



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2015
Số 456

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI BƯU CỤC HOẶC VỚI TÒA SOẠN !

KÌ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2015

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 56 năm 2015 (IMO 2015) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 25 và 26/3/2015. Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành, Bộ GD&ĐT đã triệu tập 49 học sinh tham dự kì thi tuyển chọn nói trên, gồm 1 học sinh đã tham dự IMO 2014 và 48 học sinh đạt từ 21,50 điểm trở lên trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm 2015. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải 3 bài toán trong thời gian 270 phút; điểm tối đa của mỗi ngày thi là 21 điểm.

ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất, 25/3/2015

Bài 1. (7 điểm). Cho α là nghiệm dương của phương trình $x^2 + x = 5$. Giả sử n và $c_0, c_1, \dots, c_n$ là các số nguyên không âm sao cho

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_n\alpha^n = 2015 \quad (*).$$

- Chứng minh rằng $c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n \equiv 2 \pmod{3}$.
- Cho n thay đổi và $c_0, c_1, \dots, c_n$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n.$$

Bài 2. (7 điểm). Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi H là trực tâm tam giác, I là trung điểm của cạnh BC , D là giao điểm của AH và BC . Tia IH cắt (O) tại K , tia KD cắt (O) tại M . Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt AI tại N .

- Chứng minh rằng N chạy trên một đường tròn cố định.
- Đường tròn đi qua điểm N và tiếp xúc với đường thẳng AK tại điểm A cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi J là trung điểm của đoạn PQ . Chứng minh rằng đường thẳng AJ đi qua một điểm cố định.

Bài 3. (7 điểm). Số nguyên dương k được gọi là có tính chất $T(m)$ nếu với mọi số nguyên a , tồn tại số nguyên dương n sao cho $1^k + 2^k + \dots + n^k \equiv a \pmod{m}$.

- Tìm tất cả các số nguyên dương k có tính chất $T(20)$.
- Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất $T(20^{15})$.

Ngày thi thứ hai, 26/3/2015

Bài 4. (7 điểm). Có 100 sinh viên tham dự một cuộc thi vấn đáp. Ban giám khảo gồm 25 thành viên. Mỗi sinh viên được hỏi thi bởi một giám khảo. Biết rằng mỗi sinh viên thích ít nhất 10 giám khảo trong số các thành viên trên.

- Chứng minh rằng có thể chọn ra 7 giám khảo sao cho mỗi sinh viên thích ít nhất một trong 7 giám khảo này.
- Chứng minh rằng có thể sắp xếp cuộc thi sao cho mỗi sinh viên được hỏi thi bởi giám khảo mà mình thích và mỗi giám khảo hỏi thi không quá 10 sinh viên.

Bài 5. (7 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân và điểm P nằm bên trong tam giác sao cho $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \alpha$ với $\alpha > 180^\circ - \widehat{BAC}$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB và APC lần lượt cắt AC và AB tại E và F . Lấy điểm Q bên trong tam giác AEF sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{AQF} = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua đường thẳng EF . Đường phân giác trong của góc $\widehat{EDF}$ cắt PA tại T .

- Chứng minh $\widehat{DET} = \widehat{ABC}$, $\widehat{DFT} = \widehat{ACB}$.
- Đường thẳng PA cắt DE, DF lần lượt tại M, N . Gọi I, J lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ với tâm là điểm K . Đường thẳng DT cắt (K) tại điểm H . Chứng minh HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác DMN .

Bài 6. (7 điểm). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại n số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Tổng của chúng là một số dương;
- Tổng các lập phương của chúng là một số âm;
- Tổng các lũy thừa bậc 5 của chúng là một số dương.

KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành, Bộ GD&ĐT đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2015:

- Nguyễn Tuấn Hải Đăng, h/s lớp 12 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, 32.50 điểm;
- Nguyễn Huy Hoàng, h/s lớp 12 Trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 29.50 điểm;
- Nguyễn Thế Hoàn, h/s lớp 12 Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, 27.50 điểm;
- Hoàng Anh Tài, h/s lớp 12 Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, 25.00 điểm;
- Nguyễn Thị Việt Hà, h/s lớp 12 Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, 24.50 điểm;
- Vũ Xuân Trung, h/s lớp 11 Trường THPT chuyên Thái Bình, 24.50 điểm.

Ngày 16/4/2015, Bộ GD&ĐT đã triệu tập 6 học sinh của Đội tuyển về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho IMO 2015. Trường ĐHSP Hà Nội được Bộ GD&ĐT giao nhiệm vụ chủ trì công tác tập huấn đội tuyển, dưới sự giám sát của Bộ.

IMO 2015 sẽ được tổ chức từ ngày 4/7 đến ngày 16/7/2015 tại Chiang Mai, Thái Lan <https://tieulun.hopto.org>

**TRUNG HỌC CƠ SỞ**

LINH HOẠT ĐỂ ĐƯA BÀI TOÁN VỀ SỬ DỤNG HỆ THỨC VIỆT

HOÀNG THUẬT

(GV THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai, Hà Nội)

Trong đề thi vào THPT luôn xuất hiện bài toán liên quan đến việc áp dụng hệ thức Viète. Có những bài toán có thể dễ dàng đưa về dạng áp dụng được hệ thức Viète, nhưng cũng có những bài toán phải rất khéo léo mới thực hiện được điều đó và nó gây không ít khó khăn đối với các em học sinh. Sau đây là một số dạng toán như vậy và cách sử dụng hệ thức Viète để giải chúng.

Dạng 1: Phương trình bậc hai có tham số

Bài 1. Cho phương trình:

$$8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$.

Nhận xét. Ta thấy hệ thức đề bài đưa ra có vẻ phức tạp và gây khó khăn khi đưa về $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ nhưng ta có thể biến đổi x_1, x_2 thông qua phương trình (*) để sử dụng hệ thức Viète.

Lời giải. Ta có $\Delta' = 8 - 8m^2$. Để PT (*) có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. Khi đó theo hệ thức Viète có: $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 = (m^2 + 1) : 8$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của PT (*) nên

$$\begin{cases} 8x_1^2 - 8x_1 = -(m^2 + 1) \\ 8x_2^2 - 8x_2 = -(m^2 + 1) \end{cases} \quad (I)$$

Ta có: $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$

$$\Leftrightarrow x_1^2(8x_1^2 - 8x_1) - x_2^2(8x_2^2 - 8x_2) = 0 \quad (1)$$

Thay (I) vào (1) ta được

$$(x_1^2 - x_2^2)(-m^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(-m^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ (vì } x_1 + x_2 = 1 \text{ và } -m^2 - 1 \neq 0).$$

Do đó $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, mà $x_1 x_2 = \frac{m^2 + 1}{8}$, suy ra $m = \pm 1$ (thỏa mãn bài toán).

Bài 2. Cho PT $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1).

Tìm m để PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2mx_2 = 9$.

Lời giải. $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và theo hệ thức Viète có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - m + 1$.

Vì x_1 là nghiệm của PT(1) nên :

$$x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2mx_1 - m^2 + m - 1.$$

Kết hợp với đầu bài ta có: $x_1^2 + 2mx_2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2mx_1 - m^2 + m - 1 + 2mx_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) - m^2 + m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (loại)} ; m = \frac{5}{3} \text{ (chọn)}.$$

Bài 3. Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0 \text{ (} m \text{ là tham số).}$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Lời giải. $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$ (*) thì phương trình

có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó: $x_1 + x_2 = 2(m+1);$

$$x_1 x_2 = m^2 + 4 \text{ và } x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4.$$

Theo đề bài $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 4m^2 - 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow [2(m+1)]^2 - 4m^2 - 20 \leq 0,$$

$$\text{(do } (x_1 + x_2) = 2(m+1))$$

$$\Leftrightarrow 8m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kết hợp với (*) ta có: $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$.

Bài 4. Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0 \quad (2)$$

Lời giải. $\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0$ luôn đúng với mọi m , vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Khi đó:

$$x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1 \cdot x_2 = 2m-5.$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm PT(1) nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m-5 = 0 \\ x_2^2 - 2(m-1)x_2 + 2m-5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 2m-1 = 4-2x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 2m-1 = 4-2x_2 \end{cases}$$

Từ (2) suy ra: $(4-2x_1)(4-2x_2) < 0$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 - 8(x_1 + x_2) + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(2m-5) - 8 \cdot 2(m-1) + 16 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + (m-1)x - 6 = 0$ (1).
 Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt
 x_1, x_2 mà $B = (x_1^2 - 9)(x_2^2 - 4)$ đạt GTLN.

Lời giải. Ta thấy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt
 x_1, x_2 với mọi m vì có $a \cdot c = -6 < 0$. Theo hệ thức

$$\text{Viète: } x_1 \cdot x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-6}{x_1} \text{ và } x_1 + x_2 = 1 - m.$$

$$B = (x_1^2 - 9)(x_2^2 - 4) = x_1^2 \cdot x_2^2 - (4x_1^2 + 9x_2^2) + 36$$

$$= 36 - (4x_1^2 + \frac{324}{x_1^2}) + 36$$

$$B \leq 36 - 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{324}{x_1^2}} + 36 = 0.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 4x_1^2 = \frac{324}{x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow x_1^4 = 81 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ hoặc } x_1 = -3.$$

• Khi $x_1 = 3$ thì $x_2 = -2$, suy ra: $m = 0$

• Khi $x_1 = -3$ thì $x_2 = 2$, suy ra: $m = 2$

Vậy $\min B = 0$, khi $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Dạng 2: Tương giao của parabol và đường thẳng

Bài 1. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường
 thẳng (d): $y = 2x - m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P)
 tại hai điểm phân biệt có tọa độ: $(x_1; y_1)$ và
 $(x_2; y_2)$ sao cho $x_1, x_2 (y_1 + y_2) = -48$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của
 (P) và (d) là: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương

trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow$

$m < 3$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm PT (1), ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-1) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = 2x_1 - m + 1 \\ y_2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Ta có: $x_1x_2(y_1 + y_2) = -48$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(2x_1 - m + 1 + 2x_2 - m + 1) = -48$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)[2(x_1 + x_2) - 2m + 2] = -48$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)[8 - 2m + 2] = -48$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0.$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (chọn) hoặc } m = 7 \text{ (loại)}.$$

Bài 2. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường
 thẳng (d): $y = (3-m)x + 2 - 2m$. Tìm m để (d)
 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A $(x_A; y_A)$; B $(x_B; y_B)$
 thỏa mãn: $|y_A - y_B| = 2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của
 (P) và (d) là:

$$x^2 + (3-m)x + 2 - 2m = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, ta thấy

x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (2).

Lại có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = m-3 \\ x_A \cdot x_B = 2-2m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_A = (3-m)x_A + 2-2m \\ y_B = (3-m)x_B + 2-2m \end{cases}$$

$$\text{Do đó } |y_A - y_B| = 2 \Leftrightarrow |(3-m)(x_A - x_B)| = 2$$

$$\Leftrightarrow (3-m)^2 [(x_A + x_B)^2 - 4x_A \cdot x_B] = 4$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2 (m+1)^2 = 4. \text{ Tìm được}$$

$$m = 1 \pm \sqrt{6}; m = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Bài 3. Cho đường thẳng (d): $y = (k-1)x + 4$ và
 parabol (P): $y = x^2$. Tìm k để (d) và (P) cắt nhau
 tại hai điểm phân biệt. Gọi tọa độ giao điểm là
 $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$. Tìm k để $y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của
 (P) và (d) là: $x^2 - (k-1)x - 4 = 0$ (k là hằng
 số). Phương trình này có: $a \cdot c = -4 < 0$, nên
 luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k-1 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } y_1 + y_2 = y_1 \cdot y_2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (k-1)^2 + 8 = 16 \Leftrightarrow k = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

TRƯỜNG THPT TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi đăng trên TH&TT số 455, tháng 5 năm 2015)

Câu 1. a) ĐKXD: $x \geq \frac{-1}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4})^2 = (1+\sqrt{2x+1})^2 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4(2x+1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0. \end{aligned}$$

Từ đây tìm được nghiệm: $x = 4, x = 0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4; 0\}$.

b) ĐKXD: $x \geq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow (x+\sqrt{x}+1)^2 = 2(x^2+2x+1) - 34x \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2\sqrt{x}(x+1) + x = 2(x+1)^2 - 34x \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 35x - 2\sqrt{x}(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 7\sqrt{x}(x+1) + 5\sqrt{x}(x+1) - 35x = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+1-7\sqrt{x}) + 5\sqrt{x}(x+1-7\sqrt{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1-7\sqrt{x})(x+1+5\sqrt{x}) = 0. \end{aligned}$$

Tìm được tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{ \frac{47+21\sqrt{5}}{2}, \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 2. a) $8p-1, 8p, 8p+1$ là ba số nguyên liên tiếp, nên có một số chia hết cho 3. Mà $8p-1, 8p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên là số không chia hết cho 3. Do vậy $(8p):3$. Mà

$(8; 3) = 1$ nên $p:3$. Do p là số nguyên tố nên $p=3$; $p=3$ thì $8p+1=25$ là hợp số.

Vậy không có số nguyên tố p thỏa mãn $8p-1, 8p+1$ là các số nguyên tố.

b) Ta có $3^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 2^y$ (*)

• Nếu $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), từ (*) ta có

$$(3^k+1)(3^k-1) = 2^y. \text{ Do đó } \begin{cases} 3^k+1=2^a \\ 3^k-1=2^b \end{cases} \text{ trong}$$

đó $a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$. Ta có

$$2^a - 2^b = 2 \Leftrightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 2. \text{ Nên}$$

$$\begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 1 \\ 2^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b} = 2^1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 3^k+1=2^2 \\ 3^k-1=2^1 \end{cases} \Leftrightarrow 3^k = 3^1 \Leftrightarrow k = 1. \text{ Khi đó}$$

$$x = 2. \text{ Từ (*) có } 2^y = 3^2 - 1 \Leftrightarrow 2^y = 2^3 \Leftrightarrow y = 3,$$

• Nếu $x = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), ta có

$$3^x - 1 = 3(3^{2k} - 1) + 2 = 3(9^k - 1^k) + 2 \text{ chia cho } 8 \text{ dư } 2 \text{ (vì } (9^k - 1^k):(9-1) \Rightarrow 2^y \text{ chia cho } 8 \text{ dư } 2$$

$$\Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow y = 1. \text{ Ta có } 3^x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy các cặp số nguyên dương } (x; y) \text{ cần tìm là: } (2; 3), (1; 1).$$

Câu 3. a) Ta có $(a+b)^2 \leq (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

Do đó $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Tương tự

$$(a^2+b^2)^2 \leq 2(a^4+b^4). \text{ Ta có}$$

$$(a+b)^2(a^2+b^2)^2 \leq 4(a^2+b^2)(a^4+b^4). \text{ Mà}$$

$$(a+b)^2 = 4. \text{ Do vậy, ta có } a^2+b^2 \leq a^4+b^4.$$

b) Do $x, y, z > 0, xy + yz + zx = 1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+xz+xy+yz}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right).$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right) \quad (1).$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right) \quad (2).$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y+z} + \frac{z}{x+z} \right) \quad (3). \text{ Từ (1), (2) và (3)}$$

$$\begin{aligned} \text{ta có: } &\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} + \frac{z}{x+z} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

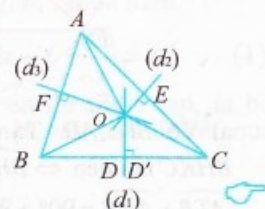
Câu 4. a) Giả sử $(d_1), (d_2),$

(d_3) đồng quy tại O .

Do $\triangle OBD$ vuông tại D ,

$\triangle OCD$ vuông tại D nên

theo định lý Pythagore ta



TIN TỨC**LỄ TỔNG KẾT VÀ TRAO GIẢI THƯỞNG THI HOMC 2015
HỘI ĐỒNG THI HÀ NỘI**

Kỳ thi Olympic Toán Hà Nội mở rộng - giải Toán bằng tiếng Anh - lần thứ 12 năm 2015 (HOMC 2015) tổ chức ngày 22/3/2015 đã thành công tốt đẹp. Ngày 17/5/2015 tại Trường THPT Chu Văn An, Hà Nội, Ban chỉ đạo thi HOMC 2015 đã tiến hành lễ tổng kết và trao giải thưởng cho các thí sinh dự thi ở hội đồng thi Hà Nội.

Lần thi thứ 12 này đã có 42 tỉnh, thành phố tham dự với số lượng 634 thí sinh: 320 thí sinh lứa tuổi Junior (lớp 8 THCS) và 314 thí sinh lứa tuổi Senior (lớp 10 THPT) thi tại ba Hội đồng: Hà Nội: 487 thí sinh (237 lớp 8; 250 lớp 10); Đắk Lắk: 57 thí sinh (13 lớp 8; 44 lớp 10); Đồng Tháp: 90 thí sinh (25 lớp 8; 65 lớp 10). Tổng số giải thưởng của kỳ thi HOMC 2015 là: 449 giải gồm 45 giải Nhất, 120 giải Nhì, 155 giải Ba và 129 giải Khuyến khích. Bài thi được chấm theo thang điểm 15, phổ điểm có từ 0 điểm đến 13,5 điểm. Không có điểm tuyệt đối 15/15. Chất lượng bài làm của thí sinh tốt hơn các năm trước, thể hiện ở điểm bình quân tương đối cao. Thủ khoa ở lứa tuổi Junior có 1 em: *Mẫn Đào Sơn Tùng*, THCS Hoàng Văn Thụ, Lạng Sơn, 13,5 điểm. Thủ khoa ở lứa tuổi Senior có 3 em: *Phạm Kim Anh*, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, 13,5 điểm; *Mai Đặng Quân Anh*, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, 13,5 điểm; *Đoàn Cao Khả*, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, 13,5 điểm. Thí sinh đạt giải được nhận *Giấy chứng nhận* của Sở GD - ĐT và Hội Toán học Hà Nội, giải thưởng của Sở và quà tặng của Hội. Các tỉnh, thành có học sinh tham dự kỳ thi HOMC 2015 được tặng Cờ lưu niệm của Ban tổ chức. Mọi người đều mong muốn, như lời GS. Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội: "*Sớm mở rộng cuộc thi HOMC ra các nước ASEAN*" để học sinh Việt Nam được đua tài cùng học sinh các nước trong khu vực Đông Nam Á - Thái Bình Dương.

Thông tin chi tiết xin xem trên trang Web của Hội Toán học Hà Nội www.hms.org.vn

THẨM NGỌC KHUÊ (Hà Nội)

✎ có $DB^2 + OD^2 = OB^2$, $DC^2 + OD^2 = OC^2$. Do đó $DB^2 - DC^2 = OB^2 - OC^2$ (1). Chứng minh tương tự cũng có: $EC^2 - EA^2 = OC^2 - OA^2$ (2) và

$FA^2 - FB^2 = OA^2 - OB^2$ (3). Từ (1), (2) và (3) ta có

$$(DB^2 - DC^2) + (EC^2 - EA^2) + (FA^2 - FB^2) = 0 (*)$$

b) Giả sử có (*). Gọi O là giao điểm của (d_2) và (d_3) . Vẽ $OD' \perp BC$ tại D' . Cần chứng minh $D' \equiv D$. Từ câu a) ta có

$$(D'B^2 - D'C^2) + (EC^2 - EA^2) + (FA^2 - FB^2) = 0 (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $DB^2 - DC^2 = D'B^2 - D'C^2$

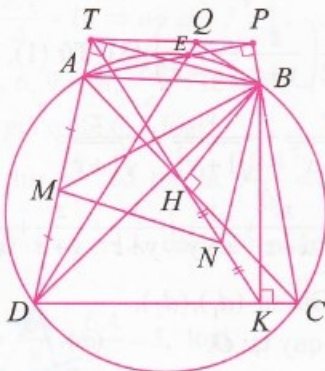
$$\Leftrightarrow BC(DB - DC) = BC(D'B - D'C)$$

$$\Leftrightarrow DB - DC = D'B - D'C$$

$$\Leftrightarrow (DB + DC) - 2DC = (D'B + D'C) - 2D'C$$

$$\Leftrightarrow DC = D'C \Leftrightarrow D' \equiv D \text{ (đpcm).}$$

Câu 5.



a) Vẽ $BT \perp AD$. Ta có $\widehat{BHC} = \widehat{BKC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BHCK$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{BHK} + \widehat{BCK} = 180^\circ$. Mà

$$\widehat{ATB} + \widehat{AHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \text{tứ giác } ATBH \text{ nội}$$

tiếp $\Rightarrow \widehat{BHT} = \widehat{BAT}$. Mà $\widehat{BAT} = \widehat{BCK}$ (từ giác $ABCD$ nội tiếp) nên $\widehat{BHT} = \widehat{BCK}$, do đó

$$\widehat{BHT} + \widehat{BHK} = 180^\circ \Rightarrow K, H, T \text{ thẳng hàng.}$$

Chứng minh tương tự cũng có P, Q, T thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AD, PQ, HK đồng quy.

b) Tứ giác $DTBK$ có:

$\widehat{DTB} + \widehat{DKB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $DTBK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{HKB}$. Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BHK}$ (vì cùng bù với $\widehat{BCD}$) $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HKB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{HB} = \frac{AD}{HK} \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{2AM}{2HN} = \frac{AM}{HN}.$$

$\triangle BAM$ và $\triangle BHN$ có: $\widehat{BAM} = \widehat{BHN}$, $\frac{AB}{HB} = \frac{AM}{HN}$

$$\Rightarrow \triangle BAM \sim \triangle BHN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{BNH}$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BNMT$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BNM} + \widehat{BTM} = 180^\circ$.

$$\widehat{BNM} = 180^\circ - \widehat{BTM} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Vậy MN vuông góc với NB .

Câu 6. Có 50 đỉnh nên có 50 tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp. Vì ba đỉnh liên tiếp bất kỳ các số không bằng nhau nên chỉ có hai loại tích:

Loại I: Ba số ở ba đỉnh liên tiếp chỉ có một số 2, tích ba số này bằng 2. *Loại II:* Ba số ở ba đỉnh liên tiếp có hai số 2, tích ba số này bằng 4.

Gọi số tích loại I là x ($x \in \mathbb{N}$) thì số tích loại II là $50 - x$. Mà số số 2 ở 50 tích có là $30 \cdot 3 = 90$, ta có phương trình: $x \cdot 1 + (50 - x) \cdot 2 = 90 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy có 10 tích loại I và 40 tích loại II. Do vậy tổng tất cả các tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác là: $2 \cdot 10 + 4 \cdot 40 = 180$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Tỉnh Ninh Thuận
NĂM HỌC 2014 - 2015

(Thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình:

$$x^2 - 2x + m^2 - 2m + 1 = 0 \quad (1), \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

- a) Giải phương trình (1) khi $m = \sqrt{2}$.
 b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $|x_2 - x_1| \leq 2$.

Câu 2 (2 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị

lớn nhất của biểu thức: $D = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

Câu 3 (4 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (C) di động luôn tiếp xúc trong với nửa đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đoạn AB tại D; CA và CB lần lượt cắt đường tròn (C) tại M, N.

a) Xác định tâm O' của đường tròn (C) và chứng minh $AB \parallel MN$.

b) Chứng minh CD là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ và CD đi qua một điểm cố định E.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tiếp xúc với AE tại A.

Câu 4 (2 điểm). Cho phân số $p = \frac{n^2+4}{n+5}$, với n

là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2015 sao cho phân số p chưa tối giản.

CAO TRẦN TỨ HẢI
(Ninh Thuận) giới thiệu

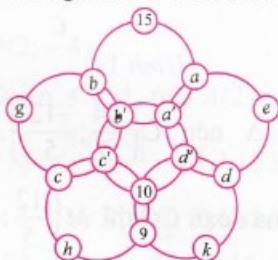
Giải đáp

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH HOA

(Đề đăng trên TH&TT số 450 tháng 12 năm 2014)

PHI PHI (Hà Nội)

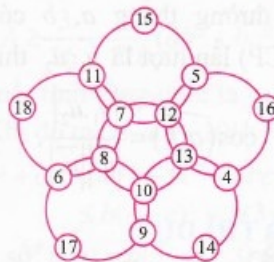
Kí hiệu các số trong các ô tròn như ở hình 1.



Hình 1

Từ giả thiết ta có $m = a' + b' + c' + d' = 40$ (1). Đặt $n = a + b + c + d$ và $p = e + g + h + k$. Xét tổng các số nằm trên sáu vòng tròn ta có $3(m + 10) + 2(n + 9) + (p + 15) = 50.6$ hay $3m + 2n + p = 237$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $2n + p = 117$ (3). Tổng các số được điền là $4 + 5 + \dots + 17 + 18 = 165 = m + n + p + 15 + 10 + 9$, kết hợp với (1) suy ra $n + p = 91$. Thay vào (3) tìm được $n = 26$ và $p = 65$ (4). Thay (4) vào (2) được $m + 2(a' + b' + c' + d') + 2(c + c' + h) + 2(d + d' + k) + e + g = 237 + h + k$. Từ đó có $40 + 2.35 + 2.31 + 2.31 + e + g = 237 + h + k$, tức là $e + g = 3 + h + k$ (5). Từ (5) và $p = e + g + h + k = 65$ suy ra $e + g = 34 = 18 + 16$ và $h + k = 31 = 17 + 14$.

• Với $e = 16, g = 18$ và $h = 17, k = 14$, suy ra $c + c' = 14 = 6 + 8, d + d' = 17 = 4 + 13 = 5 + 12, a + a' = 17 = 4 + 13 = 5 + 12, b + b' = 11 + 7$. Kết hợp với (1), (4) có nghiệm $(e, g, h, k, c, c', d, d', a, a', b, b')$ bằng $(16, 18, 17, 14, 6, 8, 4, 13, 5, 12, 11, 7)$ (hình 2) và $(16, 18, 17, 14, 6, 8, 5, 12, 4, 13, 11, 7)$.



Hình 2

• Với $e = 16, g = 18$ và $h = 14, k = 17$, suy ra $d + d' = 14 = 6 + 8, c + c' = 17 = 5 + 12, a + a' = 20 = 7 + 13, b + b' = 15 = 4 + 11$, không thỏa mãn (1).

• Với $e = 18, g = 16$. Xét tương tự trên thì tồn tại hình đối xứng với hình có nghiệm nêu trên qua trục đối xứng là đường thẳng đi qua tâm các ô tròn ghi các số 15, 10, 9. Vậy bài toán có tất cả bốn nghiệm.



VẬN DỤNG GÓC ĐỂ GIẢI

CÁC BÀI TOÁN TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

TRỊNH BA

(GV THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh)

Trong đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng (mà nay gọi là Kỳ thi THPT Quốc gia) có một câu hỏi về bài toán hình học vận dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Đây là bài toán tương đối khó để phân loại thí sinh; mà phần cơ bản nhất là viết phương trình (PT) đường thẳng. Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một số thí dụ về các bài toán viết PT đường thẳng đi qua một điểm cho trước và tạo với đường thẳng cho trước một góc α .

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1) Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ được tính

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

2) Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau là góc nhỏ nhất trong hai cặp góc đối đỉnh, vậy góc giữa hai đường thẳng là góc có số đo không vượt quá 90° .

3) Nếu hai đường thẳng a, b có vector pháp tuyến (VTPT) lần lượt là $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ thì

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

4) Nếu hai đường thẳng a, b có vector chỉ phương (VTCP) lần lượt là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}.$$

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. (Trích Câu 7 trong đề thi mẫu của Bộ GD&ĐT năm 2015). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác OAB có các đỉnh A và B thuộc đường thẳng

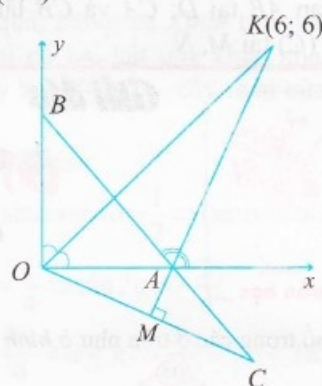
$\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$ và điểm $K(6; 6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O . Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC = AO$ và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với điểm A . Biết rằng

điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ các đỉnh A, B .

Phân tích.

- Tìm tọa độ điểm A trước: A là giao điểm của đường trung trực của đoạn CO và đường thẳng Δ .
- Tìm tọa độ điểm B : B là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng OB . Viết PT đường thẳng OB qua O hợp với OK một góc bằng góc giữa OA và OK .

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Vì C thuộc Δ nên $C\left(\frac{24}{5}; -\frac{12}{5}\right)$. Gọi M là

trung điểm của đoạn CO thì $M\left(\frac{12}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

Gọi d là đường trung trực của đoạn CO thì d đi qua M và vuông góc với CO : $x + 2y = 0$ nên

$$d: 2x - y - 6 = 0.$$

Do $AC = AO$ và A thuộc Δ nên A là giao điểm của d và Δ , tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3; 0).$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{AOK} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OK}}{|\vec{OA}| |\vec{OK}|} = \frac{|3 \cdot 6 + 0 \cdot 6|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOK} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

Đường thẳng OB vuông góc với OA nên có PT là $x=0$.

Tọa độ của B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x=0 \\ 4x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B(0;4).$$

Thí dụ 2 (Trích đề ĐH Khối A năm 2014). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB , N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN=3NC$. Viết PT đường thẳng CD , biết rằng $M(1;2), N(2;-1)$.

Phân tích.

• Tìm tọa độ điểm P là giao điểm của MN và CD từ hệ thức $\overline{MN} = k \cdot \overline{NP}$, với $k = \frac{MN}{NP} = \frac{AN}{NC} = 3$.

• Đường thẳng CD đi qua điểm P và tạo với đường thẳng MN góc $\alpha = \widehat{MPH}$ và $\cos \alpha = \frac{HP}{MP}$, chú ý rằng HP, MP đều tính được theo a (a là độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$).

Lời giải. (h.2)

Gọi $P = MN \cap CD$; H là điểm đối xứng của M qua tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có

$$\frac{MN}{NP} = \frac{AM}{PC} = \frac{AN}{NC} = 3 \quad (1) \text{ suy ra } \overline{MN} = 3\overline{NP}.$$

Gọi $P(x;y)$, từ hệ thức trên ta có $P\left(\frac{7}{3}; -2\right)$.

Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$, từ hệ thức (1) ta có:

$$MH=a, PC=\frac{a}{6}, HP=\frac{1}{3}a, MP=\sqrt{MH^2+HP^2}=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng CD và MP ,

$$\text{khi đó } \alpha = \widehat{MPH} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{HP}{MP} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Gọi $\vec{u}=(a;b) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng CD , vì $\overline{MN}=(1;-3)$ nên

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \overline{MN}|}{|\vec{u}| \cdot |\overline{MN}|} = \frac{|a-3b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow |a-3b| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4b^2-3ab=0$$

$$\Leftrightarrow b=0 \text{ hoặc } b=\frac{3}{4}a.$$

• Với $b=0$, chọn $a=1$ thì $\vec{u}=(1;0)$, đường

$$\text{thẳng } CD \text{ có PT là } \begin{cases} x=\frac{7}{3}+t \\ y=-2 \end{cases}.$$

• Với $b=\frac{3}{4}a$, chọn $a=4$ thì $\vec{u}=(4;3)$, đường

$$\text{thẳng } CD \text{ có PT là } \begin{cases} x=\frac{7}{3}+4t \\ y=-2+3t \end{cases}.$$

Thí dụ 3 (Trích đề ĐH Khối A năm 2012).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho

$CN=2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng

AN có PT: $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A .

Phân tích.

• Vì đề bài yêu cầu tìm tọa độ điểm A trong khi đã cho phương trình đường thẳng AN và tọa độ điểm M nên ta nghĩ đến việc xem $A=AM \cap AN$.

• Nếu ta tính được góc $\widehat{MAN}$ (góc giữa hai đường thẳng AM, AN), thì ta viết được phương trình đường thẳng AN .

Việc tính góc $\widehat{MAN}$ có thể thực hiện bằng cách dùng định lý cosin vì tính được AM, AN, MN theo a . Nhưng trong bài này ta tính được góc $\widehat{MAN}$ nhờ công thức $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$.

Lời giải. (h.3)

Gọi a là cạnh của hình vuông,

ta có $\tan(\widehat{DAN} + \widehat{BAM})$

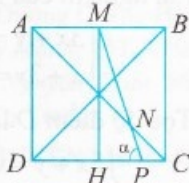
$$= \frac{\tan \widehat{DAN} + \tan \widehat{BAM}}{1 - \tan \widehat{DAN} \cdot \tan \widehat{BAM}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1. \text{ Suy ra}$$

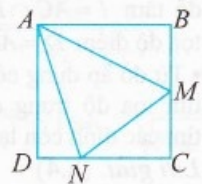
$$\widehat{DAN} + \widehat{BAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^\circ.$$

$\widehat{MAN}$ là góc giữa hai đường thẳng AM và AN .

Đường thẳng AN có VTPT là $\vec{n}=(2;-1)$.



Hình 2



Hình 3

Gọi $\vec{m} = (a; b) \neq \vec{0}$ là VTPT của đường thẳng

$$AM \text{ thì } \cos \widehat{MAN} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = 2|2a-b|$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \quad (1)$$

Nếu $b = 0$ thì từ (1) có $a = 0$ (loại).

$$\text{Nếu } b \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ b=-3a \end{cases}$$

• Với $a = 3b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 3$ thì $\vec{m} = (3; 1)$,

đường thẳng AM có PT là $3x + y - 17 = 0$.

Từ $A = AM \cap AN$ ta tìm được $A(4; 5)$.

• Với $b = -3a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -3$ thì $\vec{m} = (1; -3)$,

đường thẳng AM có PT là $x - 3y - 4 = 0$.

Từ $A = AM \cap AN$ ta tìm được $A(1; -1)$.

❖ **Thí dụ 4.** (Trích đề ĐH khối D năm 2012).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có PT là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$;

đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Tìm

tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Phân tích.

• Trước tiên ta tìm được tọa độ điểm $A = AC \cap AD$.

• Viết được phương trình đường thẳng BD đi qua M, tạo với AD một góc $\widehat{ADI} = \widehat{DAI}$ (góc giữa hai đường thẳng AC, AD).

• Có phương trình đường thẳng BD ta tìm được tọa độ tâm $I = AC \cap BD$ của hình chữ nhật ABCD và tọa độ điểm $D = AD \cap BD$.

• Từ đó áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm để tìm các đỉnh còn lại.

Lời giải. (h.4)

Tọa độ điểm A là nghiệm của HPT

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1).$$

Hình 4

Góc $\widehat{DAC}$ là góc giữa hai đường thẳng AD và

$$AC, \text{ ta có } \cos \widehat{DAC} = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Góc $\widehat{ADB}$ là góc giữa hai đường thẳng AD và DB, $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$. Gọi $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ là VTPT của đường thẳng BD, ta có VTPT của AD

$$\vec{n}_{AD} = (1; -1) \text{ nên } \cos \widehat{ADB} = \frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0.$$

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (loại)

Nếu $b \neq 0$ thì $3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ b=3a \end{cases}$$

• Với $a = 3b$, chọn $b = 1 \Rightarrow a = 3$, PT của

đường thẳng BD qua $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ là $3x + y = 0$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD thì tọa độ của I là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 0).$$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 3).$$

Vì I là trung điểm của BD nên tọa độ điểm $B(1; -3)$.

• Với $b = 3a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = 3$, đường thẳng BD có VTPT là $\vec{n} = (1; 3)$, trường hợp này thì BD song song hoặc trùng với AC (loại).

❖ **Thí dụ 5.** (Đề thi ĐH khối B năm 2013). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Phân tích.

• Trước tiên ta xem xét tính đặc biệt của các tam giác IBC, BHC.

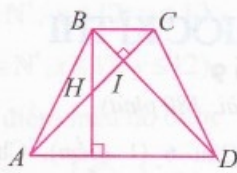
• Viết phương trình đường thẳng AC đi qua điểm H và vuông góc với BD. Suy ra tọa độ điểm I, C, A.

• Ta xem $D = AD \cap BD$

• Viết phương trình đường thẳng AD qua A tạo với AC một góc bằng $\widehat{ADB} = \widehat{IBC} = 45^\circ$.

Lời giải. (h.5)

• Gọi I là giao điểm của AC và BD , suy ra $IB = IC$. Mà $IB \perp IC$ nên tam giác IBC vuông cân tại I , suy ra $\widehat{ICB} = 45^\circ$. Mặt khác

**Hình 5**

$BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC$, suy ra tam giác BHC vuông cân tại B , suy ra I là trung điểm của HC .

• Đường thẳng AC đi qua H , vuông góc với đường thẳng BD , có phương trình $2x - y + 8 = 0$.

Tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Từ I là trung điểm của đoạn HC suy ra $C(-1; 6)$; H là trung điểm của đoạn AC , suy ra $A(-5; -2)$.

Gọi $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của đường thẳng AD .

Ta có góc giữa hai đường thẳng DB và AD là $\widehat{ADB} = \widehat{IBC} = 45^\circ$. Suy ra

$$\cos 45^\circ = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2(a + 2b)^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 3b^2 - 8ab = 0 \quad (*)$$

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (loại).

Nếu $b \neq 0$ thì khi đó

$$(*) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8 \cdot \frac{a}{b} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 3 \\ \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = -3a \end{cases}$$

• Với $a = 3b \Rightarrow \vec{n} = (3b; b) = b(3; 1) \Rightarrow (3; 1)$ là tọa độ vector pháp tuyến của AD , nên AD có phương trình $3x + y + 17 = 0$.

Tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y + 17 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow D(-8; 7).$$

• Với $b = -3a \Rightarrow \vec{n} = (a; -3a) = a(1; -3) \Rightarrow (1; -3)$

là tọa độ vector pháp tuyến của AD , nên AD có phương trình $x - 3y - 1 = 0$.

Tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4; 1).$$

Kết luận. Qua các thí dụ trên, chúng ta thấy việc viết phương trình đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy đi qua một điểm cho trước và tạo với đường thẳng cho trước một góc α có thể khai thác để giải nhiều bài toán chỉ cần ta tính được góc α đó. Việc tìm tọa độ một điểm dưới dạng là giao điểm của hai đường thẳng cũng là một hướng giải bài toán tìm điểm khá hữu ích. Sau đây xin giới thiệu một số bài để bạn đọc luyện tập.

BÀI LUYỆN TẬP

1. (Đề thi ĐH Khối D năm 2014). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1; -1)$. Đường thẳng AB có PT $3x + 2y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có PT $x + 2y - 7 = 0$. Viết PT đường thẳng BC .

Hướng dẫn. • Giải hệ gồm PT đường thẳng AB và PTTT tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC để tìm tọa độ điểm A .

• Viết PT đường thẳng AD , tính góc $(\overline{AB}, \overline{AD})$

• Viết PT đường thẳng AC hợp với AD một góc bằng $(\overline{AB}, \overline{AD})$.

• Tính góc $(\overline{AE}, \overline{AB}) = (\overline{CA}, \overline{CB})$.

• Viết PT đường thẳng BC qua D , hợp với AC một góc bằng $(\overline{CA}, \overline{CB})$.

2. (Đề thi thử năm 2015 của Trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x - 2y = 0$. Trọng tâm của tam giác BCD là điểm $G\left(\frac{16}{3}; \frac{13}{3}\right)$. Tìm tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật biết rằng điểm B có tung độ lớn hơn 3.

Hướng dẫn. • Tính $d[G; AB]$ suy ra

$$d[C; AB] = \frac{AC}{AG} \cdot d[G; AB] = \frac{3}{2} \cdot d[G; AB] = BC.$$

• Từ diện tích hình chữ nhật và độ dài cạnh BC suy ra độ dài cạnh AB .

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số

$$y = mx^3 - 3mx^2 + 3(m-1)$$

(m là tham số) có đồ thị (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên khi $m = 1$.

b) Chứng minh rằng đồ thị (C_m) luôn có hai điểm cực trị A và B với mọi $m \neq 0$, khi đó tìm các giá trị của m để $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 98$.

Câu 2 (1 điểm). a) Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$.

Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{2015}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}$$

b) Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z-3| = |z-2-i|$.

Câu 3 (0,5 điểm). Giải phương trình

$$4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x.$$

Câu 4 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{25}{9} + \sqrt{9x^2 - 4} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{18x}{y^2 - 2y + 2} + 25y \right) \\ 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 5 (1 điểm). Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{(x^2 - x - 2)e^x \sqrt{3 + 2x - x^2} + 1}{(x+1)\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx.$$

Câu 6 (1 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$, $BC = 5a$; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Câu 7 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng (Δ): $x + y + 1 = 0$. Từ điểm A thuộc (Δ) kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C . Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.

Câu 8 (1 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z - 22 = 0$ và mặt phẳng (α): $2x - 2y - z + 2 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Câu 9 (0,5 điểm). Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Newton của $\left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^{12}$ ($x \neq 0$).

Câu 10 (1 điểm). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} - \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} \right).$$

PHẠM TRỌNG THU

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

VẬN DỤNG GÓC ... (tiếp theo)

- Từ đó tính được cosin của góc $\widehat{BAC}$, đây là góc giữa hai đường thẳng AB, AC .
- Viết phương trình đường thẳng AC đi qua G , tạo với đường thẳng AB một góc bằng $\widehat{BAC}$.
- Tìm tọa độ $A = AB \cap AC$, suy ra tọa độ C (từ $\overline{AC} = \frac{3}{2} \overline{AG}$), trung điểm I của AC .
- Viết phương trình đường thẳng BC qua C , vuông góc với AB , suy ra tọa độ B , suy ra tọa độ D (đối xứng với B qua tâm I). Chú ý giả thiết điểm B có tung độ lớn hơn 3.

3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Điểm $F\left(\frac{11}{2}; 3\right)$ là trung điểm của cạnh AD , điểm E là trung điểm của cạnh AB và điểm K thuộc cạnh DC sao cho $KD = 3KC$. Đường

thẳng EK có phương trình là $19x - 8y - 18 = 0$. Tìm tọa độ điểm C của hình vuông $ABCD$ biết rằng điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

- Hướng dẫn.**
- Tính được $\tan \widehat{AEF}$, $\tan \widehat{BEI}$, dùng công thức $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ tìm được $\tan \widehat{FEI}$ suy ra $\cos \widehat{FEI}$, với $\widehat{FEI}$ là góc giữa hai đường thẳng FE và EK .
 - Viết phương trình đường thẳng EF đi qua F , hợp với EK một góc bằng $\widehat{FEI}$.
 - Tìm $E = FE \cap EK$, từ đó tính được độ dài cạnh hình vuông. Từ đó tính được $\cos \widehat{FEC}$, với $\widehat{FEC}$ là góc giữa hai đường thẳng EF và EC .
 - Viết phương trình đường thẳng EC hợp với FE một góc bằng $\widehat{FEC}$.
 - Tìm tọa độ điểm C từ $C \in EC$ và $EC = FC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

$$\text{Hệ số góc của tiếp tuyến: } k = \frac{7}{(x_0 + 2)^2}.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \frac{7}{(x_0 + 2)^2} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1$$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = -3$; suy ra $y_0 = -4$ hoặc $y_0 = 10$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 7x + 3$ hoặc $y = 7x + 31$.

Câu 2. a) Phương trình đã cho tương đương với $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có $z^2 = 5 - 12i, z + \bar{z} = 6$

$$w = \frac{5 - 12i}{6} = \frac{5}{6} - 2i, |w| = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4} = \frac{13}{6}.$$

Câu 3. Đặt $t = 2^{x-1}$ ($t > 0$), ta có phương trình

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}; t = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 4. ĐK: $x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 - \sqrt{2}$ hoặc $x \geq -1 + \sqrt{2}$. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 1} = a \geq 0, 1 - x = b$, bất phương trình đã cho trở thành

$$2ab \leq a^2 - 4(1 - b) \Leftrightarrow (a - 2)(a + 2 - 2b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2)(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x) \geq 0 \quad (1)$$

Xét 2 trường hợp sau:

TH1: $x \geq -1 + \sqrt{2}$. Khi đó $\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x > 0$, nên (1) tương đương với $\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 + \sqrt{6} \\ x \leq -1 - \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow x \geq -1 + \sqrt{6}.$$

TH2: $x \leq -1 - \sqrt{2}$. Khi đó $\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x < 0$, nên (1) trở thành $\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{6} \leq x \leq -1 + \sqrt{6}.$$

Kết hợp điều kiện của trường hợp này ta được

$$-1 - \sqrt{6} \leq x \leq -1 - \sqrt{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$-1 - \sqrt{6} \leq x \leq -1 - \sqrt{2}; \quad x \geq -1 + \sqrt{6}.$$

Câu 5. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$;
 $x = 1 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 2$. Ta được

$$I = 2 \int_1^2 \frac{1}{t^2(t+1)} dt = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \left. \frac{-2}{t} + 2 \ln \frac{t+1}{t} \right|_1^2 = 1 + 2 \ln \frac{3}{4}.$$

Câu 6.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Gọi D là trung điểm AB , thì $OD \perp AB$

$$\Rightarrow A'D \perp AB$$

$$\Rightarrow \widehat{A'DO} = 60^\circ.$$

$$OD = \frac{1}{3} CD = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$A'O = OD, \tan \widehat{A'DO} = \frac{a}{2};$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt)}. \text{ Ta có}$$

$$CC' \parallel (ABB'A') \Rightarrow d(AB, CC') = d(C, (ABB'A')),$$

$$V_{A'ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$$

$$S_{A'AB} = \frac{1}{2} A'D \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}. \text{ Vậy}$$

$$d(AB, CC') = \frac{3V_{A'ABC}}{S_{A'AB}} = \frac{3a}{4}.$$

Câu 7. Gọi $S = AB \cap DE$. Theo định lý Thales

$$\text{ta có } \frac{SB}{SA} = \frac{BE}{AD} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{SB}{SM} = \frac{2}{7}. \text{ Từ đó } d(C, DE)$$

$$= 5d(B, DE) = 5 \cdot \frac{2}{7} d(M, DE) = \frac{10}{7} \cdot \frac{70}{\sqrt{610}} = \frac{100}{\sqrt{610}}.$$

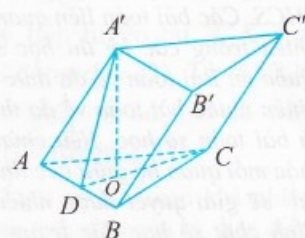
Gọi cạnh hình vuông là a . Trong tam giác vuông DCE ta có

$$\frac{1}{(d(C, DE))^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{36}{25a^2} = \frac{61}{25a^2}$$

$$\Rightarrow d(C, DE) = \frac{5a}{\sqrt{61}}. \text{ Suy ra } \frac{5a}{\sqrt{61}} = \frac{100}{\sqrt{610}} \Rightarrow a = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Vì } D \in DE \text{ nên } D\left(t; \frac{10-23t}{9}\right). \text{ Ta có:}$$

(Xem tiếp trang 27)



DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG
PHÁP
GIẢI
TOÁN



TÍNH CHẤT SỐ HỌC ĐẶC TRƯNG TRONG BÀI TOÁN ĐA THỨC

NGUYỄN LƯU

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Da thức là một nội dung rất quan trọng trong chương trình toán học phổ thông và bắt đầu được giảng dạy trong chương trình đại số ở cấp THCS. Các bài toán liên quan đến đa thức xuất hiện nhiều trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Bài toán về đa thức là bài toán đại số tuy nhiên nhiều bài toán về đa thức bản chất của nó lại là bài toán số học. Nếu chúng ta biết kết hợp khai thác mối quan hệ giữa các tính chất đại số và số học thì sẽ giải quyết được nhiều bài toán về đa thức. Tính chất số học đặc trưng thường sử dụng đó là tính chia hết, tính chẵn lẻ, tính chất của các số nguyên tố, hợp số, số nguyên, ... Các định lý về số học thường sử dụng đó là định lý Bezout, Fermat, Eisenstein, ...

Trước hết ta nhắc lại một số kết quả cơ bản:

- Đa thức bậc n có không quá n nghiệm thực.
- Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.
- Đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n mà nhận cùng một giá trị tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì đa thức đó là đa thức hằng.
- Hai đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n mà nhận $n+1$ giá trị thỏa mãn bằng nhau tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.
- Bậc của tổng hai đa thức không lớn hơn bậc của mỗi đa thức đó.
- Bậc của tích hai đa thức khác không bằng tổng các bậc của hai đa thức đó.
- Hai đa thức f và g thuộc $\mathbb{R}[x]$ trong đó g khác không (đa thức không), khi đó có duy nhất một cặp đa thức $q, r \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $f = qg + r$ trong đó hoặc $r = 0$ hoặc $\deg r < \deg g$ với r khác 0.
- Dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - c$ là $f(c)$.
- Với bất kỳ hai đa thức $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ bao giờ cũng tồn tại ƯCLN của f và g và ƯCLN đó duy nhất.
- Nếu đa thức d là ƯCLN của các đa thức f và g , khi đó tồn tại hai đa thức u, v sao cho $fu + gv = d$. Ngược lại nếu đa thức d là ước chung của các đa thức f và g và thỏa mãn $fu + gv = d$ thì d là ƯCLN của f và g .

• Hai đa thức f và g nguyên tố cùng nhau tức là $(f, g) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức u, v sao cho $fu + gv = 1$.

• Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $[f(x)]^m$ và $[g(x)]^n$ sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

• Mọi nghiệm x_0 của đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

đều thỏa mãn bất đẳng thức:

$$|a_0|(|x_0| - 1) \leq A, \quad A = \max |a_k|, \quad k = 1, \dots, n.$$

• Đa thức p bất khả quy khi và chỉ khi mọi ước của nó đều là đa thức bậc 0 hoặc là đa thức có dạng ap với a là hằng số khác không.

• Mỗi đa thức f bậc lớn hơn không bất kỳ đều phân tích được thành tích các đa thức bất khả quy. Và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử và nhân tử bậc không.

• Tiêu chuẩn Eisenstein:

$$\text{Cho } P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

Nếu có ít nhất một cách chọn số nguyên tố p thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

*) a_n không chia hết cho p .

*) Tất cả các hệ số còn lại chia hết cho p .

*) a_0 chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 thì $P(x)$ không phân tích được thành tích các đa thức có bậc thấp hơn với các hệ số hữu tỷ.

Nội dung của các bài toán về đa thức thường xoay quanh việc tìm nghiệm và xác định số nghiệm của một đa thức, xác định một đa thức hoặc ước lượng giá trị của đa thức khi biết đa thức thỏa mãn một số tính chất cho trước hoặc là chứng minh các đa thức bất khả quy...

Trong khuôn khổ bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một số bài toán điển hình nhằm minh họa các tính chất số học đặc trưng thường xuất hiện ở bài toán đa thức.

Bài toán 1. Cho các đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $a \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $P(a) = P(a+2015) = 0$; $Q(2014) = 2016$. Chứng minh rằng phương trình $Q(P(x)) = 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. $P(x) = (x - a)(x - a - 2015)$. $g(x) \Rightarrow P(x)$ chia hết với $\forall x \in \mathbb{Z}$. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{Z}$ để $Q(P(x_0)) = 1 \Rightarrow Q(x) = [x - P(x_0)].h(x) + 1$
 $\Rightarrow Q(2014) = [2014 - P(x_0)].h(x_0) + 1$.
 Do $P(x_0)$ chia hết và $h(x_0) \in \mathbb{Z}$, nên vế trái chia hết, vế phải lẻ, mâu thuẫn.

Lời bình. Đây là bài toán đơn giản, sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng phối hợp định lý Bezout cùng tính chia hết của số nguyên ta suy ra điều phải chứng minh (đpcm).

Bài toán 2. *Tồn tại hay không đa thức $P(x)$, $\deg(P(x)) = 2015$ thỏa mãn $P(x^2 - 2014)$ chia hết cho $P(x)$?*

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (x + a)^{2015}$, $a \in \mathbb{R}$. Khi đó $P(x^2 - 2014) = (x^2 + a - 2014)^{2015} = [(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 + a - 2014]^{2015}$. Dễ thấy phương trình $a^2 + a - 2014 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt. Tức là ta chọn được a sao cho $a^2 + a - 2014 = 0$, từ đó suy ra $P(x^2 - 2014) = (x + a)^{2015}(x - a)^{2015}$ chia hết cho $P(x)$.

Lời bình. Từ yêu cầu $P(x)$ có $\deg P(x) = 2015$ và $P(x^2 - 2014)$ phải chia hết cho $P(x)$ nên ta có thể dự đoán ngay $P(x)$ có dạng $(x + a)^{2015}$.

Bài toán 3. *Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn:*

$$(x - 2015)^k \cdot P(x) = (x - 2016)^k \cdot P(x + 1) \quad (*)$$

Lời giải. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn điều kiện trên. Từ giả thiết ta thấy $x = 2016$ là nghiệm bội bậc $\geq k$ của $P(x)$.

Theo định lý Bezout ta có:

$$P(x) = (x - 2016)^k \cdot Q(x),$$

thay vào (*) ta được:

$$(x - 2015)^k \cdot (x - 2016)^k \cdot Q(x) = (x - 2016)^k \cdot (x - 2015)^k \cdot Q(x + 1).$$

Từ đó suy ra $Q(x) = Q(x + 1)$, hay $Q(x) = a$ hằng số. Vậy $P(x) = a(x - 2016)^k$. Thử lại đúng.

Lời bình. Đây là bài toán cơ bản, sử dụng tính chất chia hết, nghiệm bội, cùng định lý Bezout cho ta lời giải.

Bài toán 4. *Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng đa thức $xP(x^3) + Q(x^3)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Gọi d là ƯCLN của $P(2015)$ và $Q(2015)$. Chứng minh rằng $d \geq 2014$.*

Lời giải. Ta có: $xP(x^3) + Q(x^3) = [Q(x^3) - Q(1)] + x[P(x^3) - P(1)] + [xP(1) + Q(1)]$ (1).

Dễ thấy $Q(x^3) - Q(1)$ chia hết cho $x^3 - 1$ suy ra $Q(x^3) - Q(1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Tương tự: $P(x^3) - P(1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Từ (1) dựa vào giả thiết ta suy ra $[xP(1) + Q(1)]$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ (2). Do $\deg(x^2 + x + 1) = 2$ và $\deg[xP(1) + Q(1)] \leq 1$ nên từ (2) suy ra:

$$xP(1) + Q(1) = 0 \Rightarrow P(1) = Q(1) = 0 \quad (3).$$

Vậy 1 là nghiệm của $P(x)$ và $Q(x)$. Theo định lý

Bezout ta có: $\begin{cases} P(x) = (x - 1)R_1(x) \\ Q(x) = (x - 1)R_2(x) \end{cases}$. Do $P(x)$

và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên nên $R_1(x)$ và $R_2(x)$ cũng là các đa thức với hệ số

nguyên. Lại thấy: $\begin{cases} P(2015) = 2014 \cdot R_1(2015) \\ Q(2015) = 2014 \cdot R_2(2015) \end{cases}$

suy ra $P(2015)$ và $Q(2015)$ chia hết cho 2014. Vì $d = (P(2015), Q(2015))$, suy ra $d \geq 2014$.

Lời bình. Bài toán này khá đẹp về tính chia hết của đa thức. Sử dụng tính chất $(a - b) \mid (P(a) - P(b))$, và kết hợp giữa định lý Bezout với tính chất về bậc của đa thức đó đem lại lời giải.

Bài toán 5. *Cho đa thức $f(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có ba nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3 . Chứng minh rằng:*

$(a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ chia hết cho 2017.

Lời giải. Xét phương trình:

$$x^{2017} - x + [ax^2 + (b + 1)x + c] = 0.$$

Đặt $f(x) = ax^2 + (b + 1)x + c$. Theo định lý Fermat bé ta có: $x^{2017} - x \equiv 0 \pmod{2017}$, suy ra: $f(x_i) \equiv 0 \pmod{2017}$, $i = 1, 2, 3$ hay $f(x_i) : 2017$.

• Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) : 2017$ thì bài toán chứng minh xong.

• Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho 2017 ta có: $f(x_1) - f(x_2) : 2017$, suy ra

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b + 1] : 2017 \Rightarrow ax_1 + ax_2 + b + 1 : 2017 \quad (1).$$

$$\text{Tương tự: } ax_2 + ax_3 + b + 1 : 2017 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a(x_3 - x_1) : 2017$

hay $a : 2017$, suy ra $b + 1 : 2017$,

$f(x_1) = [ax_1^2 + (b + 1)x_1 + c] : 2017$, suy ra $c : 2017$.

Vậy $a + b + c + 1 \equiv 0 \pmod{2017}$. Theo định lý Fermat bé ta có: $a \equiv a^{2017} \pmod{2017}$, $b \equiv b^{2017} \pmod{2017}$, $c \equiv c^{2017} \pmod{2017}$, suy ra $a + b + c + 1 \equiv a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1 \pmod{2017}$.

Từ đó có: $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} + 1 \equiv 0 \pmod{2017}$ (đpcm).

Lời bình. Vì 2017 là số nguyên tố, nên trong lời giải từ đa thức đó cho ta thêm bớt x để sử dụng định lý Fermat bé là một điều tự nhiên.

Bài toán 6. Cho số nguyên $n \geq 2$ và đa thức có các hệ số nguyên dương

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1.$$

Giả sử $a_k = a_{n-k}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n-1$. Chứng minh rằng tồn tại vô số các cặp số nguyên dương x, y sao cho $x|P(y)$ và $y|P(x)$.

Lời giải. Dễ thấy ít nhất cặp $(1, P(1))$ thỏa mãn bài toán. Ta giả sử chỉ có hữu hạn cặp thỏa mãn đề bài. Khi đó chọn trong đó một cặp (x, y) mà y là số lớn nhất. Ta sẽ chứng minh nếu có cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x|P(y)$ và $y|P(x)$

thì cặp $\left(y, \frac{P(y)}{x}\right)$ cũng thỏa mãn tính chất đó,

nghĩa là ta có: $y | P\left(\frac{P(y)}{x}\right)$ (do $\frac{P(y)}{x} | P(y)$ là

điều hiển nhiên). Thật vậy từ giả thiết $a_k = a_{n-k}$

$$\text{ta có: } P\left(\frac{P(y)}{x}\right) = \left(\frac{P(y)}{x}\right)^n P\left(\frac{x}{P(y)}\right)$$

$$\Rightarrow x^n P\left(\frac{P(y)}{x}\right) = [P(y)]^n P\left(\frac{x}{P(y)}\right)$$

$$\equiv P\left(\frac{x}{P(y)}\right) \pmod{y} \equiv P(x) \equiv 0 \pmod{y}$$

(do $P(y) \equiv 1 \pmod{y}$).

Mặt khác do $x | P(y)$, nên $(x, y) = 1$ vì nếu ngược lại $(x, y) = d > 1$ thì $P(y) \equiv 1 \pmod{d}$, vô lý.

Suy ra $P\left(\frac{P(y)}{x}\right) \equiv 0 \pmod{y}$. Hơn nữa $y > x$

nên $\frac{P(y)}{x} > \frac{y^2}{x} > y$, điều này mâu thuẫn. Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn đề bài.

Lời bình. Đây là bài toán khó, điều then chốt là biết sử dụng phương pháp cực hạn, phối hợp với phép toán đồng dư trong quá trình chứng minh phản chứng để tìm ra lời giải.

Bài toán 7. Cho a, b, c là ba số nguyên phân biệt và đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $P(a) = P(b) = P(c) = 2$. Chứng minh rằng phương trình $P(x) - 3 = 0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra đa thức $P(x) - 2$ có ba nghiệm nguyên phân biệt là a, b, c . Do đó tồn tại $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho:

$$P(x) - 2 = (x - a)(x - b)(x - c)Q(x).$$

Giả sử phương trình $P(x) - 3 = 0$ có nghiệm $x = d$ nguyên. Khi đó:

$$1 = P(d) - 2 = (d - a)(d - b)(d - c)Q(d).$$

Do $d - a, d - b, d - c, Q(d) \in \mathbb{Z}$ nên $d - a, d - b, d - c \in \{1, -1\}$, mâu thuẫn với giả thiết a, b, c đôi một phân biệt. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x) = f(x) + 12$ có ít nhất 6 nghiệm nguyên phân biệt thì $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Giả sử $Q(x)$ có 6 nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \mathbb{Z}$ suy ra $Q(x) = f(x) + 12$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_6)g(x) \text{ với } g(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $f(x_0) = 0$ ta suy ra:

$$12 = Q(x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_6) \cdot g(x_0) \\ \Rightarrow 12 = |x_0 - x_1| |x_0 - x_2| \dots |x_0 - x_6| |g(x_0)|.$$

Do $x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots, x_0 - x_6$ là các số nguyên đôi một khác nhau nên trong các số

$|x_0 - x_1|, \dots, |x_0 - x_6|$ không thể có 3 số trở lên bằng nhau, suy ra

$$|x_0 - x_1| |x_0 - x_2| \dots |x_0 - x_6| \geq 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 24, \text{ hơn nữa } |g(x_0)| \geq 1 \Rightarrow \text{vô lý.}$$

Bài toán 9. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc 5 với hệ số nguyên, nhận giá trị 2015 với 4 giá trị nguyên khác nhau của biến x . Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 2046$ không thể có nghiệm nguyên.

Lời giải. Theo giả thiết phương trình $f(x) - 2015 = 0$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên. Ta có $f(x) - 2015 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)g(x)$ với $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $g(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Giả sử tồn tại số nguyên x_0 sao cho $f(x_0) = 2046$ thì:

$$31 = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)g(x_0),$$

với $x_0 - x_1 > x_0 - x_2 > x_0 - x_3 > x_0 - x_4$ và các số này đều là số nguyên. Vì 31 là số nguyên tố

$$\begin{aligned} \text{nên: } 31 &= 31.1 = (-1).1.(-31) \\ &= (-1).(-31) = 31.(-1).(-1). \end{aligned}$$

Do đó 31 không thể phân tích thành tích của 4 số nguyên khác nhau. Điều này chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 2046$ không thể có nghiệm nguyên.

Lời bình. Các bài toán 7, 8, 9 cùng một thể loại. Phương pháp chung để giải ở đây là chứng minh bằng phản chứng. Sử dụng tính chất nghiệm, tính chất số nguyên tố, số nguyên, phối hợp với định lý Bezout.

Bài toán 10. Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2015) - 1$$

bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x)$ không bất khả quy, suy ra $P(x) = F(x).G(x)$ trong đó $F(x)$ và $G(x)$ là các đa thức bậc nguyên dương với hệ số nguyên. Không giảm tổng quát giả sử các hệ số bậc cao nhất của $F(x)$ và $G(x)$ bằng 1.

Vì $\deg P(x) = 2015$ nên $\deg G(x) \leq 2014$.

Ta có:

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2015) - 1 = F(x)G(x).$$

Do đó $F(k).G(k) = -1$ hay $F(k) = -G(k) = \pm 1$, $\forall k, 1 \leq k \leq 2015$. Suy ra $F(k) + G(k) = 0$,

$\forall k, 1 \leq k \leq 2015$. Đặt $Q(x) = F(x) + G(x)$ thì $\deg Q(x) \leq 2014$ và $Q(k) = 0 \forall k, 1 \leq k \leq 2015$.

Suy ra: $Q(x) \equiv 0$ hay $F(x) = -G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó các hệ số bậc cao nhất của $F(x)$ và $G(x)$ đối nhau, mâu thuẫn với giả thiết ở trên. Vậy đa thức $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài toán 11 (IMO-1993). Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ với $n \in \mathbb{N}^*$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Lời giải. Dễ thấy với $n = 2$ thì $f(x) = x^2 + 5x + 3$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$. Với $n \geq 3$, giả sử $f(x) = g(x).h(x)$ với $g(x), h(x)$ thuộc $\mathbb{Z}[x]$ và có bậc ≥ 1 . Vì $\deg g + \deg h = n \geq 3$ nên suy ra trong hai số $\deg g$ và $\deg h$ có một số > 1 . Mặt khác $f(0) = 3$ là số nguyên tố nên $|g(0)| = 1$ hoặc $|h(0)| = 1$. Giả sử $g(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ ($k > 1$) và $|g(0)| = 1$. Gọi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các nghiệm của $g(x)$ ta có:

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_k).$$

$$\text{Vì } |g(0)| = 1 \text{ nên } |a_1 a_2 \dots a_k| = 1 \quad (*)$$

Do $g(a_i) = 0$ nên $f(a_i) = 0$ với mọi $i = 1, \dots, k$.

Từ đó ta có: $a_i^{n-1}(a_i + 5) = -3$.

Nhân các đẳng thức trên lại và kết hợp với (*) ta được: $|(a_1 + 5)(a_2 + 5)\dots(a_k + 5)| = 3^k \quad (**)$

Mặt khác ta có:

$$|g(-5)| = |(a_1 + 5)(a_2 + 5)\dots(a_k + 5)|$$

và $3 = f(-5) = g(-5)h(-5)$ nên

$|(a_1 + 5)(a_2 + 5)\dots(a_k + 5)|$ bằng 1 hoặc bằng 3.

Điều này mâu thuẫn với (**) vì $k > 1$. Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 12 (VMO 2013-2014). Cho đa thức

$P(x) = (x^2 - 7x + 6)^{2n} + 13$, $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $P(x)$ không thể phân tích thành tích của $n + 1$ đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

Lời giải. Dễ thấy $\deg P(x) = 4n$ và $P(x)$ không có nghiệm thực. Tam thức $x^2 - 7x + 6$ có hai nghiệm là 1 và 6; và 13 là số nguyên tố.

Giả sử $P(x) = P_1(x) \dots P_{n+1}(x)$, thì $P_i(x)$ có bậc chẵn. Vì tổng các bậc của các $P_i(x)$ là $4n$ nên phải có ít nhất 2 đa thức có bậc là 2 giả sử là $P_1(x)$ và $P_2(x)$. Do hệ số cao nhất của $P(x)$ là 1 nên đặt $P_1(x) = x^2 + ax + b > 0$, $P_2(x) = x^2 + cx + d > 0 \forall x$. Ta có $13 = P_1(1).P_2(1) \dots P_{n+1}(1) = P_1(6).P_2(6) \dots P_{n+1}(6)$. Từ đó suy ra trong hai số $P_1(1)$ và $P_2(1)$ có ít nhất một số bằng 1. Không giảm tổng quát giả sử $P_1(1) = 1$ suy ra $a = -b$. Khi đó $P_1(6) = 36 - 5b > 0$ và $P_1(6) \neq 13$, suy ra $36 - 5b = 1$ hay $b = 7$, $a = -7$ và khi đó $P_1(x) = x^2 - 7x + 7$ có nghiệm thực, mâu thuẫn!

Lời bình. Cả 3 bài toán 10, 11, 12 về đa thức bất khả quy đã nêu đều có chung một hướng giải là: chứng minh bằng phản chứng. Tuy nhiên bài toán 10 thì ở mức trung bình và kinh điển, chỉ sử dụng tính chất về bậc của đa thức là cho kết quả. Bài toán 11 ở mức độ cao hơn, ta đó sử dụng tính chất về bậc của đa thức, tính chất của số nguyên tố, số nguyên, kết hợp với định lý Bezout. Bài toán 12 cũng ở mức độ như bài 11, tuy nhiên đây là bài toán mới trong kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia năm qua, gây không ít khó khăn cho nhiều học sinh. Bài toán này có vài cách giải tuy nhiên đều chứng minh bằng phương pháp phản chứng pháp phản chứng. Cách giải trên đây dựa vào việc khai thác bậc của đa thức, tính chất nghiệm cùng tính chất của số nguyên tố.

Để luyện tập phần này các bạn hãy làm một số bài tập sau:

(Xem tiếp trang 26)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/456 (Lớp 6). Tìm tất cả các bộ số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng 10 lần tổng của chúng.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Quảng Ngãi)

Bài T2/456 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA sao cho :

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABE} = 30^\circ. \text{ Tính số đo } \widehat{BED}.$$

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài T3/456. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{6x-1}} + \frac{1}{\sqrt{9x-4}} \right)$$

LẠI THỊ HOA

(GV THPT Lê Quý Đôn, Thái Bình)

Bài T4/456. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{MDN} = 45^\circ$. Tìm vị trí của M, N để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/456. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^4 + y^2 + 13y + 1 \leq (y-2)x^2 + 8xy$.

BÙI HẢI QUANG

(GV THCS Văn Lang, Việt Trì, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/456. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T7/456. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBD) là d . Đặt $SB = a, BD = b, SD = c$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 16d^2$.

LÊ QUANG HÀO

(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Bài T8/456. Chứng minh rằng phương trình

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} = x^{\frac{1}{x}}$$

có nghiệm duy nhất.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/456. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

a) $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$;

b) Với mỗi số nguyên dương $k, k = 1, \dots, 15$, nếu kí hiệu b_k là ước số lớn nhất của a_k sao cho $b_k < a_k$, thì $b_1 > b_2 > \dots > b_{15}$.

Chứng minh rằng $a_{15} > 2015$.

TRẦN NGỌC THẮNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/456. Cho đa thức

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1975.$$

Hỏi trong đoạn $[1; 3^{2015}]$ có tất cả bao nhiêu số nguyên a sao cho $f(a)$ chia hết cho 3^{2015} ?

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/456. Tìm tất cả các hàm đơn ánh $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^5) + f(y^5) = (x+y)[f^4(x) - f^3(x)f(y) + f^2(x)f^2(y) - f(x)f^3(y) + f^4(y)]$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/456. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác không trùng với trọng tâm G . Nối AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_0, B_0, C_0 . Kẻ $A_0A_1 \parallel CA, A_0A_2 \parallel AB$ với A_1, A_2 thuộc B_0C_0 . Tương tự, ta có B_1, B_2, C_1, C_2 . Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng

a) $A_1B_2 \parallel B_1C_2 \parallel C_1A_2$.

b) MG đi qua trung điểm của G_1G_2 .

PHAN VĂN NAM

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/456. Thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn dao động tại S_1 và S_2 : $u_1 = u_2 = a \cos \omega t$. Coi năng lượng truyền sóng không đổi, bước sóng đo được $\lambda = 4$ cm, $S_1S_2 = 8$ cm. Điểm M trên mặt nước thuộc đường cong cực đại kể từ đường trung trực của S_1S_2 , M dao động có phương trình $u_M = 2a \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Điểm M' nằm trên đường trung trực S_1S_2 và dao động tại M' cùng pha với M . Điểm M' gần S_1 nhất. Tính khoảng cách từ M đến M' nhỏ nhất.

LÊ TẤN RI

(GV THPT Huỳnh Thúc Khắc, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L2/456. Cho mạch điện như hình bên. Biết $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$; $R_5 = 3 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$. Tìm điện trở tương đương của đoạn mạch AB .

ĐINH THÁI QUỲNH

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/456 (For 6th grade). Find all finite sets of primes such that for each set, the product of its elements is 10 times the sum of its elements.

Problem T2/456 (For 7th grade). Let ABC be an isosceles triangle with the vertex angle $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Choose D and E on the sides BC and CA respectively such that

$\widehat{BAD} = \widehat{ABE} = 30^\circ$. Find the angle $\widehat{BED}$.

Problem T3/456. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{6x-1}} + \frac{1}{\sqrt{9x-4}} \right).$$

Problem T4/456. Let $ABCD$ be a square and let a be the length each side. On the sides AB and BC , choose M and N respectively such that $\widehat{MDN} = 45^\circ$. Find the positions of M and N so that the length MN is minimal.

Problem T5/456. Find all positive integers x

and y such that

$$x^4 + y^2 + 13y + 1 \leq (y-2)x^2 + 8xy.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/456. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

Problem T7/456. Given a quadrilateral pyramid $S.ABCD$ with the following properties: the base $ABCD$ is a rectangle and SA is perpendicular to the plane $(ABCD)$. Suppose that G is the centroid of the triangle SBC and let d be the distance from G to the plane (SBD) . Let $SB = a$, $BD = b$, and $SD = c$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 \geq 16d^2$.

Problem T8/456. Prove that the following equation: $(x+1)^{\frac{1}{x+1}} = x^{\frac{1}{x}}$ has a unique solution.

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/452. Cho x, y là các số tự nhiên khác 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |36^x - 5^y|$.

Lời giải. Dễ thấy rằng 36^x luôn có chữ số tận cùng bằng 6, còn 5^y luôn có chữ số tận cùng bằng 5, do đó nếu $36^x > 5^y$ thì $36^x - 5^y$ có chữ số tận cùng bằng 1, nếu $36^x < 5^y$ thì $5^y - 36^x$ có chữ số tận cùng bằng 9. Với $x = 1, y = 2$ thì $A = 36 - 5^2 = 11$. Ta chỉ còn xét xem A có thể lấy giá trị bằng 1 hoặc 9 hay không.

- Giả sử có $36^x - 5^y = 1$ hay $36^x - 1 = 5^y$ thì vế trái chia hết cho $36 - 1 = 35 = 5 \cdot 7$ nên chia hết cho 7, trong khi vế phải 5^y không chia hết cho 7, do đó không tồn tại các số x, y như thế.
- Giả sử có $5^y - 36^x = 9$ hay $36^x + 9 = 5^y$ thì vế trái chia hết cho 3, trong khi vế phải 5^y không chia hết cho 3, do đó không tồn tại các số x, y như thế.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 11. $\square$

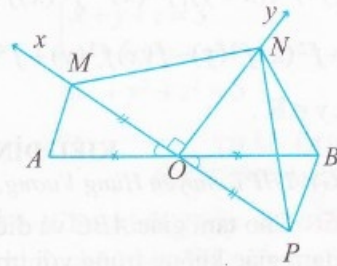
► **Nhận xét.** Một vài bạn không xét trường hợp $5^y - 36^x$. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Ngọc Mai, 6A4, THCS Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** Lê Tuấn Kiệt, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Hoàng Kim Ánh, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **TP. Cần Thơ:** Nguyễn Hoàng Oanh, 6A7, THCS Thốt Nốt.

VIỆT HẢI

Bài T2/452. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau. Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm M, N không trùng với O . Chứng minh rằng: $AM + BN \geq MN$.

Lời giải. Trên tia đối của tia Ox lấy điểm P sao cho $OP = OM$. Xét hai tam giác OAM và OBP , có $OA = OB$ (gt), $OM = OP$ (cách dựng), $\widehat{AOM} = \widehat{BOP}$ (đối đỉnh), do đó $\triangle OAM = \triangle OBP$

(c.g.c), suy ra $AM = BP$ (1) và $AM \parallel BP$. Mặt khác theo cách dựng và giả thiết ta có ON là trung trực của MP , nên $MN = PN$ (2).



Kết hợp (1) và (2) ta có

$AM + BN = BP + BN \geq NP = MN$. Vậy luôn có $AM + BN \geq MN$. Dấu bằng xảy ra khi N, B, P thẳng hàng (B nằm giữa N và P), tức là khi $AM \parallel BN$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán dễ, một số bạn sử dụng tính chất của đường trung bình trong tam giác nhưng không chứng minh. Các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: Nguyễn Đình Tuấn, 7C, THPT Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Võ Thành Hy, 7A, THCS Hành Trung; Nguyễn Thị Kiều Mẫn, 7B, THPT Nguyễn Kim Vang; Bùi Thị Lê Giang, 7C, Đỗ Thị Mỹ Lan, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; Huỳnh Đặng Diệu Huyền, 7C, Võ Thị Hồng Kiều, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Cần Thơ:** Nguyễn Hoàng Nhi, 7A6, THCS Thốt Nốt, Q. Thốt Nốt.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/452. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 - xy + y^2} \leq (x + y)^2 & (1) \\ \sqrt{1 - (x + y)^2} = 1 - x & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $|x + y| \leq 1$ và $x \leq 1$.

Ta xét hai trường hợp:

• Với $x + y = 0$, thay vào (2) ta được $x = 0$, suy ra $y = 0$. Cặp số $(x, y) = (0, 0)$ thỏa mãn (1) nên là nghiệm của hệ bất phương trình.

• Với $x + y \neq 0$, thì $|x + y| > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 \\ &\geq \frac{1}{4}(x + y)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq |x + y|$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \geq |x + y| \quad (\text{theo (1)})$$

$$\Rightarrow |x + y|(|x + y| - 1) \geq 0 \Rightarrow |x + y| \geq 1.$$

Kết hợp với ĐK suy ra $|x + y| = 1$

$\Rightarrow x + y = 1$ hoặc $x + y = -1$. Thay vào (2) ta tìm được $(x, y) = (1, 0)$ hoặc $(x, y) = (1, -2)$, đều không thỏa mãn (1).

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất

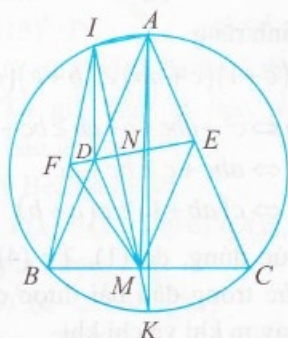
$$(x, y) = (0; 0). \quad \square$$

► **Nhận xét.** Một số bạn làm bài thiếu thận trọng nên đã xét thiếu trường hợp hoặc không thực hiện bước thử lại nên không loại được nghiệm không thỏa mãn. Các bạn có lời giải đúng là: **Nghệ An:** Nguyễn Đình Tuấn, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Hải Dương:** Đồng Xuân Luân, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Cao, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/452. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) , AK là đường kính, I là điểm bất kì trên cung nhỏ AB (I khác A, B). KI cắt cạnh BC tại M . Đường trung trực của MI , cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại D, E . N là trung điểm của DE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi F là giao điểm của DE và BI .

Từ $DE \perp MI$ (vì DE là trung trực của MI) và $AI \perp MI$ (do AK là đường kính), suy ra $AI \parallel DE$.

Ta có $\widehat{IFE} = 180^\circ - \widehat{FIA} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ (1)

Mặt khác, do EF là trung trực của IM nên $\widehat{IFE} = \widehat{EFM}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DFM} = \widehat{DBM}$, nên $DFBM$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{DMB} = \widehat{IFE} = \widehat{ACB} \Rightarrow MD \parallel AC$ (3)

Mặt khác $\widehat{IDE} = \widehat{EDM} = \widehat{IBC} = 180^\circ - \widehat{IAC} = \widehat{AED}$.

Suy ra $AIDE$ là hình thang cân, dẫn tới

$$AE = ID = MD \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $ADME$ là hình bình hành.

Do đó A, N, M thẳng hàng. $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn ngộ nhận khi kết luận việc chứng minh $ME \parallel AB$ và chứng minh $MD \parallel AC$ là tương tự nhau. Các bạn dưới đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Văn Cao, Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Bích Hằng, 9A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Phú Thọ:** Trần Quốc Lập, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, Hoàng Văn Hiếu, 9E, THCS Vĩnh Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Duy, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/452. Tìm số nguyên m để phương trình

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0 \quad (1)$$

có nghiệm nguyên.

Lời giải. Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2m + 1)m - (2m-1) - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x+m+1) - (2m-1)(x+m+1) - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+m+1)(x^2 - 2m + 1) = 5 \end{aligned} \quad (2)$$

Do m, x là các số nguyên nên $x + m + 1$ và $x^2 - 2m + 1$ là ước của 5.

Ta có $5 = 1.5 = (-1).(-5)$. Nhận thấy $x + m + 1$ và $x^2 - 2m + 1$ phải là số lẻ nên x và m là số chẵn, suy ra $x^2 - 2m + 1$ chia cho 4 dư 1, nên $x^2 - 2m + 1$ bằng 1 hoặc 5. Do đó từ (2) xảy ra hai khả năng:

$$1) \begin{cases} x + m + 1 = 1 \\ x^2 - 2m + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x \\ (x+1)^2 = 5 \end{cases} (*)$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $(x+1)^2$ là số chính phương, vì vậy PT (*) không có nghiệm nguyên.

$$2) \begin{cases} x + m + 1 = 5 \\ x^2 - 2m + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x + 4 \\ (x+1)^2 = 9 \end{cases} (**)$$

PT (**) có hai nghiệm nguyên $x = 2$ và $x = -4$. Tương ứng tìm được $m = 2$ và $m = 8$.

Vậy khi $m = 2$ hoặc $m = 8$ thì PT (1) có nghiệm nguyên.

Cách 2. Viết PT (1) thành dạng PT bậc hai ẩn m (coi x là tham số):

$$2m^2 - (x^2 - 2x - 1)m - (x^3 + x^2 + x - 4) = 0 \quad (3)$$

Ta có $\Delta = (x^2 - 2x - 1)^2 + 8(x^3 + x^2 + x - 4)$

$$= (x^2 + 2x + 3)^2 - 40.$$

Để PT (3) có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

$$\text{Đặt } (x^2 + 2x + 3)^2 - 40 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 3 + k)(x^2 + 2x + 3 - k) = 40 \quad (4)$$

Do $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ nên $x^2 + 2x + 3 + k$ và $x^2 + 2x + 3 - k$ là ước số của 40. Hơn nữa, do $(x^2 + 2x + 3 + k) - (x^2 + 2x + 3 - k) = 2k$ là số chẵn, và $x^2 + 2x + 3 + k > 0$, nên $x^2 + 2x + 3 + k$ và $x^2 + 2x + 3 - k$ là các số nguyên dương chẵn. Ta có $40 = 10 \cdot 4 = 20 \cdot 2$. Do đó từ (4) xảy ra hai khả năng:

$$1) \begin{cases} x^2 + 2x + 3 + k = 10 \\ x^2 + 2x + 3 - k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ (x+1)^2 = 5 \quad (*) \end{cases}$$

PT (*) không có nghiệm nguyên nên không xảy ra trường hợp này.

$$2) \begin{cases} x^2 + 2x + 3 + k = 20 \\ x^2 + 2x + 3 - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ (x+1)^2 = 9 \quad (**) \end{cases}$$

PT (**) có hai nghiệm nguyên $x = 2$ và $x = -4$, tương ứng tìm được $m = 2$ và $m = 8$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán thuộc dạng giải phương trình tìm nghiệm nguyên, nên việc nhận xét càng nhiều tính chất của các thừa số nguyên về trái của (2) hoặc (4) thì xét càng ít trường hợp. Đa số các bạn tham gia giải bài đều làm theo hai cách trên.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Đặng Thanh Tùng, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Phú Thọ:** Nguyễn Thùy Dương, 7A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Phạm Xuân Cường, 6A4, Bùi Thị Liễu Dương, 8A4, THCS Yên Lạc; Nguyễn Minh Hiếu, 9D, THCS Vĩnh Yên; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Thái Bá Bảo, 7C, Trần Lê Hiệp, 8A, Nguyễn Thái Hiệp, 8C, Bùi Thị Nhật Linh, Đinh Việt Tự, 8D, THCS Lý Nhật Quang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/452. Cho ba số không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a+bc)^2 + (b+ca)^2 + (c+ab)^2 \geq \sqrt{2} \cdot (a+b)(b+c)(c+a).$$

Lời giải. Đề ý rằng trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn có hai số không trái dấu với nhau.

$$\text{Giả sử } (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b$$

$$\Rightarrow c(ab+1) \geq c(a+b) \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi $c = 0$ hoặc $a = 1$ hoặc $b = 1$.

$$\text{Lại có } (a+bc)^2 + (b+ca)^2 \geq \frac{(a+bc+b+ca)^2}{2} \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta được

$$\begin{aligned} \frac{(a+bc+b+ca)^2}{2} + (c+ab)^2 &\geq \sqrt{2} \cdot (a+bc+b+ca)(c+ab) \\ \Leftrightarrow \frac{(a+bc+b+ca)^2}{2} + (c+ab)^2 &\geq \sqrt{2} \cdot (a+b)(c+1)(c+ab) \quad (3). \end{aligned}$$

Từ (2), (3) suy ra

$$(a+bc)^2 + (b+ca)^2 + (c+ab)^2 \geq \sqrt{2} \cdot (a+b)(c+1)(c+ab) \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+bc = b+ca \\ a+bc+b+ca = \sqrt{2} \cdot (c+ab) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a+bc = b+ca = \frac{c+ab}{\sqrt{2}}.$$

Ta chứng minh rằng

$$(c+1)(c+ab) \geq (b+c)(c+a) \quad (5).$$

Thật vậy (5) $\Leftrightarrow c^2 + abc + c + ab \geq bc + ab + c^2 + ac$

$$\Leftrightarrow abc + c \geq bc + ac$$

$$\Leftrightarrow c(ab+1) \geq c(a+b).$$

Bất đẳng thức đúng, do (1). Từ (4), (5) suy ra bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \text{ và } a+bc = b+ca = \frac{c+ab}{\sqrt{2}} \\ b = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Nếu } a = 1: (6) \Rightarrow 1+bc = b+c = \frac{c+b}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ bc=-1 \end{cases}$$

Điều này không xảy ra vì $bc \geq 0 \Rightarrow a \neq 1$.

Tương tự có $b \neq 1$.

$$\text{Nếu } c = 0: (6) \Rightarrow a = b = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \sqrt{2} \\ a = b = 0 \end{cases}$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = b = c = 0$ hoặc $a = b = \sqrt{2}$; $c = 0$ và các hoán vị tương ứng của chúng. $\square$

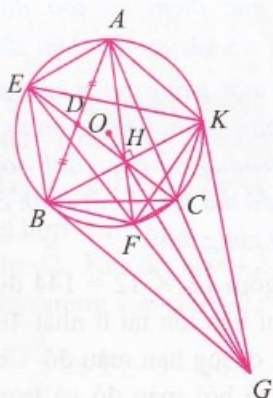
► **Nhận xét.** Đây là bài toán tương đối khó. Hầu hết các bạn gửi bài về tòa soạn làm theo cách trên. Điều then chốt của bài toán là giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$ để suy ra bất đẳng thức (5). Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: Vũ Đức Văn, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Hưng Yên:** Nguyễn Phúc Hoàng, Nguyễn Việt Đức, Dương Hồng Sơn, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Bắc Ninh:** Lê Huy Cường, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Lê Văn Trường Nhật, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Quảng Bình:** Hoàng Thanh Việt, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Long An:** Nguyễn Lộc Phúc, Phạm Quốc Thắng, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/452. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm AB , tia CD cắt đường tròn (O) tại E . Kẻ $CF \parallel AE$ với F thuộc (O) , tia EF cắt AC tại G . Chứng minh rằng BG là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải.



Gọi H là giao điểm của AF và CE . Ta thấy $AEFC$ là hình thang cân, suy ra ba điểm O , H , G thẳng hàng và $OG \perp AE$.

Mặt khác $AB = AC = EF$, nên $BE \parallel AF$. Từ đó $\triangle BDE = \triangle ADH$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = AH$, dẫn đến tứ giác $BEAH$ là hình bình hành, suy ra

$AE \parallel BH \Rightarrow OH \perp BH$. Gọi K là giao điểm của BH với đường tròn (O) ($K \neq B$) thì H là trung điểm của BK . Từ đây, kết hợp với $AE \parallel BK$ ta được $A(EHBK) = -1$ (chùm điều hòa cơ bản). Cắt chùm điều hòa này bởi đường tròn (O) ta thấy tứ giác $EBFK$ là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại B , K của đường tròn (O) và EF đồng quy (1). Cũng từ $EBFK$ là tứ giác điều hòa ta có $\frac{KA}{KC} = \frac{BE}{BF} = \frac{KE}{KF} = \frac{BA}{BC}$ suy ra $ABCK$ là tứ giác điều hòa, do vậy tiếp tuyến tại B , K của đường tròn (O) và AC đồng quy (2). Từ (1), (2) và giả thiết $G = EF \cap AC$ ta có GB là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Số lời giải gửi về tòa soạn khá nhiều theo các hướng: Sử dụng tính chất của tứ giác điều hòa, hàng điểm – chùm điều hòa, tính chất đường đối trung hoặc biến đổi góc, ... Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Hoàng Lê Nhật Tùng, 11 Toán 2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Vũ Đức Văn, 10 Toán 1, Phạm Ngọc Khánh, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Văn Hiếu, 9E, THCS Vĩnh Yên, Đỗ Văn Quyết, Hà Hữu Linh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Tâm, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** Hà Minh Hoàng, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Triệu Ninh Ngân, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Vũ Duy Mạnh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nguyễn Phùng Thái Cường, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Phan Nhật Duy, Nguyễn Quang Dũng, 10 Toán 1, Nguyễn Văn Thế, Lê Văn Trường Nhật, Võ Duy Khánh, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Trần Nam Quang Trung, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** Lý Phước Công, Trần Nhân Trung, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kon Tum:** Nguyễn Hoàng Lan, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 10T1, THPT chuyên Long An; **Cần Thơ:** Nguyễn Trần Hữu Thịnh, 10A1, Trần Minh Nghĩa, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Nai:** Cao Đình Huy, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Duy, 9A6, THPT

chuyên Trần Đại Nghĩa; **Cà Mau:** Trần Xuân Sắc, 10 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/452. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{\sin x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \cot x}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Điều kiện để các biểu thức của $f(x)$ có nghĩa là $\sin x, \cos x$ khác 0 và cùng dấu. Nhận xét rằng khi $\sin x, \cos x$ khác 0 và cùng dấu thì

$$f(x) = \sqrt{\tan x(1 + \cos x)} + \sqrt{\cot x(1 + \sin x)} \\ \geq \sqrt{|\tan x|(1 - |\cos x|)} + \sqrt{|\cot x|(1 - |\sin x|)}.$$

Vì $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π không mất tính tổng quát, để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số ta xét $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Đặt $\sin x = -a, \cos x = -b$

và $a + b = m$ thì $a, b \in (0, 1)$ và $1 < m \leq \sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $x = \frac{5\pi}{4}$. Ta có

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{b}(1-b)} + \sqrt{\frac{b}{a}(1-a)}, \\ f^2(x) = \frac{1}{ab} - (a+b) + 2\sqrt{1+ab-(a+b)} \\ = \frac{1}{ab} - (a+b) + 2\sqrt{\frac{1}{2}(a+b-1)^2} \\ = \frac{1}{ab} - (a+b) + \sqrt{2}(a+b-1) \\ = \frac{2}{m^2-1} + (\sqrt{2}-1)m - \sqrt{2} \\ = \left[\frac{2}{m^2-1} + (2\sqrt{2}-2)(m+1) + (2\sqrt{2}+2)(m-1)\right] - (3\sqrt{2}+1)m + 4 - \sqrt{2} \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số trong móc vuông, ta được

$$\frac{2}{m^2-1} + (2\sqrt{2}-2)(m+1) + (2\sqrt{2}+2)(m-1) \\ \geq 3\sqrt{\frac{2}{m^2-1}(2\sqrt{2}-2)(m+1)(2\sqrt{2}+2)(m-1)} = 6 \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, do $1 < m \leq \sqrt{2}$ nên

$$-(3\sqrt{2}+1)m + 4 - \sqrt{2} \geq -(3\sqrt{2}+1)\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2} \\ = -2 - 2\sqrt{2} \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Thế (2) và (3)

vào (1), ta thu được $f^2(x) \geq 4 - 2\sqrt{2}$ hay

$$f(x) \geq \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}. \text{ Kết luận: } \min f(x) = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

đạt được khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hay $\sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{tức là } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đa số các bạn chỉ xét trường hợp $\sin x > 0, \cos x > 0$ nên chỉ nhận được đáp số

$$\min f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Vĩnh Phúc: Đỗ Văn Quyết, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** Vũ Minh Thành, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Thái Bình:** Trần Quang Minh, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Hà Tĩnh:** Lê Văn Trường Nhật, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Hoàng Thanh Việt, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** Vương Hoài Thanh, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Bến Tre:** Trần Thanh Dương, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/452. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, xét tập hợp M các điểm có tọa độ (x, y) với $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x \leq 12, y \leq 12$. Mỗi điểm trong M được tô bởi một trong ba màu: màu đỏ, màu trắng hoặc màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ mà tất cả các đỉnh của nó thuộc M và được tô cùng màu.

Lời giải. M gồm $12 \times 12 = 144$ điểm và được tô bởi ba màu nên tồn tại ít nhất 48 điểm được tô cùng màu, chẳng hạn màu đỏ. Chọn 48 điểm của M được tô bởi màu đỏ và trong các điểm này kí hiệu a_i là số điểm tô màu đỏ có hoành

độ i ($i = 1, \dots, 12$). Ta có $\sum_{i=1}^{12} a_i = 48$. Số cặp

điểm màu đỏ có hoành độ i là $C_{a_i}^2 = \frac{a_i(a_i-1)}{2}$.

Chiếu các điểm màu đỏ lên trục tung thì mỗi cặp điểm màu đỏ có hoành độ i sẽ thành một

đoạn thẳng $[x, y]$ với $x, y \in \mathbb{N}^*, x \leq 12, y \leq 12$.

Số các đoạn thẳng $[x, y]$ ($x, y \in \mathbb{N}^*, x \leq 12, y \leq 12$)

là $C_{12}^2 = 66$. Tổng số các cặp điểm màu đỏ được

$$\text{chiếu là } \sum_{i=1}^{12} C_{a_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} a_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} a_i^2 - 24$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^{12} a_i \right)^2}{12} - 24 = \frac{1}{2} \cdot \frac{48^2}{12} - 24 = 72.$$

Vì $\sum_{i=1}^{12} C_{a_i}^2 \geq 72 > 66$ nên tồn tại hai cặp đoạn

thẳng, một cặp có hoành độ i , một cặp có hoành độ j ($i < j$) được chiếu lên cùng một đoạn thẳng $[k, l]$ trên trục tung. Khi đó hình chữ nhật $ABCD$ với $A=(i, k), B=(i, l), C=(j, l), D=(j, k)$ đều được tô màu đỏ. $\square$

► **Nhận xét.** Trong số các bạn tham gia giải bài này chỉ có một bạn giải không đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội: Vũ Bá Sang, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hưng Yên:** Vũ Minh Thành, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** Lê Bảo Anh, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương. **Vĩnh Phúc:** Đỗ Văn Quyết, 10T, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Phạm Hồng Trường, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Tường, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/452. Xác định số nguyên dương t nhỏ nhất sao cho tồn tại t số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_t$ thỏa mãn: $x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 - \dots + (-1)^{t+1} x_t^3 = 2065^{2014}$ (1).

Lời giải. Dễ thấy: $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác:

$$2065^{2014} \equiv 4^{2014} \pmod{9} \equiv 4^{3 \cdot 671 + 1} \pmod{9}$$

$$\equiv 4 \cdot 64^{671} \pmod{9} \equiv 4 \pmod{9}.$$

Do đó với $t = 1, 2, 3$ đều không thỏa mãn (1).

Với $t = 4$, ta có: $2065 = 10^3 + 10^3 + 4^3 + 1^3$

$$\Rightarrow 2065^{2014} = (2065^{671})^3 \cdot 2065$$

$$= (2065^{671})^3 \cdot (10^3 + 10^3 + 4^3 + 1^3)$$

$$= (10 \cdot 2065^{671})^3 + (10 \cdot 2065^{671})^3$$

$$+ (4 \cdot 2065^{671})^3 + (1 \cdot 2065^{671})^3$$

$$= x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 - x_4^3 \text{ với } x_1 = 10 \cdot 2065^{671},$$

$$x_2 = -10 \cdot 2065^{671}, x_3 = 4 \cdot 2065^{671}, x_4 = -2065^{671}.$$

Vậy $t = 4$ là số nhỏ nhất cần tìm. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán khó ở chỗ cần chỉ ra sự tồn tại các số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_t$ thỏa mãn đẳng thức (1). Chỉ có hai bạn tham gia giải bài này và đều có lời giải đúng. Tên của hai bạn là: **Hà Nội:** Vũ Bá Sang, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ. **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/452. Cho a là số nguyên dương và dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2ax_n + 2a + 1}$$

$$- \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xác định a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Hồ Minh Phước, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế).

Ta có $x_2 = \sqrt{4a+2} - \sqrt{2}, x_2^2 - 2ax_2 + 2a + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4a+2} - \sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{4a+2} - \sqrt{2})a + 2a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4a+2} + 2 - 2a\sqrt{4a+2} + 2\sqrt{2} \cdot a + 2a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow F = 2a(\sqrt{4a+2} - 3 - \sqrt{2}) + 4\sqrt{2}a + 5 \leq 0.$$

• Nếu $a \geq 5$ thì

$$\sqrt{4a+2} - 3 - \sqrt{2} \geq \sqrt{22} - 3 - \sqrt{2} > 4,5 - 3 - 1,5 = 0$$

và $4\sqrt{2}a + 5 \geq 4\sqrt{11} + 5 > 0$. Suy ra $F > 0$.

• Nếu $a = 4$, $F = 8(\sqrt{18} - 3 - \sqrt{2}) + 4\sqrt{9} - 5$

$$= 16\sqrt{2} - 17 > 16,14 - 17 > 0.$$

• Nếu $a = 3$, $F = 6(\sqrt{14} - 3 - \sqrt{2}) + 4\sqrt{7} - 5$

$$= 2\sqrt{7}(3\sqrt{2} + 2) - 23 - 6\sqrt{2}$$

$$> 2 \cdot 2,6 \cdot (3 \cdot 1,4 + 2) - 23 - 6 \cdot 1,5$$

$$= 5,2 \cdot 6,2 - 32 = 0,24 > 0.$$

Như vậy với $a \in \mathbb{N}^*, a \geq 3$, x_3 không xác định.

Xét $a \in \{1, 2\}$. Ta có

$$x^2 - 2ax + 2a + 1 = (x - a)^2 + 2a + 1 - a^2 \geq 2a + 1 - a^2 > 0.$$

Kí hiệu

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2ax + 2a + 1} - \sqrt{x^2 - 2ax + 2a + 1}$$

$$= \sqrt{(x+a)^2 + 2a + 1 - a^2} - \sqrt{(x-a)^2 + 2a + 1 - a^2}$$

Ta thấy ngay $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ là tập hợp tất cả các số thực dương) và

$$f'(x) = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + 2a+1-a^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + 2a+1-a^2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{vì } \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2a+1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a+1-a^2}{t^2}}}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ là}$$

hàm số tăng.

Mặt khác $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2ax + 2a+1} - \sqrt{x^2 - 2ax + 2a+1} \\ = \frac{4ax}{\sqrt{x^2 + 2ax + 2a+1} + \sqrt{x^2 - 2ax + 2a+1}} < \frac{4ax}{x} = 4a.$$

Áp dụng ta có $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{4a+2} - \sqrt{2} \quad (a \in \{1, 2\})$,

$f(x)$ là hàm số tăng (do $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$), suy ra $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_2 < x_3 \dots$

Như vậy $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < 4a$.

Từ đó suy ra $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Kết luận: Có hai số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $a \in \{1, 2\}$.

Chú ý: Đặt $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Ta có

$$f(c) = c \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + 2ac + 2a+1} - \sqrt{c^2 - 2ac + 2a+1} = c \\ \Leftrightarrow \frac{4ac}{\sqrt{c^2 + 2ac + 2a+1} + \sqrt{c^2 - 2ac + 2a+1}} = c \\ \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + 2ac + 2a+1} + \sqrt{c^2 - 2ac + 2a+1} = 4a \\ \Rightarrow 2\sqrt{c^2 + 2ac + 2a+1} = c + 4a \Rightarrow 3c^2 = 16a^2 - 8a - 4 \\ \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{4a^2 - 2a - 1}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán giới hạn dãy số lạ, hay. Ngoài bạn *Phước*, hai bạn học sinh sau cũng có lời giải tốt:

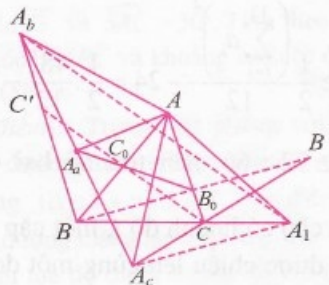
Hà Tĩnh: Lê Văn Trường Nhật, Nguyễn Văn Thế, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/452. Cho tam giác ABC . Đường thẳng Δ không đi qua A, B, C cắt BC, CA, AB thứ tự tại A_1, B_1, C_1 . A_b, A_c theo thứ tự là điểm đối

xứng của A_1 qua AB, AC . A_a là trung điểm của $A_b A_c$. Các điểm B_b, C_c được xác định tương tự như điểm A_a . Chứng minh rằng các điểm A_a, B_b, C_c thẳng hàng.

Lời giải.



Hình 1

Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho hai bộ ba điểm thẳng hàng $A_1, A_2,$

A_3 và B_1, B_2, B_3 sao cho $\frac{A_1 A_2}{A_1 A_3} = \frac{B_1 B_2}{B_1 B_3} = k$. Nếu $C_1,$

C_2, C_3 theo thứ tự là trung điểm của $A_1 B_1, A_2 B_2,$

$A_3 B_3$ thì C_1, C_2, C_3 thẳng hàng và $\frac{C_1 C_2}{C_1 C_3} = k$.

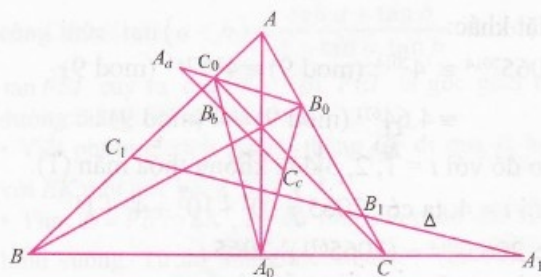
Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12/452 (h.1, h.2).

Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB ; B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của B, C qua AC, AB .

Vì phép đối xứng trục bảo toàn sự thẳng hàng

và tỉ số đơn nên $\frac{A_b B}{A_b C'} = \frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{A_c B'}{A_c C}$.



Hình 2

Từ đó, áp dụng bổ đề trên cho hai bộ ba điểm A_b, B, C' và A_c, B', C , chú ý rằng A_a, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của $A_b A_c, BB', CC'$,

$$\text{suy ra } A_a \in B_0 C_0; \frac{\overline{A_a B_0}}{\overline{A_a C_0}} = \frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}}.$$

$$\text{Tương tự } B_b \in C_0 A_0; \frac{\overline{B_b C_0}}{\overline{B_b A_0}} = \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \text{ và}$$

$$C_c \in A_0 B_0; \frac{\overline{C_c A_0}}{\overline{C_c B_0}} = \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}}.$$

Chú ý rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và theo định lý Menelaus, ta có

$$\frac{\overline{A_a B_0}}{\overline{A_a C_0}} \cdot \frac{\overline{B_b C_0}}{\overline{B_b A_0}} \cdot \frac{\overline{C_c A_0}}{\overline{C_c B_0}} = \frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \cdot \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}} = 1.$$

Từ đó, lại theo định lý Menelaus, suy ra A_a, B_b, C_c thẳng hàng. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán hay nhưng không khó, tuy nhiên rất ít bạn tham gia giải, xin nêu tên các bạn có lời giải đúng: **Hà Nội:** Hoàng Anh Quân, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** Dương Hồng Sơn, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thanh Hoá:** Vũ Duy Mạnh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Cần Thơ:** Nguyễn Trần Hữu Thịnh, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/452. Một xylanh đặt thẳng đứng, đầu dưới chìm trong nước, đầu trên thông với khí quyển. Trong xylanh có một pittông đặt nằm trên mặt nước. Kéo chậm pittông lên độ cao $H = 15\text{m}$. Tìm công kéo pittông. Cho diện tích pittông là $S = 1\text{dm}^2$, áp suất khí quyển $p_0 = 10^5 \text{Pa}$. Bỏ qua khối lượng pittông.

Lời giải. Gọi D_n là khối lượng riêng của nước, P là trọng lượng của cột nước trong ống khi kéo pittông từ ngang mặt thoáng của nước lên tới độ cao là $H = 15\text{m}$.

Khi kéo pittông lên trên, do tác dụng của áp suất khí quyển nước sẽ dâng lên trong ống theo pittông cho tới khi áp suất do cột nước gây ra tại điểm ngang mặt thoáng cân bằng với áp suất khí quyển thì ngừng. Ta có: $p_0 = p_1$ (p_1 là áp suất do cột nước gây ra)

$$\Rightarrow p_0 = d_n \cdot h \Rightarrow h = \frac{p_0}{d_n} = \frac{10^5}{10000} = 10 \text{ (m)}$$

Vậy ta có thể chỉ hút được cột nước có chiều cao tối đa h bằng 10m .

Do cột nước tăng đều nên lực kéo cũng tăng đều từ 0 đến P (P là trọng lượng cột nước dâng

lên trong ống). Vì lực kéo tỷ lệ với độ cao h của cột nước nên lực kéo trung bình là:

$$T_{tb} = \frac{0+P}{2} = \frac{P}{2}. \text{ Vậy công thực hiện được khi}$$

kéo cột nước có chiều cao h là:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{P}{2} \cdot h = \frac{1}{2} d_n \cdot S \cdot h \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot 0,01 \cdot 10 \cdot 10 = 5000 \text{ (J)}. \end{aligned}$$

Khi pittông dứt khỏi cột nước thì lực kéo lúc này cân bằng với áp lực của khí quyển tác dụng lên mặt trên của pittông. Công thực hiện trong giai đoạn này là:

$$A_2 = p_0 \cdot S(H - h) = 10^5 \cdot 0,01(15 - 10) = 5000 \text{ (J)}$$

Vậy công thực hiện tổng cộng là:

$$A = A_1 + A_2 = 5000 + 5000 = 10000 \text{ (J)} = 10 \text{ (kJ)} \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Quảng Ninh: Vũ Hoàng Yến, 11A7, THPT Uông Bí; **Thái Bình:** Ngô Văn Khoa, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, H. Đông Hưng; **Bắc Ninh:** Nguyễn Đức Nam, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/452. Cho đoạn mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C mắc nối tiếp. Trong đó các đại lượng (R, C, ω) không đổi còn L thay đổi được. Biết rằng khi $L = L_1$ và $L = L_2$ thì thấy điện áp giữa hai đầu cuộn cảm thuần U đều như nhau. Xác định L theo L_1 và L_2 để điện áp hai đầu cuộn cảm đạt cực đại.

Lời giải. Điện áp giữa hai đầu cuộn cảm thuần

$$U_L = IZ_L = \frac{UZ_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \text{ (chia cả tử và}$$

$$\text{mẫu cho } Z_L). \text{ Ta có: } U_L = \frac{UZ_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{Z_C^2} - \frac{2Z_L}{Z_C} + 1}} = \frac{U}{\sqrt{y}} \Rightarrow U_{L_{\max}} = \frac{U}{\sqrt{y_{\min}}},$$

$$\text{vì } y = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_C^2} - \frac{2Z_L}{Z_C} + 1.$$

Nếu đặt $x = \frac{1}{Z_z}$ thì hàm y có dạng tam thức bậc

hai $y = ax^2 + bx + c$ có hệ số $a = R^2 + Z_C^2 > 0$

$$\Rightarrow y_{\min} \text{ khi } x_0 = -\frac{b}{2a}. \text{ Khi đó:}$$

$$Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C} \Rightarrow Z_L \cdot Z_C = R^2 + Z_C^2$$

$$\text{Khi } U_{L1} = U_{L2} \Leftrightarrow I_1 Z_{L1} = I_2 Z_{L2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U \cdot Z_{L1}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2 - 2Z_{L1}Z_C + Z_{L1}^2}}$$

$$= \frac{U \cdot Z_{L2}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2 - 2Z_{L2}Z_C + Z_{L2}^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_{L1}^2}{R^2 + Z_C^2 - 2Z_{L1}Z_C + Z_{L1}^2}$$

$$= \frac{Z_{L2}^2}{R^2 + Z_C^2 - 2Z_{L2}Z_C + Z_{L2}^2} \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2)} \Rightarrow \frac{Z_{L1}^2}{Z_L Z_C - 2Z_{L1}Z_C + Z_{L1}^2}$$

$$= \frac{Z_{L2}^2}{Z_L Z_C - 2Z_{L2}Z_C + Z_{L2}^2}$$

$$Z_{L1}^2 Z_L Z_C - 2Z_{L1}^2 Z_{L2} Z_C + Z_{L1}^2 Z_{L2}^2$$

$$= Z_{L2}^2 Z_L Z_C - 2Z_{L2}^2 Z_{L1} Z_C + Z_{L1}^2 Z_{L2}^2$$

$$\Leftrightarrow Z_{L1}^2 Z_L - 2Z_{L1}^2 Z_{L2} = Z_{L2}^2 Z_L - 2Z_{L2}^2 Z_{L1}$$

$$\Leftrightarrow Z_L (Z_{L1}^2 - Z_{L2}^2) = 2Z_{L1}Z_{L2} (Z_{L1} - Z_{L2})$$

$$\Leftrightarrow Z_L (Z_{L1} + Z_{L2}) = 2Z_{L1}Z_{L2}$$

$$\Leftrightarrow U_{L\max} \text{ khi: } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_{L1}} + \frac{1}{Z_{L2}} \right) = \frac{1}{Z_L} \Rightarrow L = \frac{2L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad \square$$

► **Nhận xét.** Một số bạn có lời giải đúng và chặt chẽ: **Bắc Ninh:** Nguyễn Đắc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Ngô Văn Khoa, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, huyện Đông Hưng; **Bắc Giang:** Hồ Thanh Tùng, Ngô Tuấn Hùng, 12 A6, THPT Tân Yên Số 1; **Nghệ An:** Hồ Thanh Tùng, Hoàng Nghĩa Vương, 12 C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn.

ĐINH THÁI QUỲNH

TÍNH CHẤT SỐ HỌC ... (Tiếp theo trang 15)

BÀI TẬP

1. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho đa thức $f(x) = x^3 - 17x^2 + mx - n^2$ có tất cả các nghiệm đều nguyên.

2. Cho đa thức $Q(x) = x^3 + 19x^2 + 99x + a$, $a \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên tố $p \geq 5$, trong các số nguyên $Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(p-1)$ không thể có hơn 3 số chia hết cho p .

3. Xác định các đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên không âm sao cho với mỗi số nguyên dương n thì $4^n + P(n)$ chia hết cho 27.

4. Cho p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $Q(x)$ bậc 3 có hệ số nguyên thỏa mãn:

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = |Q(p_4)| = 3.$$

5. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm số tự nhiên k bé nhất sao cho tồn tại đa thức dạng $P(x) = x^k + a_k x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ chia hết cho n với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

6. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, a chia hết cho 3, b chia hết cho 3 và c không chia hết cho 3. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n luôn luôn tồn tại số nguyên a_n sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n .

7. Xét đa thức:

$$P_n(x) = C_n^2 + C_n^5 x + C_n^8 x^2 + \dots + C_n^{3k+2} x^k,$$

với n là một số tự nhiên và $k = \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$.

a) Chứng minh rằng

$$P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho $P_n(a^3)$ chia hết cho $3^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}$ với mọi $n \geq 2$.

8. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho đa thức:

$x^n + 4$ có thể phân tích thành tích của hai đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

9. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức: $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

LỜI KẾT

Bài toán liên quan đến đa thức vô cùng phong phú và hấp dẫn, ngoài bản chất số học, đa thức còn mang bản chất hình học và đại số thuần túy của nó. Sử dụng tính đơn điệu, giới hạn, đạo hàm và đồ thị... ta có thể giải quyết được nhiều bài toán về đa thức. Tuy nhiên trong phạm vi bài này ta chỉ đi theo một hướng như đã trình bày, mong bạn đọc trao đổi. Xin chân thành cảm ơn GS.TSKH Phùng Hồ Hải - TS Trần Hữu Nam đã góp ý để tôi hoàn chỉnh bài viết này.

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)**TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD**

Problem T9/456. Given positive integers $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ satisfying:

a) $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$;

b) for each k ($k = 1, \dots, 15$), if we denote b_k the largest divisor of a_k such that $b_k < a_k$, then $b_1 > b_2 > \dots > b_{15}$. Prove that $a_{15} > 2015$.

Problem T10/456. Given the following polynomial $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1975$.

In the interval $[1; 3^{2015}]$, how many are there integers a such that $f(a)$ is divisible by 3^{2015} ?

Problem T11/456. Find all injections $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying:

$$f(x^5) + f(y^5) = (x+y)[f^4(x) - f^3(x)f(y) + f^2(x)f^2(y) - f(x)f^3(y) + f^4(y)] \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/456. Given a triangle ABC and let G be its centroid. Choose a point M , which is different from G , inside the triangle. Suppose that AM, BM , and CM intersect BC, CA , and AB at A_0, B_0, C_0 respectively. Choose A_1, A_2 on B_0C_0 such that $A_0A_1 \parallel CA$ and $A_0A_2 \parallel AB$. We choose four points B_1, B_2, C_1, C_2 similarly. Let G_1, G_2 be the centroids of the triangles $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ respectively. Prove that

a) $A_1B_2 \parallel B_1C_2 \parallel C_1A_2$,

b) MG goes through the midpoint of G_1G_2 .

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8 (Tiếp theo trang 11)

$$DM^2 = DA^2 + AM^2 = 50 \Leftrightarrow (t+3)^2 + \left(\frac{1-23t}{9}\right)^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow 610t^2 + 440t - 3320 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\frac{166}{61} \text{ (Loại).} \end{cases}$$

Suy ra $D(2; -4)$.

Câu 8. Điểm $A \in \Delta$, nên $A(2+t; 2+t; 3+2t)$.

$$d(A, (P)) = \frac{|6t+6|}{3}. \quad d(A, (P)) = 6 \Leftrightarrow t=2$$

hoặc $t=-4$. Vậy $A(4; 4; 7)$ hoặc $A(-2; -2; -5)$.

Câu 9. Số các số thuộc M có 3 chữ số là $A_3^3 = 60$. Số các số thuộc M có 4 chữ số là

$A_4^4 = 120$. Số các số thuộc M có 5 chữ số là

$A_5^5 = 120$. Suy ra số phần tử của M là

$$60 + 120 + 120 = 300.$$

Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $E_2 = \{2, 3, 5\}$, $E_3 = \{1, 4, 5\}$.

Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10. Từ E_1 lập được số các số thuộc A là $4!$ Từ mỗi tập E_2 và E_3 lập được số các số thuộc A là $3!$

Suy ra số phần tử của A là $4! + 2 \cdot 3! = 36$. Do đó

$$\text{xác suất cần tính là } P = \frac{36}{300} = 0,12.$$

Câu 10. Ta có $b^4 + 16 \geq 8b^2$. Suy ra

$$\frac{a}{b^4+16} = \frac{a}{16} \left(1 - \frac{b^4}{b^4+16}\right) \geq \frac{a}{16} \left(1 - \frac{b^4}{8b^2}\right) = \frac{a}{16} \left(1 - \frac{b^2}{8}\right).$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{b}{c^4+16} \geq \frac{b}{16} \left(1 - \frac{c^2}{8}\right),$$

$$\frac{c}{a^4+16} \geq \frac{c}{16} \left(1 - \frac{a^2}{8}\right). \text{ Suy ra}$$

$$A \geq \frac{3}{16} - \frac{1}{128}(ab^2 + bc^2 + ca^2) \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa a và c . Khi đó ta có $a(b-a)(b-c) \leq 0$, hay

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq a^2b + bc^2 + abc = b(a^2 + c^2 + ac) \leq b(a+c)^2 = b(3-b)^2.$$

Xét hàm số $f(b) = b(3-b)^2, 0 \leq b \leq 3$ ta được

$$f(b) \leq f(1) = 4 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có } A \geq \frac{5}{32}.$$

Khi $a=0, b=1, c=2$ ta có dấu đẳng thức xảy

$$\text{ra. Vậy min } A = \frac{5}{32}.$$

PHAN VĂN THÁI
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An)



AI ĐÚNG ? AI SAI ? VÌ SAO ?

PHẠM CÔNG MINH
(Hải Dương)

Trong một buổi học nhóm, hai bạn *Đông* và *Xuân* cùng giải bài toán 5c trang 154 sách giáo khoa Đại số lớp 10 (Cơ bản):
Tinh $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$ biết rằng

$$\sin a + \cos a = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{3\pi}{4} < a < \pi.$$

• *Lời giải của Đông:* Từ giả thiết

$$\frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin a > 0 \\ \cos a < 0 \end{cases}. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{cases} \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{1}{2} - \cos a \\ \left(\frac{1}{2} - \cos a\right)^2 + \cos^2 a = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\cos^2 a - \cos a - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos a = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4},$$

$$\text{vì } \cos a < 0 \text{ nên } \cos a = \frac{1 - \sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{2} - \cos a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \sqrt{7}}{4} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}. \text{ Vậy}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4},$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

• *Lời giải của Xuân:* Từ giả thiết $\frac{3\pi}{4} < a < \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin a > 0 \\ \cos a < 0 \end{cases} \text{ và } \frac{3\pi}{4} < 2a < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin 2a < 0 \\ \cos 2a > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos a = \frac{1 - \sqrt{7}}{4} \\ \sin a = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Suy ra: } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-3}{\sqrt{7}}.$$

So sánh kết quả, *Đông* và *Xuân* tìm mãi không biết vì sao lại có hai kết quả khác nhau, sai ở đâu? Rất may bạn *Thanh* – cây toán của lớp tới cho lời giải.

• *Lời giải của Thanh:*

$$\text{Từ giả thiết: } \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Từ giả thiết: } \frac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2a < 2\pi$$

$$\Rightarrow \cos 2a > 0 \Rightarrow \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-3}{\sqrt{7}}.$$

Thanh và *Xuân* vui mừng, khẳng định lời giải của mình đúng vì đúng với đáp số của sách giáo khoa. Bạn *Đông* không đồng ý.

Các bạn yêu toán, hãy giúp một ý kiến cho biết ai đúng? ai sai? Vì sao?

PHẠM CÔNG MINH
(TP. Hải Dương)

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG. Trên Tạp chí TH&TT số 455, tháng 5 năm 2015 trong mục *Đề ra kì này*

• Xin đọc lại đề bài T6/455 như sau: Phương trình thứ ba của hệ là: $3z^3 + x^3 = 4x^2 - 5x + 9z + 8$.

• Bài T6/454 đánh số lại thành Bài T6/455, Bài T7/454 thành Bài T7/455, Bài T12/454 thành Bài T12/455.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

DIỄN ĐÀN**DAY
HOC
TOAN****VỀ****"BÀI TOÁN CON RẮN"****VŨ HỮU BÌNH (Hà Nội)**

Vừa qua, báo điện tử Vietnamnet có đăng bài toán do một giáo viên ở huyện Bảo Lộc tỉnh Lâm Đồng ra trong đề ôn tập lớp 3:

Điền chín số tự nhiên từ 1 đến 9 vào các ô trống:

		-		66
+	x	-	=	
13	12	11	10	
x	+	+	-	
:	+	x	:	

Bài toán đã lan sang tận Châu Âu. Tờ báo The Guardian của Anh, trong mục Khoa học gọi đó là "Bài toán con rắn", đã đăng bài của Alex Bellos về cách giải bài toán này. Bài viết được Nguyễn Thảo dịch trên Vietnamnet như sau: "Bài toán này giống như một bài toán đố dành cho Khoa học máy tính nhiều hơn là dành cho Toán học.

Tuy nhiên, với hầu hết chúng ta – những người của thời đại giấy và bút chì, tôi sẽ viết lại bài toán dưới dạng phương trình như sau:

$$a + \frac{13b}{c} + d + 12e - f - 11 + \frac{gh}{i} - 10 = 66.$$

Trước khi giải phương trình này, hãy xem tổng số đáp án của bài toán này: có tới 362880 tổ hợp các số từ 1 đến 9 có thể điền vào ô trống.

Quay lại với bài toán, chúng ta có thể rút gọn phương trình thành

$$a + \frac{13b}{c} + d + 12e - f + \frac{gh}{i} = 87.$$

Từ đây ta có thể giả định rằng $\frac{b}{c}$ và $\frac{gh}{i}$ là các số nguyên và chúng ta không muốn $\frac{13b}{c}$ quá lớn.

Có nhiều hơn một lời giải nên có nhiều dự đoán khác nhau dẫn tới kết quả đúng. Lời giải mà tôi cho là trực quan nhất thuộc về độc giả

Broullachain. Để $\frac{13b}{c}$ nhỏ nhất, có thể anh ấy đã cho $b = 2, c = 1$. Từ đó ta được

$$a + d - f + 26 + 12e + \frac{gh}{i} = 87 \text{ hay}$$

$$a + d - f + 12e + \frac{gh}{i} = 61.$$

Vậy các ẩn số còn lại sẽ từ 3 đến 9, trong đó có 3, 5, 7 là các số nguyên tố. Như Broullachain lập luận thì loại bỏ chúng càng sớm càng tốt để không làm phức tạp thêm các số khác.

Cho $a = 3, d = 5$ và $f = 7$, ta có

$$3 + 5 - 7 + 12e + \frac{gh}{i} = 61 \text{ hay } 12e + \frac{gh}{i} = 60.$$

Các số còn lại là 4, 6, 8, 9. Lúc này ta thử các ẩn số với các số trên thì được một kết quả hợp lý là $e = 4, g = 9, h = 8, i = 6$ và có

$$48 + \frac{72}{6} = 48 + 12 = 60.$$

Có những bài toán yêu cầu bạn phải soi xét thật kỹ, nhưng cũng có những bài toán như bài toán này, chẳng có cách giải nào khác ngoài việc thử, sai, lại thử lại.

Cả hai dạng bài toán đều có thể khiến cho người ta thỏa mãn khi giải xong."

CÁCH GIẢI ĐẦY ĐỦ "BÀI TOÁN CON RẮN"

Những người yêu thích lập luận chặt chẽ chắc không thỏa mãn với lời giải trên, vì đó chỉ là một đáp số chứ chưa phải tất cả các đáp số. Và việc cho $b = 2, c = 1, a = 3, d = 5, f = 7$ mang tính áp đặt.

Ta đi tìm lời giải đầy đủ cho bài toán trên, tức là tìm tất cả các giá trị nguyên khác nhau từ 1 đến 9 của $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ thỏa mãn

$$a + \frac{13b}{c} + d + 12e - f + \frac{gh}{i} = 87 \quad (1).$$

Trước hết, để cho bài toán đỡ phức tạp, ta bổ sung thêm vào đề bài một yêu cầu là kết quả

các phép tính trung gian cũng là số nguyên để đi đến nhận xét $\frac{13b}{c}$ và $\frac{gh}{i}$ đều là số nguyên, do đó không phải xét các trường hợp như:

$$\frac{13b}{c} + \frac{gh}{i} = \frac{13.1}{3} + \frac{5.2}{6} = 6.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < d$ và $h < g$.

Do $\frac{13b}{c}$ là số nguyên, mà $(13, c) = 1$ nên $b : c$.

Nếu $\frac{b}{c} \geq 5$ thì $c = 1, e \geq 2$. Với $e \geq 3$ thì vế trái của (1) lớn hơn 87. Với $e = 2$ thì

$$a + \frac{13b}{c} + d + 12e - f + \frac{gh}{i} \geq 3 + 13.5 + 4 + 12.2 - 9 + 1 = 88.$$

Vậy giá trị của $\frac{b}{c}$ chỉ có thể là 2, 3, 4.

A. Xét $\frac{b}{c} = 2$. Khi đó (1) trở thành

$$a + d + 12e - f + \frac{gh}{i} = 87 - 26 = 61 \quad (2).$$

Có bốn trường hợp: $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases} \begin{cases} b=4 \\ c=2 \end{cases} \begin{cases} b=6 \\ c=3 \end{cases} \begin{cases} b=8 \\ c=4 \end{cases}$

I. Xét $b = 2, c = 1$. Do $e \neq 1, e \neq 2$ và không thể $e \geq 6$ nên $e \in \{3; 4; 5\}$.

1) Xét $e = 3$. Khi đó (2) trở thành

$a + d - f + \frac{gh}{i} = 61 - 36 = 25$. Các chữ nhận giá trị 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ta chú ý rằng

$$\frac{gh}{i} = 25 - a - d + f \geq 25 - 8 - 9 + 4 = 12.$$

Lại xét ba trường hợp của i :

– Xét $i = 4$ thì $\frac{gh}{4}$ có thể là: $\frac{8.5}{4} = 10$, loại;

$\frac{8.6}{4} = 12 \Rightarrow a + d - f = 13$, các chữ nhận giá trị

5, 7, 9 loại; $\frac{8.7}{4} = 14 \Rightarrow a + d - f = 11$, các chữ

nhận giá trị 5, 6, 9 loại; $\frac{9.8}{4} = 18 \Rightarrow a + d - f = 7$, các chữ nhận giá trị 5, 6, 7 loại.

– Xét $i = 6$ thì $\frac{gh}{6}$ có thể là: $\frac{9.4}{6} = 6$, loại;

$\frac{9.8}{6} = 12 \Rightarrow a + d - f = 13$, các chữ nhận giá trị 4, 5, 7 loại.

– Xét $i = 8$ thì $\frac{gh}{8} = \frac{6.4}{8} = 3$, loại.

2) Xét $e = 4$. Khi đó (2) trở thành

$a + d - f + \frac{gh}{i} = 61 - 48 = 13$. Các chữ nhận giá trị 3, 5, 6, 7, 8, 9. Ta chú ý rằng:

$\frac{gh}{i} = 13 - a - d + f \leq 13 - 3 - 5 + 9 = 14$. Lại xét ba trường hợp của i :

– Xét $i = 3$ thì $\frac{gh}{3}$ có thể là:

$\frac{6.5}{3} = 10 \Rightarrow a + d - f = 3$, các chữ nhận giá trị

7, 8, 9 loại; $\frac{7.6}{3} = 14 \Rightarrow a + d - f = -1$, các chữ

nhận giá trị 5, 8, 9 loại; $\frac{8.6}{3} = 16; \frac{9.6}{3} = 18$;

$\frac{9.5}{3} = 15; \frac{9.7}{3} = 21; \frac{9.8}{3} = 24$ đều loại.

– Xét $i = 6$ thì $\frac{gh}{6}$ có thể là:

$\frac{8.3}{6} = 4 \Rightarrow a + d - f = 9$, các chữ nhận giá trị 5,

7, 9 loại; $\frac{9.8}{6} = 12 \Rightarrow a + d - f = 1$, các chữ nhận

giá trị 3, 5, 7 thỏa mãn với $a = 3, d = 5$ và $f = 7$.

Ta tìm được một đáp số, đó là đáp số trong bài viết trên tờ báo của Anh:

$$3 + \frac{13.2}{1} + 5 + 12.4 - 7 + \frac{9.8}{6} = 87.$$

– Xét $i = 9$ thì $\frac{gh}{9} = \frac{6.3}{9} = 2 \Rightarrow a + d - f = 11$,

các chữ nhận giá trị 5, 7, 8 loại.

3) Xét $e = 5$. Không có đáp số, bạn đọc tự giải.

II. Xét $b = 4, c = 2$. Khi đó

$a + d - f + 12e + \frac{gh}{i} = 61$ (3). Do $e \neq 2, e \neq 4$

và không thể có $e \geq 6$ nên $e \in \{1; 3; 5\}$.

1) Xét $e = 1$. Khi đó (3) trở thành

$a + d - f + \frac{gh}{i} = 61 - 12 = 49$. Các chữ nhận giá trị 3, 5, 6, 7, 8, 9. Ta chú ý rằng

$\frac{gh}{i} = 49 - a - d + f \geq 49 - 8 - 9 + 3 = 35$. Lại xét ba trường hợp của i :

– Xét $i = 3$ thì $\frac{gh}{3} \leq \frac{9.8}{3} = 24$, loại.

– Xét $i = 6$ thì $\frac{gh}{6}$ có thể là: $\frac{8.3}{6} = 4, \frac{9.8}{6} = 12$, đều loại.

– Xét $i = 9$ thì $\frac{gh}{9} = \frac{6.3}{9} = 2$ loại.

2) Xét $e = 3$. Khi đó (3) trở thành

$a + d - f + \frac{gh}{i} = 61 - 36 = 25$. Các chữ nhận giá trị 1, 5, 6, 7, 8, 9. Ta chú ý rằng

$\frac{gh}{i} = 25 - a - d + f \leq 25 - 1 - 5 + 9 = 28$. Lại xét hai trường hợp của i :

– Xét $i = 1$ thì $\frac{gh}{1} \geq \frac{6.5}{1} = 30$, loại.

– Xét $i = 6$ thì $\frac{gh}{6} = \frac{9.8}{6} = 12 \Rightarrow a + d - f = 13$, các chữ nhận giá trị 1, 5, 7 loại.

3) Xét $e = 5$. Không có đáp số, bạn đọc tự giải.

III. Xét $b = 6, c = 3$. Khi đó

$$a + d + 12e - f + \frac{gh}{i} = 61 \quad (4). \text{ Do } e \neq 3 \text{ và}$$

không thể $e \geq 6$ nên $e \in \{1; 2; 4; 5\}$.

– Với $e = 1$, lần lượt xét $i = 2, i = 4, i = 8$.

– Với $e = 2$, lần lượt xét $i = 1, i = 4$.

– Với $e = 4$, lần lượt xét $i = 1, i = 2$.

– Với $e = 5$, lần lượt xét $i = 1, i = 2, i = 4, i = 8$.

Giải theo cách tương tự như trên, không có thêm đáp số mới.

IV. Xét $b = 8, c = 4$: không có đáp số, bạn đọc tự giải.

B. Xét $\frac{b}{c} = 3$ Khi đó (1) trở thành

$$a + d + 12e - f + \frac{gh}{i} = 87 - 39 = 48 \quad (5).$$

Có ba trường hợp: $\begin{cases} b=3 \\ c=1 \end{cases} \begin{cases} b=6 \\ c=2 \end{cases} \begin{cases} b=9 \\ c=3 \end{cases}$.

– Với $b = 3, c = 1$, do không thể $e \geq 5$ nên $e \in \{2; 4\}$. Với $e = 2$, lần lượt xét $i = 4, i = 6, i = 8$. Với $e = 4$, lần lượt xét $i = 2, i = 6$.

– Với $b = 6, c = 2$, do không thể $e \geq 5$ nên $e \in \{1; 3; 4\}$.

Với $e = 1$, lần lượt xét $i = 3, i = 4$.

Với $e = 3$, lần lượt xét $i = 1, i = 4$.

Với $e = 4$, lần lượt xét $i = 1, i = 3$.

– Với $b = 9, c = 3$, do không thể có $e \geq 5$ nên $e \in \{1; 2; 4\}$.

Với $e = 1$, lần lượt xét $i = 2, i = 4, i = 8$.

Với $e = 2$, lần lượt xét $i = 1, i = 4, i = 8$.

Với $e = 4$, lần lượt xét $i = 1, i = 2$.

Giải theo cách tương tự như trên, ta có thêm ba đáp số trong các trường hợp sau:

Với $b = 3, c = 1, e = 2, i = 4$, chọn

$g = 8, h = 7$, ta được $a = 6, d = 9, f = 5$, chọn

$g = 9, h = 8$, ta được $a = 5, d = 7, f = 6$ và có:

$$6 + \frac{13.3}{1} + 9 + 12.2 - 5 + \frac{8.7}{4} = 87;$$

$$5 + \frac{13.3}{1} + 7 + 12.2 - 6 + \frac{9.8}{4} = 87.$$

Với $b = 9, c = 3, e = 2, i = 4$, chọn $g = 8, h = 7$, ta được $a = 5, d = 6, f = 1$ và có:

$$5 + \frac{13.9}{3} + 6 + 12.2 - 1 + \frac{8.7}{4} = 87.$$

C. Xét $\frac{b}{c} = 4$. Khi đó (1) trở thành

$$a + d + 12e - f + \frac{gh}{4} = 87 - 52 = 35 \quad (6).$$

Có hai trường hợp $\begin{cases} b=4 \\ c=1 \end{cases} \begin{cases} b=8 \\ c=2 \end{cases}$.

– Với $b = 4, c = 1$ do không thể $e \geq 4$ nên $e \in \{2; 3\}$. Với $e = 2$, lần lượt xét $i = 3, i = 6, i = 9$. Với $e = 3$, xét $i = 2$.

– Với $b = 8, c = 2$ do không thể có $e \geq 4$ nên $e \in \{1; 3\}$. Với $e = 1$, lần lượt xét $i = 3, i = 6, i = 9$. Với $e = 3$, lần lượt xét $i = 1, i = 6$.

Giải theo cách tương tự như trên, ta có thêm một đáp số mới trong trường hợp $b = 4, c = 1, e = 2, i = 6, g = 8, h = 3$, do đó $a = 5, d = 9,$

$f = 7$ và có: $5 + \frac{13.4}{1} + 9 + 12.2 - 7 + \frac{8.3}{6} = 87.$

KẾT LUẬN

Ta được năm đáp số trên với giả sử $a < d$ và $h < g$. Nếu đổi giá trị của a và d , của h và g thì từ một đáp số có thêm ba đáp số nữa. Do đó bài toán có tất cả hai mươi đáp số.

Lời giải đầy đủ của bài toán như trình bày ở trên tuy phải xét nhiều trường hợp nhưng có đường lối rõ ràng. Mấu chốt của cách giải là phát hiện ra $b : c$ và $gh : i$. Sau khi xét cặp giá trị của b và c , ta xét e để giảm số trường hợp cần xét, rồi xét i để chọn g và h , cuối cùng xác định a, d, f .

Rõ ràng bài toán này vẫn thích hợp cho môn Toán chứ không phải chỉ dành cho môn Khoa học máy tính.

Bạn đọc nào có hứng thú với bài toán dạng này có thể thử sức với “Bài toán con rắn”:

Điền các số tự nhiên từ 1 đến 6 vào các ô trống (các kết quả trung gian cũng là số tự nhiên).

		x	
+	+	:	
17	18		
x	-	=	
	:		29

Bài toán này đơn giản hơn “Bài toán con rắn” và có tất cả bốn đáp số.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 456 (6.2015)

Tòa soạn: 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: 04.35121606

Email: toanhocluotvietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Hoàng Thuật – Linh hoạt để đưa bài toán về sử dụng hệ thức Viète.

3 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Trường ĐHSPTP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015.

4 Tin tức toán học

Thẩm Ngọc Khuê – Lễ Tổng kết và trao giải thưởng thi HOMC 2015, Hội đồng thi Hà Nội.

5 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận, năm học 2014 – 2015.

Giải trí toán học

Phi Phi – Giải đáp: Điền số vào hình hoa.

6 Chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc gia

Trịnh Ba – Vận dụng góc để giải các bài toán tọa độ trong mặt phẳng.

10 Thử sức trước kì thi - Đề số 9.

11 Hướng dẫn giải - Đề số 8.

12 Diễn đàn phương pháp giải toán

Nguyễn Lưu – Tính chất số học đặc trưng trong bài toán đa thức.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/456, ..., T12/456, L1/456, L2/456.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

28 Sai lầm ở đâu

Phạm Công Minh – Ai đúng? Ai sai?

Vì sao?

29 Diễn đàn dạy học toán

Vũ Hữu Bình – Về “Bài toán con rắn”.

Ảnh Bìa 1: GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội và Ông Chủ Xuân Dũng, Phó Giám đốc Sở GD – ĐT Hà Nội (Thứ nhất và thứ mười một từ phải qua trái) tại Lễ Tổng kết kì thi Toán học Hà Nội mở rộng lần thứ 12 năm 2015.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

<https://tieulun.hopto.org>

HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI BƯU CỤC HOẶC VỚI TÒA SOẠN!



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách “*Tài liệu chuyên Toán*” lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lý thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lý thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lý thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, ... trên khắp cả nước, như: GS. Đoàn Quỳnh, GS.TS. Văn Như Cương, PGS. TS. Nguyễn Đăng Phát, PGS.TSKH Vũ Đình Hòa, GS.TSKH Hà Huy Khoái, TS. Nguyễn Minh Hà, GS.TSKH Đặng Hùng Thắng, PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương, ThS. Đỗ Thanh Sơn, TS. Trần Nam Dũng, TS. Lê Bá Khánh Trình, ThS. Nguyễn Trọng Tuấn,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.



Địa chỉ liên hệ: - Phòng kinh doanh CTCP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội

Tel: 0435121974 - Fax: 0435121973

- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI BƯU CỤC HOẶC VỚI TÒA SOẠN !

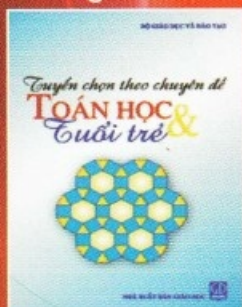


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

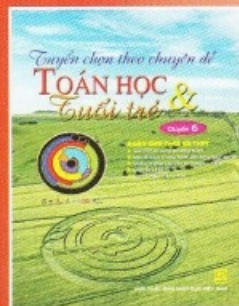
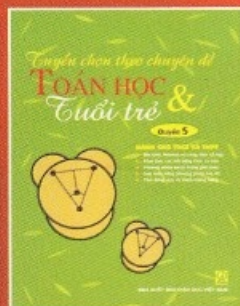
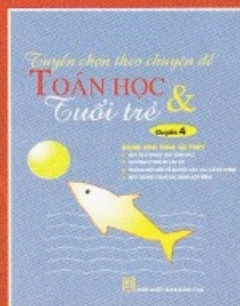
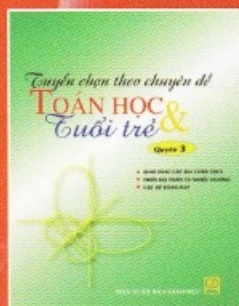
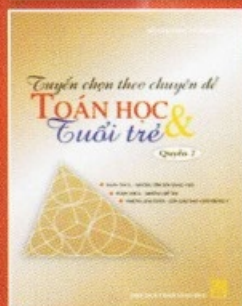
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU CÙNG BẠN ĐỌC

Bộ sách

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



- ★ Quyển 1. 300 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 58.000 đồng
- ★ Quyển 2. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 3. 252 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 48.900 đồng
- ★ Quyển 4. 200 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 39.500 đồng
- ★ Quyển 5. 240 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 42.500 đồng
- ★ Quyển 6. 224 trang, khổ 19×26,5 cm. Giá bìa: 45.000 đồng



Bộ sách

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.

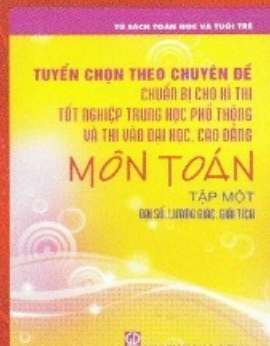
Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

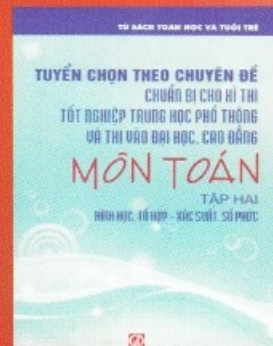
187B, Giảng Võ, Hà Nội

ĐT-Fax Phát hành, Trại sự: (04)35121606

Email: toanhocvatuoi trẻ@ gmail.com



260 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 46.000 đồng.



240 trang, khổ 17×24 cm.
Giá bìa: 44.000 đồng.