Rassias (2011), *Problem - Solving and Selected Topics in Number Theory*, Springer.

[4]. Jean-Marie De Koninck, Armel Mercier (2007), *1001 Problems in Classical Number Theory*, American Mathematical Society.

[5]. Jonathan Pearlaman (2005), *Necessary Conditions For the Non-existence Old Perfect.*

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2016 – MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT*)

Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2016 đã được tổ chức trong các ngày 6, 7 và 8/ 1/ 2016, cho 12 môn học (ngày 08/01 là ngày thi thực hành cho các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học). Tham dự kỳ thi, ở môn Toán có 464 học sinh (nhiều hơn 4 học sinh so với năm 2015) thuộc 69 đơn vị dự thi; trong đó, có 4 học sinh đang học lớp 10 (em *Phạm Nam Khánh*, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, TP. Hà Nội; em *Tạ Anh Dũng*, trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ; em *Huỳnh Bách Khoa* và em *Nguyễn Trường Hải*, trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, tỉnh Bình Thuận).

1. Đề thi

Ngày thi thứ nhất (6/1/2016)

Bài 1 (5 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x - y + z^2 = 3 \\ x^2 - y^2 - 2z = -1 \\ 6x^2 - 3y^2 - y - 2z^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Bài 2 (5 *điểm*). **a)** Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+n+1)$, với n = 1, 2, … . Chứng minh chỉ có hữu hạn số n sao cho $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.

b) Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = \ln(2n^2+1) + \ln(n^2+n+1)$, với n = 1, 2, … . Chứng minh tồn tại vô hạn số n sao cho $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$. Trong đó $\{x\}$ là ký hiệu phần lẻ của số thực x: $\{x\} = x - [x]$.

Bài 3 (5 *điểm*). Cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC.

a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. EF cắt AO và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN đi qua một điểm cố định.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại E, F cắt nhau tại T. Chứng minh T thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4 (5 *điểm*). Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là *ấn tượng* nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau;

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng cây ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

Ngày thi thứ hai (7/1/2016)

Bài 5 (6 *điểm*). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

i) $f(1) = 2016$;

ii) $f(x + y + f(y)) = f(x) + ay$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6 (7 *điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (với tâm O) có các góc ở đỉnh B và C đều nhọn. Lấy điểm M trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho AM không vuông góc với BC. AM cắt trung trực của BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOT cắt (O) tại N ($N \neq A$).

a) Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. AI, MI, NI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. Gọi P và Q tương ứng là giao điểm của DF với AM và DE với AN. Đường tròn đi qua P và tiếp xúc với AD tại I cắt DF tại H ($H \neq D$), đường tròn đi qua Q và tiếp xúc với AD tại I cắt DE tại K ($K \neq D$). Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác GHK tiếp xúc với BC.

Bài 7 (7 *điểm*). Số nguyên dương n được gọi là số hoàn chỉnh nếu n bằng tổng các ước số dương của nó (không kể chính nó).

a) Chứng minh rằng nếu n là số hoàn chỉnh lẻ thì n có dạng $n = p^s m^2$, trong đó p là số nguyên tố có dạng $4k + 1$, s là số nguyên dương có dạng $4h + 1$ và m là số nguyên dương không chia hết cho p.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho $n - 1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ đều là các số hoàn chỉnh.

2. Kết quả chấm thi và Giải thưởng

Điểm số cao nhất của kì thi là 37/40; có 1 thí sinh đạt điểm số này (em *Vũ Đức Tài*, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định).

Chiểu theo Quy chế thi chọn HSG QG THPT hiện hành và căn cứ kết quả chấm thi, Lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- ***Giải Nhất***: từ 32 điểm đến 40 điểm;
- ***Giải Nhì***: từ 27 điểm đến 31,75 điểm;
- ***Giải Ba***: từ 22 điểm đến 26,75 điểm;
- ***Giải Khuyến khích***: từ 18 điểm đến 21,75 điểm.

Theo đó, có **232** thí sinh (chiếm 50% tổng số học sinh dự thi) được trao giải; gồm **9** thí sinh được trao Giải Nhất (gồm **6** học sinh lớp 12, **2** học sinh lớp 11 và **1** học sinh lớp 10), **49** thí sinh được trao Giải Nhì, **84** thí sinh được trao Giải Ba và **90** thí sinh được trao Giải Khuyến khích.

Trong số 69 đơn vị có học sinh dự thi, có 10 đơn vị có 100% số học sinh dự thi đạt giải và có 13 đơn vị không có học sinh đạt giải.

Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao giải.

• ***Giải Nhất***: *Lê Phước Định* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Phạm Nam Khánh*, *Đào Vũ Quang* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); *Vũ Đức Tài* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Phan Duy Phúc* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Cao Minh Hiếu* (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Lê Quang Dũng*, *Lê Khả Hải* (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Tạ Hà Nguyên* (THPT Chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**).

• ***Giải Nhì***: *Lê Thành Long* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); *Lê Nhật Hoàng* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Nguyễn Hữu Minh Thông* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Nguyễn Đình Tuấn Anh*, *Nguyễn Trung Hiếu*, *Đinh Thành Hưng*, *Lương Quốc Trung* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**), *Trần Huy Quang* (THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); *Nguyễn Như Hoàng*, *Trần Đình Hùng*, *Võ Duy Khánh*, *Trần Đức Mạnh*, *Lê Văn Trường Nhật* (THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); *Vũ Quang Minh* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Nguyễn Khánh Hưng* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Trương Quang Khánh* (THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); *Nguyễn Hùng Cường*, *Trần Thị Hà*, *Trần Thị Nhài* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Nguyễn Cảnh Hoàng*, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, *Võ Hải Thiện*, *Nguyễn Minh Tiến*, *Nguyễn Anh Tú*, *Nguyễn Hà Trang*, *Ngô Thị Trà* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Phạm Minh Hùng*, *Nguyễn Quang Khải* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Hồ Anh Tiến* (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Trương Công Cường* (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); *Trần Lưu Thái Phong* (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Trần Duy Hoàng*, *Nguyễn Văn Huy* (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Hoàng Anh Dũng*, *Lê Việt Hoàng*, *Nguyễn Tiến Tài*, *Nguyễn Nhật Tân*, *Lê Công Thành*, *Nguyễn Ngọc Vinh* (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Nguyễn Lâm Tùng* (THPT chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); *Đỗ Văn Quyết* (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Trần Minh Khoa*, *Phan Minh Nghĩa* (THPT chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**); *Vũ Hùng*, *Phạm Nguyễn Mạnh* (PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Giang Trung Hiếu*, *Nguyễn Doãn Thanh Tùng* (THPT chuyên ĐHSP, **ĐHSP Hà Nội**); *Lê Ngọc Trường Giang*, *Đặng Lâm San* (THPT Chuyên, **ĐH Vinh**).

• ***Giải Ba***: *Hoàng Hữu Quốc Huy*, *Phạm Thị Hồng Nhung*, *Nguyễn Quang Thắng* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); *Thân Minh Duy*, *Nguyễn Thị Huyền*, *Lê Trung Thành* (THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**); *Nguyễn Đức Tuân* (THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**); *Phạm Lương Hào*, *Đặng Hồ Trung* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Bùi Văn Bình*, *Trương Văn Hoằng* (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); *Huỳnh Bách Khoa* (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); *Nguyễn Kinh Luân* (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**); *Đinh Nguyễn Hoàng Kim* (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); *Phạm Tiến Khoa* (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Vũ Tuấn Hiền* (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**), *Lê Bá Trường Giang* (THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); *Phan Nhật Duy*, *Nguyễn Văn Nghĩa*, *Nguyễn Thanh Nhã*, *Nguyễn Văn Thế*, *Nguyễn Duy Tuấn* (THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); *Khổng Tiến Đạt*, *Nguyễn Tuấn Hiệp*, *Nguyễn Việt Hoàng* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Đỗ Tấn Dũng*, *Dương Minh Hiếu*, *Nguyễn Huy Hoàng*, *Vũ Hồng Quân* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Nguyễn Thùy Trang* (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); *Nguyễn Mạnh Cường*, *Trần Văn Hiệp*, *Trần Thị Thu Huệ*, *Chu Minh Huy*, *Trần Huy Phan*, *Lê Việt Tuấn*, *Đào Công Tú* (THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); *Lê Thị Thảo* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**); *Đào Sơn Trà* (THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**); *Phạm Quang Huy* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Trần Nguyên Lân*, *Nguyễn Trung Phúc* (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Nguyễn Đức Minh* (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); *Nguyễn Thành Đạt*, *Nguyễn Hải Đăng*, *Hứa Hà Phương*, *Phạm Quý Vượng* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Phan Xuân Thành Lâm*, *Trần Ngọc Tín* (THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); *Bùi Quang Dũng*, *Trần Khánh Linh*, *Nguyễn Minh Ngọc*, *Hoàng Thanh Việt* (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Nguyễn*

Công Thảo (THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**); *Lê Kha Trí* (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Đoàn Thị Hiến, Trịnh Minh Nhật* (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Lê Thành Đạt* (THPT chuyên Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh**); *Phạm Thành Nam* (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Lê Thúy Diệu, Nguyễn Đình Lương* (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Trần Minh Hiển* (THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**); *Trần Cao Nhiệm* (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**); *Nguyễn Khắc Việt Anh, Nguyễn Việt Hoàng, Nguyễn Hồng Ngọc, Nguyễn Quốc Trung* (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Vũ Hồng Quân* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); *Hoàng Trung Dũng, Trần Quang Huy, Hoàng Đức Kiên, Trần Minh Tiến, Trịnh Huy Vũ* (THPT chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**); *Nguyễn Đức Duy, Hoàng Đình Hiếu, Nguyễn Phan Quốc Khang, Đoàn Minh Khôi, Huỳnh Phạm Minh Nguyên, Nguyễn Võ Thanh Thiện* (PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Tạ Khánh Hà, Trần Quốc Nam, Hoàng Anh Quân* (THPT chuyên ĐHSP, **ĐHSP Hà Nội**); *Trần Quang Huy, Phan Nguyên Khôi* (THPT Chuyên, **ĐH Vinh**).

• ***Giải Khuyến khích***: *Nguyễn Bá Nguyên, Nguyễn Phước Thắng* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); *Nguyễn Thành Lâm, Thân Thị Quỳnh* (THPT Chuyên, **Bắc Giang**); *Trần Minh Danh, Lý Hoàng Thiên* (THPT Chuyên, **Bạc Liêu**); *Nguyễn Thanh Hiếu, Nguyễn Văn Tâm, Mẫn Bá Tuấn* (THPT Chuyên, **Bắc Ninh**); *Nguyễn Xuân Quang* (THPT Chuyên, **Bến Tre**); *Trần Hiệp Nguyên* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Nguyễn Gia Bảo* (THPT chuyên Hùng Vương, **Bình Dương**); *Bùi Công Minh, Lê Sỹ Quan* (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); *Lâm Phùng Phước Vinh* (THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**); *Lê Vũ Nam Anh, Phạm Nguyễn Thiện Huy, Nguyễn Minh Quân, Huỳnh Ngô Nghi Truyền* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Nguyễn Thành Phát* (THPT chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk**); *Nguyễn Phi Hiếu, Lưu Hoàng Huy, Nguyễn Công Phúc* (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); *Huỳnh Trung Tín* (THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, **Đồng Tháp**); *Nguyễn Quốc Vũ Hoàng, Đinh Thành Nam* (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); *Đoàn Tuấn Anh, Nguyễn Đức Huy* (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Khuất Duy Hồng, Đinh Xuân Tùng* (THPT Sơn Tây, **Hà Nội**); *Trương Minh Quang, Đào Minh Quân* (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Hoàng Hiệp, Nguyễn Trung Kiên, Dương Minh Trung* (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Khương Anh Tú* (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); *Trần Hoàng Thịnh* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**); *Đặng Thế Hùng* (THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**); *Đào Huy Hải, Nông Ngọc Quân* (THPT chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); *Trần Việt Huy, Phạm Nhật Huy, Nguyễn Đắc Thành* (THPT chuyên Là Cai, **Lào Cai**); *Hoàng Lữ Đức Chính* (THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**); *Nguyễn Giáp Phương Duy* (THPT Hậu Nghĩa, **Long An**); *Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Hồng Đăng, Đặng Thị Hồng Vân* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Đặng Ngọc Anh, Hà Quý Anh* (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); *Nguyễn Đức Thuận* (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Lê Bảo Đại, Nguyễn Trần Hậu, Nguyễn Thị Trúc Như* (THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); *Bùi Văn Tuấn* (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Trương Trần Tấn Phước* (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); *Nguyễn Lê Duy, Đoàn Cao Khả* (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Trần Đức Hiếu, Đỗ Gia Khiêm, Lê Quang Thắng* (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Trương Nhất Nguyên* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); *Nguyễn Thành Chung* (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Ngô Thu Thảo* (THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**); *Võ Thành Đạt, Nguyễn Hồ Minh Phước, Võ Bá Minh Thắng, Lê Viết Minh Thông* (THPT chuyên Quốc học, **Thừa Thiên - Huế**); *Nguyễn Minh Thông* (THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**); *Bùi Mạnh Khang, Nguyễn Doãn Hoàng Lâm, Đặng Nhĩ, Đặng Vũ Quang Thịnh* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**), *Võ Thành Đạt* (THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**); *Phạm Tấn Kha* (THPT chuyên Nguyễn Thiện Thành, **Trà Vinh**); *Nguyễn Hà Duy* (THPT chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); *Trần Nguyễn Tuấn Vỹ* (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**); *Bùi Tiến Dũng, Nguyễn Trường Giang* (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Nguyễn Xuân Trường* (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); *Nguyễn Thọ Khang* (THPT chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**); *Nguyễn Khắc Duy, Võ Hiển Thông* (PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Nguyễn Viết Hoàng, Phạm Ngọc Khánh, Vũ Đức Văn* (THPT chuyên ĐHSP, **ĐHSP Hà Nội**); *Phan Bá Hoàng, Hoàng Nhật Minh, Quách Thị Phương Thảo* (THPT Chuyên, **ĐH Vinh**); *Nghiêm Dương Luân* (Trường Trung học Thực hành - **ĐHSP TP. Hồ Chí Minh**).

3. Tuyển chọn học sinh tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2016 (IMO 2016)

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành và kết quả kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Toán, Bộ GD&ĐT quyết định triệu tập học sinh *Vũ Xuân Trung* (lớp 12 trường THPT chuyên Thái Bình, Tỉnh Thái Bình, thành viên đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2015) và 49 học sinh đạt từ 27,50 điểm trở lên trong kỳ thi vừa nêu tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi IMO 2016, được tổ chức trong các ngày 24 và 25/3/2016 tại Thủ đô Hà Nội.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 6

Problem: *Let* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ *be a polynomial with real coefficients satisfying* $a_n\ge a_{n-1}\ge\cdots\ge a_0>0$. *Prove that every solution* $z\in\mathbb{C}$ *of* f *satisfies* $|z|\le 1$.

Remark. The above result is called the Enestrom-Kakeya theorem.

Solution. Suppose that there exists a solution $z\in\mathbb{C}$ of f such that $|z|>1$. Since $f(z)=0$, we have $f(z)(z-1)=0$. Hence

$$(a_nz^{n+1}+a_{n-1}z^n+\cdots+a_0z)-(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0)=0$$

or equivalently,

$$a_nz^{n+1}=(a_n-a_{n-1})z^n+(a_{n-1}-a_{n-2})z^{n-1}+\cdots+(a_1-a_0)z+a_0.$$

Therefore

$$|a_nz^{n+1}|\le|(a_n-a_{n-1})z^n|+|(a_{n-1}-a_{n-2})z^{n-1}|+\cdots+|(a_1-a_0)z|+|a_0|$$

$$\le(|(a_n-a_{n-1})|+|(a_{n-1}-a_{n-2})|+\cdots+|(a_1-a_0)|+|a_0|)|z|^n=|a_nz|^n$$

(for the second inequality we use the contradiction assumption that $|z|>1$ and for the last equality we use the fact that $a_n\ge a_{n-1}\ge\cdots\ge a_0>0$). But the obtained inequality $|a_nz^{n+1}|\le|a_nz^n|$ cannot hold if $|z|>1$ and $a_n>0$. This is a contradiction. (q.e.d.)

TỪ VỰNG

equivalently : một cách tương đương
inequality : bất đẳng thức
equality : đẳng thức
fact : tính chất

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Hạn gửi bài dịch: *Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.*

Bài toán. *Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng tổng các căn bậc n của đơn vị bằng 0.*

Lời giải 1. Gọi $z_1,...,z_n$ là tất cả các căn bậc n của đơn vị, nghĩa là $z_1,...,z_n$ là các nghiệm phức của phương trình $z^n-1=0$. Vì vậy, ta có thể phân tích thành nhân tử $z^n-1=(z-z_1)...(z-z_n)$ (1). Khai triển vế phải của (1) ta thấy hệ số của z^{n-1} ở vế phải của (1) bằng $(-1)(z_1+...+z_n)$. Mặt khác, hệ số của z^{n-1} ở vế trái của (1) bằng 0. Do đó $z_1+z_2...+z_n=0$ (điều phải chứng minh).

Lời giải 2. Giả sử $z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k=1,...,n$.

Ta biết rằng chúng là tất cả các căn bậc n của đơn vị, lại có $z_1.z_1=z_2, z_1.z_2=z_3...,z_1.z_{n-1}=z_n$, $z_1.z_n=z_1$. Từ đó $z_1(z_1+z_2...+z_n)=(z_1+z_2...+z_n)$. Từ $z_1\ne 1$ ta có $z_1+z_2...+z_n=0$ (điều phải chứng minh).

Nhận xét. Các bạn sau có lời dịch tốt, gửi bài sớm về Tòa soạn: **Hà Nội:** *Nguyễn Hải Yến*, 12A1, THPT Đông Quan, Phú Xuyên, *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Lào Cai:** *Phạm Thị Hà*, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hưng Yên:** *Vũ Minh Thành*, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Hà Gia Bảo*, 10A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò, **Gia Lai:** *Trần Đức Vinh*, 11A1, THPT Mạc Đĩnh Chi, Chư Păh.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: CHỈ CÓ 3 TIẾP TUYẾN CHUNG

(*Đề đăng trên TH&TT số* 461, *tháng 11 năm* 2015)

Phân tích. $I_1I_2 = 3\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 6$ nên (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau, do đó chúng phải có 4 tiếp tuyến chung. Sai lầm ở lời giải của bạn *Yên* là ở TH2 đã chọn ngay $b = 4$ mà chưa biết b có khác 0 hay không. Sai lầm ở lời giải của bạn *Phong* là mới xét trường hợp tiếp tuyến có hệ số góc, mà chưa xét trường hợp tiếp tuyến không có hệ số góc (tiếp tuyến vuông góc với trục hoành). Có rất nhiều cách giải quyết bài toán này, sau đây là hai cách được cải tiến từ lời giải của bạn *Yên* và bạn *Phong*.

Lời giải đúng 1. (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1 = 3$; (C_2) tâm $I_2(-4;3)$, bán kính là $R_2 = 3$. Gọi tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) là $\Delta: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó

$$\begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4ac + c^2 = 9a^2 + 9b^2 \\ |-4a + 3b + c| = |2a + c| \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} 4a^2 + 4ac + c^2 = 9a^2 + 9b^2 \\ -4a + 3b + c = 2a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41a^2 - 4ac - c^2 = 0 \\ b = 2a \end{cases}$.

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$, mâu thuẫn với $a^2 + b^2 \neq 0$. Do đó $b \neq 0$. Chọn $b = 2$ thì $a = 1$ và $c^2 + 4c - 41 = 0$ $\Leftrightarrow c = -2 \pm 3\sqrt{5}$. Ta được hai tiếp tuyến chung là $x + 2y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

TH2: $\begin{cases} 4a^2 + 4ac + c^2 = 9a^2 + 9b^2 \\ -4a + 3b + c = -2a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ac + c^2 = 5a^2 + 9b^2 \\ 3b = 2a - 2c \end{cases}$.

- Nếu $b = 0$ thì $\begin{cases} a = c \\ 4ac + c^2 = 5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = c$. Có thể chọn $a = c = 1$, được tiếp tuyến chung $x + 1 = 0$.
- Nếu $b \neq 0$, có thể chọn $b = 4$ thì

$$\begin{cases} 4ac + c^2 = 5a^2 + 144 \\ a = 6 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(6+c)c + c^2 = 5(6+c)^2 + 144 \\ a = 6 + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36c + 324 = 0 \\ a = 6 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -9 \\ a = -3 \end{cases}.$$

Ta được tiếp tuyến chung $3x - 4y + 9 = 0$.

Vậy có 4 tiếp tuyến chung giữa (C_1) và (C_2) là

$$x + 1 = 0,\ x + 2y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0,\ 3x - 4y + 9 = 0.$$

Lời giải đúng 2. (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1 = 3$; (C_2) tâm $I_2(-4;3)$, bán kính là $R_2 = 3$.

- Xét tiếp tuyến chung Δ có dạng $\Delta: x = x_0$.

$$\Delta \text{ tiếp xúc } (C_1),(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2 - x_0|}{1} = 3 \\ \dfrac{|-4 - x_0|}{1} = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$. Vậy $x + 1 = 0$ là một tiếp tuyến chung.

- Xét tiếp tuyến chung có dạng $\Delta: y = kx + m$. Đến đây giải như của *Phong* được 3 tiếp tuyến chung nữa. Vậy có có 4 tiếp tuyến chung giữa (C_1) và (C_2).

Nhận xét: Khen ngợi các bạn sau đã phát hiện và phân tích đúng sai lầm: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; *Đinh Vân Anh*, 12A1. THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Bắc Ninh:** *Mai Tiến Thành*, 11A1, THPT Quế Võ số 1, Quế Võ. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân, Nguyễn Việt Đức*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; *Vũ Minh Thành*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Tô Minh Hiếu*, 12A1, THPT Trưng Vương, Văn Lâm. **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

KIHIVI

BÀI TOÁN "RỜI RẠC"

Bài toán. *Một đề thi Toán ở một trường THPT gồm 3 bài: Hình học, Đại số và Tổ hợp. Có 100 em tham gia kỳ thi. Kết quả cho thấy: 80 em giải được bài Hình, 70 em giải được bài Đại, 50 em giải được bài Tổ hợp, 60 em giải được cả hai bài Hình và Đại, 50 em giải được cả bài Hình và Tổ hợp, 40 em giải được bài Đại và bài Tổ hợp. Có 30 em giải được cả ba bài. Hỏi có bao nhiêu em giải được ít nhất một bài?*

Lời giải. Gọi A là tập hợp các học sinh giải được bài Hình, B là tập hợp các học sinh giải được bài Đại, C là tập hợp các học sinh giải được bài Tổ hợp. Ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 80 + 70 + 50 - 60 - 50 - 40 + 30 = 80.$$

Như vậy có 80 em giải được ít nhất một bài thi.

Các bạn có nhận xét gì về bài toán trên ?

PHẠM QUANG HÙNG

(*GV THPT chuyên Thái Bình*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 465 (3.2016)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: Cô giáo *Phan Hồng Anh*, Giáo viên toán Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam.

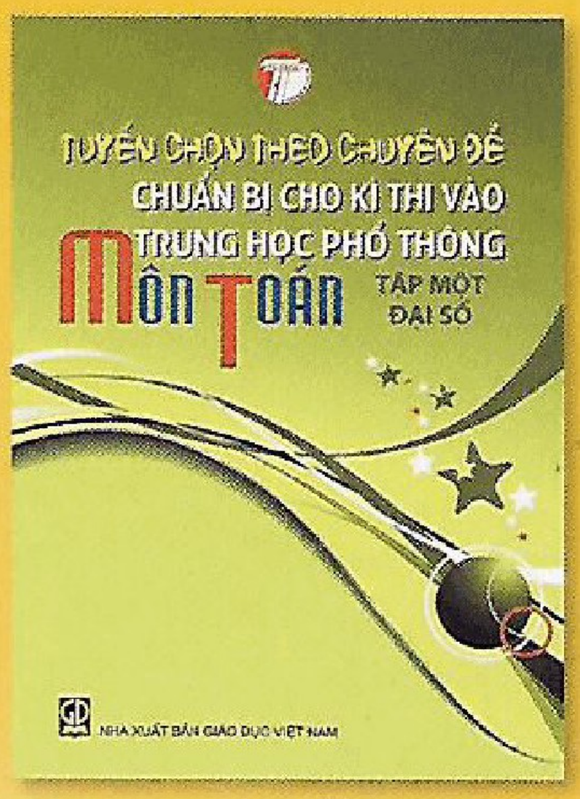
Trưởng ban biên tập: *ThS.* NGUYỄN ANH QUÂN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

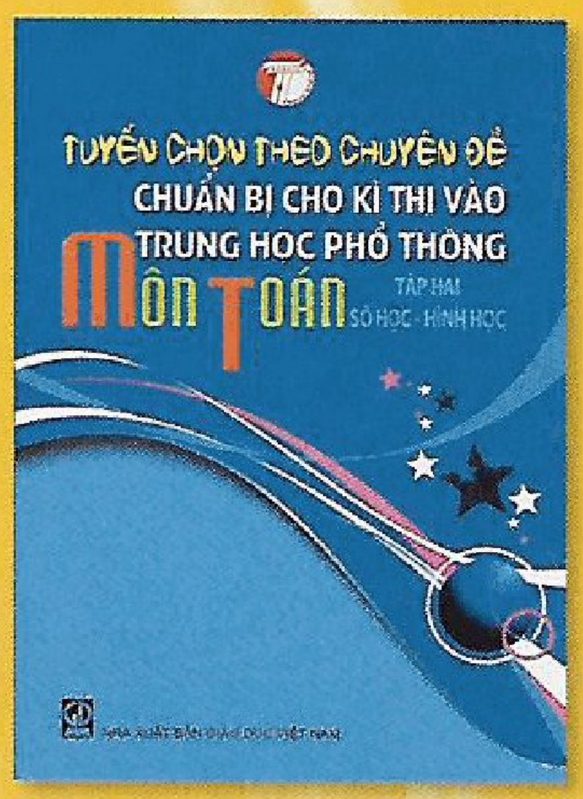
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.



200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng



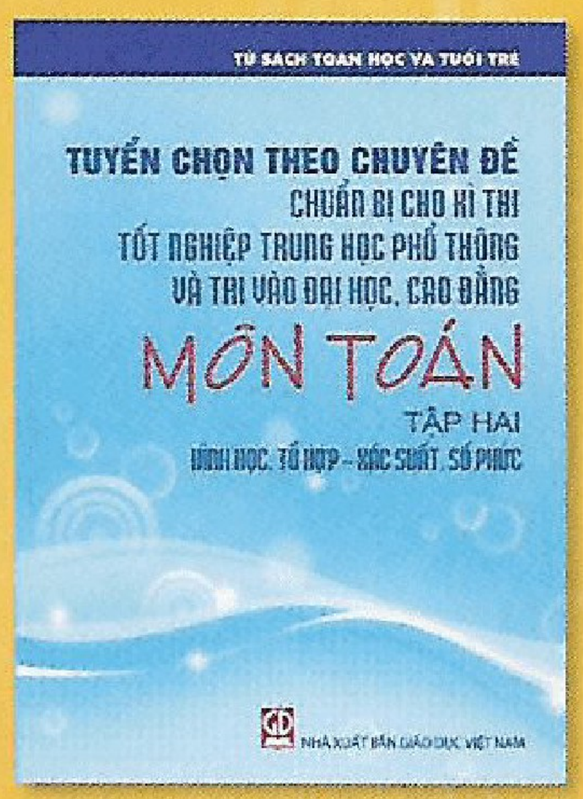
200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.

260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng



240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**
187B, Giảng Võ, Hà Nội
● ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606 ● Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu bộ sách

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ DÀNH CHO TIỂU HỌC VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sau bộ sách ***Các kì thi Toán Quốc tế*** *dành cho học sinh THCS và THPT* đã được các giáo viên và các bạn học sinh hào hứng đón nhận, chúng tôi giới thiệu tiếp bộ sách tương tự dành cho lứa tuổi nhỏ hơn, bộ sách ***Các kì thi Toán Quốc tế*** *dành cho học sinh Tiểu học và THCS*. Dự kiến bốn tập đầu của bộ sách này như sau:

Tập 1. ***International Kangaroo Mathematics Contest*** (IKMC) - Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo.

Tập 2. ***Bebras Computational Thinking Challenge*** (BCTC) - Thách thức tư duy tính toán Bebras.

Tập 3. ***International Mathematical Assessment for Schools*** (IMAS) - Kì thi đánh giá năng lực Toán học Quốc tế.

Tập 4. ***Math Olympiads for Elementary and Middle Schools*** (MOEMS) - Kì thi học sinh giỏi Toán Hoa Kì dành cho học sinh Tiểu học và THCS.

Việc tiếp cận với các kì thi quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn sẽ có tác động tích cực đến phong trào học tập nói chung. Bên cạnh đó, đây cũng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt hơn trong các kì thi học sinh giỏi mà các em có cơ hội tham dự. Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS.TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kì thi Toán quốc tế và khu vực.

Tập 1 của bộ sách giới thiệu Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo (International Kangaroo Mathematics Contest – IKMC) được tổ chức lần đầu tiên tại Pháp vào năm 1991. Đây là kì thi Toán học có số lượng thí sinh tham dự lớn nhất trên thế giới, thu hút trên 6 000 000 thí sinh đến từ khoảng 50 quốc gia mỗi năm. Kì thi là một hoạt động phi lợi nhuận, nhằm thúc đẩy phong trào dạy và học Toán theo xu hướng hội nhập quốc tế, tạo ra một sân chơi mở cho các em học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở. Trung tâm Nghiên cứu và Ứng dụng khoa học Giáo dục (CERA), Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội là đơn vị được Uỷ ban Kangaroo quốc tế chỉ định là điều phối quốc gia tại Việt Nam, đại diện phối hợp cùng Trung tâm Phát triển Tư duy và Kỹ năng IEG tổ chức Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo tại Việt Nam.

Liên hệ mua sách: **Phòng Kinh doanh - Công ty cổ phần Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội**

- **Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội**
- **Tel: 04.35121974 - 04.36210196 – Fax: 04.35121973 - 04.36210201**
- **E-mail: phathanh@xbgdhn.vn**

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT3M6

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2016

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng