TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2016 Số 464

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chúc Mừng Năm Mới

Chúc Mừng Năm Mới 2016

Mừng xuân Bính Thân

(*Bài thơ xướng*)

Phúc lộc trời ban được tuổi Thân
Ung dung chẳng quản lắm phong trần
Xuyên mây ấp ủ tình Sư phụ
Vượt núi bồi hồi nghĩa Đệ nhân
Luyện Toán – tư duy tìm hướng đúng
Tu nhân – hành động biết xa gần
Vui xuân vịnh cảnh "Tôn Hành Giả"
Tạo thế tung hoành "Cân đẩu vân".

TP. Vinh, ngày 31 tháng 12 năm 2015
ĐÀO TAM (*Đại học Vinh*)

Bài hoạ

Chúc mừng Đào Lão – bạn quen thân
Hơn bảy chục xuân trải bụi trần
Đức độ sáng trong tề lão tướng
Tài năng xuất chúng cỡ danh nhân
Giỏi suy, toán khó đưa về dễ
Khéo bước, đường xa bỗng hoá gần
Quyết chí thành tài, nên nghiệp lớn
Bay cao chẳng nệ phép "đằng vân".

TP. Hồ Chí Minh, ngày 13 tháng 1 năm 2016
NGUYỄN HUY ĐOAN (*Hà Nội*)

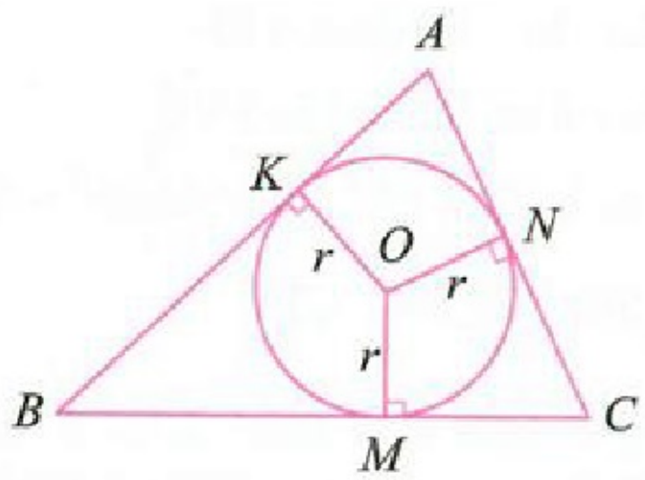
DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA TAM GIÁC

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD - ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Việc hình thành kỹ năng giải toán là rất khó, nhưng với môn hình học thì nhiều học sinh khi gặp một bài toán thường lúng túng không biết bắt đầu từ đâu, có học sinh còn né tránh. Đặc biệt là khả năng nhận ra các bài toán cùng dạng. Trong bài viết này chúng tôi muốn cùng bạn đọc tìm hiểu thêm về một ứng dụng của tính chất đường tròn nội tiếp tam giác.

Đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với các cạnh và có tâm là giao điểm của các đường phân giác trong. Giả sử ΔABC có đường tròn tâm O nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ tại các điểm K, M, N ta kí hiệu độ dài các đoạn thẳng như hình 1. Khi đó K, M, N là hình chiếu của O trên AB, CB, CA.



Hình 1

Theo tính chất tiếp tuyến ta có

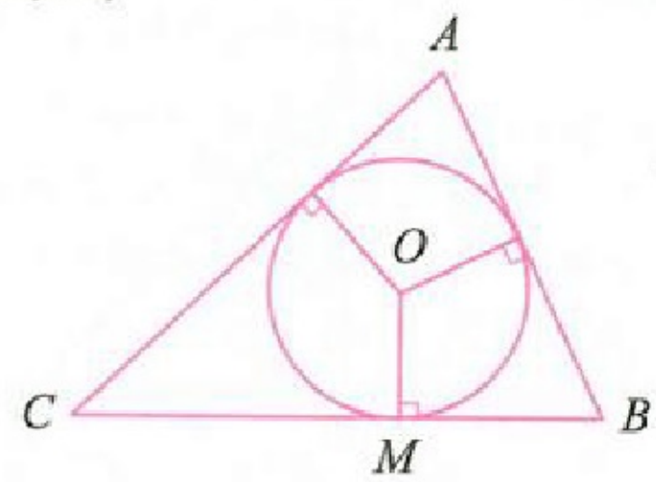
$$\bullet \begin{cases} AK = AN = \dfrac{b+c-a}{2} \\ BK = BM = \dfrac{a+c-b}{2} \\ CM = CN = \dfrac{a+b-c}{2} \end{cases} \quad (1)$$

• $S_{ABC} = \dfrac{r(a+b+c)}{2}$ (*) với r là bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC.

Để hiểu thêm về ứng dụng của tính chất đơn giản trên ta xét một số thí dụ sau:

★**Thí dụ 1.** *Cho tam giác ABC có BC = 14 (cm), AC – AB = 2 (cm). Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác, M là hình chiếu vuông góc của O trên BC. Tính độ dài các đoạn thẳng BM, CM.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Theo tính chất (1) ta có

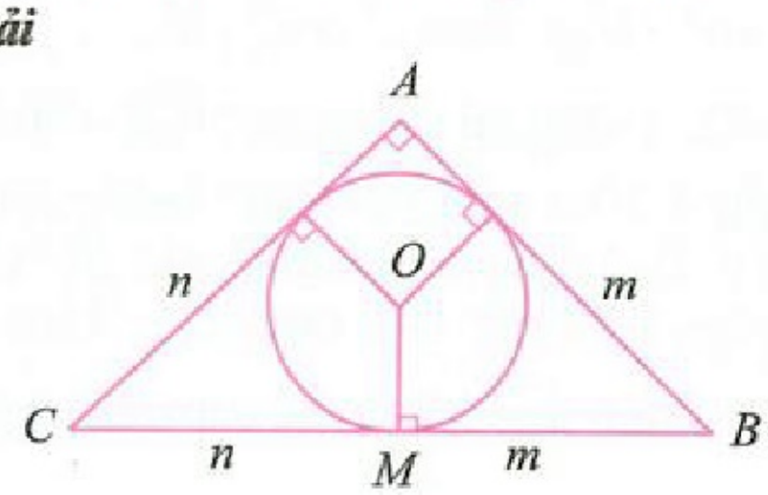
$$CM = \frac{BC + AC - AB}{2} = \frac{14+2}{2} = 8 \text{ (cm)}.$$

Suy ra $BM = BC - CM = 14 - 8 = 6$ (cm). ❐

Nhận xét. Bài toán này tuy không khó nhưng nếu không chọn đúng hướng đi thì việc giải có thể gặp khó khăn. Ở đây ta nhận thấy trong ΔABC, BC có độ dài đã biết, hiệu $AC - AB$ có độ dài đã biết, nên ta nghĩ ngay đến tính chất (1).

★**Thí dụ 2.** *Cho tam giác ABC vuông tại A có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh huyền BC tại M và BM = m, CM = n (với m, n là độ dài đã biết). Tính diện tích của tam giác ABC.*

Lời giải



Hình 3

Ta kí hiệu độ dài các cạnh như hình 3. Do ΔABC vuông tại A nên $S_{ABC} = \dfrac{bc}{2}$ và $a^2 - (b^2 + c^2) = 0$. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. Khi đó theo (1) ta có:

$$mn=\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)=\frac{1}{4}[a+(b-c)].[a-(b-c)]$$

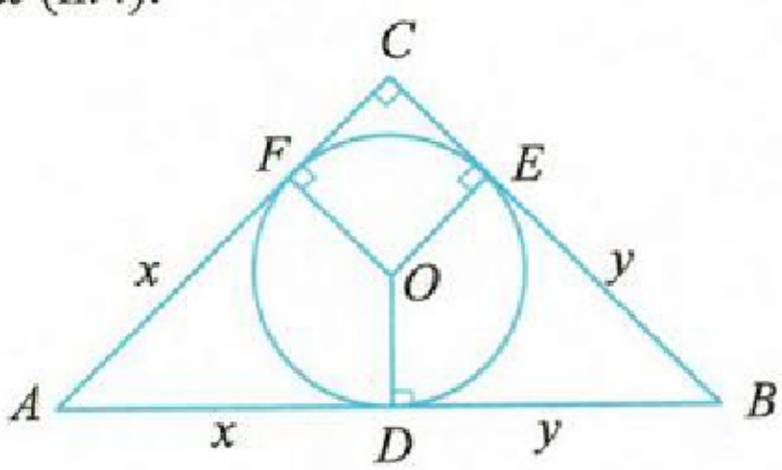
$$=\frac{1}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right]=\frac{1}{4}\left[a^2-(b^2+c^2)+2bc\right]=\frac{bc}{2}=S_{ABC}.$$

Vậy $S_{ABC}=m.n$. ❐

Nhận xét. Nếu giữ nguyên giả thiết ở thí dụ 2 và cho biết diện tích ΔABC bằng $m.n$ thì ta cũng sẽ chứng minh được ΔABC vuông tại A.

★**Thí dụ 3.** *Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D. Tính số đo của $\widehat{ACB}$ biết rằng $AC.BC=2AD.BD$.*

Lời giải (h.4).



Hình 4

Gọi E và F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh BC, CA. Ta có $AF=AD=x$; $BE=BD=y$. Theo (1) ta có

$$\begin{cases} x=\dfrac{b+c-a}{2} \\ y=\dfrac{a+c-b}{2} \end{cases}$$

Từ $AC.BC=2AD.BD \Leftrightarrow ab=2xy$, suy ra

$$ab=2\cdot\frac{(c+b-a)}{2}\cdot\frac{(a+c-b)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2ab=[c+(b-a)][c-(b-a)]\Leftrightarrow 2ab=c^2-(b-a)^2$$

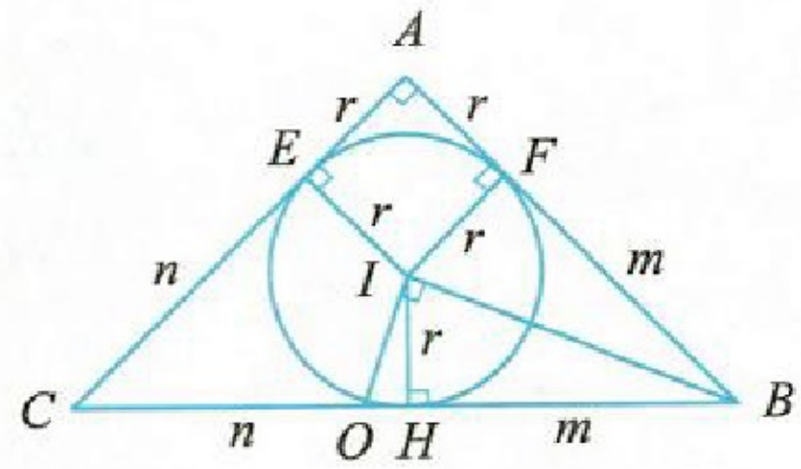
$$\Leftrightarrow 2ab=c^2-(a^2+b^2)+2ab$$

$$\Leftrightarrow c^2-(a^2+b^2)=0\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2.$$

Vậy ΔABC vuông tại C, suy ra $\widehat{ACB}=90^\circ$. ❐

★**Thí dụ 4.** *Cho tam giác ABC vuông lại A và AC > AB. Gọi O là trung điểm của BC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Tính tỷ số $\frac{AB}{AC}$ biết rằng $\widehat{BIO}=90^\circ$. (Bài T5/367 TH&TT số 367, tháng 1 năm 2008).*

Lời giải. Gọi E và F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AC, AB. Do ΔABC vuông tại A nên tứ giác $AFIE$ là hình vuông $\Rightarrow AE=AF=FI=IE=r$. Gọi H là hình chiếu của I trên BC, khi đó ta có $IH=r$.



Hình 5

Đặt $BC=a$, $AB=b$, $AC=c$. Theo (1) ta có

$$r=\frac{b+c-a}{2};\ m=\frac{a+b-c}{2};\ n=\frac{a+c-b}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông IOB ta có: $IH^2=OH.HB=(OB-HB).HB$

$$\Leftrightarrow r^2=\left(\frac{a}{2}-m\right)m\Leftrightarrow\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2$$

$$=\left[\frac{a}{2}-\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\right].\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)^2=(c-b)(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2+a^2+2bc-2ab-2ac$$

$$=ac-ab+2bc-(b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-2ab-2ac=ac-ab-a^2\Leftrightarrow a(3a-3c-b)=0$$

$$\Leftrightarrow (3a-3c-b)=0 \text{ (do } a>0)$$

$$\Leftrightarrow 3a=3c+b\Leftrightarrow 9a^2=(3c+b)^2$$

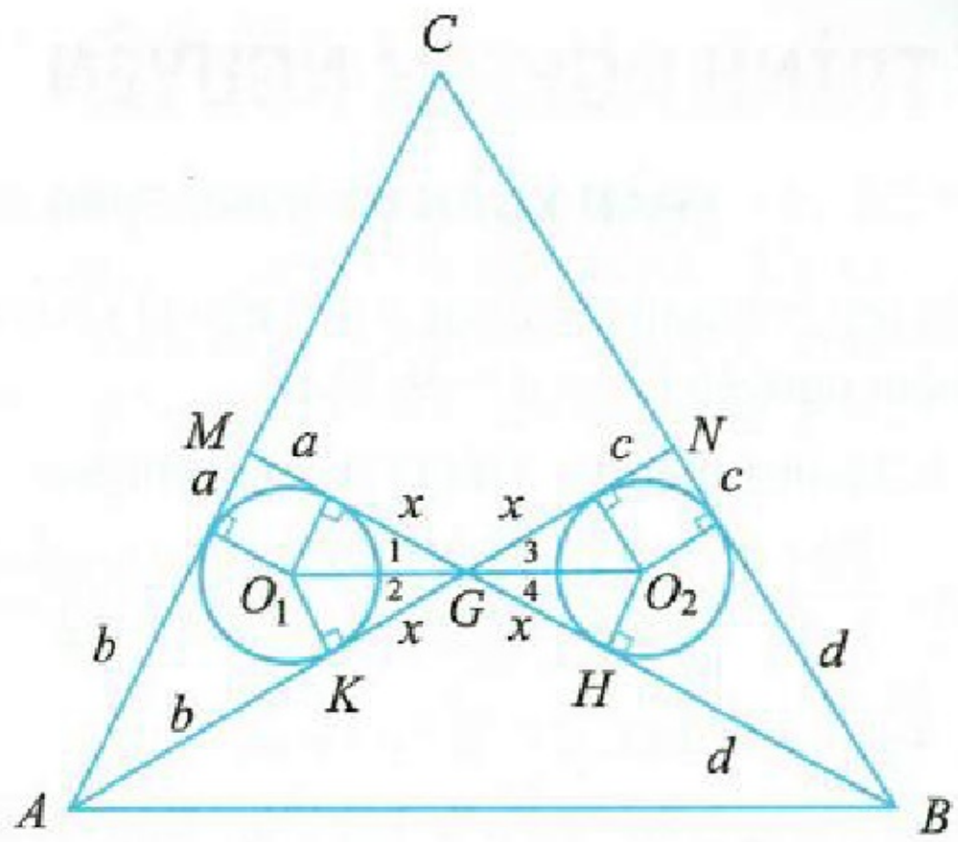
$$\Leftrightarrow 9(b^2+c^2)=9c^2+b^2+6bc\Leftrightarrow 8b^2=6bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{c}=\frac{3}{4} \text{ hay } \frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}.$$ ❐

★**Thí dụ 5.** *Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và AN cắt nhau tại G. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp tam giác AGM và BGN có bán kính bằng nhau thì tam giác ABC cân tại đỉnh C.*

Lời giải. Giả sử đường tròn nội tiếp các tam giác AGM và BGN tiếp xúc các cạnh của nó như hình 6 dưới đây. Gọi tâm các đường tròn là O_1, O_2 và $O_1K=O_2H=r$. Áp dụng tính chất tiếp tuyến có $\widehat{G}_1=\widehat{G}_2$; $\widehat{G}_3=\widehat{G}_4$, mà $\widehat{MGA}=\widehat{NGB}$, hay $\widehat{G}_1+\widehat{G}_2=\widehat{G}_3+\widehat{G}_4\Rightarrow\widehat{G}_2=\widehat{G}_4$. Từ đó suy ra $\Delta KGO_1=\Delta HGO_2$ (g.c.g) $\Rightarrow GK=GH=x$.

Do G là trọng tâm của ΔABC nên diện tích hai tam giác AGM và BGN bằng nhau, các độ dài đoạn thẳng được đặt như ở hình 6:

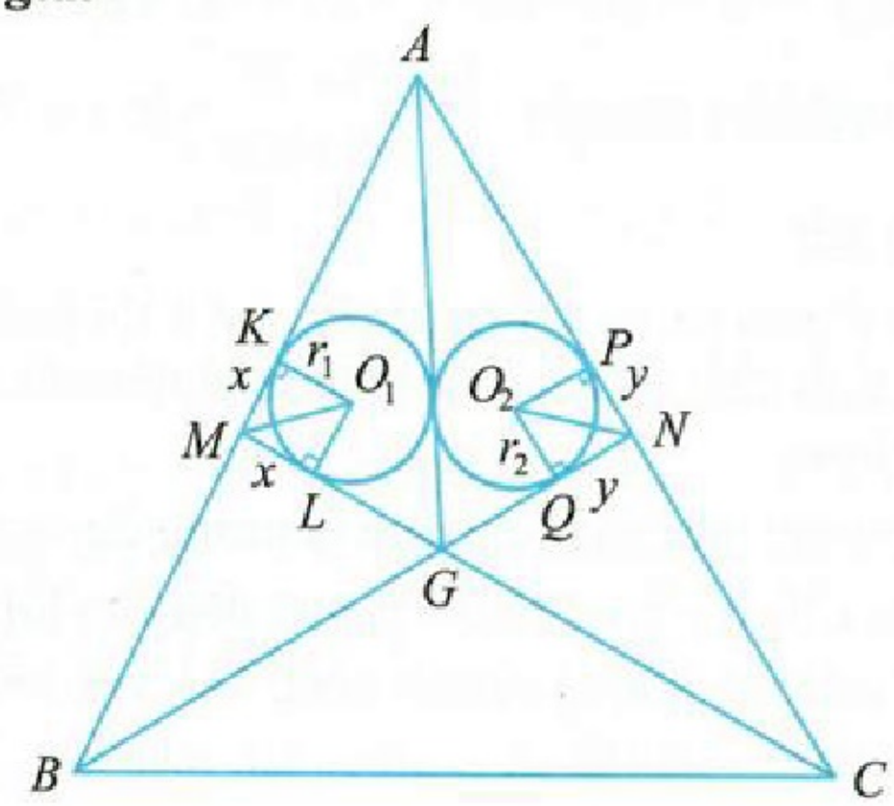


Hình 6

$S_{AGM} = S_{BGN} \Leftrightarrow r(a+b+x) = r(c+d+x)$
$\Leftrightarrow a+b = c+d \Leftrightarrow AM = BN \Leftrightarrow CB = CA$
hay ΔABC cân tại C. ❐

★**Thí dụ 6.** Cho *tam giác ABC có hai trung tuyến CM và BN cắt nhau tại G. Chứng minh rằng ABC cân tại đỉnh A nếu AM + MG = AN + GN.*

Lời giải



Hình 7

Đặt $AB = 2a$, $AC = 2b$, khi đó $AM = BM = a$, $AN = CN = b$. Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMG và ANG, và các đường tròn này tiếp xúc với các cạnh của nó như hình 7. Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên suy ra diện tích các tam giác AMG và ANG bằng nhau nên theo (*) ta có $r_1.(AM+GM+AG) = r_2.(AN+GN+AG)$ mà theo giả thiết $AM + MG = AN + GN$ suy ra $r_1 = r_2$. Mặt khác ta có:

$$MK = ML = x = \frac{AM+GM-AG}{2}$$
$$= \frac{AN+GN-AG}{2} = PN = NQ = y.$$

Do đó $\Delta LO_1M = \Delta QO_2N$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{O_1ML} = \widehat{O_2NQ} \Rightarrow 2\widehat{O_1ML} = 2\widehat{O_2NQ}$, hay
$\widehat{AMC} = \widehat{ANB} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta ANB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB}$
hay $\frac{a}{b} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \Rightarrow 2a = 2b$
$\Rightarrow AB = AC$ nên ΔABC cân tại A. ❐

Nhận xét. Từ giả thiết bài ra: chu vi và diện tích của hai tam giác AMG và ANG bằng nhau nên ta nghĩ ngay đến việc vẽ thêm đường tròn nội tiếp hai tam giác này. Do vậy cách giải bài toán này dễ dàng nhận ra. Bài toán có thể thay điều kiện $AM + MG = AN + GN$ bởi bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác AMG và ANG bằng nhau.

Trên đây là một số thí dụ mà chúng tôi đã sử dụng công thức khá quen thuộc để áp dụng vào giải một số bài toán hình học. Qua bài viết này tôi muốn các bạn học sinh hãy *"đừng ngại khi giải bài hình học"*, bài toán khó *"thường"* xuất phát từ những bài toán cơ bản, những bài toán gốc, từ những tính chất quen thuộc, mong các bạn sẽ học chắc và tốt kiến thức hình học. Mời các bạn giải các bài tập sau:

1. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh BC ở M. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu diện tích của nó bằng $BM.CM$.
2. Tính diện tích của tam giác vuông biết một cạnh góc vuông bằng 12cm, tỷ số giữa bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó bằng 2:5.
3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 10$cm. Tính độ dài các cạnh AC, BC biết rằng số đo của chu vi tam giác ABC bằng số đo diện tích của nó.
4. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi (O, r), (O_1, r_1), (O_2, r_2),theo thứ tự là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH.
   a) Chứng minh rằng $r + r_1 + r_2 = AH$
   b) Chứng minh rằng $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.
   c) Tính độ dài O_1O_2 biết $AB = 3$cm, $AC = 4$cm.
5. Bán kính của đường tròn nội tiếp của một tam giác bằng 2cm, tiếp điểm trên một cạnh chia cạnh đó thành hai đoạn thẳng có độ dài là 4cm, và 6cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác đó.
6. Gọi r và R theo thứ tự là các bán kính của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác vuông có diện tích là S. Chứng minh rằng : $R + r \geq \sqrt{2S}$.
7. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm O tiếp xúc với cạnh BC ở D. Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của AD. Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

LỜI GIẢI NGẮN GỌN CHO PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN $ax + by = c$

TRẦN XUÂN UY (*Nam Định*)

Phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$ (*) với a, b, c là các số nguyên cho trước là một dạng PT khá đơn giản. Với $d = (a, b)$, khi đó (*) vô nghiệm nếu c không chia hết cho d và (*) có vô số nghiệm nếu c chia hết chia d.

Ở trường hợp thứ hai, không mất tổng quát giả sử $d = 1$ (nếu $d \neq 1$ thì ta chia cả hai vế cho d). Khi đó nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của (*) thì ta có $ax_0 + by_0 = c$, suy ra

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{-by+c}{a} = \frac{-by+ax_0+by_0}{a} = x_0 - b.\frac{y-y_0}{a}.$$

Đặt $\frac{y-y_0}{a} = t \in \mathbb{Z}$, ta có $x = x_0 - bt$; $y = at + y_0$.

Vậy (*) có vô số nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{Z}.$$

Sau đây ta xét PT nghiệm nguyên (*) với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $(a, b, c) = 1$, $(a, b) = 1$.

1. Trường hợp nhẩm được nghiệm

Lời giải sẽ ngắn gọn hơn khi áp dụng kết quả trên (chỉ cần đặt ẩn phụ một lần do trong biểu thức $t = \frac{y-y_0}{a}$ hệ số của y bằng 1).

★Ví dụ 1. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$12x - 7y = 45 \quad (1)$$

Phân tích. Do x, y phải tìm là các số nguyên nên $7y \vdots 3$ mà $(7, 3) = 1 \Rightarrow y \vdots 3$.

Lời giải.

• Chọn $y = -3$ ta nhẩm được $x = 2$ nên (1) có một nghiệm nguyên $(x_0; y_0) = (2; -3)$.

Cách 1: Từ (1) ta rút ra được:

$$x = \frac{7y+45}{12} = \frac{7y+12.2-7.(-3)}{12} = 2 + 7.\frac{y+3}{12}.$$

Đặt $\frac{y+3}{12} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = 2 + 7t$ và $y = 12t - 3$. Vậy (1) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = 2+7t \\ y = -3+12t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

• Chọn $y = 9$ ta nhẩm được $x = 9$ nên (1) có một nghiệm nguyên $(x_0; y_0) = (9; 9)$.

Cách 2 (rút x theo y): Từ (1) ta rút ra được:

$$x = \frac{7y+45}{12} = \frac{7y+12.9-7.9}{12} = 9 + 7.\frac{y-9}{12}.$$

Đặt $\frac{y-9}{12} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = 9 + 7t$ và $y = 12t + 9$. Vậy, (1) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = 9+7t \\ y = 9+12t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Cách 3 (rút y theo x): Từ (1) ta rút ra được:

$$y = \frac{12x-45}{7} = \frac{12x-12.9+7.9}{7} = 9 + 12.\frac{x-9}{7}.$$

Đặt $\frac{x-9}{7} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $y = 9 + 12t$ và $x = 7t + 9$. Vậy (1) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = 9+7t \\ y = 9+12t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét

- Nếu (*) có $(a, c) \neq 1$ hoặc $(b, c) \neq 1$ thì ta sử dụng tính chất chia hết để nhẩm nghiệm sẽ dễ dàng hơn.
- Các công thức nghiệm trên là tương đương.
- Tính x theo y hoặc tính y theo x đều cho lời giải ngắn gọn mà không cần so sánh $|a|$ với $|b|$ để lựa chọn.

★Ví dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$11x + 18y = 120 \quad (2).$$

Phân tích. Do x, y phải tìm là các số nguyên nên $11x \vdots 6$ mà $(11, 6) = 1 \Rightarrow x \vdots 6$.

Chọn $x = 6$ ta nhẩm được $y = 3$ nên (2) có một nghiệm nguyên $(x_0; y_0) = (6; 3)$.

Lời giải. Từ (2) ta rút ra được x bằng:

$$\frac{-18y+120}{11} = \frac{-18y+11.6+18.3}{11} = 6 - 18.\frac{y-3}{11}.$$

Đặt $\frac{y-3}{11} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = 6 - 18t$ và $y = 11t + 3$. Vậy (2) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = 6-18t \\ y = 3+11t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

★**Ví dụ 3.** *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình* $11x + 8y = 73$ (3).

Phân tích. Do (11, 73) = 1, (8, 73) = 1, ta không sử dụng được tính chất chia hết. Ở đây ta có thể nhẩm được một nghiệm của phương trình bằng một vài phép thử đơn giản, chẳng hạn: chọn $y = 5$ ta được $x = 3$ để cho $11.3 + 8.5 = 73$.

Lời giải. Từ (3) ta rút ra được:

$$x = \frac{-8y+73}{11} = \frac{-8y+11.3+8.5}{11} = 3 - 8.\frac{y-5}{11}.$$

Đặt $\frac{y-5}{11} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = 3 - 8t$ và $y = 11t + 5$.

Do $x = 3 - 8t > 0$ và $y = 11t + 5 > 0$ suy ra $-\frac{5}{11} < t < \frac{3}{8} \Rightarrow t = 0$. Vậy (3) có nghiệm nguyên dương duy nhất là: $(x; y) = (3; 5)$.

Nhận xét. Khi việc nhẩm nghiệm trực tiếp gặp khó khăn (giá trị lớn, ...), ta có thể rút ẩn này theo ẩn kia, tách lấy phần nguyên. Chẳng hạn, rút $y = \frac{73-11x}{8} = 9 - x + \frac{1-3x}{8}$, do $\frac{1-3x}{8} \in \mathbb{Z}$ dễ dàng chọn được $x = -5$, tương ứng có $y = 16$.

★**Ví dụ 4.** *Viết 47 thành tổng hai số nguyên dương, một số chia hết cho 4, một số chia hết cho 11.*

Phân tích. Các số nguyên dương chia hết cho 4 và 11 lần lượt có dạng $4x$ và $11y$ (x, y nguyên dương), thỏa mãn điều kiện: $4x + 11y = 47$. Chọn $y = 5$ ta nhẩm được $x = -2$.

Lời giải. Gọi hai số nguyên dương cần tìm là $4x$ và $11y$ ($x, y \in \mathbb{Z}^+$), ta có: $4x + 11y = 47$. (4)

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{-11y+4.(-2)+11.5}{4} = -2 - 11.\frac{y-5}{4}.$$

Đặt $\frac{y-5}{4} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = -2 - 11t$ và $y = 4t + 5$.

Do $x = -2 - 11t > 0$ và $y = 4t + 5 > 0$ suy ra $-\frac{5}{4} < t < -\frac{2}{11} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x = 9; y = 1$.

Vậy $47 = 36 + 11$.

★**Ví dụ 5.** *Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình:* $16x - 25y = 1$ (5).

Phân tích. Ta có $16x$ chẵn $\Rightarrow 25y$ lẻ $\Rightarrow y$ lẻ $\Rightarrow 25y$ có tận cùng là 5 $\Rightarrow 16x$ có tận cùng là 6 $\Rightarrow x$ có tận cùng là 1 hoặc 6. Thử chọn $x = 11$ ta tìm được $y = 7$.

Lời giải. Từ (5) ta rút ra được x bằng:

$$\frac{25y+1}{16} = \frac{25y+16.11-25.7}{16} = 11 + 25.\frac{y-7}{16}.$$

Đặt $\frac{y-7}{16} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = 11 + 25t$ và $y = 16t + 7$.

Do $x = 11 + 25t > 0$ và $y = 16t + 7 > 0$ suy ra

$$t > -\frac{11}{25};\ t > -\frac{7}{16} \Rightarrow t \geq 0.$$

Các công thức tính x, y theo t có dạng hàm số bậc nhất có các hệ số góc dương nên x và y nhỏ nhất $\Leftrightarrow t$ nhỏ nhất, ta được $t = 0$. Khi đó ta có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (5) là: $(x; y) = (11; 7)$.

★**Ví dụ 6.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $7x + 4y = 100$ (6).

Lời giải. Ta có $(6) \Leftrightarrow x = \frac{-4y+100}{7} = -4.\frac{y-25}{7}$.

Đặt $\frac{y-25}{7} = t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$. Suy ra (6) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = -4t \\ y = 25 + 7t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét

- Có thể hỗ trợ việc nhẩm nghiệm bằng cách linh hoạt áp dụng các tính chất như trong *VD*5.
- Trường hợp đặc biệt, nếu ƯCLN(a, c) = a, hoặc ƯCLN(b, c) = b thì lời giải của (*) còn ngắn gọn hơn (như *VD*6).

2. Trường hợp không nhẩm được nghiệm

Cũng giống như khi ta không quan tâm đến việc nhẩm nghiệm của PT, khi đó ta sẽ phải rút ẩn này theo ẩn kia, tách lấy phần nguyên và đặt ẩn phụ; lặp lại quá trình này cho đến khi đạt được ẩn phụ $t_{i+1} = \frac{mt_i + n}{p}$ trong đó $m = 1$ ($t_i = pt_{i+1} - n$).

★**Ví dụ 7.** *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $17x - 39y = 4$ (7).

Lời giải

• Không nhẩm nghiệm.

Cách 1: Từ (7) ta rút ra được:

$$x = \frac{39y+4}{17} = 2y + \frac{5y+4}{17}.$$

(*Xem tiếp trang 14*)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HÀ TĨNH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 463, tháng 1 năm 2016)

Câu 1.

a) Điều kiện: $x > 0;\ y \ge \frac{3}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{2}{\sqrt{xy}} \ge \frac{4}{x+y}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thay vào PT thứ hai ta có:

$$x^2 = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow x^2-2x+1 = \sqrt{4x-3}-2x+1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{4x-3}-1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 1)$.

b) Đặt $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{xy} = F\ (x \ge 0; y \ge 0; x+y=2)$.

Dễ thấy $x^2+y^2 = 4-2xy$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$F^2 = 4-xy+2\sqrt{2xy(2-xy)}$$
$$\le 4-xy+(2xy+2-xy) = 6; \qquad (1)$$

Lại có $x^2+y^2 \ge 2xy \ge \frac{xy}{4}$, suy ra

$$F^2 = x^2+y^2+xy+2\sqrt{xy(x^2+y^2)}$$
$$\ge x^2+y^2+2xy = 4. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2 \le F \le \sqrt{6}$ (đpcm).

Câu 2.

Ta có $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{1+2+...+k} = 1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$
$$= \frac{[1.2.3...(n-1)].[4.5.6...(n+2)]}{[2.3.4...n].[3.4.5...(n+1)]} = \frac{n+2}{3n}.$$

Khi đó $\frac{1}{P_n} = 3-\frac{6}{n+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n+2 = 6 \Leftrightarrow n = 4$ (do $n \ge 2$).

Câu 3.

a) *Nhận xét*: Một số chính phương khi chia cho 3 và chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

• Giả sử xy không chia hết cho 3 thì x và y đều không chia hết cho 3, khi đó x^2 và y^2 chia 3 dư 1, suy ra z^2 chia 3 dư 2, vô lí.

Vậy xy chia hết cho 3.

• Giả sử xy không chia hết cho 4 thì x và y đều không chia hết cho 4; x và y không đồng thời chia hết cho 2. Có hai trường hợp xảy ra:

- Nếu x và y đều lẻ thì x^2 và y^2 chia 4 dư 1, suy ra z^2 chia 4 dư 2, vô lí.

- Nếu x và y có một số chẵn, một số lẻ thì z là số lẻ. Giả sử: $x = 2a$; $y = 2b+1$; $z = 2c+1$.

Ta có $x^2+y^2 = z^2 \Rightarrow 4a^2+(2b+1)^2 = (2c+1)^2$

$\Rightarrow a^2 = c(c+1)-b(b+1) \Rightarrow a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2$

$\Rightarrow x \vdots 4$, vô lí.

Vậy xy chia hết cho 4.

• Do $(3; 4) = 1$ nên xy chia hết cho 12 (đpcm).

b) *Nhận xét*: Một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có thể dư 0, 1, 2 hoặc 4.

Giả sử $x^3y-xy^3 = xy(x^2-y^2)$ không chia hết cho 7. Khi đó x^2 và y^2 đều không chia hết cho 7 và không có cùng số dư khi chia cho 7.

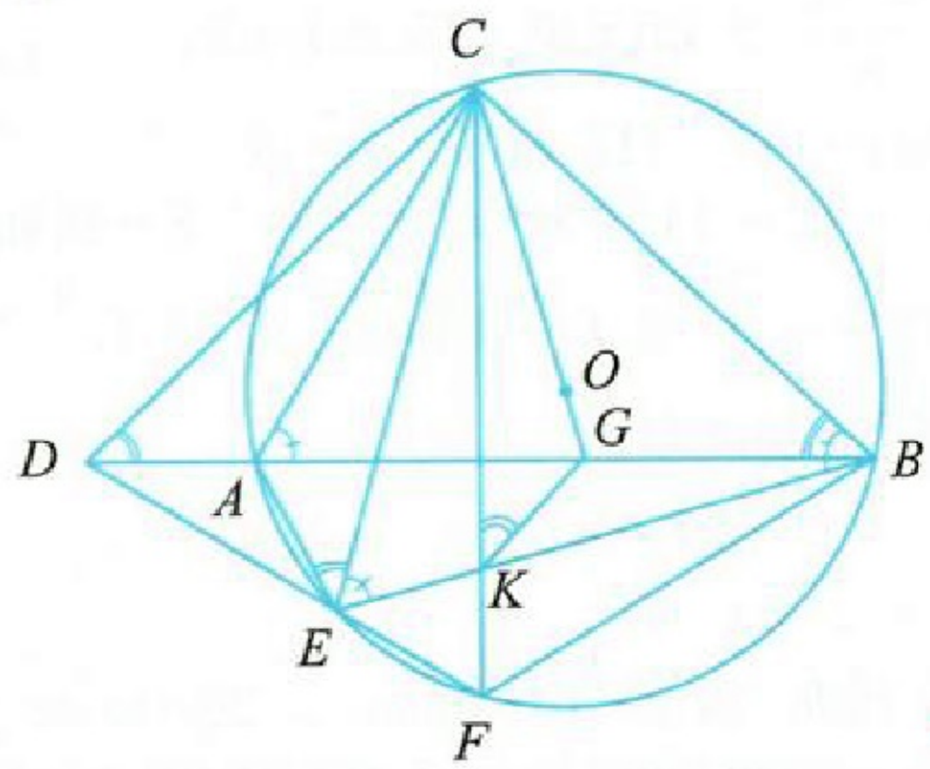
- Nếu x^2 chia cho 7 dư 1 còn y^2 chia cho 7 dư 2 hoặc ngược lại thì z^2 chia cho 7 dư 3, vô lí.

- Nếu x^2 chia cho 7 dư 1 còn y^2 chia cho 7 dư 4 hoặc ngược lại thì z^2 chia cho 7 dư 5, vô lí.

- Nếu x^2 chia cho 7 dư 2 còn y^2 chia cho 7 dư 4 hoặc ngược lại thì z^2 chia cho 7 dư 6, vô lí.

Vậy x^3y-xy^3 chia hết cho 7.

Câu 4.



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH ĐỒNG NAI

NĂM HỌC 2013 - 2014

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

Câu 1. Tìm các số thực x thỏa mãn:

$$x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$$

Câu 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases}$$

Câu 3. Cho m, n là hai số nguyên dương lẻ thỏa mãn: $\begin{cases} (m^2+2)\,\vdots\, n \\ (n^2+2)\,\vdots\, m \end{cases}$

1) Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m; n)$ thỏa mãn các điều kiện đã cho với $m > 1, n > 1$;

2) Chứng minh $(m^2+n^2+2)\,\vdots\, 4mn$.

Câu 4.

1) Tính số các ước dương của 1000;

2) Tính số các ước dương chẵn của 1000.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi (O) là đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với hai cạnh AB; AC lần lượt tại D; E. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng OB và DE; N là giao điểm của hai đường thẳng OC và DE. Chứng minh bốn điểm B; C; M; N cùng thuộc một đường tròn.

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

giới thiệu

a) Theo tính chất tam giác cân và góc nội tiếp ta có $\widehat{CEA}=\widehat{CBA}=\widehat{CDA}$ và $\widehat{CED}=\widehat{CDE}$ nên $\widehat{AED}=\widehat{ADE}$, suy ra $AD = AE$, kết hợp với $CD = CE$ suy ra $DE \perp AC$ (đpcm).

b) Áp dụng câu a) ta có $\widehat{ADE}=\widehat{AED}=\widehat{ABF}$ (góc nội tiếp chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AF}$). Suy ra FBD là tam giác cân tại $F \Rightarrow FB = FD$. Kết hợp với $CB = CD$ suy ra $CF \perp BD$ hay $CK \perp BG$.

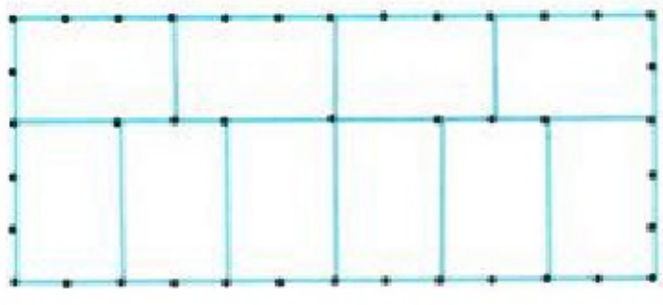
Mặt khác $CB = CE \Rightarrow CO \perp BE$ hay $CG \perp BK$.

Suy ra G là trực tâm của tam giác BCK.

Khi đó $\widehat{CKG}=90^\circ-\widehat{KCB}=\widehat{CBG}$ (đpcm).

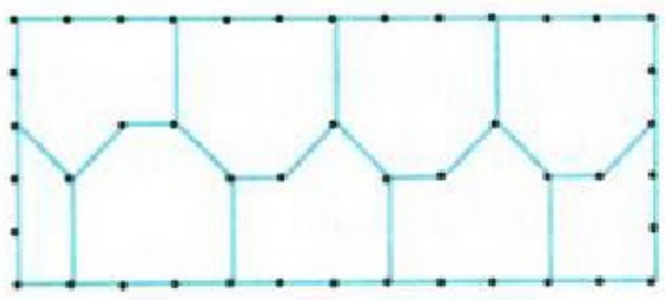
Câu 5.

a) Chia hình chữ nhật đã cho thành 10 hình chữ nhật có kích thước 2×3 như hình dưới.



Theo nguyên lí Dirichlet, 10 hình chữ nhật nhỏ chứa 11 điểm nên luôn tồn tại hai điểm cùng thuộc một hình chữ nhật nhỏ, khoảng cách giữa chúng không lớn hơn đường chéo của hình chữ nhật nhỏ là $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (đpcm).

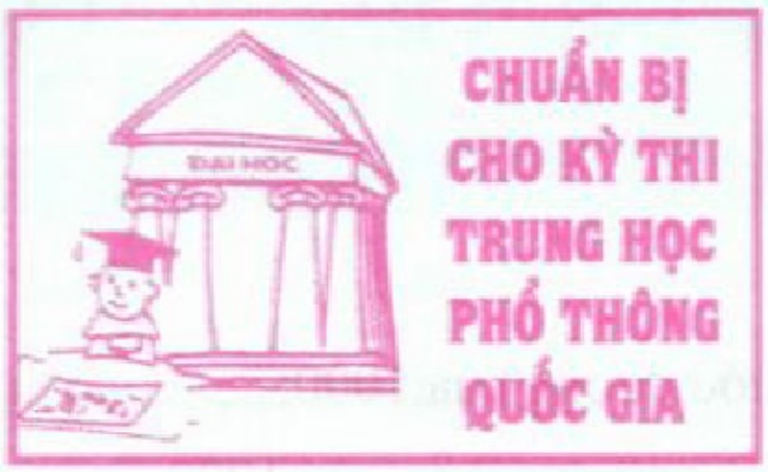
b) Khi $n = 10$ kết luận trên vẫn đúng. Thật vậy: Chia hình chữ nhật đã cho thành 9 hình như hình dưới.



Theo nguyên lí Dirichlet, 9 hình nhỏ chứa 10 điểm nên luôn tồn tại hai điểm cùng thuộc một hình nhỏ ở trên, khoảng cách giữa chúng vẫn không lớn hơn $\sqrt{13}$.

TỪ HỮU SƠN – TRẦN QUỐC LUẬT

(Hà Tĩnh) ***Giới thiệu.***



XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HÀM ĐA THỨC ĐƠN ĐIỆU TRÊN MỘT KHOẢNG CHO TRƯỚC

VĂN PHÚ QUỐC
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Quảng Nam)

Bài toán xác định tham số để hàm đa thức đơn điệu trên một khoảng cho trước có lẽ là một bài toán quen thuộc trong các đề thi tuyển sinh Đại học từ xưa đến giờ. Chúng ta nói là "quen thuộc" nhưng đôi khi dạng toán này rất "xa lạ" và mang đến thật nhiều khó khăn đối với số đông các em học sinh THPT. Tại sao vậy? Bởi vì các em học sinh thường hay quên các kiến thức hỗ trợ như là: định lý về dấu của tam thức bậc hai, điều kiện để tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, *so sánh các nghiệm của phương trình bậc hai đối với số một số* α *nào đó,... đồng thời các em chưa khéo léo trong việc vận dụng các kiến thức về đạo hàm có liên quan. Nhằm giúp các em học sinh tự tin khi đối mặt với kỳ thi THPT Quốc gia* 2015, *trong bài báo ngắn này tôi xin nhắc lại vài kiến thức hỗ trợ, những phương pháp chung và phân tích - bình luận một số bài toán điển hình.*

I. Phương pháp

1. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

- *Bước* 1: Tìm tập xác định của hàm số.
- *Bước* 2: Tính đạo hàm y'.
- *Bước* 3: Lập luận cho các trường hợp mà bài toán yêu cầu

2. Để vận dụng tốt phương pháp này ta cần nắm vững một số kiến thức liên quan đến *định lý về dấu của tam thức bậc hai.*

2.1. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$. Khi đó:

- Nếu $\Delta<0$ thì $af(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì $af(x)>0, \forall x\neq -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta>0$ (giả sử $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$) thì $af(x)<0, \forall x\in(x_1;x_2)$ và $af(x_1;x_2)>0$, $\forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

2.2. Điều kiện để tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$. Khi đó ta có:

- $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$
- $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$
- $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$
- $f(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\leq 0\\ a<0\end{cases}$

2.3. So sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai với số 0

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$. Khi đó:

- $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
$$x_1<0<x_2 \Leftrightarrow P<0.$$
- $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
$$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0.\\ S>0\end{cases}$$
- $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
$$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0.\\ S<0\end{cases}$$

Để ý rằng nếu đề yêu cầu so sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai với số $\alpha\neq 0$ ta làm như sau:

Đặt $t=x-\alpha$, phương trình: $ax^2+bx+c=0$ trở thành phương trình $a_1t^2+b_1t+c_1t=0$.

Khi đó bài toán quy về so sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai với số 0.

II. Phân tích, bình luận một số bài toán điển hình

Bài toán 1. *Tìm m để hàm số:*

$$y=\frac{1}{3}x^3+(2m-1)x^2+(m+1)x+m^3+3m^2-m+1$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trước hết tính đạo hàm: $y' = x^2 + 2(2m-1)x + m + 1$.

Áp dụng *định lý về hàm số đơn điệu* chúng ta lập luận như sau:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $x^2 + 2(2m-1)x + m + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Sử dụng *điều kiện để tam thức bậc hai không đổi dấu trên* $\mathbb{R}$ vừa nêu ở trên ta đưa (*) đến điều kiện tương đương:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - m - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 5m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{5}{4}.$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $0 \leq m \leq \frac{5}{4}$.

Bài toán 2. *Tìm m để hàm số* $y = 4x^3 + (m+3)x^2 + mx + 4m^3 - m^2$ *đồng biến trên khoảng* $[0;+\infty)$.

Đối với bài toán này, chúng tôi xin trình bày ba hướng giải quyết để các em học sinh tham khảo. Hy vọng các em sẽ lựa chọn cho mình được một hướng giải quyết tối ưu nhất.

Trước hết ta cần tìm tập xác định và tính sẵn đạo hàm:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm $y' = 12x^2 + 2(m+3)x + m$.

Hướng thứ 1. Hàm số đồng biến trên khoảng $[0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$, $\forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hoặc PT $y' = 0$ có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-3)^2 \leq 0 \\ \begin{cases} (m-3)^2 > 0 \\ -\frac{m+3}{6} < 0 \\ \frac{m}{12} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ \begin{cases} m \neq 3 \\ m > -3 \\ m \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Vậy $m \geq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

(*Chú ý. Khi gặp hệ bất phương trình các em học sinh cần cẩn thận hơn trong những thao tác sử dụng phép hợp, phép giao các tập nghiệm*).

Hướng thứ 2. Chịu khó quan sát, chúng ta sẽ thấy phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{m}{6}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $[0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$, $\forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc PT $y' = 0$ có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ -\frac{1}{2} < -\frac{m}{6} \leq 0 \\ -\frac{m}{6} < -\frac{1}{2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ 0 \leq m < 3 \\ m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Vậy $m \geq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Hướng thứ 3.

Hàm số đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 2(m+3)x + m \geq 0, \forall x \in [0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m(2x+1) \geq -12x^2 - 6x, \forall x \in [0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -6x, \forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [0;+\infty)} (-6x) = 0.$$

Vậy $m \geq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3. *Tìm m để hàm số:* $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4m^3 + 2m^2 - 7m + \frac{2}{3}$ *đồng biến trên khoảng* $(0;3)$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm $y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$.
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;3)$.
- Vì hàm số $y'(x)$ liên tục tại $x = 0, x = 3$ nên $y' \geq 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0;3]$

$\Leftrightarrow m(2x+1) \geq x^2 + 2x - 3, \forall x \in [0;3]$ (mục đích là cô lập tham số m) $\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}, \forall x \in [0;1]$

(do $2x + 1 > 0, \forall x \in [0;3]$ nên khi chia cả 2 vế của bất phương trình trên cho $2x+1$ không làm đổi dấu)

$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [0;3]} g(x)$ với $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}$.

Vấn đề còn lại là chúng ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

Đây là một bài toán về cực trị quá quen thuộc đối với tất cả các em học sinh lớp 12.

Ta có: $g'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$.

Điều này dẫn đến việc $g(x)$ đồng biến trên $[0;3]$. Do đó: $\max\limits_{x\in[0;3]} g(x) = g(3) = \frac{12}{7}$.

Vậy $m \geq \frac{12}{7}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chúng ta nhận thấy rằng việc giải bài toán này bằng phương pháp hàm số là một phương pháp giải tối ưu. Nó đơn giản hơn phương pháp tam thức bậc hai rất nhiều. Bởi vì nếu sử dụng phương pháp tam thức bậc hai chúng ta sẽ quy về việc so sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai đối với hai số α, đó là: $\alpha = 0$, $\alpha = 3$, vô cùng vất vả.

Bài toán 4. *Tìm m để hàm số*

$$y = \frac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + \sqrt[3]{m} + 2^m$$

nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Nhận thấy bài toán này không thể cô lập tham số m một cách dễ dàng như bài toán trên nên chúng ta hãy từ bỏ ý định sử dụng phương pháp hàm số mà nên tiến hành giải bằng phương pháp tam thức bậc hai. Như vậy, các em học sinh có thể thấy rằng việc khẳng định một phương pháp giải toán nào đó là tối ưu không phải chuyện đơn giản. Phải tùy vào từng tình huống toán, các em mới có thể có những nhận xét, đánh giá một cách khách quan được. Chúng tôi hy vọng rằng các em có thể khéo léo lựa chọn cho mình một phương pháp giải an toàn, chắc chắn nhất. Bây giờ chúng ta giải bài toán này các em nhé!

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Đạo hàm: $y' = \left(m^2-1\right)x^2 + 2(m-1)x - 2$.

Đến đây thường có nhiều học sinh vội vàng sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai đã bỏ sót mất trường hợp $m = \pm 1$, thật là đáng tiếc. Vì vậy, các em cần phải cẩn thận để khắc phục tình trạng này.

Bây giờ ta xem xét từng trường hợp như sau:

- *Trường hợp*: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

+ Với $m = 1$ thì $y = -2x + 3$ ($y' = -2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Suy ra hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

+ Với $m = -1$ thì $y = -2x^2 - 2x - \frac{1}{2}$; $y' = -4x - 2 < 0$ $\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Suy ra hàm không nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

- *Trường hợp*: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chắc chắn rằng ta sẽ quy về dạng toán so sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai với số $\alpha \neq 0$ mà cụ thể trong bài toán này là $\alpha = 2$. Vì vậy ta sử dụng kĩ thuật đặt ẩn phụ để quy về việc so sánh các nghiệm của một phương trình bậc hai với số 0.

Trước tiên ta đặt $t = x - 2$ hay $x = t + 2$. Thay vào $y' = \left(m^2-1\right)x^2 + 2(m-1)x - 2$ ta thu được một tam thức bậc hai (theo t) như sau:

$$g(t) = \left(m^2-1\right)t^2 + \left(4m^2+2m-6\right)t + 4m^2 + 4m - 10.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$

$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty;2) \Leftrightarrow g(t) \leq 0, \forall t \in (-\infty;0)$.

Điều này sẽ tương đương với:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 > 0 \\ -\dfrac{4m^2+2m-6}{m^2-1} > 0 \\ \dfrac{4m^2+4m-10}{m^2-1} \geq 0 \end{cases}$$

Giải hai hệ bất phương trình này ta tìm được nghiệm $-\frac{1}{3} \leq m < 1$.

Tổng hợp hai trường hợp trên ta đi đến kết luận: Với $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Bài toán 5. *Tìm m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m^2-m^3$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 1.*

Mới đọc qua đề toán này, có lẽ nhiều em học sinh sẽ "ngỡ ngàng" vì yêu cầu có vẻ "lạ lẫm". Tuy nhiên, chịu khó quan sát một chút các em sẽ nhận ra rằng: hàm số chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 1 có nghĩa là nghịch biến trên đoạn $[x_1,x_2]$ sao cho $l=|x_1-x_2|=1$ (với x_1,x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$).

Bây giờ chúng ta bắt đầu giải bài toán này:

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Đạo hàm $y'=3x^2+6x+m$. Ta có: $\Delta'=9-3m$.

- Nếu $m\ge 3$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Điều này dẫn đến hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. Như vậy không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $m<3$ thì $\Delta'>0$. PT $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$.

Hàm số chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $1\Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1;x_2]$ với $|x_1-x_2|=1$.

Hệ thức này đã gợi ý chúng ta sử dụng định lý Viète.

Thật vậy, $|x_1-x_2|=1\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=1$

$$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1\Leftrightarrow(-2)^2-4.\frac{m}{3}=1\Leftrightarrow m=\frac{9}{4}.$$

Nếu không sử dụng định lý Viète thì các em học sinh có thể làm như sau:

PT $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{9-3m}}{3};\ x_2=\frac{-3+\sqrt{9-3m}}{3}$$

Khi đó:

$$|x_1-x_2|=1\Leftrightarrow\left|\frac{-3-\sqrt{9-3m}}{3}-\frac{-3+\sqrt{9-3m}}{3}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{2(\sqrt{9-3m})}{3}\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{9-3m}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow m=\frac{9}{4}.$$

Bài toán 6. *Tìm m để hàm số: $y=x^4-2mx^2-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.*

Đối với hàm trùng phương bao giờ cũng dễ dàng tìm được nghiệm cụ thể của phương trình $y'=0$. Vì vậy ta hãy tìm ra các nghiệm của nó rồi lập luận để đi đến được yêu cầu bài toán.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Đạo hàm $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

- Nếu $m\le 0$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$. Tức là hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên nó luôn đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

- Nếu $m>0$ thì phương trình $y'=0$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là: $-\sqrt{m},0,\sqrt{m}$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $(1;2)$

$\Leftrightarrow\sqrt{m}\le 1\Leftrightarrow m\le 1$.

Tương tự như **bài 3,** chúng ta có một hướng giải quyết khác cho bài toán này là phương pháp hàm số.

Ta lập luận như sau: Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in[1;2]$

(do $y'(x)$ liên tục tại $x=1,x=2$)

$\Leftrightarrow 4x^3-4mx\ge 0,\forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\le x^2,\forall x\in[1;2]\Leftrightarrow m\le\min\limits_{x\in[1;2]}(x^2)=1.$

Các em có nhận ra rằng sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết bài toán này rất là hấp dẫn phải không? Nó vừa ngắn gọn, vừa gần gũi với những vấn đề mà các em đang học ở năm cuối cấp.

III. Bài tập đề nghị

1. Tìm m để hàm số

$$y=\frac{m-1}{3}x^3+mx^2+(3m-2)x+m^3-3m^2-7m+9$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Tìm m để hàm số

$$y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x-m^2+1$$

đồng biến trên $[1;+\infty)$.

3. Tìm m để hàm số

$$y=x^3+3x^2+(m+1)x+m^3+3m^2-m-11$$

nghịch biến trên $(-1;1)$.

4. Tìm m để hàm số

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)x^2-\left(\frac{3}{4}\sin t\right)x+2015$$

luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

5. Cho hàm số: $y=-x^4+2mx^2-m^2$. Tìm m để:

a) Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$;

b) Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$, $(2;3)$.

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

Câu 1. (2 *điểm*) Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Tìm tham số m để đường thẳng d: $y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ).

Câu 2. (1,5 *điểm*)

1) Giải bất phương trình $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x-2}>\dfrac{1+\log_2 x}{2+\log_2 x}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4-x^2}.$$

Câu 3. (1 *điểm*)

1) Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)(z-1)=(2+3i)z$. Hãy tính $z.\bar{z}$

2) Trên giá sách có 3 ngăn, ngăn thứ nhất có 5 cuốn sách giáo khoa Toán và 5 cuốn sách bài tập Toán; ngăn thứ hai có 6 cuốn sách giáo khoa Lý và 6 cuốn sách bài tập Lý và ngăn thứ ba có 5 cuốn sách giáo khoa Hóa và 5 cuốn sách bài tập Hóa. Lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi ngăn một cuốn, tìm xác suất để 3 cuốn lấy được đều là sách bài tập.

Câu 4. (0,5 *điểm*) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$.

Câu 5. (1 *điểm*) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$. Tìm tọa độ điểm trên trục tung sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng Δ bằng khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (P).

Câu 6. (1 *điểm*) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Tính theo a thể tích khối tứ diện $A'B'BC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'.

Câu 7. (1 *điểm*) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y=0$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C nằm trên đường tròn (C) sao cho $OABC$ là hình chữ nhật có $AB=2BC$.

Câu 8. (1 *điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6\\4\sqrt{1+x}-xy\sqrt{4+y^2}=0\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R}).$$

Câu 9. (1 *điểm*) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\xy+yz+zx=-4\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^4+y^4+z^4}$.

NGUYỄN VĂN SÁNG
(*GV Bộ môn Toán Đại học Cần Thơ*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, giải PT $y'(x_0)=-3$ được $x_0\in\{0;2\}$. Từ đó tìm được hai tiếp tuyến có phương trình lần lượt là $y=-3x-1$, $y=-3x+11$.

Câu 2. a) Phương trình cho tương đương với

$$\cos 2x+\cos x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)=0.$$

Đáp số. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi$.

b) Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$, $\overline{z-i}=a-(b-1)i$.

Ta có: $(3+i)(a+bi)+(1-i)(a-(b-1)i)=2-4i$ hay

$(4a-2b-1)+(2b+5)i=0\Leftrightarrow a=-1,\ b=-\dfrac{5}{2}$.

Vậy z có phần thực là -1, phần ảo là $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 3. ĐK: $\begin{cases}x-1>0\\x^2+x-4>0\end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 2+\log_2(x-1)^2=\log_2(x^2+x-4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2-4x+2)=\log_2(x^2+x-4)$$

Đáp số. $x\in\{2;3\}$.

Câu 4. ĐK: $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Đặt $a=\sqrt{x^2+x+2}$, $b=\sqrt{x^2-1}$ thì

$4x^2+x-1=3b^2+a^2$, $4x^2+3x+5=3a^2+b^2$,

BPT đã cho có dạng:

$(3b^2+a^2)a\le(3a^2+b^2)b+1\Leftrightarrow(a-b)^3\le 1$

$\Leftrightarrow a\le b+1$ hay $\sqrt{x^2+x+2}\le 1+\sqrt{x^2-1}$ (1).

Giải (1) bằng cách bình phương hai vế được đáp số $x\in\left(-\infty;\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$.

Câu 5. $I=\int_0^1(1+2x)e^x\mathrm{d}x-\int_0^1(2x^2+x)\mathrm{d}x$

$A=\int_0^1(2x^2+x)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{7}{6}$.

Đặt $\begin{cases}u=1+2x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=e^x\end{cases}$, ta có:

$B=\int_0^1(1+2x)e^x\mathrm{d}x=(1+2x)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2e^x\mathrm{d}x=e+1$.

Vậy $I=B-A=e-\dfrac{1}{6}$.

Câu 6. • Tính $SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a\sqrt{3}$,

$S_{ABCD}=AB.AD=2a^2\sqrt{3}$, $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=2a^3$.

• Từ $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$, do đó: $d(AB;SD)$ $=d(AB;(SCD))=d(H;(SCD))$.

Kẻ $HM\perp CD$, $HK\perp SM$, chứng minh được $HK\perp(SCD)$ nên $d(H;(SCD))=HK$.

Chỉ ra $HM=a\sqrt{3}$, từ $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HM^2}$

$\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $d(AB;SD)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7. Gọi E là điểm đối xứng của A qua M thì $AB//EC$. Xét ΔAEC có CM là trung tuyến, $CD=\dfrac{2}{3}CM$ nên D là trọng tâm, AD là phân giác của $\widehat{EAC}$ nên ΔAEC cân tại A, suy ra $AD\perp EC$. Từ đó $AB\perp AD$. Từ kết quả A là hình chiếu vuông góc của B trên AD, tìm được $A=(1;-1)$.

Lấy $D\left(t;\dfrac{3t-5}{2}\right)$ thuộc AD ($D\ne A$ nên $t\ne 1$).

Từ $\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BD}$ tìm được $C=\left(\dfrac{3t-4}{2};\dfrac{9t-9}{2}\right)$, với $t>\dfrac{4}{3}$. Ta có $d(C;AB)=\dfrac{2S_{ABC}}{AB}=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$ (*).

Từ (*) tìm được $t=3$, suy ra $C\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Câu 8. Từ $\{I\}=d\cap(P)\Rightarrow I=(3;2;3)$

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}(2;1;-1)$, d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}(1;2;1)$. Δ có một VTCP là

$\overrightarrow{u_\Delta}=\dfrac{1}{3}\left[\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right]=(1;-1;1)$. *Đáp số.* $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 9. Mỗi câu có 4 cách lựa chọn phương án nên không gian mẫu Ω của phép thử có số phần tử là $|\Omega|=4^{10}$.

Gọi x là số câu trả lời đúng của một thí sinh $(x\in\mathbb{N},x\le 10)$, thí sinh được 26 điểm khi và chỉ khi $5x-(10-x)=26\Leftrightarrow x=6$.

Gọi A là biến cố: "*Thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên phương án trả lời được 26 điểm*".

- Chọn 6 câu trong số 10 câu có C_{10}^6 cách.
- Với mỗi bộ 6 câu đã chọn chỉ có một cách để chọn phương án đúng cho cả 6 câu đó, 4 câu còn lại có 3^4 cách chọn phương án để thí sinh làm sai cả 4 câu này. Suy ra $|\Omega_A|=C_{10}^6.3^4$.

Vậy $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{C_{10}^6.3^4}{4^{10}}=\dfrac{8505}{524288}\approx 0,0162$.

Câu 10. • Với $x^2+y^2=1$, ta có:

$5+4y-4x^2=(2+y-x\sqrt{3})(2+y+x\sqrt{3})$,

$\sqrt{2-2y}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,

$\sqrt{2\pm x\sqrt{3}+y}=\sqrt{\left(x\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2}$.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta đặt $A(0;1)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $M(x;y)$ thì $\sqrt{2}P=MA.MB.MC(MA+MB+MC)$.

(Xem tiếp trang 15)

LỜI GIẢI NGẮN GỌN ... (Tiếp theo trang 5)

Đặt $\frac{5y+4}{17}=t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Ta có $\frac{5y+4}{17}=t \Leftrightarrow y=\frac{17t-4}{5}=3t+\frac{2t-4}{5}$.

Đặt $\frac{2t-4}{5}=t_1$, do $y, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t_1 \in \mathbb{Z}$.

Ta có $\frac{2t-4}{5}=t_1 \Leftrightarrow t=\frac{5t_1+4}{2}=2t_1+2+\frac{t_1}{2}$.

Đặt $\frac{t_1}{2}=t_2$, do $t, t_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow t_2 \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $t = 5t_2 + 2$; $x = 14 + 39t_2$; $y = 17t_2 + 6$.

Vậy, (7) có vô số nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} x=14+39t_2 \\ y=6+17t_2 \end{cases} \text{ với } t_2 \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét

- Việc không nhẩm được nghiệm hoặc không nhẩm nghiệm dẫn đến lời giải dài dòng, việc biến đổi và tính toán nhiều dễ gây nhầm lẫn.

- Thực chất mỗi lần đặt ẩn phụ là một lần đưa PT về dạng đơn giản hơn. Ví dụ khi đặt $\frac{5y+4}{17}=t$, thực chất là ta tiếp tục giải PT nghiệm nguyên $-5y + 17t = 4$. Vì vậy tiếp tục nhẩm được nghiệm sẽ là phương án tốt nhất.

• Nhẩm nghiệm khi có cơ hội. Ở PT trên ta nhẩm được một nghiệm $(y_0; t_0) = (6; 2)$.

Cách 2: Từ (7) ta rút ra được:

$$x=\frac{39y+4}{17}=2y+\frac{5y+4}{17}=2y+\frac{5y-5.6+17.2}{17}$$
$$=2y+2+5.\frac{y-6}{17}.$$

Đặt $\frac{y-6}{17}=t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$. Suy ra (7) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x=14+39t \\ y=6+17t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

★Ví dụ 8. *Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình* $41x - 37y = 187$ (8)

Lời giải. Từ (8) ta rút ra được:

$$y=\frac{41x-187}{37}=x-5+\frac{4x-2}{37}$$
$$=x-5+\frac{4x+4.18-37.2}{37}=x-7+4.\frac{x+18}{37}.$$

Đặt $\frac{x+18}{37}=t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$.

Từ đó $x = -18 + 37t$ và $y = -25 + 41t$.

Do $x = -18 + 37t > 0$; $y = -25 + 41t > 0$

suy ra $t > \frac{18}{37}$; $t > \frac{25}{41} \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow$ x và y nhỏ nhất $\Leftrightarrow t$ duy nhất. Khi đó $t = 1$. Vậy (8) có nghiệm nguyên dương duy nhất là: $(x; y) = (19; 16)$.

Nhận xét

- Khi tách được đến $\frac{4x-2}{37}$, ta cần tiếp tục giải PT nghiệm nguyên $-4x + 37t = -2$. Điều này tương đương với việc tách được -2 trong biểu thức $\frac{4x-2}{37}$ thành tổng của hai số nguyên, một số chia hết cho 4, một số chia hết cho 37 (dễ thấy $-2 = 72 - 74 = 4.18 - 37.2$).

★Ví dụ 9. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $40x - 31y = 1$ (9).

Phân tích

- Ta thấy $40x$ có chữ số tận cùng là $0 \Rightarrow 31y$ có chữ số tận cùng là 9; chọn $y = 9$ ta nhẩm được $x = 7$.

- Nếu tách $y=\frac{40x-1}{31}=x+\frac{9x-1}{31}$, ta có thể tách -1 thành tổng của hai số nguyên, một số chia hết cho 9, một số chia hết cho 31, ta có: $-1 = 62 - 63 = 31.2 - 9.7$.

Lời giải

Cách 1: Từ (9) ta rút ra được:

$$x=\frac{31y+1}{40}=\frac{31y+40.7-31.9}{40}=7+31.\frac{y-9}{40}.$$

Đặt $\frac{y-9}{40}=t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$. Suy ra (9) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x=7+31t \\ y=9+40t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: Từ (9) ta rút ra được:

$$y=\frac{40x-1}{31}=x+\frac{9x-1}{31}$$
$$=x+\frac{9x+31.2-9.7}{31}=x+2+9.\frac{x-7}{31}.$$

Đặt $\frac{x-7}{31}=t$, do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$. Suy ra (9) có vô số nghiệm nguyên: $\begin{cases} x=7+31t \\ y=9+40t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Giải các phương trình với nghiệm nguyên:

a) $3x + 17y = 159$ e) $11x - 20y = 49$

b) $2x + 13y = 156$ f) $9x + 20y = 547$

c) $5x - 7y = 21$ g) $117x + 38y = 2$

d) $11x - 7y = 31$

2. Viết 112 thành tổng của hai số nguyên dương, một số chia hết cho 5, số còn lại chia hết cho 7.

3. Tìm các số nguyên dương x, y nhỏ nhất nghiệm đúng phương trình:

a) $15x - 49y = 11$ b) $17x - 29y = 100$

4. Tìm hai số dương nhỏ nhất thỏa mãn: hiệu của chúng là 10, số bị trừ chia hết cho 8, số trừ chia hết cho 17.

5. Tìm số học sinh của một lớp học, biết rằng khi xếp hàng, nếu xếp mỗi hàng 5 học sinh thì thừa 3 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 7 học sinh thì thừa 1 học sinh.

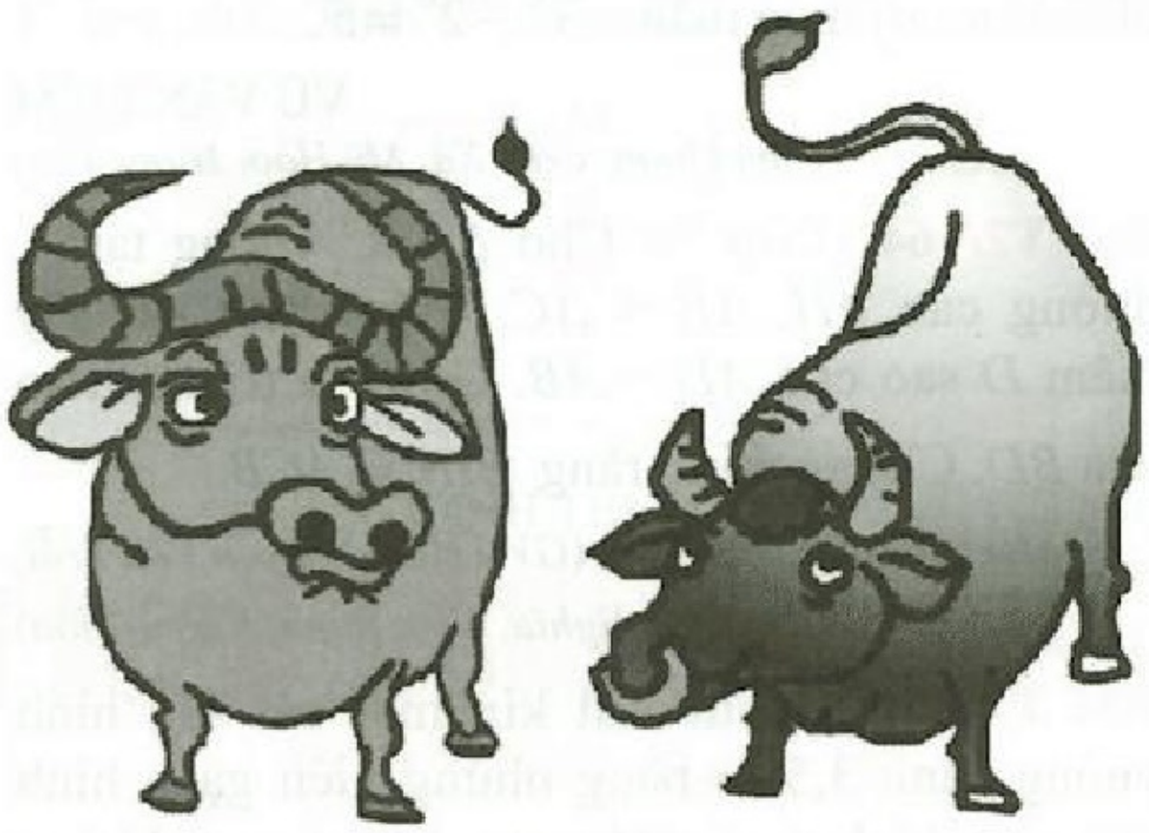
6. Cần đặt một ống nước dài 21m bằng hai loại ống: ống dài 2m và ống dài 3m. Hỏi mỗi loại cần mấy ống để không bị bỏ phí một đoạn ống nào?

7. Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của hệ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 3x + 5y + 4z = 37 \end{cases}$$

8. (*Bài toán cổ*). Mai em đi chợ phiên. Anh gửi một tiền (60 đồng). Mua cam cùng quýt. Không nhiều thì ít. Mua lấy 100. Cam 3 đồng một. Quýt 1 đồng năm. Thanh yên tươi tốt. 5 đồng một trái. Hỏi mua mỗi thứ mấy trái?

9. (*Bài toán cổ*). Một trăm con trâu. Một trăm bó cỏ. Trâu đứng ăn 5. Trâu nằm ăn 3. Lụ khụ trâu già. Ba con 1 bó. Hỏi mỗi loại trâu có mấy con?



HƯỚNG DẪN GIẢI ... (*Tiếp theo trang* 13)

Vì $AB = BC = CA = \sqrt{3}$ nên ΔABC đều, đường tròn tâm O với bán kính $R = 1$ là đường tròn ngoại tiếp ΔABC và M thay đổi trên đường tròn này khi $(x; y)$ thay đổi.

• Bằng tính toán trực tiếp chỉ ra được:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6 \quad (1)$$

$$MA^2.MB^2 + MB^2.MC^2 + MC^2MA^2 = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có

$$2\sqrt{2}P = (MA.MB + MB.MC + MC.MA)^2 - 9$$

$$= \left[\frac{1}{2}(MA + MB + MC)^2 - 3\right]^2 - 9 \quad (3)$$

• Xét điểm M chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, không giảm tính tổng quát coi M thuộc cung nhỏ BC, khi đó chứng minh được $MB + MC = MA \Rightarrow MA + MB + MC = 2MA$, có $AB \le AM \le 2R$, nên $2\sqrt{3} \le MA + MB + MC \le 4$, trong đó $MA + MB + MC = 4$, chẳng hạn khi AM là đường kính của đường tròn $(O;1)$ hay $M(0;-1)$. Các trường hợp còn lại về vị trí của M trên đường tròn $(O;1)$ cũng cho kết quả tương tự: $2\sqrt{3} \le MA + MB + MC \le 4$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $P \le 4\sqrt{2}$. Chẳng hạn khi $x = 0, y = -1$ thì $P = 4\sqrt{2}$ nên $\max P = 4\sqrt{2}$.

PHẠM BẮC PHÚ

(*GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/464 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn : $3^m - 2^n = 5$.

VŨ VĂN LIÊM
(Cẩm Quan, Cẩm Xá, Mỹ Hào, Hưng Yên)

Bài T2/464 (Lớp 7). Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG *(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

Bài T3/464. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5 m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25 cm × 100 cm mà không cắt gạch được hay không ?

TRƯƠNG QUANG AN
(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T4/464. Dựng tam giác ABC biết ba đường thẳng d_a, d_b, d_c chứa ba đường trung trực của tam giác (giả thiết ba đường này đồng quy tại O) và biết độ dài đoạn AH, ở đây H là trực tâm của tam giác ABC.

VŨ ĐÌNH PHƯỢNG
(GV khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/464. Giải phương trình:

$$2010 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{2016 - x}}} = x.$$

PHẠM XUÂN TRINH
(GV THCS Trực Phú, Trực Ninh, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/464. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{12y}{x} = 3 + x - 2\sqrt{4y - x} \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 \end{cases}$$

HOÀNG ĐĂNG THƯỞNG
(GV THPT Thanh Thủy, Thanh Thủy, Phú Thọ)

Bài T7/464. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau

$$H = \left|x^3 - y^3\right| + \left|y^3 - z^3\right| + \left|z^3 - x^3\right|.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Bài T8/464. Cho tam giác ABC nhọn có tâm đường tròn ngoại tiếp là O. P là điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC và P nằm trong tam giác ABC (P khác B, C). Phân giác của góc $\widehat{CPA}$ cắt CA tại E, phân giác của góc $\widehat{APB}$ cắt AB tại F. Gọi I, L, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEF, PCA, PAB. Chứng minh rằng I, K, L thẳng hàng.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/464. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^3 + y^3 = x^2 + 12xy + y^2$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên – Huế)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/464. Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n > 3)$ thỏa mãn điều kiện:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n \text{ và } a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ge n^2.$$

Chứng minh rằng $\max(a_1, a_2, ..., a_n) \ge 2$.

NGUYỄN THỊ CHÚC
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T11/464. Cho dãy số thực (a_n):

$$\begin{cases} a_1 \ge 0 \\ a_{n+1} = 10^n a_n^2,\ n \ge 1 \end{cases}.$$

Tìm các giá trị của a_1 để $\lim a_n = 0$.

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Bài T12/464. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên AC, AB; I, J lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc F, E của các tam giác AFC, AEB; BJ cắt CI tại K. Lấy điểm Q trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC sao cho $\widehat{AQK} = 90^0$. Chứng minh rằng AQ, BI, CJ đồng quy.

NGUYỄN THANH DŨNG
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn)

Bài L1/464. Một thiên thạch có khối lượng 1600 kg chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo tròn ở độ cao 4200 km so với Mặt Đất. Thiên thạch đó bất ngờ va chạm trực diện với một thiên thạch khác bé hơn nhiều và bị mất 2,0% động năng, nhưng không bị lệch hướng chuyển động và giữ nguyên khối lượng.

1) Mô tả hình dạng quỹ đạo thiên thạch sau va chạm.

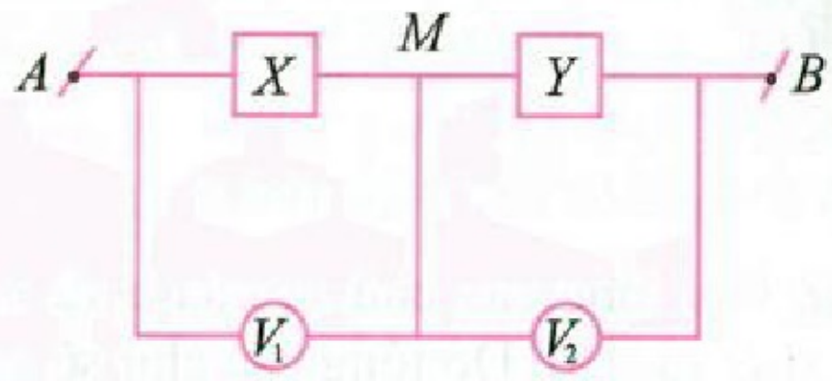
2) Tìm khoảng cách ngắn nhất của quỹ đạo thiên thạch sau va chạm so với mặt đất. Nhận xét. Cho biết bán kính Trái Đất là 6400 km.

VŨ THANH KHIẾT (*NXBGD Việt Nam*)

Bài L2/464. Cho mạch điện có sơ đồ như hình bên. X, Y là hai hộp linh kiện, mỗi hộp chỉ chứa 2 trong 3 loại linh kiện mắc nối tiếp gồm: điện trở thuần, cuộn cảm thuần, tụ điện. Biết ampe kế có điện trở rất nhỏ, vôn kế có điện trở rất lớn. Ban đầu mắc 2 điểm A, M vào hai cực của một nguồn không đổi thì V_1 chỉ 45V, ampe kế chỉ 1,5A. Sau đó mắc A, B vào nguồn xoay chiều có điện áp $u_{AB} = 120\sin 100\pi t$ (V) thì ampe kế chỉ 1A, hai vôn kế chỉ cùng một giá trị và u_{AM} lệch pha góc $\frac{\pi}{2}$ so với u_{MB}.

a) Hỏi hộp X, Y chứa các linh kiện nào, tính trị số của chúng? Viết biểu thức của cường độ dòng điện.

b) Thay tụ C trong mạch bằng tụ C' thì số chỉ V_2 lớn nhất. Tính C' và U_{2max}.



ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/464 (For 6th grade). Find all pairs of natural numbers (m, n) satisfying $3^m - 2^n = 5$.

Problem T2/464 (For 7th grade). Given a right triangle ΔABC with the right angle A and $AB < AC$. Let AH be the altitude from the vertex A. On AC choose D such that $AD = AB$. Let I be the midpoint of BD. Prove that $\widehat{BIH} = \widehat{ACB}$.

Problem T3/464. Can we cover a square-shape area of the size 3,5 m × 3,5 m by rectangle-shape tiles of the size 25 cm × 100 cm without cutting any tile?

Problem T4/464. Construct a triangle ABC given three lines d_a, d_b, and d_c which contain perpendicular bisectors of ABC (assume that they are concurrent at O) and given the length of AH where H is the orthocenter of ABC.

Problem T5/464. Solve the equation

$$2010 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{2016 - x}}} = x.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/464. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{12y}{x} = 3 + x - 2\sqrt{4y - x} \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 \end{cases}.$$

Problem T7/464. Let x, y, z be real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Find the maximum and minimum values of the expression

$$H = \left|x^3 - y^3\right| + \left|y^3 - z^3\right| + \left|z^3 - x^3\right|.$$

Problem T8/464. Given an acute traingle ABC with the circumcenter O. Let P be an arbitrary point on the circumcircle of the traingle OBC such that P lies inside the triangle ABC and P is different from B and C. The bisectors of the angles $\widehat{CPA}$ and $\widehat{APB}$ respectivly intersects CA and AB at E and F. Let I, L, and K respectively be the incenters of the incircles of the triangles PEF, PCA, and PAB. Prove that I, K, and L are collinear.

(*Xem tiếp trang 37*)

Bài T1/460. *Cho a là một số tự nhiên gồm các chữ số khác nhau và b là số gồm các chữ số của a nhưng theo một thứ tự khác. Biết* $a-b=\underbrace{111...1}_{n}$ *(n chữ số 1, n là số nguyên dương), tìm giá trị lớn nhất của n.*

Lời giải. Gọi tổng các chữ số của a và b tương ứng là $s(a)$ và $s(b)$. Do tổng các chữ số của một số có cùng số dư với số đó nên $a-s(a)=9r$ và $b-s(b)=9t$. Theo giả thiết có $s(a)=s(b)$ nên $a-b=9(r-t)$ chia hết cho 9, do đó số $\overline{11...11}$ chia hết cho 9, mà tổng các chữ số của số $\overline{11...11}$ bằng n nên n chia hết cho 9. Do a gồm các chữ số khác nhau nên $n \le 10$. Suy ra $n = 9$. Điều này xảy ra, chẳng hạn với $a = 9087654321$ và $b = 8976543210$, hoặc $a = 1987654320$ và $b = 1876543209$. ❐

➢***Nhận xét.*** Một số bạn khi giải đã đưa thêm yêu cầu sắp thứ tự các chữ số của a, hoặc tìm được $n = 9$ nhưng không chỉ ra sự tồn tại của các số a và b như thế. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Ngô Đức Hoàng, Nguyễn Thị Thùy Trang*, 6A, *Thiều Thị Hạnh Nguyên*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Phú Yên:** *Nguyễn Trần Gia Mỹ*, 6E, THCS Lương Thế Vinh, TP.Tuy Hòa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Ngô Võ Hoàng Việt*, 6A3, TrH Thực hành Sài Gòn, Q. 5.

VIỆT HẢI

Bài T2/460. *Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho:*

$$(x-y)^3+(y-z)^3+3|z-x|=27.$$

Lời giải. Vì $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ là số chẵn nên trong ba số $(x-y), (y-z), (z-x)$ hoặc là cùng chẵn, hoặc là có hai số lẻ và một số chẵn. Mặt khác, $(x-y)^3$ và $(x-y)$; $(y-z)^3$ và $(y-z)$; $3|z-x|$ và $(z-x)$ cùng có tính chẵn lẻ nên vế trái của đẳng thức đã cho, tức $(x-y)^3+(y-z)^3+|z-x|$ luôn là số chẵn, trong khi đó 27 (vế phải) là số lẻ. Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán rất đơn giản nhưng nhiều bạn chia trường hợp không hợp lý, lập luận chưa rõ ràng.
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Tạ Hoàng Hải, Lê Trung Hiếu, Nguyễn Trung Hiếu, Khổng Doãn Hưng*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Lê Hồng Nhung, Lê Minh Việt Anh*, 7A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Hà Khánh Nam*, 7A2, Trường Hanoi Academy, Từ Liêm; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Nguyên, Tăng Hồng Quân*, 7A, *Hoàng Hải Long, Nguyễn Thị Vân Quý, Phạm Thị Hương Giang*, 7B; *Nguyễn Sỹ Trọng, Nguyễn Thu Hiền, Nguyễn Thị Thùy Dương, Trần Thị Cẩm Ly, Lê Bùi Phương Huyền, Nguyễn Thị Linh Đan, Lê Đình Thành, Hoàng Thị Ngọc Trâm*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Thanh Huyền*, 6D, *Nguyễn Trung Phú*, 6A, *Lê Tuấn Kiệt*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Thị Kỳ Duyên*, 7A, THCS Hành Trung, *Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, *Mai Thị Thu Thảo*, 7C, THPT Sông Vệ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/460. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3. \quad (*)$$

Lời giải *Cách* 1. (Của bạn *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**). Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right)+$$

$$+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}-6\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a-b)(b-c)(c-a)+$$

$$+\left[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right]\ge 0$$

(do a, b, c dương, quy đồng và bỏ mẫu số).

Mặt khác, dễ thấy với mọi x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$ thì $3xyz=x^3+y^3+x^3$. Suy ra:

$$3(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$

Do đó $(*)\Leftrightarrow (a-b)^2(a-b+c)$

$$+(b-c)^2(b-c+a)+(c-a)^2(c-a+b)\ge 0.$$

BĐT trên luôn đúng với mọi a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Vậy (*) được chứng minh.

Cách 2. (Của bạn *Lê Tuấn Tú*, 8T, THPT Dân Lập Lương Thế Vinh, **Hà Nội**).

Ta có (*) tương đương với:

$$2(a^2c+b^2a+c^2b)\ge a^2b+c^2a+b^2c+3abc$$

$$\Leftrightarrow a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$
$$\ge ac(b-a)+ab(c-b)+bc(a-c)$$

$$\Leftrightarrow a(c-b)(a-b)+b(a-c)(b-c)+c(b-a)(c-a)\ge 0.$$

Mặt khác, do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại ba số dương x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases}a+b-c=2z>0\\ b+c-a=2x>0\\ c+a-b=2y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=y+z\\ b=z+x.\\ c=x+y\end{cases}$$

Thay vào BĐT trên ta được:

$$(y+z)(y-z)(y-x)+(x+z)(z-x)(z-y)$$
$$+(x+y)(x-y)(x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-z^2)(y-x)+(z^2-x^2)(z-y)$$
$$+(x^2-y^2)(x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-2yz^2-2xy^2-2x^2z$$
$$+xz^2+x^2y+y^2z\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-z)^2+y(y-x)^2+z(z-y)^2\ge 0,$$

BĐT đúng với mọi x, y, z dương, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ (khi đó $a = b = c$).

Vậy (*) được chứng minh. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này nhưng chỉ có hai bạn *Thanh Hiền* và *Tuấn Tú* giải đúng. Các bạn khác đã mắc phải một trong các sai lầm cơ bản sau:

• a, b, c chỉ có vai trò hoán vị vòng quanh, không có vai trò như nhau nên không thể giả thiết $a \le b \le c$.

• Do $B \ge C$ nên $A \ge B \Leftrightarrow A \ge C$ (thực chất đây chỉ là "*bắc cầu*" nên chỉ có thể "suy ra" mà không thể "tương đương").

• $A \ge B$; $C \ge D \Rightarrow A - C \ge B - D$.

• $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$ luôn đúng do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/460. *Xét tam giác ABC thay đổi, cân tại A, nội tiếp đường tròn (O; R) cho trước. Kẻ BH vuông góc với AC tại H. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng BH.*

Lời giải.

Cách 1. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ đường kính AD. Ta có

$$BH = BC\sin C = 2BI\cos\frac{A}{2} = 2AB\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=2AD\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}=4R.\cos^2\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương, ta có

$$1=\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}.\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A}{2}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sin^2\frac{A}{2}.\cos^4\frac{A}{2}}.$$

Suy ra $\cos^2\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$, từ đó, $BH\le\frac{8R\sqrt{3}}{9}$.

Vậy độ dài BH lớn nhất bằng $\frac{8R\sqrt{3}}{9}$, xảy ra khi

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{A}{2},\text{ hay }\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cách 2 (Theo bạn *Bùi Thị Liễu Dương*, 9A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).

Kẻ đường kính AD, gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, HC. Dễ thấy $IK=\frac{1}{2}BH$.

Đặt $AI = x$. Dễ thấy $IK \parallel DC$, áp dụng định lí Thalès cho tam giác ACD, ta có $\frac{IK}{CD}=\frac{AI}{AD}$.

Suy ra $BH=2IK=\frac{2.CD.AI}{AD}$.

Mặt khác, tam giác ACD vuông tại C có CI là đường cao, nên $CD^2 = DI.DA = 2R(2R-x)$.

Vậy $BH^2=\frac{8R(2R-x)x^2}{(2R)^2}=\frac{8}{R}.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(2R-x)$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có $BH^2\le\frac{8}{R}.\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x\right)^3}{27}=\frac{64R^2}{27}$.

Vậy $BH\le\frac{8R\sqrt{3}}{9}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $\frac{x}{2} = 2R - x$, hay $x = \frac{4R}{3}$. ❑

➢*Nhận xét.* 1) Đa số các bạn gửi lời giải về Tòa soạn đều cho lời giải chưa chặt chẽ, phụ thuộc vào hình vẽ. Chủ yếu các bạn sót trường hợp góc BAC tù. Một số bạn xét cả hai trường hợp thì cho lời giải quá dài.

2) Ngoài bạn *Dương*, bạn *Lê Tuấn Tú*, 8T, THPT DL Lương Thế Vinh, **Hà Nội** cũng cho lời giải tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/460. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} & (1) \\ (x^2+y^2)(x+1) = 4 + 2xy(x-1) & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \ge 0, y \ge 0$ và $x + y \ne 0$ (*). Ta có

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 4$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)^2 + (x+y)^2 = 4.$$

Từ điều kiện (*) suy ra $x(x-y)^2 \ge 0, x+y > 0$.

Do đó $(x+y)^2 \le 4 \Rightarrow 0 < x+y \le 2$.

Từ đó suy ra $\frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y} \ge \frac{7+3y}{2}$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số không âm, ta có: $\sqrt{x} \le \frac{x+1}{2}$; $4\sqrt{y} \le 2(y+1)$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{x} + 4\sqrt{y} \le \frac{x+1}{2} + 2(y+1)$$

$$= \frac{(x+y)+5+3y}{2} \le \frac{7+3y}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} \le \frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y}$.

Kết hợp với (1) thì đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{(thỏa mãn (*))}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

➢*Nhận xét.* Đa số các bạn tham gia đều giải vận dụng bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunyakovsky và cho đáp số đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Tạ Duy Phương*, 9A, THCS Mỹ Hưng, Thanh Oai, *Lê Tuấn Tú*, 8T, THPT Dân lập Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Thị Liễu Dương*, 9A4, THCS Yên Lạc; *Phạm Hồng Hạnh*, 9A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ**: *Trần Quốc Lập, Trần Thị Thu Huyền, Nguyễn Thảo Chi*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, *Võ Hoài Nam*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Thị Diễm Quỳnh*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Kon Tum**: *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/460. *Chứng minh rằng với mọi $m > 1$, phương trình sau có nghiệm duy nhất*

$$x^3 - 3\sqrt[3]{3x+2m} = 2m \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{3x+2m} = y$, ta có: $\begin{cases} x^3 - 3y = 2m \\ y^3 - 3x = 2m \end{cases}$.

Trừ từng vế hai phương trình ta được:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$$

(vì $x^2+xy+y^2+3 > 0 \ \forall x, y$). Do đó

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = 2m \quad (2).$$

Đặt $y = f(x) = x^3 - 3x$.

Khi đó: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, với $m > 1$ thì $2m > 2$ nên đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị (C) của $f(x)$ tại đúng một điểm. Do đó PT(2) có nghiệm duy nhất, vậy PT(1) có nghiệm duy nhất. ❑

➢*Nhận xét.* 1) Có thể chứng minh $\sqrt[3]{3x+2m} = x$ như sau: Viết (1) dưới dạng:

$$x^3 + 3x = 3x + 2m + 3\sqrt[3]{3x+2m} \quad (3).$$

Xét hàm $g(t) = t^3 + 3t$, có $g'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \ \forall t$, suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(3) \Leftrightarrow g(x) = g\left(\sqrt[3]{3x+2m}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x+2m}.$$

2) Có thể chứng minh (2) có nghiệm duy nhất bằng cách: Do (2) là PT bậc ba nên có ít nhất 1 nghiệm. Giả sử x_1 và x_2 đều là nghiệm của (2), ta được hai đẳng thức, trừ từng vế hai đẳng thức này, ta cũng suy ra được $x_1 = x_2$.

3) Rất đông các bạn tham gia giải bài này. Cách giải ở trên được đa số các bạn chọn giải. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Hà Nội: *Trần Thiện Nam*, 12A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa; *Nguyễn Hải Yến*, 12A1, THPT Đồng

Quan, Phú Xuyên; *Đỗ Minh Phương*, 10A14, THPT Ngọc Tảo. **Nam Định:** *Lâm Vũ Tuấn*, 12 Anh 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi*, 11A, THPT Yên Phong Số 2; *Nguyễn Thanh Hiếu*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh. **Lào Cai:** *Nguyễn Thu Huyền*, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai. **Phú Thọ:** *Võ Tuấn Dũng*, *Nguyễn Đức Thuận*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; *Tô Minh Hiếu*, 12A1, THPT Trưng Vương, Văn Lâm; *Phạm Tiến Duật*, 11A1, THPT Trần Quang Khải, Khoái Châu. **Hà Nam:** *Nguyễn Bùi Nam Cường*, *Nguyễn Thành Việt*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý. **Thanh Hóa:** *Vũ Hữu Tùng*, *Nguyễn Văn Hưng*, 11A1, THPT Hoằng Hóa IV, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Bùi Văn Bảo*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Hùng*, 10A1, THPT Cù Huy Cận; *Nguyễn Văn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Thừa Thiên-Huế:** *Tống Ngọc Chung*, *Phan Trần Hướng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Quảng Ngãi:** *Lương Hồ Hoàng Nguyên*, 10 Toán 2; *Phạm Thiên Trang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết. **Đăk Lăk:** *Hà Thị Hương Lan*, 12A1, THPT EaSúp. **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, 12A; *Lý Thành Trung*, AK13, THPT chuyên Quang Trung. **Long An:** *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc*, 10T1; *Nguyễn Phú Lộc*, 11T1, THPT chuyên Long An. **Bến Tre:** *Đỗ Thành An*, 12B1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Đồng Tháp:** *Huỳnh Xuân Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/460. *Tìm tất cả các giá trị của tham số p và q sao cho với các giá trị đó hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=q^2+2x-4y & (1)\\ x^2+(12-2p)x+y^2=2py+12p-2p^2-27 & (2)\end{cases}$$

có hai nghiệm $(x_1;y_1)$ *và* $(x_2;y_2)$ *thỏa mãn điều kiện* $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Vì $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là nghiệm của hệ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$ nên thay vào (1), ta thu được

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+5=q^2+2x_1-4y_1 & (3)\\ x_2^2+y_2^2+5=q^2+2x_2-4y_2 & (4)\end{cases}$$

Trừ vế theo vế (3) và (4), ta thu được

$$q^2+2x_1-4y_1-q^2-2x_2+4y_2=0 \Leftrightarrow \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=2 \quad (5)$$

Tương tự, thay $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ vào (2), ta thu được

$$\begin{cases} x_1^2+(12-2p)x_1+y_1^2=2py_1+12p-2p^2-27 & (6)\\ x_2^2+(12-2p)x_2+y_2^2=2py_2+12p-2p^2-27 & (7)\end{cases}$$

Trừ vế theo vế (6) và (7), ta thu được

$$(x_1-x_2)(12-2p)=2p(y_1-y_2) \quad (8)$$

Từ (5) và (8) suy ra $\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=2=\dfrac{p}{6-p} \Leftrightarrow p=4.$

Thay $p=4$ vào hệ đã cho, ta thu được

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=q^2 & (9)\\ (x+2)^2+(y-4)^2=9 & (10)\end{cases}$$

Nhận xét rằng (9) là phương trình đường tròn tâm $I(1,-2)$ bán kính $|q|$, còn (10) là phương trình đường tròn tâm $J(-2,4)$ bán kính 3. Để hệ (9) – (10) có hai nghiệm thì hai đường tròn này phải cắt nhau tại hai điểm hay

$$||q|-3|<IJ<|q|+3 \Leftrightarrow ||q|-3|$$

$$<\sqrt{(-2-1)^2+(4+2)^2}<|q|+3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}-3<|q|<3+3\sqrt{5}.$$

Kết luận. Các giá trị của tham số p và q sao cho ứng với các giá trị đó, hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=q^2+2x-4y\\ x^2+(12-2p)x+y^2=2py+12p-2p^2-27\end{cases}$$

có hai nghiệm (x_1,y_1) và (x_2,y_2) thỏa mãn điều kiện $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$

là $p=4$ và $|q|\in(3\sqrt{5}-3,3\sqrt{5}+3)$. ❐

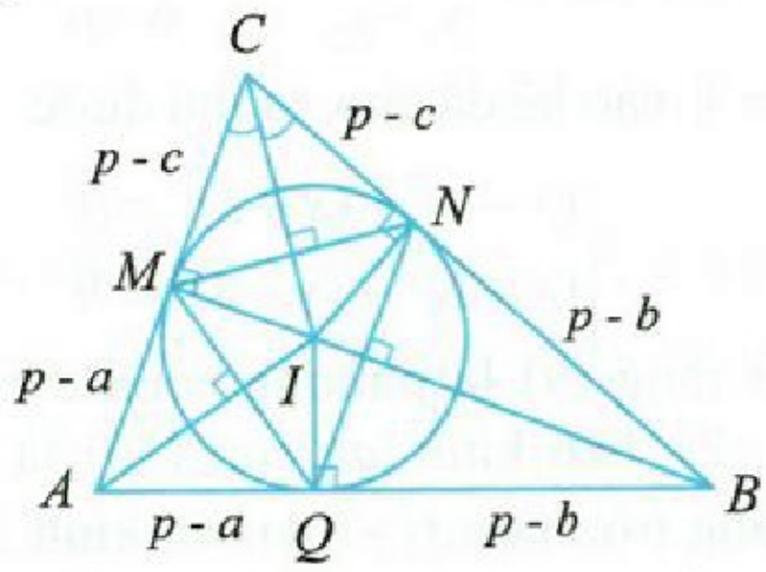
➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Giang:** *Nghiêm Văn Nghĩa*, 11A1, THPT Lạng Giang 3; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, *Nguyễn Hải Yến*, 12A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp*, *Dương Hồng Sơn*, *Nguyễn Phúc Hoàng*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Long An:** *Phạm Đăng Khoa*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nam Định:** *Vũ Quang Định*, 12A2, *Lâm Vũ Tuấn*, 12A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Bùi Văn Bảo*, 11T1, THPT Đô Lương 1; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, *Lê Bảo Anh*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Triều Minh*, 12T, THPT chuyên

Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Vũ Hữu Tùng*, 11A1, *Nguyễn Danh Thắng*, *Nguyễn Khải Hưng*, 10A5, THPT Hoằng Hóa.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/460. *Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Gọi R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng:* $\frac{ab+bc+ca}{p^2+9Rr} \geq \frac{4}{5}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải.



Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M, N là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh CA và CB tương ứng. Khi đó $CM = CN = p - c$. Xét tam giác vuông ICM có $IC^2 = \frac{(p-c)^2}{\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{2(p-c)^2}{1+\cos C}$. Sử dụng định lý côsin cho tam giác ABC ta có:

$$1+\cos C = 1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2p(p-c)}{ab}.$$

Do đó $IC^2 = \frac{(p-c)ab}{p} = ab - \frac{abc}{p}$.

Mặt khác $abc = 4RS_{ABC} = 4Rpr$,

suy ra $IC^2 = ab - 4Rr$. Tương tự ta cũng có:

$$IB^2 = ac - 4Rr;\ IA^2 = bc - 4Rr \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Leibniz cho ΔABC ta được

$$IG^2 = \frac{1}{3}(IA^2+IB^2+IC^2) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \ (2)$$

(với G là trọng tâm ΔABC).

Từ (1) và (2) suy ra

$$IG^2 = \frac{1}{3}(ab+bc+ca) - 4Rr - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 9IG^2 = 3(ab+bc+ca) - 36Rr - (4p^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= 5(ab+bc+ca) - 4(p^2+9Rr) \geq 0.$$

Từ đó $5(ab+bc+ca) \geq 4(p^2+9Rr)$, dẫn đến

$$\frac{ab+bc+ca}{p^2+9Rr} \geq \frac{4}{5} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ chỉ $I \equiv G$, hay ΔABC là tam giác đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Đa số các bài giải gửi về Tòa soạn đều sử dụng *BĐT Schur* bậc ba hoặc sử dụng *phương pháp chuẩn hóa bất đẳng thức*. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Khánh*, 11Toán1, *Trần Bá Khôi*, 11 Toán2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Trần Nhật Quang*, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, *Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Mẫn Đức Bình Minh*, 11A1, THPT Yên Phong Số 1; **Phú Thọ:** *Dương Gia Huy*, 10 Toán, *Lê Bảo Anh*, *Nguyễn Đức Thuận*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, *Triệu Ninh Ngân*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Nam:** *Phạm Quốc Thịnh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, *Ngô Sỹ Quân*, 10A1, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, *Nguyễn Huy Hùng Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 11A1, THPT Thái Hòa, *Đậu Thị Khánh Linh*, 11A1, THPT Đô Lương I; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Trần Hướng*, *Nguyễn Minh Hải*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Trần Đức Thanh*, 11A1, *Trần Nhân Trung*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Lâm Bá Thịnh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh*, 11 Toán1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Khiêm*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Trần Trung Hiếu*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/460. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn* $abc \geq 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4b^2c^2}{bc+1} + \frac{b^4c^2a^2}{ca+1} + \frac{c^4a^2b^2}{ab+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Vì $abc \geq 1$ nên

$$S = (abc)^2\left(\frac{a^2}{bc+1} + \frac{b^2}{ca+1} + \frac{c^2}{ab+1}\right)$$

$$\geq \frac{a^2}{bc+1} + \frac{b^2}{ca+1} + \frac{c^2}{ab+1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai dãy số thực $\frac{a}{\sqrt{bc+1}}; \frac{b}{\sqrt{ca+1}}; \frac{c}{\sqrt{ab+1}}$ và $\sqrt{bc+1}; \sqrt{ca+1}; \sqrt{ab+1}$, ta được

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{bc+1} + \frac{b^2}{ca+1} + \frac{c^2}{ab+1}\right)(ab+bc+ca+3).$$

Do đó và theo bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$S \ge \frac{a^2}{bc+1}+\frac{b^2}{ca+1}+\frac{c^2}{ab+1} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3}.$$

Lại có $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có: $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3$, suy ra: $ab+bc+ca+3 \le 2(ab+bc+ca)$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} abc=1 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Ta được

$$S \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Từ bất đẳng thức hiển nhiên

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$$

dễ dàng suy ra $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2) Với $x;y;z$ dương, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai dãy số thực

$$\frac{a}{\sqrt{x}};\frac{b}{\sqrt{y}};\frac{c}{\sqrt{z}} \text{ và } \sqrt{x};\sqrt{y};\sqrt{z},$$

ta được bất đẳng thức Schwarz

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z};$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hoài Nam*, 10A1, THPT Cù Huy Cận; **Hưng Yên:** *Lê Thùy Dương*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thái Nguyên:** *Lê Hoàng Thu Thảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên, *Nguyễn Thị Ngọc Lan*, 10A1, THPT Lương Phú, Phú Bình; **Nam Định:** *Đặng Thiên Hùng, Vũ Tuấn Trường*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Long:** *Trương Ngô Minh Bảo*, 10/1, *Châu Minh Khánh, Trịnh Thế Chương, Lê Minh Quân*, 10 T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nghệ An:** *Nguyễn Việt Đức*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Yên Bái:** *Hoàng Ngọc Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Sơn Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Ngãi:** *Vũ Văn Tiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT Nguyễn Quang Diêu, TP Cao Lãnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T10/460. *Tìm tất cả các số k nguyên dương sao cho tồn tại 2015 số nguyên dương phân biệt thỏa mãn tổng của 2015 số này chia hết cho tổng của k số phân biệt bất kỳ trong 2015 số đó.*

Lời giải. Ta thấy ngay $k \le 2015$.

• Với $k = 2015$ thì hiển nhiên thỏa mãn.

• Với $k = 1$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng: Với mọi $n \ge 3$ luôn tồn tại n số nguyên dương phân biệt sao cho tổng của chúng chia hết cho bất kỳ số nào trong n số đó.

Thật vậy với $n = 3$ thì 3 số 1, 2, 3 thỏa mãn. Giả sử khẳng định đúng với n: tồn tại n số $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ chia hết cho a_i $\forall i = 1,2,...,n$. Xét $n + 1$ số: $a_1, a_2, ..., a_n, S$ thì tổng $n + 1$ số này là $2S$ chia hết cho $a_1, a_2, ...a_n$ và S. Vậy khẳng định đúng với $n + 1$.

• Với $2 \le k \le 2014$. Ta chứng minh không tồn tại. Giả sử tồn tại và giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_{2015}$

Đặt $t = \min\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_{2014} - a_{2013}\}$ và i_0 là chỉ số mà $t = a_{i_0+1} - a_{i_0}$.

Xét 2012 số a_i khác $2015, i_0, i_{0+1}$.

Chọn $k-2$ số a_i trong các số này chẳng hạn $a_{i_1}, ..., a_{i_{k-2}}$ (lưu ý rằng $k \le 2014$).

Đặt $A = a_{i_1} + ... + a_{i_{k-2}} + a_{i_0} + a_{2015}$

$B = a_{i_1} + ... + a_{i_{k-2}} + a_{i_0+1} + a_{2015}$

và $M = \text{BCNN}(A,B)$ Theo giả thiết $S \vdots A, S \vdots B$ nên $S \vdots M$, suy ra $S \ge M$ (1). Lại có

$$M = \frac{AB}{(A,B)} \ge \frac{AB}{B-A} \ge \frac{(a_{2015}+a_{i_0})(a_{2015}+a_{i_0+1})}{a_{i_0+1}-a_{i_0}} \quad (2)$$

Chú ý rằng

$a_{2015} > a_{2014} = a_{2014} - a_{2013} + a_{2013} - a_{2012} + ... + a_2 - a_1 + a_1 \ge 2013t + a_1 > 2013t$

và $a_{i_0+1} = t + a_{i_0} > t$. Do đó $a_{2015} + a_{i_0+1} > 2014t$ (3).

Thành thử từ (2) và (3) ta được

$$M > \frac{(a_{2015}+a_{i_0})2014t}{t} = 2014(a_{2015}+a_{i_0})$$

$$> \underbrace{a_{2015}+...+a_{2015}}_{2014 \text{ số}} + a_{i_0} > a_1 + a_2 + ... + a_{2015} = S \quad (4).$$

Điều này mâu thuẫn với (1).

Đáp số. $k = 1$ hoặc $k = 2015$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chỉ có 4 bạn tham gia giải bài toán này các bạn đều cho đáp số đúng tuy nhiên lời giải chưa chặt chẽ. Lời giải ở trên là của tác giả bài toán.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/460. *Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1+2k \ge (k+2)\sqrt{a+b+c+1}$ *luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c và* $abc = 1$.

Lời giải. Giả sử k là số thực thỏa mãn bài toán.

Xét $a = b = n, c = \frac{1}{n^2}$ với $n \in \mathbb{R}^+$.

Ta có $\frac{2}{n}+n^2+1+2k \ge (k+2).\sqrt{2n+\frac{1}{n^2}+1}$. Suy ra $f(n) = \dfrac{\frac{2}{n}+n^2+1+2k}{\sqrt{2n+\frac{1}{n^2}+1}} \ge k+2$ đúng với mọi $n \in \mathbb{R}^+$. Mặt khác $\lim\limits_{n\to 0^+} f(n) = 2$. Do đó $2 \ge k+2$, suy ra $k \le 0$.

Ta chứng minh $k = 0$ là số thỏa mãn bài toán, tức là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1 \ge 2\sqrt{a+b+c+1}$

$$(a,b,c \in \mathbb{R}^+, abc = 1) \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$.

Ta có: $a^3 \ge abc \ge c^3 \Rightarrow a^3 \ge 1 \ge c^3$

$\Rightarrow a \ge 1 \ge c \Rightarrow (a-1)(c-1) \le 0 \Leftrightarrow a+c \ge ac+1$

$\Rightarrow ab+bc \ge abc+b = 1+b.$

Do đó: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1 = bc+ca+ab+1$

$= (ab+bc)+(ca+1) \ge 2\sqrt{(ab+bc)(ca+1)}$

$= 2\sqrt{a^2bc+abc^2+ab+bc}$

$= 2\sqrt{a+c+ab+bc} \ge 2\sqrt{a+c+1+b}$. ❐

Bất đẳng thức (1) đúng. Vậy số k lớn nhất bằng 0.

➢***Nhận xét.*** Bài toán bất đẳng thức trên hay, có dùng đến các kĩ thuật sâu sắc trong bất đẳng thức. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 10 sau tham gia và có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Khánh, Phùng Văn Nam*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, *Nguyễn Văn Cao, Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Thái, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Ngãi:** *Vũ Văn Tiến*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết.

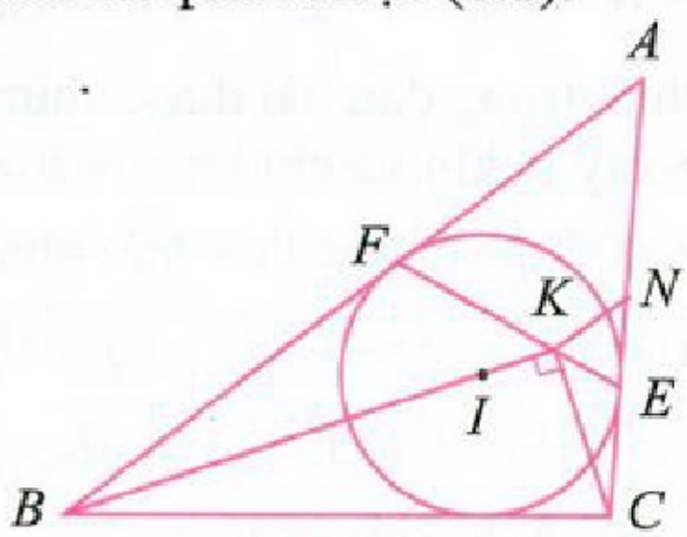
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/460. *Cho ΔABC và điểm D chạy trên cạnh BC. Gọi* (I_1), (I_2) *theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD;* (I_1) *theo thứ tự tiếp xúc với AB, BD tại E, X;* (I_2) *theo thứ tự tiếp xúc với AC, CD tại F, Y.* AI_1, AI_2 *theo thứ tự cắt EX, FY tại Z, T. Chứng minh rằng*

1) X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn tâm K.

2) K chạy trên một đường thẳng cố định.

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc (h.1).



Hình 1

Bổ đề. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với AC, AB tại E, F; K là giao điểm của BI và EF; N là trung điểm của AC. Khi đó 1) $\widehat{BKC} = 90°$. 2) $NK = NE$.

Trở lại giải bài toán **T12/460**.

1) Trên tia đối của tia BA lấy điểm G sao cho $BG = BX$. Gọi H là trung điểm của GX.

Dễ thấy $TY \perp I_2C; TD \perp I_2A$ (1)

Theo bổ đề trên, $\widehat{AZD} = 90° = \widehat{ATD}$.

Do đó A, D, Z, T cùng thuộc một đường tròn (2)

Theo giả thiết $\widehat{CAI_2} = \frac{1}{2}\widehat{CAD}$; $\widehat{DAZ} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}$;

$\widehat{XBH} = \frac{1}{2}\widehat{XBG}$ (3). Dễ thấy $BH // XZ$ (4). Vậy

$(TY, TZ) \equiv (TY, TD) + (TD, TZ) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv (I_2C, I_2A) + (AD, AZ) (\text{mod}\, \pi)$ (vì (1) và (2))

$\equiv (I_2C, AC) + (AC, AI_2) + (AD, AZ) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$

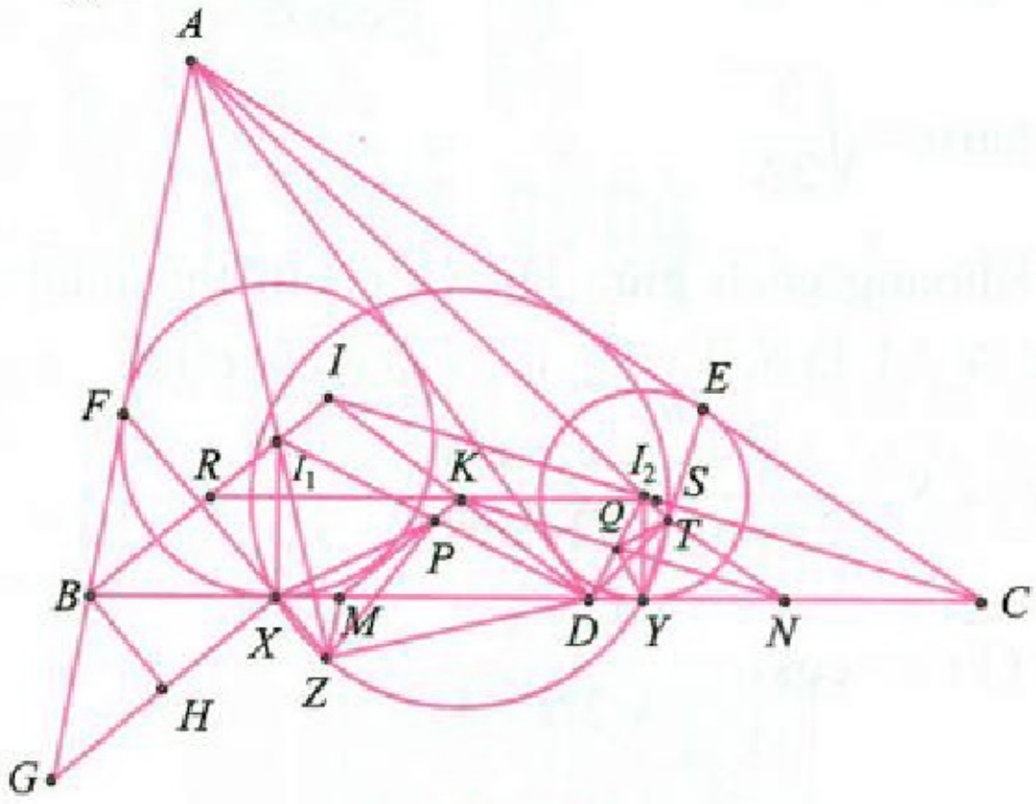
$(\text{mod}\, \pi)$ (vì (3))

$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) (\text{mod}\, \pi) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BG}) (\text{mod}\, \pi)$

$\equiv (BX, BH) (\text{mod}\, \pi)$ (vì (3))

$\equiv (XY, XZ) (\text{mod}\, \pi)$ (vì (4)).

Điều đó có nghĩa là X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.



Hình 2

2) Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của BD, CD, I_1D, I_2D, BI, CI; $V_D^{\frac{1}{2}}$ là phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{2}$. Vì $\widehat{I_1XD} = \widehat{I_1ZD} = 90° = \widehat{I_2YD} = \widehat{I_2TD}$; $PI_1 = PD; QI_2 = QD$ nên $PX = PZ; QY = QT$.

Do đó $MX = MZ; NY = NT$. Theo bổ đề trên, ta có $MX = MZ; NY = NT$.

Vậy, chú ý rằng $KX = KZ; KY = KT$ và M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của BD, CD, I_1D, I_2D, BI, CI, ta có $K = MP \cap NQ = V_D^{\frac{1}{2}}(BI_1) \cap V_D^{\frac{1}{2}}(CI_2)$

$= V_D^{\frac{1}{2}}(BI_1 \cap CI_2) = V_D^{\frac{1}{2}}(I) \in RS$.

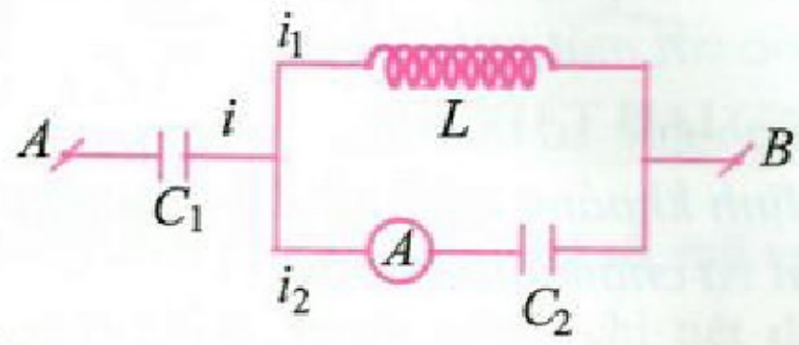
Điều đó có nghĩa là K chạy trên một đường thẳng cố định, đó là đường thẳng RS. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này khá khó, số bạn tham gia giải không nhiều, một số bạn cho lời giải quá dài, chỉ có bạn *Phạm Ngọc Khánh*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội** khắc phục được tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ trong câu 1.

2) Xin nêu tất cả các bạn: **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Long* 10T, *Nguyễn Đức Thuận* 11T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Hà Hữu Linh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTH, ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hoá:** *Vũ Duy Mạnh, Đỗ Thuỳ Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Trọng Dương, Bùi Văn Bảo, Nguyễn Xuân Công, Đậu Thị Khánh Linh*, 11T1,THPT Đô Lương I; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Đà Nẵng:** *Trần Nhân Trung*, 11A2, THPTchuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Nguyễn Trần Hữu Thịnh*; 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/460. *Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Chứng minh rằng chỉ số ở ampe kế A không phụ thuộc C_2, khi $Z_L = Z_{C_1}$.*

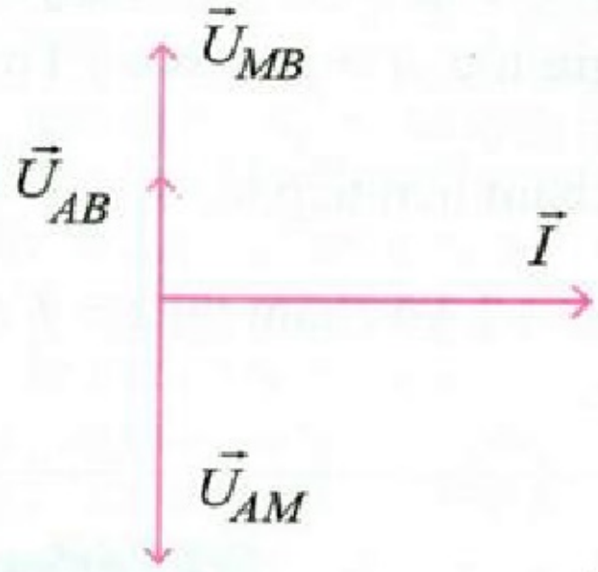


Lời giải.

• Khi $Z_{C_2} = Z_L$ thì $I = 0 \Rightarrow u_{MB} = u_{AB} \Rightarrow I_2 = \dfrac{U}{Z_L}$

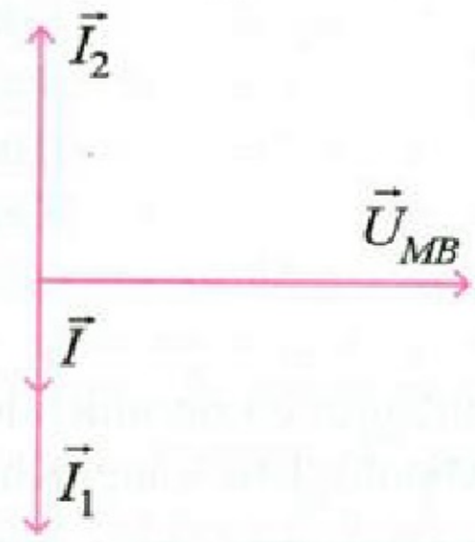
• Khi $Z_{C_2} > Z_L$, $I = I_1 - I_2 \Rightarrow Z_{MB} = \dfrac{Z_L Z_{C_2}}{Z_{C_2} - Z_L} > Z_L$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{Z_{C_2}}{Z_L} I_2 - I_2 = I_2 \left(\frac{Z_{C_2} - Z_L}{Z_L} \right).$$



$$u_{AB} = u_{MB} - u_{AM} = Z_{C_2} I_2 - Z_{C_1} I_2 \left(\frac{Z_{C_2} - Z_L}{Z_L} \right) = I_2 Z_L.$$

Khi $Z_L = Z_{C_1} \Rightarrow I_2 = \dfrac{U}{Z_L}$.



• Khi $Z_{C_2} < Z_L$, tương tự ta có $I_2 = \dfrac{U}{Z_L}$.

Vậy I_2 không phụ thuộc C_2. ❐

➢***Nhận xét.*** Chúc mừng hai bạn có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 12A2, THPT Bắc Đông Quan, H. Đông Hưng.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/460. *Một quả bóng được ném với vận tốc $\vec{v}_0$ theo phương ngang, va chạm đàn hồi với một mặt nghiêng góc α so với phương ngang. Sau va chạm quả bóng nẩy lên, sau đó lại va chạm với mặt nghiêng. Tại thời điểm va chạm lần thứ N + 1, vận tốc quả bóng có phương vuông góc với mặt nghiêng.*

a) *Xác định góc α theo N.*

b) *Xác định khoảng cách từ điểm va chạm thứ 1 đến điểm va chạm thứ N + 1.*

Lời giải. a) Phân tích $\vec{v}_0$ theo 2 phương: $\vec{v}_1$ dọc theo mặt phẳng nghiêng; $\vec{v}_2$ vuông góc mặt phẳng nghiêng. Ta có: $v_1 = v_0\cos\alpha$; $v_2 = v_0\sin\alpha$

• Dọc theo mặt phẳng nghiêng vật chuyển động với vận tốc đầu $\vec{v}_1$ và gia tốc $-g\sin\alpha$

$v_{1t} = v_1 - g\sin\alpha \cdot t$

• Theo phương vuông góc, vật chuyển động tuần hoàn với gia tốc $a = g\cdot\cos\alpha$. Thời gian giữa hai lần va chạm liên tiếp là: $T = \dfrac{2v_2}{a}$.

• Như vậy, sau $N+1$ va chạm thì $t = T\cdot N$.

Khi đó vận tốc bóng vuông góc với mặt phẳng nghiêng, chứng tỏ $v_{1t} = 0$ hay $v_1 = g.\sin\alpha.t$

$$\Rightarrow v_0\cos\alpha = g\cdot\sin\alpha\cdot N\cdot\frac{2\cdot v_0\sin\alpha}{g\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{2N}} \qquad (1)$$

b) Khoảng cách giữa lần va chạm thứ nhất và thứ $N+1$ là S. Ta có: $v_1^2 = 2(g.\sin\alpha).S$

suy ra $S = \dfrac{v_1^2}{2g\sin\alpha} = \dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g\sin\alpha}$.

Từ (1) $\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2N}{2N+1}}$

$$\Rightarrow S = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\cot g\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{2N}{\sqrt{2N+1}} = \frac{v_0^2\cdot N}{g\sqrt{2N+1}}.\ \square$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **Nam Định:** *Nguyễn Nam Khánh*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 12A2, THPT Bắc Đông Quan; **Hà Nội:** *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Mừng Xuân Thân

Xuân Bính Thân

Năm Mùi đi khỏi, đến năm Thân.
Làng Khỉ tưng bừng Hội đón Xuân.
*Khoe giỏi, **Khỉ Vàng** đu vút vút.*
*Dấu môi, **Mặt Đỏ** ngó trân trân.*
***Đuôi Dài** chí choé tranh lên ngọn.*
***Đuôi Lợn** lồm ngồm quậy dưới sân.*
***Khỉ Mốc** vẫy tay như muốn gởi*
Lời mừng Xuân đến bạn xa gần.

LÝ VĂN TOÁN (*Hà Nội*)

Chú giải: Trên thế giới có rất nhiều loài Khỉ, nhưng ở Việt Nam, Theo Trung tâm Giáo dục Thiên nhiên, có 5 loài Khỉ: Khỉ Mặt đỏ, Khỉ Vàng, Khỉ đuôi dài, Khỉ đuôi lợn và Khỉ Mốc.

Khỉ Mặt đỏ — Khỉ Vàng — Khỉ Đuôi Dài — Khỉ Đuôi Lợn — Khỉ Mốc

MÃ SỐ VÀ MÃ VẠCH

VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Trên mỗi sản phẩm (máy móc, thiết bị điện hoặc điện tử, sách, thuốc chữa bệnh, thực phẩm,...) hiện nay thường thấy mã số và mã vạch (viết tắt là MS&MV) như ở hình 1.

Hình 1

Đặc tính của mã số, mã vạch

• Mỗi sản phẩm tương ứng với một và chỉ một mã số. Mỗi mã số tương ứng với một và chỉ một mã vạch, như thế mỗi sản phẩm tương ứng với một và chỉ một mã vạch.

• Có máy in và máy đọc dành cho các MS&MV. Với các sản phẩm thông thường ta thấy mã số kèm theo mã vạch. Có thể đơn vị quản lí sản phẩm chỉ in mã vạch mà không in mã số, khi cho máy đọc mã vạch sẽ hiện ra mã số.

• Một đơn vị quản lí sản phẩm (nhà máy, doanh nghiệp, nhà xuất bản sách, cơ sở chế biến thực phẩm,...) khi đưa sản phẩm ra thị trường muốn có MS&MV thì phải đăng kí với cơ quan quản lí MS&MV của từng quốc gia và của quốc tế.

• MS&MV không thể hiện chất lượng sản phẩm hay giá cả sản phẩm, không thể hiện nơi sản xuất sản phẩm mà chỉ cho biết đơn vị quản lí sản phẩm đó (doanh nghiệp có thể cho phép sản xuất ở nước này hay nước khác cho rẻ hơn hoặc lắp ghép nhiều thiết bị được đặt hàng ở các nước khác nhau, nhà xuất bản có thể in sách ở các nhà in tại các địa phương khác nhau,...).

• Có loại MS&MV với dãy số ngắn được cấp cho từng doanh nghiệp, siêu thị để sử dụng trong một quốc gia. Có thể dùng MS&MV loại này cho máy bán hàng đọc, hiện ra khối lượng và giá cả của mặt hàng đó để người bán hàng thu tiền và lưu dữ liệu tổng hợp hàng và tiền đã bán.

Sơ lược lịch sử xuất hiện mã số, mã vạch

Mỗi sản phẩm thường có nhiều chi tiết được sản xuất ở nhiều nơi khác nhau và rồi lắp ráp lại theo bản vẽ nên cần được gán cho mỗi chi tiết một mã và cho mỗi sản phẩm một mã (Code) gồm cả chữ và số. Từ năm 1948 hai người Mỹ là *Norman Joseph Wooland* và *Bernard Silver* đã có ý tưởng về việc chuyển mã số thành mã vạch để thu gọn thông tin về sản phẩm và để máy có thể đọc được chính xác loại sản phẩm đó. Mã vạch đầu tiên dựa theo mã *Morse* gồm các vạch dài và vạch ngắn ghi trên giấy. Tuy nhiên máy đọc dùng đèn công suất lớn 500 wat nên cháy giấy. Đến năm 1960 việc phát minh ra tia lazer cùng sự phát triển mạnh mẽ của mạch bán dẫn đã cho phép tạo ra máy quét và đọc được mã vạch. Năm 1973 *Wooland* đã phát triển thành mã vạch (Bar Code) tuyến tính gồm hai loại vạch: vạch đen và vạch trắng có cùng bề cao. Cùng năm đó một tổ chức quản lí mã vạch các hàng thực phẩm được thành lập tại Mỹ và Canada, đến năm 1984 đổi tên là Hội đồng mã thống nhất *UCC* (Uniform Code Council). Hội đồng này quản lí nhiều sản phẩm (trong đó có thực phẩm) và đặt ra MS&MV là *UPC* (Universal Product Code). Năm 1974 siêu thị Marsh thuộc Troy, bang Ohio, nước Mỹ lần đầu tiên sử dụng sản phẩm có mã vạch. Năm 1992 *Wooland* được Tổng thống Mỹ trao tặng Huy chương Công nghệ Quốc gia, tiếc rằng *Silver* đã mất từ năm 1963. Năm 1977 Hội mã số vật phẩm châu Âu *EAN* (European Article Numbering Association) được thành lập tại Châu Âu và năm 1984 trở thành *EAN Quốc tế* (EAN International) gồm hơn 100 thành viên tại các quốc gia. Hội này đặt ra MS&MV là *EAN* (European Article Number). Năm 2000 hai tổ chức mã vạch *UCC* và *EAN* đặt ra tiêu chuẩn chung về mã số, mã vạch. Năm 2005 tổ chức *EAN-UCC* hợp nhất và đặt tên là Hệ thống toàn cầu GS1(One Global System), hướng tới một giải pháp toàn cầu (One Global Solution) và một tiêu chuẩn toàn cầu (One Global Standard), sử dụng việc đánh số thương mại toàn cầu GTIN (Global Trade Item Numbering). Từ năm 1995 Tổng cục Tiêu chuẩn Đo lường Chất lượng Việt Nam đã tham gia *EAN* Quốc tế. Văn phòng GS1 Việt Nam trực thuộc Viện Tiêu chuẩn

Chất lượng Việt Nam, thuộc Tổng cục Tiêu chuẩn Đo lường Chất lượng của Bộ Khoa học và Công nghệ, là thành viên của GS1 Quốc tế. Tại Việt Nam, GS1 Việt Nam được phép cấp mã số, mã vạch, tổ chức tuyên truyền, triển khai việc sử dụng MS&MV, cung cấp các dịch vụ in, đọc, kiểm tra, lưu trữ MS&MV,... Năm 2004 Công ty Nanosys Inc. sản xuất được máy in nano có thể in được vạch mảnh với bề dày bằng 10^{-9} m. Năm 1992 Công ty Denso Wave , nay là Denso Corporation, triển khai mã hai chiều dạng bảng ô vuông, gọi là QR Code.

Công dụng của mã số, mã vạch

• Mỗi MS&MV biểu thị một sản phẩm duy nhất và thống nhất trên toàn thế giới (như cỡ giầy, tên thực phẩm, các loại thuốc,...) nên rất thuận tiện trong việc trao đổi, vận chuyển hàng hóa, kinh doanh, tránh được sự nhầm lẫn khi mô tả bằng chữ, số hoặc hình ảnh trên hóa đơn.

• Đánh số thương mại toàn cầu GTIN giúp cho việc lưu trữ và tìm kiếm sản phẩm (hàng trong kho, lưu trữ sách trong thư viện, danh mục các tranh tượng tại Viện Bảo tàng, hiệu thuốc, ...) thông qua máy tính được dễ dàng, nhanh chóng.

• Kết hợp máy đọc mã vạch với máy định giá cả khiến việc bán hàng nhanh chóng và chính xác.

• Khi gặp một mặt hàng, quyển sách, tạp chí hoặc một hộp thuốc,... cần ghi nhớ, nếu có một điện thoại di động chụp được ảnh và nối mạng thì có thể sử dụng phần mềm đọc mã vạch (như *Đọc mã QR* của *App for you*; *QR Droid Code Scanner* của *DroidLa* ;...), dẫn đến đường link tra cứu trên mạng nên tìm ngay được thông tin về xuất xứ, chất liệu, thậm chí giá của sản phẩm đó.

• Giúp phân biệt hàng thật với hàng giả. Khi cho máy đọc mã vạch sẽ biết là hàng giả nếu máy chuyển mã vạch sang mã số mà không khớp với số kiểm tra trên mã vạch. Nếu phát hiện hàng làm giả MS&MV thì đơn vị quản lí sản phẩm đó sẽ đưa ra tòa án kiện nơi làm hàng giả vì hàng thật đã được đăng kí bản quyền. Điều này cũng kích thích doanh nghiệp sản xuất sản phẩm có chất lượng hơn.

• Doanh nghiệp và cá nhân có thể tự tạo cho mình logo, danh thiếp với mã QR màu sắc đẹp (khi quét mã QR trên danh thiếp sẽ hiện lên đầy đủ họ tên, điện thoại, chức vụ, nơi làm việc,...).

Các loại mã số

Do hoàn cảnh lịch sử nên có nhiều loại mã số. Mã số *EAN* có loại *EAN*-13 là dãy 13 chữ số hiện nay được hầu hết các nước sử dụng, loại *EAN*-8 là dãy 8 chữ số dành cho những sản phẩm nhỏ như bút, son môi,... Mã số *UPC* trước năm 2000 là dãy số có 12 chữ số, sau khi *EAN- UCC* hợp nhất thì mã số *UPC* được thêm chữ số 0 vào đầu bên trái và trở thành mã số *UPC-A* có 13 chữ số. Ở Việt Nam, *EAN-VN* từ năm 1995 đến tháng 2/1998 đã cấp mã số gồm 4 chữ số và từ tháng 3/1998 cấp mã số gồm 5 chữ số.

Ý nghĩa của các mã số UPC-A gồm 13 chữ số $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$ như sau: a_0 bằng 0 hoặc 1 là dành cho nước Mỹ. a_1 là số chỉ hệ thống; $a_1 = 2$ chỉ sản phẩm bán theo khối lượng như thịt, cá,...; $a_1 = 3$ chỉ sản phẩm y tế; $a_1 = 4$ chỉ hàng bách hóa (không phải lương thực, thực phẩm); $a_1 = 5$ là các loại phiếu, vé; a_2 chỉ nhà đóng gói; dãy $a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ chỉ loại sản phẩm; dãy $a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$ chỉ giá tiền, chẳng hạn $a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11} = 1546$ nghĩa là 15,46 \$. Còn a_{12} là số kiểm tra (xem giải thích cách kiểm tra hàng thật ở mã *EAN*-13).

Ý nghĩa của các mã số EAN-13 gồm 13 chữ số $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$ như sau: $a_0\ a_1\ a_2$ là mã số được GS1 quy định cho từng nước với a_0 từ 0 đến 8 (Xem trang web: *Mã số, mã vạch các nước.Bảo hộ thương hiệu*). Với $a_0 = 9$ thì $a_0\ a_1\ a_2$ bằng 978 chỉ ấn phẩm định kì, bằng 978 chỉ sách, bằng 979 chỉ âm nhạc, bằng 980 chỉ biên lai trả tiền, bằng 981 hoặc 982 chỉ các phiếu, vé tiền tệ, $a_0\ a_1$ bằng 99 chỉ coupon (phiếu có ghi giá tiền).

Mã số $a_0\ a_1\ a_2$ của một số nước: 893 là của Việt Nam; 000 đến 009 và 139 là của Mỹ; 300 đến 379 là của Pháp; 450 đến 459 và 490 đến 499 là của Nhật; 500 đến 509 là của Anh; 690 đến 695 là của Trung Quốc; 880 là của Hàn Quốc; 471 là của Đài Loan; 489 là của Hồng Kông; 885 là của Thái Lan; 460 đến 469 là của LB Nga.

Dãy số $a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ (hoặc $a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$) chỉ đơn vị quản lí sản phẩm. Dãy số $a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$ (hoặc $a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$) chỉ sản phẩm. Còn chữ số a_{12} là số kiểm tra. Chẳng hạn, dãy 6 số đầu trái $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ bằng 8934980 hoặc 8934994 cho biết sách của NXB Giáo dục Việt Nam; bằng 8935036 cho biết sách của NXB Kim Đồng Việt Nam; bằng 8935018 cho biết sản phẩm của Công ty TNHH New Toyo Pullpy sản xuất giấy lụa tại Việt Nam.

Cách kiểm tra hàng thật của mã số EAN-13 dạng $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$ *như sau*:

Gọi $e = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ và

$$f = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}.$$

Giải phương trình đồng dư $e + 3f + x \equiv 0 \pmod{10}$ với $0 \le x \le 9$, nếu $x = a_{12}$ thì đó là hàng thật, nếu khác là hàng giả. Chẳng hạn xét mã số 8934602321473.

Tính $e = 8 + 3 + 6 + 2 + 2 + 4 = 25$;

$$f = 9 + 4 + 0 + 3 + 1 + 7 = 24.$$

Có $e + 3f + x = 97 + x$ nên tìm được $x = 3 = a_{12}$, vậy hàng đó là hàng thật.

Ý nghĩa của các mã số EAN-8 gồm 8 chữ số $a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$ như sau: $a_0\ a_1\ a_2$ là mã số quốc gia; $a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ chỉ sản phẩm; a_7 là số kiểm tra.

Cách kiểm tra hàng thật của mã số EAN-8 như sau. Gọi $e = a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ và $f = a_1 + a_3 + a_5$.
Giải phương trình đồng dư $3e + f + x \equiv 0 \pmod{10}$ với $0 \le x \le 9$, nếu $x = a_7$ thì đó là hàng thật, nếu khác là hàng giả.

Cấu tạo mã vạch và cách chuyển mã số thành mã vạch

Việc chuyển từ mã số sang mã vạch được tiến hành theo hai bước.

Bước thứ nhất là chuyển mỗi chữ số ở mã số thành dãy các chữ số 0 và 1. Mỗi mã số *EAN*-13 dạng $a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}$ được viết thêm các chữ c_1, c_2, c_3 thành dạng $c_1\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, c_2\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, c_3$, trong đó c_1 là chữ đầu trái, c_3 là chữ đầu phải, c_2 là chữ ở giữa phân cách hai dãy 6 chữ số. Mỗi chữ c_1, c_3 đều được biểu thị bởi dãy số 101, chữ c_2 được biểu thị bởi dãy số 01010. Mỗi chữ số thập phân a_i với i từ 1 đến 6 được biểu thị bởi dãy 7 chữ số 0 và 1 theo hai loại mã hóa L-code và G-code, còn mỗi chữ số a_j với j từ 7 đến 12 được biểu thị bởi dãy 7 chữ số 0 và 1 theo loại mã hóa R-code như ở bảng 1. Chữ số a_0 không được chuyển trực tiếp thành mã vạch, nhưng a_0 quyết định dạng của dãy $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ như thấy trong bảng 1.

a_i / a_j	L-code	G-code	$a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$	R-code
0	0001101	0100111	0 L L L L L L	1110010
1	0011001	0110011	1 L L G L G G	1100110
2	0010011	0011011	2 L L G G L G	1101100
3	0111101	0100001	3 L L G G G L	1000010
4	0100011	0011101	4 L G L L G G	1011100
5	0110001	0111001	5 L G G L L G	1001110
6	0101111	0000101	6 L G G G L L	1010000
7	0111011	0010001	7 L G L G L G	1000100
8	0110111	0001001	8 L G L G G L	1001000
9	0001011	0010111	9 L G G L G L	1110100

Bảng 1

Nhận xét về các mã số trong bảng 1:

• Dãy 7 chữ số của L-code và G-code đều bắt đầu từ đầu trái bằng 0 và kết thúc ở đầu phải bằng 1, còn dãy 7 chữ số của R-code bắt đầu từ đầu trái bằng 1 và kết thúc ở đầu phải bằng 0.

• Các mã số trong bảng 1 đều khác nhau (từ nhận xét trên, chỉ cần kiểm tra 20 dãy 5 chữ số sắp thứ tự mà không kể hai số nằm ở đầu trái và đầu phải của L-code và G-code).

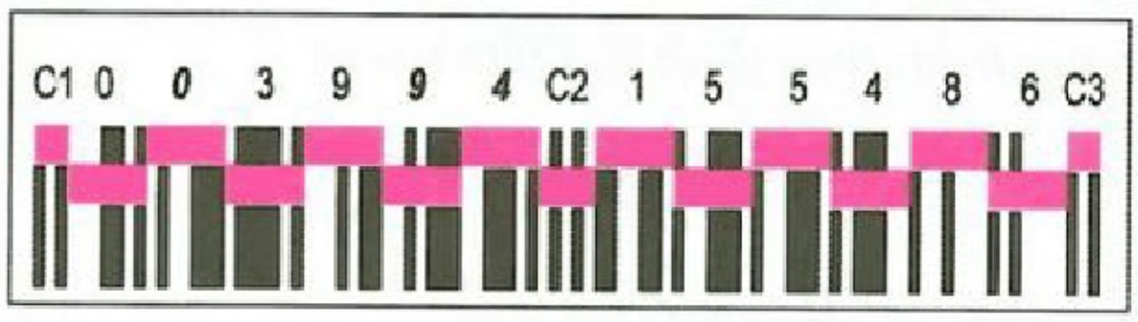
• Khi mã hóa cùng một chữ số thập phân, nếu đổi chữ số 0 và chữ số 1 cho nhau theo thứ tự từ trái sang phải trong dãy 7 chữ số của L-code thì được R-code, các chữ số của G-code và R-code là đối xứng nhau, tức là khi lấy các chữ số theo thứ tự từ trái sang phải của G-code thì được các chữ số theo thứ tự từ phải sang trái của R-code.

• Mỗi mã số 7 chữ số chứa không quá 4 chữ số giống nhau mà kề nhau.

Bước thứ hai là chuyển mỗi chữ số 0 và 1 đó thành vạch có cùng bề dày (bề dày của một vạch gọi là bề dày đơn vị), trong đó chữ số 1 biểu thị bằng một vạch đen, chữ số 0 biểu thị bằng một vạch trống (không in trên giấy) sao cho hai chữ số kề nhau biểu thị bởi hai vạch liền nhau không có khoảng trống ngăn cách. Chẳng hạn, dãy 11 biểu thị bởi vạch đen có bề dày hai đơn vị, hoặc dãy 000 biểu thị bởi vạch trống có bề dày ba đơn vị). Từ nhận xét trên ta thấy các vạch đen kề nhau hoặc các vạch trống kề nhau không dày quá 4 lần bề dày đơn vị.

Các vạch của các chữ số thập phân đều có cùng chiều cao, riêng mã vạch của c_1, c_2, c_3 dài hơn về phía dưới (xem hình 1) để biết c_1 là hai vạch đen bắt đầu, c_3 là hai vạch đen kết thúc của một mã vạch và c_2 là hai vạch đen và ba vạch trống phân cách hai dãy 6 số thập phân.

Thí dụ: Chuyển mã số **4003994155486** sang dãy số 0 và 1 thành c_1**003994** c_2**155486** c_3, rồi chuyển thành mã vạch theo quy ước ở bảng 1, trong đó do $a_0 = 4$ nên dãy **003994** được mã hóa theo L-code và G-code thành dạng L G L L G G như ở hình 2, còn mỗi chữ số trong dãy **155486** được mã hóa theo R-code. Dải băng nằm ngang chỉ ra sự chuyển mỗi chữ số thập phân thành các vạch theo bảng 1.



Hình 2

Khi máy quét để đọc mã vạch (không kèm mã số), trong thí dụ trên, từ dạng LGLLGG máy cho biết ngay $a_0 = 4$, dù $a_0 = 4$ không được mã hóa thành vạch.

Mã hai chiều có dạng bảng ô vuông như ở hình 3, gọi là QR Code (Quick Response Code, nghĩa là mã đáp ứng nhanh) với diện tích nhỏ hơn, ghi được nhiều thông tin (cả chữ và chữ số), có tốc độ giải mã nhanh và có khả năng phục hồi khi mã bị mờ một ít chỗ. Việc chuyển mã gồm chữ và chữ số thập phân thành mã hai chiều QR-code cần sử dụng hệ đếm nhị phân nhưng phức tạp hơn nhiều so với việc chuyển mã số thành mã vạch.

Hình 3

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN ÁP DỤNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG KÌ THI THPT QUỐC GIA

VŨ NGUYÊN DUY
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Trong đề thi THPT Quốc Gia, câu giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình thường khó trong việc định hướng phương pháp giải. Trước đây, khi giải toán chúng ta thường tránh việc đưa về phương trình bậc cao vì cách giải quá khó hoặc không có phương pháp giải tổng quát. Tuy nhiên với sự giúp đỡ của máy tính cầm tay (MTCT) bằng việc tìm được các nghiệm gần đúng của phương trình có thể giúp chúng ta định hướng một cách dễ dàng khi giải phương trình bậc cao, đặc biệt là bậc chẵn.

Phương pháp.

Nhắc lại định lý Viète cho phương trình bậc 4.

Cho phương trình: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a\neq 0)$

Gọi x_1,x_2,x_3,x_4 *là các nghiệm của phương trình trên, theo định lý Viète ta có*:

$$S_1+S_2=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a};$$

$$P_1.P_2=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}.$$

Dùng MTCT tìm 2 nghiệm hoặc 3 nghiệm (bằng cách nhập biểu thức vế trái của phương trình và dùng hai phím SHIFT SOLVE). Sau đó, ta tính tổng và tích 2 nghiệm trong số đó rồi dùng định lý Viète đảo đưa về tam thức bậc hai, từ đó suy ra tam thức bậc hai còn lại, và ta có kết quả như sau $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

$$\Leftrightarrow a(x^2-S_1x+P_1)(x^2-S_2x+P_2)=0.$$

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$21x^4-43x^3-45x^2+54x+8=0.$$

Nháp: Nhập biểu thức và bấm SHIFT SOLVE ta dò được 3 nghiệm là $A=-0{,}135041612$, $B=-1{,}221404919$, $C=2{,}468374946$.

Kiểm tra bằng máy tính ta thấy:

$$P_1=A\times C=-\frac{1}{3}\text{ và }S_1=A+C=\frac{7}{3}.$$

Theo định lý Viète:

$$\begin{cases}S_1+S_2=\dfrac{43}{21}\\ P_1P_2=\dfrac{8}{21}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_2=\dfrac{43}{21}-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{2}{7}\\ P_2=\dfrac{8}{21}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{7}\end{cases}$$

Lời giải. Phương trình ban đầu tương đương với: $21\left(x^2-\frac{7}{3}x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{2}{7}x-\frac{8}{7}\right)=0$

Từ đó, ta được tìm được bốn nghiệm của phương trình là $\frac{7\pm\sqrt{61}}{6};\ \frac{-1\pm\sqrt{57}}{7}$

Tuy nhiên, không phải lúc nào phương trình cũng có nghiệm mà tổng và tích của chúng đều là số hữu tỷ, có thể là số vô tỷ nhưng MTCT không hiển thị biểu thức chứa căn được khi dùng chức năng SHIFT SOLVE, lúc này ta phải dùng MTCT dò tìm các chữ số thập phân sau dấu phẩy của các số $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},....$

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$x^4+4x^3+3x^2-12x-16=0.$$

Nháp: Dùng máy tính bỏ túi dò được 2 nghiệm là $-1{,}458692994$ và $1{,}694760971$.

Nhận xét: $S_1=-1{,}458692994+1{,}694760971$
$=0{,}236067977.$

Kết quả trên không phải là số hữu tỷ, nên ta dò số vô tỷ từ $\sqrt{2}$ trở lên và thấy $\sqrt{5}=2{,}236067977$ suy ra $S_1=0{,}236067977=\sqrt{5}-2$.

$P_1=-1{,}458692994\times 1{,}694760971$
$=-2{,}472135955$

Nhận xét: Vì $-0{,}236067977\times 2=-0{,}472135954$, nên $P_1=-2{,}472135955=-2\left(\sqrt{5}-2\right)-2=2-2\sqrt{5}$.

Suy ra $x^4+4x^3+3x^2-12x-16$
$=\left(x^2-(\sqrt{5}-2)x+2-2\sqrt{5}\right)\left(x^2-S_2x+P_2\right);$

$S_1+S_2=-4\ \Rightarrow S_2=-4-(\sqrt{5}-2)=-2-\sqrt{5};$

$$P_1.P_2=-16\Rightarrow P_2=\frac{-16}{2-2\sqrt{5}}=2+2\sqrt{5}.$$

Lời giải. Ta có: $x^4+4x^3+3x^2-12x-16=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-(\sqrt{5}-2)x+2-2\sqrt{5}\right)$$
$$\times\left(x^2+(2+\sqrt{5})x+2+2\sqrt{5}\right)=0.$$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm là

$$\frac{\sqrt{5}-2\pm\sqrt{4\sqrt{5}-1}}{2}.$$

Trong kỳ thi Đại học năm 2013, đề khối D có bài giải phương trình lôgarit gây không ít khó khăn cho các thí sinh, thậm chí không giải được vì nếu đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x}$ sẽ đưa về phương trình bậc bốn không có nghiệm hữu tỉ.

Thí dụ 3 *(Đại học khối D năm 2013). Giải phương trình*

$$2\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2).$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $0<x<1$. Phương trình ban đầu tương đương với

$$x^2=(1-\sqrt{x})(x-2\sqrt{x}+2).$$

Đặt $t=\sqrt{x}$, $0<t<1$, ta được phương trình:

$$t^4+t^3-3t^2+4t-2=0\ (*)$$

PT (*) tương đương với phương trình

$$\left(t^2+2t-2\right)\left(t^2-t+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t=-1+\sqrt{3}\ \ (0<t<1).$$

Vậy phương trình ban đầu có một nghiệm là

$$x=t^2=4-2\sqrt{3}.$$

Lời bàn. Từ phương trình (*) dò được 2 nghiệm là 0,7320508076 và –2,732050808.

Ta có: 0,7320508076 + (–2,732050808) = –2.

0,7320508076 × (–2,732050808) = –2.

$$t^4+t^3-3t^2+4t-2=\left(t^2+2t-2\right)\left(t^2-S_2t+P_2\right)$$

$$S_1+S_2=-1\Rightarrow S_2=-1-(-2)=1$$

$$P_1.P_2=-2\Rightarrow P_2=\frac{-2}{-2}=1.$$

Do đó

$$t^4+t^3-3t^2+4t-2=\left(t^2+2t-2\right)\left(t^2-t+1\right).$$

Áp dụng vào giải bất phương trình

Thí dụ 4. *(Đề minh họa kỳ thi THPT Quốc gia). Giải bất phương trình sau:*

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\ge\sqrt{3(x^2-2x-2)}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\ge 1+\sqrt{3}$.

Bình phương hai vế ta được:

$$x^2+2x-2+2\sqrt{x(x+1)(x-2)}\ge 3(x^2-2x-2)$$

Thu gọn về: $\sqrt{x(x+1)(x-2)}\ge x^2-4x-2$.

Ta sẽ xét dấu của hàm số:

$$f(x)=\sqrt{x(x+1)(x-2)}-(x^2-4x-2).$$

Trước hết ta tìm nghiệm của $f(x)=0$:

$$\sqrt{x(x+1)(x-2)}=x^2-4x-2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x-2\ge 0\\ x(x+1)(x-2)=\left(x^2-4x-2\right)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x-2\ge 0\\ x^4-9x^3+13x^2+18x+4=0\ (*)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x-2\ge 0\\ (x^2-6x-4)(x^2-3x-1)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2-\sqrt{6}\ \text{hoặc}\ x\ge 2+\sqrt{6}\\ x=3\pm\sqrt{13};\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có được nghiệm của $f(x)$ là $x=3+\sqrt{13}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$ nên có bảng xét dấu

x	$1+\sqrt{3}$		$3+\sqrt{13}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	

Vậy $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}\right]$.

Lời bàn: Từ phương trình (*) dò được 4 nghiệm là: $A=-0{,}302775637$; $B=-0{,}605551275$; $C=6{,}605551275$; $D=3{,}302775638$.

Nhận xét

$S_1=B+C=6$, $P_1=B.C=-4$; $S_2=A+D=3$, $P_2=A.D=-1$. Vậy $x^4-9x^3+13x^2+18x+4$ $=(x^2-6x-4)(x^2-3x-1)=0$.

Áp dụng trong giải hệ phương trình

Thí dụ 5. (*Đề thi thử của Trường THPT Trần Phú, Thanh Hóa*). *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\le 1; -\frac{3}{2}\le y\le \frac{3}{2}$.

$(1)\Leftrightarrow 2y^3+y=-2x\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$ (3)

Xét hàm $f(t)=2t^3+t;\ f'(t)=6t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy, (3) $\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=1-x \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được $\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-6x-1\ge 0 \\ x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-6x-1\ge 0 \\ \left(x^2-2x-1\right)\left(x^2-4x+1\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được $x=1-\sqrt{2}$.

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(1-\sqrt{2};\sqrt[4]{2}\right),\left(1-\sqrt{2};-\sqrt[4]{2}\right).$$

Thử với phương trình bậc cao hơn

Thí dụ 6. (*Kỳ thi THPT Quốc gia* 2015)

Giải phương trình

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right).$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\ge -2$.

PT $\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ (x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(x+1)(x^2-2x+3) \quad (1) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow (x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5.$

Với điều kiện $x\ge -2$ thì $x+4>0$. Do đó phương trình này tương đương với

$$\begin{cases} x^3-x^2-x-5\ge 0 \\ x^6-2x^5-x^4-9x^3+x^2-22x-7=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-x^2-x-5\ge 0 \\ \left(x^2-3x-1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+x+7\right)=0 \quad (3) \end{cases}$$

Nhận xét:

$x^4+x^3+x^2\ge 0\ \forall x,\ 2x^2+x+7>0\ \forall x$

nên $x^4+x^3+3x^2+x+7>0$.

Do đó

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-x^2-x-5\ge 0 \\ x^2-3x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

(thỏa điều kiện ban đầu)

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm là

$$x=2;\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Chú ý: Ta dò được 2 nghiệm của (2) là $A=-0,3027756377,\ B=3,302775638$ và

$$A+B=3,\ A.B=-1.$$

Qua các thí dụ trên chúng ta thấy với cách giải đưa về tìm nghiệm phương trình bậc bốn hoặc bậc cao hơn tuy không phải là một phương pháp hay, thậm chí cồng kềnh nặng về tính toán, dễ sai nhưng nhờ vào MTCT, nó trở thành phương pháp vô cùng hiệu quả cho những thí sinh không biết cách giải nào khác tốt hơn.

Bài tập vận dụng

1. Giải phương trình: $8x-5(5x^2-1)^2=-8$.
2. Giải phương trình:

$$(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$$

3. Giải bất phương trình:

$$x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x(x^2+2x-4)}\right)$$

4. (*Đại học khối B* - 2014). Giải hệ phương trình

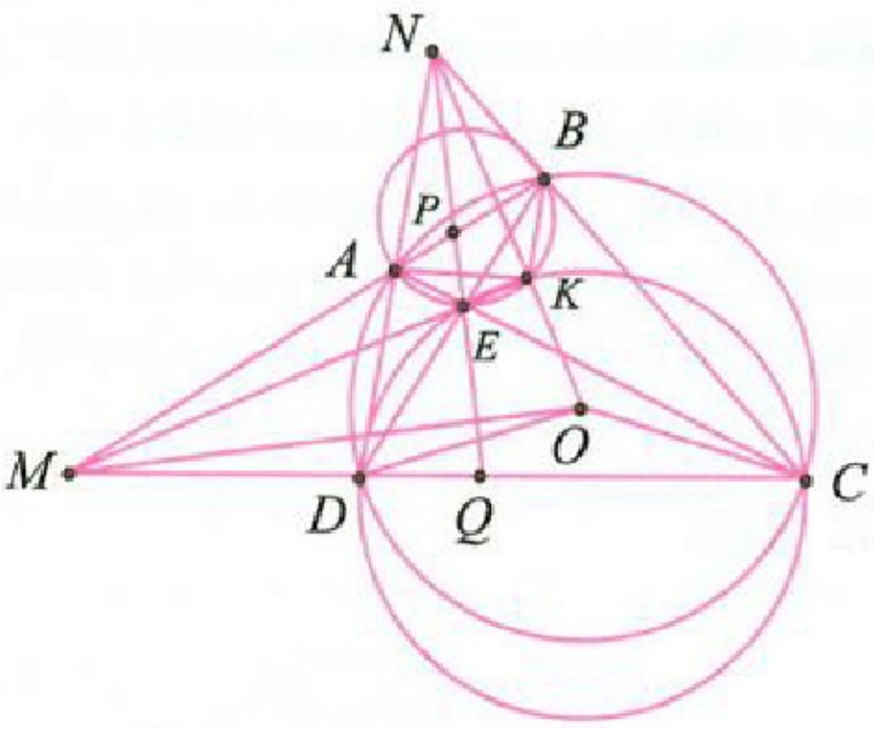
$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \end{cases}.$$

ĐỊNH LÝ BROCARD VÀ MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

NGUYỄN TRƯỜNG SƠN
(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

I. Định lí Brocard. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có $M = AB \cap DC$, $N = AD \cap BC$, $E = AC \cap BD$. Khi đó O là trực tâm ΔMNE.*

Chứng minh. (h.1)



Hình 1

Cách 1. Gọi *P, Q* tương ứng là giao điểm của *NE* với *AB* và *CD*. Theo tính chất của hình tứ giác toàn phần ta có: $(MPAB) = (MQDC) = -1$. Do đó *M* liên hợp với *P, Q*. Suy ra *PQ* là đường đối cực của điểm *M* đối với đường tròn (*O*), hay $OM \perp NE$.

Tương tự $ON \perp ME$. Vậy *O* là trực tâm tam giác *MNE*.

Cách 2. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, CDE. Ta thấy K, E, M thẳng hàng vì cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(ABE), (CDE)$.

Do $(KB,KC) \equiv (KB,KE) + (KE,KC) \equiv (AB,AE) + (DE,DC)$ $\equiv (OB,OC) \pmod{\pi}$ nên tứ giác $OKBC$ nội tiếp.

Tương tự, tứ giác $OKAD$ cũng nội tiếp. Suy ra K cũng chính là giao điểm thứ hai khác O của hai đường tròn $(OBC), (OAD)$. Do đó ba điểm O, K, N thẳng hàng vì cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(OBC), (OAD)$.

Mặt khác $(KM,KN) \equiv (KM,KB) + (KB,KN)$

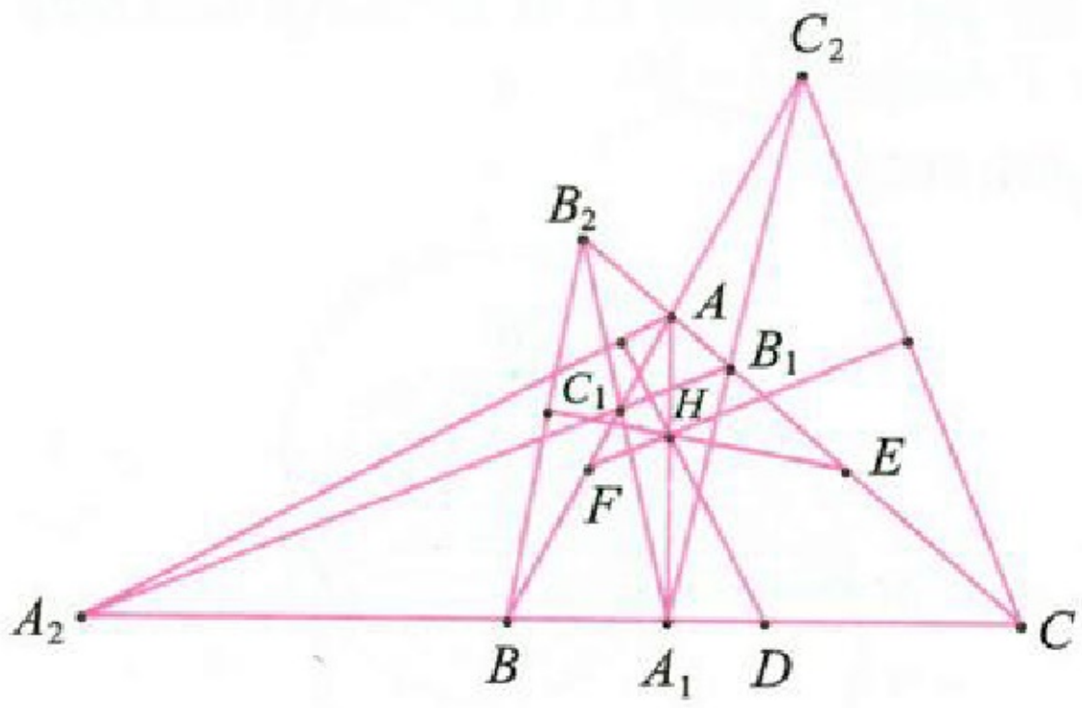
$\equiv (AE,AB) + (CB,CO) \equiv (DC,DB) + (CB,CO) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Do đó $ME \perp ON$. Chứng minh tương tự, ta có $NE \perp OM$ hay E là trực tâm của tam giác OMN và $OE \perp MN$ (đpcm).

II. Một số thí dụ áp dụng

Thí dụ 1. *Cho tam giác không cân ABC, A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của các điểm A, B, C trên các đường thẳng BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BC và B_1C_1, AC và A_1C_1, AB và A_1B_1. D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường vuông góc hạ từ D, E, F lần lượt xuống các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.*

Lời giải. (h.2) Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC*.



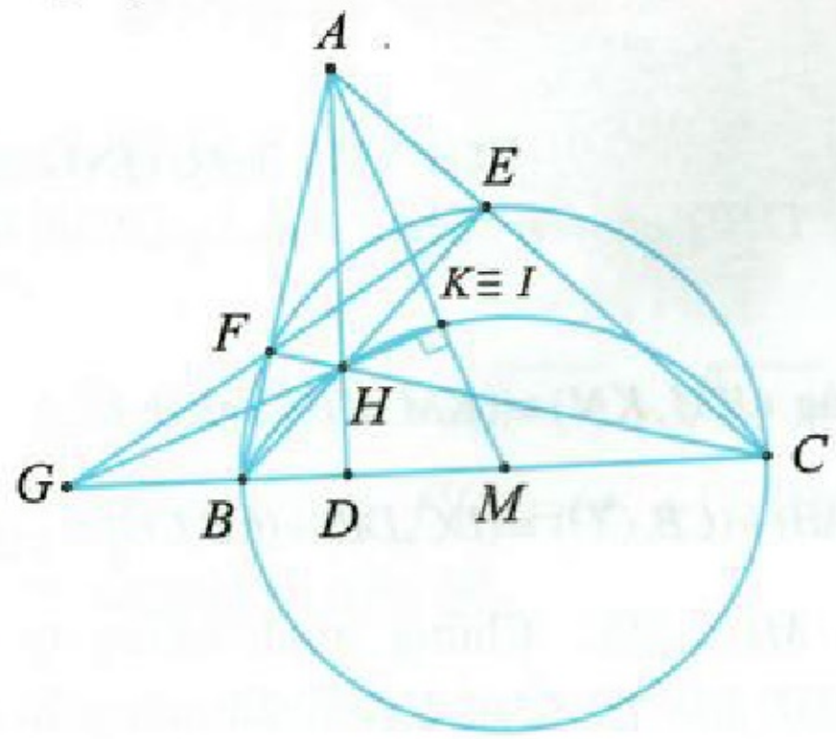
Hình 2

Dễ thấy *D* chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCB_1C_1. Theo định lí Brocard ta có $DH \perp AA_2$.

Tương tự $EH \perp BB_2$, $FH \perp CC_2$. Vậy các đường vuông góc hạ từ *D, E, F* lần lượt xuống các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC, H là trực tâm tam giác ABC. I là giao điểm của AM với cung BC chứa H của đường tròn (HBC). Chứng minh rằng $HI \perp AM$.*

Lời giải. (h.3)



Hình 3

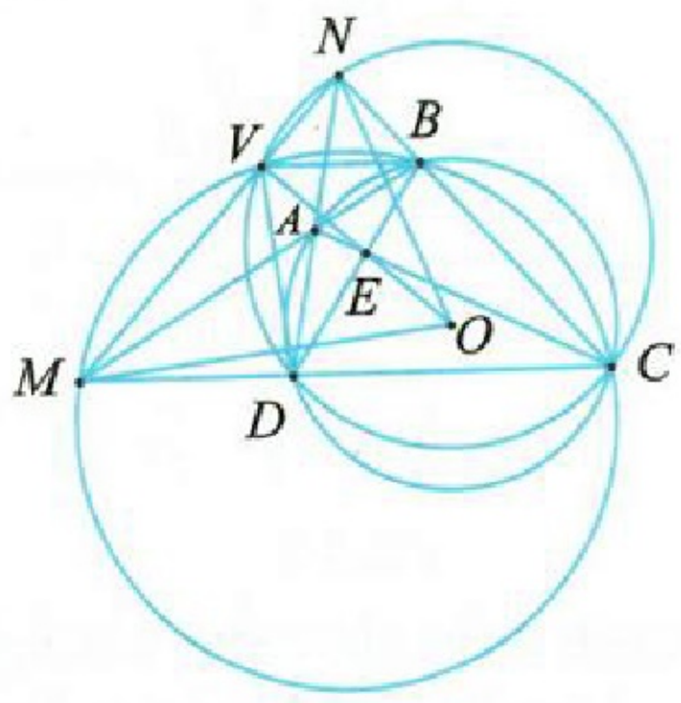
Gọi *AD, BE, CF* là ba đường cao của tam giác *ABC*. *G* là giao điểm của *EF* với *BC*. *GH* cắt *AM* tại *K*. Theo định lí Brocard, *M* là trực tâm tam giác *AHG*. Do đó $GK \perp AM$. Khi đó *K* thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AFHE*.

Từ đó $\overline{GH}.\overline{GK} = \overline{GE}.\overline{GF} = \overline{GB}.\overline{GC}$.

Vậy *K* thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác *HBC*. Suy ra $K \equiv I$. Do đó $HI \perp AM$ (đpcm).

Thí dụ 3. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có $M = AB \cap DC$, $N = AD \cap BC$, $E = AC \cap BD$. Gọi V là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác DCN và BCM. Chứng minh rằng O, E, V thẳng hàng.*

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Các tứ giác *CDVN, CBVM* nội tiếp nên

$$(VM,VN) \equiv (VM,VC) + (VC,VN)$$
$$\equiv (BM,BC) + (DC.DN) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

suy ra ba điểm *M, V, N* thẳng hàng. Lại có:

$$(VB,VD) \equiv (VB,VN) + (VN,VM) + (VM,VD)$$
$$\equiv 2(CB,CD) \equiv (OB,OD) \pmod{\pi}$$

Vậy tứ giác *DOBV* nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{DVO} = \widehat{DBO} = \widehat{ODB} = \widehat{OVB} \Rightarrow OV \perp MN.$$

Theo định lí Brocard thì: $OE \perp MN$. Từ đó ta thấy ba điểm *O, E, V* thẳng hàng (đpcm).

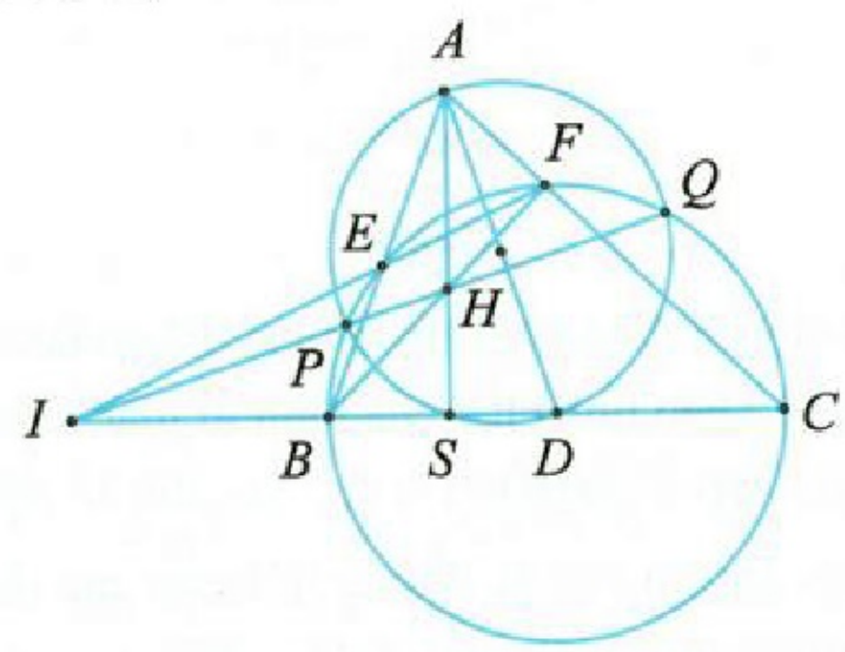
Nhận xét

+ Nếu *V* là hình chiếu của *O* trên *MN* thì *OV* sẽ là phân giác của $\widehat{BVD}$.

+ *V* thuộc cả bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác (*MAD*), (*MBC*), (*NAB*), (*NDC*). Điểm *V* là một điểm Miquel của tứ giác toàn phần *ABCDMN*.

Thí dụ 4. *Cho H là trực tâm tam giác ABC không cân, góc A nhọn. Hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là E, F. D là trung điểm của BC. P, Q là giao điểm của hai đường tròn đường kính AD, BC. Chứng minh rằng H, P, Q thẳng hàng và BC, EF, PQ đồng quy.*

Lời giải. (h.5)



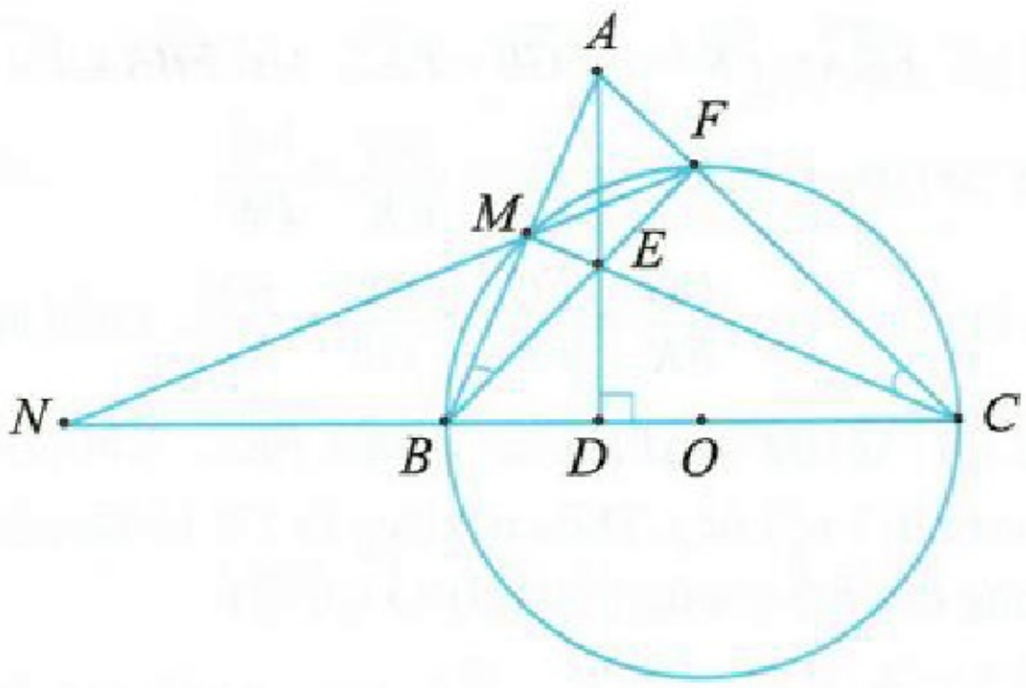
Hình 5

Gọi *S* là chân đường vuông góc hạ từ *A* xuống *BC*.

Vì $\overline{HA}.\overline{HS} = \overline{HB}.\overline{HF}$ nên *H* thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính *AD* và *BC*. Từ đó *H, P, Q* thẳng hàng, suy ra $PQ \perp AD$. Gọi *I* là giao điểm của *EF* với *BC*. Theo định lí Brocard ta có: $IH \perp AD \Rightarrow I, P, H, Q$ thẳng hàng, hay *BC, EF, PQ* đồng quy (đpcm).

Thí dụ 5. *Cho tam giác ABC không cân. D là chân đường cao hạ từ A xuống BC. E nằm trên đoạn AD sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{ECA}$. Chứng minh E là trực tâm ΔABC.*

Lời giải. (h.6)

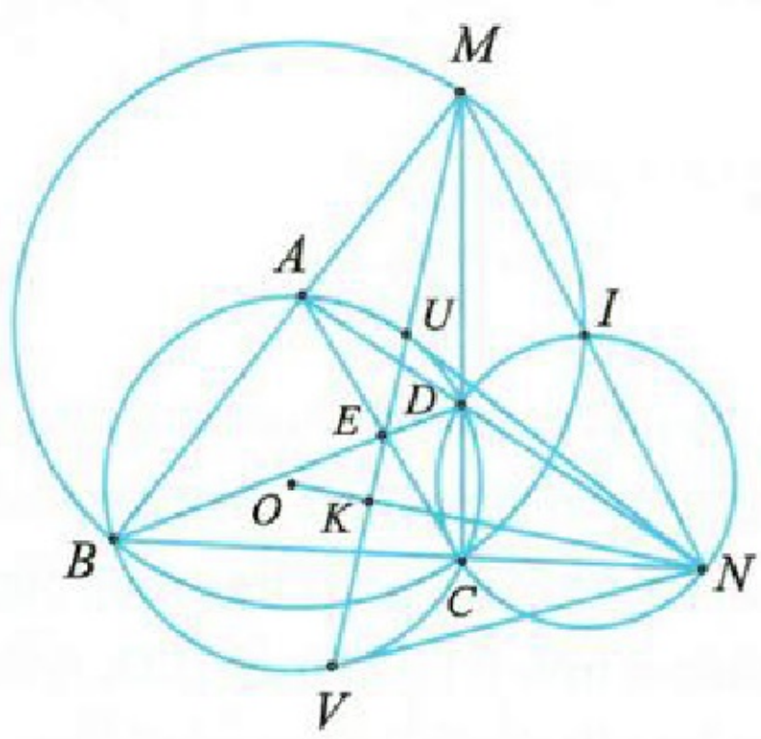


Hình 6

Gọi F là giao điểm của BE với AC, M là giao điểm của CE với AB, N là giao điểm của MF với BC. Vì $\widehat{EBA} = \widehat{ECA}$ nên tứ giác $BCFM$ nội tiếp đường tròn tâm O. Theo định lí Brocard có $AE \perp ON \Rightarrow AD \perp ON$. Lại có $AD \perp BC \Rightarrow O \in BC$. Khi đó $OB = OC \Rightarrow O$ là trung điểm đoạn BC. Từ đó E là trực tâm ΔABC.

Thí dụ 6. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $M = AB \cap DC$, $N = AD \cap BC$, $E = AC \cap BD$. Từ N kẻ các tiếp tuyến NU, NV tới (O) (U, V là các tiếp điểm). Chứng minh rằng M, E, U, V thẳng hàng.*

Lời giải. (h.7)



Hình 7

Cách 1. Gọi I là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BMC) và (DNC), K là giao điểm của ME và ON. Theo định lí Brocard có: $ON \perp ME$. Khi đó

$$\overline{ON}.\overline{OK} = \overline{OM}.\overline{ON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2}.$$

Lại có $OM^2 - R^2 + NO^2 - R^2 = \mathscr{P}_{M/(O)} + \mathscr{P}_{N/(O)}$

$= \overline{NC}.\overline{NB} + \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{NI}.\overline{NM} + \overline{MI}.\overline{MN} = MN^2$

$\Rightarrow R^2 = \dfrac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2} \Rightarrow \overline{ON}.\overline{OK} = R^2.$

Gọi K' là giao điểm của ON với UV. Khi đó $\overline{ON}.\overline{OK'} = OU^2 = R^2 \Rightarrow K \equiv K'$. Điều này dẫn đến M, E, U, V thẳng hàng.

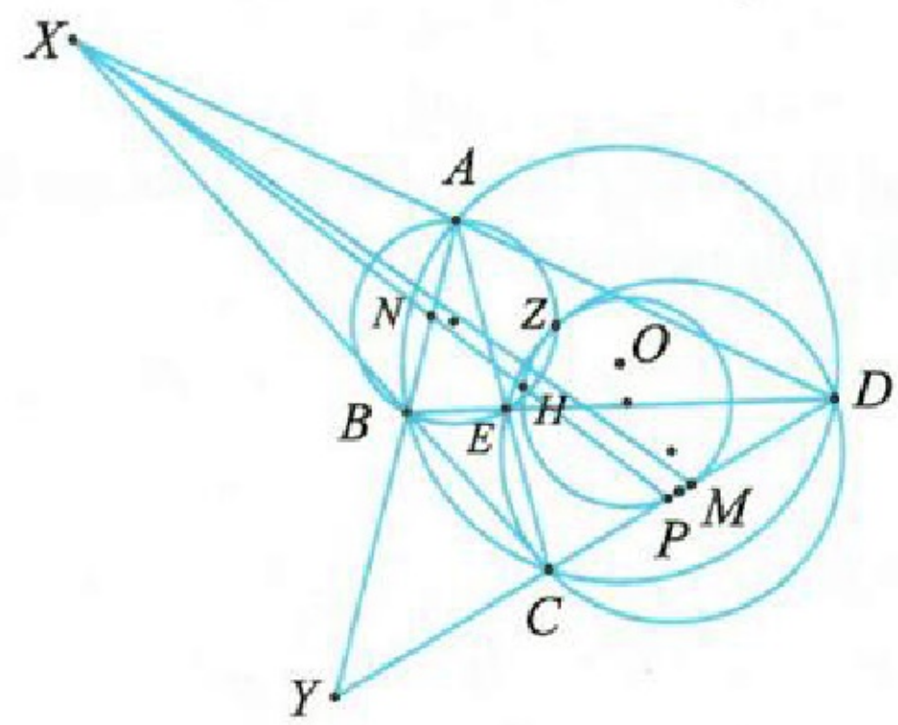
Cách 2. Gọi T và T' là giao điểm của UV với AC và BD. Dễ thấy các tứ giác $AUDV$, $UCVB$ là các tứ giác điều hòa. Do đó $(UVTM) = (UVT'M) = -1 \Rightarrow T \equiv T' \equiv E$.

Thí dụ 7. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn CD, AB. P nằm trên đoạn thẳng CD sao cho $\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{BD^2}{AC^2}$. E là giao điểm của AC và BD. H là hình chiếu của E trên PN. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác HMP và EDC tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. (h.8)

Nhận xét 1. Cho tam giác ABC không cân, AF là đường đối trung của tam giác ABC. E là trung điểm của đoạn BC. Khi đó đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và AEF tiếp xúc với nhau.

Nhận xét 2. Cho tam giác ABC có đường đối trung AP. Một đường tròn (O) qua B, C cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Khi đó AP đi qua trung điểm của DE. Bạn đọc tự chứng minh hai nhận xét này.



Hình 8

Trở lại bài toán trên. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. X là giao điểm của AD và BC; Y là giao điểm của AB và CD; Z là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và CDE. Dễ thấy ba điểm E, Y, Z thẳng hàng.

Vì $(ZA, ZD) \equiv (ZA, ZE) + (ZE, ZD)$

$\equiv (BA, BD) + (CE, CD) \equiv (OA, OD) \pmod{\pi}$, nên tứ giác $ADOZ$ nội tiếp đường tròn. Khi đó

$(ZO, ZY) \equiv (ZO, ZD) + (ZD, ZY) \equiv (AO, AD) + (ZD, ZE)$

$\equiv (AO, AD) + (CD, CE) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Suy ra O, M, N, Y, Z cùng nằm trên đường tròn đường kính OY. Theo định lí Brocard, ta có: O là trực tâm tam giác EXY. Vì $\widehat{OZY} = 90^0$ nên ba điểm O, X, Z thẳng hàng.

Ta có $\frac{PD}{PC} = \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{XD^2}{XC^2}$. Do đó XP là đường đối trung của ΔXCD.

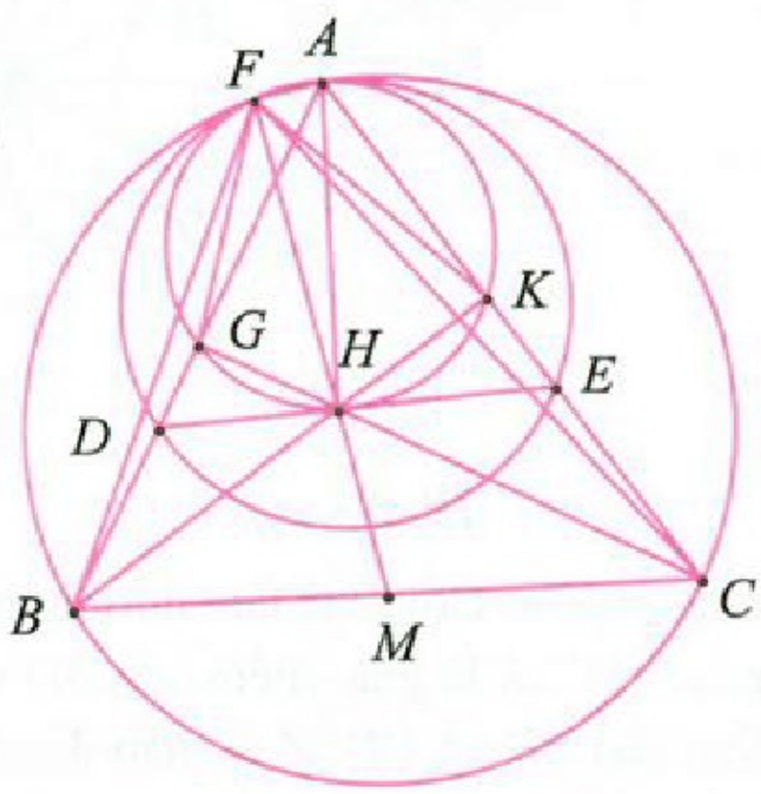
Theo nhận xét 2, P nằm trên đường thẳng NX.

Vì E, H, X, Z nằm trên một đường tròn và H là trực tâm tam giác OXY nên $\widehat{XHZ} = \widehat{XEZ} = \widehat{YOZ} = \widehat{YMZ}$. Suy ra Z thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔHMP. Vì Z là tâm của phép quay biến AC thành BD nên $\frac{PD}{PC} = \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{ZD^2}{ZC^2}$. Do đó ZP là đường đối trung trong ΔZCD.

Từ nhận xét 1 ta thấy đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HMPZ$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EDCZ$ tại Z. Điều phải chứng minh.

Thí dụ 8. (IMO Shortlist 2005). *Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. M là trung điểm của BC. Gọi D, E nằm trên AB, AC sao cho $AE = AD$ và D, H, E thẳng hàng. Chứng minh rằng HM vuông góc với dây cung chung của hai đường tròn (O) và (ADE).*

Lời giải. (h.9). Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn đường kính AH.



Hình 9

Gọi $G = CH \cap AB, K = BH \cap AC$. Dễ thấy H, M, F thẳng hàng và $HM \perp AF$. Do $\widehat{GDH} = \widehat{KEH}$ (Do tam giác ADE cân), $\widehat{DGH} = \widehat{EKH} = 90^\circ$ nên $\widehat{GHD} = \widehat{KHE}$. Suy ra HD là phân giác của góc $\widehat{GHB}$. Khi đó:

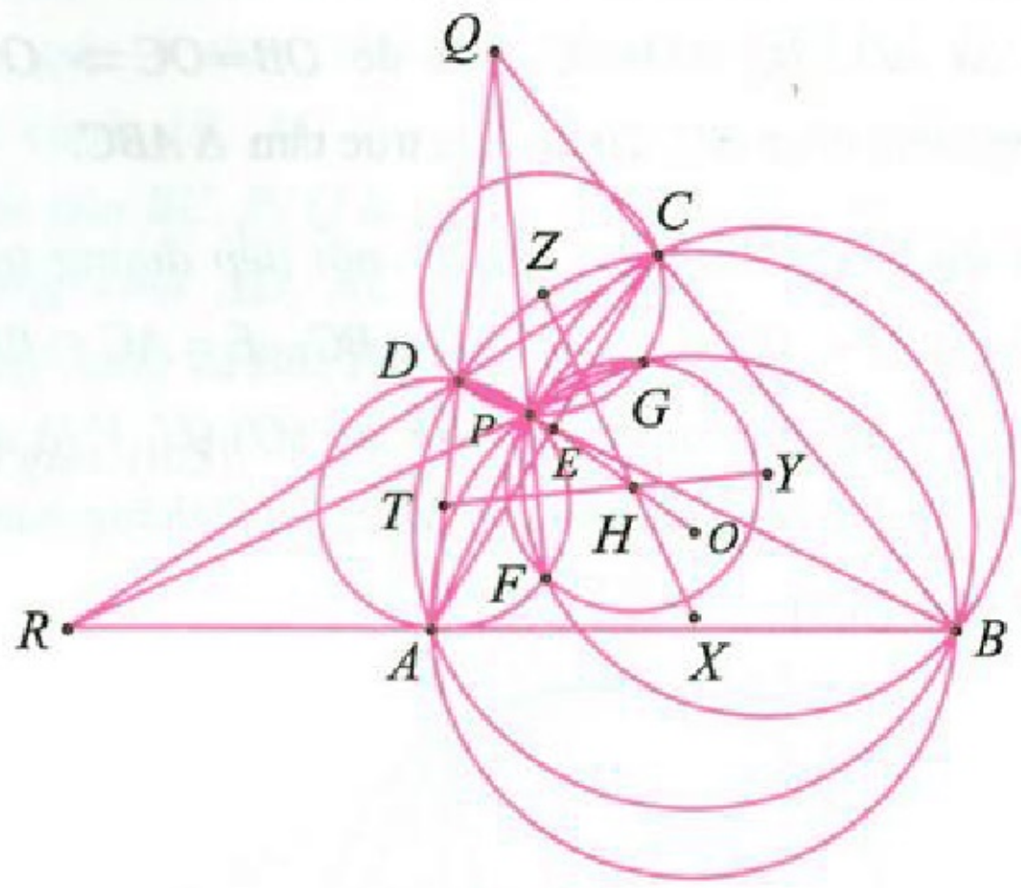
$$\frac{DG}{BD} = \frac{HG}{HB} = \frac{HK}{HC} = \frac{EK}{EC} \Rightarrow \frac{DG}{EK} = \frac{BD}{EC} = \frac{BG}{CK} \quad (1)$$

Lại có $\widehat{FGA} = \widehat{FKA} \Rightarrow \widehat{FGB} = \widehat{FKC}$ và $\widehat{FBA} = \widehat{FCK}$ nên $\Delta FGB \backsim \Delta FKC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BG}{CK} = \frac{FG}{FK}$ (2)

Từ (1), (2) có: $\frac{DG}{EK} = \frac{FG}{FK} \Rightarrow \frac{GD}{GF} = \frac{KE}{KF}$. Điều này dẫn tới $\Delta FGD \backsim \Delta FKE \Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{FEA}$. Khi đó tứ giác $FDEA$ nội tiếp. Điều này suy ra FA là dây cung chung của hai đường tròn (O) và (ADE).

Thí dụ 9. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. E là giao điểm của AC với BD. P là điểm bất kì nằm trong tứ giác ABCD, X, Y, Z, T lần lượt là tâm các đường tròn (ABP), (BCP), (CDP), (DAP). Chứng minh rằng XZ, YT, OE đồng quy.*

Lời giải. (h.10)



Hình 10

Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (Y), (T). G là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (X) và (Z). Khi đó PF, PG lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $((Y), (T))$ và $((X), (Z))$. Ta có XZ, YT lần lượt là các đường trung trực của các đoạn PG, PF. Gọi H là giao điểm của XZ và YT. Khi đó tam giác PFG nội tiếp đường tròn (H).

Gọi $R = AB \cap CD$; $Q = AD \cap BC$.

Theo định lí Brocard thì O là trực tâm tam giác ERQ. Khi đó $OE \perp RQ$ (1)

Vì $\overline{RA}.\overline{RB} = \overline{RD}.\overline{RC}$ nên R thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (X), (Z). Suy ra R, P, G thẳng hàng và $\overline{RA}.\overline{RB} = \overline{RP}.\overline{RG}$. Vậy R thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (H).

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/464. Find positive integers x, y such that $x^3 + y^3 = x^2 + 12xy + y^2$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/464. Given n real numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n > 3)$ satisfying

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \text{ and } a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq n^2.$$

Prove that $\max(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 2$.

Problem T11/464. Consider the following sequence of real numbers (a_n):

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ a_{n+1} = 10^n a_n^2, n \geq 1 \end{cases}.$$

Find all possible values for a_1 so that $\lim a_n = 0$.

Problem T12/464. Given an acute triangle ABC. Let E and F respectively be the perpendicular projections of B and C on AC and AB. Let I and J respectively be the excenters of the excircles relative to the vertices F and E of the triangles AFC and AEB. Assume that BJ intersects CI at K. Choose Q on the circumcircle of the triangle BKC such that $\widehat{AQK} = 90^0$. Prove that AQ, BI, and CJ are concurrent.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***

(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

Tương tự Q thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (H). Do đó QR chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (H). Vậy $OH \perp RQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O, H, E thẳng hàng. Tức là XZ, YT, OE đồng quy (đpcm).

III. Một số bài tập tự luyện.

1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AB và CD. Đường thẳng EF cắt bốn đường tròn (EBC), (EAD), (FBC), (FAD) lần lượt tại G, H, P, Q. Chứng minh rằng $OH = OG$, $OP = OQ$.

2. Cho ΔABC vuông tại C, D là hình chiếu của C lên AB. X là điểm trên đoạn CD. K là điểm trên đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự, L là điểm trên đoạn BX sao cho $AL = AC$. Đường tròn (DKL) cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai T. Chứng minh rằng $\widehat{ACT} = \widehat{BCT}$.

3. Cho ΔABC. Dựng phía ngoài ΔABC các ΔAPB, ΔACQ cân tại A sao cho $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$. R là giao điểm của BQ và CP. O là tâm đường tròn (BRC). Chứng minh rằng $AO \perp PQ$.

4. Cho đường tròn tâm O và một điểm E cố định nằm trong đường tròn đó. Qua E vẽ hai dây cung thay đổi AC và BC. Gọi $P = AD \cap BC$; $Q = AB \cap CD$. Vẽ đường tròn đường kính PQ cắt (O) tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng khi hai dây cung thay đổi quanh E thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

5 (Trại hè Hùng Vương lần XI – Khối 11 năm 2015). Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^o$. Đường tròn ngoại tiếp ΔGTO cắt EF tại K (K khác G). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) $OK \perp AT$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 5

Problem. *Let $f(x)$ be a non-negative continuous function on the closed interval $[0,1]$ such that $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Prove that $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.*

Solution. Suppose that there exists a point $c \in [0,1]$ such that $f(c) > 0$. First, we consider the case $c \in (0,1)$. By the continuity of the function $f(x)$, there exists a number $\delta > 0$ such that

$$|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2} \quad \forall x \in [c-\delta, c+\delta].$$

Furthermore, we can make δ smaller so that $[c-\delta, c+\delta] \subset [0,1]$. In particular, we have

$$f(x) > f(c) - \frac{f(c)}{2} = \frac{f(c)}{2} > 0$$

for every $x \in [c-\delta, c+\delta] \subset [0,1]$. Now from the non-negativity of $f(x)$, we have

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = \delta f(c) > 0.$$

This is a contradiction.

For the case $c = 0$ and the case $c = 1$, we can handle similarly but instead using the neighborhood $[c-\delta, c+\delta]$ we use the neighborhood $[0,\delta]$ and the neighborhood $[1-\delta, 1]$ respectively (q.e.d.).

TỪ VỰNG

continuous	: liên tục (tính từ)
continuity	: liên tục (danh từ)
closed interval	: khoảng đóng
furthermore	: hơn nữa
contradiction	: mâu thuẫn
handle	: xử lý
instead	: thay vì
neighborhood	: lân cận

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Hạn gửi bài dịch: *Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.*

Bài toán. *Cho 2 số nguyên dương d và n. Có bao nhiêu cách có thể viết d dưới dạng tổng của một dãy gồm n số tự nhiên?*

Chú ý. *Chúng ta dùng từ "dãy" nghĩa là thứ tự của các số hạng được tính đến.*

Lời giải. Chúng ta sẽ dùng lập luận mang tên *ngôi sao và vách ngăn*, một lập luận đã được biết đến trong tổ hợp. Gọi mỗi một cách viết d dưới dạng tổng của một dãy gồm n số tự nhiên là một n-phân tích của d. Chúng ta hình dung mỗi một n-phân tích $d = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ theo cách sau: Trong một hàng ngang gồm d ngôi sao, ta chèn 1 vách ngăn vào giữa hai ngôi sao thứ i_1, i_1+1; chèn 1 vách ngăn vào giữa hai ngôi sao thứ i_1+i_2, i_1+i_2+1;...; và chèn 1 vách ngăn vào giữa hai ngôi sao thứ $i_1+\ldots+i_{n-1}$, $i_1+\ldots+i_{n-1}+1$ (tổng cộng có n-1 vách ngăn). Ví dụ, với $d = 3$, $n = 3$, 3 - phân tích $3 = 1 + 0 + 2$ tương ứng với * | | * *, 3 - phân tích $3 = 2 + 0 + 1$ tương ứng với * * | | *, và 3 - phân tích $3 = 0 + 0 + 3$ tương ứng với | | * * *. Nói một cách khác, việc xây dựng một n-phân tích của d tương đương với việc chọn n-1 vị trí trong $d + (n-1)$ vị trí để đặt các vách ngăn. Do đó, số các n-phân tích của d bằng C_{d+n-1}^{n-1}.

Nhận xét. Các bạn sau có lời dịch tốt:
Vĩnh Phúc: *Lê Đức Thái*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Yên Bái:** *Hoàng Ngọc Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP.Yên Bái; **Hà Nội:** *Nguyễn Hải Yến*, 12A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hưng Yên:** *Nguyễn Việt Đức*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Đà Nẵng:** *Trần Nhân Trung*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: MỘT BÀI TOÁN TÌNH CỜ

(*Đề đăng trên TH&TT số* 460, *tháng 10 năm* 2015)

Nhận xét. Sai lầm trong lời giải của bạn học sinh là việc sử dụng ẩn phụ $t = \tan x$ mà không xét tới trường hợp $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình đã cho hay không !

Lời giải đúng. Giải phương trình:

$$2\tan 2x + 2\sin 2x = 3\cot x \quad (*)$$

ĐKXĐ: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases} \ (m, n \in \mathbb{Z}).$

- Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: thoả mãn (*).

- Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (1), đặt $\tan x = t$. Suy ra:

$\tan 2x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cot x = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow$ $2.\dfrac{2t}{1-t^2} + 2.\dfrac{2t}{1+t^2} = 3.\dfrac{1}{t}$

Quy đồng hai vế rồi khử mẫu ta được:

$$3t^4 + 8t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

hay $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$: thoả mãn ĐK (1) và ĐKXĐ.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hoặc } x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhận xét. Trong các bài gửi về, có 2 bạn không phát hiện được sai lầm. Các bạn sau đã tìm đúng sai lầm và có lời giải đúng:

Nam Định: *Lâm Vũ Tuấn*, 12 Anh 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hà Nội:** *Nguyễn Hải Yến*, 12A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên. **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn, Nguyễn Việt Đức, Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Thanh Hóa:** *Vũ Hữu Tùng*, 11A1, THPT Hoằng Hóa IV, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Bùi Văn Bảo*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương.

KIHIVI

XÁC SUẤT ÂM !

Bài toán. *Cho 15 viên bi có cùng kích thước, trong đó có 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 15 viên bi đó. Tính xác suất để 4 viên bi lấy ra không có đủ 3 màu.*

Lời giải. Số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365.$$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "4 *viên bi được chọn ra có đủ cả* 3 *màu*".

Để chọn ra 4 viên bi từ 15 viên bi đã cho sao cho có cả 3 loại màu được chọn, ta làm theo hai bước:

- *Bước* 1: Chọn ra 3 viên bi: 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng, có $C_4^1C_5^1C_6^1 = 120$ cách chọn.

- *Bước* 2: Chọn ra 1 viên bi tùy ý từ 12 viên bi còn lại, có 12 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số phần tử của $\overline{A}$ là $n(\overline{A}) = 120.12 = 1440$.

Ta có: $P(\overline{A}) = \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{1440}{1365} = \dfrac{96}{91}$.

Vậy: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{96}{91} = -\dfrac{5}{91} < 0.$

Bạn có biết lời giải trên sai ở đâu không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong Số* 2, *Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 464 (2.2016)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

***Trưởng ban biên tập*: *ThS.* NGUYỄN ANH QUÂN** ***Mĩ thuật*: QUỐC HIỆP, THANH LONG**
***Trị sự, phát hành*: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN** ***Thiết kế, chế bản*: VŨ MAI ANH**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THCS MÔN TOÁN

Bộ sách **Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Toán** gồm 2 cuốn:

- *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Hình học*
- *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THCS môn Số học và Đại số*

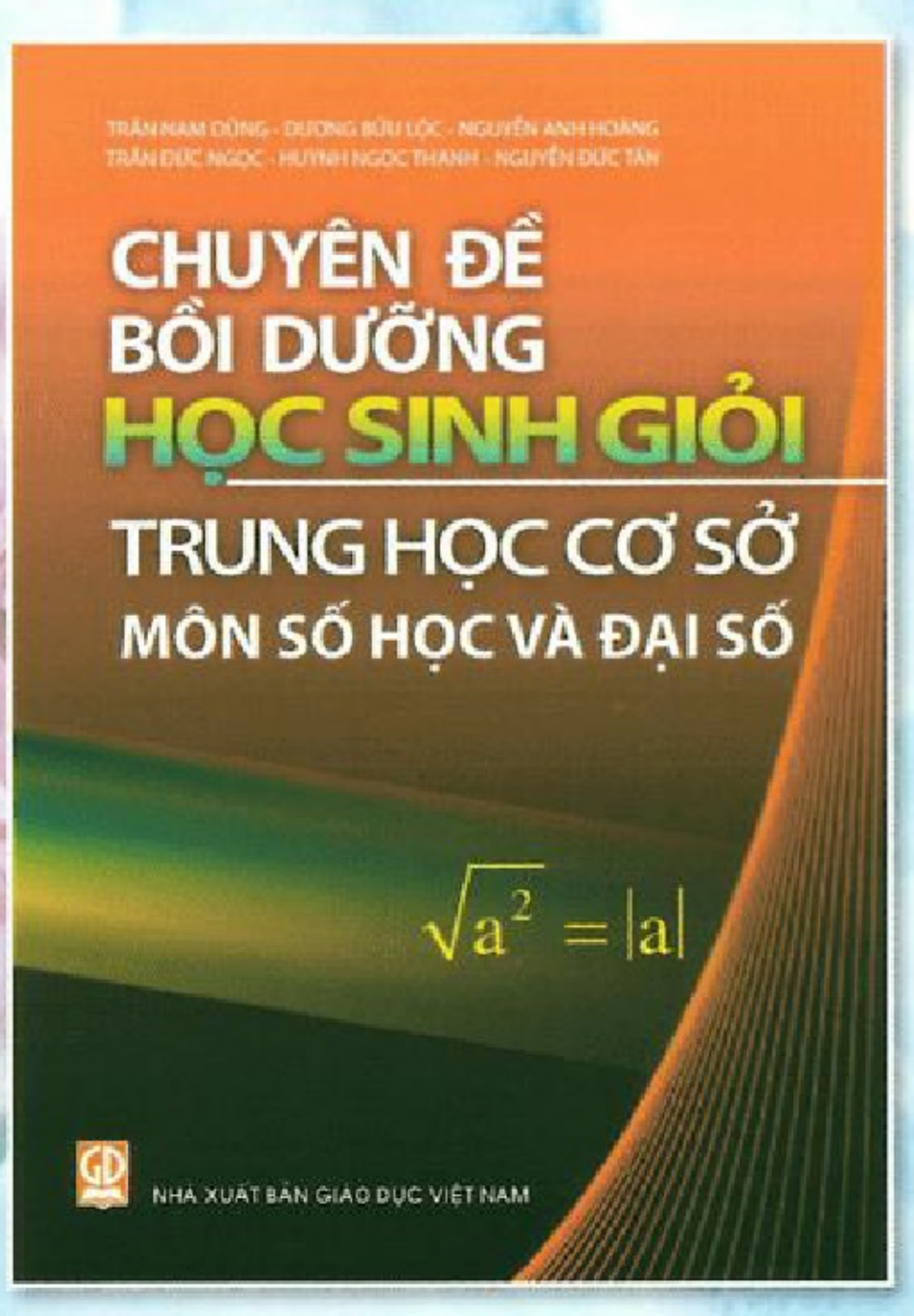
được nhóm tác giả là các thầy giáo có kinh nghiệm giảng dạy, những chuyên viên môn Toán của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh biên soạn. Nội dung bộ sách bao gồm những kiến thức bao quát chương trình môn Toán xuyên suốt từ lớp 6 đến lớp 9 và được viết theo những chuyên đề nhằm mục đích:

- Giúp các em học sinh THCS yêu thích môn Toán có thêm tài liệu để nâng cao kiến thức và kĩ năng giải toán.

- Giúp học sinh cuối cấp THCS ôn thi vào lớp 10 các trường THPT chuyên và không chuyên.

- Cung cấp thêm tài liệu tham khảo cho giáo viên trong việc bồi dưỡng nâng cao kiến thức cho học sinh.

Hy vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh THCS, việc giảng dạy của giáo viên cũng như nhu cầu đọc của bạn đọc yêu thích toán.



Mọi chi tiết xin liên hệ:

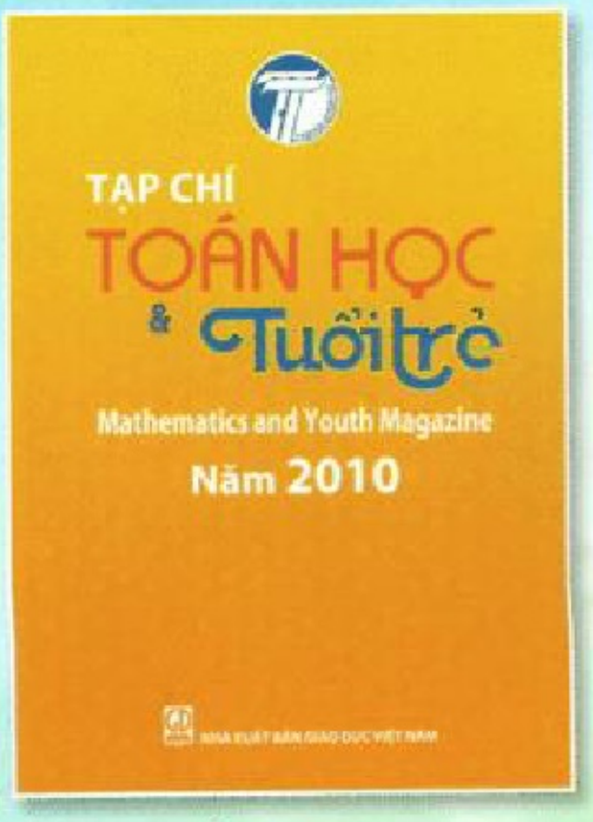
Ban Toán Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Gia Định.
Địa chỉ: 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh. Tel: 08.38323044.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

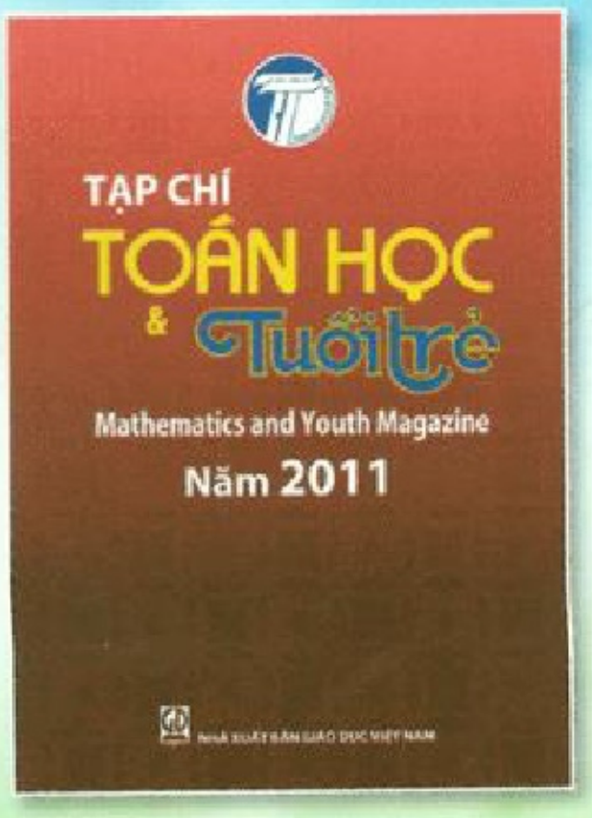
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

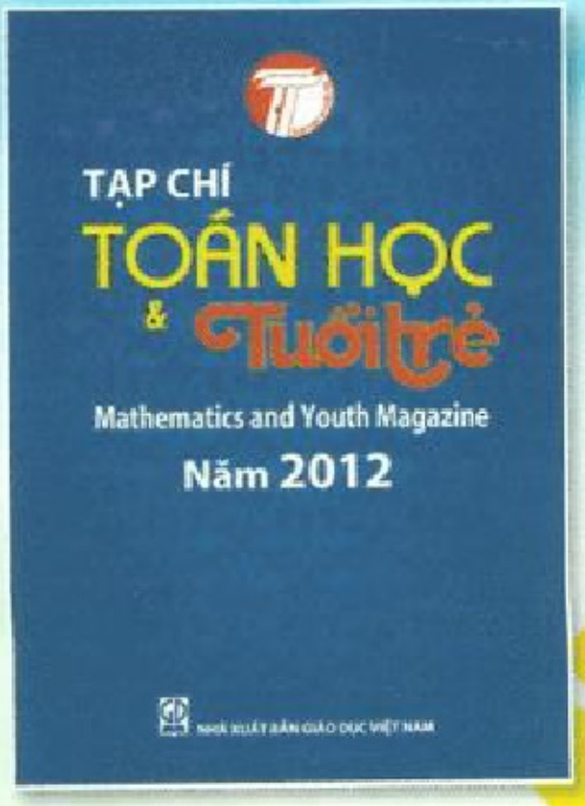
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



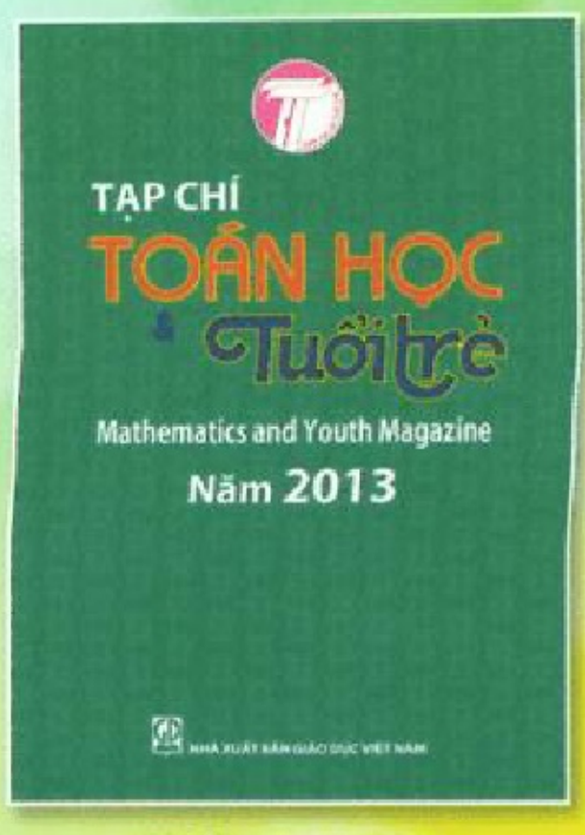
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



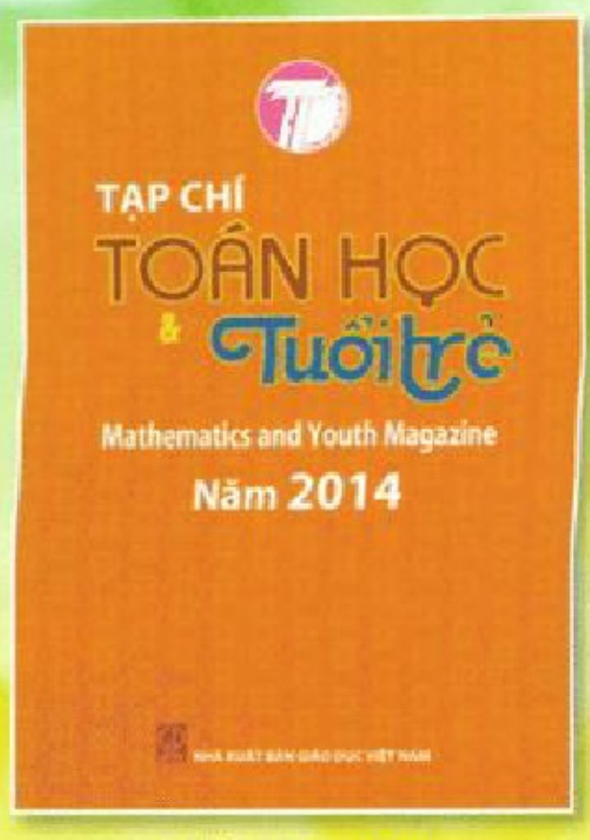
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



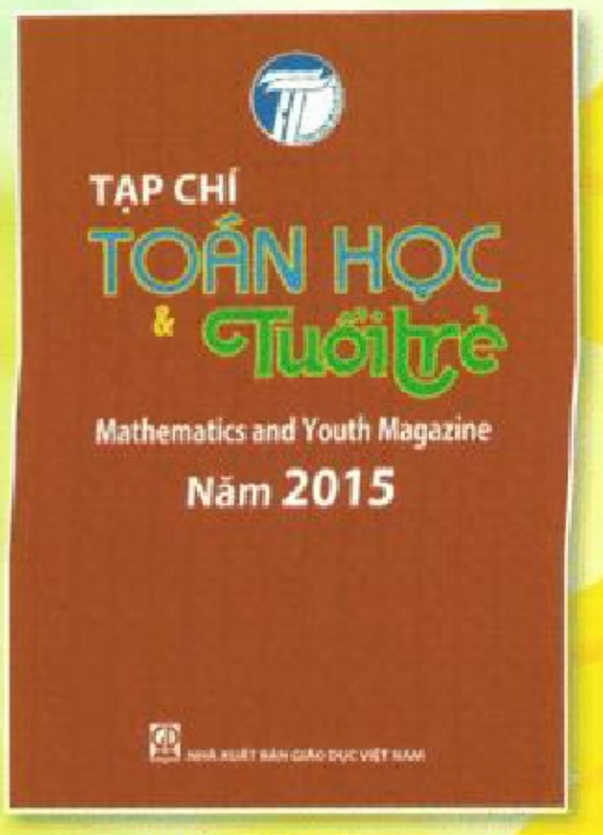
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B GIẢNG VÕ, ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI
- Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT2M6

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2016

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng