



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2015
Số 462

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



12th IMSO
2015
Thailand

“Smart, Skilled
and Creative in a
Joyful Competition for
Excellence”



**Chúc mừng thành tích của Đội tuyển Toán và Khoa học Việt Nam
trong kì thi IMSO lần thứ 12 năm 2015 tại Thái Lan**



HƯỚNG TỚI KỶ NIỆM 10 NĂM THÀNH LẬP NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

• Hoạt động từ thiện

Theo kế hoạch, trong tháng 11 và tháng 12 năm 2015, NXBGD tại Hà Nội tổ chức ba đợt công tác từ thiện tại Hà Giang, Tuyên Quang và Lào Cai.

Ngày 12/11/2015 NXBGD tại Hà Nội phối hợp cùng CĐCS NXBGD Việt Nam thực hiện chương trình từ thiện tại Hà Giang. NXBGD tại Hà Nội đã tặng sách, vở và quần áo cho 1 trường THCS và 3 trường Tiểu học Dân tộc nội trú với tổng trị giá 50 triệu đồng.



• Hoạt động tôn vinh các nhà giáo

Ngày 18/11/2015, tại Hội trường 22/12 – 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội, NXBGD tại Hà Nội đã tổ chức lễ kỷ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam để tôn vinh ngành Giáo dục và các Nhà giáo hiện đang công tác tại NXBGD Việt Nam và các đơn vị thành viên Khu vực phía Bắc.



• Hoạt động thể thao

Ngày 19/11/2015, tại Sân vận động Phòng không Không quân đã diễn ra trận giao hữu bóng đá giữa đội tuyển của NXBGD tại Hà Nội và đội tuyển của cục An ninh Thông tin Tuyên truyền A87 – Tổng cục An ninh II – Bộ Công an. Đây là một hoạt động giao lưu mang ý nghĩa tăng cường tình cảm đoàn kết, đồng thời tăng thêm sự hiểu biết trong công tác chuyên môn giữa hai đơn vị trong lĩnh vực xuất bản.



• Chuẩn bị cơ sở vật chất cho giai đoạn làm sách giáo khoa mới

Phòng Thư viện đã được cải tạo nâng cấp về cơ sở vật chất, sắp xếp và quản lý khoa học hơn để phục vụ các biên tập viên, tác giả và bạn đọc trong giai đoạn làm sách giáo khoa mới. Hiện tại Thư viện có khoảng trên 50 000 đầu sách phục vụ công tác tìm kiếm tư liệu, tra cứu thông tin và cung cấp tài liệu nghiên cứu.

Phòng Tác giả đã được làm mới và trang bị cơ sở vật chất với diện tích khoảng 80m², đáp ứng yêu cầu hợp tác giữa các môn học chuẩn bị cho việc làm sách giáo khoa mới.





TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

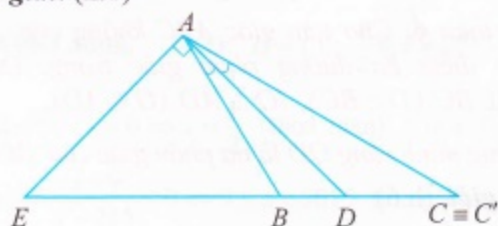
NGUYỄN ANH TUẤN

(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX Thái Hòa, Nghệ An)

Trong SGK Hình học 8, các bạn học sinh được học tính chất sau: “Nếu AD và AE lần lượt là đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác ABC thì $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$ ”. Đảo lại ta có bài toán sau:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , điểm D thuộc cạnh BC (D khác B và C), điểm E thuộc tia đối của tia BC sao cho $AD \perp AE$ và $\frac{BD}{CD} = \frac{EB}{EC}$. Chứng minh rằng AD là tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Vẽ tia AC' sao cho AD là tia phân giác của $\widehat{BAC'}$ ($C' \in BC$), vì $AD \perp AE$ nên AE là phân giác ngoài của $\widehat{BAC'}$ $\Rightarrow \frac{BD}{DC'} = \frac{EB}{EC'} \Rightarrow \frac{DC'}{EC'} = \frac{BD}{EB}$ (1)

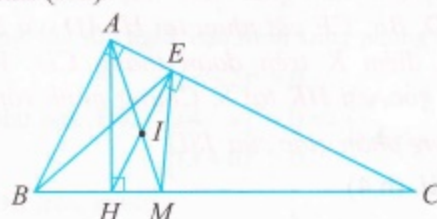
Mặt khác: $\frac{BD}{CD} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{DC}{EC} = \frac{BD}{EB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DC'}{EC'} = \frac{DC}{EC}$, mà C và C' nằm cùng phía đối với $DE \Rightarrow C \equiv C'$, do đó AD là tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Nhận xét. Bài toán 1 là một dấu hiệu để nhận biết tia phân giác của một góc, chúng ta cùng xét một số thí dụ áp dụng kết quả bài toán 1.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên AC ; I là trung điểm của EH . Tia AI cắt BC tại M . Chứng minh rằng EH là tia phân giác của góc $\widehat{BEM}$.

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle HEC$ với ba điểm thẳng hàng A, I, M ta có:

$$\frac{HM}{CM} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EI}{HI} = 1 \Rightarrow \frac{HM}{CM} = \frac{AE}{CA} \quad (1).$$

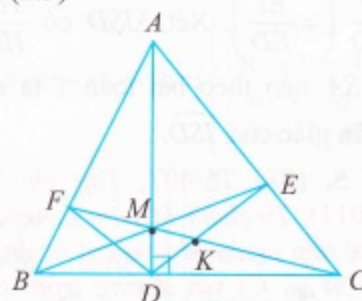
$$\text{Vì } HE \parallel AB \text{ nên } \frac{AE}{CA} = \frac{BH}{CB} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{BH}{BC}. \text{ Mà } EH \perp EC \text{ nên}$$

theo bài toán 1, EH là tia phân giác của $\widehat{BEM}$.

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AD , M là điểm nằm giữa A và D . Tia BM cắt AC tại E , tia CM cắt AB tại F . Chứng minh rằng DA là tia phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Gọi $K = CF \cap DE$. Áp dụng định lý Menelaus vào các tam giác MBC , CMD , BMD với các bộ ba điểm thẳng hàng tương ứng là: (D, K, E) ; (B, F, A) ; (C, A, E) ta có:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CK}{MK} \cdot \frac{ME}{BE} = 1; \frac{CB}{DB} \cdot \frac{DA}{MA} \cdot \frac{MF}{CF} = 1; \frac{CD}{BC} \cdot \frac{BE}{ME} \cdot \frac{MA}{DA} = 1.$$

Nhân từng về các đẳng thức trên ta có:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CK}{MK} \cdot \frac{ME}{BE} \cdot \frac{CB}{DB} \cdot \frac{DA}{MA} \cdot \frac{MF}{CF} \cdot \frac{CD}{BC} \cdot \frac{BE}{ME} \cdot \frac{MA}{DA} = 1$$

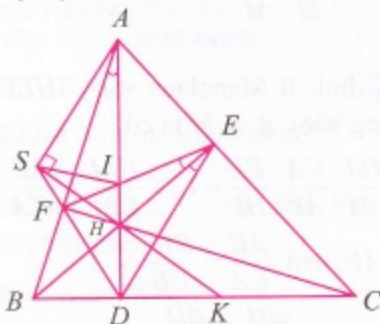
$$\Rightarrow \frac{CK}{MK} \cdot \frac{MF}{CF} = 1 \Rightarrow \frac{MK}{MF} = \frac{CK}{CF}.$$

Xét $\triangle DKF$ có $DC \perp MD$, $\frac{MK}{MF} = \frac{CK}{CF}$, theo

bài toán 1, DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

Bài toán 4. (Bài T4/453, Tạp chí TH&TT, tháng 3/2015). Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . AD cắt EF tại I . Lấy điểm K trên đoạn thẳng CD . Vẽ AS vuông góc với HK tại S . Chứng minh rằng SH là đường phân giác của $\widehat{ISD}$.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

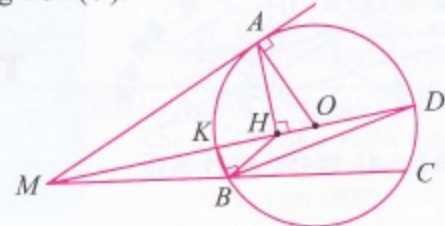
Các tứ giác $AEHF$ và $AEDB$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{FEH} = \widehat{FAH} = \widehat{HED}$, do đó EH là tia phân giác của $\widehat{FED}$. Xét $\triangle IED$ có EH và EA lần lượt là các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của $\widehat{IED}$ nên $\frac{HI}{HD} = \frac{AI}{AD} \left(= \frac{EI}{ED} \right)$. Xét $\triangle ISD$ có $\frac{HI}{HD} = \frac{AI}{AD}$ và $SH \perp SA$ nên theo bài toán 1 ta có SH là đường phân giác của $\widehat{ISD}$.

Bài toán 5. (Bài T5/407, Tạp chí TH&TT, tháng 5/2011). Từ điểm M nằm ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của A trên MO , K là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng BK là tia phân giác của góc HBM .

Lời giải. (h.5) Giả sử MO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D , ta có $MK \cdot MD = MA^2 = MH \cdot MO$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MK} = \frac{MD}{MO} \Rightarrow \frac{MH - MK}{MK} = \frac{MD - MO}{MO}$$

$\Rightarrow \frac{KH}{MK} = \frac{OD}{MO} = \frac{R}{MO}$ (1), với R là bán kính của đường tròn (O) .



Hình 5

Mặt khác $R \cdot MD = R(MO + OD) = R(MO + R)$ (2)

$$MO \cdot HD = MO(OD + OH) = MO \cdot OH + MO \cdot OD = OA^2 + MO \cdot R = R^2 + MO \cdot R = R(MO + R) \quad (3).$$

$$\text{Từ (2) và (3) có } R \cdot MD = MO \cdot HD \Rightarrow \frac{R}{MO} = \frac{HD}{MD} \quad (4)$$

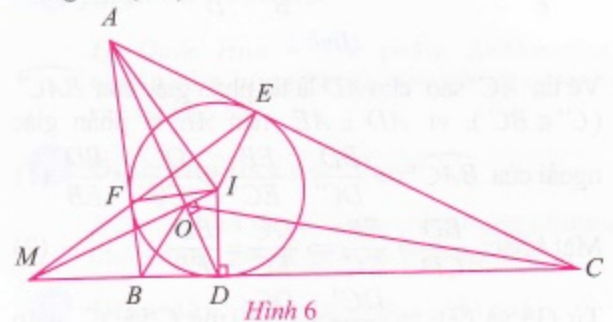
$$\text{Từ (1) và (4) } \Rightarrow \frac{KH}{MK} = \frac{HD}{MD} \Rightarrow \frac{KH}{HD} = \frac{MK}{MD}.$$

Mặt khác $\widehat{KBD} = 90^\circ$, hay $BK \perp BD$. Xét $\triangle MBH$ có $BK \perp BD$ và $\frac{KH}{HD} = \frac{MK}{MD}$ nên theo bài toán 1, BK là tia phân giác của $\widehat{MBH}$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC không cân, I là giao điểm ba đường phân giác trong. Dựng $ID \perp BC$ ($D \in BC$), $IO \perp AD$ ($O \in AD$).

Chứng minh rằng OD là tia phân giác của $\widehat{BOC}$.

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC và AB ; $M = EF \cap BC$. Ta có tứ giác $FIEA$ nội tiếp đường tròn. Gọi O' là giao điểm của MI với đường tròn $(FIEA)$, khi đó: $\widehat{IO'A} = \widehat{IFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MO'A} = 90^\circ$ (1). Mặt khác:

$$ME \cdot MF = MD^2 \text{ và } ME \cdot MF = MI \cdot MO'$$

$$\Rightarrow MI \cdot MO' = MD^2 \Rightarrow \frac{MI}{MD} = \frac{MD}{MO'}$$

$$\Rightarrow \triangle MID \sim \triangle MDO' \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MO'D} = \widehat{MDI} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, O', D$ thẳng hàng, nên $O \equiv O' \Rightarrow MO \perp OD$.

Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ABC$ với ba điểm thẳng hàng E, F, M ta có:

$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BF}{AF} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{CD} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BD}{AF} = 1 \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CM}$$

(vì $AE = AF; CD = CE; BD = BF$).

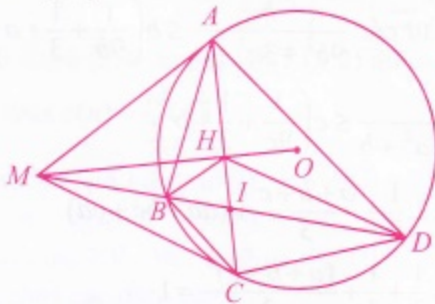
Xét $\triangle BOC$ có $MO \perp OD$ và $\frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CM}$, nên theo bài toán 1, OD là tia phân giác của góc $\widehat{BOC}$.

Bài toán 7. Từ điểm M nằm ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến MA, MC và cát tuyến MBD không đi qua tâm O (B nằm giữa M và D) với đường tròn. Gọi H, I lần lượt là giao điểm của AC với MO, BD . Chứng minh rằng

a) AC là đường phân giác của $\widehat{BHD}$.

b) $\frac{1}{DI} + \frac{1}{DM} = \frac{2}{DB}$. (Bài T5/414, TH&TT tháng 12/2011).

Lời giải. (h.7)



a) Ta có $\triangle BMC \sim \triangle CMD$ (g.g) và

$$\triangle MBA \sim \triangle MAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{BC}{CD}; \frac{MB}{MA} = \frac{AB}{AD}, \text{ mà}$$

$$MA = MC \text{ nên } \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} \text{ (1). Ta có:}$$

$$\frac{BM}{MD} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CM}{MD} \left(\text{vì } \frac{BM}{CM} = \frac{BC}{CD} \right) \text{ (2).}$$

Mặt khác:

$$\frac{IB}{ID} = \frac{S_{CBI}}{S_{CDI}} = \frac{S_{ABI}}{S_{ADI}} = \frac{S_{CBI} + S_{ABI}}{S_{CDI} + S_{ADI}} = \frac{S_{CBA}}{S_{CDA}}$$

$$= \frac{CB \cdot BA \cdot \sin \widehat{A}}{CD \cdot DA \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{CB \cdot BA}{CD \cdot DA}$$

$$= \frac{CB \cdot BA}{CD \cdot DA} = \frac{CB}{CD} \cdot \frac{BA}{DA} = \frac{CB}{CD} \cdot \frac{MB}{MC}$$

(vì $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{AD}$ và $MA = MC$) (3)

$$\text{Vì } \triangle BMC \sim \triangle CMD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{BM}{CM} \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) và (4)} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MD}.$$

Xét $\triangle BHD$ có $IH \perp MH$ và $\frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MD}$, nên theo bài toán 1, AC là đường phân giác của $\widehat{BHD}$.

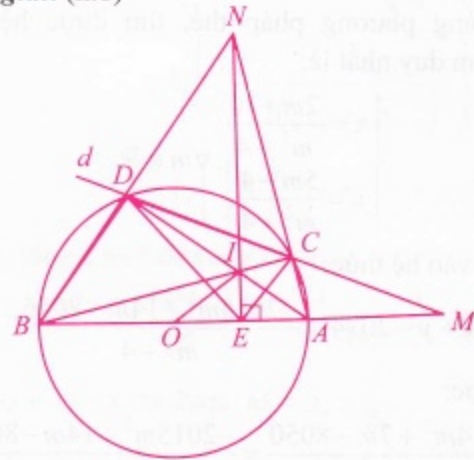
b) Từ câu a) $\frac{IB}{ID} = \frac{MB}{MD}$, suy ra

$$\frac{ID + IB}{ID} + \frac{MD - MB}{MD} = 2 \Rightarrow \frac{BD}{ID} + \frac{BD}{MD} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ID} + \frac{1}{MD} = \frac{2}{BD} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 8. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . M là điểm đối xứng của O qua A . Đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn (O) tại C và D (C nằm giữa M và D). AD cắt BC tại I . Chứng minh rằng tam giác IOA cân.

Lời giải. (h.8)



Hình 8

Gọi E là trung điểm của OA , ta có $\frac{AE}{AM} = \frac{BE}{BM} \left(= \frac{1}{2} \right)$, xét $\triangle EDM$ có $BD \perp AD$ và

$$\frac{AE}{AM} = \frac{BE}{BM} \text{ nên theo bài toán 1 ta có } DA \text{ là tia phân giác của } \widehat{EDM} \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{ADM} \text{ (1)}$$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ADM}$ (2). Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{EDI} \text{ nên tứ giác } BDIE \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow IE \perp OA. \text{ Suy ra tam giác } IOA \text{ cân tại } I.$$

Cuối cùng xin mời các bạn vận dụng dấu hiệu trên để giải thêm bài toán sau:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của BD và AC . Chứng minh rằng BD là phân giác của góc $\widehat{AIC}$ khi và chỉ khi AC là phân giác góc $\widehat{BJD}$ (Bài T5/431, Tạp chí TH&TT, tháng 5/2013).

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VINH PHÚC NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 461, tháng 11 năm 2015)

Câu 1. ĐK: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$. $A = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$

b) Biến đổi:

$$A = -6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}-9 = -6(\sqrt{x}-2)$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy để $A = -6$ thì $x = 9$.

Câu 2. a) Đáp số: Với $m = 10$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{15}{52}; \frac{23}{52}\right)$.

b) Dùng phương pháp thế, tìm được hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \frac{2m+10}{m^2+4} \\ y = \frac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Thay vào hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

ta được:

$$\frac{-2014m^2 + 7m - 8050}{m^2 + 4} = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow -2014m^2 + 7m - 8050 = -2015m^2 + 14m - 8056$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

Kết luận. Để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4} \text{ thì } \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}.$$

Câu 3. a) Chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2,$$

$$\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ bz = cy \end{cases}$$

Áp dụng BĐT (1) ta có:

$$(9a^3 + 3b^2 + c) \left(\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c \right) \geq (a + b + c)^2 = 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow 9a^3 + 3b^2 + c \geq \frac{1}{\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} \leq a \left(\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c \right)$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} \leq b \left(\frac{1}{9b} + \frac{1}{3} + a \right);$$

$$\frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b} \leq c \left(\frac{1}{9c} + \frac{1}{3} + b \right)$$

$$\Rightarrow P \leq 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{a+b+c}{3} + (ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(a+b+c)^2}{3} = 1$$

$$\left(\text{do } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \right).$$

$$\text{Vậy } \max P = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

b) Ta có: $x(1+x+x^2) = 4y(y-1)$

$$\Leftrightarrow (x^3 + x^2) + (x+1) = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = (2y-1)^2 \quad (1).$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 > 0$, nên từ (1) $\Rightarrow x \geq 0$

và x chẵn. Giả sử $(x+1, x^2+1) = d \Rightarrow d$ lẻ và

$$x^2-1:d; x^2+1:d \Rightarrow 2:d \Rightarrow d=1. \text{ Vì } (x+1)(x^2+1)$$

là số chính phương, $(x+1, x^2+1) = 1$ nên $(x+1)$

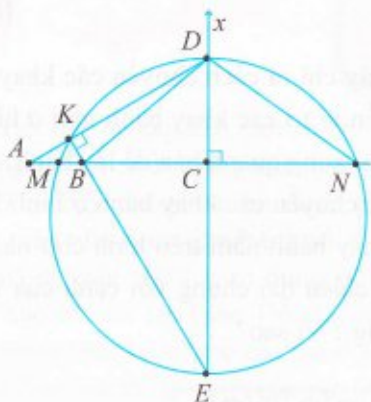
và (x^2+1) cũng là hai số chính phương. Do

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 < x^2+1 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1 = (x+1)^2 \Rightarrow x=0.$$

Khi $x = 0$, ta có $4y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0; 0), (0; 1)$.

Câu 4



a) Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{ADC}$ (cùng bù với góc $\widehat{KBC}$);
 $\widehat{ACD} = \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ECB$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow DC \cdot EC = AC \cdot BC$.

Do $AB = \frac{a}{4}; BC = \frac{3a}{4} \Rightarrow DC \cdot EC = AC \cdot BC = \frac{3a^2}{4}$.

b) $S_{BDE} = \frac{1}{2} BC \cdot DE \Rightarrow S_{BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất. Ta có:

$$DE = DC + EC \geq 2\sqrt{DC \cdot EC} = 2\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\sqrt{3}$$

(theo chứng minh phần a).

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow DC = EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó:

S_{BDE} nhỏ nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi D thuộc tia Cx
sao cho $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow M, N$ đối xứng qua DE .

Ta có: $\triangle AKB \sim \triangle ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AK \cdot AD = AC \cdot AB \quad (1).$$

$\triangle AKM \sim \triangle AND$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow AK \cdot AD = AM \cdot AN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AM \cdot AN = AC \cdot AB = \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = (AC - MC)(AC + NC) = AC^2 - MC^2$$

(do $MC = NC$)

$$\Rightarrow MC^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow M, N$ là hai điểm cố định.

Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.

Câu 5. Với hai số thực u, v bất kỳ ta luôn có:

$$(u+1)(v+1) = u+v+uv+1 = (u+v+uv)+1 \quad (*)$$

Với dãy số thực bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_{2015}$, ta xét “Tích thêm T ”:

$$T = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_{2015}+1)$$

Áp dụng cách biến đổi dãy như trong đề bài kết hợp với nhận xét (*), ta nhận thấy “Tích thêm T ” không thay đổi với mọi dãy thu được. Với dãy đã cho ban đầu của bài toán, “Tích thêm T ”:

$$T = \left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2015}+1\right) \\ = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{2015}{2014} \cdot \frac{2016}{2015} = 2016.$$

Giả sử sau 2014 lần biến đổi tùy ý theo yêu cầu, dãy còn lại chỉ còn một số là x thì “Tích thêm T ” đối với dãy cuối là: $T = x+1$. Vậy ta có: $x+1 = 2016 \Rightarrow x = 2015$.

Bài toán được giải quyết và sau 2014 lần biến đổi dãy theo đúng yêu cầu của bài toán ta thu được số 2015.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Sưu tầm và giới thiệu



CHUYỂN KHAY BÁNH



PHI PHI
(Hà Nội)

Tên một mặt bàn hình vuông gồm $6 \times 6 = 36$ (ô) đã đặt 18 khay bánh, mỗi khay bánh được đặt vào một ô như ở hình 1. Hai ô gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh hoặc chung một đỉnh. Có thể chuyển khay bánh theo quy tắc: nhắc khay ở ô A qua khay ở ô B đến ô trống C nếu A, B, C thẳng hàng, A kề B và B kề C .

			O	O	O
			O	O	O
			O	O	O
O	O	O			
O	O	O			
O	O	O			

Hình 1

	O	O	O	O	
O				O	O
O					O
O					O
O	O				O
	O	O	O	O	

Hình 2

- 1) Bạn hãy chỉ ra cách chuyển các khay bánh ở hình 1 đến vị trí các khay bánh như ở hình 2 để mọi người xung quanh bàn dễ lấy bánh.
- 2) Có thể chuyển các khay bánh ở hình 1 đến vị trí các khay bánh nằm trên hình chữ nhật 3×6 ô mà có chiều dài chung với cạnh của mặt bàn hay không? Vì sao?

ĐỀ THI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (6 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức:

$$A = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1), \text{ biết rằng}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}, y = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11 \\ x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 2. (5 điểm)

a) Cho phương trình: $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $5x_1 + 2x_2 = 1$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:
 $5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 3 = 0$.

Bài 3. (3 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có cạnh BC bằng trung bình cộng của hai cạnh AB và AC . Gọi G là trọng tâm và I là giao điểm

ba đường phân giác trong của tam giác ABC . Chứng minh rằng $IG \parallel BC$.

Bài 4. (3,5 điểm). Cho tam giác ABC ($AB > AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm I . Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M . Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại N (N khác D). Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Bài 5. (2,5 điểm). Cho ba số $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu 1. Bạn đọc tự giải.

Câu 2. ĐK: $-1 \leq x \leq 7$. Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$,
vì $x \in [-1; 7] \Rightarrow t \in [2\sqrt{2}; 4]$, ta có

$$\sqrt{(x+1)(7-x)} = \frac{t^2 - 8}{2}.$$

Ta tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -\frac{t^2}{2} + 3t + 4$
trên đoạn $[2\sqrt{2}; 4]$. Ta có $y' = -t + 3, y' = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Tính $y(3) = \frac{17}{2}, y(2\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}, y(4) = 8$.

Vậy $\max_{[-1;7]} y(x) = \max_{[2\sqrt{2};4]} y(t) = \frac{17}{2}$ khi $t = 3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 3\sqrt{7}}{2}.$$

$\min_{[-1;7]} y(x) = \min_{[2\sqrt{2};4]} y(t) = 8$ khi $t = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 3.

1) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |(x-3) + (4-y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (4-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0.$$

Tập hợp những điểm biểu diễn số phức z là
đường thẳng có PT $6x + 8y - 25 = 0$.

2) ĐK: $x \neq -1$. Ta có $(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5} + 2)^{-1}$

$$PT \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} + 2)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x-1 + \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1.$$

Câu 4. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Suy ra } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = (-\cot t - t) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Câu 5. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$, bán kính

$R = 10$. Vì $h = d(I, (P)) = 0$, nên (P) cắt (S) và
 (P) đi qua tâm I của (S) . Vậy thiết diện có tâm I
 $(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$.

Câu 6. 1) Ta có $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 3 \Rightarrow \cos a \neq 0$.

$$\text{Khi đó, } B = \frac{8 + 4 \tan^3 a + 3(1 + \tan^2 a)}{2(1 + \tan^2 a) - 5 \tan^3 a} = -\frac{146}{115}.$$

2) Ta có $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}, C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}, \dots, C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$.

Từ giả thiết: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20},$$

(vì $C_{2n+1}^0 = 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) \right]$$

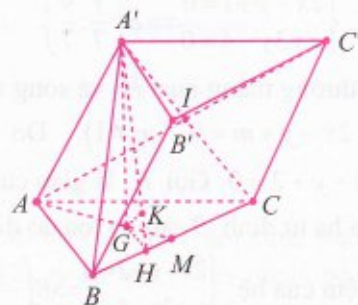
$$+ (C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) = 2^{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{2n+1} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10.$$

Với $n = 10$, nhị thức trên có 11 số hạng, số
hạng đứng chính giữa là số hạng thứ 6 ứng với

$$k = 5. \text{ Vậy } T_6 = C_{10}^5 (x^3)^{10-5} \left(\frac{1}{x^2} \right)^5 = C_{10}^5 x^5.$$

Câu 7.



Gọi M là trung điểm BC , ta thấy $AG \perp (ABC)$
và $\widehat{AA'G} = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Theo định lý cosin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 3a^2.$$

$$\text{Vì } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{7}}{3}; A'G = \frac{AG}{\tan 30^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}.$$

Gọi $I = AC' \cap A'C \Rightarrow I$ là trung điểm của AC' .

Từ đó $d(C', (A'BC)) = d(A, (A'BC)) = 3d(G, (A'BC))$
(do $AM = 3GM$). Trong mp (ABC) , kẻ $GH \perp BC$ tại H . Trong mp $(A'GH)$, kẻ $GK \perp A'H$ tại K (1).

Ta có $\begin{cases} BC \perp A'G \\ BC \perp GH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'GH) \Rightarrow BC \perp GK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GK \perp (A'BC)$, hay

$GK = d(G, (A'BC))$. Ta có

$$S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \text{ và } S_{GBC} = \frac{1}{2} GH \cdot BC$$

$$\Rightarrow GH = \frac{2S_{GBC}}{BC} = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{3};$$

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GH^2} = \frac{3}{7a^2} + \frac{9}{a^2} = \frac{66}{7a^2} \Rightarrow GK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{66}}.$$

$$\text{Vậy } d(C', (A'BC)) = 3GK = \frac{3a\sqrt{7}}{\sqrt{66}}.$$

Câu 8. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{7}; \frac{9}{7}\right).$$

Gọi Δ là đường thẳng qua H và song song với $BC \Rightarrow \Delta: 2x - y + m = 0, (m \neq 1)$. Do $H \in \Delta$ nên $\Delta: 2x - y + 2 = 0$. Gọi K là giao của Δ với đường cao hạ từ đỉnh B suy ra tọa độ điểm

$$K \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{2}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

Gọi I là trung điểm $HK \Rightarrow I\left(\frac{5}{14}; \frac{19}{7}\right)$ và I

nằm trên đường cao AM .

Từ $AM \perp BC \Rightarrow AM: x + 2y + c = 0$ và $I \in AM$

$$\Rightarrow c = -\frac{81}{14} \Rightarrow AM: 14x + 28y - 81 = 0.$$

Ta có $M = AM \cap BC$, tọa độ điểm M là nghiệm

$$\text{của hệ } \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 14x + 28y - 81 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{53}{70}; \frac{88}{35}\right).$$

Từ M là trung điểm $BC \Rightarrow C\left(\frac{48}{35}; \frac{131}{35}\right)$.

$$\text{Do } A \in AM \Rightarrow A\left(a; \frac{81 - 14a}{28}\right),$$

$$\overline{AB} = \left(\frac{1}{7} - a; \frac{14a - 45}{28}\right); \overline{CH} = \left(-\frac{13}{35}; \frac{9}{35}\right).$$

$$\text{Ta có } \overline{AB} \perp \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CH} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{457}{490}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{457}{490}; \frac{1189}{490}\right). \text{ Vậy } A\left(\frac{457}{490}; \frac{1189}{490}\right),$$

$$B\left(\frac{1}{7}; \frac{9}{7}\right) \text{ và } C\left(\frac{48}{35}; \frac{131}{35}\right).$$

Câu 9. ĐK: $-1 \leq x \leq 4$.

$$\begin{aligned} \text{BPT} &\Leftrightarrow x(x+1)(x-3) \geq \left[\sqrt{4-x} - \left(2 - \frac{1}{3}x\right) \right] \\ &\quad + \left[\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{3}x\right) \right] \\ &\Leftrightarrow 3x(x-3)(x+1) \geq \left[3\sqrt{4-x} - (6-x) \right] \\ &\quad + \left[3\sqrt{1+x} - (3+x) \right] \\ &\Leftrightarrow 3x(x-3)(x+1) \geq \left[\frac{9(4-x) - (6-x)^2}{3\sqrt{4-x} + (6-x)} \right] \\ &\quad + \left[\frac{9(1+x) - (3+x)^2}{3\sqrt{1+x} + (3+x)} \right] \end{aligned}$$

Mời các bạn đặt mua ĐÓNG TẬP TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÈ NĂM 2015.

Giá bìa: 199.000 đồng tại các cơ sở Bưu điện trên cả nước hoặc tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocvatuotre@vietnam@gmail.com

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (1 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

Câu 2 (1 điểm). Lập phương trình đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $AB = \sqrt{5}$ trong đó điểm A thuộc trục tung.

Câu 3 (1 điểm). a) Tìm hệ số không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - n\sqrt[3]{x}\right)^{15}$, $x > 0$ biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển này bằng 0 ($n \in \mathbb{R}$).

b) Giải phương trình $3^{\log_2 x} + 3^{2-\log_2 x} = 10$.

Câu 4 (1 điểm). Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$.

Câu 5 (1 điểm). a) Cho số thực α thỏa mãn $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính $A = \tan \alpha + \cot 2\alpha$.

b) Một hoàng tử đi săn thỏ với xác suất bắn trúng thỏ tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ hoàng tử đến thỏ. Ở khoảng cách 20m khả năng bắn trúng của hoàng tử là 50%. Nếu ở khoảng cách 20m hoàng tử bắn không trúng thì hoàng tử sẽ bắn tiếp lần thứ 2 (ở khoảng cách 30m) và nếu lần 2 hoàng tử bắn không trúng thì hoàng tử sẽ bắn tiếp lần thứ 3 (ở khoảng cách 50m). Tính xác suất để hoàng tử bắn trúng thỏ sau nhiều nhất 3 lần bắn.

Câu 6 (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có phương trình lần lượt là $x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z - 15 = 0$.

Chứng minh rằng (S_1) và (S_2) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Tìm bán kính và tọa độ tâm J của (C) .

Câu 7 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D ; $AB = AD = a$ và $CD = 2a$. Biết rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, BC .

Câu 8 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (C) tâm K có D là tiếp điểm của (C) trên cạnh AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt cạnh AB tại điểm E khác B . Các đường thẳng qua A, D và vuông góc với CE cắt cạnh BC tại F và G . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $F(-3; -4); G(1; -1)$ và $K(-2; 3)$.

Câu 9 (1 điểm). Giải bất phương trình $2(x-2)\sqrt{5-x^2} + (x+1)\sqrt{5+x^2} < 7x-5$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 10 (1 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{10}{x+y+z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{xy + yz + zx} - \frac{4}{x^3 + y^3 + z^3}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

$$\Leftrightarrow x(x-3) \left[3(x+1) + \frac{1}{3\sqrt{4-x} + (6-x)} + \frac{1}{3\sqrt{1+x} + (3+x)} \right] \geq 0 \quad (*)$$

Vì $x \in [-1; 4]$ thì biểu thức trong móc vuông

$$\text{dương nên } (*) \Leftrightarrow x(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK, suy ra $-1 \leq x \leq 0$ hoặc $3 \leq x \leq 4$. Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là

$$S = [-1; 0] \cup [3; 4].$$

Câu 10. Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$\frac{4x^3}{(z+x)y} + (z+x) + 2y \geq 3\sqrt{\frac{4x^3}{(z+x)y}}(z+x)2y = 6x,$$

cùng với hai BĐT tương tự ta thấy

$$8P + 4x + 4y + 4z \geq 6x + 6y + 6z \Leftrightarrow P \geq \frac{x+y+z}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

$$x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1, \text{ nên } P \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi } x=y=z=\frac{1}{3} \text{ thì } P=\frac{1}{4}. \text{ Vậy } \min P=\frac{1}{4}.$$

NGUYỄN QUANG THI
(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)



MỘT SỐ BÀI TOÁN

TỔ HỢP XÁC SUẤT

TRẦN VĂN ĐỨC

(GV THPT Cẩm Bình, Hà Tĩnh)

Trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng các năm trước, nay là kỳ thi THPT Quốc gia thường có bài toán xác suất liên quan đến kiến thức tổ hợp để tìm số kết quả đồng khả năng hay số kết quả thuận lợi cho biến cố. Để chuẩn bị tốt cho kỳ thi THPT Quốc gia sắp tới, chuyên đề này một lần nữa khắc sâu và khái quát lại cho học sinh có cái nhìn tổng quát về dạng toán này.

Trước tiên ta nhắc lại một số kiến thức lý thuyết:

- **Không gian mẫu:** Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gian mẫu, kí hiệu Ω và số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)$.

- **Biến cố:** Mỗi tập con A của Ω gọi là biến cố và số kết quả thuận lợi cho biến cố A kí hiệu $n(A)$.

- **Biến cố đối:** $\bar{A}$ được gọi là biến cố đối của biến cố A nếu $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

- Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

- Xác suất biến cố đối: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Chú ý: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Tiếp theo ta xét một số dạng toán

DẠNG 1. CÁC BÀI TOÁN TÍNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

Các bài toán tính xác suất đơn giản không có nghĩa là bài toán dễ. Ở đây chúng tôi muốn đề cập đến các bài toán chỉ sử dụng công thức định nghĩa xác suất cổ điển mà không cần dùng đến quy tắc cộng, quy tắc nhân xác suất: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Thí dụ 1 (Đề thi thử THPT Quốc gia của trường THPT Lý Tự Trọng, Hà Tĩnh 2015, lần 1).

Xét tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập hợp trên. Tính xác suất để phần tử đó là một số chia hết cho 5.

Lời giải. Gọi A là biến cố: “Lập được số tự nhiên chia hết cho 5, có 5 chữ số khác nhau”.

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau kể cả số 0 đứng đầu là A_8^5 số.

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và có số 0 đứng đầu là A_7^4 số.

Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau là $A_8^5 - A_7^4 = 5880$. Vậy $n(\Omega) = 5880$.

Số các số tự nhiên chia hết cho 5 có 5 chữ số khác nhau là $A_7^4 + 6A_6^3 = 1560$ suy ra $n(A) = 1560$.

Do đó xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{1560}{5880} = \frac{13}{49}.$$

Thí dụ 2. (Đề thi thử THPT Quốc gia của THPT Cù Huy Cận, Hà Tĩnh, 2015, lần 4).

Gọi A là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập A . Tính xác suất để trong 3 số được chọn có đúng 1 số có mặt chữ số 5.

Lời giải. Số phần tử của A là $A_5^3 = 60$. Số các số thuộc A không có chữ số 5 là: $A_4^3 = 24$.

Số các số thuộc A có chữ số 5 là $60 - 24 = 36$.

Chọn 3 số tự nhiên từ tập A , số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{60}^3$.

Gọi B là biến cố: 3 số được chọn có đúng 1 số có mặt chữ số 5: $n(B) = C_{36}^1 \cdot C_{24}^2$.

Xác suất của biến cố B là:

$$P = \frac{C_{36}^1 \cdot C_{24}^2}{C_{60}^3} = \frac{2484}{8555} \approx 0,29.$$

Thí dụ 3 (ĐH Khối A - 2014). Từ một hộp chứa 16 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 16. Chọn ngẫu nhiên 4 tấm thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

Lời giải. Rút ngẫu nhiên 4 tấm thẻ trong 16 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 16, ta có:

$$n(\Omega) = C_{16}^4 = 1820.$$

Gọi A là biến cố: Có đúng 4 tấm thẻ mang số chẵn.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = C_8^4 = 70. \text{ Vậy } P(A) = \frac{7}{1820} = \frac{1}{26}.$$

Thí dụ 4. Tám người trong đó có 2 vợ chồng anh A được xếp ngẫu nhiên xung quanh một cái bàn tròn không đánh số chỗ ngồi. Tính xác suất để 2 vợ chồng anh A ngồi cạnh nhau.

Lời giải. Số cách sắp xếp 8 người vào 1 bàn tròn là: 7!

Xem 2 vợ chồng anh A ngồi 1 vị trí. Như vậy có 6! cách xếp 8 người trong đó cặp vợ chồng anh A xem như 1 người.

Ta lại có 2 cách đổi chỗ của vợ chồng anh A.

Do đó xác suất cần tìm là $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Chú ý. Nếu cho bài toán có đánh số chỗ ngồi thì số cách sắp xếp 8 người là 8!.

DẠNG 2. BIẾN CỐ ĐỐI

Trong toán học, có những bài toán khi tính toán trực tiếp rất dài dòng và phức tạp. Khi đó phương pháp gián tiếp lại rất hiệu quả và cho ta cách làm ngắn gọn. Phương pháp sử dụng biến cố đối là một phương pháp như vậy.

Thí dụ 5. (Đề thi thử THPT Quốc gia của trường THPT Lê Hồng Phong, Hà Tĩnh, 2015, lần 1).

Một lớp có 15 bạn nam và 20 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 6 bạn đi trực nhật. Tính xác suất để trong 6 bạn được chọn có ít nhất một bạn là nữ.

Lời giải. Gọi A là biến cố: “Trong 6 bạn được chọn có ít nhất một bạn là nữ”, lúc đó biến cố

$\bar{A}$ là: “6 bạn được chọn đều là nam” suy ra $n(\bar{A}) = C_{15}^6$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{35}^6$.

$$\text{Vậy } P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^6}{C_{35}^6} = \frac{13}{4216}.$$

Vậy xác suất của biến cố A là

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{13}{4216} = \frac{4203}{4216}.$$

DẠNG 3. CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG QUY TẮC CỘNG, QUY TẮC NHÂN

Thí dụ 6. Trong cuộc thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia gồm có 3 vòng. Vòng 1 lấy 80% thí sinh dự thi. Vòng 2 lấy 70% thí sinh dự thi của vòng 1. Vòng 3 lấy 80% thí sinh vòng 2. Tính xác suất để 1 thí sinh lọt qua 3 vòng thi.

Lời giải. Gọi A_i là biến cố: “Thí sinh vượt qua vòng 1”. Ta có $P(A_1) = 0,8$.

Gọi A_2 là biến cố: “Thí sinh vượt qua vòng 2”.

Ta có $P(A_2) = 0,7$.

Gọi A_3 là biến cố: “Thí sinh vượt qua vòng 3”.

Ta có $P(A_3) = 0,8$.

Gọi A là biến cố: “Thí vượt qua 3 vòng thi”.

Áp dụng quy tắc nhân xác suất. Ta có xác suất biến cố A là:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,448.$$

Thí dụ 7. Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn độc lập:

a) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần.

b) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

Lời giải.

a) Gọi A_i là biến cố: “Người đó bắn trúng hồng tâm ở lần thứ i ” với $i = 1, 2, 3$. Ta có $P(A_i) = 0,2$.

Gọi K là biến cố: “Trong 3 lần bắn độc lập người đó bắn trúng hồng tâm đúng 1 lần”. Khi

đó $K = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. Ta có

$$P(K) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$$

$$\text{Mặt khác } P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$= 0,2 \cdot (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,2) = 0,128.$$

Tương tự ta có: ...

(Xem tiếp trang 30)

THI ĐẤU QUỐC TẾ CỦA NHỮNG NHÀ TOÁN HỌC TRẺ (ITYM)

ĐOÀN QUỲNH (Hà Nội)

ITYM (*International Tournament of Young Mathematicians*) là cuộc thi đấu giữa các đội tuyển học sinh Trung học phổ thông toàn thế giới với mục đích kích thích say mê toán học và ứng dụng của toán, kích thích phát triển suy nghĩ khoa học, kĩ năng thông tin và làm việc tập thể. Nó được khởi xướng bởi hội *Animath* và một số trường Đại học Pháp, tổ chức mỗi năm một lần, thi ở một trong các nước tham gia, bắt đầu từ năm 2009; năm đó có 4 nước tham gia với 6 đội tuyển (Belarus, Bulgaria (2 đội), Nga, Pháp (2 đội)), thi ở Pháp; năm nay, 2015, có 8 nước với 11 đội tuyển (Belarus, Bulgaria, Brazilia, Đức (2 đội), Georgia, Nga, Pháp (2 đội), Romania (2 đội)), thi ở Bulgaria. Cách tổ chức cuộc thi cố gắng truyền bá tinh thần nghiên cứu Toán:

- Khác với các cuộc thi và Olympiad khác là những cuộc thi giữa các cá nhân, **ITYM** là cuộc thi giữa những đội tuyển (mỗi đội nhiều nhất 6 người, trong đó có một đội trưởng (captain), đội được hướng dẫn bởi 1 hay 2 lãnh đạo đội (là người đã từng tham gia kì thi này những năm trước, là tiến sĩ, giáo sư...)). Mỗi nước tham gia có thể cử 1 hay 2 đội tuyển tham gia (được sự đồng ý của ban tổ chức của nước đăng cai).

- Học sinh có nhiều thì giờ suy nghĩ về bài toán (hơn 2 tháng rưỡi); mỗi kì thi có khoảng 10 bài toán; mỗi bài toán có những phần người ta chưa biết lời giải về các lĩnh vực đại số, giải tích, tổ hợp, hình học, lí thuyết số nhưng tác giả (nhà toán học) biết chắc chắn học sinh có thể làm một phần bài toán; học sinh có nhiệm vụ tìm hiểu được nội dung bài toán, giải được một số trường hợp riêng, biết được những khó khăn ... Học sinh tự mình giải toán, trao đổi trong đội, hỏi ý kiến lãnh đạo đội, cá nhân một số nhà toán học... (nhưng không được tổ chức kiểu hội thảo (forum)), xây dựng lời giải chung của đội. Lời giải mỗi bài toán không dài quá 30 trang (ngôn ngữ dùng chung cho cuộc thi là tiếng Anh).

- Việc chấm thi mang tính chất tranh luận giữa các đội, có người báo cáo (reporter), người phản biện (opponent), người bình luận (reviewer), người quan sát (observer). Cuộc chấm thi kéo dài một tuần, có 2 vòng chấm (ở mỗi vòng có 2 hay 3 bảng thi, mỗi bảng gồm 3, 4 đội, hoán vị các đội của hai bảng qua mỗi vòng thi) và vòng tổng kết. Ban chấm thi (Jury) gồm các lãnh đạo các đội (lãnh đạo đội không tham gia chấm thi ở bảng có đội mình hướng dẫn), một số người do ban tổ chức đề nghị. Bốc thăm để phân chia đội nào bảo vệ lời giải bài toán nào, đội nào phản biện,... Bước vào cuộc thi còn có cuộc thi đố (quizz) kiểm tra xem có phải tất cả thí sinh ở tất cả các đội đều hiểu nội dung các bài toán.

Kết quả cuộc thi: sắp xếp các đội được giải 1, giải 2, giải 3, có nhận xét báo cáo viên hay nhất, người phản biện tốt nhất, người bình luận tốt nhất, lời giải tốt nhất cho từng bài toán thuộc đội nào.

Năm nay, 2015, cuộc thi được tổ chức ở Bulgaria, nữ Chủ tịch Quốc hội Bulgaria đọc lời chào mừng. Kết quả: đội 1 của Pháp được giải 1, đội của Belarus, đội 2 của Pháp và đội 1 của Đức được giải 2, đội 2 của Đức, đội của Bulgaria và đội của Nga được giải 3. Đội 1 của Pháp đã được mời tới dự cuộc phát giải thưởng Abel năm nay, 2015, ở Na-Uy cho hai nhà toán học lỗi lạc *J. Nash* và *L. Nirenberg*. Sau đây xin giới thiệu vài bài toán ở các cuộc thi đấu này:

1. Bài toán thứ 6 trong 10 bài toán cho kì thi năm nay: bài toán có tiêu đề bài toán "điểm tới hạn".

Một điểm tới hạn của hàm số khả vi f là giá trị x thuộc miền xác định của f sao cho $f'(x) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{P_i(x)}$, n là số nguyên dương, c_i là số thực khác 0, $P_i(x)$ là những đa thức phân biệt với hệ số thực.



HỘI NGHỊ QUỐC TẾ VỀ GIẢNG DẠY TOÁN (ICME 2015)

“Ứng dụng Công nghệ thông tin vào việc giảng dạy, học tập, nghiên cứu và ứng dụng Toán học”

Thời gian: 19 - 20/12/2015

Địa điểm: Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội.

Ngôn ngữ: Tiếng Anh (khuyến khích dùng tiếng Anh tuy nhiên có thể sử dụng tiếng Việt).

Cơ quan tổ chức:

- Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (HUST).
- Hội Ứng dụng Toán học Việt Nam (VSAM).
- Viện Nghiên cứu Đào tạo & Phát triển nguồn nhân lực Quốc tế (Viết tắt: IHR).
- Công ty TNHH ChamGroup (ChamGroup Company).

Dưới sự chỉ đạo trực tiếp của: Bộ Giáo dục và Đào tạo - Hội giảng dạy Toán học Quốc tế

MỤC TIÊU VÀ NỘI DUNG CHÍNH

* Trình bày những kết quả mới nhất ở trong nước và trên thế giới về ứng dụng Công nghệ Thông tin vào giảng dạy, học tập, nghiên cứu và ứng dụng Toán học và các môn khoa học vào các lĩnh vực khác nhau của đời sống xã hội.

* Trao đổi kinh nghiệm giữa các giáo viên phổ thông, giảng viên đại học, cán bộ khoa học từ các Viện nghiên cứu và các công ty trong nước cũng như trên thế giới về việc sử dụng các công cụ tin học trợ giúp cho giảng dạy, nghiên cứu và ứng dụng Toán học và các môn khoa học vào các lĩnh vực khác nhau của đời sống xã hội.

* Trao đổi kinh nghiệm về việc xây dựng các phòng thí nghiệm Toán - Tin trong nhà trường trợ giúp cho công tác giảng dạy, học tập, nghiên cứu và ứng dụng.

* Tổ chức triển lãm giới thiệu và trình diễn các phần mềm dạy và học Toán, các môn học khác đang được sử dụng phổ biến trên thế giới và trong nước.

* Thảo luận đề cương và giáo trình giảng dạy môn Toán và các môn học khác theo hướng hiện đại hoá và tin học hoá, phù hợp với xu hướng phát triển của thế giới.

* Xây dựng giáo trình và sách giáo khoa điện tử cho các môn học khác nhau của các cấp học.

* Thành lập Câu lạc bộ về “Tin học hóa quá trình giảng dạy, học tập”.

LÊ MAI (Hà Nội)

(Nguồn: <http://www.vietsam.org.vn>)

☞ Hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ trừ tại các không điểm của các đa thức $P_i(x)$. Giả sử hàm số f không hằng.

Ta muốn đánh giá về số $N(f)$ các điểm tới hạn phân biệt của f .

1) Giả sử các đa thức $P_i(x)$ là đa thức bậc 1, $P_i(x) = x + a_i, a_i \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp các giá trị của $N(f)$ với n cố định và:

- các số a_i, c_i có thể thay đổi;
- các số a_i cố định nhưng c_i có thể thay đổi;
- các số c_i cố định nhưng a_i có thể thay đổi.

2) $P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i^2 < 4b_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

- Đánh giá $N(f)$. Có phải $N(f) \leq 2n - 1$?
- Tìm mọi giá trị có thể của $N(f)$ khi n cố định.
- Khảo sát cho đa thức bậc cao hơn.

II. Bài toán cuối (thứ 11) cho kì thi năm ngoài, 2014, tại Đức với tiêu đề “điểm, đường thẳng, mặt phẳng”: Cho N điểm trong $\mathbb{R}^3$ không cùng nằm trên một mặt phẳng hay không tất cả nằm trên hai đường thẳng. Ký hiệu L là số đường thẳng đi qua ít nhất 2 trong các điểm đã cho, P là số mặt phẳng chứa ít nhất 3 điểm trong các điểm đã cho.

- Hỏi với N bé, biểu thức $N - L + P$ có thể lấy những giá trị nào?
- Có phải $N - L + P$ không âm với N đủ lớn?
- Giả sử trong các điểm đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có phải $N - L + P \geq 2$ với mọi N đủ lớn? Hỏi khi nào có dấu bằng?
- Xác định mọi giá trị có thể của biểu thức $N - L + P$ với N cho trước. Phân biệt trường hợp tổng quát với trường hợp trong các điểm đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng.

(Xem trên Internet, International Tournament of Young Mathematicians).



VỀ MỐI LIÊN HỆ ĐẶC BIỆT CỦA DÃY SỐ FIBONACCI VÀ SỐ 11

PHẠM THỊ LIÊN

(Lớp Cao học Toán 2013 - 2015, ĐH KHTN - ĐHQG Hà Nội)

Dãy Fibonacci do một nhà Toán học lớn ở châu Âu thời Trung đại tên là *Fibonacci* (1170 - 1240) phát hiện. Một tên khác của ông là *Leonardo of Pisa*, do ông sinh ra ở Pisa (Italia) và thuộc dòng họ Bonacci. Xuất phát từ bài toán sự sinh sản của một cặp thỏ mà ông đề xuất dãy số sau: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 ...



Fibonacci (1170 - 1240)

Một cách tổng quát, dãy Fibonacci $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số vô hạn, bắt đầu bằng hai số 0 và 1, các số sau được thiết lập theo quy tắc mỗi phần tử luôn bằng tổng hai phần tử đứng trước nó, tức được biểu diễn qua công thức truy hồi sau:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 0 \\ 1 & \text{nếu } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Như vậy, dãy Fibonacci được xây dựng theo một quy tắc hết sức đơn giản, nhưng có nhiều tính chất rất thú vị và người ta đã nghiên cứu nhiều đến nó. Điều đáng nói là dãy này có mối liên hệ rất chặt chẽ với nhiều hiện tượng tự nhiên, nhiều vấn đề kỹ thuật, kiến trúc, thậm chí đến chỉ số chứng khoán, âm nhạc và cả Fractal nữa. Tuy nhiên trong bài viết này, chúng tôi chỉ xét hai mối liên hệ đặc biệt giữa dãy Fibonacci và số 11. Mối liên hệ thứ nhất quả thật là kỳ lạ, do *Jekuthiel Ginsburg* phát hiện, chúng tôi nhắc lại dưới đây mà chưa giải thích được vì sao lại như vậy, có thể xem như một bài toán còn để ngỏ. Mối liên hệ thứ hai được chúng tôi chứng minh đầy đủ. Về điều này, thoát tiên thông qua một vài hiện tượng ban đầu, người ta đã đưa ra một phát biểu, nhưng chúng tôi chưa thấy người

ta chứng minh ở dạng tổng quát. Ở đây khi nêu tính chất đó ra, chúng tôi cũng đưa ra một chứng minh tổng quát để bạn đọc tham khảo.

1. Mối liên hệ thứ nhất

Có thể nói đây là một điều kỳ lạ. Ta biết rằng $F_{11} = 89$. Nhưng nghịch đảo của số Fibonacci F_{11} là $\frac{1}{89} = 0,01123595505617...$

Điều lạ lùng là 6 số sau dấu phẩy 0, 1, 1, 2, 3, 5 là các số Fibonacci liên tiếp nhau. Nhưng từ đó trở đi các số sau đó lại là tổng của các số Fibonacci liên tiếp viết lệch đi như được mô tả dưới đây.

$$\frac{1}{89} = \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & 5 \\ & & & & & & & 8 \\ & & & & & & & 9 \\ & & & & & & & 4 \\ & & & & & & & 4 \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & \dots \end{array}$$

Cho đến nay, người ta chưa giải thích được tại sao có hiện tượng này. Chúng tôi cũng không hiểu tại sao và theo quy luật nào? Nhờ đọc giả chỉ giúp.

2. Mối liên hệ thứ hai

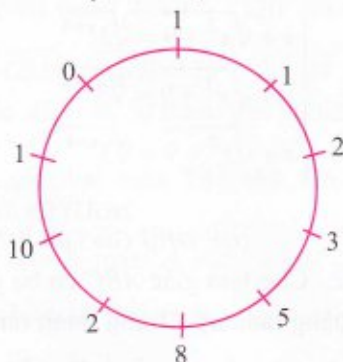
Trong một số sách viết về số Fibonacci, người ta phát hiện ra rằng, cứ lấy 10 số Fibonacci đầu tiên, tức là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 đem chia cho 11, thì được số dư lần lượt là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1 và 10 số Fibonacci tiếp theo 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181 đem chia cho 11 ta lại được đúng dãy trên, nghĩa là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1.

Khi lấy tổng của 10 số dư này được 33, nó chia hết cho 11. Điều đó có nghĩa là, tổng của 10 số Fibonacci liên tiếp bất kỳ chia hết cho 11.

Bằng sự quan sát cụ thể, người ta phát hiện ra tính chất trên, điều này nghĩa là:

a) Tổng 10 số Fibonacci liên tiếp chia hết cho 11.

b) Khi chia các số của dãy Fibonacci cho 11 thì được dãy các phần dư vô hạn tuần hoàn chu kỳ 10. Hình dưới đây minh họa tính chất b).



Tính chất a) và b) ở trên chưa có tài liệu nào chứng minh tổng quát (chúng tôi chưa tìm thấy). Sau đây, chúng tôi sẽ chứng minh tổng quát tính chất a) và b) nói trên bằng một định lý khẳng định rằng: $F_{10n+k} \equiv F_k \pmod{11}$.

Từ đó suy ra được hai tính chất a) và b) nói trên. Trước hết, chúng ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Với mọi số tự nhiên m, n sao cho $1 \leq m \leq n$, ta đều có $F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$.

Chứng minh. (Bằng quy nạp theo m .) Với $m = 1$, ta được: $F_{n-1+1}F_1 + F_{n-1}F_{1-1} = F_n \cdot 1 + F_{n-1} \cdot 0 = F_n$.

Vậy đẳng thức đúng với $m = 1$. Với $m = 2$ ta được $F_{n-2+1}F_2 + F_{n-2}F_{2-1} = F_{n-1} \cdot 1 + F_{n-2} \cdot 1 = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$ (theo định nghĩa số Fibonacci). Vậy đẳng thức đúng với $m = 2$. Giả sử đẳng thức đúng đến $m = k$, tức là ta có $F_n = F_{n-k+1}F_k + F_{n-k}F_{k-1}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng đến $m = k + 1$, tức ta phải chứng minh

$$F_n = F_{n-(k+1)+1}F_{k+1} + F_{n-(k+1)}F_{(k+1)-1},$$

$$\text{hay } F_n = F_{n-k}F_{k+1} + F_{n-k-1}F_k.$$

Thật vậy, theo định nghĩa số Fibonacci và giả thiết quy nạp ta có $F_{n-k}F_{k+1} + F_{n-k-1}F_k$

$$= F_{n-k}(F_k + F_k) + F_{n-k-1}F_k = F_{n-k}F_{k+1} + F_{n-k}F_k$$

$$= F_{n-k}F_{k-1} + F_{n-k}F_k + F_{n-k-1}F_k$$

$$= F_{n-k}F_{k-1} + F_k(F_{n-k} + F_{n-k-1})$$

$$= F_{n-k}F_{k-1} + F_kF_{n-k+1} = F_n.$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Chẳng hạn, với $n = 10$ và $m = 7$, ta được

$$F_4F_7 + F_3F_6 = 3 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 55 = F_{10}.$$

Định lý. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $k = 0, 1, \dots, 9$, ta có $F_{10n+k} \equiv F_k \pmod{11}$.

Chứng minh. Áp dụng bổ đề trên khi thay n bởi $10n + k$ và $m = 10$, ta được

$$\begin{aligned} F_{10n+k} &= F_{10n+k-10+1}F_{10} + F_{10n+k-10}F_{10-1} \\ &= F_{10(n-1)+k+1}F_{10} + F_{10(n-1)+k}F_9. \end{aligned}$$

Do $F_{10} = 55 = 11 \cdot 5$, còn $F_9 = 34 = 11 \cdot 3 + 1$, nên ta có $F_{10n+k} \equiv F_{10(n-1)+k} \pmod{11}$.

Tiếp tục thay n bởi $10(n-1) + k$ và $m = 10$, ta được $F_{10(n-1)+k} \equiv F_{10(n-2)+k} \pmod{11}$.

Cứ tiếp tục như vậy n lần, ta được

$$F_{10n+k} \equiv F_k \pmod{11} \text{ với } k = 0, 1, \dots, 9.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Chẳng hạn, với $n = 1$ và $k = 5$, ta được $F_{15} = 610$ và $F_5 = 5$. Ta có: $F_{15} \equiv F_5 \pmod{11}$.

Từ Định lý trên, ta có hệ quả sau.

Hệ quả.

a) Khi chia các số của dãy Fibonacci cho 11 ta được một dãy vô hạn tuần hoàn các phần dư chu kỳ 10.

b) Tổng các phần dư của 10 số Fibonacci liên tiếp khi chia cho 11 là một số không đổi và bằng 33.

c) Tổng 10 số Fibonacci liên tiếp thì chia hết cho 11.

Chứng minh.

a) Ta thấy 10 số Fibonacci liên tiếp $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$, tức là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, khi chia cho 11 ta được các phần dư 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1.

Nhưng theo chứng minh trên, các phần dư của 10 số Fibonacci tiếp theo có cùng phần dư với $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$ khi chia cho 11, nên 10 số tiếp theo của số Fibonacci khi chia cho 11 cũng có dư vẫn là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1.

Hơn nữa theo định lý trên, 10 số dư tiếp theo của dãy Fibonacci khi chia cho 11 cũng là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1. Như vậy, dãy các phần dư của dãy Fibonacci khi chia cho 11 là một dãy tuần hoàn chu kỳ 10.

b) Rõ ràng trong dãy các phần dư 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, ... nghĩa là cứ lấy 10 số bất kỳ đều có tổng là 33.

c) Dãy Fibonacci gồm các số liên tiếp khi chia cho 11, ta được dãy số dư tuần hoàn, mà cứ tổng 10 số dư là 33, nên tổng 10 số Fibonacci liên tiếp chia hết cho 11.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/462 (Lớp 6). Tìm chữ số tận cùng của tổng gồm 2015 số hạng sau

$$A = 1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 2014^{2014} + 2015^{2015}$$

LÊ MINH HÒA

(GV THCS Võ Miếu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T2/462 (Lớp 7). Cho hình thang vuông $ABCD$ (vuông tại A và B), $AD < BC$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng

$$AC^2 + BD^2 = 3AB^2 + CD^2.$$

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên-Huế)

Bài T3/462. Có tồn tại hay không các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho hai phương trình $x^2 + 2ax - b - 2 = 0$ và $x^2 + bx - a = 0$ đồng thời có nghiệm nguyên?

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/462. Cho tam giác ABC vuông tại A . Các cạnh của tam giác thỏa mãn điều kiện: $BC^2 = 2BC \cdot AC + 4AC^2$. Tính số đo góc $\widehat{ABC}$.

PHẠM HOÀNG HÀ

(SV CLC K49 Toán-Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/462. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{3x-2} - \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{x-3}.$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/462. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{y+4}} \\ y + \sqrt{y^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{z+4}} \\ z + \sqrt{z^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{x+4}} \end{cases}$$

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T7/462. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (có số đo bằng radian). Chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{5}{2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\pi^2}.$$

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH

(GV khoa Cơ bản - Học viện PK-KQ Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T8/462. Tìm độ dài các cạnh của khối diện $ABCD$ nội tiếp trong hình cầu bán kính bằng 1 và có tích độ dài các cạnh là $\frac{512}{27}$.

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/462. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 2.$$

NGUYỄN VĂN HUYỀN

(SV ĐH Giao Thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/462. Với các số nguyên dương a, b, c thuộc đoạn $[1; 2015]$, hỏi có tất cả bao nhiêu bộ (a, b, c) sao cho $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 9?

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/462. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |6a^3 + bc| + |6b^3 + ca| + |6c^3 + ab|$.

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T12/462. Cho tam giác ABC với (O) , H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác. P là điểm bất kỳ trên OH .

A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là giao điểm của AH, BH, CH và BC, CA, AB . A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP và (O) . A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua A_0, B_0, C_0 . Chứng minh rằng H, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc OH .

NGUYỄN VĂN LINH
(SV DH Ngoại Thương Hà Nội)

Bài L1/462. Đặt điện áp $u = U_0 \cos \omega t$ (U_0 không đổi còn ω thay đổi) vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm $\frac{0,8}{\pi} H$ và tụ điện mắc nối tiếp. Khi

$\omega = \omega_0$ thì dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch đạt giá trị cực đại I_m . Khi $\omega = \omega_1$ hoặc $\omega = \omega_2$ thì cường độ dòng điện cực đại qua đoạn mạch bằng nhau và bằng I_m . Biết $\omega_1 - \omega_2 = 200\pi \text{ rad/s}$. Tính giá trị của R .

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (Hà Nội)

Bài L2/462. Một nguồn phát sóng dao động điều hòa tạo ra sóng tròn đồng tâm O truyền trên mặt nước với tần số f và bước sóng λ . Hai điểm M và N thuộc mặt nước, nằm trên hai phương truyền sóng mà các phần tử nước dao động. Biết $OM = 8,5\lambda$; $ON = 12,8\lambda$ và OM vuông góc với ON . Phương trình dao động của phần tử nước tại M là $u_M = A \cos 2\pi f t$ (cm). Cho rằng năng lượng sóng truyền đi không mất mát do lực cản của môi trường nhưng phân bố đều trên mặt sóng tròn làm cho biên độ sóng giảm dần khi truyền ra xa nguồn.

1) Viết phương trình dao động của phần tử nước tại N .

2) Trên đoạn MN , số điểm mà phần tử nước dao động ngược pha với dao động của phần tử nước tại điểm I là trung điểm của MN là bao nhiêu?

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/462 (For 6th grade). Find the last digit of the following number

$$A = 1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 2014^{2014} + 2015^{2015}$$

Problem T2/462 (For 7th grade). Given a right trapezoid $ABCD$ (A and B are right angles) with $AD < BC$ and $AC \perp BD$. Prove that

$$AC^2 + BD^2 = 3AB^2 + CD^2.$$

Problem T3/462. Does there exist a pair of positive integers (a, b) such that both the equation $x^2 + 2ax - b - 2 = 0$ and the equation $x^2 + bx - a = 0$ have integral solutions?

Problem T4/462. Given a right triangle ABC with the right angle A such that $BC^2 = 2BC \cdot AC + 4AC^2$. Find the angle $\widehat{ABC}$.

Problem T5/462. Solve the equation

$$\sqrt[3]{3x-2} - \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{x-3}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/462. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{y+4}} \\ y + \sqrt{y^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{z+4}} \\ z + \sqrt{z^2 + 9} = \sqrt[4]{3^{x+4}} \end{cases}$$

Problem T7/462. Given an acute triangle ABC with angles measured in radian. Prove that

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{5}{2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\pi^2}.$$

Problem T8/462. Given a tetrahedron $ABCD$ inscribed in a sphere of radius 1. Assume that the product of the lengths of its sides is equal to $\frac{512}{27}$. Compute the lengths of its sides.

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/458. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa

mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ với p là số nguyên tố đã cho.

Lời giải. Từ đẳng thức ở giả thiết suy ra $x > p$,

$y > p$ và $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{p}$. Từ đó $(x+y)p = xy$

$\Leftrightarrow xy - xp - yp + p^2 = p^2 \Leftrightarrow (x-p)(y-p) = p^2$.

Do số nguyên tố p chỉ có hai ước số dương là 1 và p nên xảy ra ba trường hợp sau:

1) $x-p=1$ và $y-p=p^2$, tức là $x=p+1$ và $y=p+p^2$

2) $y-p=1$ và $x-p=p^2$, tức là $y=p+1$ và $x=p+p^2$

3) $x-p=p$ và $y-p=p$, tức là $x=2p$ và $y=2p$.

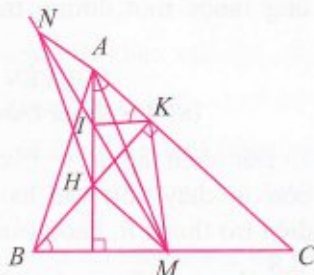
Các số x, y trong cả ba trường hợp trên đều thỏa mãn đẳng thức ở đề bài. $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn chưa lập luận chặt chẽ: không nêu rõ $x-p > 0$ và $y-p > 0$, hoặc cho rằng p là số nguyên tố nên $x > p$, $y > p$, hoặc chưa thử lại nghiệm nếu biến đổi không tương đương. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Trần Hoàng Anh Tuấn, 6A2, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Lê Minh Việt Anh, 6A, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Hà Nội:** Cao Hoàng Minh, 6C1, trường Archimedes Academy, Q. Cầu Giấy; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Linh Đan, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Ngọc Sơn, Cao Thị Khánh Linh, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Cao Thị Ngọc Trâm, Nguyễn Trung Phú, Phạm Thị Thu Nhung, 6A, Phan Ngọc Tuyết Sương, Trần Thị Thảo Vân, 6C, Nguyễn Thị Yến Nhi, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Hoàng Kim Anh, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Cần Thơ:** Võ Yến Oanh, 6A6, Nguyễn Hoàng Oanh, 6A7, THCS Thốt Nốt, Q. Thốt Nốt.

VIỆT HẢI

Bài T2/458. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua A song song với MH và đường thẳng qua H song song với MA cắt nhau tại N . Chứng minh rằng: $AH^2 + BC^2 = MN^2$.

Lời giải.



Ta có $AN \parallel HM, AM \parallel HN$ nên $\triangle MAN = \triangle NHM$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = HM$. Gọi I là giao điểm của AH và MN , ta có $\triangle ANI = \triangle HMI$ (g.c.g)

$\Rightarrow IA = IH = \frac{AH}{2}, IN = IM = \frac{MN}{2}$. Gọi K là giao điểm của BH và AC , ta có $BK \perp AC$. Trong các tam giác vuông AKH và BKC có KI và KM tương ứng là các trung tuyến ứng với cạnh huyền, nên $IA = IK = \frac{AH}{2}, MK = MB = \frac{BC}{2}$.

Từ đó các tam giác AIK và BMK là các tam giác cân, suy ra $\widehat{IAK} = \widehat{IKA}, \widehat{MBK} = \widehat{MKB}$, mà $\widehat{IAK} = \widehat{MBK}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$) nên $\widehat{IKA} = \widehat{MKB}$. Từ đó $\widehat{IKM} = \widehat{IKH} + \widehat{MKB} = \widehat{IKH} + \widehat{IKA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle IKM$ vuông tại K . Theo định lý Pythagore ta có

$$IK^2 + MK^2 = IM^2 \text{ hay } \left(\frac{AH}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{MN}{2}\right)^2,$$

vì vậy $AH^2 + BC^2 = MN^2$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** 1) Tất cả các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng. Một số bạn sử dụng kết quả $AH = 2 OM$ (O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC), tuy nhiên kết quả này cần phải chứng minh.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và chính xác:

Phú Thọ: Tống Thu Hà, 7A1, Nguyễn Chí Công, Hoàng Đức Thuận, Nguyễn Hồng Khải, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** Phạm Huyền Trang, Thái Thị Thu Sang, Nguyễn Ngọc Anh, Lê Văn Nhi, Nguyễn Hải Ly, Nguyễn An Na, Trần Thị Kim Oanh, Phạm Yến Nhi, Bùi Thị Minh Thư, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Cần Thơ:** Lê Hà Trang, 7A6, THCS Thốt Nốt, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/458. Cho hai số a, b thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^3 - a^2 + a - 5 = 0 & (1) \\ b^3 - 2b^2 + 2b + 4 = 0 & (2) \end{cases} \text{ Tính } a + b.$$

Lời giải. Ta có (2) tương đương với:

$$(b^3 - 3b^2 + 3b - 1) + (b^2 - 2b + 1) + (b - 1) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 1)^3 + (b - 1)^2 + (b - 1) + 5 = 0. \quad (3)$$

Cộng theo từng vế của (1) và (3) ta được:

$$[a^3 + (b - 1)^3] + [(b - 1)^2 - a^2] + (a + b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 1)[a^2 - a(b - 1) + (b - 1)^2 + (b - 1 - a) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 1)(a^2 - ab + a + b^2 - 2b + 1 + b - 1 - a + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 1)(a^2 + b^2 - ab - b + 1) = 0.$$

Ta thấy: $2(a^2 + b^2 - ab - b + 1)$

$$= (a - b)^2 + a^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$$

với mọi a, b nên $a + b - 1 = 0 \Rightarrow a + b = 1$.

Vậy $a + b = 1$. $\square$

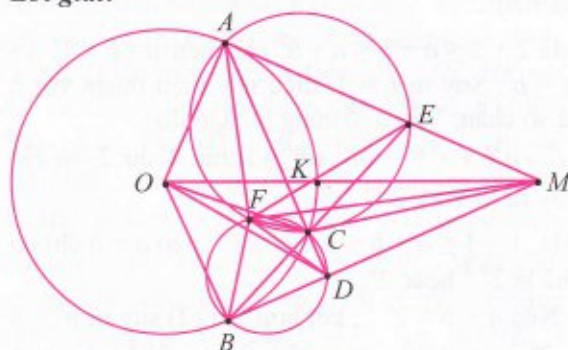
► **Nhận xét.** Có nhiều bạn giải đúng bài này. Các bạn hãy chú ý phải giải riêng từng bài trên các tờ giấy hoặc file (word) khác nhau, trên đó ghi đầy đủ thông tin cá nhân bao gồm họ tên, lớp, trường, xã, huyện, tỉnh (thành phố). Các bạn có lời giải tốt nhất là: **Phú Thọ:** Ngô Bình Minh, 6A3, THCS Lâm Thao, Bùi Ngọc Tân, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Nghệ An:** Lê Trương Thái Bảo, 8A2, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, Nguyễn Thị Linh Đan, 6D, Nguyễn Đình Tuấn, 7C, Đinh Thị Quỳnh Châu, Thái Bá Bảo, 8C, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, 9A, Hoàng Đức Như, 9B, Nguyễn Hữu Hưng, Hoàng Trần Đức, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Phạm Ngọc Hoa, 9A1, THCS Sông Lô, Tạ Kim Thanh Hiền, 7A4, Bùi Thị Liễu Dương, 9A4, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Tạ Duy Phương, 9A, THCS Mỹ Hưng, Thanh Oai, Đinh Hoàng Nhật Minh, 8A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Trần Quốc Phương, 9A, THCS Thị Trấn, Thường Xuân; **Quảng Trị:** Đoàn Nhật Thanh, 8D, THCS Nguyễn Trãi, đường Nguyễn Đình Chiểu, Phường 3, TP. Đông Hà; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Tiến Hoàng, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, 20 Lý Tự Trọng, Quận I; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Thanh Nghĩa, 9/1, THCS Phú Thuận, Phú Vang; **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Mỹ Lan, 8ⁿ, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hải Phòng:** Phùng Quang Minh, 9A1, THCS Hồng Bàng, Hồng Bàng;

Kon Tum: Nguyễn Ngọc Khánh Như, 9^a, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cường, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/458. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). C là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AB của (O) . Các tia AC và BC lần lượt cắt MB và MA tại D và E . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ACE, BCD, OCM đồng quy tại một điểm thứ hai khác C .

Lời giải.



Kí hiệu (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ . Gọi F là giao điểm thứ hai của các đường tròn (ACE) và (BCD) . Ta sẽ chứng minh F thuộc đường tròn (OCM) , hay tứ giác $OMCF$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{BDF} = \widehat{BCF} = \widehat{FAE}$ nên tứ giác $AFDM$ nội tiếp.

Tương tự $\widehat{AEF} = \widehat{ACF} = \widehat{FBM}$ nên tứ giác $BFEM$ nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{CFM} = \widehat{CFE} - \widehat{MFE} = \widehat{CAM} - \widehat{MBE} = \frac{1}{2}(\widehat{COA} - \widehat{COB}) = \widehat{COK} = \widehat{COM}$.

Suy ra tứ giác $OMCF$ nội tiếp. Vậy ba đường tròn (ACE) , (BCD) và (OCM) cùng đi qua điểm F . $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Phú thọ: Nguyễn Hoàng Phi, Trần Quốc Lập, 9A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Trọng Bằng, 8A2, THCS Tr. Quán Hành, Nghi Lộc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/458. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn: $(a^5 + b)(a + b^5) = 2^c$.

Lời giải. Do vai trò của hai số nguyên dương a, b như nhau. Không giảm tổng quát, giả sử $a \geq b \geq 1$. Khi đó $a^5 + b \geq a + b^5 \geq 2$.

Từ điều kiện đề bài suy ra a, b cùng chẵn hoặc cùng lẻ, và
$$\begin{cases} a^5 + b = 2^m & (1) \\ a + b^5 = 2^n & (2) \end{cases}$$

với $m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq n, m + n = c$.

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1) = 2^n(2^{m-n} + 1) \quad (3).$$

Nếu a, b cùng chẵn thì

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1$ là số lẻ, từ (3) suy ra $(a+b):2^n$.

Mà $2 + 2 \leq a + b \leq a + b^5 = 2^n$ nên $a + b = 2^n$ và $b = b^5$. Suy ra $b = 1$, điều này mâu thuẫn với b là số chẵn. Vậy a, b cùng lẻ. Khi đó

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1$ chia 4 dư 2, từ (3) suy ra $(a+b):2^{n-1}$.

Mà $1 + 1 \leq a + b \leq a + b^5 = 2^n$ nên $a + b$ chỉ có thể là 2^{n-1} hoặc 2^n .

• Nếu $a + b = 2^{n-1}$, kết hợp với (2) suy ra $b^5 - b = 2^{n-1} \Leftrightarrow b(b^4 - 1) = 2^{n-1}$. Suy ra $2^{n-1} : b$, mà b là số nguyên dương lẻ nên $b = 1$, khi đó $2^{n-1} = 0$, điều này vô lí.

• Nếu $a + b = 2^n$, kết hợp với (2) suy ra $b = b^5$, mà b là số nguyên dương nên $b = 1$. Thay vào

$$(1) \text{ và } (2) \text{ ta có } \begin{cases} a^5 + 1 = 2^m \\ a + 1 = 2^n \end{cases}$$

Từ đó suy ra $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 = 2^{m-n}$ (4). Do a là số lẻ nên vế trái của (4) là số lẻ, suy ra 2^{m-n} phải là số lẻ, tức là $2^{m-n} = 1 \Leftrightarrow m = n$. Do đó $a^5 + 1 = a + 1$, suy ra $a = 1$. Thay $a = b = 1$ vào $(a^5 + b)(a + b^5) = 2^c$, ta tìm được $c = 2$.

Vậy có đúng một bộ ba số nguyên dương $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ thỏa mãn đề bài. $\square$

► **Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia đều giải tương tự như cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Đinh Hoàng Nhật Linh, 8A5, THCS Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** Bùi Thị Liễu Dương, 9A4, THCS Yên Lạc; **Phạm Ngọc Hoa**, 9A1, THCS Sông Lô; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Trần Thị Diễm Quỳnh**, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/458. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z + \sqrt{xyz} = 4 \\ \sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{3z} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ x = \min(x, y, z) \end{cases}$$

Lời giải. Cách 1. ĐK: $x, y, z \geq 0$.

Đặt: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b, \sqrt{z} = c \Rightarrow a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Khi

$$\text{đó hệ trở thành: } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 & (1) \\ a\sqrt{2} + (b+c)\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{2}}{2} & (2) \\ a = \min(a, b, c) & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 3a^2 + a^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 1 \Rightarrow a - 2 < 0;$$

$$4 = a^2 + (b+c)^2 + (a-2)bc$$

$$\geq a^2 + (b+c)^2 + (a-2) \cdot \frac{(b+c)^2}{4} = a^2 + \frac{a+2}{4} \cdot (b+c)^2$$

$$\Rightarrow 4 - a^2 \geq \frac{a+2}{4} (b+c)^2 \Rightarrow b+c \leq 2\sqrt{2-a}.$$

Kết hợp với (2) ta được

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} \leq a\sqrt{2} + 2\sqrt{3(2-a)} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq a + \sqrt{6(2-a)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{6(2-a)} - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra}$$

khi $b = c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (thỏa mãn). Từ đó suy ra hệ đã

cho có nghiệm $(x; y; z) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Cách 2. (Của bạn Vũ Hồng Quân, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái).

ĐK: $x, y, z \geq 0$. Đặt $x = 4a^2, y = 4b^2, z = 4c^2 \Rightarrow$

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a = \min(a, b, c)$. Thay vào hệ

$$\text{đã cho được } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1 & (4) \\ a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{2}}{4} & (5) \end{cases} \text{ Từ (4)}$$

suy ra tồn tại $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}; \alpha + \beta + \gamma = \pi$ sao cho

$a = \cos \alpha, b = \cos \beta, c = \cos \gamma$. Thay vào (5) ta

$$\text{được: } \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{3}(\cos \beta + \cos \gamma) = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{3}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sqrt{2}\cos(\beta+\gamma)$$

$$\leq 2\sqrt{3}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} - 2\sqrt{2}\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma \\ \cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = c = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = z = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn). } \square$$

► **Nhận xét.** 1) Trong các bài giải chỉ có hai bài sai. Đa số các bạn đều làm theo ý tưởng của cách 1 là đặt ẩn phụ để khử căn, rồi đánh giá theo biến mới, từ đó tìm được nghiệm của hệ. Nhiều bạn đã đưa ra những cách đánh giá hay. Cách giải bằng lượng giác bài này cũng là cách giải gọn gàng và độc đáo.

2) Ngoài bạn **Quân**, các bạn sau có lời tốt:

Hà Nội: Trần Bá Khôi, Phạm Ngọc Khánh, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Nam Định:** Nguyễn Hoàng Huy, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

Phú Thọ: Nguyễn Đức Thuận, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương. **Bắc Ninh:** Nguyễn Việt Hà, 11A1, THPT Yên Phong số 1, huyện Yên Phong; Lê Huy Cường, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh.

Hưng Yên: Vũ Tấn Khang, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; Nguyễn Thị Thanh Lan, 11A8, Nguyễn Phúc Hoàng, Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 11A1, THPT Đông Thụy Anh.

Nghệ An: Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; Võ Việt Anh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Đặng Hoàng Mạnh, 12A1, THPT Anh Sơn 2. **Thừa Thiên – Huế:** Phan Trần Hương, 10T1, Phan Thị Thảo Huyền, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

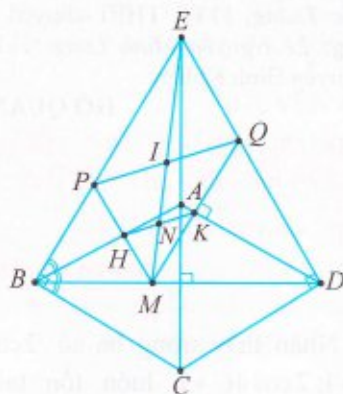
Bình Định: Trần Lê Xuân Trúc, Trần Văn Thiên, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn. **Đồng Tháp:** Đỗ Hoàng Việt, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

Phú Yên: Phan Xuân Thành Lâm, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/458. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh BD ; H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB , AD ; N là trung điểm đoạn HK . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Trên nửa mặt phẳng bờ BD chứa A , lấy điểm E sao cho $\triangle BED$ đều thì E là điểm cố định. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MH, MK với BE và DE ; I là giao điểm của PQ và EM . Dễ thấy $EB \perp BC, MK \perp AD \Rightarrow MK \perp BC$, do đó $EB \parallel MK$. Tương tự $ED \parallel MH$, suy ra tứ giác $EPMQ$ là hình bình hành, nên I là trung điểm của PQ (1). Mặt khác, vì $\widehat{PBH} = \widehat{MBH} = 30^\circ \Rightarrow \triangle BPM$ cân tại $B \Rightarrow HM = HP$. Chứng minh tương tự có $KM = KQ$, suy ra HK là đường trung bình của $\triangle MPQ \Rightarrow HK \parallel PQ$ (2). Từ (1), (2) và chú ý đến $NH = NK$ ta thấy ba điểm M, N, I thẳng hàng. Từ đó ta có ba điểm M, N, E thẳng hàng. Tóm lại đường thẳng MN luôn đi qua điểm E cố định.

► **Nhận xét.** Trên đây là một cách giải phù hợp với các bạn bậc THCS. Hầu hết các lời giải gửi về tòa soạn đều sử dụng phương pháp vectơ hoặc phương pháp tọa độ. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Vũ Đức Văn, Phạm Ngọc Khánh, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Trần Nhật Quang, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Vương Tiến Đạt, 10 Toán A, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Văn Quyết, Hà Hữu Linh, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** Vũ Thị Vân Anh, 10 Toán 1, Bùi Tiến Trung, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; Nguyễn Phúc Hoàng, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; Đỗ Trung Hiếu, Nguyễn Đức Lương, 10A1, THPT Yên Mỹ, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Thị Hằng, 10A1, Cao Hữu Đạt, Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 11 Toán, THPT

chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 11T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** Lê Nguyễn Minh Long, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/458. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \cos^2 2A \cdot \cos^2 2B \cdot \cos^2 2C + \frac{\cos 4A \cdot \cos 4B \cdot \cos 4C}{8}$$

Lời giải. Nhận thấy trong ba số $2\cos 4A+1$; $2\cos 4B+1$; $2\cos 4C+1$ luôn tồn tại hai số không trái dấu nhau. Giả sử hai số đó là $2\cos 4A+1$; $2\cos 4B+1$.

Suy ra $(2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 8P &= 8\cos^2 2A \cos^2 2B \cos^2 2C + \cos 4A \cos 4B \cos 4C \\ &= 2(1+\cos 4A)(1+\cos 4B)\cos^2 2C \\ &\quad + \cos 4A \cos 4B (2\cos^2 2C - 1) \\ &= 2(1+\cos 4A + \cos 4B + 2\cos 4A \cos 4B) \\ &\quad \times \cos^2 2C - \cos 4A \cos 4B \\ &= (2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1)\cos^2 2C + \cos^2 2C \\ &\quad - \frac{1}{2}(\cos 4(A+B) + \cos 4(A-B)) \\ &= (2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1)\cos^2 2C + \cos^2 2C \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos 4C - \frac{1}{2}\cos 4(A-B) \\ &= (2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1)\cos^2 2C + \cos^2 2C \\ &\quad - \frac{1}{2}(2\cos^2 2C - 1) - \frac{1}{2}\cos 4(A-B) \\ &= (2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1)\cos^2 2C \\ &\quad + \frac{1-\cos 4(A-B)}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (2\cos 4A+1)(2\cos 4B+1)\cos 2C = 0 \\ 1-\cos 4(A-B) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3} \text{ hoặc } A=B=\frac{\pi}{6} \text{ hoặc } A=B=\frac{3\pi}{8}$$

Vậy $\min P = 0$ khi tam giác ABC đều hoặc có hai góc bằng $\frac{\pi}{6}$, góc còn lại bằng $\frac{2\pi}{3}$ hoặc có

hai góc $\frac{3\pi}{8}$, góc còn lại bằng $\frac{\pi}{4}$.

Mặt khác $P = \cos^2 2A \cos^2 2B \cos^2 2C$

$$+ \frac{\cos 4A \cos 4B \cos 4C}{8} \leq 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \cos^2 2A \cos^2 2B \cos^2 2C = 1 \\ \cos 4A \cos 4B \cos 4C = 1 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm với $A, B, C \in (0; \pi)$. Vậy $P < \frac{9}{8}$.

Xét trường hợp tam giác ABC có $A=B=x$; $C=\pi-2x$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} P = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos^4 2x \cos^2 4x + \frac{\cos^2 4x \cos 8x}{8} \right] = \frac{9}{8}.$$

Do đó P không có giá trị lớn nhất.

Kết luận: $\min P = 0$ khi tam giác ABC đều hoặc có hai góc bằng $\frac{\pi}{6}$, góc còn lại bằng

$$\frac{2\pi}{3}; P \text{ không có giá trị lớn nhất. } \square$$

► Nhận xét. Đây là bài toán khó nên chỉ có rất ít bạn gửi bài giải. Có bạn sau khi chỉ ra $P \leq \frac{9}{8}$ và dấu đẳng thức không xảy ra, đã kết luận P không có giá trị lớn nhất. Lý luận như thế là không đúng. Chẳng hạn, ta có $f(x) = \sin x + \cos x \leq 2$ và dấu đẳng thức không xảy ra nhưng vẫn có $\max f(x) = \sqrt{2}$.

Lưu ý rằng, nếu chứng minh được $f(x, y, \dots) < C$ và có một trường hợp riêng của $(x, y, \dots)$ sao cho $\lim f(x, y, \dots) = C$ thì ta có thể kết luận $f(x, y, \dots)$ không có giá trị lớn nhất.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Nội:** Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/458. Tìm số k nhỏ nhất sao cho:

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + kabc - \frac{k+3}{6} [a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] \leq 0 \quad (1)$$

với mọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải. (Theo cách của đa số các bạn) Xét các tam giác cân ABC với $c=1$, $a=b=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$,

$n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$S = 2a^3 + 1 + ka^2 - \frac{k+3}{6} [2a^2(a+1) + 2a]$$

$$= a^3 - a^2 - a + 1 - \frac{k}{3}(a^3 - 2a^2 + a)$$

$$= (a-1)^2 \left[(a+1) - \frac{k}{3}a \right].$$

$$\text{Do đó } S \leq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{3(a+1)}{a} = \frac{3\left(3+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 3 \text{ nên suy ra } k \geq 9. \text{ Ta chứng}$$

minh $k=9$ thỏa mãn (1). Thật vậy, vì vai trò a, b, c bình đẳng, không mất tính tổng quát, coi $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \\ &\quad - 2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] \\ &= (a^3 - a^2b - a^2c) + (abc + ab^2 - a^2b) \\ &\quad + (abc + ac^2 - a^2c) \\ &\quad + (abc - b^2c - bc^2) + b^3 + c^3 - (b^2c + bc^2) \\ &\quad + (6abc - 3ab^2 - 3ac^2) \\ &= a^2(a-b-c) - ab(a-b-c) \\ &\quad - ac(a-b-c) + bc(a-b-c) \\ &\quad + (b+c)(b^2-bc+c^2) - bc(b+c) - 3a(b^2-2bc+c^2) \\ &= (a-b-c)(a^2-ab-ac+bc) \\ &\quad + (b+c)(b^2-2bc+c^2) - 3a(b^2-2bc+c^2) \\ &= (a-b-c)[a(a-b)-c(a-b)] \\ &\quad + (b+c)(b-c)^2 - 3a(b-c)^2 \\ &= (a-b-c)(a-b)(a-c) + (b-c)^2(b+c-3a) \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy số k nhỏ nhất sao cho

$$S = a^3 + b^3 + c^3 - kabc$$

$$-\frac{k+3}{6}[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] \leq 0$$

thỏa mãn với mọi tam giác có độ dài các cạnh tương ứng a, b, c là $k=9$. $\square$

➤Nhận xét. Đây là bài toán về bất đẳng thức có yếu tố giải tích liên quan đến giới hạn (tiệm cận) nên nhiều bạn đã không chỉ ra được số k chính xác. Một số bạn biết sử dụng bất đẳng thức Schur hoặc sử dụng phương pháp vector cũng cho kết quả ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bắc Ninh: Lê Huy Cường, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 11T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Vũ Đức Văn, 10T1, Tạ Khánh Hà, 11T1, THPT chuyên ĐHSPT, Lê Duy

Anh, 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** Nguyễn Phúc Hoàng, Dương Hồng Sơn 11A9, Nguyễn Thị Thanh Lan, 11A8, THPT Dương Quảng Hàm; **Long An:** Nguyễn Lộc Phúc, 11T1, Đặng Thành Trung, 11T2, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** Phan Xuân Thành Lâm, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** Hoàng Thanh Việt, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thái Nguyên:** Vương Lam Huy, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Bá Tuấn, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 12T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/458. Cho dãy đa thức $(P_n(x))$ thỏa mãn điều kiện: $P_1(x)=2x$, $P_2(x)=2(x^2+1)$ và $P_n(x)=2xP_{n-1}(x)-(x^2-1)P_{n-2}(x)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức $P_n(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)=x^2+1$ là $n=4k+2, k \in \mathbb{N}$.

Lời giải. (Theo bạn Trần Nhật Quang, 11A2, Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội). Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

$$P_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n.$$

Xét $n=4k+r$, $0 \leq r \leq 3$. Ta có

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x+1)^n + (x-1)^n = (x+1)^{4k+r} + (x-1)^{4k+r} \\ &= (x+1)^r [(x+1)^4]^k + (x-1)^r [(x-1)^4]^k \\ &= (x+1)^r [(x^2+1)(x^2+4x+5)-4]^k \\ &\quad + (x-1)^r [(x^2+1)(x^2-4x+5)-4]^k \\ &= (x^2+1)R_n(x) + (-4)^k [(x+1)^r + (x-1)^r]. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } H_r(x) = (-4)^k [(x+1)^r + (x-1)^r].$$

Ta thấy $P_n(x) : x^2+1$ khi và chỉ khi $H_r(x)$ chia hết cho x^2+1 .

$$\text{Với } r=0, H_0(x) = (-4)^k \cdot 2.$$

$$\text{Với } r=1, H_1(x) = (-4)^k \cdot 2x.$$

$$\text{Với } r=2, H_2(x) = (-4)^k \cdot 2(x^2+1).$$

$$\text{Với } r=3, H_3(x) = (-4)^k \cdot 2(x^3+3x).$$

Rõ ràng $H_2(x) : x^2+1$ và $H_r(x) \not: x^2+1$ với $r=0, 1, 3$. Vậy $P_n(x) : x^2+1$ khi và chỉ khi $n=4k+2$. $\square$

➤Nhận xét. Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Tuy nhiên cách giải nêu trên của bạn Quang là ngắn gọn và hay nhất. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Vũ Đức Văn, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** Phan Xuân Thành Lâm, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Nghệ An:** Cao Hữu Đạt, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hưng Yên:** Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Long An:** Nguyễn Lộc Phúc, 11T1, THPT chuyên Long An.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/458. Cho hàm số

$$f(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \dots + 2016n^{2015}$$

và $(t_0, t_1, \dots, t_{2016}), (s_0, s_1, \dots, s_{2016})$ là hai hoán vị của $(0, 1, \dots, 2016)$. Chứng minh rằng trong tập hợp $A = \{s_0 f(t_0); s_1 f(t_1); \dots; s_{2016} f(t_{2016})\}$ tồn tại hai số khác nhau có hiệu chia hết cho 2017.

Lời giải. Để cho gọn ta kí hiệu $2017 = p$, p là số nguyên tố lẻ. Ta có $f(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \dots + (p-1)n^{p-2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n-1)f(n) &= n + 2n^2 + 3n^3 + \dots \\ &\quad + (p-1)n^{p-1} - 1 - 2n - 3n^2 - \dots - (p-1)n^{p-2} \\ &= p.n^{p-1} - (1 + n + n^2 + \dots + n^{p-1}) \\ \Rightarrow (n-1)^2 f(n) &= p.n^{p-1}(n-1) \\ &\quad - (1 + n + n^2 + \dots + n^{p-1})(n-1) \\ &= p.n^p - p.n^{p-1} - (n^p - 1) \\ &\equiv -n^p + 1 \pmod{p} \equiv -n + 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

(theo định lý Fermat) (1).

Do đó nếu $n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ thì $n = 1$

(chú ý $f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2} : p$ do p lẻ).

Giả sử $n, m \in \{0, 2, \dots, p-1\}$ mà

$$f(n) \equiv f(m) \equiv c \pmod{p}, c \neq 0.$$

Từ (1) ta suy ra $(n-1)c + 1 \equiv (m-1)c + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow (n-m).c \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow n = m. \text{ Như vậy}$$

$\{f(0), f(1), \dots, f(p-1)\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ (HTĐĐĐ) mod p .

Giả sử $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$, $0 \leq a_i \leq p-1$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Theo chứng minh trên $\{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\}$ là một hoán vị của các số $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\{s_0 a_0, s_1 a_1, \dots, s_{p-1} a_{p-1}\}$ không là một HTĐĐĐ mod p .

Phản chứng $\{s_0 a_0, s_1 a_1, s_2 a_2, \dots, s_{p-1} a_{p-1}\}$ là một HTĐĐĐ mod p . Nếu cần kí hiệu lại, không mất tính tổng quát ta giả sử $s_0 = 0$. Suy ra $a_0 = 0$. vì nếu $i \neq 0, a_i = 0 \Rightarrow s_0 a_0 = s_i a_i = 0$ mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Suy ra

$$s_1 a_1 s_2 a_2 \dots s_{p-1} a_{p-1} \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}, \text{ theo}$$

định lý Wilson. Mặt khác $s_1 a_1 s_2 a_2 \dots s_{p-1} a_{p-1}$

$$= (s_1 s_2 \dots s_{p-1})(a_1 a_2 \dots a_{p-1}) = ((p-1)!)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Do đó ta có mâu thuẫn $-1 \equiv 1 \pmod{p}$.

Bởi vậy giả thiết phản chứng sai, từ đó ta có kết luận của bài toán. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán số học sâu sắc, hay. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Yên Bái: Vũ Hồng Quân, 12T, THPT Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Hà Hữu Linh, Đỗ Văn Quyết, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** Đỗ Tiến Đạt, 8A2, THCS Hồng Bàng; **Hà Nội:** Tạ Khánh Hà, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; Trần Nhật Quang, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** Nguyễn Hoàng Huy, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tiến Tài, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Cao Hữu Đạt, Nguyễn Hồng Quốc Khánh, Phan Đức Tiến, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Long An:** Võ Quốc Thịnh, 11T1, THPT chuyên Long An; **Phú Yên:** Phan Xuân Thành Lâm, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Phước:** Phạm Ngọc Huy, AK11, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/458. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{AB^2} \geq \frac{9}{(MA + MB + MC)^2}.$$

Lời giải. (Theo bạn Tạ Khánh Hà, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội).

Trước hết xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ.

Nếu $\hat{A} \geq 120^\circ$ thì $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng A.

Nếu $\hat{B} \geq 120^\circ$ thì $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng B.

Nếu $\hat{C} \geq 120^\circ$ thì $MA + MB + MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng C.

Nếu $\max\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\} \leq 120^\circ$ thì $MA + MB + MC$

nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^\circ.$$

Chú ý. Nếu $\max\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} < 120^\circ$ và

$\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^\circ$ thì M nằm trong tam giác ABC và M được gọi là điểm Toricelli của nó.

Trở lại giải bài toán **T12/458**. Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1. $\max\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} \geq 120^\circ$.

Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{A} \geq 120^\circ$.

$$\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{AB^2} > \frac{1}{(CA+AB)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{AB} \right)^2$$

(vì $BC < CA+AB$; $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \forall x, y$)

$$> \frac{1}{(CA+AB)^2} + \frac{1}{2} \frac{16}{(CA+AB)^2}$$

(vì $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4, \forall x > 0, y > 0$)

$$= \frac{9}{(CA+AB)^2} \geq \frac{9}{(MA+MB+MC)^2} \text{ (theo bổ đề trên).}$$

Trường hợp 2. $\max\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} < 120^\circ$.

Gọi M_0 là điểm Toricelli của tam giác ABC .

Đặt $x = M_0A$; $y = M_0B$; $z = M_0C$. Vì

$\widehat{BM_0C} = \widehat{CM_0A} = \widehat{AM_0B} = 120^\circ$ nên, theo định lý côsin, ta có $BC^2 = y^2 + z^2 + yz$; $CA^2 = z^2 + x^2 + zx$; $AB^2 = x^2 + y^2 + xy$ (1).

Chú ý rằng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}, \forall x, y, z, a, b, c > 0$, ta có

$$\sum_{x,y,z} \frac{x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy}{y^2 + z^2 + yz} = \sum_{x,y,z} \frac{y^2 + z^2 + yz + x(x+y+z)}{y^2 + z^2 + yz}$$

$$= 3 + \sum_{x,y,z} \frac{x(x+y+z)}{y^2 + z^2 + yz} = 3 + (x+y+z) \sum_{x,y,z} \frac{x}{y^2 + z^2 + yz}$$

$$= 3 + (x+y+z) \sum_{x,y,z} \frac{x^2}{x(y^2 + z^2 + yz)}$$

$$\geq 3 + (x+y+z) \frac{(x+y+z)^2}{x^2(y+x) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz}$$

$$= 3 + (x+y+z) \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)(yz+zx+xy)}$$

$$\begin{aligned} &= 3 + \frac{(x+y+z)^2}{yz+zx+xy} \\ &= 3 + \frac{(x+y+z)^2}{yz+zx+xy} - \frac{9(x+y+z)^2 - 9(yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2} \\ &\quad + \frac{9(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2} \\ &= -6 + \frac{(x+y+z)^2}{yz+zx+xy} + \frac{9(yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2} \\ &\quad + \frac{9(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2} \\ &\geq -6 + 2 \sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{yz+zx+xy} \cdot \frac{9(yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2}} \\ &\quad + \frac{9(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2} \\ &= \frac{9(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)}{(x+y+z)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \sum_{x,y,z} \frac{1}{y^2 + z^2 + yz} \geq \frac{1}{(x+y+z)^2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2), theo bổ đề trên, suy ra

$$\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{AB^2} \geq \frac{9}{(MA+MB+MC)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là điểm Toricelli của nó. $\square$

► Nhận xét. Bài toán này khó, ngoài bạn Khánh Hà, chỉ có 5 bạn tham gia giải: **Hà Nội:** Tạ Ngọc Khánh, Vũ Đức Văn, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, Nguyễn Huy Hùng Minh, Phan Đức Tiến, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/458. Một thấu kính mỏng hai mặt lồi có bán kính bằng nhau. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính khi đặt thấu kính trong không khí và đặt trong nước lần lượt là $2f_1$ và $2f_2$. Cho chiết suất tuyệt đối của không khí bằng 1, chiết suất tuyệt đối của nước bằng n_n .

- 1) Tính chiết suất tuyệt đối của chất làm thấu kính.
- 2) Đặt thấu kính ngấp một nửa trong nước sao cho trục chính vuông góc với mặt phẳng phân

cách nước và không khí. Tính khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính.

Lời giải.

1) Khi đặt thấu kính trong không khí thì khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính là $2f_1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{f_1} = (n-1) \frac{2}{R} \quad (1) \quad (\text{với } R \text{ là bán kính mặt cong})$$

Khi đặt thấu kính trong không khí thì khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính là $2f_2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{f_2} = \left(\frac{n}{n_n} - 1 \right) \frac{2}{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{f_2}{f_1} = \frac{n-1}{\frac{n}{n_n}-1} \Rightarrow n = \frac{f_1-f_2}{\frac{f_2}{n}}$

2) Khi đặt thấu kính ngập một nửa trong nước
• Xét trường hợp 1, môi trường tới là không khí, áp dụng công thức lưỡng chất cầu ta có:

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{d_1} + \frac{n}{d_1'} \quad (3) \quad \frac{n_n-1}{-R} = \frac{n}{d_2} + \frac{n_n}{d_2'} \quad (4)$$

Vì thấu kính là mỏng nên: $d_1' = -d_2, d_1 = \infty$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{n_n}{f_1'} = \frac{n-1}{R} + \frac{n-n_n}{R} \quad (5)$

Thay (1) và (2) vào (5) ta có:

$$\frac{n_n}{f_1'} = \frac{1}{2f_1} + \frac{n_n}{2f_2} \Rightarrow f_1' = \frac{2f_1f_2n_n}{f_2 + nf_1}$$

• Xét trường hợp 2, môi trường tới là nước, tương tự ta có:

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{n-n_n}{R} + \frac{n-1}{R} = \frac{n_n}{2f_2} + \frac{1}{2f_1} \Rightarrow f_2' = \frac{2f_1f_2}{f_2 + nf_1}$$

Suy ra khoảng cách giữa hai tiêu điểm là:

$$\Delta f = f_1' + f_2' = \frac{2f_1f_2(n+1)}{f_2 + nf_1}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Chúc mừng các bạn có lời giải đúng đề ra kì này: **Nam Định:** Nguyễn Đức Đạt, 11 Lý, Nguyễn Nam Khánh, Phạm Ngọc Nam, Nguyễn Văn Quân, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Khánh Hòa:** Nguyễn Kim Hoàng, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Đa, Ninh Hoà; **Bình Phước:** Phạm Văn Sơn, AK11, THPT chuyên Quang Trung.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/458. Một quả cầu lớn dẫn điện có bán kính $R = 0,2 \text{ m}$ được tích điện đến $V = 1000 \text{ V}$. Một quả cầu nhỏ dẫn điện có bán kính $r = 0,1 \text{ m}$ chưa tích điện, có gắn tay cầm cách điện. Cho hai quả cầu tiếp xúc với nhau rồi đưa quả cầu nhỏ ra xa và cho nó phóng điện hết điện tích thu được. Sau đó lại cho hai quả cầu tiếp xúc nhau. Hỏi cần làm như vậy bao nhiêu lần để điện thế quả cầu lớn còn lại bằng $V' = 905 \text{ V}$.

Lời giải. Gọi V_1 là điện thế của quả cầu lớn (cũng bằng điện thế của quả cầu nhỏ) sau lần tiếp xúc thứ nhất. Điện tích ban đầu của quả cầu

lớn: $Q = \frac{VR}{k}$.

Sau lần tiếp xúc thứ nhất, điện tích của quả cầu lớn và nhỏ lần lượt bằng: $Q_1 = \frac{VR}{k}; Q_2 = \frac{Vr}{k}$.

Do bảo toàn điện tích $Q = Q_1 + Q_2$ nên ta tìm được $V_1 = \frac{V.R}{R+r}$.

Tương tự như vậy, sau lần tiếp xúc thứ 2, điện thế quả cầu lớn là $V_2 = \frac{V_1.R}{R+r} = V \left(\frac{R}{R+r} \right)^2$.

Sau lần tiếp xúc thứ n : $V_n = V \left(\frac{R}{R+r} \right)^n$. Suy ra

$$n = \log_{\left(\frac{R+r}{R} \right)} \left(\frac{V_n}{V} \right). \quad \text{Thay } V_n = V' = 905(\text{V});$$

$V = 1000(\text{V}); R = 0,2(\text{m}); r = 0,1(\text{cm})$ ta tìm được $n \approx 20$ lần. $\square$

► **Nhận xét.** Do đề bài in nhầm $r = 0,1(\text{cm})$ thành $r = 0,1(\text{m})$ nên một số bạn có đáp số không hợp lý. Thành thật xin lỗi bạn đọc. Các bạn có lời giải đúng: **Nam Định:** Nguyễn Nam Khánh, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Khánh Hòa:** Nguyễn Kim Hoàng, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Hòa.

NGUYỄN XUÂN QUANG

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 3

Problem. Let n be a natural number which is greater than 1. Prove that the sum of all n^{th} roots of unity is equal to 0.

Solution 1. Let $z_1, \dots, z_n$ be all n^{th} roots of unity, i.e. they are complex solutions of the equation $z^n - 1 = 0$. Hence we have the factorization $z^n - 1 = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ (1)
Expanding the right hand side (RHS) of (1), we see that the coefficient of z^{n-1} in the RHS of (1) is equal to $(-1)(z_1 + \dots + z_n)$. On the other hand, the coefficient of z^{n-1} in the left hand side (LHS) of (1) is 0. Thus, $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. (q.e.d.)

Solution 2. Let $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 1, \dots, n$. We know that they are all n^{th} roots of unity. It is also true that $z_1 \cdot z_1 = z_2$, $z_1 \cdot z_2 = z_3, \dots$, $z_1 \cdot z_{n-1} = z_n$, $z_1 \cdot z_n = z_1$.

Therefore, $z_1(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$. Since $z_1 \neq 1$, we get $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. (q.e.d.)

TỪ VỰNG

unity	: đơn vị
n^{th} root of unity	: căn bậc n của đơn vị
i.e.	: nghĩa là
complex solution	: nghiệm phức
factorization	: phân tích thành nhân tử
to expand	: khai triển
right hand side	: vế phải (thường được viết tắt là RHS)
left hand side	: vế trái (thường được viết tắt là LHS)
on the other hand	: mặt khác
q.e.d.	: điều phải chứng minh

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Hạn gửi bài dịch: Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/462. Let a, b, c be the lengths of three sides of a triangle. Prove that

$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 2.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/462. Find the number of the triples (a, b, c) of integers in the interval $[1, 2015]$ such that $a^3 + b^3 + c^3$ is divisible by 9?

Problem T11/462. Let a, b , and c be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Find the minimum value of the expression

$$P = |6a^3 + bc| + |6b^3 + ca| + |6c^3 + ab|.$$

Problem T12/462. Given a triangle ABC with (O) and H respectively are the circumcircle and the orthocenter of the triangle. Let P be an arbitrary point on OH . Let A_0, B_0, C_0 respectively be the intersections between AH, BH, CH and BC, CA, AB . Suppose that A_1, B_1, C_1 respectively be the second intersections between AP, BP, CP and (O) . Let A_2, B_2, C_2 respectively be the reflection points of A_1, B_1, C_1 through A_0, B_0, C_0 . Prove that H, A_2, B_2, C_2 belong to a circle with center is on OH .

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

1. Diophante và tác phẩm *Arithmetica*

Cho đến nay, người ta chưa xác định được năm sinh và quốc tịch của *Diophante*, chỉ biết rằng ông sống vào thế kỷ thứ III, cùng thời với nhà toán học *Heron*. Ngoài sự kiện ông đã thành đạt ở Alexandria, người ta không biết được gì hơn về ông.

Diophante viết ba công trình: *Arithmetica*, đó là công trình quan trọng nhất của ông và hiện còn giữ được 6 trong 13 quyển; *Về các đa giác* chỉ còn giữ lại vài đoạn; và quyển *Porisms* hiện bị thất lạc.



Diophante

Arithmetica là một tác phẩm lớn phân tích sâu sắc các vấn đề lý thuyết đại số về số và cho thấy tác giả là một thiên tài trong lĩnh vực này. Phần còn lưu giữ được của công trình này nói về cách giải khoảng 130 bài toán rất khác nhau dẫn đến các phương trình bậc nhất và bậc hai. Một số phương trình bậc ba đặc biệt đã được giải. Quyển thứ nhất nói về các phương trình xác định một ẩn và các quyển còn lại bàn về các phương trình bất định bậc hai hoặc cao hơn với hai hoặc ba ẩn.

Sau đây là một số bài toán trong *Arithmetica*, tất cả đều rất quyển rũ và một số còn lại còn thách thức nữa. Cần chú ý rằng ở đây "số" có nghĩa là số hữu tỷ dương.

1. Tìm hai số chính phương sao cho tích của chúng cộng với mỗi số đó đều là số chính phương (Bài toán 28, Quyển II).

2. Tìm ba số sao cho tổng của chúng là một số chính phương và tổng của bất kỳ cặp nào cũng là một số chính phương (Bài toán 6, Quyển III).

3. Tìm ba số trong cấp số cộng sao cho tổng của bất kỳ cặp nào cũng là một số chính phương (Bài toán 7, Quyển III).

4. Tìm ba số sao cho tích của hai số nào cộng với số còn lại cũng là một số chính phương (Bài toán 13, Quyển III).

5. Tìm ba số sao cho tích của hai số nào cộng với tổng hai số đó cũng là một số chính phương (Bài toán 15, Quyển III).

6. Tìm hai số sao cho tổng của chúng bằng tổng lập phương của chúng (Bài toán 10, Quyển IV).

7. Tìm ba số trong cấp số nhân sao cho hiệu của bất kỳ cặp nào cũng là một số chính phương (Bài toán 21, Quyển IV).

Trong tác phẩm *Arithmetica*, *Diophante* đã đưa ra cách viết tắt cho các ẩn số, lên đến lũy thừa bậc 6, phép trừ, đẳng thức và phép nghịch đảo. Người ta xem ông là người tiên phong trong việc sử dụng kí hiệu đại số để trình bày các lập luận của mình.

2. Ảnh hưởng của tác phẩm *Arithmetica* đối với các nhà toán học cận đại

Tác phẩm *Arithmetica* có ảnh hưởng sâu sắc và là nguồn mạch khơi dậy niềm đam mê sáng tạo đối với các nhà số học cận đại, đặc biệt là nhà toán học Pháp *Pierre de Fermat* (1601 – 1665). Có những kết quả sâu sắc về số được phát biểu trong *Arithmetica*. Chẳng hạn: hiệu hai lập phương hữu tỷ cũng là tổng của hai lập phương hữu tỷ, một vấn đề mà sau này đã được *Viète*, *Bachet* và *Fermat* nghiên cứu tới. Có nhiều mệnh đề nói về cách biểu thị các số dưới dạng tổng của hai, ba hay bốn bình phương, một lĩnh vực mà sau 1500 năm sau mới được hoàn thiện bởi *Fermat*, *Euler* và *Lagrange*.

Nhà toán học *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) sinh ở gần thành phố Toulouse trong một gia

đình kinh doanh đa thuộc. Ông vốn là một luật sư nhưng lại rất đam mê nghiên cứu toán học, và được xem như nhà toán học Pháp vĩ đại nhất của thế kỷ XVII. Trong những đóng góp đa dạng của Fermat cho toán học thì nổi bật nhất là việc đặt nền móng cho lý thuyết hiện đại về số. Trong lĩnh vực này, Fermat tỏ ra có một trực giác và một khả năng thật khác thường. Cảm hứng của ông có lẽ được khơi dậy bởi tác phẩm *Arithmetica* của Diophante thông qua bản dịch Latin của Bachet de Méziriac được công bố năm 1621. Nhiều đóng góp của ông về Lý thuyết số là những ý kiến ghi ngoài lề trong bản sao của ông về công trình của Bachet. Năm 1670, khi ông qua đời được năm năm, những ghi chép này đã được con trai của ông là Clément-Samuel thu thập lại đưa vào lần xuất bản mới cuốn *Arithmetica*. Sau đây là một số kết quả minh họa phương hướng chung trong các công trình nghiên cứu của Fermat.

1. Nếu p là số nguyên tố và a nguyên tố cùng nhau đối với p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p .
2. Mọi số nguyên tố lẻ đều có thể biểu thị được bằng hiệu của hai bình phương bằng một và chỉ một cách mà thôi.
3. Một số nguyên tố dạng $4n+1$ biểu thị được dưới dạng tổng của hai số chính phương.
4. Một số nguyên tố dạng $4n+1$ thì chỉ một lần là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh là các số nguyên; bình phương của nó là hai lần; tam thừa của nó thì ba lần và ...
Ví dụ $5 = 4.1+1$ và $5^2 = 3^2 + 4^2$,
 $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$, $125^2 = 75^2 + 100^2$
 $= 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2, \dots$
5. Mọi số nguyên không âm biểu thị được bằng tổng của bốn bình phương hoặc ít hơn.
6. Diện tích tam giác vuông có các cạnh là số nguyên không thể là một chính phương.
7. Chỉ có một lời giải bằng số nguyên cho $x^2 + 1 = y^3$ và chỉ có hai cho $x^2 + 4 = y^3$.
8. Không tồn tại các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^4 + y^4 = z^2$.
9. Không tồn tại các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^n + y^n = z^n$ khi $n > 2$ ('Định lý' Fermat cuối cùng).

10. Phòng đoán $F_n = 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với mọi n là số tự nhiên.

Mặc dù sau này Euler đã chứng tỏ phòng đoán 10 là sai khi chỉ ra F_5 là hợp số, nhưng các số nguyên tố dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ (được gọi là số nguyên tố Fermat) có một ý nghĩa rất đặc biệt. Chẳng hạn, năm 1796, khi mới 19 tuổi, nhà toán học Đức Carl Friedrich Gauss đã phát triển một lý thuyết cho biết rằng một đa giác đều có số cạnh là số nguyên tố dựng được bằng các dụng cụ Euclid khi và chỉ khi số đó có dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ (số nguyên tố Fermat). Như vậy các đa giác đều có số cạnh là 17; 257 và 65537 đều có thể dựng được bằng thước kẻ và compa, điều này các nhà toán học Hy Lạp cổ đại chưa biết.

3. Ảnh hưởng của tác phẩm *Arithmetica* đối với các nhà toán học hiện đại



Andrew Wiles

Như đã biết, 'Định lý' Fermat cuối cùng: Không tồn tại các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^n + y^n = z^n$ khi $n > 2$ được phát biểu từ cảm hứng của Fermat khi đọc Bài toán 8, quyển II trong tác phẩm *Arithmetica*. Nguyên văn của Diophante: "Hãy chia một số chính phương cho trước thành tổng hai số chính phương", còn Fermat thì viết bên lề tác phẩm ấy: chia một lập phương cho trước thành tổng hai lập phương, một lũy thừa bậc bốn và nói chung một lũy thừa bất kỳ lớn hơn hai thành tổng hai lũy thừa có cùng chỉ số trên là không thể được. Tôi đảm bảo là đã tìm ra cách chứng minh tuyệt vời cho điều này nhưng vì lề sách hẹp quá không ghi lại được. Không biết Fermat có thực sự chứng minh được không, chỉ biết rằng phải mất gần ...

(Xem tiếp trang 38)

TS Nguyễn Minh Hà vừa ra mắt bạn đọc yêu toán cả nước bộ sách hai tập do Công ty Cổ phần Văn hoá Giáo dục Long Minh và NXB Dân Trí liên kết xuất bản: **Hướng trong hình học phẳng** và **Hình học phẳng định hướng**.

Để khuyến khích các bạn học sinh chuyên toán cả nước tích cực tham gia các cuộc thi **Giải toán và vật lý trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ** và giải các bài toán trong mục **Đề ra kì này** của tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ**, TS Nguyễn Minh Hà và Công ty Cổ phần Văn hoá Giáo dục Long Minh phối hợp tổ chức một chương trình tặng sách có tên là **Đam mê toán học**: tặng 76 bộ sách **Hướng trong hình học phẳng** và **Hình học phẳng định hướng** (có chữ kí của TS Nguyễn Minh Hà và ông Đỗ Hoàng Sơn, Giám đốc Công ty Cổ phần Văn hoá Giáo dục Long Minh) cho 76 học sinh chuyên toán, mà mỗi một trong số 76 học sinh này là học sinh của một trường THPT chuyên trong 76 trường THPT chuyên của cả nước.

Để nhận được sách tặng của chương trình **Đam mê toán học**, bạn cần phải trả lời các câu hỏi sau:

1) Họ và tên của bạn?

2) Tên lớp và trường THPT chuyên mà bạn đang theo học?

3) Bạn đã mấy lần được giải môn toán trong các cuộc thi **Giải toán và vật lý trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**? Đề nghị nêu rõ loại giải, năm được giải, ví dụ: giải Nhất, năm học 2014-2015.

4) Bạn đã mấy lần được nêu tên trong mục **Giải bài kì trước** của tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ**? Đề nghị nêu rõ bài toán và số tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ** mà bạn được nêu tên, ví dụ: Bài T12/456.

Sau khi hoàn tất, bạn hãy gửi các câu trả lời về Công ty Cổ phần Văn hoá Giáo dục Long Minh trước ngày 31/1/2016, qua thư hoặc email theo địa chỉ: Công ty Cổ phần Văn hoá Giáo dục Long Minh, Phòng 303, Nhà 17T9, Trung Hòa - Nhân Chính, Hà Nội. Email: sach@longminh.com.vn hoặc vithu@longminh.com.vn.

TS Nguyễn Minh Hà và ông Đỗ Hoàng Sơn sẽ căn cứ vào nội dung trả lời các câu hỏi 3 và 4 của bạn để tặng sách qua đường bưu điện theo địa chỉ lớp và trường THPT chuyên mà bạn đang theo học.



MỘT SỐ BÀI TOÁN ...

(Tiếp theo trang 11)

$$P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 0,128.$$

Vậy $P(K) = 3 \cdot 0,128 = 0,384$.

b) Gọi H là biến cố: “Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần”.

Biến cố đối $\overline{H}$ của H là: “Cả 3 lần bắn đều bắn không trúng hồng tâm”. Ta có $\overline{H} = \overline{A_1 A_2 A_3}$. Do đó

$$P(\overline{H}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512. \text{ Vậy}$$

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0,512 = 0,488.$$

Sau đây là một số bài tập tự luyện:

BÀI TẬP

1. (ĐH Khối A-2013) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các

chữ số: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

2. (ĐH Khối B-2013) Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để hai viên bi lấy ra cùng màu.

3. (ĐH Khối B-2012) Trong một lớp học gồm 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 bạn lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

4. (Đề thi thử THPT Quốc gia của trường THPT Trần Phú, Hà Tĩnh, 2015, lần 1) Một hộp đựng 9 viên bi trong đó có 4 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được có ít nhất 2 viên bi màu xanh.



SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN VĂN QUỐC TUẤN

(K112, Đại học Y Hà Nội)

Dề giải HPT bằng phương pháp đánh giá, ta hay dùng hai BĐT sau:

• Bất đẳng thức Cauchy.

Với n số thực không âm $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

• Bất đẳng thức Bunhiacovsky

Với 2 bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\exists t \in \mathbb{R}: a_i = t b_i$ (hoặc $b_i = t a_i$),

$i = \overline{1, n}$, hay khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ (với các $b_i \neq 0$).

Sau đây là một số thí dụ:

Thí dụ 1 (ĐH - A - 2014). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. ĐK: $-2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}; 2 \leq y \leq 12$.

Với 2 số thực a, b bất kỳ ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \quad (*)$$

Áp dụng (*) ta được:

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2 - y + 12}{2} \\ \sqrt{y(12-x^2)} = \sqrt{y} \cdot \sqrt{12-x^2} \leq \frac{12 - x^2 + y}{2} \end{cases}$$

Suy ra $x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq 12$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases} \text{ Thay vào (2) ta được:}$$

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0, \text{ khi đó}$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy nghiệm của hệ PT là: $(x; y) = (3; 3)$.

Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacovsky ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \right) \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{1+2x^2} = \sqrt{1+2y^2} \Leftrightarrow x = y$.

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } & \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} \\ &= \frac{2(x-y)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)} \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \leq \frac{2}{1+2xy} \quad (**) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ (*) và (**) ta suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq \frac{4}{1+2xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x = y$, thay vào PT (2) ta được:

$$\sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{x(1-2x)} = \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36} \Rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ PT đã cho là:

$$\left(\frac{9 + \sqrt{73}}{36}; \frac{9 + \sqrt{73}}{36} \right); \left(\frac{9 - \sqrt{73}}{36}; \frac{9 - \sqrt{73}}{36} \right).$$

Thí dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = y^3 + 3y^2 & (1) \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + y + 2} = x^2 - 3y & (2) \end{cases}$$

Nhận xét. Nhìn vào phương trình đầu của hệ ta có cảm giác ngay là có thể sử dụng hàm số đại diện $t^3 - 3t$ nhưng cần có điều kiện của biến. Ở đây muốn tìm điều kiện của biến y thì chúng ta cần suy ra từ phương trình 2 nhưng khó khăn, do vậy chúng ta phải nghĩ hướng khác. Ở đây có thể phân tích thành nhân tử nên chúng ta thử đi theo hướng đó xem sao!

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 - 3x^2 + y + 2 \geq 0 \end{cases}$

Ta có: PT(1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x = (y+1)^3 - 3(y+1)$

$$\Leftrightarrow x^3 - (y+1)^3 = 3(x - y - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)[x^2 + x(y+1) + (y+1)^2] = 3(x - y - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{4} + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 \geq 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x}{2} + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}, \text{ không thỏa mãn ĐK.}$$

Với $y = x - 1$ thay vào PT (2) ta được:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + x + 1} = x^2 - 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2 - 2x - 1)} = x^2 - 3x + 3 \end{cases} (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \leq \frac{x-1}{2} \\ \sqrt{(x-1)(x^2 - 2x - 1)} \leq \frac{x^2 - x - 2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2 - 2x - 1)} \leq \frac{x^2 - 3}{2}.$$

Mặt khác:

$$x^2 - 3x + 3 \geq \frac{x^2 - 3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0.$$

Khi đó VP(*) $\geq$ VT(*) nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2. \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ PT là: $(x; y) = (3; 2)$.

Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} = 2 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2} + xy = 4 \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 2$. Ta có:

$$x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0;$$

$$x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3. \text{ Khi đó ta suy ra:}$$

$$2 = \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \geq x + y \Leftrightarrow x + y \leq 2.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$2\sqrt{2-x} \leq 3-x; 2.2\sqrt{2x+2} \leq 2x+6$$

$$\Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2} \leq 3.$$

$$\text{Do } xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq 1 \text{ suy ra}$$

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2} + xy \leq 4.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} x = y \\ 2 - x = 1 \Leftrightarrow x = y = 1. \\ 2x + 2 = 4 \end{cases}$$

Thử lại vào hệ PT ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = (1; 1)$.

Thí dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 6y^2 + 8 = 3x + \frac{3}{x} + y^4 + 8y & (1) \\ 2x^3 + 3y + 4 = 3x^2 + 6\sqrt{y} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}; y \geq 0$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = -3(\sqrt{y} - 1)^2 \leq 0$.

Mà $2x^3 - 3x^2 + 1 = (2x+1)(x-1)^2 \geq 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$,

do đó: $2x^3 - 3x^2 + 1 = -3(\sqrt{y} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Thay lại vào PT (1) ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (1; 1)$.

Thí dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-y+2} + 2\sqrt{y-x} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x-y+4}} & (1) \\ x^3 + \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $y \geq x; x - y + 2 \geq 0; x \geq \frac{1}{2}; y \geq 2$.

Đặt $\sqrt{y-x} = a; a \geq 0 \Rightarrow -a^2 = x - y$. Khi đó (1)

trở thành: $\sqrt{2-a^2} + 2a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4-a^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-a^2} \cdot \sqrt{4-a^2} + 2a\sqrt{4-a^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-3a^2} \cdot \sqrt{4-a^2} + 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{4-a^2} = 9 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{6-3a^2} \cdot \sqrt{4-a^2} \leq \frac{10-4a^2}{2} = 5-2a^2 \\ 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{4-a^2} \leq 2a^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6-3a^2} \cdot \sqrt{4-a^2} + 2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{4-a^2} \leq 9.$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-a^2} = \sqrt{6-3a^2} \\ a\sqrt{3} = \sqrt{4-a^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow y - x = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Thay vào (2) ta được: $x^3 + \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow x^3 + \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} - 2 = 0 \quad (3).$$

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} - 2$.

Ta có: $f'(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$, mà

$f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (3)

Ta thấy $x = 1; y = 2$ thỏa mãn ĐK. Vậy nghiệm của hệ PT là $(x; y) = (1; 2)$.

Thí dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4x^2+y}} + \frac{1}{\sqrt{4y^2+x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}} \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4(y-1)}{2} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 1; y \geq 1$. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+y}} + \frac{1}{\sqrt{4y^2+x}} \geq \frac{2}{\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)}}$$

$$\text{Suy ra } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}} \geq \frac{2}{\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)} \geq 2(x+y)^2 + x + y$$

$$\Leftrightarrow 4(4x^2+y)(4y^2+x) \geq [2(x+y)^2 + x + y]^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + xy$$

$$\geq (x+y)^4 + (x+y)^3 + \frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[\frac{1}{4} + x^2 + y^2 + 6xy - 3(x+y) \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[(x+y)^2 - 3(x+y) + 4xy + \frac{1}{4} \right] \leq 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(Với $x, y \geq 1$ ta có: $(x+y)^2 - 3(x+y) + 4xy + \frac{1}{4}$

$$\geq (x+y)^2 - 3(x+y) + 4 + \frac{1}{4} > 0).$$

Thay $y = x$ vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$2x\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4(x-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x\sqrt{x-1} + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x-1})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ PT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

Thí dụ 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y & (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x & (2) \end{cases}$$

Phân tích. Đây là hệ PT đối xứng loại 2 nên trừ (1) cho (2), ta có $x = y$, tùy nhiên nếu làm theo cách thông thường thì sẽ rất khó khăn vì có sự xuất hiện của căn bậc 3. Nhưng nếu cộng 2 vế lại với nhau thì vế trái xuất hiện $2xy$ và vế phải xuất hiện $x^2 + y^2$, đến đây ta có thể nghĩ tới việc đánh giá tiếp PT mới được hình thành đó.

Lời giải. Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$ thỏa mãn hệ PT.

Với x, y khác 0, cộng (1) và (2) ta được:

$$x+y+2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2+x+y$$

$$\Leftrightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2 \quad (3)$$

Suy ra $xy > 0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right) \leq 2xy \leq x^2 + y^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $x = y = 1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là: $(0; 0), (1; 1)$.

Thí dụ 9.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \frac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy $x = y = z = 0$ là 1 nghiệm của hệ PT. Nếu x, y, z khác 0 thì x, y, z dương, khi đó nhân các vế của hệ PT ta có:

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} = xyz$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = 8xyz.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geq 2\sqrt{x^2} \cdot 2\sqrt{y^2} \cdot 2\sqrt{z^2} = 8|xyz| = 8xyz$$

(do x, y, z dương). Dấu bằng xảy ra khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 = y^2 = z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ PT có nghiệm $(x; y; z)$ là: $(0; 0; 0), (1; 1; 1)$.

Ở các thí dụ trên chúng ta thấy chỉ sử dụng 1 PT của hệ để đánh giá, trong một số bài toán ta cần đánh giá cả hai PT trong hệ. Chúng ta xét thí dụ sau.

Thí dụ 10. Giải hệ PT

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 3x^2 - x + \frac{1}{2} = y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x > 0, y > 0$. Ta có:

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 6x^2 - 2x + 1 = 2y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt[3]{2.4x.(2x+1)} \leq \frac{2x+1+4x+2}{3} = 2x+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{2x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0$$

Lại theo BĐT Cauchy thì

$$5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2+x} \leq y^2 + x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 1 - y^2 \leq 0. \text{ Kết hợp lại ta được:}$$

$$2(5x^2 - 3x + 1 - y^2) + 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ PT là: } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình sau:

- $\begin{cases} a+b=\sqrt[3]{24} \\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{3a+b}}\right)=2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24 \end{cases}$
- $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \sqrt{8-xy^2(xy^2+2)}=x^6+x^3y^3+\frac{1}{2} \\ -\sqrt{x^2+y^2+2(xy+2)}=y^6+x^3y^3+\frac{1}{2} \end{cases}$
- $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2+xy=3y^2-y\sqrt{xy} \\ \frac{y^2}{1+\sqrt{2-x}}+\frac{(2-x)^2}{1+y}=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{x}\right)(x+y)}-1 \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$



BÀI TOÁN TÌM HẰNG SỐ TỐT NHẤT TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài viết này đề cập đến một số bài toán tìm hằng số tốt nhất trong bài toán bất đẳng thức (BĐT). Nội dung của nó được phát biểu khá đơn giản như sau: Tìm hằng số k lớn nhất (nhỏ nhất) để một BĐT luôn đúng với một số giả thiết nào đó của các biến. Để giải dạng toán này ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị đặc biệt của các biến hoặc đánh giá trực tiếp các biến để chỉ ra điều kiện cần của k .

Bước 2. Chứng minh BĐT đã cho đúng với giá trị của k (lớn nhất, nhỏ nhất) vừa tìm được.

Việc chọn các giá trị đặc biệt như ở bước 1 không phải lúc nào cũng dễ dàng mà còn phụ thuộc vào dấu bằng và các điều kiện của giả thiết. Xin đưa ra một số Ví dụ minh họa:

Thí dụ 1. Tìm số thực $k > 0$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực x, y, z :

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq k(xy+yz+xz)^2 \quad (1)$$

Lời giải.

Trong BĐT (1) cho $x=y=z=1 \Rightarrow k \leq \frac{2}{3}$. Ta chứng minh BĐT (1) đúng khi $k = \frac{2}{3}$, tức là cần chứng minh BĐT

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq \frac{2}{3}(xy+yz+xz)^2 \quad (1.1)$$

Ta có (1.1) $\Leftrightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4)$

$$\geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + xyz(x+y+z)$$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$,

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ta được:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) \geq 2(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) \text{ và}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x+y+z), \text{ vậy BĐT (1.2)}$$

được chứng minh. Do đó $\max k = \frac{2}{3}$. $\square$

Thí dụ 2. Tìm hằng số $k > 0$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c, d dương

$$(a+b+c) \left[3^4(a+b+c+d)^5 + 2^4(a+b+c+2d)^5 \right] \geq k.abcd^3 \quad (2)$$

Lời giải. Trong BĐT (2) cho $a=b=c=1$; $d=3$, suy ra $k \leq 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5$.

Ta chứng minh BĐT (2) đúng với $k = 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5$, tức là cần chứng minh:

$$T = (a+b+c) \left[3^4(a+b+c+d)^5 + 2^4(a+b+c+2d)^5 \right] \geq 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5.abcd^3 \quad (2.1).$$

$$T \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \left[3^4 \left(3\sqrt[3]{abc} + d \right)^5 + 2^4 \left(3\sqrt[3]{abc} + 2d \right)^5 \right] = S.$$

Cần chứng minh $S \geq 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5.abcd^3$

$$\Leftrightarrow 3^4 \cdot \left(3 + \frac{d}{\sqrt[3]{abc}} \right)^5 + 2^4 \cdot \left(3 + \frac{2d}{\sqrt[3]{abc}} \right)^5 \geq 3^6 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{d}{\sqrt[3]{abc}} \right)^3$$

Đặt $t = \frac{d}{\sqrt[3]{abc}}$. Ta cần chứng minh:

$$3^4 \cdot (3+t)^5 + 2^4 \cdot (3+2t)^5 \geq 3^6 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot t^3 \quad (2.2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$3+t \geq 2\sqrt{3t} \Rightarrow (3+t)^5 \geq 2^5 \cdot 3^2 \cdot t^2 \sqrt{3t}$$

$$3+2t = 3+t+t \geq 3\sqrt[3]{3t^2} \Rightarrow (3+2t)^5 \geq 3^6 \cdot t^3 \sqrt[3]{3^2 t}.$$

$$\Rightarrow \text{VT}(2.2) \geq 3^6 \cdot 2^4 \cdot t^2 (2\sqrt{3t} + t\sqrt[3]{3^2 t}).$$

$$\text{Do } 2\sqrt{3t} + t\sqrt[3]{3^2 t} = \sqrt{3t} + \sqrt{3t} + \frac{t\sqrt[3]{3^2 t}}{3}$$

$$+ \frac{t\sqrt[3]{3^2 t}}{3} + \frac{t\sqrt[3]{3^2 t}}{3} \geq 5\sqrt[5]{3t \cdot t^3 \cdot \frac{3^2 t}{27}} = 5t$$

nên BĐT (2.2) được chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi $t=3$. Vậy $\max k = 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5$. $\square$

Nhận xét. BĐT (2.1) là BĐT thuần nhất với các biến a, b, c, d nên việc đặt $t = \frac{d}{\sqrt[3]{abc}}$ để đưa về một biến là rất tự nhiên. Một số bài toán tương tự:

Bài 2.1. Tìm hằng số $k > 0$ lớn nhất sao cho với mọi tam giác ABC vuông tại C với ba cạnh a, b, c ta đều có BĐT $a^3 + b^3 + c^3 \geq k(a+b+c)^3$.

Hướng dẫn. Cho $a=b=\frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow k \leq \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2} = t$.

Sau đó chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 \geq t(a+b+c)^3$.

Bài 2.2. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $x_1, x_2, \dots, x_5$ dương.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 \geq k(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5).$$

Đáp số. $\max k = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 2.3. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 dương.

$$k[x_1^{2005} + \dots + x_5^{2005}] \geq x_1x_2 \dots x_5 (x_1^{125} + \dots + x_5^{125})^{16}.$$

Đáp số. $\min k = 5^{15}$.

Bài 2.4. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a \geq b > 0$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt[3]{a^3 + b^3} \leq 2a + kb.$$

Hướng dẫn. Cho $a = b$, ta được:

$$\sqrt{2a^2} + \sqrt[3]{2a^3} \leq 2a + ka \Rightarrow k \geq \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} - 2.$$

Với $k = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} - 2$, đặt $x = \frac{a}{b}$ ($x \geq 1$), BĐT trở

thành: $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1} \leq 2x + k$ (BĐT này được chứng minh đơn giản bằng phương pháp đạo hàm hoặc phương pháp liên hợp).

Thí dụ 3 (BMO 2012). Tìm số thực k lớn nhất để với mọi a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$\left| \frac{1}{a} \right| + \left| \frac{1}{b} \right| + \left| \frac{1}{c} \right| \leq 3 \text{ ta đều có bất đẳng thức}$$

$$[a^2 + 4(b^2 + c^2)][b^2 + 4(a^2 + c^2)][c^2 + 4(a^2 + b^2)] \geq k \quad (3)$$

Lời giải. Trong (3) cho $a = b = c = 1$, suy ra $k \leq 729$. Ta chứng minh (3) đúng với $k = 729$

Từ giả thiết ta có

$$3|abc| \geq |ab| + |bc| + |ca| \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow |abc| \geq 1.$$

Do đó

$$[a^2 + 4(b^2 + c^2)][b^2 + 4(a^2 + c^2)][c^2 + 4(a^2 + b^2)] \geq (a^2 + 8|bc|)(b^2 + 8|ac|)(c^2 + 8|ab|) \geq 9^3 \cdot (abc)^2 \geq 729$$

(sử dụng BĐT Cauchy cho 9 số: a^2 và 8 số $|bc|$)

Vậy $\max k = 729$. $\square$

Thí dụ 4 (IMO 2006). Tìm hằng số M nhỏ nhất sao cho với mọi số thực a, b, c ta đều có

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (4)$$

Lời giải. Bằng biến đổi đơn giản ta có

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|.$$

Vậy bài toán trở thành: Tìm M nhỏ nhất để

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (4.1)$$

Giả sử $a = \max(a, b, c)$, ta có $9(a^2 + b^2 + c^2)^2$

$$= [(a+b+c)^2 + 2(b-c)^2 + 2(a-b)(a-c)]^2$$

$$\geq [2\sqrt{2}|(a+b+c)(b-c)| + 2|(a-b)(a-c)|]^2$$

$$\geq 16\sqrt{2}|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|.$$

$$\text{Vậy } |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Có thể chọn $b=1$ thì $a=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}; c=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ để

dấu đẳng thức xảy ra. Vậy $\min M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$. $\square$

Thí dụ 5. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực bất kì có tổng bằng 0. Tìm hằng số $c = c(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng:

$$c \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (5)$$

Lời giải. Trong (5) cho $a_1 = 1; a_2 = \dots = a_n = -\frac{1}{n-1}$

ta được $c \leq \frac{n}{2}$.

Ta chứng minh BĐT (5) đúng với $c = \frac{n}{2}$. Tức

$$\text{là cần chứng minh } \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \quad (5.1)$$

Ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, khi đó tồn tại k ($1 \leq k \leq n-1$) sao cho $a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0 \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$

Khi đó, ta có $a_1 + \dots + a_k = -(a_{k+1} + \dots + a_n)$ và

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) = \sum_{i=1}^n (n+1-2i)a_i;$$

$\sum_{i=1}^n |a_i| = 2 \cdot \sum_{i=1}^k a_i$. BĐT (5.1) trở thành:

$$\sum_{i=1}^n (n+1-2i)a_i \geq n \cdot \sum_{i=1}^k a_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (n+1-2i)a_i + \sum_{i=k+1}^n (n+1-2i)a_i \geq n \cdot \sum_{i=1}^k a_i \quad (5.2)$$

Ta có $a_1 \geq \dots \geq a_k$ và $n+1-2.1 \geq \dots \geq n+1-2.k$.

Áp dụng BĐT Chebyshev ta được

$$\sum_{i=1}^k (n+1-2i)a_i \geq \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^k (n+1-2i) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)$$

$$= (n-k) \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \quad (5.3)$$

Tương tự thì $a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$ và

$n+1-2.(k+1) \geq \dots \geq n+1-2.n$ nên

$$\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i)a_i \geq \frac{1}{n-k} \cdot \left(\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) \right) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right)$$

$$= -k \cdot \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = k \cdot \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \quad (5.4)$$

Từ (5.3) và (5.4) suy ra BĐT (5.2) đúng.

Vậy $\max c(n) = \frac{n}{2}$. $\square$

Thí dụ 6. Tìm hằng số M lớn nhất sao cho với mỗi n nguyên dương tồn tại các số $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $\sum_{k=1}^n b_k = 1$; $2b_k \geq b_{k-1} + b_{k+1}$, $\forall k = 2, \dots, n$;

ii) $a_k^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i$, $\forall k = \overline{1, n}$;

iii) $a_n = M$.

Lời giải

Ta chứng minh $\max_{k=\overline{1, n}} a_k < 2$ và $\max_{k=\overline{1, n}} b_k < \frac{2}{n-1}$.

Thật vậy, đặt $L = \max_{k=\overline{1, n}} a_k$, từ (ii) suy ra

$$L^2 \leq 1 + L \Rightarrow L < 2.$$

Đặt $b_m = \max_{k=\overline{1, n}} b_k$, từ (i) dễ thấy

$$b_k \geq \frac{(k-1)b_m + (m-k)b_1}{m-1}, \text{ nếu } 1 \leq k \leq m \text{ và}$$

$$b_k \geq \frac{(k-m)b_n + (n-k)b_m}{n-m}, \text{ nếu } m \leq k \leq n.$$

Suy ra $b_k > \frac{(k-1)b_m}{m-1}$ nếu $1 \leq k \leq m$ và

$b_k \geq \frac{(n-k)b_m}{n-m}$, nếu $m \leq k \leq n$. Do đó

$$1 = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^m b_k + \sum_{k=m+1}^n b_k > \frac{1}{m-1} \left(\sum_{k=1}^m (k-1) \right) \cdot b_m$$

$$+ \frac{1}{n-m} \left(\sum_{k=m+1}^n (n-k) \right) \cdot b_m = \frac{n-1}{2} \cdot b_m \Rightarrow b_m < \frac{2}{n-1}.$$

Đặt $x_0 = 1$; $x_k = 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i$, $k = \overline{1, n}$ thì

$x_k - x_{k-1} = a_k b_k$. Từ (ii) suy ra $a_k^2 \leq x_k \Rightarrow a_k \leq \sqrt{x_k}$.

Từ $\max_{k=\overline{1, n}} a_k < 2$ suy ra $x_k - x_{k-1} < 2b_k$. Do đó với

mọi $k = \overline{1, n}$ thì: $\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}} < b_k \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}}}$

$$= b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{x_k - x_{k-1}}{2(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})^2} \right)$$

$$< b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{b_k}{4} \right) < b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right).$$

Lấy tổng k từ 1 đến n ta được:

$$a_n \leq \sqrt{x_n} < \sqrt{x_0} + \sum_{k=1}^n b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $M = a_n \leq \frac{3}{2}$.

Cuối cùng chọn bộ $a_k = 1 + \frac{k}{2n}$; $b_k = \frac{1}{n}$ thỏa

mãn các điều kiện đề bài. Vậy $\max M = \frac{3}{2}$. $\square$

BÀI TẬP

1. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với mọi x, y, z đôi một phân biệt ta đều có:

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(x-z)^2} \geq \frac{k}{xy + yz + zx}.$$

2. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho với mọi số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ ta đều có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c).$$

3. Tìm hằng số $k > 0$ lớn nhất sao cho với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ta đều

có $|kxy + yz| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. (Iran 2007). Tìm số C lớn nhất sao cho với mọi $a, b, c, d, e \geq 0$ thỏa mãn $a + b = c + d + e$ ta đều có:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq C(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2$$

5. (IMO 1992). Cho n số không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$. Tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4.$$

6. (TH&TT T10/2007). Tìm số thực m lớn nhất sao cho tồn tại số thực k thuộc đoạn $[1; 2]$ để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c > 0$.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^{2k} \geq (k+1)(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + m$$

7. (TH&TT 2012). Cho trước các số $a \geq b \geq c \geq d$ và $abcd = 1$. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{k}{d+1} \geq \frac{3+k}{2}.$$

8. Tìm giá trị lớn nhất của số thực $k > 0$ sao cho với mọi số thực a, b, c, d ta có bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} + 2\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)} \\ & + 2\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)(1+a^2)} + 2\sqrt{(1+d^2)(1+a^2)(1+b^2)} \\ & \geq k(ab + bc + cd + ac + bd + da - 2). \end{aligned}$$

TÁC PHẨM ARITHMETICA ... (Tiếp theo trang 29)

350 năm sau, năm 1994, nhà toán học Anh *Andrew Wiles* và học trò ông là *Richard Taylor* mới chứng minh hoàn chỉnh “Định lý” đó. Để đạt được kết quả đó, hai ông cũng dựa trên nhiều thành tựu của toán học hiện đại như *Lý thuyết độ cao* của *Arakelov - Faltings*, *Lý thuyết đường cong elliptic* trong đó *Giả thuyết Taniyama - Shimura* đóng vai trò chủ yếu.

Đó là nguồn cảm hứng của *Arithmetica* gián tiếp thông qua “Định lý” Fermat cuối cùng, nhưng có thể kể ra vô số các phát minh về số học trong thời đại ngày nay (thế kỉ XX - XXI) được khởi nguồn từ *Arithmetica*. Hãy quay lại Bài toán 7, Quyển III trong tác phẩm ấy. Các nhà lý thuyết số rất quan tâm đến các dãy cấp số cộng với những tính chất số học đặc trưng nào đó (chẳng hạn chúng đều là số chính phương hoặc đều là số nguyên tố). Trong số các nhà toán học đó, không thể không nhắc tới *Terence Tao*, nhà toán học Australia gốc Hoa, người được mệnh danh là “Mozart của toán học”. Anh sinh ngày 17.7.1975, tại Adelaide (Australia). Năm 1986, khi mới 11 tuổi, Anh đã tham dự Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế và ba năm liên tục đạt Huy chương Đồng, Bạc và Vàng. Anh là người trẻ nhất cho đến nay giành được Huy chương Vàng trong lịch sử Olympic

Toán học Quốc tế. Năm 20 tuổi anh bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ tại Trường Đại học Princeton (Hoa Kỳ) và bốn năm sau được phong hàm Giáo sư thực thụ (full professor) của trường đó. Năm 31 tuổi, tại Đại hội Toán học Quốc tế lần thứ 25 ở Madrid, anh được trao Giải thưởng *Fields*, giải thưởng cao quý nhất trên thế giới dành cho các nhà toán học đặc biệt xuất sắc chưa quá tuổi 40 (tương đương với giải thưởng *Nobel* dành cho các ngành khoa học khác). *Terence Tao* nghiên cứu rất nhiều lĩnh vực, nhưng hiện nay anh dành nhiều sự quan tâm đến số học, trong đó có những vấn đề nêu trên. Việt Nam có anh *Vũ Hà Văn*, hiện là Giáo sư Trường Đại học Rutgers (Hoa Kỳ), một người bạn thân của *Terence Tao* cũng có những thành tựu đáng kể trong lĩnh vực này. Hai người đã cùng công bố 15 bài báo khoa học và cuốn sách chuyên khảo *Additive Combinatorics* (Tổ hợp cộng tính) được giới toán học đánh giá cao. Làm sao kể hết giá trị to lớn của tác phẩm *Arithmetica* đối với sự phát triển của toán học nhân loại. Chúc các bạn tìm được nguồn cảm hứng sáng tạo từ những vấn đề tác phẩm ấy đặt ra.

LÊ QUỐC HÁN

(GV Khoa Toán, Trường ĐH Vinh, Nghệ An)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI ĐÃ TRỌN VẸN ?

(Đề đăng trên TH&TT số 458, tháng 8 năm 2015)

Nhận xét. Việc giải thích: Với mọi $x \in D$ thì $\sqrt{2x-1} \geq 0$ nên (*) $\Leftrightarrow \frac{x-9}{x-215} \leq 0$ là chưa đủ căn cứ. Thật vậy, nếu $\sqrt{2x-1}=0$ thì giá trị của $\frac{x-9}{x-215}$ tùy ý thì (*) vẫn được thỏa mãn. Cũng được nhắc thêm: Trong giải toán, nhiều em vẫn thường áp dụng phép biến đổi không đúng sau:

$$f(x).g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải đúng. TXĐ: $D = \left\{ x : \frac{1}{2} \leq x \neq 215 \right\}$.

Với $\sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn). Với $x > \frac{1}{2}$ thì

(*) $\Leftrightarrow \frac{x-9}{x-215} \leq 0 \Leftrightarrow 9 \leq x < 215$ (thỏa mãn). Vậy

nghiệm của (*) là: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 9 \leq x < 215 \end{cases}$.

Nhận xét. Các bài gửi về đều phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau đưa ra có những phân tích sai lầm xác đáng:

Nam Định: Lâm Vũ Tuấn, 12 Anh 1; Trần Thị Kim Ngân, 12A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hà Nội:** Đình Văn Anh, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Hưng Yên:** Trần Phương Linh, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; Dương Hồng Sơn, 10A9; Nguyễn Thị Thanh Lan, 11A8; Triệu Ninh Ngân, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Thanh Hóa:** Vũ Hữu Tùng, 11A1, THPT Hoàng Hóa IV, Hoàng Hóa; Đặng Quang Anh, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn. **Nghe An:** Nguyễn Phùng Thái Cường, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa. **Vĩnh Long:** Trương Ngô Minh Bảo, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

KIHI VI



PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT
CÓ HAI ĐÁP ÁN ?

Trong giờ bài tập Toán của lớp 12A1, thầy giáo đưa ra bài toán: Giải phương trình

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3 \quad (1).$$

Sau một lúc suy nghĩ, bạn Bình xung phong lên bảng

giải như sau: ĐK: $\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (4-x)^3 > 0 \\ (x+6)^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$.

Với ĐK trên, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} ((x+2)^2)^{\frac{3}{2}} - 3 = \log_{\frac{1}{4}} [(4-x)^3 \cdot (x+6)^3]$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^3 - \log_{\frac{1}{4}} [(4-x)^3 \cdot (x+6)^3] = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{(4-x)(x+6)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x+2) = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}, x = -8 \text{ (loại)}.$$

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Sau khi bạn Bình giải xong thì bạn Phương đứng dậy xung phong lên bảng làm theo cách khác như sau:

ĐK: $\begin{cases} x \neq -2 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$. Với ĐK này, (1) tương đương với

$$3 \log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 3 \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3 \log_{\frac{1}{4}} (x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}} (4|x+2|) = \log_{\frac{1}{4}} [(4-x)(x+6)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 4 \\ 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ -6 < x < -2 \\ -4(x+2) = (4-x)(x+6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -4 \\ x^2 + 6x - 16 = 0 \\ -6 < x < -2 \\ x^2 - 2x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -4 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases} \\ -6 < x < -2 \\ \begin{cases} x = 1 + \sqrt{33} \\ x = 1 - \sqrt{33} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 - \sqrt{33} \end{cases}$$

Vậy PT (1) có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = 1 - \sqrt{33}$.

Theo các bạn thì bạn nào giải đúng? Vì sao?

NGUYỄN TRẦN HỮU
(GV THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Anh Tuấn – Một dấu hiệu nhận biết tia phân giác của một góc.

4 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2014 – 2015.

6 Giải trí Toán học

Phi Phi – Chuyển khay bánh.

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bình Định, năm học 2014 – 2015.

7 Hướng dẫn giải - Đề số 3.

9 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 4.

10 Chuẩn bị cho kỳ thi Trung học phổ thông Quốc gia

Trần Văn Đức – Một số bài toán tổ hợp xác suất.

12 Đoàn Quỳnh – Thi đấu Quốc tế của những nhà Toán học trẻ (ITYM).

14 Bạn đọc tìm tòi

Phạm Thị Liên – Về mối liên hệ đặc biệt của dãy số Fibonacci và số 11.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/462, ..., T12/462, L1/462, L2/462.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

27 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 3.

28 Lịch sử Toán học

Lê Quốc Hán – Tác phẩm Arithmetica, nguồn cảm hứng không bao giờ vơi cạn của các nhà số học.

31 Diễn đàn dạy học Toán

Nguyễn Văn Quốc Tuấn – Sử dụng phương pháp đánh giá để giải hệ phương trình.

35 Diễn đàn phương pháp giải toán

Lê Xuân Đại – Bài toán tìm hàng số tốt nhất trong bất đẳng thức.

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Lời giải đã trọn vẹn?

Nguyễn Trần Hữu – Phương trình Lôgarit có hai đáp án?

Ảnh Bìa 1: Các thầy, cô giáo và các em học sinh Trường THCS Giảng Võ, Hà Nội đoạt giải trong Kỳ thi IMSO (International Mathematics and Science Olympiad) (từ trái qua phải): Hàng 1- Môn Toán: Thầy Trịnh Hoài Dương, em Nguyễn Nhật Linh (HCV), em Trần Gia Bảo (HCB), em Phùng Nam Anh (HCB), em Bùi Phương Nam (HCV), em Phạm Gia Khánh (HCB), thầy Vi Mạnh Tường. Hàng 2- Môn Khoa học: Cô Đặng Thị Thủy Nga, em Phạm Quý Hưng (HCB), em Nguyễn Lâm Vũ (HCB), em Nguyễn Sơn Lâm (HCB), em Trần Hoàng Thy Uyên (HCB), em Trần Bảo Khuê (HCB), em Bùi An Bình (HCB), cô Hoàng Kim Uyên.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

<https://tieulun.hopto.org>



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN THCS

Để giúp cho học sinh THCS học tập tốt môn Toán, chuẩn bị cho kì thi vào lớp 10 THPT và THPT chuyên, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xuất bản bộ sách: "Các chuyên đề chọn lọc Toán THCS" gồm 8 cuốn:

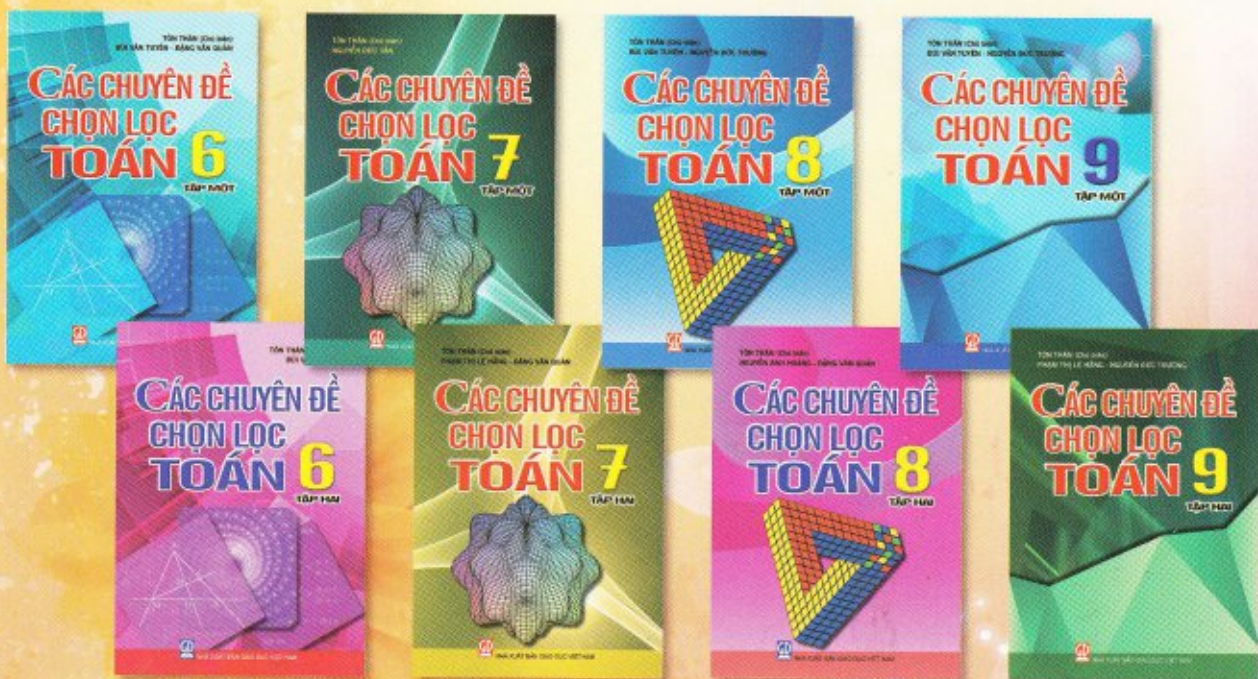
**Các chuyên đề chọn lọc Toán 6 (Tập 1, Tập 2),
Các chuyên đề chọn lọc Toán 7 (Tập 1, Tập 2),
Các chuyên đề chọn lọc Toán 8 (Tập 1, Tập 2),
Các chuyên đề chọn lọc Toán 9 (Tập 1, Tập 2).**

Mỗi cuốn sách đều có các chương tương ứng với các chương trong SGK Toán THCS. Mỗi chương gồm ba phần: Kiến thức cần nhớ, Một số ví dụ và Bài tập đề nghị. Phần Kiến thức cần nhớ đưa ra những kiến thức cơ bản và bổ sung những kiến thức cần thiết để học sinh có thể giải được các bài tập, các dạng toán trong chuyên đề. Phần Một số ví dụ đưa ra những ví dụ minh họa cho các dạng toán điển hình của chuyên đề. Ở đây có

những nhận xét, lưu ý, bình luận, ... về cách giải, về những kiến thức, những nội dung quan trọng mà học sinh cần lưu ý, ghi nhớ. Phần Bài tập đề nghị đưa ra những bài tập được phân loại theo các dạng toán của chuyên đề để học sinh tự làm. Qua những hướng dẫn cụ thể trong phần Hướng dẫn giải - Đáp số, học sinh sẽ nắm rõ hơn cách giải cho mỗi dạng toán, dần dần tự mình có thể làm được các bài toán tương tự.

Các tác giả của bộ sách là những thầy giáo, cô giáo đã có nhiều kinh nghiệm trong nghiên cứu, giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán các cấp, bồi dưỡng học sinh thi Violympic Toán. Chủ biên bộ sách là NGND Tôn Thân.

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng nhu cầu học tập ngày càng cao của đông đảo các em học sinh và là tài liệu tham khảo hữu ích cho việc giảng dạy của các thầy cô giáo.



Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Website bán hàng trực tuyến: www.sach24.vn Website: www.nxbgd.vn

<https://tieulun.hopto.org>



TRƯỜNG THPT YÊN MỸ, TỈNH HƯNG YÊN

50 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

Địa chỉ: xã Tân Lập, huyện Yên Mỹ, tỉnh Hưng Yên; Số điện thoại: 03213.961.906



ThS. Nguyễn Ngọc Luân

Bí thư chi bộ - Hiệu trưởng nhà trường



Tập thể giáo viên Trường THPT Yên Mỹ

Trường THPT Yên Mỹ được thành lập vào tháng 8 năm 1965, đến nay vừa tròn 50 năm tuổi. Trường được đầu tư xây dựng 36 phòng học kiên cố cao tầng, 3 phòng học Ngoại ngữ, 6 phòng Bộ môn với các trang thiết bị hiện đại. Khuôn viên trường xanh sạch và đẹp. Hiện nay Trường có 78 cán bộ, giáo viên, công nhân viên, trong đó có 12 Thạc sĩ, 66 Cử nhân. Ban giám hiệu và tập thể giáo viên nhà trường là những người giàu nhiệt tình, yêu nghề, có trình độ chuyên môn vững vàng, được các cấp lãnh đạo, chính quyền, nhân dân và học sinh yêu mến!

Một trong những niềm tự hào lớn nhất của nhà trường là các thế hệ học sinh sau khi tốt nghiệp, đã tiếp tục phấn đấu và trưởng thành. Nhiều trong số đó là những cán bộ cấp cao của Đảng, Nhà nước, Quân đội, lãnh đạo các Bộ, Ngành, Đoàn thể ở Trung ương và các địa phương. Họ là những nhà khoa học, những giáo sư, tiến sĩ, những cán bộ quản lý tài năng, những doanh nhân năng động và thành đạt, ..., họ chính là "nguyên khí quốc gia" mà trường THPT Yên Mỹ "dâng tặng" cho quê hương đất nước.

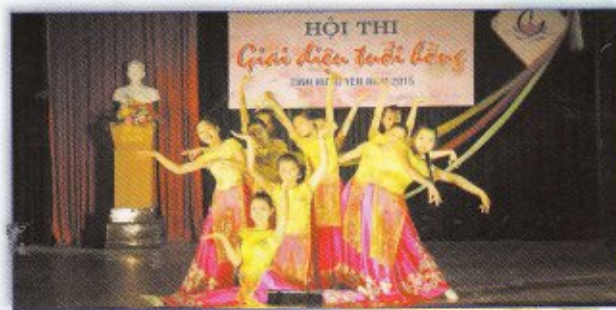
Trong những năm qua trường luôn tích cực tham gia các hoạt động chuyên môn và hoạt động phong trào do Sở GD&ĐT Hưng Yên, tỉnh - huyện đoàn tổ chức. Năm học 2014 - 2015 hai thầy cô giáo của trường tham gia Hội thi giáo viên thực hành thí nghiệm giỏi cấp tỉnh đều đạt giải Ba. Học sinh nhà trường tham dự kỳ thi học sinh giỏi khu vực Duyên hải và đồng bằng Bắc bộ đạt 4 giải (1 HCB và 3 giải khuyến khích). Đặc biệt trong năm học 2015 - 2016 có 18 học sinh nhà trường đạt giải trong kỳ thi HSG cấp tỉnh do Sở GD&ĐT Hưng Yên tổ chức với 2 giải Nhì, 10 giải Ba và 6 giải Khuyến khích.

Tỷ lệ học sinh khối 12 của nhà trường đỗ tốt nghiệp trong kỳ thi THPT Quốc gia 2015 là 98% và tỷ lệ học sinh có tổ hợp số điểm các môn xét tuyển Đại học đủ để vào Đại học là 55,44%; xếp thứ 9 trên 37 trường THPT toàn tỉnh.

Phát huy truyền thống 50 năm qua, trường THPT Yên Mỹ đang trên đà vươn lên phát triển để khẳng định mình xứng đáng với trường trung tâm. Thầy và trò nhà trường đang ra sức phấn đấu và chuẩn bị hành trang tiến tới kỷ niệm 55 năm ngày thành lập trường vào năm 2020.



Tập thể các Thầy Cô tổ Toán - Tin của nhà trường



Một tiết mục văn nghệ của trường THPT Yên Mỹ

ISSN: 0866-8035
Chi số: 12884
Mã số: 8BT12M5

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xi nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2015

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng

<https://medium.hoplo.org>