



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

10 2015
Số 460



HÃY ĐẶT MUA TC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ!

<https://tieuken.hopto.org>

RINH CODE NHẬN ƯU ĐÃI LỚN

MÁY TRỢ GIẢNG UNIZONE THƯƠNG HIỆU KOREA

Chương trình: Cắt phiếu code góc phải để nhận những ưu đãi lớn

Địa điểm đổi code: 132 Chùa Láng, Đống Đa, Hà Nội

Hotline: 0934.683.968-0462828288



UNIZONE 9580 F3



Giá: 6.500.000VND

- Kết nối không dây
- Công suất: 30W(max)
- Thời gian sử dụng: 20 giờ
- Sạc: 3 giờ
- Cổng line out
- Phù hợp lớp: 80-200hs
- Màn hình LCD
- Radio FM, ghi âm
- Hỗ trợ USB, SD card

UNIZONE 9288 F2



Giá: 4.200.000VND

- Công suất: 30W(max)
- Phù hợp lớp học 40-100hs
- Màn hình LCD
- Thời gian sử dụng: 20 giờ
- Sạc: 3h
- Công nghệ giảm hú
- Radio FM, ghi âm
- Hỗ trợ USB, SD card

UNIZONE 9088EMS F2



Giá: 2.300.000VND

- Công suất: 20w(max)
- Phù hợp lớp: 20-70hs
- Thời gian sử dụng: 20h
- Sạc: 4h
- Công nghệ giảm hú
- Radio FM, ghi âm
- Hỗ trợ USB, SD card

UNIZONE 9088



Giá: 1.500.000VND

- Công suất: 20w(max)
- Công nghệ giảm hú
- Thời gian sử dụng: 20h
- Sạc: 5h
- Phù hợp lớp: 20-70hs



CÔNG TY TNHH THƯƠNG MẠI GIẢI TRÍ MCRI0

132 Chùa Láng, Đống Đa, Hà Nội

Website: www.mcrio.vn

Code: MC+UZ

<https://hieuun.hopto.org>

HÃY ĐẶT MUA TC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

QUY TẮC "BIÊN"

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

Trong quá trình giải toán, ngoài việc nắm vững kiến thức cơ bản chúng ta còn phải biết vận dụng một số phương pháp giải toán đặc biệt. Ví dụ như phương pháp phản chứng, phương pháp quy nạp toán học, nguyên tắc Dirichlet, nguyên tắc cực hạn,... Ở bài viết này chúng tôi muốn trao đổi thêm với các bạn về nguyên tắc cực hạn. Tôi nói "thêm" là vì vấn đề này cũng đã có một số tác giả đề cập đến trong các số Tạp chí trước đây. Có người gọi đó là nguyên tắc "Khởi đầu cực trị", nguyên tắc cực hạn, còn theo tôi thì có lẽ gọi là quy tắc "biên" là hợp lý! Vì quy tắc này khuyên chúng ta khi giải một số các bài toán thì hãy nhìn các yếu tố rộng ra bên ngoài (biên), ví dụ đối với một đoạn thẳng ta nên quan tâm đến hai đầu mút của nó, đối với một tập hợp số ta nên quan tâm đến các giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất, ...

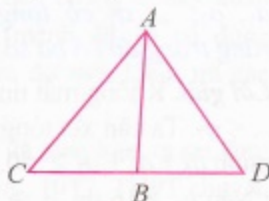
Sau đây ta sẽ xem quy tắc này được áp dụng như thế nào thông qua các thí dụ cụ thể.

Thí dụ 1. Trên đường thẳng cho một tập điểm M sao cho mỗi điểm của M là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm khác thuộc M . Chứng minh rằng M là một tập hợp vô hạn.

Lời giải. Giả sử đường thẳng đã cho đặt nằm ngang và giả sử M là tập hợp hữu hạn.

Khi đó trong số các điểm của M phải có một điểm nằm tận cùng bên trái (biên trái), gọi điểm đó là A . Rõ ràng A không thể là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm khác của M , suy ra $A \notin M$. Điều này trái với giả sử. Vậy M là tập hợp vô hạn.

Thí dụ 2. Trên mặt phẳng cho một tập điểm M sao cho mỗi điểm của M là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm khác thuộc M . Chứng minh rằng M là một tập hợp vô hạn.



Hình 1

Lời giải. (h.1) Giả sử M là tập hợp hữu hạn. Vì M là tập hữu hạn nên số các đoạn thẳng nối hai điểm bất

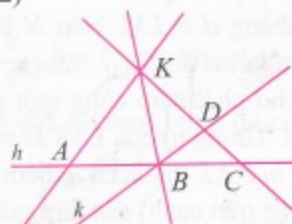
kì thuộc M cũng hữu hạn, do đó phải tồn tại một đoạn thẳng có độ dài lớn nhất, giả sử đó là đoạn AB . Theo đề bài thì B phải là trung điểm của đoạn thẳng CD nào đó ($C, D \in M$). Dễ chứng minh được: Nếu $AB \perp CD$ thì $AC = AD > AB$; nếu AB không vuông góc với CD thì $\widehat{ABC}$ tù hoặc $\widehat{ABD}$ tù, khi đó hoặc $AC > AB$, hoặc $AD > AB$, điều này trái với việc chọn đoạn AB . Vậy M là tập hợp vô hạn.

Thí dụ 3. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), trong đó không có hai đường nào song song, không có ba đường nào đồng quy, các đường thẳng này chia mặt phẳng thành những phần. Chứng minh rằng nếu lấy bất kì đường thẳng nào trong số đó thì bao giờ cũng có phần mặt phẳng kề với đường thẳng đó có hình tam giác.

Lời giải. Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1, d_2, \dots, d_n$. Xét đường thẳng d_1 , từ tất cả các giao điểm của các đường thẳng còn lại, ta chọn ra một giao điểm có khoảng cách đến d_1 nhỏ nhất. Giả sử đó là giao điểm của hai đường thẳng d_2 và d_3 . Dễ dàng chứng minh được hình tạo bởi ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 là tam giác thỏa mãn đề bài.

Thí dụ 4. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), hai đường thẳng bất kì trong n đường thẳng đó đều cắt nhau và qua mỗi giao điểm đó còn có thêm ít nhất một đường thẳng khác đi qua. Chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đó đồng quy.

Lời giải. (h.2)



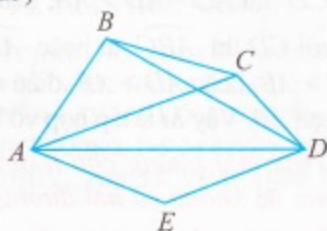
Hình 2

Giả sử n đường thẳng đó không đồng quy, nghĩa là chúng cắt nhau tại ít nhất 2 điểm, giả sử K là một

trong các điểm đó. Trong các đường thẳng không đi qua K , giả sử h là đường thẳng có khoảng cách đến K là nhỏ nhất. Giả sử qua K có ba đường thẳng cắt đường thẳng h tại A, B, C (theo thứ tự đó). Theo đề bài thì qua B còn có một đường thẳng nữa, giả sử đó là đường thẳng k , đường thẳng này cắt KC (hoặc KA) tại D . Rõ ràng D phải là điểm trong của KC (hoặc KA) và khi đó dễ thấy D gần đường thẳng h hơn K – điều này trái với việc chọn điểm K và đường thẳng h , từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 5. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì luôn tìm được ba đường chéo có độ dài là ba cạnh của một tam giác.

Lời giải. (h.3)

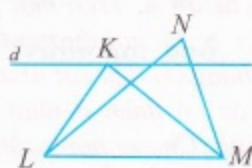


Hình 3

Giả sử AD là đường chéo lớn nhất của ngũ giác lồi $ABCDE$, ta sẽ chứng minh ba đường chéo AD, AC, BD tạo thành một tam giác. Nghĩa là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $AD < AC + BD$ là xong. Điều này hoàn toàn hiển nhiên dựa vào bất đẳng thức tam giác.

Thí dụ 6. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), biết rằng diện tích của tam giác bất kì với ba đỉnh trong n điểm đó không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả n điểm đó có thể chứa trong một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải. (h.4) Xét tất cả các tam giác có đỉnh tại n điểm đã cho, rõ ràng số tam giác đó là hữu hạn, do đó tồn tại một tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là tam giác KLM . Qua

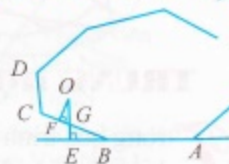


Hình 4

K vẽ đường thẳng $d \parallel LM$. Nếu N là điểm nằm khác phía L so với d thì $S_{NLM} > S_{KLM}$, do đó tất cả các điểm đã cho phải nằm cùng một phía đối với đường thẳng d . Tương tự qua L và M vẽ các đường thẳng $l \parallel KM, m \parallel KL$ thì tất cả n điểm đã cho phải nằm trong (hoặc trên cạnh) của tam giác tạo bởi ba đường thẳng d, l, m . Rõ ràng tam giác này có diện tích bằng bốn lần diện tích tam giác KLM . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 7. Giả sử O là một điểm nằm trong một đa giác lồi nào đó, từ O hạ các đường vuông góc xuống các cạnh của đa giác. Chứng minh rằng ít nhất có chân của một trong các đường vuông góc đó nằm trên một cạnh của đa giác (chứ không phải nằm trên phần kéo dài của nó).

Lời giải. (h.5) Trong các khoảng cách từ O đến các cạnh của đa giác, giả sử khoảng cách từ O đến cạnh AB là nhỏ nhất (đó là đường vuông góc OE). Ta sẽ chứng minh điểm E phải thuộc cạnh AB . Giả sử E nằm ngoài cạnh AB , khi đó OE phải cắt một trong các cạnh của đa giác tại G . Dễ thấy $OF < OG < OE$, nghĩa là điểm O gần cạnh BC hơn là cạnh AB . Điều này trái với việc chọn cạnh AB , từ đó ta có điều phải chứng minh.



Hình 5

Thí dụ 8. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm trong số các điểm đã cho mà không chứa trong nó điểm nào trong số các điểm còn lại.

Lời giải. Vì số khoảng cách giữa hai điểm trong n điểm đã cho là hữu hạn nên ta chọn hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất, giả sử hai điểm đó là A, B . Từ $n - 2$ điểm còn lại ta nối đến A và B . Trong số các góc tạo thành nhìn đoạn AB , ta chọn điểm mà từ đó nhìn đoạn AB dưới góc lớn nhất, giả sử đó là điểm C (đề ý rằng $\widehat{ACB} \leq 60^\circ$). Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là đường tròn phải tìm. Thật vậy:

- Nếu có một điểm D nằm trong đường tròn và cùng phía với C thì $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ (vô lí).
- Nếu D nằm trong đường tròn và khác phía với C thì $\widehat{ADB}$ là góc tù, do đó $AB > AD$ và $AB > BD$ (vô lí). Vậy ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 9. Cho bảy số nguyên dương khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_7$ có tổng bằng 100. Chứng minh rằng trong đó có ba số có tổng không nhỏ hơn 50.

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_7$. Ta cần xét tổng ba số lớn nhất và sẽ chứng minh $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Thật vậy:

- Nếu $a_5 \geq 16$ thì $a_6 \geq 17, a_7 \geq 18$, do đó $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51$.
- Nếu $a_5 \leq 15$ thì $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, khi đó ta cũng có $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$. Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 10. Trên một đường tròn cho n số tự nhiên, biết rằng mỗi số bằng trung bình cộng của hai số kề với nó. Chứng minh rằng tất cả các số trên đường tròn đều bằng nhau.

Lời giải. Tất nhiên trong n số tự nhiên đó phải có số nhỏ nhất, gọi số đó là m . Giả sử hai số kề với m là a và b , theo đề bài ta có $a + b = 2m$ (1). Vì $a \geq m, b \geq m$, nên nếu một trong hai bất đẳng thức đó thực sự lớn hơn thì sẽ có $a + b > 2m$, điều này trái với (1). Vậy phải có $a = b = m$.
Lí luận tương tự ta được tất cả các số trên đường tròn đều bằng m .

Thí dụ 11. Trên các ô của bàn cờ hình vuông $n \times n$ đặt những cái tháp với điều kiện: Nếu có một ô nào đó trống thì tổng số tháp đặt trên đường nằm ngang và đường thẳng đứng qua ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng trên bàn cờ đó có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ tháp.

Lời giải. Xét một trong n đường nằm ngang và n đường thẳng đứng mà trong đó có ít tháp nhất. Giả sử đó là đường nằm ngang và trên đó có k tháp.

• Nếu $k \geq \frac{n}{2}$ thì số tháp trên bàn cờ không ít hơn

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

• Nếu $k < \frac{n}{2}$, do trên đường nằm ngang đang xét có $n - k$ ô trống và mỗi cột đi qua các ô trống này có không ít hơn $n - k$ tháp (theo đề bài) nên tất cả các cột như vậy sẽ có không ít hơn $(n - k)^2$ tháp. Còn lại k cột, mỗi cột có không ít hơn k tháp. Do đó tất cả số tháp có trên bàn cờ không ít hơn $(n - k)^2 + k^2$. Ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$(n - k)^2 + k^2 \geq \frac{n^2}{2}.$$

Rõ ràng BĐT này luôn đúng vì nó tương đương với bất đẳng thức $2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq 0$.

– Nếu n là số chẵn thì ta có thể đặt các tháp hoàn toàn trong các ô đen hoặc các ô trắng.

– Nếu n là số lẻ thì ta sẽ đặt được $\frac{n^2 + 1}{2}$ tháp

bằng cách: Một tháp đặt ở một trong các góc, các tháp còn lại đặt ở trong các ô cùng màu.

Thí dụ 12. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z, u thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$ (1).

Lời giải. Giả sử tồn tại bốn số x, y, z, u thỏa mãn (1). Ta xét bộ bốn số như vậy sao cho $x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất. Giả sử bốn số đó là a, b, c, d . Từ đẳng thức $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ suy ra $a^2 + b^2 : 3 \Rightarrow a : 3$ và $b : 3$.

Đặt $a = 3m, b = 3n$ ($m, n \in \mathbb{Z}^+$), thay vào đẳng thức trên ta được $9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2)$ hay $c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2)$, nghĩa là ta lại tìm được bộ bốn số c, d, m, n thỏa mãn (1) đồng thời $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$. Điều này trái với việc chọn các số a, b, c, d . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

✪ Các bạn thân mến! Trên đây là một số thí dụ minh họa cho phương pháp vận dụng nguyên tắc cực hạn vào việc giải một số bài toán mà nếu không có phương pháp này chắc chắn chúng ta sẽ gặp khó khăn. Cuối cùng mong các bạn áp dụng phương pháp này để luyện tập giải các bài toán sau, chúc các bạn thành công:

1. Cho M là tập hợp các số thực khác nhau, biết rằng mỗi số của M là trung bình cộng của hai số nào đó cũng thuộc M . Chứng minh rằng M là tập hợp vô hạn.

2. Trên mặt phẳng vô hạn có kẻ ô vuông người ta viết các số tự nhiên sao cho mỗi số là trung bình cộng của bốn số lân cận (số trên, số dưới, số trái, số phải). Chứng minh rằng tất cả các số trên mặt phẳng đều bằng nhau.

3. Có $2n + 1$ quả cân, khối lượng mỗi quả là một số nguyên. Biết rằng từ $2n$ quả tùy ý bao giờ cũng có thể chia được thành hai nhóm có khối lượng bằng nhau, mỗi nhóm có n quả. Chứng minh rằng tất cả các quả cân đó có khối lượng bằng nhau.

4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

5. Chứng minh rằng trong một lục giác lồi luôn tồn tại một đỉnh mà ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

6. Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geq 3$), biết rằng mỗi đường thẳng đi qua hai điểm trong số đó còn đi qua ít nhất một điểm trong số $n - 2$ điểm còn lại. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

7. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, trong đó có n điểm xanh và n điểm đỏ. Chứng minh rằng có thể nối mỗi điểm xanh với một điểm đỏ bằng một đoạn thẳng sao cho trong n đoạn thẳng nhận được không có hai đoạn nào giao nhau.

8. Chứng minh rằng nếu một đa giác có nhiều trục đối xứng thì các trục đối xứng đó phải đồng quy.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN

Trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 459, tháng 9 năm 2015)

VÒNG I

Câu 1.

1. a) $m = 1$, PT có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$.

b) $\Delta' = -m + 1$. PT có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq 1$. Khi đó: $x_1 + x_2 = 2m - 4$, $x_1 x_2 = m^2 - 3m + 3$.

Vậy $3x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 5x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5(m^2 - 3m + 3) - (2m - 4)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (\text{loại}) \\ m = -3 & (\text{nhận}) \end{cases}$

2. a) $A = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

b) $\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow 4x - 1 - 3\sqrt{x} = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(4\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. a) Bạn đọc tự làm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và

(D) là: $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4m^2 = 0$ (*).

$\Delta' = 1 + 4m^2 > 0$ với mọi $m \Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow (P), (D)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m . Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*). Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 x_2 = -4m^2$. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}x_1^2, y_2 = \frac{1}{4}x_2^2$. Do đó: $y_1 - y_2 - x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 9$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x_1^2 + x_2^2) = 9$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}[(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2] = 9 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(4 + 8m^2) = 9$

$\Leftrightarrow 5 + 10m^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 3. a) ĐK: $\frac{y+2}{2x-1} > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}$ ($t > 0$) thì $\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} = \frac{1}{t}$. Do đó

PT $\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} = 2$ trở thành $t + \frac{1}{t} = 2$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $\frac{y+2}{2x-1} = 1$. Hệ PT đã cho

trở thành $\begin{cases} x+y=-6 \\ \frac{y+2}{2x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 \\ 2x-1=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases}$

(thỏa mãn ĐK).

b) Gọi quãng đường AB dài là x (km), thời gian từ lúc xe tải xuất phát đến lúc xe khách xuất phát là y (giờ) (ĐK: $x > 0, y > 0$).

Đổi 16 phút = $\frac{4}{15}$ giờ. Thời gian xe tải đi từ A

đến B là $\frac{x}{40}$ (h), thời gian xe khách đi từ A đến

B với vận tốc 50 km/h là $\frac{x}{50}$ (h), ta có phương

trình $\frac{x}{40} = y + \frac{x}{50}$ (1). Thời gian thực tế xe

khách đi: $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{60}$ (h), ta có phương trình

$\frac{x}{40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{60} + \frac{4}{15} + y \Leftrightarrow \frac{x}{40} = y + \frac{11x}{600} + \frac{4}{15}$ (2).

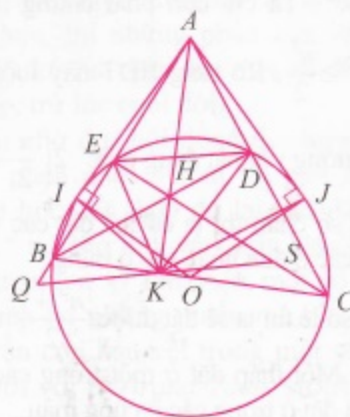
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$\begin{cases} \frac{x}{40} = y + \frac{x}{50} \\ \frac{x}{40} = y + \frac{11x}{600} + \frac{4}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{600} = \frac{4}{15} \\ \frac{x}{40} = y + \frac{x}{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 0,8 \end{cases}$

(thỏa mãn).

Vậy quãng đường AB dài là 160 km.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$, $\widehat{BDC} = 90^\circ$,

ΔABC có BD, CE là hai đường cao cắt nhau tại H
 $\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có: $\widehat{BEH} + \widehat{BKH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BEHK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{EKH}$. Mặt khác $\widehat{BKA} = \widehat{BDA} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{AKD}$. Do đó $\widehat{EKH} = \widehat{AKD} (= \widehat{EBH})$ hay KA là tia phân giác của góc EKD .

b) AI, AJ là các tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow AI \perp OI, AJ \perp OJ$ và $AI = AJ$. Ta có $\widehat{AIO} = \widehat{AJO} = \widehat{AKO} = 90^\circ \Rightarrow I, J, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AO \Rightarrow I, J, K, A, O$ cùng thuộc một đường tròn. Xét đường tròn đường kính AO có $AI = AJ \Rightarrow \widehat{AI} = \widehat{AJ} \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AKJ}$. Mà $\widehat{AKE} = \widehat{AKD}$ (chứng minh trên) vậy $\widehat{IKE} = \widehat{DKJ}$.

c) $\Delta AEH \sim \Delta AKB (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AB}$

$\Rightarrow AE \cdot AB = AH \cdot AK$. Xét ΔAIE và ΔABI có $\widehat{IAE}$ (chung), $\widehat{AIE} = \widehat{ABI} \Rightarrow \Delta AIE \sim \Delta ABI (g.g)$
 $\Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AE}{AI} \Rightarrow AI^2 = AE \cdot AB$. Ta có

$$AH \cdot AK = AI^2 (= AE \cdot AB) \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AK} \Rightarrow$$

$\Delta AIH \sim \Delta AKI (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{AIK}$. Tương tự $\widehat{AHJ} = \widehat{AJK}$. Mà $\widehat{AIK} + \widehat{AJK} = 180^\circ$ (tứ giác $AIKJ$ nội tiếp), do đó $\widehat{AHI} + \widehat{AHJ} = 180^\circ$. Vậy ba điểm J, H, I thẳng hàng.

d) Chứng minh tương tự câu a) thì EC là tia phân giác góc KED . Ta có $\widehat{KSE} = \widehat{DEC}$ (so le trong), $\widehat{KSE} = \widehat{KES} (= \widehat{DEC}) \Rightarrow \Delta KES$ cân tại $K \Rightarrow KS = KE$. Mặt khác

$$\widehat{KQE} + \widehat{KSE} = \widehat{KEQ} + \widehat{KES} (= 90^\circ), \text{ do đó}$$

$\widehat{KQE} = \widehat{KEQ} \Rightarrow \Delta KQE$ cân tại $K \Rightarrow KQ = KE$.
 Vậy $KQ = KS (= KE)$.

VÒNG II

Câu 1. a) $(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1) = 2$

$$\Leftrightarrow (36x^2 + 15x + 1)(24x^2 + 10x + 1) = 2.$$

$$\text{Đặt } y = 24x^2 + 10x + 1 \Rightarrow 36x^2 + 15x + 1 = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}.$$

$$\text{PT đã cho trở thành: } \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)y = 2$$

$\Leftrightarrow 3y^2 - y - 4 = 0$. Giải PT này tìm được y , từ đó tìm được nghiệm x của PT đã cho là:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{24}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{24}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x\left(x + \frac{4}{y}\right) + \frac{1}{y^2} = 2 \\ x\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{y} = 2 \\ 2\left(x + \frac{1}{y}\right) + x \cdot \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{y}\right) = -4 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{y} - 2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{y} = 2 (*) \Rightarrow x \cdot \frac{1}{y} = -1.$$

$$\text{Ta có: } x(2-x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

• Với $x = 1 + \sqrt{2}$ thay vào (*) suy ra $y = -1 - \sqrt{2}$.

• Với $x = 1 - \sqrt{2}$ thay vào (*) suy ra $y = \sqrt{2} - 1$.

Thử lại, ta thấy $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ PT.

Câu 2. a) $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6xy + xy - 2y^2 + x - 2y = 7$$

$$\Leftrightarrow 3x(x - 2y) + y(x - 2y) + (x - 2y) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(3x + y + 1) = 7.$$

Do đó, ta có

$$\begin{array}{c|cccc} x-2y & 7 & 1 & -7 & -1 \\ \hline 3x+y+1 & 1 & 7 & -1 & -7 \end{array} (*)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có $x = 1$ và $y = -3$ thỏa mãn (*). Thử lại, ta thấy nghiệm nguyên của PT đã cho là $(1; -3)$.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2012^{4n} : 4; 2014^{4n} : 4$,
 $2013^{4n} = (2013^{4n} - 1^{4n}) + 1$ chia cho 4 dư 1 (vì $(2013^{4n} - 1^{4n}) : (2013 - 1) : 4$) và
 $2015^{4n} = [2015^{4n} - (-1)^{4n}] + 1$ chia cho 4 dư 1 (vì $[2015^{4n} - (-1)^{4n}] : [2015 - (-1)] : 4$). Do đó...

(Xem tiếp trang 26)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2015 - 2016 **TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH**

VÒNG I (120 phút)

Câu 1 (2 điểm). a) Giải phương trình

$$(x^2 - 9)\sqrt{2 - x} = x(x^2 - 9).$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 + 4y^2)^2 - 4(x^2 + 4y^2) = 5 \\ 3x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

Câu 2 (1,5 điểm). Cho phương trình

$$\frac{(x - 2m)(x + m - 3)}{x - 1} = 0 \quad (1).$$

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 = 14m^2 - 30m + 4$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Rút gọn $Q = \left(\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3 - \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} - \frac{36}{x - 9} \right) : \frac{\sqrt{x} - 5}{3\sqrt{x} - x}$

($x > 0, x \neq 9, x \neq 25$).

b) Tìm x để $Q < 0$.

Câu 4 (2 điểm). a) Cho một tam giác vuông. Nếu ta tăng độ dài mỗi cạnh góc vuông thêm 3 cm thì diện tích tăng thêm 33 cm²; nếu giảm độ dài một cạnh góc vuông đi 2 cm và tăng độ dài cạnh góc vuông

còn lại thêm 1 cm thì diện tích giảm đi 2 cm². Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác vuông.

b) Bạn An dự định trong khoảng thời gian từ ngày 1/3 đến ngày 30/4 sẽ giải mỗi ngày 3 bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thời gian, vào khoảng cuối tháng 3 (tháng 3 có 31 ngày) thì An bị bệnh, phải nghỉ giải toán nhiều ngày liên tiếp. Khi hồi phục, trong tuần đầu An chỉ giải được 16 bài; sau đó An cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 30/4 thì An cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi An phải nghỉ giải toán ít nhất bao nhiêu ngày?

Câu 5 (3 điểm). Hình bình hành $ABCD$ có tam giác ADC nhọn, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ADC cắt cạnh AB tại E ($E \neq A$), AC cắt DE tại I .

a) Chứng minh tam giác BCE đều và $IO \perp DC$.

b) Gọi K là trung điểm BD , KO cắt DC tại M . Chứng minh A, D, M, I cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tính tỷ số $\frac{OJ}{DE}$.

VÒNG II (150 phút)

Câu 1 (2 điểm). a) Giải phương trình

$$\sqrt{2x - 1} + \sqrt{1 - 2x^2} = 2\sqrt{x - x^2}.$$

b) Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b - \frac{1}{4}}. \text{ Chứng minh rằng } -1 \leq a < 0.$$

Câu 2 (2 điểm). a) Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 3 = 0$.

b) Cho m là số nguyên. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 4m = 0$ thì cũng tồn tại các số nguyên a', b', c' khác 0 sao cho $a' + b' + c' = 0$ và $a'b' + b'c' + c'a' + m = 0$.

c) Với k là số nguyên dương, chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca + 2^k = 0$.

Câu 3 (1 điểm). Giải sử phương trình

$2x^2 + 2ax + 1 - b = 0$ có 2 nghiệm nguyên (a, b là tham số). Chứng minh rằng $a^2 - b^2 + 2$ là số nguyên và không chia hết cho 3.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi

M là trung điểm của cạnh BC , E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , F là điểm đối xứng của E qua M .

a) Chứng minh rằng $EB^2 = EF \cdot EO$.

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC . Chứng minh các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (2 điểm). Để khuyến khích phong trào học tập, một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi, có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải. Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi, người ta nhận ra rằng với hai đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả hai đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất bốn lần.

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh) *Sưu tầm*



BÀI TOÁN

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số

LÊ NGÔ NHẬT HUY

(GV THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre)

Bài toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã được giới thiệu sơ qua từ sự khởi đầu của phép tính đạo hàm khi học ở chương trình lớp 11, tiếp sau đó ở lớp 12 chúng ta đã được học trọn vẹn về các thể loại của nó thông qua các công cụ khảo sát hàm số, trong bài viết này xin trình bày lại vấn đề trên, bằng một vài phương pháp cụ thể.

Cho hàm số: $y=f(x)$ (C) và điểm $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Khi đó tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M có phương trình (PT) là: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Thí dụ 1. Cho hàm số: $y = x^2 - 4x + 3$ (C). Viết PT tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

Lời giải. PT hoành độ giao điểm giữa (C) và trục hoành là $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có $y' = 2x - 4$.

• Tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1;0)$ có PT:

$$y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

• Tiếp tuyến với (C) tại điểm $N(3;0)$ có PT:

$$y - 0 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 6.$$

1. Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

Cho hàm số $y = f(x)$ (C). Viết PT tiếp tuyến với (C) có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp 1. (Tìm tiếp tuyến bằng cách tìm hoành độ tiếp điểm).

Bước 1. Giải PT $f'(x_0) = k$ để tìm hoành độ tiếp điểm x_0 .

Bước 2. Viết PT tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Phương pháp 2. (Dựa vào biểu diễn hình học)

Bước 1. Viết PT tiếp tuyến dưới dạng:

$y = g(x) = kx + b$ (T) trong đó k là hằng số đã biết và b là ẩn số phải tìm.

Bước 2. Lí luận (T) tiếp xúc (C) để tìm được b. Trong phương pháp 2 với điều kiện tiếp xúc ở đây là tồn tại giá trị x_0 thỏa mãn: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$

Đối với phương pháp 2 thì ta không tính trực tiếp hoành độ tiếp điểm mà ta chỉ xét trực tiếp PT tiếp tuyến thông qua điều kiện trên.

Tùy theo thể loại hàm số và trong từng hoàn cảnh cụ thể mà ta có thể dùng phương pháp thích hợp.

Thí dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng (d): $y = -3x + 11$. Viết PT tiếp tuyến với (C) và song song với (d).

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$, với $x \neq 1$.

Gọi tiếp tuyến cần tìm là (d'), vì $(d') \parallel (d)$ nên tồn tại giá trị x_0 thỏa mãn $k_d = k_{d'}$, có nghĩa:

$$y' = \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

hoặc $x_0 = 2$.

– Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$ nên PT (d') là: $y + 1 = -3(x - 0)$ hay $y = -3x - 1$.

– Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5$ nên PT (d') là: $y - 5 = -3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + 11$ (ta loại đường thẳng này do nó trùng với (d)).

Vậy PT tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3x - 1$.

Lưu ý. Bài toán viết PT tiếp tuyến (d') khi biết trước được PT một đường thẳng (d) có các trường hợp sau:

• $(d) \perp (d')$ thì hệ số góc $k_d \cdot k_{d'} = -1$.

• $(d) \parallel (d')$ thì hệ số góc $k_d = k_{d'}$.

Nhưng hệ số góc bằng nhau chưa hẳn hai đường thẳng song song với nhau (có thể trùng

nhau). Do đó sau khi giải chúng ta nên kiểm tra lại để loại đường thẳng trùng với đường thẳng của giả thiết, cụ thể trong thí dụ trên ta loại đường thẳng $y = -3x + 11$.

Thí dụ 3. Cho hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x + 1$. Viết PT tiếp tuyến (d') với (C) và song song với (d).

Lời giải. Tiếp tuyến (d') // (d) thì có PT dạng: $y = 2x + b$ ($b \neq 1$). (d') tiếp xúc (C) nên cần có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 2x + b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 2x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 - 2x) = (x - 1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 1 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3 \pm 2\sqrt{3}) \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) có } b &= \sqrt{x^2 - 2x} - 2x = \sqrt{\frac{1}{3}(3x^2 - 6x) - 2x} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} - 2\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -2 - \sqrt{3} \neq 1. \end{aligned}$$

Do đó PT tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2x - 2 - \sqrt{3}$.

2. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(\alpha; \beta)$ cho trước (hoặc phải tìm).

Phương pháp 1.

Bước 1. Tiếp tuyến với đồ thị tại $M(x_0, f(x_0))$ có PT dạng: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, do tiếp tuyến qua A nên: $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$ (*)

Bước 2. Giải (*) để tìm x_0 rồi suy ra phương trình tiếp tuyến.

Phương pháp 2.

Bước 1. Tiếp tuyến qua $A(\alpha; \beta)$ có PT: $y - \beta = k(x - \alpha)$ (T) trong đó k là hệ số góc cần phải tìm.

Bước 2. Lí luận (T) tiếp xúc (C) để tìm k, khi đó tìm được PT tiếp tuyến.

Thí dụ 4. Cho hàm số: $y = x^2 - 4x + 1$ (C). Viết PT tiếp tuyến (T) với (C) kẻ từ điểm $A(2; -6)$.

Lời giải. Tiếp tuyến (T) đi qua $A(2; -6)$ có PT: $y + 6 = k(x - 2) \Leftrightarrow y = kx - 2k - 6$. (T) tiếp xúc

$$\text{với (C) nên: } \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = kx - 2k - 6 & (1) \\ 2x - 4 = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có:

$$x^2 - 4x + 1 = (2x - 4)x - 2(2x - 4) - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

• Với $x = 2 + \sqrt{3}$ thì $k = 2(2 + \sqrt{3}) - 4 = 2\sqrt{3}$.

Tiếp tuyến cần tìm có PT là:

$$y = 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} - 6.$$

• Với $x = 2 - \sqrt{3}$ thì $k = 2(2 - \sqrt{3}) - 4 = -2\sqrt{3}$.

Tiếp tuyến cần tìm có PT là: $y = -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} - 6$

Vậy có hai tiếp tuyến là $y = -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} - 6$; $y = 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} - 6$.

Thí dụ 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2$ (C). và đường thẳng (d): $x = 1$. Tìm điểm A thuộc (d) sao cho từ A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Lời giải. Ta có $y' = 2x - 2$ và gọi $A(1; a) \in (d)$.

Tiếp tuyến với (C) tại $(x_0, f(x_0)) \in (C)$ có PT dạng: $y - (x_0^2 - 2x_0 + 2) = (2x_0 - 2)(x - x_0)$ (T).

Do (T) qua $A(1; a)$ nên:

$$\begin{aligned} a - (x_0^2 - 2x_0 + 2) &= (2x_0 - 2)(1 - x_0) = -2x_0^2 + 4x_0 - 2 \\ \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + a &= 0 & (*) \end{aligned}$$

Để có hai tiếp tuyến với (C) kẻ từ A và vuông góc với nhau thì (*) phải có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $y'(x_1)y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (2x_1 - 2)(2x_2 - 2) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Vậy điểm cần tìm là $A\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

Thí dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ (C). Tìm điểm A thuộc (C) sao cho từ A chỉ kẻ được duy nhất một tiếp tuyến với hàm số (C).

Phân tích tìm hướng giải. Ta đoán rằng bài toán có liên quan đến dáng điệu hàm số bậc ba, dễ thấy rằng trên hàm số hàm số bậc ba nó có một vị trí rất đặc biệt đó là vị trí điểm uốn. Bằng trực quan ta nhận ra tiếp tuyến xuất phát từ điểm uốn luôn kẻ được một tiếp tuyến duy nhất, công việc bây giờ là làm như thế nào để nhận định trên là đúng.

LTS. Bắt đầu từ số 460 này, Tòa soạn Tạp chí TH&TT khôi phục lại chuyên mục **Tiếng Anh qua các bài toán** nhằm giúp các bạn học sinh nắm thêm các từ vựng Tiếng Anh, qua đó có thể đọc hiểu các cuốn sách, các bài viết trên Tạp chí phổ thông trên thế giới về môn Toán. Tòa soạn nêu tên và tặng Tạp chí cho các bạn có bản dịch tốt và sẽ tổng kết khen thưởng vào cuối năm học.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 1

Problem. Let $A = \{1, 2, \dots, n\}$ and let $P(A)$ be the set of all subsets of A . How many elements does $P(A)$ have?

Solution. Let S be the set of all bit strings of length n . We construct an one-to-one correspondence between $P(A)$ and S as follows. For each $B = \{i_1, \dots, i_s\} \in P(A)$ where $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$, we assign B to the string $b_1 b_2 \dots b_n$ in which $b_i = 1$ if and only if $i \in B$. For example, in the case $n = 4, \emptyset \leftrightarrow 0000, \{1, 2, 4\} \leftrightarrow 1101, \dots$ It is not difficult to check that this map is actually a bijection from $P(A)$ to S . Therefore the number of elements in $P(A)$ is equal to the number of bit strings of length n which is 2^n .

TỪ VỰNG

set	: tập hợp
subset	: tập con
elements	: phần tử
bit	: một đơn vị thông tin cơ bản gồm 2 giá trị 1 hoặc 0 (đúng, sai)
string	: băng, dải
length	: độ dài
construct	: xây dựng (động từ)
one-to-one correspondence	: song ánh (danh từ)
as follows	: như sau
assign	: ấn định
check	: kiểm tra (động từ)
bijection	: song ánh (danh từ)

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Hạn gửi bài dịch: Muộn nhất là hai tháng sau khi đăng bài.

 **Lời giải.** Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 1$; $y'' = 6x - 6$.

Ta thấy (C) có điểm uốn $I(1;1)$. Dời hệ trục tọa độ Oxy về hệ trục tọa độ IXY qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}(1;1)$: $x = X + 1$; $y = Y + 1$.

Trong hệ IXY hàm số đã cho được viết lại:

$$Y + 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + (X + 1) + 2$$

hay $Y = X^3 - 2X$ (C), lúc đó $Y' = 3X^2 - 2$

Đặt $A(X = a; Y = a^3 - 2a) \in (C)$.

PT tiếp tuyến với (C) tại $(X_0, f(X_0)) \in (C)$ có

$$\text{dạng: } Y - (X_0^3 - 2X_0) = (3X_0^2 - 2)(X - X_0) \quad (T)$$

Tiếp tuyến đi qua A nên:

$$a^3 - 2a - (X_0^3 - 2X_0) = (3X_0^2 - 2)(a - X_0)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - X_0^3 - 2(a - X_0) = (3X_0^2 - 2)(a - X_0)$$

$$\Leftrightarrow (a - X_0)(2X_0^2 - aX_0 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X_0 = a \text{ hay } X_0 = -\frac{a}{2}.$$

Để từ A chỉ kẻ được một tiếp tuyến với hàm số

$$(C) \text{ thì phải có: } a = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow A \equiv I.$$

Vậy điểm $A(1; 1)$ là điểm cần tìm.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$ (C).

Chứng minh trên (C) không tồn tại hai điểm mà tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 - x + 8$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y = -x + 4$.

3. (Khối B - 2008). Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (C). Viết PT tiếp tuyến với (C) , biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

4. (Khối B - 2004). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C). Viết PT tiếp tuyến Δ với (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ (C). Viết PT tiếp tuyến với (C) , biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C) .

6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ (C). Tìm trên đường thẳng $(d): y = 2$ các điểm mà từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến đến hàm số.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Bài 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) PT $3x^2 - 6(m+1)x + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$. Điều kiện là

$$\begin{cases} (m+1)^2 - 3 > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 > 3 \\ 4(m+1)^2 - 12 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 > 3 \\ (m+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Bài 2. a) Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{2}(1-t)$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$.

$$t^2 + (\sqrt{2}(1-t))^2 = 1 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

(do $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$). Suy ra

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan \alpha = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}.$$

b) Tìm ra $z = 1 + \frac{1}{5}i \Rightarrow 2\bar{z} - z = 1 - \frac{3}{5}i$.

$$\text{Vậy } |2\bar{z} - z| = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Bài 3. ĐK: $2 < x < \frac{7}{2}$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_2(x-2)^2 = \log_2(7-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (do } 2 < x < \frac{7}{2}\text{)}.$$

Bài 4. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$. BPT đã cho tương đương

$$\text{với } 32x^4 - 16x^2 + 2 \geq 9x + 9\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}(4x^2 - 1)^2 \geq 2x + 2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}(4x^2 - 1)^2 \geq (\sqrt{2x-1} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(4x^2 - 1) \geq \sqrt{2x-1} + 1$$

$$\text{(do } x \geq \frac{1}{2} \text{ nên } 4x^2 - 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 5 - 3\sqrt{2x-1} \geq 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 8x^2 - 5 - 3\sqrt{2x-1}, x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right),$$

$$\text{có } f'(x) = 16x - \frac{3}{\sqrt{2x-1}}, f''(x) = 16 + \frac{3}{\sqrt{(2x-1)^3}} > 0.$$

Ta thấy $f'(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và có

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = -\infty, f'(1) = 13 > 0 \text{ nên tồn tại duy}$$

nhất số a sao cho $\frac{1}{2} < a < 1, f'(a) = 0$. Nhờ tính đồng biến của $f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > a$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < a$. Ta có: $f(1) = 0$ và bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$\frac{1}{2}$	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	-	0	+
$f(x)$	-3		0	$+\infty$

Từ đó $f(x) = 8x^2 - 5 - 3\sqrt{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy BPT đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài 5. Đặt $t = \cos x$, tính được

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - 2\cos 3x) \sin x dx = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 6. Tính được $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3}{8}$ (đvtt). Gọi H là trung điểm BC , kẻ $AK \perp SH$ tại $K, GI \perp SH$ tại I . Ta có $d(G, (SBC)) = IG$ và $\frac{IG}{AK} = \frac{HG}{HA} = \frac{1}{3}$. Xét tam giác vuông SAH có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{3a^2}$.

$$\text{Vậy } d(G, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Bài 7. Giả sử $C(a; a+2) \Rightarrow A(2-a; 6-a)$. Mà A thuộc đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ nên $a = 3$ 

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0; -1)$.

Câu 2 (1 điểm). a) Cho α là góc mà $\cot \alpha = 2$. Tính

$$P = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}.$$

- b) Trong mặt phẳng Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (3 - 4i)| = 1$.

Câu 3 (0,5 điểm). Giải phương trình

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2 4x.$$

Câu 4 (1 điểm). Cho $0 < x \leq y$. Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta có

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} + \frac{a^2 - y^2}{a^2 + y^2} \geq \frac{2(x-y)}{x+y}.$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân: $I = \int_0^2 (x-2) \sqrt{\frac{x}{4-x}} dx$.

Câu 6 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

$\Rightarrow A(-1; 3), C(3; 5)$. Các điểm B, D là giao điểm của đường tròn đường kính AC với đường trung trực của AC . Từ đó tìm được $B(0; 6), D(2; 2)$ hoặc $B(2; 2), D(0; 6)$.

Bài 8. PT mặt cầu là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$ tiếp điểm $M\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Bài 9. Lập số tự nhiên có 4 chữ số đôi một phân biệt $abcd$ từ các chữ số 0, 1, 4, 6. Có tất cả $3.3.2.1 = 18$ số như vậy. Ta có $n(\Omega) = 18$. Số $\overline{abcd}:4 \Leftrightarrow \overline{cd}:4$, tức là $\overline{cd} \in \{04, 40, 60, 16, 64\}$.

Trong Ω , số các số tận cùng 04 hoặc 40 hoặc 60 là $3.(2.1) = 6$, số các số tận cùng là 16 hoặc 64 là $2.(1.1) = 2$. Gọi A là biến cố cần tính xác suất thì $n(\overline{A}) = 6 + 2 = 8$. Vậy $P(A) = 1 - \frac{8}{18} = \frac{5}{9}$.

Bài 10. Ta có $x^{18} + y^{18} + z^{18} \geq \frac{9}{\frac{1}{x^{18}} + \frac{1}{y^{18}} + \frac{1}{z^{18}}} \geq 3$.

Đẳng thức $x^{18} + y^{18} + z^{18} = 3$ xảy ra khi

Câu 7 (1 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại $A(1; 2)$, cạnh BC có phương trình $y + 3 = 0$ và điểm $D(4; 1)$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn BD, CD . Tìm tọa độ của B, C , biết đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua điểm $M(2; -1 + \sqrt{6})$.

Câu 8 (1 điểm). Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và các đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}, \quad d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}.$$

Tìm điểm M thuộc d_1 , N thuộc d_2 sao cho MN song song với (P) và đường thẳng MN cách (P) một khoảng bằng 2.

Câu 9 (0,5 điểm). Giải bóng đá nữ vô địch Đông Nam Á năm 2015 được tổ chức tại thành phố Hồ Chí Minh có 8 đội bóng tham dự, trong đó có hai đội Việt Nam và Thái Lan. Các đội bóng được chia ngẫu nhiên thành 2 bảng có số đội bóng bằng nhau. Tính xác suất sao cho hai đội Việt Nam và Thái Lan nằm ở hai bảng khác nhau.

Câu 10 (1 điểm). Cho a là số thực dương. Giải và biện luận phương trình sau $\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1 - \sqrt{x^2 - 1}} = a$.

KIỀU ĐÌNH NINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

$$\begin{cases} x^{18} = y^{18} = z^{18} \\ \frac{1}{x^{18}} + \frac{1}{y^{18}} + \frac{1}{z^{18}} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1. \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

Từ BĐT $(x^{1997} - y^{1997})(x^{18} - y^{18}) \geq 0$ ta có

$$x^{2015} + y^{2015} \geq x^{1997} y^{18} + x^{18} y^{1997}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^{2015} + y^{2015}) \geq (x^{1997} + y^{1997})(x^{18} + y^{18})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{2015} + y^{2015}}{x^{1997} + y^{1997}} \geq \frac{x^{18} + y^{18}}{2}, \text{ đẳng thức xảy ra khi}$$

$$x = y. \text{ Tương tự có } \frac{y^{2015} + z^{2015}}{y^{1997} + z^{1997}} \geq \frac{y^{18} + z^{18}}{2},$$

$$\frac{z^{2015} + x^{2015}}{z^{1997} + x^{1997}} \geq \frac{z^{18} + x^{18}}{2}. \text{ Vậy}$$

$$F = \frac{x^{2015} + y^{2015}}{x^{1997} + y^{1997}} + \frac{y^{2015} + z^{2015}}{y^{1997} + z^{1997}} + \frac{z^{2015} + x^{2015}}{z^{1997} + x^{1997}} \geq x^{18} + y^{18} + z^{18} \geq 3.$$

$F = 3$ đạt được khi $x = y = z = 1$. Vậy $\min F = 3$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

GIẢI TOÁN VỚI MÁY TÍNH

BÀI GIẢI ĐỀ THI



GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH KHOA HỌC

HÀ NỘI, 2014 - 2015

HUỖNH KIM DƯỠC (Sở GD - ĐT Hà Nội)
ĐINH HỮU LÂM (GV THPT chuyên Nguyễn Huệ)
TẠ DUY PHƯỢNG (Viện Toán Học)

Khác với các năm trước, đề thi năm nay gồm 3 bài, tổng là 30 điểm. Mỗi bài gồm 5 câu, trong đó *Bài I* (10 điểm) là bài thi dạng trắc nghiệm nhiều lựa chọn, mỗi câu 2 điểm; *Bài II* (5 điểm) là bài thi trắc nghiệm dạng đúng-sai, mỗi câu 1 điểm; *Bài III* (15 điểm) là bài thi trắc nghiệm dạng điền đáp số (kèm theo trình bày vấn đề lời giải), mỗi câu 3 điểm. Thời gian làm bài là 60 phút. Dưới đây chúng tôi giới thiệu lời giải đề thi của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội 2015 (Trung học phổ thông). Bài giải được trình bày trên Casio fx-570 Vn PLUS, là thế hệ máy mới nhất hiện nay, bạn đọc có thể dễ dàng giải tương tự trên các máy khác.

Bài 1 (10 điểm). Thí sinh khoanh tròn chữ cái trước đáp án đúng.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{14x+15}$ và

$g(x) = \log_3 x + 2^x$. Giá trị của $f(g(2))$ là:

A. 0,8392; B. -0,8390; C. -0,8389; D. 0,8393.

Lời giải. Tính đạo hàm của hàm số

$g(x) = \log_3 x + 2^x = \frac{\ln x}{\ln 3} + 2^x$ tại $x = 2$ và gửi vào

ô nhớ **A**:

SHIFT **[d/dx]** **[ln]** **ALPHA** **X** **)** **∇** **ln** **3** **)**

) **+** **2** **^** **ALPHA** **X** **)** **)** **2** **=** (3.227708336)

SHIFT **STO** **A**

Khai báo biểu thức $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{14x+15}$:

cos **ALPHA** **A** **)** **+** **[√]** **ALPHA** **A**

∧ **4** **)** **+** **1** **)** **-** **1** **)** **14** **ALPHA** **A** **+** **15**

Bấm phím **=** được đáp số: -0.839020511

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2015}} + x^2 + x$ trên đoạn $[-1; 3]$ là:

A. -0,0223; B. 12,2000; C. -2,1114; D. -0,2059.

Lời giải. Ta có: $f'(x) = \frac{4030-3x}{(x^2+2015)^{\frac{3}{2}}} + 2x+1$.

Giải phương trình $f'(x) = 0$ trên máy như sau:

Khai báo $f'(x)$: **[0]** **4030** **-** **3** **ALPHA** **X** **)**

(**ALPHA** **X** **x^2** **+** **2015** **)** **^** **[0]** **3** **>** **2** **>**

> **>** **+** **2** **ALPHA** **X** **+** **1**

Giải phương trình $f'(x) = 0$ bằng cách bấm

phím: **SHIFT** **SOLVER**

Máy hỏi: X? Khai báo giá trị ban đầu: **0** **=**

Gửi kết quả (-0.5222814326) vào ô **A**:

SHIFT **STO** **A**

Vì $f'(-1) \approx -0,9554 < 0$ và $f'(0) > 0$ nên

$x_0 \approx -0,5222814326$ là điểm cực tiểu của hàm số

đã cho. Tính giá trị của hàm số tại điểm x_0 bằng

cách khai báo $f(x)$:

[0] **2** **ALPHA** **A** **+** **3** **>** **√** **ALPHA** **A** **x^2**

+ **2015** **>** **>** **+** **ALPHA** **A** **x^2** **+** **ALPHA**

A **=** (-0,2059446342)

Đáp số đúng là D.

Câu 3. Tổng $\frac{4}{3} + \frac{16}{15} + \frac{36}{35} + \dots + \frac{2500}{2499}$ có giá trị là

A. $\frac{1300}{51}$; B. $\frac{25}{51}$; C. $\frac{1274}{51}$; D. $\frac{1249}{51}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} + \frac{16}{15} + \frac{36}{35} + \dots + \frac{2500}{2499} &= \sum_{n=1}^{25} \frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1} = \sum_{n=1}^{25} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \\ &= \sum_{n=1}^{25} \left(\frac{4n^2 - 1}{4n^2 - 1} + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{25} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) \\ &= 25 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \\ &= 25 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{51} \right) = 25 + \frac{1}{2} \times \frac{50}{51} = 25 + \frac{25}{51} = \frac{1300}{51}. \end{aligned}$$

Cách 2. Sử dụng phím $\sum$ để tính $\sum_{n=1}^{25} \frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1}$: ??

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sum} \boxed{\frac{\circ}{\circ}} \boxed{(\boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{X} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{)} \boxed{(\boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{X} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{25} \boxed{=}$ $\left(\frac{1300}{51} \right)$.

Câu 4. Chữ số thập phân thứ 2015 sau dấu phẩy của phép chia 1357 cho 19 là:

A. 3; B. 8; C. 6; D. 7.

Lời giải. $\frac{1357}{19}$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn

chu kì 18: $\frac{1357}{19} \approx 71, (421052631578947368)$.

Thật vậy, chia 1357 cho 19 ta được:

$$\frac{1357}{19} = 71 + \frac{8}{19}. \text{ Chia 8 cho 19 ta được:}$$

$$\frac{8}{19} \approx 0,421052631. \text{ Như vậy,}$$

$$8 = 19 \times 0,421052631 + 0,000000011$$

$$\text{hay } \frac{1357}{19} = 71,421052631 + \frac{11}{19} \times 10^{-9}.$$

Lại chia 11 chia cho 19 ta lại được:

$$\frac{1357}{19} = 71,421052631578947368 + \frac{8}{19} \times 10^{-19}.$$

Tiếp tục chia 8 cho 19 ta được chu kì tiếp theo.

Vì $2015 = 18 \times 111 + 17$ nên chữ số thứ 2015 sau dấu phẩy là chữ số thứ 17 trong chu kì, tức là chữ số 6.

Câu 5. Trong hình chữ nhật ABCD có điểm E thỏa mãn AE = 6; BE = 7; CE = 8. Khi đó độ dài đoạn thẳng DE là:

A. 4,5826; B. 7,1414; C. 8,7750; D. 10,3441.

Lời giải. Từ Hình vẽ ta có:

$$\begin{aligned} ED^2 &= ME^2 + MD^2 \\ &= AE^2 - AM^2 + NC^2 \\ &= AE^2 - AM^2 + CE^2 - EN^2 \\ &= AE^2 + CE^2 - (BN^2 + EN^2) \\ &= AE^2 + CE^2 - BE^2 = 6^2 + 8^2 - 7^2 = 51. \end{aligned}$$



Vậy $ED = \sqrt{51} \approx 7,1414$.

Bài II (5 điểm). Thí sinh đánh dấu X vào ô đúng hoặc sai trong các câu sau.

Câu 1. Với mọi đa thức $P(x)$ có hệ số là số nguyên ta có $P(2015) - P(-996)$ không phải là số nguyên tố.

Đúng ☐

Sai ☐

Lời giải. Khẳng định trên là sai. Thật vậy, chọn $P(x) = x$. Khi ấy

$$P(2015) - P(-996) = 2015 - (-996) = 3011$$

là số nguyên tố.

Câu 2. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là $4\sqrt{3}\pi$.

Đúng ☐

Sai ☐

Lời giải. Đáp số là sai. Thật vậy, gọi O là tâm lập phương (cũng là tâm khối cầu ngoại tiếp lập phương) có cạnh bằng a. Tâm của mặt đáy ABCD là H. Khi ấy bán kính R của khối cầu bằng OA và

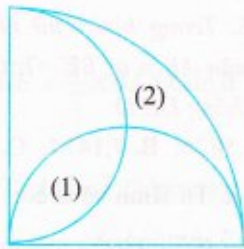
$$R^2 = OA^2 = OH^2 + HA^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Suy ra $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối cầu bằng

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ khi } a = 1.$$

Câu 3.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hình (1), hình (2). Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = 1$.

Đúng ☐Sai ☐

Lời giải. Gọi R là bán kính hình tròn lớn, $r = \frac{R}{2}$ là bán kính hình tròn nhỏ. Khi ấy diện tích S của một phần tư hình tròn lớn là $S = \frac{1}{4}\pi R^2$. Diện tích của một nửa hình tròn nhỏ là:

$$S' = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8} = \frac{S}{2}. \text{ Suy ra}$$

$$S = (S' - S_1) + S_1 + (S' - S_1) + S_2 \\ = 2S' - S_1 + S_2 = S - S_1 + S_2,$$

$$\text{tức là } S_1 = S_2 \text{ hay } \frac{S_1}{S_2} = 1.$$

Câu 4. Phương trình $2^x - x^3 + \sin x - 3 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Đúng ☐Sai ☐

Lời giải. Vì $f(x) = 2^x - x^3 + \sin x - 3$ là hàm liên tục và $f(-2) \approx 5,21$; $f(0) = -2$; $f(10) \approx 21,17$ nên phương trình ít nhất hai nghiệm trong các khoảng $x_1 \in (-2; 0)$ và $x_2 \in (0; 10)$.

Nhận xét. Vẽ đồ thị nhờ phần mềm Maple, hoặc Graph, ta có thể khẳng định phương trình có đúng hai nghiệm.

Câu 5. Số $2^{3^{2015}}$ có chữ số tận cùng là 8.

Đúng ☐Sai ☐

Lời giải.

Vì $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ và $2015 = 4 \times 503 + 3$ nên $3^{2015} = (3^4)^{503} \times 3^3 \equiv 3^3 \pmod{10}$.

Vậy $2^{3^{2015}} \equiv 2^{3^3} = 134217728$ có chữ số tận cùng bằng 8.

Bài III (15 điểm). Thí sinh trình bày lời giải ngắn gọn và ghi kết quả.

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị là A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải. Hoành độ x_A, x_B của hai điểm cực trị là nghiệm của phương trình $y' = 3x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\text{Suy ra: } (x_A - x_B)^2 = (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B \\ = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4(-1) = \frac{40}{9}.$$

Do đó

$$y_A - y_B = (x_A^3 - x_B^3) - (x_A^2 - x_B^2) - 3(x_A - x_B) \\ = (x_A - x_B) \left[(x_A^2 + x_A x_B + x_B^2) - (x_A + x_B) - 3 \right] \\ = (x_A - x_B) \left[(x_A + x_B)^2 - x_A x_B - (x_A + x_B) - 3 \right] \\ = (x_A - x_B) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - (-1) - \frac{2}{3} - 3 \right] = -\frac{20}{9}(x_A - x_B).$$

$$\text{Suy ra } AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \\ = (x_A - x_B)^2 \left(1 + \frac{400}{81} \right) = \frac{40}{9} \cdot \frac{481}{81} = \frac{4 \times 4810}{27^2}.$$

$$\text{Vậy độ dài } AB \text{ bằng: } AB = \frac{2}{27} \sqrt{4810} \approx 5,1373.$$

Cách 2. Tính được

$$x_{A,B} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}; y_{A,B} = \frac{25 \mp 29\sqrt{10}}{27}.$$

Thay vào công thức

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ta cũng đi đến đáp số trên.

Câu 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = y^3 - 3y^2 + 4y; \\ 3^{y-1} = y + x + 4 + \log_3(2+x). \end{cases}$$

Ta có: $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = y^3 - 3y^2 + 4y$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y-1)^3 + (y-1). ??$$

Vì $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến nên

$$f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2.$$

Suy ra: $x+1 = y-1 \Leftrightarrow y = x+2$. Thay vào

$$\text{phương trình } 3^{y-1} = y + x + 4 + \log_3(2+x)$$

$$\text{ta được } 3^{x+1} - 2x - 6 - \log_3(2+x) = 0.$$

Phương trình này có nghiệm hiển nhiên $x = 1$.

Để tìm nghiệm còn lại ta sử dụng phím

[SOLVER] như sau: Khai báo phương trình

$$3 \wedge [\text{ALPHA}] [\text{X}] + 1 > -2 [\text{ALPHA}] [\text{X}] - 6$$

$$- \left[\frac{\circ}{\circ} \right] [\ln] 2 + [\text{ALPHA}] [\text{X}] > [\ln] 3$$

Yêu cầu máy giải phương trình:

[SHIFT] [SOLVER] Máy hỏi: X=? Khai báo:

- 2 **[=]** Kết quả: -1,872130575

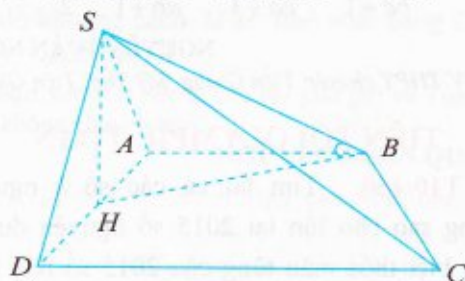
Vậy ta có hai cặp nghiệm: $x_1 = 1; y_1 = 3$ và $x_2 \approx -1,8721; y_2 \approx 0,1279$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Mặt bên SAD là tam giác đều cạnh bằng 2 và nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° , $CD = 4$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải. Trong tam giác SAD kẻ $SH \perp AD$.

Do hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nên $SH \perp (ABCD)$. Vì SH là chiều cao của tam giác đều cạnh bằng $AD = a = 2$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên SBH chính là góc giữa SB với mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra

$$HB = SH \cdot \cot SBH = SH \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$



Vậy $AB = \sqrt{HB^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. Diện tích hình thang $ABCD$ bằng:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2\sqrt{2} + 4)$$

$$= 2\sqrt{2} + 4.$$

Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng:

??????

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{2} + 4) \approx 3,9424.$$

Câu 4. Tính tổng các ước nguyên tố của số $2015^3 + 1859^3$.

Lời giải. Phân tích 2015^3 và 1859^3 ra thừa số nguyên tố nhờ phím **[FACT]** trên Casio fx-570VN PLUS:

$$2015 \wedge 3 = (8181353375) [\text{SHIFT}] [\text{FACT}]$$

$$(5^3 \cdot 13^3 \cdot 31^3) \quad \text{và} \quad 1859 \wedge 3 = (6424482779)$$

$$[\text{SHIFT}] [\text{FACT}] (11^3 \cdot 13^6).$$

$$2015^3 + 1859^3 = 13^3 (5^3 \cdot 31^3 + 11^3 \cdot 13^3)$$

$$= 13^3 \cdot 6648082 = 13^3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 149 \cdot 3187.$$

Vậy tổng các ước của nguyên tố của $2015^3 + 1859^3$ là: $13 + 2 + 7 + 149 + 3187 = 3358$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$; $u_{n+1} = u_n + (n+1)!$ với mọi $n > 1$. Tìm số tự nhiên n lớn nhất để u_n là số chính phương.

Lời giải. Ta có:

$$u_1 = 1 = 1^2; u_2 = u_1 + 2! = 1 + 2! = 3;$$

$$u_3 = u_2 + 3! = 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2;$$

$$u_4 = u_3 + 4! = 1! + 2! + 3! + 4! = 33; \dots$$

$$u_n = u_{n-1} + n! = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

Với $k > 4$ thì $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots k$ là số chẵn chục. Chứng tỏ

$u_n = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + n! = 33 + 5! + \dots + n!$ là số có tận cùng bằng 3, do đó không thể là số chính phương. Vậy chỉ có duy nhất một giá trị $n = 3$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Kết luận. Về cơ bản, nội dung đề thi không khác các năm trước. Theo qui chế mới của kỳ thi *Giải toán trên máy tính*, chỉ có ba bài trắc nghiệm và được làm, được chấm trực tiếp trên máy tính. Bài thi Hà Nội 2015 được chấm trực tiếp. Như vậy, chỉ có cách chấm thi là khác, còn nội dung đề thi không khác trước (vẫn là các kiến thức cơ bản của toán phổ thông kết hợp với máy tính để giải ra đáp số).



CÁC LỚP THCS

Bài T1/460 (Lớp 6). Cho a là một số tự nhiên gồm các chữ số khác nhau và b là số gồm các chữ số của a nhưng theo một thứ tự khác. Biết $a - b = \underbrace{111\dots 1}_n$ (n chữ số 1, n là số nguyên dương), tìm giá trị lớn nhất của n .

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
(GV THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội)

Bài T2/460 (Lớp 7). Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + 3|z - x| = 27.$$

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T3/460. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 3.$$

VŨ HỮU CHÍNH
(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T4/460. Xét tam giác ABC thay đổi, cân tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$ cho trước. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng BH .

PHẠM VĂN BÌNH
(GV THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)

Bài T5/460. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} \\ (x^2 + y^2)(x+1) = 4 + 2xy(x-1) \end{cases}$$

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/460. Chứng minh rằng với mọi $m > 1$, phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$x^3 - 3\sqrt[3]{3x+2m} = 2m.$$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang, Hà Giang)

Bài T7/460. Tìm tất cả các giá trị của tham số p và q sao cho với các giá trị đó hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = q^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2p)x + y^2 = 2py + 12p - 2p^2 - 27 \end{cases}$$

có hai nghiệm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

NGUYỄN ĐỀ (Hải Phòng)

Bài T8/460. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng: $\frac{ab+bc+ca}{p^2+9Rr} \geq \frac{4}{5}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

HÒ QUANG VINH (Hà Nội)

Bài T9/460. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 b^2 c^2}{bc+1} + \frac{b^4 c^2 a^2}{ca+1} + \frac{c^4 a^2 b^2}{ab+1} \geq \frac{3}{2}.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho, Tiền Giang)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/460. Tìm tất cả các số k nguyên dương sao cho tồn tại 2015 số nguyên dương phân biệt thỏa mãn tổng của 2015 số này chia hết cho tổng của k số phân biệt bất kỳ trong 2015 số đó.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/460. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 + 2k \geq (k+2)\sqrt{a+b+c+1}$

luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c và $abc = 1$.

LÊ VIỆT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang,
Thừa Thiên - Huế)

Bài T12/460. Cho ΔABC và điểm D chạy trên cạnh BC . Gọi $(I_1), (I_2)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD ; (I_1) theo thứ tự tiếp xúc với AB, BD tại E, X ; (I_2) theo thứ tự tiếp xúc với AC, CD tại F, Y . AI_1, AI_2 theo thứ tự cắt EX, FY tại Z, T . Chứng minh rằng

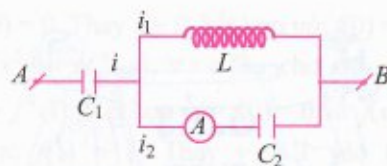
- 1) X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn tâm K .
- 2) K chạy trên một đường thẳng cố định.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài L1/460. Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Chứng minh rằng chỉ số ở ampe kế A không phụ thuộc C_2 .

Trên TH&TT số 459, mục Đề ra kỳ này tên tác giả Bài T4/459 đã viết là Vũ Quốc Dũng, xin sửa là Vi Quốc Dũng. Thành thật xin lỗi tác giả.



VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

Bài L2/460. Một quả bóng được ném với vận tốc $\vec{v}_0$ theo phương ngang, va chạm đàn hồi với một mặt nghiêng góc α so với phương ngang. Sau va chạm quả bóng nảy lên, sau đó lại va chạm với mặt nghiêng. Tại thời điểm va chạm lần thứ $N + 1$, vận tốc quả bóng có phương vuông góc với mặt nghiêng.

a) Xác định góc α theo N .

b) Xác định khoảng cách từ điểm va chạm thứ 1 đến điểm va chạm thứ $N + 1$.

VŨ THANH KHIẾT (NXBGD Việt Nam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/460 (For 6th grade). Let a be a natural number with all different digits and b is another number obtained by using the all the digits of a but in a different order. Given $a - b = \underbrace{111\dots1}_n$

(n digits 1 where n is a positive integer). Find the maximum value of n .

Problem T2/460 (For 7th grade). Find positive integers x, y, z such that

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + 3|z-x| = 27.$$

Problem T3/460. Let a, b, c be the lengths of three sides of a triangle. Prove that

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 3.$$

Problem T4/460. Let ABC be an isosceles triangle ($AB = AC$) inscribed in a given circle ($O; R$). Draw BH perpendicular to AC at H . Find the maximal length of BH .

Problem T5/460. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} \\ (x^2 + y^2)(x+1) = 4 + 2xy(x-1) \end{cases}$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/460. For any $m > 1$, prove that the following equation has a unique solution

$$x^3 - 3\sqrt[3]{3x+2m} = 2m.$$

Problem T7/460. Find all values of the parameters p and q such that the corresponding system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = q^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2p)x + y^2 = 2py + 12p - 2p^2 - 27 \end{cases}$$

has two solutions $(x_1; y_1)$ and $(x_2; y_2)$ satisfying

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Problem T8/460. Given a triangle ABC with $BC = a, CA = b$, and $AB = c$. Let R, r , and p respectively be the circumradius, the inradius, and the semiperimeter of ABC . Prove that

$$\frac{ab+bc+ca}{p^2+9Rr} \geq \frac{4}{5}.$$

When does the equality occur?

(Xem tiếp trang 30)



Bài T1/456. Tìm tất cả các bộ số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng 10 lần tổng của chúng.

Lời giải. Do tích các số nguyên tố cần tìm chia hết cho 10 nên phải có hai số nguyên tố 2 và 5. Gọi các số nguyên tố còn lại là $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ với $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{n-1} \leq p_n$. Từ giả thiết có $2 \cdot 5 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 10(2 + 5 + p_1 + p_2 + \dots + p_n)$
 $\Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 7 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$ (1)
 Từ (1) dễ thấy $n \geq 2$.

• Với $n = 2$ thì từ (1) có $p_1 \cdot p_2 = 7 + p_1 + p_2$
 $\Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 - p_1 - p_2 + 1 = 8 \Leftrightarrow (p_1 - 1)(p_2 - 1) = 8$.
 Đẳng thức xảy ra chỉ khi $p_1 = 3$ và $p_2 = 5$.

• Với $n \geq 3$, xét hai trường hợp sau:
 - Nếu $p_n = 2$ thì (1) trở thành $2^n = 7 + 2n$, điều này không xảy ra vì số 7 lẻ.
 - Nếu $p_n \geq 3$, đặt $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = s \geq 4$ do $n \geq 3$.
 Với các số nguyên $p \geq 2, q \geq 2$, từ đẳng thức $(p-1)(q-1) \geq 1$ suy ra $pq \geq p+q$. Áp dụng liên tiếp điều đó dẫn đến $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \geq p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = s$. Từ đó và (1) có $s \cdot p_n \leq 7 + s + p_n \Leftrightarrow (p_n - 1)(s - 1) \leq 8$.
 Do $p_n \geq 3$ và $s \geq 4$ thì bất đẳng thức xảy ra chỉ khi $p_n = 3$ và $s \leq 5$, suy ra $(p_1; p_2)$ chỉ có thể là $(2; 2)$, hoặc $(2; 3)$. Thay vào (1) đều không thỏa mãn. Vậy bộ số nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là $(2; 5; 3; 5)$. $\square$

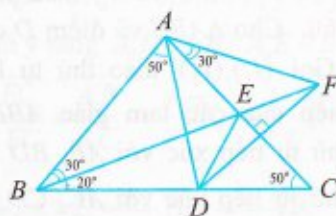
➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn tìm được đẳng thức (1) và cho kết quả đúng nhưng không lập luận chặt chẽ. Chỉ có bạn **Trần Minh Huy**, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc** có lập luận đầy đủ.

VIỆT HẢI

Bài T2'/456. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc

các cạnh BC, CA sao cho: $\widehat{CAD} = \widehat{ABE} = 30^\circ$.
 Tính số đo $\widehat{BED}$.

Lời giải.



Trên BE lấy điểm F sao cho $\triangle DBF$ cân tại D . Trong $\triangle DBF$ có $\widehat{DBF} = \widehat{DFB} = 20^\circ$, nên $\widehat{BDF} = 140^\circ$
 (1). Trong $\triangle DAB$ có $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 50^\circ$, nên $\widehat{BDA} = 80^\circ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADF} = 60^\circ$
 Mặt khác, do $DF = DB = DA$, nên ta thấy tam giác ADF đều. Từ đó, chú ý rằng $\widehat{DAE} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$
 nghĩa là AE là phân giác của $\widehat{DAF}$, hay AE là đường trung trực của đoạn DF . Suy ra $\triangle EDF$ cân tại E , dẫn đến $\widehat{EDF} = \widehat{EFD} = 20^\circ$.

Do đó $\widehat{BED} = \widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 40^\circ$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Trong bài T2'/456 trên chúng tôi đã thay giả thiết $\widehat{BAD} = \widehat{ABE} = 30^\circ$ (*) trong bài T2/456 bởi giả thiết $\widehat{CAD} = \widehat{ABE} = 30^\circ$. Mặc dù với giả thiết (*), việc tìm số đo $\widehat{BED}$ có thể giải theo hướng dùng định lý sin và định lý cosin: Đặt $AB = AC = a$, biểu diễn BE, BD, ED qua a theo hai định lý này. Cuối cùng sử dụng định lý cosin cho $\triangle BDE$ để tìm $\cos \widehat{BED}$. Tuy nhiên cách giải này vượt quá chương trình lớp 7. Tòa soạn hy vọng rằng có lời giải chỉ sử dụng kiến thức hình học lớp 7 từ các bạn đọc TH&TT gửi về cho bài toán trên với giả thiết (*).

HÒ QUANG VINH

Bài T3/455. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{6x-1}} + \frac{1}{\sqrt{9x-4}} \right) \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x > \frac{1}{2}$. Ta có PT(1) tương đương

$$\begin{aligned} \text{với: } \frac{1}{\sqrt{5x}} + \frac{1}{\sqrt{10x-5}} &= \frac{1}{\sqrt{6x-1}} + \frac{1}{\sqrt{9x-4}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{10x-5}} - \frac{1}{\sqrt{9x-4}} &= \frac{1}{\sqrt{6x-1}} - \frac{1}{\sqrt{5x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9x-4} - \sqrt{10x-5}}{\sqrt{10x-5} \cdot \sqrt{9x-4}} &= \frac{\sqrt{5x} - \sqrt{6x-1}}{\sqrt{6x-1} \cdot \sqrt{5x}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x-4-10x+5}{\sqrt{10x-5} \cdot \sqrt{9x-4} \cdot (\sqrt{9x-4} + \sqrt{10x-5})}$$

$$= \frac{5x-6x+1}{\sqrt{6x-1} \cdot \sqrt{5x} \cdot (\sqrt{5x} + \sqrt{6x-1})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{10x-5} \cdot \sqrt{9x-4} \cdot (\sqrt{9x-4} + \sqrt{10x-5})}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{6x-1} \cdot \sqrt{5x} \cdot (\sqrt{5x} + \sqrt{6x-1})} \quad (2)$$

– Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm của PT(1).

– Với $x \neq 1$, PT(2) tương đương với:

$$\Leftrightarrow \sqrt{10x-5} \cdot \sqrt{9x-4} \cdot (\sqrt{9x-4} + \sqrt{10x-5})$$

$$= \sqrt{6x-1} \cdot \sqrt{5x} \cdot (\sqrt{5x} + \sqrt{6x-1}) \quad (3)$$

Nếu $x > 1$ thì $10x-5 > 6x-1$; $9x-4 > 5x$, suy ra VT(3) > VP(3) $\Rightarrow$ PT(3) vô nghiệm.

Nếu $\frac{1}{2} < x < 1$ thì $10x-5 < 6x-1$; $9x-4 < 5x$,

suy ra VT(3) < VP(3) $\Rightarrow$ PT(3) vô nghiệm.

Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x=1$. $\square$

► **Nhận xét.** Đa số các bạn giải PT này bằng cách bình phương hai vế rồi phân tích đa thức thành nhân tử; Một số bạn đặt $5x$, $10x-5$, $6x-1$, $9x-4$ hoặc căn bậc hai của chúng lần lượt bằng a , b , c , d (khi đó $a+b=c+d$ hoặc $a^2+b^2=c^2+d^2$), đi đến kết quả $ab=cd$; Một số bạn sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky để đánh giá cũng đi đến kết quả đúng. Một số bạn đã đặt nhằm ĐK của x là $x \geq \frac{1}{2}$.

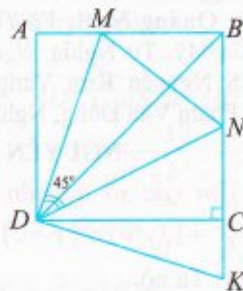
Các bạn được khen kỉ này là: **Nghệ An:** Đinh Viết Tỵ, Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, Nguyễn Thị Như Quỳnh B, Tăng Văn Minh Hùng, 8A, Hoàng Trần Đức, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Trọng Bằng, 8A2, THCS Thị Trần Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Nội:** Đỗ Hoài Phương, 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai; **Quảng Ngãi:** Phan Thị Mỹ Hồng, Cao Nữ Xuân Lan, Đỗ Thị Mỹ Lan, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Thị Kiều Mẫn, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, Võ Thị Hồng Kiều, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Phú Thọ:** Trần Quốc Lập, 9A3, Nguyễn Hoàng Phi, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, Phùng Văn Nam, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, Phạm Ngọc Hoa, 8A1, THCS Sông Lô, Sông Lô; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Hoàng Cúc, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Hải Dương:** Đồng Xuân Luận, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Khánh Hòa:** Trần Minh Quân, 8/1, THCS Chu Văn An, Ninh Hòa; **Quảng Trị:**

Đoàn Nhật Thanh, THCS Nguyễn Trãi, Đồng Hà; **Kon Tum:** Lê Viết Lưu Thanh, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/456. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh AB , BC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $\widehat{MDN} = 45^\circ$. Tìm vị trí của M , N để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{MDN} = 45^\circ$, suy ra

$$\widehat{MDN} = \widehat{ADM} + \widehat{NDC} = 45^\circ.$$

Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = AM$.

Vì $AD = DC$ (cạnh hình vuông); $\widehat{DAM} = \widehat{DCK} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle DAM = \triangle DCK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DK = DM \\ \widehat{KDC} = \widehat{MDA} \Rightarrow \widehat{KDN} = \widehat{MDN} = 45^\circ \end{cases} \quad (1)$$

$\triangle KDN$ và $\triangle MDN$ có cạnh DN chung, kết hợp

(1) suy ra $\triangle KDN = \triangle MDN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow KN = MN \Rightarrow MN + BN + MB = 2AB = 2a$$

(không đổi). Đặt $MN = x$, $BM = y$, $BN = z$.

Áp dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ và

định lý Pythagore vào $\triangle BMN$ ta có

$$2(y^2 + z^2) \geq (y+z)^2 \Rightarrow 2x^2 \geq (2a-x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot x \geq 2a - x \Rightarrow x \geq \frac{2a}{1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}-2)a.$$

Vậy min $MN = (2\sqrt{2}-2)a$ đạt được khi

$$y = z = \frac{x}{\sqrt{2}} = a(2-\sqrt{2}). \text{ Khi đó } DM, DN \text{ thứ tự}$$

là phân giác của các góc ADB, CDB . $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán không khó và có nhiều cách giải. Mấu chốt là chứng minh được $MN = AM + CN$. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, Phùng Văn Nam, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên, Phạm Ngọc Hoa, 8A1, THCS Sông Lô, Sông Lô; **Hà Nội:** Đặng Thanh Tùng, 9B, THCS

Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 7A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Đông Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Hùng*, 8D, *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, T.T. Bút Sơn, *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS T.T Quán Hành, Nghi Lộc. *Hoàng Trần Đức*, 9D, *Nguyễn Thị Như Quỳnh A*, *Nguyễn Văn Mạnh*, *Nguyễn Thu Giang*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cần Thơ:** *Hồ Gia Bảo*, 9A6, THCS Thốt Nốt; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Kiều*, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thị Kiều Mân*, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T5/456. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4 + y^2 + 13y + 1 \leq (y-2)x^2 + 8xy$.

Lời giải. Cách 1. Ta có

$$x^4 + y^2 + 13y + 1 \leq (y-2)x^2 + 8xy$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2y + y^2 + 13y - 8xy \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2y(x^2 + 1) + y^2 + yx^2 + 15y - 8xy \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y + 1)^2 + y(x^2 - 8x + 15) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y + 1)^2 + y(x-3)(x-5) \leq 0 (*)$$

Vì $(x^2 + 1 - y)^2 \geq 0$ suy ra $y(x-3)(x-5) \leq 0$.

Mà y là số nguyên dương nên $(x-3)(x-5) \leq 0$

$\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$. Lại có x là số nguyên dương nên $x \in \{3, 4, 5\}$.

• Với $x=3$ thay vào (*) ta có $(10-y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y=10$.

• Với $x=4$ thay vào (*) ta có

$$(17-y)^2 - y \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - 35y + 289 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{35}{2}\right)^2 \leq \frac{69}{4} \Leftrightarrow \frac{35 - \sqrt{69}}{2} \leq y \leq \frac{35 + \sqrt{69}}{2}$$

Mà y là số nguyên dương nên

$$y \in \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}.$$

• Với $x=5$ thay vào (*) ta có $(26-y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y=26$.

Vậy có 10 cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đề bài là: (3; 10), (4; 14), (4; 15), (4; 16), (4; 17), (4; 18), (4; 19), (4; 20), (4; 21), (5; 26).

Cách 2. Biến đổi BPT đã cho thành

$$(x^2 + 1)^2 + y^2 + 13y \leq x^2y + 8xy (**)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có $(x^2 + 1)^2 + y^2 \geq 2(x^2 + 1)y$, kết hợp với (**)

suy ra $2(x^2 + 1)y + 13y \leq x^2y + 8xy$

$$\Leftrightarrow x^2y + 15y - 8xy \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5) \leq 0$$

(do $y \in \mathbb{N}^*$), mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{3, 4, 5\}$; rồi tiếp tục tìm y tương tự như cách 1. $\square$

► **Nhận xét.** a) Đa số các bạn gửi bài đều giải theo hai cách trên. Có bạn đã làm cách khác bằng cách biến đổi BPT đã cho thành $y^2 + (13 - x^2 - 3x)y + (x^2 + 1)^2 \leq 0$ và coi là BPT bậc hai ẩn y , rồi dẫn đến

$\Delta_y = (x-1)(x-3)(x-5)(3x+11) \leq 0$; từ đó tìm x nguyên dương rồi tìm y , tuy nhiên cách làm này dài và đã áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai của cấp THPT.

b) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên; *Phạm Ngọc Hoa*, 8A1, THCS Sông Lô; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/456. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases} \quad (I).$$

Lời giải. Đặt $a=x-1$, $b=y-1$, $c=z-1$ thì hệ

(I) trở thành:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2b + b^2c + c^2a = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -c \\ a - b + 3a^2b = 1 \\ a^2 + b^2 + ab = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + ab = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = 1.$$

Suy ra tồn tại $t \in [0; 2\pi]$ để

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a = \cos t \\ \frac{1}{2}a + b = \sin t \end{cases}, \text{ tức là: } \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t \\ b = \sin t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t \end{cases}$$

Khi đó PT $a - b + 3a^2b = 1$ trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t - \sin t + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + 4\cos^2 t \left(\sin t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t \right) = 1 \\ & \Leftrightarrow \sin 3t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3t = 1 \Leftrightarrow \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}, \frac{29\pi}{18} \right\} \text{ (do } t \in [0; 2\pi] \text{)}.$$

Vậy HPT có 6 nghiệm $(x; y; z)$ là:

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t; 1 + \sin t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t; 1 - \sin t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \right)$$

$$\text{với } t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}, \frac{29\pi}{18} \right\}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Trong 6 nghiệm của HPT có 3 nghiệm nguyên là: $(2; 1; 0)$, $(0; 2; 1)$, $(1; 0; 2)$, 3 nghiệm còn lại viết dưới dạng lượng giác.

2) Chỉ có một số ít bạn giải đúng bài này. Một số bạn giải thiếu các nghiệm lượng giác; một số khác thì giải thừa nghiệm, những bạn này đã nhầm khi cho rằng HPT đã cho đối xứng theo x, y, z nên khi được nghiệm, chẳng hạn $(x; y; z) = (1; 0; 2)$ đã kết luận $(1; 0; 2)$ và các hoán vị của nó là nghiệm của hệ. Một số bạn dùng định lý Viète đảo đối với PT bậc 3 để giải thì lời giải dài.

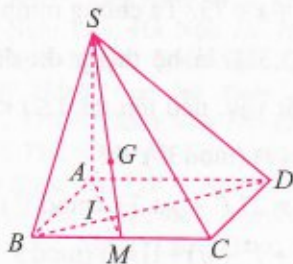
Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn hơn:

Yên Bái: Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hưng Yên:** Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Long An:** Đặng Thành Trung, 11T2, THPT chuyên Long An; **Khánh Hòa:** Hà Xuân Khang, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang; **Phú Yên:** Phan Xuân Thành Lâm, 10 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/456. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBD) là d . Đặt $SB = a$, $BD = b$, $SD = c$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 16d^2$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của AM và BD . Kí hiệu d_M, d_A tương ứng là khoảng cách từ M, A đến mp (SBD) .

Vì $MG \cap (SBD) = \{S\}$ nên

$$d = \frac{GS}{MS} d_M = \frac{2}{3} d_M \quad (1)$$

Tương tự, $AM \cap (SBD) = \{I\}$, ta có

$$d_M = \frac{IM}{IA} d_A = \frac{1}{2} d_A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $d = \frac{1}{3} d_A$ (3)

Tứ diện $ASBD$ có ba góc ở đỉnh A vuông, ta có

$$\frac{1}{d_A^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \quad (4)$$

Để ý rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 2(AS^2 + AB^2 + AD^2)$, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} &\geq \frac{9}{AS^2 + AB^2 + AD^2} \\ &= \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5), suy ra $\frac{1}{d^2} = \frac{9}{d_A^2} \geq \frac{162}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq 16d^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$AS = AB = AD \Leftrightarrow a = b = c. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Tất cả các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Một số bạn cho lời giải quá dài. Bài toán cũng có thể giải bằng phương pháp tọa độ hoá. Tuyến đường các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt:

Hưng Yên: Vũ Minh Thành, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Anh Tuấn, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** Trần Thiện Nam, 11A1, THPT Ứng Hoà A; **Trần Bá Khôi**, 11 Toán 2, THPT Chuyên ĐHSPT; **Vĩnh Long:** Lê Phan Nhật Duy, 11 T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nam Định:** Lâm Vũ Tuấn, 12 Anh 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đắk Nông:** Trương Tiến Hoàng, Trần Văn Trí, 10A1, THPT Chu Văn An, Gia Nghĩa.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T8/456. Chứng minh rằng phương trình

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} = x^{\frac{1}{x}} \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

Lời giải. ĐK: $x > 0$. PT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x+1} \cdot \ln(x+1) = \frac{1}{x} \ln x \Leftrightarrow (x+1) \ln x - x \ln(x+1) = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = (x+1) \ln x - x \ln(x+1)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \ln \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$f''(x) = -\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > 0.$$

Do đó hàm số $f'(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x} \right) = 0$$

nên $f'(x) > 0, \forall x > 0$; hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$; phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm $x > 0$.

Nhận thấy $f(1) = -\ln 2 < 0$;

$$f(3) = 4 \ln 3 - 3 \ln 4 = \ln 81 - \ln 64 > 0$$

nên $\exists x_0 \in (1; 3)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất. Bài toán được chứng minh. $\square$

► **Nhận xét.** Điều then chốt của lời giải là chứng minh hàm số $f(x) = (x+1) \ln x - x \ln(x+1)$ liên tục, đồng biến trên $(0; +\infty)$; sau đó chứng minh tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$. Có thể chứng minh $f'(x) > 0, \forall x > 0$ như sau:

Sử dụng bất đẳng thức $\ln(1+x) < x \ (x > 0)$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x} = -\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{2x+1}{x^2+x} \\ &> -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} > 0, \ x \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Bình Định: Trần Văn Thiên, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn;

Yên Bái: Vũ Hồng Quán, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành;

Hà Nội: Trần Bá Khôi, 11T2, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/456. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

a) $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$;

b) Với mỗi số nguyên dương $k, k = 1, \dots, 15$, nếu kí hiệu b_k là ước số lớn nhất của a_k sao cho $b_k < a_k$, thì $b_1 > b_2 > \dots > b_{15}$. Chứng minh rằng $a_{15} > 2015$.

Lời giải. (Theo bạn Vũ Đức Văn, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội) Đặt $a_k = b_k \cdot c_k$.

Do $a_k > b_k$ nên $c_k \geq 2$. Ta có c_k là số nguyên tố vì nếu trái lại $c_k = m_k \cdot n_k \ (m_k, n_k \geq 2)$ suy ra $a_k = b_k \cdot m_k \cdot n_k$ do đó a_k có ước số là $b_k \cdot m_k > b_k$ trái với giả thiết b_k là ước lớn nhất của a_k . Vì

$$\begin{cases} a_k > a_{k-1} \\ b_k < b_{k-1} \end{cases} \text{ suy ra } \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} \Rightarrow c_k > c_{k-1}$$

($k = 2, \dots, 15$). Ta liệt kê 15 số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Vì $c_1 \geq 2$ nên $c_{15} \geq 47$.

$$\text{Ta có } a_{15} = b_{15} \cdot c_{15} \geq c_{15}^2 \geq 47^2 > 2015. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Các lời giải gửi tới về cơ bản là chính xác, một số lời giải chưa thật ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Đức Thuận, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, THPT Vĩnh Yên; **Nam Định:** Trần Thị Nhài, 12 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** Khuất Duy Hồng, 12 Toán, THPT chuyên Sơn Tây; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hưng Yên:** Lê Ngọc Hoàng, 11A8, THPT Dương Quảng Hàm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/456. Cho đa thức $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1975$.

Hỏi trong đoạn $[1, 3^{2015}]$ có bao nhiêu số nguyên a sao cho $f(a)$ chia hết cho 3^{2015} ?

Lời giải. (theo đa số các bạn). Ta có

$$f(9x-1) = 729x^3 + 27x + 1971 = 27g(x), \text{ trong đó } g(x) = 27x^3 + x + 73. \text{ Ta chứng minh rằng tập}$$

$A = \{1, 2, 3, \dots, 3^n\}$ là hệ thặng dư đầy đủ theo mod 3^n . Thật vậy, nếu tồn tại $1 \leq i < j \leq 3^n$ sao cho $g(i) \equiv g(j) \pmod{3^n}$ thì

$$27i^3 + i + 73 \equiv 27j^3 + j + 73 \pmod{3^n} \text{ hay}$$

$$(i-j)[27(i^2 + j^2 + ij) + 1] \equiv 0 \pmod{3^n} \text{ hay}$$

$$i-j \equiv 0 \pmod{3^n}, \text{ vô lý.}$$

Vì vậy trong A tồn tại duy nhất một phần tử k_n để $g(k_n)$ chia hết cho 3^n . Do đó, với $a_n = 9k_n - 1$ thì $f(a_n) = 27g(k_n)$ chia hết cho 3^n . Với $n = 2012$ thì $f(a_{2012}) : 3^{2015}$.

Như vậy, trong mỗi đoạn $[3^{2012}i+1, 3^{2012}(i+1)]$ với $i \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại một số x_i sao cho $g(x_i)$ chia hết cho 3^{2012} , do đó trong đoạn $[1, 3^{2013}]$ tồn tại 3 số x_i sao cho $g(x_i)$ chia hết cho 3^{2012} nên trong đoạn $[8, 3^{2015}-1]$ có 3 số tương ứng $y_i = 9i-1$ sao cho $f(y_i)$ chia hết cho 3^{2015} . Mặt khác, ứng với các số dạng $9m+j$ ($0 \leq j < 9$) thì $f(9m+j)$ không chia hết cho 27. **Kết luận.** Trong đoạn $[1, 3^{2015}]$ có 3 số nguyên a sao cho $f(a)$ chia hết cho 3^{2015} . $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn đã biết định lý Kurt Hensel (Giả sử đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên và số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện là phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có đúng r nghiệm đơn $x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{r,1}$ trong đoạn $[1, p]$, tức là $f'(x_{i,1}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $i=1, 2, \dots, r$ thì phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$ có đúng r nghiệm

$x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{r,k}$ trong đoạn $[1, p^k]$.) nên lời giải bài toán đã cho là hệ quả trực tiếp của định lý này. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Giang:** *Nghiêm Văn Nghĩa*, 10A1, THPT Lạng Giang; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, AK11, THPT chuyên Quang Trung; **Hà Nội:** *Tạ Khánh Hà, Trần Bá Khôi, Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSPT, *Khuất Duy Hồng*, 12T, THPT chuyên Sơn Tây, *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Trần Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên:** *Phan Xuân Thành Lâm*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thanh Hóa:** *Đỗ Kì Thi*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/456. Tìm tất cả các hàm đơn ánh $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^5) + f(y^5) = (x+y)[f^4(x) - f^3(x)f(y) + f^2(x)f^2(y) - f(x)f^3(y) + f^4(y)] \quad (1)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn bài toán. Thay $x = y = 0$ vào (1) ta có $2f(0) = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$. Thay $y = 0$, kết hợp với $f(0) = 0$ ta suy ra $f(x^5) = xf^4(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cho $x = 1$ ta được $f(1) = f^4(1)$. Kết hợp với $f(0) = 0$ và $f(x)$ đơn ánh ta được $f(1) = 1$. Thay $y = 1$ vào (1), dùng $f(x^5) = xf^4(x)$ ta có

$$xf^4(x) + 1 = (x+1)(f^4(x) - f^3(x) + f^2(x) - f(x) + 1)$$

Chú ý hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} & -(x^4 + 1) + (x+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \\ &= a^4 - (x+1)a^3 + (x+1)a^2 - (x+1)a + x \\ &= (a^4 - xa^3) - (a^3 - xa^2) + (a^2 - xa) - (a - x) \\ &= (a-x)(a^3 - a^2 + a - 1) = (a-x)(a-1)(a^2 + 1). \end{aligned}$$

Thay $a = f(x)$; $f(x) \neq f(1) = 1$ nếu $x \neq 1$ do $f(x)$ đơn ánh, ta suy ra $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán vì ta có hằng đẳng thức

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

Vậy $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bài toán. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán phương trình hàm dạng cơ bản, không quá khó và hay. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 10 sau đã tham gia và có lời giải đúng:

Bắc Giang: *Nghiêm Văn Nghĩa*, 10A1, THPT Lạng Giang số 3; **Hà Nội:** *Tạ Khánh Hà, Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trương Quang Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Lương*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Nam:** *Lê Tấn Đăng Tâm*, 10T1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Phú Yên:** *Hồ Minh Hoàng, Ngô Lê Phương Trinh, Phan Xuân Thành Lâm*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

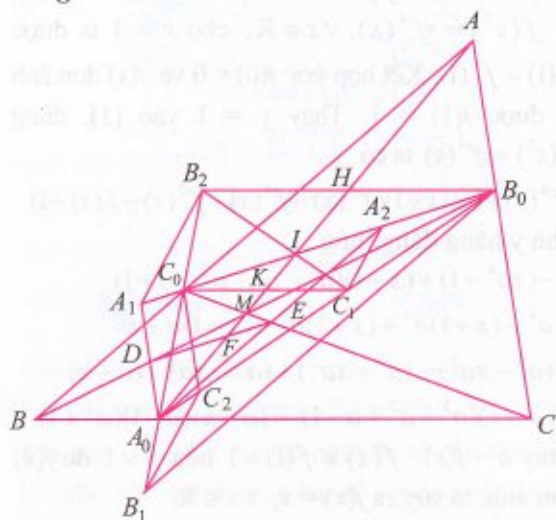
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/456. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác không trùng với trọng tâm G . Nối AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0 . Kẻ $A_0A_1 \parallel CA$, $A_0A_2 \parallel AB$ với A_1, A_2 thuộc B_0C_0 . Tương tự, ta có B_1, B_2, C_1, C_2 . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng

a) $A_1B_2 \parallel B_1C_2 \parallel C_1A_2$.

b) MG đi qua trung điểm của G_1G_2 .

Lời giải.



a) Gọi $H = B_0B_2 \cap AA_0$; $K = C_0C_1 \cap AA_0$;

$D = MB \cap A_0A_1$; $E = MC \cap A_0A_2$; $F = DE \cap MA_0$.

Để thấy $A_0(B_0C_0MB) = -1$. Kết hợp với $B_0B_2 \parallel BC$, suy ra H là trung điểm của B_0B_2 .

Tương tự có K là trung điểm của C_0C_1 .

Vậy, chú ý rằng $B_0B_2 \parallel C_0C_1$, theo bổ đề hình thang thì B_0C_0, B_2C_1, AA_0 đồng quy (tại I).

Vì $AB_0 \parallel A_0D$; $AC_0 \parallel A_0E$ nên

$$\frac{MD}{MB_0} = \frac{MA_0}{MA} = \frac{ME}{MC_0} = k.$$

Do đó phép vị tự V_M^k theo thứ tự biến A, B_0, C_0 thành A_0, D, E .

Vậy $V_M^k(I) = V_M^k(MA \cap B_0C_0) = V_M^k(MA) \cap V_M^k(B_0C_0) = MA_0 \cap DE = F$.

Từ đó, chú ý rằng $B_0B_2 \parallel C_0C_1$; $DE \parallel B_0C_0 \equiv A_1A_2$,

suy ra $\frac{IB_2}{IC_1} = \frac{IB_0}{IC_0} = \frac{FD}{FE} = \frac{IA_1}{IA_2}$.

Do đó $A_1B_2 \parallel B_1C_2 \parallel C_1A_2$ (đpcm).

b) Gọi T là trung điểm của G_1G_2 .

Để thấy T là trọng tâm của hệ điểm

$\{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$. Do đó $\sum_{A, B, C} (\overline{TA_1} + \overline{TA_2}) = \vec{0}$.

Từ tính chất của chùm điều hòa ta thấy D, E thứ tự là trung điểm của A_0A_1, A_0A_2 nên

$$\overline{TA_1} + \overline{TA_2} = 2\overline{TD} - \overline{TA_0} + 2\overline{TE} - \overline{TA_0} = 2(\overline{TD} + \overline{TE} - \overline{TA_0}).$$

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các

số $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$ sao cho

$$x\overline{MA} + y\overline{MB} + z\overline{MC} = \vec{0}.$$

Do đó $y\overline{A_0B} + z\overline{A_0C} = \vec{0}$; $x\overline{MA} + (y + z)\overline{MA_0} = \vec{0}$.

Từ đó, chú ý rằng $A_0D \parallel CB_0$; $A_0E \parallel BC_0$, suy

$$\text{ra } \frac{\overline{DB}}{\overline{DB_0}} = \frac{\overline{EC_0}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} = \frac{z}{y}; \overline{TA_0} = \frac{1}{y+z} \overline{TM} - \frac{x}{y+z} \overline{TA}.$$

$$\text{Vậy } \overline{TA_1} + \overline{TA_2} = 2 \left(\frac{y}{y+z} \overline{TB} + \frac{z}{y+z} \overline{TB_0} + \frac{y}{y+z} \overline{TC_0} + \frac{z}{y+z} \overline{TC} - \overline{TA_0} \right).$$

Tương tự đối với B_1, B_2, C_1, C_2 , chú ý rằng

$$\begin{aligned} \sum_{A, B, C} x\overline{TA} &= \overline{TM}; \sum_{A, B, C} \overline{GA} = \vec{0}, \text{ ta có } \sum_{A, B, C} (\overline{TA_1} + \overline{TA_2}) \\ &= \sum_{A, B, C} \left(\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right) \overline{TA} + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} - 1 \right) \overline{TA_0} \right) \\ &= \sum_{A, B, C} \left(\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right) \overline{TA} + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{y+z} \overline{TM} - \frac{x}{y+z} \overline{TA} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{x, y, z} \frac{1}{y+z} \right) \sum_{A, B, C} x\overline{TA} - \sum_{A, B, C} \frac{x}{y+z} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right) \overline{TA} \\ &\quad + \left(\sum_{x, y, z} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} - 1 \right) \frac{1}{y+z} \right) \overline{TM} \\ &= \left(-\frac{yz + zx + xy}{(y+z)(z+x)(x+y)} + \sum_{x, y, z} \frac{1}{y+z} \right) \sum_{A, B, C} x\overline{TA} \\ &\quad - \frac{xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \sum_{A, B, C} \overline{TA} \\ &\quad + \left(\sum_{x, y, z} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} - 1 \right) \frac{1}{y+z} \right) \overline{TM} \\ &= \left(-\frac{yz + zx + xy}{(y+z)(z+x)(x+y)} + \sum_{x, y, z} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right) \frac{1}{y+z} \right) \overline{TM} \\ &\quad - \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \overline{TG} \\ &= \frac{3(yz + zx + xy)}{(y+z)(z+x)(x+y)} \overline{TM} - \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \overline{TG}. \end{aligned}$$

Vậy ba điểm T, M, G thẳng hàng (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này khó, chỉ có bạn *Nguyễn Duy Mạnh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá** tham gia giải, tuy nhiên lời giải của bạn *Mạnh* quá dài.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/456. Thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn dao động tại S_1 và S_2 : $u_1 = u_2 = a \cos \omega t$. Coi năng lượng truyền sóng không đổi, bước sóng đo được $\lambda = 4$ cm, $S_1S_2 = 8$ cm. Điểm M trên mặt nước thuộc đường cong cực đại kể từ đường trung trực của S_1S_2 , M dao động có phương trình $u_M = 2a \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$. Điểm M'

nằm trên đường trung trực S_1S_2 và dao động tại M' cùng pha với M . Điểm M' gần S_1 nhất. Tính khoảng cách từ M đến M' nhỏ nhất.

Lời giải. Phương trình sóng tại M' :

$$u_{M'} = 2a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi M'S_1}{\lambda} \right).$$

Để M và M' cùng pha thì

$$\frac{2\pi M'S_1}{\lambda} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow M'S_1 = 4k + 1.$$

Do $M'S_1 > OS_1$ (O là trung điểm của S_1S_2 nên $k > 0,75$. Vì k nguyên và $M'S_1$ nhỏ nhất nên chọn $k = 1$ và khi đó $M'S_1 = 5$ cm; $M'O = 3$ cm. Khoảng cách $M'M$ nhỏ nhất khi M thuộc cực đại đầu tiên kể từ đường trung trực, hay $MS_2 - MS_1 = 4$ cm. Gọi hình chiếu của M lên đường trung trực của S_1S_2 là H , đặt khoảng cách

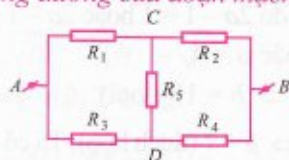
$$OH = y \text{ ta tính được: } M'M = \sqrt{\frac{4}{3} \left(y - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{25}{4}}$$

Do đó khoảng cách $M'M$ nhỏ nhất bằng 2,5 cm khi $y = 2,25$ cm. □

► **Nhận xét.** Rất tiếc là các bài giải gửi về Tòa soạn đều không chính xác.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/456. Cho mạch điện như hình bên. Biết $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$; $R_5 = 3 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$. Tìm điện trở tương đương của đoạn mạch AB .



Lời giải. Cách 1. Đặt ẩn phụ là các hiệu điện thế, từ đó suy ra các dòng điện để suy ra R_{AB} .

Đặt vào AB hiệu điện thế $U_{AB} = 1$ (V).

Chọn hai ẩn là U_1 và U_3 , khi đó:

$$U_2 = 1 - U_1; U_4 = 1 - U_3; U_5 = U_1 - U_3.$$

Giả sử dòng điện qua R_5 có chiều từ $D \rightarrow C$.

$$\text{Xét tại nút } C: I_1 + I_5 = I_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_5} = \frac{1 - U_1}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_1}{1} + \frac{U_1 - U_3}{3} = \frac{1 - U_1}{1} \Rightarrow 7U_1 - U_3 = 3 \quad (1)$$

$$\text{Xét tại nút } D: I_3 = I_4 + I_5$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_3}{R_3} = \frac{1 - U_3}{R_4} + \frac{U_1 - U_3}{R_5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_3}{1} = \frac{1 - U_3}{2} + \frac{U_1 - U_3}{3} \Rightarrow 11U_3 - 2U_1 = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $U_1 = 0,48$ (V); $U_3 = 0,36$ (V)

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 0,48 \text{ (A)}; I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0,3 \text{ (A)}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_3 = 0,84 \text{ (A)}$$

$$\Rightarrow R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{1}{0,84} \approx 1,19 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Cách 2. Đặt ẩn phụ là các hiệu điện thế, từ đó suy ra các dòng điện để suy ra R_{AB} .

Đặt vào AB hiệu điện thế $U_{AB} = 1$ (V).

Chọn I_1 là ẩn số phụ, từ đó tính cường độ dòng điện qua các điện trở theo I_1 .

$$U_{AB} = 1 = U_1 + U_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

$$= 1 I_1 + 1 I_2 = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = 1 - I_1 \quad (1)$$

$$\text{Xét tại nút } C: I_5 = I_2 - I_1 = 1 - 2I_1 \quad (2)$$

$$U_{AD} = U_{AC} + U_{CD} \Rightarrow U_{AD} = U_{AC} - U_{DC}$$

$$\Leftrightarrow R_3 I_3 = R_1 I_1 - R_5 I_5$$

$$\Leftrightarrow I_3 = I_1 - 3(1 - 2I_1) \Rightarrow I_3 = 7I_1 - 3 \quad (3)$$

$$\text{Xét tại nút } D: I_4 = I_3 - I_5 = 9I_1 - 4 \quad (4)$$

Từ (3), (4), ta có: $U_{AB} = 1 = U_3 + U_4$

$$\Leftrightarrow 1 = (7I_1 - 3)R_3 + (9I_1 - 4)R_4$$

$$\Leftrightarrow 1 = (7I_1 - 3) \cdot 1 + (9I_1 - 4) \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 25I_1 - 11 \Rightarrow I_1 = 0,48 \text{ (A)}; I_3 = 0,36 \text{ (A)};$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_3 = 0,84 \text{ (A)}$$

$$\Rightarrow R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{1}{0,84} \approx 1,19 \text{ (}\Omega\text{)}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng đề ra kì này:

Hưng Yên: Nguyễn Mạnh Hiệp, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Vũ Minh Thành, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, Phạm Hồng Trường, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Hồ Thanh Tùng, 12C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn; **Quảng Ninh:** Vũ Hoàng Yến, 11A7, THPT Uông Bí.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 5)

... $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2. Ta có $A \equiv 2, A \not\equiv 2^2; 2$ là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

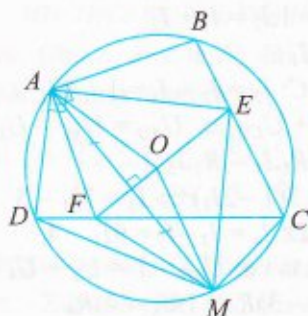
Câu 3. Ta có $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2 y^2} \geq 16$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &= \left(x^2 + \frac{1}{4y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{4x^2}\right) \\ &= x^2 y^2 + \frac{1}{16x^2 y^2} + \frac{1}{2} \\ &= x^2 y^2 + \frac{1}{256x^2 y^2} + \frac{15}{256} \cdot \frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{2} \\ &\geq 2\sqrt{x^2 y^2 \cdot \frac{1}{256x^2 y^2}} + \frac{15}{256} \cdot 16 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{15}{16} + \frac{1}{2} = \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy min $P = \frac{25}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 4.

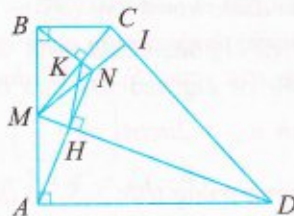


a) Gọi M là điểm đối xứng của A qua EF
 $\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{EMF}$ (1). Mà
 $\widehat{EAF} + \widehat{BAD} = \widehat{EAF} + \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \widehat{BAF} + \widehat{EAD}$
 $= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mặt khác $\widehat{ECF} + \widehat{BAD} = 180^\circ$
 (tứ giác $ABCD$ nội tiếp), do đó $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ (2).
 Từ (1) và (2) có $\widehat{EMF} = \widehat{ECF} \Rightarrow$ tứ giác $ECMF$
 nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{FEM}$ (3). Ta có
 $\widehat{FEM} = \widehat{FEA}$ (4) (tính chất đối xứng trục),
 $\widehat{FEA} = \widehat{DAM}$ (5) (cùng phụ với góc EAM).

Từ (3), (4), (5) ta có $\widehat{DCM} = \widehat{DAM} \Rightarrow$ tứ giác
 $ACMD$ nội tiếp $\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (O)
 $\Rightarrow OM = OA (= R) \Rightarrow O$ thuộc đường trung
 trực của $AM \Rightarrow O \in EF$.

Vậy ba điểm O, E, F thẳng hàng.

b)



Gọi $H = AN \cap MD, K = BN \cap MC, I = MN \cap CD$.

$\triangle AMD$ vuông tại A, AH là đường cao

$$\Rightarrow AM^2 = MH \cdot MD.$$

$\triangle BMC$ vuông tại B, BK là đường cao

$$\Rightarrow BM^2 = MK \cdot MC.$$

Mà $AM = BM$ do đó $MH \cdot MD = MK \cdot MC$.

$\triangle MKH$ và $\triangle MDC$ có: $\widehat{KMH}$ (chung),

$$\frac{MH}{MC} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow \triangle MKH \sim \triangle MDC \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MDH}$. Tứ giác $MKNH$ có

$$\widehat{MKN} + \widehat{MHN} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{tứ giác } MKNH$$

nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MNH}$. Ta có

$\widehat{MNH} = \widehat{MDH} (= \widehat{MKH}) \Rightarrow$ tứ giác $HNID$ nội

tiếp $\Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{NHD} = 90^\circ$. Vậy $MN \perp CD$.

Câu 5. Gọi số học sinh có mặt là $\overline{ab}$ ($a, b \in \mathbb{N}$,
 $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$). Theo đầu bài, ta có

$$\overline{ab} = 2ab - 9 \Leftrightarrow 10a + b = 2ab - 9$$

$$\Leftrightarrow 2ab - 10a - b = 9 \Leftrightarrow 2a(b-5) - (b-5) = 14$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(b-5) = 14.$$

Ta có $2a-1$ là ước của 14. Mà $2a-1$ là số nguyên
 dương lẻ, do đó $2a-1 = 1$ hoặc $2a-1 = 7$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = 4$$

• Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 19$ (loại)

• Nếu $a = 4 \Rightarrow b = 7$ (thích hợp). Ta có $\overline{ab} = 47$.

Vậy số học sinh có mặt là 47.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP. Hồ Chí Minh)

Sưu tầm và hướng dẫn giải



TỪ BÀI TOÁN TRONG SGK ĐẾN CÁCH GIẢI BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

LƯƠNG CAO VINH

(GV THPT Cộng Hiền, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

“Khai thác bài toán” là một biện pháp trong dạy học giúp phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh, nó kích thích sự tìm tòi, lòng ham hiểu biết; rèn luyện trí tưởng tượng và tư duy logic ở các em. Việc làm này đã và đang được các giáo viên và học sinh thực hiện thường xuyên trong quá trình dạy và học. Trong dạy học, việc “Khai thác bài toán” có thể là khai thác bài toán đã biết để sáng tạo ra các bài toán mới, cũng có thể là khai thác kết quả của một bài toán đã biết để giải các bài toán khác. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu về việc khai thác hai bài toán hình học trong SGK và sách bài tập để sáng tạo ra bài toán mới, đồng thời khai thác kết quả của một bài toán để dẫn đến một cách giải cho dạng toán “Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau”.

Trong SGK Hình học 11 Nâng cao có bài toán như sau (Ví dụ 2 trang 86):

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=c, CD=c', AC=b, BD=b', BC=a, AD=a'$. Tính góc giữa các vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$. Và đáp số là: Góc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$ xác

$$\text{định bởi } \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2a.a'}$$

Từ kết quả của bài toán trên giáo viên có thể phân tích cho học sinh thấy: góc giữa hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$ được xác định nhờ độ dài các cạnh của tứ diện. Vậy có thể xác định được góc giữa hai đường thẳng BC và AD không? Khi học sinh trả lời được câu hỏi đó ta sẽ có được bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Chứng minh

$$\text{rằng: } \cos \alpha = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB.CD}, \text{ từ đó suy ra}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB.CD} \right)^2}$$

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2) - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ &= \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2). \end{aligned}$$

Từ đó góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ xác định bởi

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB.CD}, \text{ suy ra}$$

$$\cos \alpha = \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB.CD}$$

Vì $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, suy ra

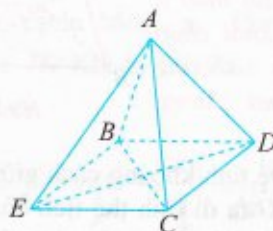
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB.CD} \right)^2} \quad (\text{đpcm}).$$

Nhận xét 1. Như vậy theo kết quả của bài toán 1, ta có thể tính được sin của góc tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh đối diện trong một tứ diện khi biết độ dài các cạnh của tứ diện đó.

Trong sách Bài tập Hình học 12 Nâng cao có bài toán như sau (Bài 38 trang 10, SBT Hình học 12 Nâng cao):

Bài toán 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD , α là góc giữa hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin \alpha$.

Lời giải.



Hình 1

Dựng hình bình hành $BECD$ (h.1). Ta có:

$$V_{ABCD} = V_{A.BCE} = V_{C.ABE} = \frac{1}{3} S_{ABE} d(C, (ABE)) \quad (1). \text{ Do}$$

$$CD \parallel (ABE) \text{ nên } d(C, (ABE)) = d(CD, AB) = d \quad (2)$$

Lại có:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin \widehat{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha \quad (\text{đpcm}).$$

Nhận xét 2. Vận dụng kết quả của bài toán 2, ta có thể tính được khoảng cách giữa hai cạnh đối diện trong một tứ diện khi biết độ dài hai cạnh đó, biết sin của góc tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh đó và biết thể tích của khối tứ diện.

Từ hai nhận xét trên ta có bài toán sau:

Bài toán 3. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích là V . Chứng minh công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là: $d(AB, CD)$

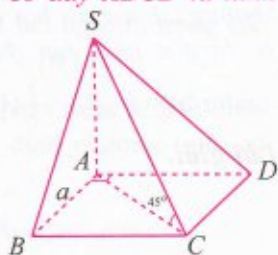
$$= \frac{12V}{\sqrt{4AB^2 \cdot CD^2 - (AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2)^2}}.$$

Lời giải Bài toán 3 được suy ra từ Bài toán 1 và Bài toán 2 ở trên.

Đến đây giáo viên có thể nhấn mạnh cho học sinh thấy rằng, theo kết quả của Bài toán 3: nếu biết được thể tích của một tứ diện và biết được độ dài các cạnh của nó là ta có thể tính được khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đối diện của tứ diện đó.

Sau đây, chúng ta sẽ áp dụng kết quả của Bài toán 3 để giải một số bài toán về: "Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau".

Thí dụ 1. (Đề thi THPT Quốc gia năm 2015) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC .



Hình 2

Phân tích. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC ta đi tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và độ dài các cạnh của nó, rồi suy ra khoảng cách cần tìm theo công thức tính ở Bài toán 3.

Lời giải. (h.2) • Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$, suy ra $\widehat{SCA} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}; \quad V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}; \quad V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \quad (1)$$

• Tính các cạnh của khối chóp $S.ABC$.

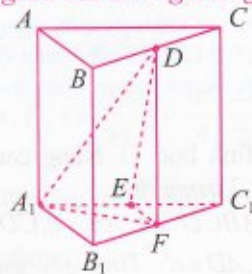
Ta có $AB = BC = a$, $SA = AC = a\sqrt{2}$;

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a.$$

Theo kết quả của Bài toán 3, ta có: $d(SB, AC)$

$$= \frac{12V_{S.ABC}}{\sqrt{4SB^2 \cdot AC^2 - (SA^2 + BC^2 - SC^2 - AB^2)^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Thí dụ 2. (Đề thi thử THPT Quốc gia năm 2015 – Trường THPT chuyên – ĐHSPT Hà Nội). Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên là các hình vuông cạnh a . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, A_1C_1, B_1C_1 . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và A_1F .



Hình 3

Lời giải. (h.3) • Tính thể tích của khối chóp $D.A_1EF$. Từ giả thiết suy ra $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh a . Ta có

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad AA_1 = a \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Từ $S_{A_1EF} = \frac{1}{4} S_{A_1B_1C_1}$, suy ra

$$V_{D.A_1EF} = \frac{1}{12} V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48} \quad (1)$$

• Tính các cạnh của khối chóp $D.A_1EF$. Ta có

$$A_1E = EF = \frac{a}{2}, \quad A_1F = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad DF = BB_1 = a.$$

Tam giác A_1DF vuông tại F nên

$$DA_1 = \sqrt{A_1F^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2};$$

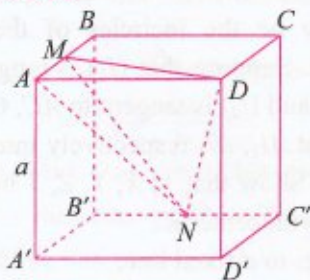
Tam giác DEF vuông tại F nên

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $d(DE, A_1F)$

$$= \frac{12V_{D.AEF}}{\sqrt{4DE^2 \cdot AF^2 - (DF^2 + AE^2 - DA^2 - EF^2)^2}} = \frac{a\sqrt{17}}{17}.$$

Thí dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM .



Hình 4

Lời giải. (h.4)

• Tính thể tích của tứ diện $AMND$.

$$\text{Ta có } d(N, (AMD)) = a, S_{AMD} = \frac{1}{2} AM \cdot AD = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_{AMND} = V_{N.AMD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

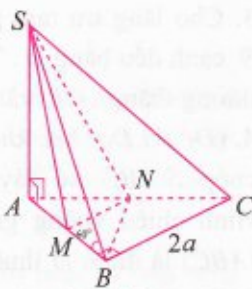
• Tính các cạnh của tứ diện $AMND$. Ta có

$$AM = \frac{a}{2}, AD = a, DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AN = DN = \frac{3a}{2},$$

$$MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } d(AN, DM)$$

$$= \frac{12V_{AMND}}{\sqrt{4AN^2 \cdot DM^2 - (MN^2 + AD^2 - DN^2 - AM^2)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{15}.$$

Thí dụ 4. (Trích Đề thi Đại học khối A năm 2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB , mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .



Hình 5

Lời giải. (h.5). Từ giả thiết có: $SA \perp (ABC)$.

$AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và

(ABC) nên $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng qua SM , song song với BC , cắt AC tại N thì $MN \parallel BC$ và N là trung điểm của AC .

• Tính thể tích khối chóp $S.ABN$: $S_{ABN} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

$$= \frac{1}{4} AB \cdot BC = a^2 \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABN} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

• Tính các cạnh của khối chóp $S.ABN$. Ta có

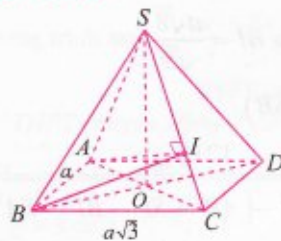
$$AN = BN = \frac{1}{2} AC = a\sqrt{2}, SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 4a,$$

$$SN = \sqrt{SA^2 + AN^2} = a\sqrt{14}. \text{ Vậy } d(AB, SN)$$

$$= \frac{12V_{S.ABN}}{\sqrt{4AB^2 \cdot SN^2 - (AN^2 + SB^2 - BN^2 - SA^2)^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Thí dụ 5. (Tạp chí TH&TT số 455, tháng 5 năm 2015, trang 7). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Điểm I thuộc đoạn SC sao cho $SC = 3CI$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SB biết rằng AI vuông góc với SC .



Hình 6

Hướng dẫn. (h.6) • Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Từ giả thiết có $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Từ } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow OC = a; SC = 3IC;$$

$$AI \perp SC \Rightarrow \triangle SOC \sim \triangle AIC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IC}{OC} = \frac{AC}{SC}$$

$$\Rightarrow SC = a\sqrt{6} \Rightarrow SO = a\sqrt{5} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$$

• Tính thể tích khối chóp $S.ABI$.

$$\frac{V_{S.ABI}}{V_{S.ABC}} = \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABI} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{9}.$$

• Tính các cạnh của khối chóp $S.ABI$. Ta có

$$SA = SB = SC = a\sqrt{6}, SI = \frac{2}{3} SC = \frac{a\sqrt{8}}{3},$$

$$AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$



PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T9/460. Given three positive real numbers a, b, c such that $abc \geq 1$. Prove that

$$\frac{a^4 b^2 c^2}{bc+1} + \frac{b^4 c^2 a^2}{ca+1} + \frac{c^4 a^2 b^2}{ab+1} \geq \frac{3}{2}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL

OLYMPIAD

Problem T10/460. Find all positive integers k such that there exist 2015 different positive integers whose sum is divisible by the sum of any k numbers among them.

Problem T11/460. Find the maximal k such that the inequality

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 + 2k \geq (k+2)\sqrt{a+b+c+1}$ holds for any positive real numbers a, b, c satisfying $abc = 1$.

Problem T12/460. Given a triangle $\triangle ABC$ and D varies on the side BC . Let $(I_1), (I_2)$ respectively be the incircles of the triangles ABD, ACD . Suppose that (I_1) is tangent to AB, BD at E, X and (I_2) is tangent to AC, CD at F, Y . Assume that AI_1, AI_2 respectively intersects EX, FY at Z, T . Show that 1) X, Y, Z, T both belong to a circle with center K .

2) K belongs to a fixed line.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

Từ định lí Côsin cho $\triangle BCI$, ta có

$$\begin{aligned} BI^2 &= BC^2 + CI^2 - 2BC \cdot CI \cdot \cos \widehat{BCI} \\ &= BC^2 + \frac{SC^2}{9} - 2BC \cdot \frac{SC}{3} \cdot \frac{BC}{2SC} \\ &= \frac{8a^2}{3} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{8}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vậy $d(AI, SB)$

$$= \frac{12V_{S.ABI}}{\sqrt{4AI^2 \cdot SB^2 - (AB^2 + SI^2 - BI^2 - SA^2)^2}} = \frac{4a}{\sqrt{33}}.$$

Kết luận. Như vậy với việc khai thác kết quả của bài toán trong SGK đã giúp chúng ta có được các bài toán mới (Bài toán 1 và Bài toán 3), cũng như có được một cách giải cho một dạng toán quan trọng trong hình học không gian - “Bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau”. Thông thường, để tính khoảng cách học sinh phải dựng hình để xác định hình chiếu vuông góc của một điểm trên một mặt phẳng, hoặc xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau. Nhưng theo cách làm như các thí dụ trình bày ở trên thì các em lại tập trung chủ yếu vào việc tính toán. Hơn nữa, trong các đề thi đại học thì ý tính khoảng cách thường được hỏi kèm sau ý tính thể tích, vì vậy nếu học sinh sử dụng được ý tính thể tích vào việc tính khoảng cách thì đó là điều rất thuận lợi.

Hy vọng chúng ta sẽ tiếp tục “khai thác bài toán” để tìm được nhiều ứng dụng hơn nữa từ các bài toán trong SGK. Sau đây là một số bài tập tính khoảng cách để rèn luyện theo cách đã nêu.

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD' và $B'C$.
2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' .
3. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.
4. (Đề thi Đại học khối A năm 2012). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .
5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính $d(CK, A'D)$.



SỬ DỤNG ĐÁNH GIÁ TRUNG GIAN ĐỂ TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Dãy số là một nội dung quan trọng trong chương trình toán THPT, đặc biệt là ở chương trình toán THPT chuyên. Các bài toán về giới hạn của dãy số thường xuyên xuất hiện trong kỳ thi học sinh giỏi các cấp. Thông thường chúng ta có một số phương pháp chung nhất định để tìm giới hạn của dãy số cho bởi công thức tổng quát $x_n = f(n)$ hay dãy số cho bởi công thức truy hồi $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$. Tuy nhiên loại dãy số cho bởi công thức là tổ hợp của hai dạng trên (mà ta không tìm được cụ thể công thức tổng quát của nó hay ta không tìm được điểm bất động) thì chưa có phương pháp giải quyết chung. Bài viết nhỏ này khai thác một định hướng tiếp cận dạng toán trên, đó là sử dụng các đánh giá trung gian để kẹp dãy số bằng các giới hạn cơ bản rồi qua đó tìm ra giới hạn. Chúng ta sẽ bắt đầu với một thí dụ đơn giản.

Thí dụ 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+11}{n+5}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Nếu gọi điểm bất động của dãy số là x_0 thì ta có $x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1; x_0 = 2$.

Ngoài ra dễ thấy $x_{n+1} > (x_n - 1)^2 + 1 > 1, \forall n \geq 1$ suy ra $x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta dự đoán $\lim x_n = 1$ và để có điều này ta cần tìm được a, b thỏa mãn

$x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ (*). Để chứng minh (*) ta sử dụng phương pháp quy nạp. Chú ý rằng hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ nên để quy nạp thành công ta cần phải có $0 < a+b \leq 2$ để (*) đúng ở bước cơ sở $n=1$ và

$$\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) + \frac{2k+11}{k+5} \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} \quad (**)$$

để (*) đúng ở bước quy nạp.

Ta chọn $b = 4a$ để thu gọn nhanh biểu thức

$$1 + \frac{1}{a(k+1)+b} - \frac{2k+11}{k+5}.$$

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow a(1-a)(k+4)^2 \geq k+5$.

Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k=1$, tức là $25a(1-a) \geq 6$, kết hợp với $0 < 4a+a \leq 2$ ta

được $a \leq \frac{2}{5}$. Ta chọn luôn $a = \frac{2}{5}$.

Tóm lại ta chứng minh được

$$1 < x_n \leq 1 + \frac{5}{2(n+4)}, \forall n \geq 1.$$

Lời giải. Do $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 + \frac{1}{n+5} > 1, \forall n \geq 1$

và $x_1 > 1$ nên $x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh

$x_n \leq \frac{2n+13}{2(n+4)}, \forall n \geq 1$ (*) bằng phương pháp quy

nap. Thật vậy với $n=1$ thì (*) đúng. Giả sử (*)

đúng với $n=k$ ($k \geq 1$), khi đó $x_k \leq \frac{2k+13}{2(k+4)}$.

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, tức

$$x_{k+1} \leq \frac{2k+15}{2(k+5)}.$$

Thật vậy, do hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $x_k > 1$ nên (chú ý $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \frac{2k+15}{2(k+5)} &= f(x_k) + \frac{2k+7}{2(k+5)} \\ &\leq f\left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)} = -\frac{(k-1)(6k+29)}{4(k+4)^2(k+5)} \leq 0. \end{aligned}$$

Do đó (*) đúng theo nguyên lý quy nạp.

Theo nguyên lý kẹp, dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = 1$. $\square$

Nhận xét. Ta có thể giải bài này bằng cách dùng Nguyên lý Weierstrass. Trong các thí dụ tiếp theo chúng tôi chỉ trình bày phần phân tích, bạn đọc tự hoàn thiện phần lời giải.

Thí dụ 2. (VMO-2012) Cho dãy số (x_n) xác định

$$x_1 = 3; x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Gọi điểm bất động của dãy số là x_0 thì

$$x_0 = \frac{x_0 + 2}{3} \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Ta dự đoán } \lim x_n = 1.$$

Để phát hiện $x_n > 1, \forall n \geq 1$ (chứng minh điều này bằng quy nạp) nên để khẳng định dự đoán trên đúng ta cần tìm được a, b thỏa mãn

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 (*).$$

Ta cần chọn a, b sao cho $0 < a+b \leq \frac{1}{2}$ và

$$\frac{k+3}{3(k+1)} \left(3 + \frac{1}{ak+b} \right) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} (**).$$

Chọn $b=3a$ (để thu gọn nhanh về trái) thì $(**) \Leftrightarrow 2(1-3a)k \geq 24a+1$. Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k=1$, khi đó $30a \leq 1$ (thỏa mãn $0 < a+b=4a \leq \frac{1}{2}$). Ta chọn luôn $a = \frac{1}{30}$. Khi đó

$$(**) \Leftrightarrow \frac{-18(k-1)}{(k+1)(k+4)} \leq 0, \text{ đúng vì } k \geq 1. \text{ Tóm lại}$$

$$1 < x_n \leq \frac{n+33}{n+3}, \forall n \geq 1. \text{ Bài toán kết thúc. } \square$$

Thí dụ 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_{n+1} = 2x_n - \frac{4n+1}{nx_n}, \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

Phân tích. Ta có $x_{n+1} = f_n(x_n)$ với

$$f_n(x) = 2x - \frac{4n+1}{nx}$$
 là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta sẽ tìm a, b sao cho $x_n \geq an+b, \forall n \geq k_0$ để $\lim x_n = +\infty$. Để quy nạp thành công, ta cần phải

$$\text{có } 2(ak+b) - \frac{4k+1}{k(ak+b)} \geq a(k+1)+b.$$

$$\text{Điều này tương đương với } ak+b-a \geq \frac{4k+1}{ak^2+bk}$$

$$\Leftrightarrow a^2k^3 + (2ab-a^2)k^2 + (b^2-ab-4)k - 1 \geq 0.$$

Ngoài ra ta cần thêm điều kiện để bước cơ sở đúng, việc chọn a, b sao cho điều kiện trên được thỏa mãn, đồng thời bước cơ sở đúng khi $n=1$,

$n=2$ khá khó khăn nên ta tìm điều kiện để bước cơ sở đúng khi $n=3$, tức là $\frac{77}{6} \geq 3a+b$. Khi đó

$a=1, b=2, k_0=3$ thỏa mãn các yêu cầu.

Tóm lại ta đã chứng minh $x_n \geq n+2, \forall n \geq 3$.

Vậy $\lim x_n = +\infty$. $\square$

Thí dụ 4. (VMO-2011) Cho dãy số (x_n) xác định

$$x_1 = 1; x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}(x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1), \forall n \geq 2.$$

Với mỗi $n \geq 1$, đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

Phân tích. Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) x_n \text{ và } y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n.$$

Ta có $y_1 = 3; y_2 = \frac{7}{2} > y_1; y_3 = \frac{65}{18} > y_2$ nên ta dự

đoán $y_{n+1} > y_n, \forall n \geq 1$ (*). Thật vậy điều này

$$\text{tương đương với } \frac{n^2+3n+3}{(n+1)^3} x_{n+1} > \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n$$

$$\Leftrightarrow (n^2+1)(n^2+3n+3) > (n^2+n+1)(n+1)^2, \text{ đúng.}$$

Ta tìm a, b sao cho $x_n \leq an+b, \forall n \geq k_0$ để

$$y_n \leq \frac{(an+b)(n^2+n+1)}{n^3} < 100ak_0^2(a+b), \forall n \geq k_0.$$

Để quy nạp thành công, ta cần phải có

$$\frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3}(ak+b) \leq a(k+1)+b.$$

Thật vậy, điều này tương đương với

$$-(a+b)k^2 - (a+b)k - b \geq 0.$$

Ta cần điều kiện $a+b < 0; b < 0$. Ngoài ra ta cần thêm điều kiện để bước cơ sở đúng, do bước cơ sở không thể đúng khi $n=1$ nên ta tìm điều kiện để bước cơ sở đúng khi $n=2$, tức là $4 \leq 2a+b$.

Chẳng hạn $a=5; b=-6$ thì $x_n \leq 5n-6, \forall n \geq 2$.

Bài toán đã được giải quyết. $\square$

Thí dụ 5. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2; x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng các dãy số $y_n = \frac{x_n}{n}; z_n = x_n - n$

có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có $y_1 = 2; y_{n+1} = f_n(y_n), \forall n \geq 1$ với

$$f_n(x) = x - \frac{x^2-1}{x(n+1)} \text{ là hàm đồng biến trên}$$

$(1; +\infty)$. Nhận thấy điểm bất động của $f(x)$ là 1 ($f_n(t) = t \Leftrightarrow t = 1$) nên ta dự đoán $\lim y_n = 1$. So sánh các giá trị đầu của dãy (y_n) với 1 và dự đoán $y_n > 1, \forall n \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp, thật vậy với $y_k > 1$ ($k \geq 1$) thì $y_{k+1} = f_k(y_k) > f_k(1) = 1$.

Ta cần đánh giá được $y_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để có $\lim y_n = 1$.

Để quy nạp thành công, ta cần chứng minh được $f_k(y_k) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}$ với $1 < y_k \leq 1 + \frac{1}{ak+b}$.

Thật vậy do $f_k(y_k) \leq f_k\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{ak+b} - \frac{1+2(ak+b)}{(k+1)(ak+b)(ak+b+1)}$$

nên cần chọn a để

$$\frac{1}{ak+b} - \frac{1+2(ak+b)}{(k+1)(ak+b)(ak+b+1)} < \frac{1}{a(k+1)+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a(k+1)+b} < \frac{2ak+2b+1}{(k+1)(ak+b+1)}$$

$$\Leftrightarrow a^2k^2 + (a^2+3ab)k + 2b^2 + ab + b > 0.$$

Ta thấy $a=1; b=0$ thỏa mãn. Như vậy

$$1 < y_n \leq 1 + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \text{ nên } \lim y_n = 1.$$

Ta có $z_{n+1} = g_n(z_n), \forall n \geq 1$ với $g_n(x) = x - \frac{x}{x+n}$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Để thấy $z_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta cần đánh giá được

$$z_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 2 \text{ để có } \lim z_n = 0.$$

Để quy nạp thành công, ta cần chứng minh được

$$g_k\left(\frac{1}{ak+b}\right) \leq \frac{1}{a(k+1)+b} \text{ tức là}$$

$$\frac{1}{ak+b} - \frac{1}{1+k(ak+b)} \leq \frac{1}{a(k+1)+b}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)k + ab - a + b^2 \geq 0, \forall k \geq 2.$$

Ta thấy $a=\frac{1}{2}, b=1$ thỏa mãn điều kiện này.

Như vậy $0 < z_n \leq \frac{2}{n+2}, \forall n \geq 2$ nên $\lim z_n = 0$. $\square$

Thí dụ 6. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1+(n+1)x_n}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Chứng minh rằng dãy số } y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Để thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta có

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{kx_k}{1+(k+1)x_k} = kx_k - (k+1)x_{k+1}, \forall k \geq 1.$$

$$\text{Do vậy } y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1}, \forall n \geq 0.$$

Dự đoán $\lim y_n = \frac{1}{2}$. Ta sẽ tìm $a > 0, b > 0$ để

$$nx_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ tức } x_n \leq \frac{1}{n(an+b)}, \forall n \geq 1.$$

Để ý rằng hàm số $f(x) = \frac{nx^2}{1+(n+1)x}$ đồng biến

trên $(0; +\infty)$ với mọi $n \geq 1$ nên để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$\frac{k(k+1)}{k^2(ak+b)^2 + k(k+1)(ak+b)} < \frac{1}{a(k+1)+b}$$

$$\Leftrightarrow a^2k^3 + 2abk^2 + (b^2-a)k - a > 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng chẳng hạn khi $a=b=1$.

Tóm lại ta chứng minh được $x_n \leq \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$.

Khi đó

$$\frac{1}{2} > y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, \forall n \geq 1$$

nên tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = \frac{1}{2}$. $\square$

Thí dụ 7. (VMO-2015) Cho $a \in [0; 1]$ và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3; x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+a} \sqrt{x_n^2+3}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

Phân tích. Xét các dãy số $(a_n); (b_n)$ xác định bởi

$$a_1 = 3; a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{a_n^2+3}, \forall n \geq 1$$

$$\text{và } b_1 = 3; b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+1} \sqrt{b_n^2+3}, \forall n \geq 1.$$

Khi đó $a_n \geq x_n \geq b_n > 0, \forall n \geq 1$ và $\lim a_n = 1$.

Ta có $\sqrt{(1+3)(a^2+3)} \geq a+3, \forall a > 0$ nên

$$b_{n+1} \geq f_n(b_n), \forall n \geq 1 \text{ trong đó}$$

$f_n(x) = \frac{x}{2} + \frac{n^2(x+3)}{2(4n^2+1)}$ với $f_n(x)$ là hàm số đồng

biến trên $(0; +\infty)$. Ta sẽ tìm $a, b > 0$ sao cho

$$b_n \geq 1 - \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ để từ đó } \lim x_n = 1.$$

Thật vậy, để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$f_k\left(1 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b} \text{ tức là}$$

$$1 - \frac{1}{ak+b} + \frac{k^2}{8k^2+2}\left(4 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3ak^3 + (3b - 5a - a^2)k^2 + (a - a^2 - 2ab)k + (b - a - ab - b^2) \geq 0.$$

Với $a = \frac{1}{3}, b = 1$ thì bất đẳng thức này tương

đương với $(k+1)(9k^2 + 2k - 6) \geq 0$, đúng $\forall k \geq 1$.

Như vậy ta đã có $a_n \geq x_n \geq b_n \geq 1 - \frac{3}{n+3}, \forall n \geq 1$

và $\lim a_n = 1$ nên tồn tại giới hạn $\lim x_n = 1$. $\square$

Thí dụ 8. (Olympic vùng Duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ 2015) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{x_n + 1}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{n}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có $y_1 = 2; y_{n+1} = f(y_n), \forall n \geq 1$ với

$$f(x) = \frac{n+1}{nx+1}. \text{ Nhận thấy điểm bất động của}$$

$f(x)$ là 1 (tức là với mỗi n thì $f(t) = t \Leftrightarrow t = 1$)

nên ta dự đoán $\lim y_n = 1$. Để thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$

và với mỗi n thì $f(x)$ luôn nghịch biến trên

$(0; +\infty)$. Đặt $z_n = y_{2n-1}; \forall n \geq 1$ ta thấy

$$z_n > 1; \forall n \geq 1 \text{ vì } z_1 = y_1 > 1 \text{ và}$$

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow x < 1; f(x) < 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta sẽ tìm $a, b > 0$ sao cho

$$z_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1 \text{ để từ đó } \lim z_n = 1.$$

Thật vậy ta có $z_{n+1} = \frac{2n+1}{4n^2}, \forall n \geq 2$.

$$\frac{2n+1}{(2n-1)z_n+1}$$

Đề quy nạp thành công ta cần có

$$\frac{2k+1}{4k^2} < 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Chẳng hạn với $a = 1; b = 0$ thì bất đẳng thức này tương đương với $4k \geq 1$, đúng với mọi $k \geq 1$.

Như vậy ta đã chứng minh $1 < z_n \leq 1 + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$

nên tồn tại $\lim z_n$ hữu hạn và $\lim z_n = 1$.

Đặt $t_n = y_{2n}, \forall n \geq 1$ ta có $t_n < 1, \forall n \geq 1$ và

$$t_{n+1} = y_{2n+2} = \frac{2n+2}{(2n+1)z_{n+1}+1} \geq \frac{2(n+1)^2}{2n^2+6n+3}, \forall n \geq 2.$$

Như vậy $\frac{2(n+1)^2}{2n^2+6n+3} \leq t_n < 1, \forall n \geq 2$ nên tồn tại

$\lim t_n$ hữu hạn và $\lim t_n = 1$.

Tóm lại tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = 1$. $\square$

Thí dụ 9. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n-3}{2n} x_{n-1}; \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = x_1 + \dots + x_n$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Ta có

$$x_{n-1} = 2[(n-1)x_{n-1} - nx_n], \forall n \geq 2$$

nên $y_n = x_1 + \dots + x_n = 2[1 - (n+1)x_{n+1}], \forall n \geq 2$.

Đặt $z_n = nx_n$ ta có $z_1 = 1; z_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} z_n, \forall n \geq 1$.

Rõ ràng $z_n > 0, \forall n \geq 1$ nên ta chỉ cần chọn được

a, b thỏa mãn $z_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để $\lim z_n = 0$.

Đề quy nạp thành công thì ta cần phải chọn được

$$a, b \text{ sao cho } \frac{2k-1}{2k} \frac{1}{ak+b} \leq \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Điều này tương đương với $ak - a - b \leq 0, \forall k \geq 1$, không tồn tại $a, b > 0$ thỏa mãn.

Ta sẽ tìm a, b để $z_n \leq \frac{1}{\sqrt{an+b}}, \forall n \geq 1$. Khi đó

$$a, b \text{ cần thỏa mãn } \frac{2k-1}{2k} \frac{1}{\sqrt{ak+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a(k+1)+b}}$$

$$\Leftrightarrow (3a+4b)k - a - b \geq 0.$$

Chọn $a = 1; b = 0$ thỏa mãn. Tóm lại ta đã có

$0 < z_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$ nên $\lim z_n = 0$ và $\lim y_n = 2$. $\square$

Thí dụ 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \sqrt{x_n^2 + nx_n + 2n^2} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{x_n + 5n}, n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{n+1}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Phân tích. Với mỗi $n \geq 1$, đặt $x_n = na_n$ thì

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2 + a_n + 2}}{3} + \frac{2n+1}{n(a_n+5)}, \forall n \geq 1.$$

Để thấy hàm số $f_n(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{3} + \frac{2n+1}{n(x+5)}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Chú ý $f_n(1) > 1, \forall n \geq 1$ và $a_1 > 4$ nên bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n > 1, \forall n \geq 1$.

Khi đó, ta có $\sqrt{a_n^2 + a_n + 2} < a_n + 1$ nên

$$a_{n+1} < g_n(a_n), \forall n \geq 1 \text{ với } g_n(x) = \frac{x+1}{3} + \frac{2n+1}{n(x+5)}$$

là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta tìm $a, b > 0$ sao cho $a_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$.

Thật vậy, để quy nạp thành công chúng ta cần có

$$g_k\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}, \text{ tức là}$$

$$\frac{2 + \frac{1}{ak+b}}{3} + \frac{2k+1}{k\left(6 + \frac{1}{ak+b}\right)} \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Để thuận tiện trong tính toán, chọn $b = 0$.

Khi đó bất đẳng thức trên tương đương

$$(13-3a)a^2k^2 + (-3a^2-5a+2)ak - a \geq 0.$$

Ta cần chọn a sao cho

$$13-3a \geq 0; -3a^2-5a+2 \geq 0 \text{ và } 0 < 3a \leq 1$$

(để bước cơ sở đúng).

Giá trị a thỏa mãn các điều kiện trên là $a = \frac{1}{3}$.

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành $2k \geq 1$, đúng.

Như vậy ta đã có $1 < a_n \leq 1 + \frac{3}{n}, \forall n \geq 1$ nên tồn tại

$\lim a_n$ hữu hạn và $\lim a_n = 1$.

Từ đó tồn tại $\lim y_n$ hữu hạn và $\lim y_n = 1$.

Bài toán được giải quyết. $\square$

Thí dụ 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 0; \\ x_n = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(x_{i-1}+1) + (n-i)(x_{n-i}+1)}{n^2}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_n}{\ln n}$ có giới hạn

hữu hạn và tìm giới hạn đó.

$$\text{Phân tích. } \forall n \geq 2, x_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} x_n + \frac{2n}{(n+1)^2}.$$

Sử dụng định lý Stolz, ta thấy nếu $\frac{nx_n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$

thì (y_n) có giới hạn hữu hạn và $y_n \rightarrow 2$.

Ta chỉ cần chứng minh $x_n < 2\sqrt{n}, \forall n \geq 2$.

Điều này đúng do bất đẳng thức bước quy nạp là

$$2\sqrt{k} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{2k}{(k+1)^2} \leq 2\sqrt{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2+2k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} > \frac{k^2-k-1}{k+\sqrt{k+1}}$$

(đúng do $k^2+2k > k^2-k-1 > 0; k > \sqrt{k}, \forall k \geq 2$). $\square$

Sau đây là một số bài tập vận dụng.

1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1; x_{n+1} = \sqrt{n(n+1)} \frac{x_n}{x_n^2 + n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{n^2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

3. Cho hai dãy số $(x_n); (y_n)$ xác định bởi

$$x_1 = 2; y_1 = 1; x_{n+1} = x_n^2 + 1; y_{n+1} = x_n y_n, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ có giới hạn hữu hạn.

4. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

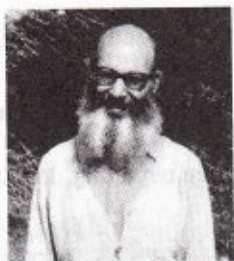
$$x_0 = 1, 9; x_n = \frac{x_{n-1}^2 - 1}{n}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

DI CHÚC "CHƯA ĐƯỢC GIẢI MÃ" CỦA NHÀ TOÁN HỌC ALEXANDRE GROTHENDIECK

PHAN THANH QUANG
(Trong Le Point 19/2/2015)

Một cụ già râu bạc trắng dài tời ngực đúng theo hình ảnh của một ẩn sĩ chán đời tránh mọi sự tiếp xúc... Đó là hình ảnh mà người ta còn nhớ về nhà Toán học hàng đầu của thế kỷ. *Alexandre Grothendieck* (A.G), sống ẩn dật trong làng nhỏ Lasserre, ở tận góc trời Ariège (Pháp). *Sadrine* nhớ lại: "Một đêm nọ tôi suýt cán phải ông ta khi ông đang lang thang dò dẫm trong đêm tối, như một con Nai lạc bầy. Ở nước ta ít khi người ta gặp một con người như vậy". Ở vùng núi hoang sơ quanh năm tuyết phủ *Couserans* người ta gọi ông là "nhà bác học". Thực ra người ta đâu có biết ông đã có những công trình khoa học gì, chỉ biết ông là nhà khoa học nổi tiếng được nước Pháp và cả thế giới kính trọng, tôn vinh. Thế thôi! Cứ gọi ông ta là "nhà bác học" cho tiện, vì ông không tiếp xúc với ai, mà chẳng có ai dám lân la nói chuyện với ông. Còn tại sao ông về cái nơi heo hút này để sống, không bà con, anh em bè bạn nào đến thăm, suốt ngày đi lại từ ông khói đến bàn ăn? Không ai biết, mà chẳng có ai tìm hiểu. Sau khi ông qua đời ngày 13 tháng 11 năm 2014, người ta mới biết rõ ông là ai. Mọi câu chuyện về ông mới dần dần được làm rõ.



Alexandre Grothendieck
(28.3.1928 – 13.11.2014)

Tờ báo "Giải phóng" của Pháp chạy một hàng tít dài: "Cái chết của một thiên tài muốn đời lãng quên" và "Nhà Toán học lớn nhất của thế kỷ qua đời". Một con Sói già cô độc đã trở thành một ngôi sao? Người trong làng nơi ông cư trú cuối đời không ngờ ông già quái gở, cô độc đó lại là *Alexandre Grothendieck*, một trong những nhà Toán học lớn nhất sau *Euclide*. Ông đã đẩy Toán học lên một bậc thang mới như *Einstein* đã đẩy Vật lý, *Lévi-Strauss* đã đẩy

Nhân chủng học lên một bậc thang mới. Cộng đồng khoa học lúc bấy giờ mới cấp tập đi tìm hiểu nhà Toán học nổi tiếng bị quên lãng này. Họ muốn chọc thủng bức màn bí mật bao quanh nhà khoa học ẩn mình trong núi 20 năm qua. Trước hết họ tìm hiểu "kho vàng" nổi tiếng: năm hộp bằng bìa cứng mà ông giao cho một học trò cũ tên là *Jean Malgoir* ở Montpellier năm 1991, năm hộp có thể chứa những công trình sáng tạo về Toán học chưa được công bố. Tổng cộng gồm 20 000 trang gồm những phép tính cần thiết để hiểu về lý thuyết những motif, và những điều khác rất cần thiết cho những người "săn tìm" hạt boson của *Higgs*.

Một thiên tiểu thuyết

Năm 1912, *Luc Gomel*, người bảo vệ di sản của Đại học Montpellier có ý định sắp xếp lại những tài liệu lưu trữ này của "tài sản quốc gia" để bảo vệ và phổ biến sau này. Trước hết phải biết trong mớ hỗn độn tài liệu cất giữ trên tầng một là cái gì. Phải chính tác giả mới có thể trả lời được, còn *Luc Gomel* chỉ biết rằng đó là "một đống tài liệu". Thế thôi! Hàng ngàn phương trình, bức vẽ, bản nháp chờ các sinh viên của ông nghiên cứu, may ra mới trả lời được. *Malgoire* tin rằng một ngày nào đó tác giả của đống tài liệu này sẽ trở về sắp xếp, vì từ ngày ông ta viết ra ông chưa bao giờ xem lại. Nhưng khi tác giả qua đời cộng đồng khoa học mới dậm chân kêu lên: sao không lục ra tìm hiểu nội dung tài liệu lưu trữ khi ông còn sống! Nếu biết được kho báu đó nằm ngoài lĩnh vực nghiên cứu của mình thì nhà Toán học *Cédric Villani* đã nghĩ rằng tài liệu chứa một điều gì đó "bất thường". "Phải kiên nhẫn", *Jean Malgoire* vội vã trả lời. Trong khi đó ngoài hành lang của khoa, người ta thăm thì với nhau rằng việc giải mã tài liệu của A.G để lại là một công việc rất công phu, phải mất hàng tháng, hàng năm và biết đâu, hàng chục năm, ...

Tiểu sử của A.G bắt đầu ở Berlin vào cuối những năm 20, và là cả một thiên tiểu thuyết thực sự. Một câu chuyện nhuộm đầy về sử thi! Cha của A.G là một người Do thái gốc Nga, *Sascha Schapiro*, nhà nhiếp ảnh và chiến sĩ “vô chính phủ”, muốn được tự do tuyệt đối trong tư tưởng và hành động, Mẹ là một nhà báo dân thân tên là *Hanka Grothendieck* mà ông lấy tên. Cậu bé *Alexandre* được giao cho một người bạn của gia đình ở Đức, khi cha mẹ ông qua Tây Ban Nha năm 1934.

Sự quân thú

Vào cuối cuộc nội chiến Tây Ban Nha, ông tìm lại được cha mẹ ở miền Nam nước Pháp. Bị lưu đầy, cha của ông chết ở *Auschwitz*, mẹ của ông và ông bị giam ở trại *Lozère*, nơi chính phủ Daladier giam cầm những “kẻ bướng bỉnh khó ưa”. Cậu bé A.G cuộc bộ đi học ở trường Mende, cách đó 3 km. Là một học trò ngoan, không xuất sắc gì, A.G làm Toán như mọi trẻ khác chơi bắt cướp. Năm 1985 trong cuốn tự thuật viết năm 1985 dưới tên “Gieo hạt và mùa gặt”, một cuốn sách đồ sộ khoảng 1000 trang ông viết: “Tôi học “định nghĩa của đường tròn” từ một người bạn gái ở cùng trại tập trung với tôi. Cô ta làm cho tôi rất có ấn tượng về tính đơn giản và hiển nhiên của nó, trong khi tính chất “tròn” hoàn toàn của đường tròn đối với tôi như một thực tế bí ẩn”.

Trong khi nhiều người học Toán ở Trung tâm này, Đại học nọ thì A.G lại tự học trong trường đời. Có một điểm đặc biệt, rất đặc biệt là “A.G không học Toán mà phát minh Toán”. Tự giam mình một góc, ông định nghĩa lại hết, không cần biết đó là cái gì, từ tích phân Lebesgue đến lý thuyết tương đối về tích phân và độ đo. Ở Đại học Montpellier, sinh viên ít chuyên cần. Ông cũng không mất công đi tìm bằng cấp cử nhân, là cái luôn chờ ông ở Ban thư ký. Năm 1948 chàng trai trẻ này đến Paris, Ông được tiến cử đến *Henri Cartan*, là người muốn xây dựng lại nền Toán học Pháp. Rồi ông gia nhập



Alexandre Grothendieck năm 1948, khi ông 20 tuổi

vào nhóm bảo vệ Toán học hiện đại ở Nancy của *Laurent Schwartz* và *Jean Dieudonné*. A.G nhận được ngay một lời “mắng” của *J. Dieudonné*: “Không phải cách làm việc như vậy”, khi thấy ông mầy mò chứng minh lại hết các định lý mà người khác đã chứng minh rồi. Hai danh sách gồm 14 bài Toán chưa giải được giao cho ông như một thử thách. Cái “thủ tục ban đầu” ấy đã được ông hoàn thành mỹ mãn: không đầy một năm ông đã giải quyết xong trọn vẹn. Và như là một “bài học” cho các giáo sư, người học trò ấy mở ra một hướng mới của Toán học. Ông lao đầu vào làm việc cật lực để hoàn thành sáu luận án Tiến sĩ trong vòng chưa đầy bốn năm. Năm 1958, trong khi người mẹ chết về bệnh lao vì thiếu chăm sóc, thì ông đang xây dựng lại toàn bộ Hình học đại số. Chỉ có thể!

Ngất quăng

Vì mỗi người đều cảm thấy rằng cần phải xây dựng một cái gì đó xung quanh nhà Toán học “ngoại cỡ” này nên Viện Nghiên cứu Khoa học cao cấp ra đời. Những nhà nghiên cứu không bị bắt buộc phải công bố đề tài và cũng không phải lên lớp. Yêu cầu duy nhất là gì? Ăn sáng và uống trà chung để tự do trao đổi ý tưởng. Chính thời gian này A.G cùng với các học trò *Michel Demazure*, *Luc Illusie*, *Michel Raynaud* và *Pierre Deligne* soạn ra “*Những yếu tố của hình học đại số*”, mà ngôn ngữ và nội dung rất xa lạ khó hiểu, theo cách nói của những người “ngoại đạo”, đúng là một thánh đường khái niệm, một hòn đá tảng của đại số hiện đại.

Và sau đó là một sự đoạn giao. Năm 1966 ông được giải thưởng Fields về Toán học, nhưng ông không “bỏ công” đến *Maxcova* để lấy. Không phải chỉ vì nước Nga trước kia đuổi cha ông mà để biểu thị sự phản đối nhà cầm quyền Nga đã bắt *Andrei Siniavski* và *Iouli Daniel* vào trại tập trung vì đã phát hành những ấn phẩm cấm. Năm sau ông đến Việt Nam và ở lại đó ba tuần để phản đối cuộc chiến tranh xâm lược của Đế quốc Mỹ, và để trao tặng số tiền đầu giá huy chương Fields. Hành động “quá tá” của ông, theo quan điểm chính quyền Pháp, khiến ông bị sa thải khỏi chức vụ giáo sư ở trường Đại học. Cũng gần như ngay lúc đó ông phát hiện ra một phần nhỏ ngân quỹ của Viện Nghiên cứu Khoa học cao cấp đến từ Bộ Quốc phòng, “Phần nhỏ” hay không đối với người dân thân thì đều là lớn!

Năm 1977, “đầu óc tự do”, như mọi người gọi ông, nhận được Huy chương Emile-Picard của Viện Hàn lâm Khoa học, rồi đến năm 1988 được giải thưởng Crafoord. Ông cũng không cho đó là điều quan trọng gì. Giải thưởng đầu ông đem biểu cho một học sinh cũ. còn giải thưởng Crafoord, vinh quang cho sự nghiệp khoa học thì ông từ chối một cách rất đơn giản. Số tiền 270000 USD, tức là 1,5 triệu franc lúc bấy giờ (tương đương 5 tỷ 400 triệu VND) cũng không làm ông quan tâm mà chỉ làm ông khó chịu. Và như trong bức thư từ chối mà ông gửi cho Ban Thư ký Viện Hàn lâm Thụy Điển, ông chờ sự phán quyết của thời gian để đánh giá sự phong phú của công trình của ông, mà tầm vóc của nó không còn nghi ngờ gì nữa.

Nhưng, như trong một cuốn tiểu thuyết, người anh hùng có nhiều cuộc đời, A.G, nhà Toán học đầy đặn kinh nghiệm, lại đi tiếp con đường của “nhà bảo vệ môi trường” một cách quyết liệt. Từ Montpellier trở về, ông thành lập nhóm “*Sống sót hay là sống*”. “*Đó là một con người say mê*” - theo lời kể của Jean Malgoire. Bằng cổ máy 2 mã lực ông đem chúng ta đến nghỉ cuối tuần ở nông thôn và trình cho chúng ta cái nhìn của ông về môi trường, về cuộc sống giản dị, về sự từ chối của ông với cuộc sống có điện, ... Ông mong ước Toán học áp dụng vào thực tế hàng ngày. Ông đi trước tất cả. “Có thật như thế không? Năm 1991 A.G không còn thiết tha gì đến sự tiến triển của thế giới khoa học- hay nói gọn là thế giới - ông rút lui xa hẳn, ẩn mình trong dãy núi Pyrénées, trong làng Laserre, và muốn đời quên mình đi. Không ai đến thăm, không quan hệ với ai, đó là quy tắc. Chỉ thỉnh thoảng có sự liên hệ với thầy giáo cũ. Ông có còn viết không? Malgoire cho rằng “không nghi ngờ gì nữa, ông còn viết”. Hàng ngàn trang, vài ý tưởng về Toán học vẫn liên tục đến với ông “từng đợt”, vài vần thơ tình yêu, những bài viết thần bí, ... “Einstein” Pháp này trông như một người ăn lương tối thiểu. Với thời gian tôi hiểu một cách đơn giản rằng A.G không chịu đựng được sự tồn tại của cái xấu, theo lời thô lỗ của Leila Schneps, người rất gần gũi với nhà Toán học và là thành viên của ê-kíp giải tích đại số của Jussieu. Leila Schneps nói tiếp: “A.G không chấp nhận một sự thật: có những người có ý định tốt của thế giới này, vẫn sống chung với nó mà không làm gì hết”! Ấn sĩ A.G sẽ nghĩ gì khi

thấy đám đông tập trung tại trung tâm Rabelais de Montpellier ngày thứ tư 17 tháng 12 năm 2014? Chiều hôm đó, nhà Triết học và Viện sĩ Jean-Luc-Marion bỏ không đến dự một cuộc họp quan trọng, và đề nghị Bertrand Toen thay thế mình. Ông phải đến dự một cuộc hội thảo do ông tổ chức và thuyết trình. Đề tài của cuộc hội thảo là gì? Là Alexandre Grothendieck. Trẻ, già, sinh viên khoa Toán hay chỉ đơn giản là những người mới bước vào Toán học, cả khán phòng đầy kín người, người ta phải mặc thêm một màn ảnh ở ngoài trời để cho những người không vào được bên trong không bị mất một tiếng nào trong cuộc hội thảo. Và ngay sau đó, các câu hỏi tập trung vào “kho vàng”. Theo Toen, chỉ một phần rất nhỏ của những nhà Toán học ngày nay có thể giải thích được tác phẩm của A.G. Không nghi ngờ gì nữa, những hộp bằng bia cứng mà A.G để lại chứa những dữ kiện quyết định. Ai trong các nhà nghiên cứu ở Princeton có thể thay thế được A.G tạo dựng ra một nền Toán học mới từ “lý thuyết của những mô-tip và những phạm trù cao cấp”?

Bực thờ linh vật

“A.G không tìm cách giải quyết những bài Toán mà chỉ nêu ra. Đó là điều khó nhất”, theo phân tích của Nikolaus Saby, hiện thân của thế hệ các nhà Toán học mới ở Montpellier, “Ông là người sáng tạo ra ngôn ngữ như Nietzsche đã làm cho tiếng Đức và Du Belley đã làm cho tiếng Pháp”. Rồi ông nói tiếp: “Đó là những sai lầm của ông, những nét gạch xóa của ông, những ngõ cụt của ông, những tiến trình mà đối với ông là quan trọng để nghiên cứu trong hàng ngàn bản ghi chép mà ông để lại”. Lại còn vấn đề thừa kế gia tài của ông, nếu một số hộp bia cứng nào đó đựng những tài liệu của ông để lại cho Đại học, thì những phần còn lại là thuộc quyền thừa kế của năm đứa con mà lâu nay ông không gặp, trừ lúc cuối đời.

Trong khi chờ đợi hội đồng do Jean Malgoire lãnh đạo phân phối nhiệm vụ giải mã các tài liệu Toán học của A.G để lại, thì đây là thời điểm của “tục thờ linh vật” trên khuôn viên Đại học Montpellier. Ở thư viện một số sinh viên thử sắp xếp lại những phiếu mà nhà Toán học đã ghi vẫn còn dấu vết trong một số sách của ông ta. Đối với Bertrand Toen, sự hâm mộ này báo hiệu một điều rất tốt lành vì Toán học rất cần những người nhiệt tình, say mê như thế!



GIẢI ĐÁP:

AI ĐÚNG ? AI SAI ? VÌ SAO ?

(Đề đăng trên TH&TT số 456, tháng 6 năm 2015)

Đề bài yêu cầu tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$ biết

$$\sin a + \cos a = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{3\pi}{4} < a < 2\pi.$$

$$\text{Ta có: với } \frac{3\pi}{4} < a < 2\pi \text{ thì } \begin{cases} 0 < \sin a < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 < \cos a < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \sin a + \cos a < 0 < \frac{1}{2}.$$

Điều này chứng tỏ không tồn tại góc $a \in \left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right)$ để $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$, do đó

không tồn tại $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

Nhận xét: 1) Như vậy lời giải của ba bạn *Đông, Xuân, Thanh* đều sai. Sẽ không quá ngạc nhiên khi cả ba bạn đều cho rằng mình giải đúng, lý do là trong logic mệnh đề: Khi mệnh đề A sai thì dù mệnh đề B đúng hay sai, mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$ luôn đúng. Do vậy để kiểm tra lời giải của một bài toán nào đó đúng hay sai, trước tiên chúng ta hãy kiểm tra giả thiết của bài toán (mệnh đề A) có đúng không, có tồn tại không, sau đó mới kiểm tra các bước lập luận, chứng minh, ...

2) Tuyên dương các bạn sau đã phát hiện ra sai lầm: **Nam Định:** *Trịnh Tuấn Giang*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn, Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Bắc Ninh:** *Ngô Văn Kháng*, 10A1, THPT Yên Phong số 2. **Hà Nội:** *Đình Văn*

Anh, 12A1, THPT Hồ Xuân hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 chuyên Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

KÍNH HIỂN VI



MỘT BÀI TOÁN TÌNH CỜ

Trong một lần xem vở của một em học sinh vừa mới trải qua kỳ thi THPT Quốc gia năm 2015 tôi có bắt gặp bài toán và lời giải sau:

Bài toán. Giải phương trình

$$2\tan 2x + 2\sin 2x = 3\cot x \quad (*).$$

Lời giải. ĐKXĐ:

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Đặt $\tan x = t$, suy ra

$$\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cot x = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} = 3 \cdot \frac{1}{t}.$$

Quy đồng hai vế rồi khử mẫu ta được:

$$3t^4 + 8t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Với } t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ suy ra } \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Các em có nhất trí với lời giải trên hay không ?

NGUYỄN TRỌNG THỌ

(GV THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ **Mathematics and Youth Magazine**

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 460 (10.2015)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoiitre@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Khánh Nguyên – Nguyên tắc cực hạn; Quy tắc “Biên”.

4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016.

6 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc Gia TP Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016.

7 Chuẩn bị cho kỳ thi Trung học phổ thông Quốc Gia

Lê Ngô Nhật Huy – Bài toán tiếp tuyến với đồ thị hàm số.

9 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 1

10 Hướng dẫn giải - Đề số 1.

11 Thử sức trước kì thi - Đề số 2.

12 Giải toán với máy tính

Huỳnh Kim Dược, Đinh Hữu Lâm, Tạ Duy

Phượng – Bài giải đề thi Giải toán trên máy tính khoa học Hà Nội, 2014 - 2015.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/460, ..., T12/460, L1/460, L2/460.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

27 Diễn đàn dạy học Toán

Lương Cao Vinh – Từ bài toán trong SGK đến cách giải bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

31 Diễn đàn phương pháp giải toán

Trần Quốc Luật – Sử dụng đánh giá trung gian để tìm giới hạn dãy số.

36 Chuyện kể về Lịch sử Toán học

Phan Thanh Quang – Di chúc “chưa được giải mã” của nhà Toán học Alexandre Grothendieck.

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp. Ai đúng? Ai sai? Vì sao?

Nguyễn Trọng Thọ – Một bài toán tình cờ.

Ảnh Bìa 1. Cột cờ Hà Nội – Ảnh: Phan Ngọc Quang.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

HÃY ĐẶT MUA TC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ !

<https://tieulun.hopto.org>

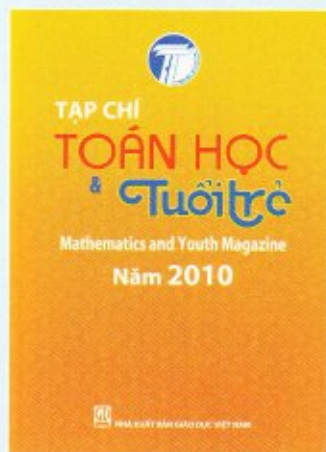


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

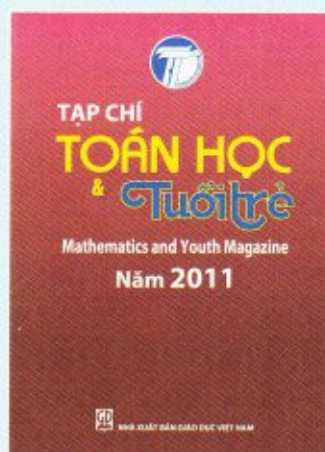
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

BỘ ĐÓNG TẬP

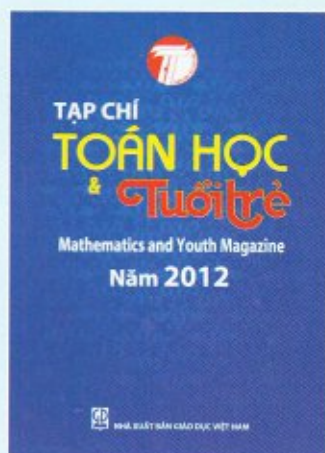
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



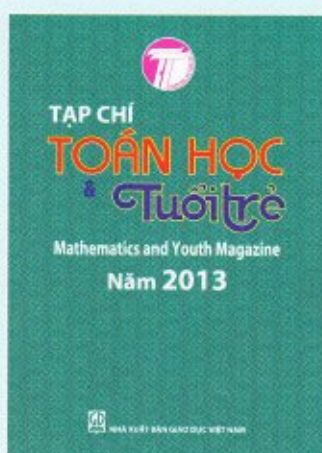
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



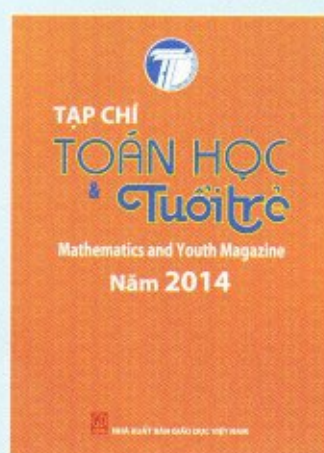
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở **BƯU ĐIỆN** trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

187B GIẢNG VỖ, ĐÓNG ĐÀ, HÀ NỘI

• Điện thoại – Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

• Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

HÃY ĐẶT MUA TC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ !

<https://tieulun.hopto.org>



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu

Bộ sách mới

CÁC KỲ THI TOÁN QUỐC TẾ

Bộ sách *Các kì thi Toán quốc tế* nhằm giới thiệu cho các em học sinh một số kì thi Toán quốc tế và khu vực có uy tín. Trong đó, dự kiến bốn tập đầu của bộ sách như sau:

Tập 1. Giới thiệu các kì thi ITOT (International Mathematics Tournament of the Towns) và IMC (International Mathematics Competition).

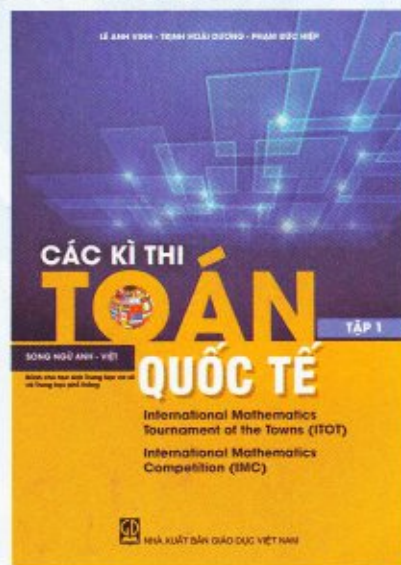
Tập 2. Giới thiệu các kì thi IMSO (International Mathematics and Science Olympiad) và HMMT (Harvard-MIT Mathematics Tournament).

Tập 3. Giới thiệu các kì thi AMC (American Mathematics Competitions) và AIME (The American Invitational Mathematics Examination).

Tập 4. Giới thiệu kì thi APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad).

Việc tiếp cận với các kì thi quy mô quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn ngoài chương trình phổ thông, sẽ có tác động tích cực đến việc thúc đẩy phong trào học tập nói chung. Bên cạnh đó, đây cũng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt hơn trong các kì thi học sinh giỏi mà các em có cơ hội tham dự. Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS. TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kì thi Toán quốc tế và khu vực.

Kì thi Toán quốc tế giữa các thành phố (ITOT) được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1980 tại Nga với mục đích chính là tạo cơ hội cho nhiều học sinh có thể tham gia một kì thi chuẩn quốc tế. Danh tiếng của kì thi lớn dần qua từng năm, và những năm tiếp theo kì thi được mở rộng ở quy mô quốc tế. Đến nay, có hàng chục nghìn thí sinh đến từ 120 thành phố thuộc 25 nước tham gia kì thi hằng năm. Năm 2015, trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội là đơn vị đại diện tổ chức kì thi ITOT lần đầu tiên tại Việt Nam. *Kì thi Toán quốc tế* (IMC) là kì thi hằng năm dành cho các học sinh lứa tuổi dưới 15 (Junior) và dưới 17 (Senior) giữa các quốc gia. Kì thi này là sự hợp nhất vào năm 2008 của kì thi IWYMC (được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1999 tại Đài Loan) và EIMC (được tổ chức lần đầu tiên vào năm 2003 tại Thái Lan). Cho đến nay kì thi đã thu hút được sự tham gia của hơn 30 quốc gia và được đánh giá là một kì thi quốc tế có uy tín. Việt Nam lần đầu tiên tham dự kì thi này vào năm 2011 và đều đạt thành tích cao. Đặc biệt năm 2015, đoàn Việt Nam đã xuất sắc đạt thành tích xếp Số 1 toàn đoàn trong số các nước tham dự, trong đó có 3 huy chương Vàng cá nhân (có một cá nhân đạt điểm cao nhất cuộc thi), 4 cúp vô địch đồng đội với một đội đạt điểm số tuyệt đối.



Địa chỉ liên hệ: **Phòng Kinh doanh - CTCP Dịch vụ xuất bản giáo dục Hà Nội**

Địa chỉ: **187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội**

Tel: **0435121974 – Fax: 0435121973**

ISSN: 0866-8035

Chỉ số: 12884

Mã số: 8BT10M5

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Xí nghiệp Bùn đỏ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2015

Giá: 12.500 đồng

Mười hai nghìn năm trăm đồng

HÃY ĐẶT MUA TC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ !