



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4

2015

Số 454

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

GẶP MẶT ĐẦU XUÂN ẤT MÙI

Hà Nội, ngày 07 tháng 3 năm 2015



HÃY ĐẶT MUA TC TH&TT TẠI CƠ SỞ BƯU ĐIỆN HAY LIÊN HỆ VỚI TỌA SOẠN !

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM NĂM 2014

HÀ HUY KHOÀI (Viện Toán học Việt Nam)



**Giáo sư Lê Văn Thiêm
(1918 - 1991)**

I. SƠ LƯỢC VỀ GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM

Giáo sư *Lê Văn Thiêm* là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Ông là nhà toán học nổi tiếng, có những đóng góp lớn trong nghiên cứu và ứng dụng Toán học. Ông cũng là một trong những người đặt nền móng cho giáo dục đại học ở nước ta, người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học Việt Nam. Giáo sư *Lê Văn Thiêm* luôn dành sự quan tâm đặc biệt đến việc giảng dạy toán học ở các trường phổ thông. Ông là một trong những người sáng lập hệ thống phổ thông chuyên toán và Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Giải thưởng Lê Văn Thiêm do Hội Toán học Việt Nam đặt ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy cô giáo và học sinh phổ thông đã khắc phục khó khăn để dạy và học toán giỏi, động viên học sinh đi sâu vào môn học có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển lâu dài của nền khoa học nước nhà. *Giải thưởng Lê Văn Thiêm* cũng là sự ghi nhận công lao của Giáo sư *Lê Văn Thiêm*, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục.

Từ khi ra đời, *Giải thưởng Lê Văn Thiêm* đã nhận được sự ủng hộ to lớn về tinh thần và vật chất của cộng đồng toán học và xã hội. Đặc biệt, sau dịp kỷ niệm 40 năm Việt Nam tham gia Olympic Toán học Quốc tế, một cựu học sinh chuyên toán (đã đề nghị không nêu tên) đã ủng hộ Quỹ giải thưởng số tiền 1 tỷ đồng.

II. GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM 2014

Hội Toán học Việt Nam quyết định trao *Giải thưởng Lê Văn Thiêm* năm 2014 cho các nhà giáo và học sinh sau đây:

1. Cô giáo Nguyễn Ngọc Xuân, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

- Sinh năm 1981.
- Tham gia dạy Toán hơn 11 năm, trong đó dạy chuyên Toán 10 năm.
- Công tác trong một trường gặp nhiều khó khăn.
- Trong 3 lần phụ trách chính Đội tuyển đã có 11 học sinh đoạt giải Quốc gia, 2 học sinh đoạt Huy chương Bạc Olympic Toán Singapore mở rộng.
- Nhiều bài viết, chuyên đề cho các hội thảo.
- 9 năm là giáo viên dạy giỏi, chiến sĩ thi đua cấp Tỉnh năm học 2013-2014, giáo viên tiêu biểu khối THPT chuyên tỉnh Hòa Bình.
- Khi là học sinh đã từng đoạt giải trong kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia.

2. Vương Nguyễn Thùy Dương, học sinh THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

- Huy chương Vàng Olympic 30/4 toàn miền Nam.
- Giải Ba học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2013.
- Giải Nhất học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2014.
- Huy chương Bạc Olympic Toán Quốc tế năm 2014.

3. Nguyễn Thế Hoàn, học sinh THPT chuyên KHTN-ĐHQG Hà Nội

- Giải Nhì học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2014.
- Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế năm 2014.
- gương mặt trẻ tiêu biểu ĐHQG Hà Nội.
- gương mặt trẻ tiêu biểu thủ đô Hà Nội năm 2014.

4. Trần Hồng Quân, học sinh THPT chuyên Thái Bình

- Giải Ba học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2013.
- Giải Nhì học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2014.
- Huy chương Vàng Olympic Toán Quốc tế năm 2014.

5. Võ Quang Hưng, học sinh THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam

- Giải Nhì Olympic Toán Hà Nội mở rộng (2013).
- Huy chương Bạc Olympic Toán Duyên hải đồng bằng Bắc Bộ.
- Giải Nhất kỳ thi học sinh giỏi Quốc Gia năm học 2013 – 2014.

Lễ trao giải đã được tổ chức tại cuộc Gặp mặt đầu xuân của Hội Toán học Việt Nam tại Hà Nội, ngày 7/3/2015.



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sau đây chúng tôi xin minh họa một số bài toán tính tổng quen thuộc và ứng dụng của chúng.

❖ Bài toán 1. Tính các tổng sau:

$$A = 1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

❖ Bài toán 2. Tính các tổng sau:

$$C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$D = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Việc tính các tổng quen thuộc trên không khó đối với các bạn học toán. Ta có ngay kết quả:

$$A = 1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (2)$$

Nhận xét: Các tổng ở bài toán 1 và bài toán 2 có mối liên hệ với nhau, cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} A &= 1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ \Leftrightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n.(n+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ \Leftrightarrow (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1+2+\dots+n) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } C &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (3) \end{aligned}$$

BÀI TOÁN TÍNH TỔNG QUEN THUỘC VÀ ỨNG DỤNG

PHAN ĐÌNH ÁNH

(GV THCS Thạch Kim, Lộc Hà, Hà Tĩnh)

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2-1)2(2+1) + (3-1)3(3+1) + \dots + (n+1-1)(n+1)(n+1+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(2^2-1) + 3(3^2-1) + \dots + (n+1)[(n+1)^2-1] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (2+3+\dots+n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (1+2+3+\dots+n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } D &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ &= (1+2+\dots+n)^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (4) \end{aligned}$$

Sau đây là một vài ứng dụng của các kết quả trên:

Bài 1. Cho

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng $\sqrt{4S+1}$ là số tự nhiên.

Lời giải. Theo kết quả (2), ta có:

$$\begin{aligned} 4S + 1 &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{4S+1} &= n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{4S+1}$ là số tự nhiên với $n \in \mathbb{N}^*$.

TOÁN HỌC
*** Tuổi trẻ 1**

Số 454 (4-2015)

Bài 2. Tìm số tự nhiên n biết rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}} = \frac{2013}{2015}$$

Lời giải. Theo kết quả (4), ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3}} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}} = \frac{2013}{2015} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2013}{2015} \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2013}{2015} \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2013}{2015} \\ \Leftrightarrow & \frac{n-1}{n+1} = \frac{2013}{2015} \\ \Leftrightarrow & n = 2014. \end{aligned}$$

Bài 3. Một bàn cờ vua Quốc tế có $8 \times 8 = 64$ ô vuông đơn vị. Hỏi bàn cờ vua đó có tất cả mấy hình vuông?

Lời giải (h.1)

Số hình vuông có cạnh bằng 8 là: $1 = 1^2$.

Số hình vuông có cạnh bằng 7 là: $4 = 2^2$.

Số hình vuông có cạnh bằng 6 là: $9 = 3^2$.

.....

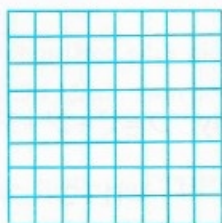
Số hình vuông có cạnh bằng 2 là: $49 = 7^2$.

Số hình vuông có cạnh bằng 1 là: $64 = 8^2$.

Vậy có tất cả:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2 + 8^2 \stackrel{\text{theo(3)}}{=} \frac{8(8+1)(2.8+1)}{6} = 204 \text{ (hình vuông).}$$

Bài 4. Một nền nhà hình chữ nhật có kích thước 8×9 ô vuông đơn vị (gồm các viên gạch lát hình vuông bằng nhau). Hỏi nền nhà đó có bao nhiêu hình vuông?



Hình 1

Lời giải

Số hình vuông có cạnh bằng 8 là: 1.2

Số hình vuông có cạnh bằng 7 là: 2.3

Số hình vuông có cạnh bằng 6 là: 3.4

.....

Số hình vuông có cạnh bằng 2 là: 7.8

Số hình vuông có cạnh bằng 1 là: 8.9.

Vậy lưới ô vuông đó có tất cả:

$$1.2 + 2.3 + \dots + 7.8 + 8.9 \stackrel{\text{theo(1)}}{=} \frac{8.9.10}{3} = 240$$

(hình vuông).

Bài 5. Một khối lập phương có thể tích $8 \times 8 \times 8 = 512$ hình lập phương đơn vị bằng nhau xếp khít nhau. Hỏi khối lập phương đó có bao nhiêu hình lập phương?

Lời giải (h.2)

Số hình lập phương có cạnh bằng 8 là: $1 = 1^3$.

Số hình lập phương có cạnh bằng 7 là: $8 = 2^3$.

Số hình lập phương có cạnh bằng 6 là: $27 = 3^3$.

...

Số hình lập phương có cạnh bằng 2 là: $343 = 7^3$.

Số hình lập phương có cạnh bằng 1 là: $512 = 8^3$.

Vậy khối lập phương đó có:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 + 9^3 \stackrel{\text{theo(4)}}{=} \left[\frac{8.9}{2} \right]^2 = 1296$$

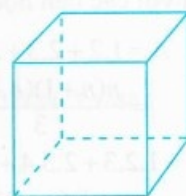
(hình lập phương).

Để luyện tập, các em có thể làm các bài tập sau:

BÀI TẬP

1. Một mảnh lưới hình chữ nhật có kích thước là $8 \times 10 = 80$ ô vuông đơn vị bằng nhau. Hỏi mảnh lưới đó có bao nhiêu hình vuông?

2. Một khối hộp chữ nhật có thể tích là $8 \times 9 \times 10 = 720$ hình lập phương đơn vị bằng nhau xếp khít nhau. Hỏi khối hộp chữ nhật đó có bao nhiêu hình lập phương?



Hình 2

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2014 - 2015

(Đề thi dùng trên TH&TT số 453, tháng 3 năm 2015)

Bài 1. Ta có $a > 0, b > 0$,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0, a + c \geq 0, b + c \geq 0.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{c} = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < 0 \Rightarrow c < 0. \text{ Từ giả thiết}$$

$$\text{ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow bc + ac + ab = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = c^2 + bc + ca + ab \Leftrightarrow c^2 = (a+c)(b+c)$$

$$\Rightarrow -c = \sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$\Rightarrow a+b = a+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}+b+c$$

$$\Rightarrow a+b = (\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})^2 \Rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}.$$

Bài 2. a) PT $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 3x^2$

$$\Leftrightarrow [(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)] = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 - x^2 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 6 = 2x \\ x^2 + 6x + 6 = -2x \end{cases}$$

Tìm được nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \sqrt{10} - 4; x = -\sqrt{10} - 4.$$

b) Từ PT $2\sqrt{2+x-x^2} = 1 + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2-x+2x-x^2} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(2-x)} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow 4(x+1)(2-x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Rightarrow (x+1)\left[\frac{x+1}{x^2} - 4(2-x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1-8x^2+4x^3) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(4x^3-2x^2-6x^2+3x-2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x-1)(2x^2-3x-1) = 0 (*)$$

Giải PT (*) và thử lại ta thấy

$$x = -1; x = \frac{1}{2}; x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \text{ là các nghiệm của PT đã cho.}$$

Bài 3. ĐK: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\text{Ta có: } \left(xy - \frac{x}{y}\right) - \left(xy - \frac{y}{x}\right) = 2,1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + 2,1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2,1\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} - 0,4\right)\left(\frac{x}{y} + 2,5\right) = 0.$$

Đáp số: $(x; y) \in \{(2; 5); (-2; -5)\}$.

Bài 4. Ta có $0 < x < \frac{1}{2}$. Do đó $1 - 2x > 0, 3x > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

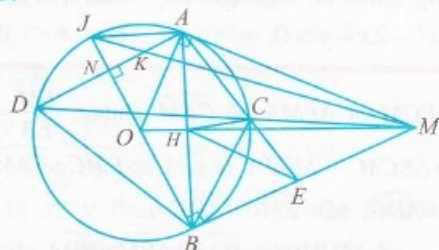
$$\begin{aligned} A &= \frac{2-x}{1-2x} + \frac{1+2x}{3x} = \frac{4-2x}{2(1-2x)} + \frac{1+2x}{3x} \\ &= \frac{(1-2x)+3}{2(1-2x)} + \frac{1+2x}{3x} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2x} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - 2\right) + \frac{10}{3} \\ &= \frac{3x}{1-2x} + \frac{1-2x}{3x} + \frac{10}{3} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{1-2x} \cdot \frac{1-2x}{3x}} + \frac{10}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{3x}{1-2x} = \frac{1-2x}{3x} \Leftrightarrow 3x = 1-2x \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $\frac{16}{3}$.

Bài 5.



a) Từ giả thiết ta có $\triangle EBH$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{BHE}$. Xét $\triangle EBC$ và $\triangle EAB$ có

$\widehat{BEC}$ (chung), $\widehat{EBC} = \widehat{EAB}$. Do đó

$\triangle EBC \sim \triangle EAB$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{ABE}$. Suy ra

$\widehat{BCE} = \widehat{BHE}$ ($= \widehat{ABE}$). Vậy tứ giác HCEB nội tiếp.

b) Ta có $\frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EB}$ (do $\triangle EBC \sim \triangle EAB$). Mà $EB = EM$ (do E là trung điểm của MB), do đó

$$\frac{EM}{EA} = \frac{EC}{EM}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2014 - 2015

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức

$$P = (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right)^2,$$

với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Rút gọn P .

2) Tìm số chính phương x sao cho $\frac{2}{P}$ là số nguyên.

Câu 2 (2 điểm) 1). Cho các số thực x, y, z, a, b, c thỏa mãn các điều kiện $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2) Tìm các số nguyên a để phương trình: $x^2 - (3+2a)x + 40 - a = 0$ có nghiệm nguyên. Hãy tìm các nghiệm nguyên đó.

Câu 3 (1,5 điểm). 1) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$$

với x, y là ẩn, m là tham số. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2x - y > 0$.

2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{c+a-b} + \frac{5}{a+b-c}.$$

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại N . Vẽ dây AM song song với BC . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại M và P .

1) Cho biết $\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16}$, tính độ dài đoạn BC .

2) Chứng minh rằng $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$.

3) Chứng minh rằng BC, ON và AP đồng quy.

Câu 5 (1,5 điểm). 1) Cho đường tròn tâm O bán kính 1, tam giác ABC có các đỉnh A, B, C nằm trong đường tròn và có diện tích lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC .

2) Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh) *Sưu tầm*



Xét $\triangle ECM$ và $\triangle EMA$ có $\widehat{CEM}$ chung, $\frac{EM}{EA} = \frac{EC}{EM}$.

Do đó $\triangle ECM \sim \triangle EMA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{EAM}$. Mà $\widehat{EAM} = \widehat{ADC}$, nên $\widehat{EMC} = \widehat{ADC}$

$$\Rightarrow AD \parallel BM \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{ABM} = \widehat{BDA}.$$

Vậy tam giác ABD cân tại B .

c) Gọi $N = BJ \cap AD$ thì $BJ \perp AD$ tại $N \Rightarrow N$ là trung điểm của $AD \Rightarrow AN = DN = \frac{AD}{2}$. Xét $\triangle JBM$

có $NK \parallel BM \Rightarrow \frac{NK}{BM} = \frac{JN}{JB}$. Ta có $\widehat{MOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$,

mà $\widehat{AJN} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ nên $\widehat{AJN} = \widehat{MOB}$. Xét $\triangle AJN$ và $\triangle MBO$ có $\widehat{AJN} = \widehat{MOB}$, suy ra

$\triangle AJN \sim \triangle MBO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{JN}{OB} = \frac{AN}{MB} \Rightarrow \frac{JN}{2OB} = \frac{AN}{2MB} \Rightarrow \frac{JN}{JB} = \frac{AN}{2MB}$$

Ta có

$$\frac{NK}{MB} = \frac{AN}{2MB} \left(= \frac{JN}{JB} \right) \Rightarrow NK = \frac{AN}{2} \Rightarrow AK = NK = \frac{AN}{2}.$$

Từ $AK = NK$ và $AN = DN \Rightarrow KD = 3KA$.

$$\text{Từ đó } \frac{KA}{KD} = \frac{1}{3}.$$

Bài 6. Giả sử $n = \overline{ab}$ (a, b là các chữ số, $a \neq 0$)

Theo đầu bài, ta có: $b \neq 0, \overline{ab} : ab \Rightarrow (10a+b) : a \Rightarrow b : a$.

Đặt $b = ma$ ($m \in \mathbb{N}^*, m < 10$).

Từ đó $\overline{ab} = 10a + b = 10a + ma$ chia hết cho ma^2 . Nên $10a : ma \Rightarrow 10 : m \Rightarrow m \in \{1; 2; 5\}$.

• Nếu $m = 1$ thì $b = a$. Ta có: $11a : a^2 \Rightarrow 11 : a \Rightarrow a = 1$.

Do đó $a = b = 1$, ta có $\overline{ab} = 11$.

• Nếu $m = 2$ thì $b = 2a$. Ta có các số 12; 24; 36. Các số 12; 24; 36 thỏa mãn đề bài.

• Nếu $m = 5$ ta có $b = 5a \Rightarrow b : 5$. Nên $b = 5$, suy ra

$a = 1$. Số $\overline{ab} = 15$ (thỏa mãn đề bài).

Vậy có năm số thỏa mãn đầu bài, đó là:

11; 12; 15; 24; 36.

NGUYỄN ĐỨC TÂN
(TP. Hồ Chí Minh)



BÌNH LUẬN VỀ CÁCH NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM GẦN ĐÂY

NGUYỄN NGỌC DUYỆT - PHẠM BÌNH NGUYỄN
(GV Trường THPT Kon Tum)

Chúng ta thấy rằng trong đề thi Đại học các năm gần đây, các bài phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình (HPT) được giải bằng cách nhân lượng liên hợp, đặt nhân tử chung đưa về PT, BPT tích là rất phổ biến. Nhiều bạn đọc thường đặt câu hỏi: Cơ sở để có cách giải như vậy là gì? Để giúp các em học sinh có cơ sở để tìm được lời giải bài toán bằng cách nhân lượng liên hợp, cũng như đón đầu câu về PT, BPT, HPT trong đề thi THPT Quốc gia sắp tới bài viết này trình bày cơ sở để có lời giải cho các câu về PT, BPT, HPT trong đề thi Đại học các năm trước đây thông qua một số thí dụ sau

Thí dụ 1. (ĐH khối A - 2014) Giải hệ phương

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1. ĐK: $\begin{cases} -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \\ 2 \leq y \leq 12 \end{cases}$. Ta có:

$$x\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2+12-y}{2} \text{ và } \sqrt{y(12-x^2)} \leq \frac{y+12-x^2}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} &\leq \frac{x^2+12-y}{2} + \frac{y+12-x^2}{2} = 12. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy PT (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}.$$

Thay $y = 12 - x^2$ vào PT (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left(x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} \right) &= 0 \quad (3). \end{aligned}$$

$$\text{Do } x \geq 0 \text{ suy ra } x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0.$$

Nên PT (3) $\Leftrightarrow x = 3$. Với $x = 3$ ta được $y = 3$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là $(3; 3)$.

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} \\ \Rightarrow y(12-x^2) &= 144 - 24x\sqrt{12-y} + x^2(12-y) \\ \Leftrightarrow 12y - 144 + 24x\sqrt{12-y} - 12x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x^2 - 24x\sqrt{12-y} + 12(12-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12(x - \sqrt{12-y})^2 &= 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Thay $y = 12 - x^2$ vào PT (2) ta được

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 &= 2(\sqrt{10-x^2} - 1) \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 1) &= \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{10-x^2} + 1} \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[(x^2 + 3x + 1) + \frac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2} + 1} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3. \end{aligned}$$

Thử lại ta được nghiệm của HPT là $(3; 3)$.

Cách 3. Đặt $\vec{a} = (x; \sqrt{12-x^2})$, $\vec{b} = (\sqrt{12-y}; \sqrt{y})$.

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{12}$.

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 2(x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)}) = 2.12$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}.$$

Thay $y = 12 - x^2$ vào PT (2) ta được

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 &= 2(\sqrt{10-x^2} - 1) \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 1) &= \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{10-x^2} + 1} \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[(x^2 + 3x + 1) + \frac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2} + 1} \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3.$$

Thử lại ta được nghiệm của HPT là $(3;3)$.

♦ **Bình luận:** Qua ba cách giải trên ta thấy rằng, phương trình (1) có thể được sử lý bằng nhiều cách khác nhau, nhưng sau khi thay $y=12-x^2$ vào phương trình (2) ta được PT

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \quad (3).$$

Thì PT (3) được giải bằng cách nhân lượng liên hợp, đặt nhân tử chung đưa về tích là đơn giản nhất.

Tuy nhiên cần cứ nào để ta biến đổi PT $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$ (3) thành PT

$$x^3-8x-3=2(\sqrt{10-x^2}-1)?$$

Xin được trình bày căn cứ đó như sau:

- Đầu tiên ta dùng Máy tính bỏ túi (MTBT) để thử nghiệm, ta thấy PT (3) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=3$. Tuy nhiên ta chỉ quan tâm tới nghiệm $x=3$ mà không quan tâm tới nghiệm $x=-1$ vì điều kiện có nghiệm là $x \geq 0$. Như vậy ta phải làm xuất hiện đại lượng $x-3$ để đặt nhân tử chung, nghĩa là ta phải đưa PT (3) về dạng $(x-3)f(x)=0$. Muốn vậy ta phải tìm số α sao cho biểu thức $2\sqrt{10-x^2}-\alpha$ sau khi nhân lượng liên hợp xuất hiện đại lượng $x-3$.

- Do PT (3) chỉ có một nghiệm $x=3$ nên cách đơn giản nhất để tìm α là ta thay $x=3$ vào PT $2\sqrt{10-x^2}-\alpha=0$ ta tìm được $\alpha=2$. (Lưu ý là do PT (3) có duy nhất một nghiệm nguyên nên ta mới dùng cách trên, nếu PT (3) có hai nghiệm nguyên hoặc không nguyên ta sẽ dùng cách khác sẽ được trình bày ở phần sau).

- Do đó ta có PT $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$
 $\Leftrightarrow x^3-8x-3=2\sqrt{10-x^2}-2.$

Thí dụ 2. (ĐH khối B-2014) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \\ 4x-5y-3 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$. Ta có:

$$PT(1) \Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1)+(x-y-1)(1-\sqrt{y})=0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=x-1 \end{cases}$$

• Với $y=1$, thay vào PT (2) ta được:

$$9-3x=0 \Leftrightarrow x=3.$$

• Với $y=x-1$, ĐK (*) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. PT (2) trở thành: $2x^2-x-3=\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-1)+(x-1-\sqrt{2-x})=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(2+\frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình

$$\text{là: } (3;1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

♦ **Bình luận:**

• Khi đọc lời giải HPT trên, chắc chắn nhiều bạn sẽ đặt câu hỏi: “Cơ sở nào để biến đổi PT (1) thành PT (3)?”. Sau đây là một cách để trả lời câu hỏi trên.

- Thay $x=3$ vào PT (1) ta được:

$(1-y)\sqrt{3-y}+3=2+(2-y)\sqrt{y}$ (a). Dùng MTBT tìm được nghiệm của PT (a) là $y=1$ và $y=2$.

- Thay $x=4$ vào PT (1) ta được:

$(1-y)\sqrt{4-y}+4=2+(3-y)\sqrt{y}$ (b). Dùng MTBT tìm được nghiệm của PT (b) là $y=1$ và $y=3$.

- Như vậy ta thấy rằng với $x=3$ hoặc $x=4$ thì PT (1) luôn luôn có nghiệm $y=1$. Ta dự đoán PT (1) có thể đưa được về dạng $(y-1)f(x;y)=0$.

- Mặt khác ta thấy rằng khi $x=3$ thì PT (1) có nghiệm $y=2$. Khi $x=4$ thì PT (1) có nghiệm $y=3$.

Như vậy mối quan hệ giữa x và y là $y=x-1$. Ta dự đoán PT (1) có thể đưa được về dạng $(x-y-1)g(x;y)=0$.

- Từ các nhận xét trên, ta dự đoán rằng PT (1) có thể đưa được về dạng $(y-1)(x-y-1)h(x;y)=0$.

Từ đó cho ta định hướng để biến đổi PT (1) thành PT (3).

- Tuy nhiên, nếu bài nào cũng phải lập luận như trên thì sẽ rất mất thời gian, có lẽ tốt hơn hết là các bạn phải chịu khó giải nhiều bài tập, để biến kỹ năng thành kỹ xảo, sao cho “nhìn vào bài toán ta thấy” ngay cách giải.

• Ngoài ra, trong khi giải HPT trên thì dẫn đến PT:

$$2x^2-x-3=\sqrt{2-x} \quad (4).$$

Ta có: PT (4) tương đương với

$$2(x^2 - x - 1) + (x - 1 - \sqrt{2 - x}) = 0 \quad (5)$$

Các bạn sẽ đặt câu hỏi đầu là cơ sở để biến đổi PT (4) thành PT (5). Xin được trình bày cơ sở đó như sau:

- Đầu tiên ta dùng MTBT để thử nghiệm, ta thấy PT (4) có nghiệm (gần đúng) là $x \approx 1,618033989...$. Nếu nhanh ta thấy rằng $x \approx 1,618033989... = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Mà $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của PT $x^2 - x - 1 = 0$ hoặc là nghiệm PT $-x^2 + x + 1 = 0$. Như vậy chúng ta phải làm xuất hiện đại lượng $x^2 - x - 1$ hoặc $-x^2 + x + 1$ để đặt nhân tử chung.

- Do PT (4) chỉ chứa một căn thức nên ta lập luận ngắn gọn như sau: Trong PT $2x^2 - x - 3 = \sqrt{2 - x}$ ta cần làm xuất hiện biểu thức $x^2 - x - 1$ để đặt nhân tử chung nên ta biến đổi phần $2x^2 - x - 3$ trước và làm xuất hiện $2(x^2 - x - 1)$, nghĩa là ta biến đổi PT $2x^2 - x - 3 = \sqrt{2 - x}$ thành $2(x^2 - x - 1) + (x - 1 - \sqrt{2 - x}) = 0$.

Nhưng nếu PT chứa nhiều hơn một căn thức thì ta không thể làm như trên được. Xin trình bày phương pháp tổng quát như sau:

- Trong PT (4) chứa $\sqrt{2 - x}$, khi đó ta phải thêm bớt một đại lượng α , nghĩa là ta biến đổi $\sqrt{2 - x}$ thành $\sqrt{2 - x} - \alpha$ sao cho sau khi nhân lượng liên hợp thì xuất hiện biểu thức $x^2 - x - 1$ hoặc $-x^2 + x + 1$. Lưu ý là biểu thức cần xuất hiện là bậc hai nên α không phải là một số mà α phải có dạng $\alpha = ax + b$.

- Khi đó

$$\sqrt{2 - x} - \alpha = \sqrt{2 - x} - (ax + b) = \frac{2 - x - (ax + b)^2}{\sqrt{2 - x} + (ax + b)}.$$

Sau khi nhân liên hợp xong xuất hiện $-ax^2$ nên ta sẽ cho $2 - x - (ax + b)^2 = -x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow (ax + b)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow ax + b = x + 1.$$

- Như vậy ta phải thêm bớt một đại lượng là $x + 1$ vào PT $2x^2 - x - 3 = \sqrt{2 - x}$.

- Với phương pháp tổng quát trên, các bạn có thể giải được các PT, BPT chứa căn thức bằng cách nhân lượng liên hợp một cách dễ dàng.

- Đến đây có lẽ các bạn sẽ thấy rằng để giải một PT chứa căn thức bằng cách nhân lượng liên hợp đơn giản như thế nào.

Thí dụ 3. (ĐH khối D - 2014) Giải bất phương trình: $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12$ (1).

Lời giải. ĐK: $x \geq -2$.

Với điều kiện trên, BPT (1) tương đương với

$$(x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) - (x^2 + 2x - 8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} - (x-2)(x+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4)\right] \geq 0 \quad (2)$$

Do $x \geq -2$ nên $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+6 > 0 \end{cases}$. Suy ra

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0.$$

Do đó BPT (2) $\Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

So sánh với điều kiện ta được nghiệm của BPT là $-2 \leq x \leq 2$.

♦ **Bình luận:** Ta thấy rằng bước biến đổi BPT (1) thành BPT

$$(x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) - (x^2 + 2x - 8) \geq 0 \quad (3)$$

là mấu chốt của bài giải. Vậy cơ sở ở đâu để có được bước biến đổi trên? Xin trình bày như sau: Đầu tiên ta thay dấu " $\geq$ " bởi dấu "=", Nghĩa là ta thay BPT bằng PT. Dùng MTBT để tìm nghiệm ta thấy PT

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$$

có một nghiệm duy nhất $x=2$. Như vậy ta phải làm xuất hiện đại lượng $x-2$ để đặt nhân tử chung. Khi đó ta

cần tìm hai số α và β sao cho HPT $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \alpha = 0 \\ \sqrt{x+7} - \beta = 0 \end{cases}$

có nghiệm $x=2$. Thay $x=2$ vào hệ trên ta tìm được

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Đây chính là cơ sở để biến đổi BPT (1) thành BPT (3).

Thí dụ 4. (ĐH khối B - 2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} 2x+y \geq 0 \\ x+4y \geq 0 \end{cases}$

Ta có: PT (1) tương đương với

$$(x+1-y)(2x+1-y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{cases}$$

• Với $y=2x+1$, thay vào PT (2) ta được:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{9x+4} = 3-3x \quad (3).$$

Ta có $f(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt{9x+4}$ đồng biến.

$$g(x) = 3-3x \text{ nghịch biến.}$$

Nên PT (3) nếu có nghiệm thì là nghiệm duy nhất. Mà $f(0)=g(0)=3$ nên PT (3) có nghiệm duy nhất $x=0 \Rightarrow y=1$.

• Với $y=x+1$, thay vào PT (2) ta được PT

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{3x+1} - (x+1)] + [\sqrt{5x+4} - (x+2)] = 3(x-1)x \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} = 3(x^2-x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(0;1), (1;2)$.

♦ **Bình luận:** Dùng MTCT để tìm nghiệm, ta thấy PT (4) có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Mà $x=0$ và $x=1$ là nghiệm của PT $x^2-x=0$ hoặc PT $-x^2+x=0$. Từ đó ta có cơ sở để biến đổi PT (4) thành PT (5) bằng một trong hai cách như sau

• **Cách 1.** Ta cần tìm hai số α và β sao cho PT $\sqrt{3x+1} - (\alpha x + \beta) = 0$ (6) có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Thay $x=0$ và $x=1$ vào PT (6) ta được hệ PT theo α và β . Giải HPT theo α, β ta được $\alpha=1$ và $\beta=1$. Tương tự ta cần tìm hai số a và b sao cho PT $\sqrt{5x+4} - (ax+b) = 0$ (7) có hai nghiệm là

$x=0$ và $x=1$. Thay $x=0$ và $x=1$ vào PT (7) ta được hệ theo a và b . Giải hệ HPT theo a, b ta được $a=1$ và $b=2$.

• **Cách 2.** Ta có

$$\sqrt{3x+1} - (\alpha x + \beta) = \frac{3x+1 - (\alpha x + \beta)^2}{\sqrt{3x+1} + (\alpha x + \beta)}$$

Cho $3x+1 - (\alpha x + \beta)^2 = -x^2 + x$ ta được

$$(\alpha x + \beta)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \alpha x + \beta = x + 1.$$

(Lưu ý là cho $3x+1 - (\alpha x + \beta)^2 = -x^2 + x$ chứ không phải cho $3x+1 - (\alpha x + \beta)^2 = x^2 - x$).

Tương tự ta có

$$\sqrt{5x+4} - (ax+b) = \frac{5x+4 - (ax+b)^2}{\sqrt{5x+4} + (ax+b)}$$

Cho $5x+4 - (ax+b)^2 = -x^2 + x$ ta được

$$(ax+b)^2 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow ax+b = x+2.$$

Chúng tôi hy vọng rằng qua những thí dụ và những bình luận trên phần nào sẽ giúp các em học sinh tự tin khi gặp các bài toán về PT, BPT, HPT trong kì thi THPT Quốc Gia sắp tới. Để thành thạo phương pháp nhân lượng liên hợp, các em hãy thử làm các bài tập sau

BÀI TẬP

Giải các PT, BPT, HPT sau

1. $3\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2+8} - 2 = \sqrt{x^2+15}.$

2. $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x+6} + 2\sqrt{8x+9} = 4x^2.$

3. $\sqrt[3]{7x-8} + \sqrt{\frac{7-2x^2}{6}} = x.$

4. $6x^3 - 5x^2 - 12x - 10 + \sqrt{3x-2} + \sqrt{7x+2} < 0.$

5. $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.$

6. $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$

7. $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3}\sqrt{x+y} \\ \sqrt{2x+4} + \sqrt{2y+5} = \sqrt{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}y - 3\sqrt{2}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} + \sqrt{2x^2+2xy+5y^2} = 3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt{7x+12y+8} = 2xy+y+5. \end{cases}$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Tọa độ điểm uốn của đồ thị (C_m) là $I(0; m)$

nên đường thẳng (d) có dạng $y = kx + m$.

PT hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$$x^3 - 3x + m = kx + m \Leftrightarrow x^3 - (k+3)x = 0 \quad (1)$$

Đề (d) tạo với đồ thị (C_m) một hình phẳng thì PT (1) phải có 3 nghiệm $\Rightarrow k > -3$, lúc đó 3 nghiệm của PT (1) là

$$x = 0, x = -\sqrt{k+3}, x = \sqrt{k+3}.$$

Vì I là tâm đối xứng của (C_m) nên diện tích của hình phẳng (H) là:

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{k+3}} [kx + m - x^3 + 3x - m] dx = \frac{1}{2}(k+3)^2$$

$$\Rightarrow S = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+3)^2 = 2 \Rightarrow k = -1 \text{ (vì } k > -3).$$

Lúc này PT (d) viết lại $y = -x + m$, (d) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; m), B(m; 0)$.

Vì (T) là tam giác vuông cân, nên diện tích của (T) là $S = \frac{1}{2}m^2$.

Từ giả thiết $S = 2 \Rightarrow m = 2$, hoặc $m = -2$.

Câu 2. ĐK: $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Ta có

$$\tan x \cdot \cot 2x = (1 + \sin x)(4 \cos^2 x + 4 \sin x - 5)$$

$$\Leftrightarrow \tan x \cdot \cot 2x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan x \cdot \cot 2x = \sin 3x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \sin 2x} = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \left(\frac{1}{\cos x \cdot \sin 2x} - 1 \right) = 0.$$

• $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{3}$, đối chiếu với ĐK, ta thấy PT này có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{3} + m\pi, x = \frac{2\pi}{3} + m\pi.$$

• $\sin 2x \cdot \cos x = 1$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của PT đã cho là

$$x = \frac{\pi}{3} + m\pi, x = \frac{2\pi}{3} + m\pi, \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. Ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln 2 + \ln(2 \tan x)}{\sin 2x \cdot \ln(2 \tan x)} dx$$

$$= \ln 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x \cdot \ln(2 \tan x)} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$$

Tính

$$\begin{aligned} \ln 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x \cdot \ln(2 \tan x)} &= \frac{\ln 2}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d[\ln(2 \tan x)]}{\ln(2 \tan x)} \\ &= \frac{\ln 2}{2} [\ln(\ln(2 \tan x))] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\ln 2}{2} \cdot \ln \left(\frac{\ln 2 \sqrt{3}}{\ln 2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Tính } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \ln(\tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\ln 2}{2} \cdot \ln \left(\frac{\ln 2 \sqrt{3}}{\ln 2} \right) + \frac{1}{2} \ln \sqrt{3}.$$

Câu 4. a) Khai triển biểu thức trên có số hạng thứ $(k+1)$ là $C_n^k x^{2k}$, $(k < n)$.

$$\text{Từ giả thiết có } \begin{cases} 2k = 8 \\ C_n^k = 210 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 4, C_n^4 = 210 \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow (n-3)(n-2)(n-1)n = 5040$$

$$\Leftrightarrow (n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2) = 5040.$$

Đặt ẩn phụ và giải PT này ta được $n = 10$.

Ta có

$$(1+x^2)^{10} = C_{10}^0 + x^2 C_{10}^1 + x^4 C_{10}^2 + \dots + x^{2 \cdot 10} C_{10}^{10}.$$

Do đó tổng các hệ số:

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = (1+1)^{10} = 2^{10}.$$

b) Giả sử $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức

$$z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}), \text{ vì } |z-1| = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + b^2 = 34 \Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn}$$

$$(C): (x-1)^2 + y^2 = 34. \text{ Vì } |z+1+mi| = |z+m+2i|$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (b+m)^2 = (a+m)^2 + (b+2)^2$$

$$\Rightarrow 2(1-m)a + 2(m-2)b - 3 = 0.$$

Do đó M nằm trên đường thẳng (d) :

$$2(1-m)x + 2(m-2)y - 3 = 0.$$

Để có hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai ĐK đã cho nghĩa là có hai điểm biểu diễn M_1, M_2 của hai số phức lần lượt nằm trên hai giao điểm của (C) và (d) , $|z_1 - z_2|$ lớn nhất

$\Leftrightarrow M_1 M_2$ là đường kính của (C) hay (d) qua tâm $I(1;0)$ của (C)

$$\Rightarrow 2(1-m).1 + 2(m-2).0 - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Lúc này đường thẳng (d) có PT $3x - 5y - 3 = 0$.

Tọa độ của M_1, M_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34 \\ 3x - 5y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(6;3), M_2(-4;-3).$$

Vậy hai số phức cần tìm là $z_1 = 6+3i, z_2 = -4-3i$.

Câu 5. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi r là bán kính đường tròn thiết diện, từ giả thiết có $S = \pi \Leftrightarrow r^2 \cdot \pi = \pi \Rightarrow r = 1$.

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) ta có $d^2 = R^2 - r^2 = 4 \Rightarrow d = 2$.

Mặt phẳng (α) qua $N(0;-1;0)$ có dạng

$$Ax + B(y+1) + Cz = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + B = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Vì (α) qua $M(1;-1;1)$ nên

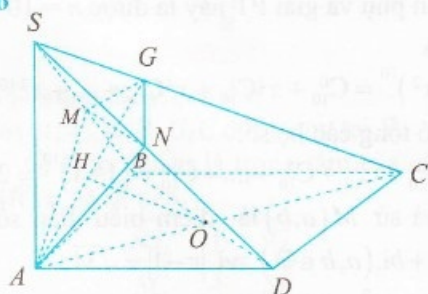
$$A + C = 0 \Rightarrow \text{PT}(\alpha): Ax + By - Az + B = 0.$$

$$\text{Vì } d(I, \alpha) = \frac{|-3A|}{\sqrt{2A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow A^2 = 4B^2 \Rightarrow \frac{A}{B} = \pm 2.$$

Có hai mặt phẳng (α) cần tìm với PT là:

$$2x + y - 2z + 1 = 0; \quad 2x - y - 2z - 1 = 0.$$

Câu 6



Ta chứng minh được $\triangle AMG$ vuông tại M , $\triangle ANG$ vuông tại N , nên đường tròn đáy của (H) có tâm H là trung điểm AG , có bán kính

$$R = \frac{AG}{2}. \text{ Ta có } AG = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \Rightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

Vì OH là đường cao (H) nên $OH \perp (\alpha) \Rightarrow OH \parallel SC \Rightarrow O$ là giao điểm của AC ,

$$BD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG; \quad CG = \frac{AC^2}{SC} = \frac{2}{\sqrt{3}}a \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Vậy thể tích hình nón là

$$V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OH = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3.$$

Câu 7. Giả sử AH lần lượt cắt BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm E và K , ta chứng minh được E là trung điểm HK .

Vì $AH \perp BC$ nên $AH: x - y = 0$,

$E = BC \cap AH \Rightarrow E(4;4)$ và E là trung điểm $HK \Rightarrow K(3;3)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IK = \sqrt{5}$.

Vậy đường tròn này là $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Từ đó tìm được $B(3;5), C(6;2)$ hoặc $B(6;2), C(3;5)$ và $A(6;6)$. Vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{|6+6-8|}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 8. ĐK: $x > 0$, ta có:

$$(x - \ln x) \sqrt{2x^2 + 2} = x + 1 \Leftrightarrow (x - \ln x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$, khi đó

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{2x^2+2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Lập bảng biến thiên ta có $f(x) \leq 1, \forall x > 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Xét hàm số $g(x) = x - \ln x$, khi đó

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Lập bảng biến thiên có $g(x) \geq 1, \forall x > 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Vậy PT có đúng một nghiệm $x = 1$.

Câu 9. Ta có

$$P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{y}{z} + \frac{z}{x}} + \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^3}{\frac{z}{x} + \frac{x}{y}} + \frac{15}{x}.$$

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x} \Rightarrow abc = 1, c > 1$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}.$$

Ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Rightarrow \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} \geq ab = \frac{1}{c}$ (vì $a > 0, b > 0$). Vậy

$$P \geq \frac{1}{c} + c^2 + \frac{15}{c} = c^2 + \frac{16}{c} = f(c), \quad \forall c \in (1; +\infty).$$

Ta có $f'(c) = 2c - \frac{16}{c^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 2$.

Lập bảng biến thiên ta có $f(c) \geq f(2) = 12$. Từ đó min $P = 12 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}y = 2x$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị (H) của hàm số.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x + y = 0$.

Câu 2 (1 điểm). Giải các phương trình

$$\log_{25} x^2 + \frac{1}{4} \log_5 (x-1)^4 = \log_5 (\log_{\sqrt{5}} 5).$$

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân

$$I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x - 4}{(1 - (\ln x)^2)x} dx.$$

Câu 4 (1 điểm). Một chiếc hộp có 6 quả cầu màu trắng, 4 quả cầu màu đỏ và 2 quả cầu màu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để 6 quả cầu được chọn có 3 quả cầu màu trắng, 2 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu đen.

Câu 5 (1 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$, $D(0; -3; 1)$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện và tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Câu 6 (1 điểm). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có

đáy ABC là tam giác cân đỉnh C ; đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 60° , $AB = AA' = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', CC', BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, NP theo a .

Câu 7 (1 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình cạnh AB là $x - 3y + 5 = 0$, phương trình đường chéo BD là $x - y - 1 = 0$; biết rằng đường chéo AC đi qua điểm $M(-9; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 8 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt{xy} - x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9 (1 điểm). Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} - \frac{4c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3c}{(c^2 + 1)\sqrt{c^2 + 1}}.$$

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/454. Given three positive numbers a, b , and c . Prove that

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + 3 \geq \frac{5}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/454. Let d be a line in the coordinate plane with the equation $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$.

Let a_1 and a_2 be two distinct lines which are parallel to d . Suppose furthermore that the distances from a_1 and a_2 to d both are equal to $\frac{1}{12}$. Is there any integral point, i.e. point with both coordinates are integers, between or on two lines a_1 and a_2 ?

Problem T10/454. Prove that, for each positive integer n , the equation $2014^x + nx = 2013$ has a unique solution, say x_n . Find $\lim x_n$.

Problem T11/454. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfy $(x+y)f(x+y) = xf(x) + yf(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Problem T12/454. Given a triangle ABC . A point M varies on the side BC . Let (I_1) and (I_2) be the inscribed circles of the triangles ABM and ACM respectively. A common tangent line XY of (I_1) and (I_2) , which is different from BC , intersects AM at N ($X \in (I_1); Y \in (I_2)$). Let Z and T respectively be the tangent points between AM and $(I_1), (I_2)$. XT cuts YZ at K . Prove that NK always goes through a fixed point.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)



ĐỊNH LÝ ẦU TRÙNG Bướm

NGUYỄN NGỌC GIANG
(TP. Hồ Chí Minh)

Trong kho tàng các bài toán toán học có một định lý vô cùng nổi tiếng và rất quan trọng đó là định lý con bướm. Sở dĩ quan trọng là bởi, định lý con bướm là đối tượng nghiên cứu cả trong chương trình toán sơ cấp cũng như cao cấp. Cho đến nay, người ta đã tìm ra 21 chứng minh định lý con bướm. Các bài toán mở rộng thì rất nhiều, điển hình có thể kể đến mở rộng định lý đối với đường tròn thành định lý đối với conic, định lý con bướm đơn thành định lý con bướm kép, ... Định lý con bướm được phát biểu như sau

Định lý 1 (Định lý con bướm)

Cho PQ , AB và CD là ba dây cung đường tròn đồng quy tại điểm M , với A, D nằm về cùng một phía đối với đường thẳng PQ và B, C nằm về phía còn lại. Nếu $PM = QM$ thì $XM = YM$, ở đây X và Y là các giao điểm lần lượt của PQ với AC và BD .

Như vậy, định lý con bướm cho thấy, thứ nhất, ba dây cung PQ , AB và CD đồng quy tại M và ba dây cung này nằm trong đường tròn; thứ hai, $PM = QM$ và thứ ba, kết luận $XM = YM$. Chúng ta thay dữ kiện đường tròn bằng tam giác, ba dây cung đồng quy nằm trong đường tròn bởi ba cevian đồng quy nằm trong tam giác (Cevian là đoạn thẳng có một đầu là đỉnh và đầu kia nằm trên cạnh đối diện đỉnh này của tam giác cho trước. Cevian là tên xuất phát từ nhà toán học Italia nổi tiếng mà ai trong chúng ta đều biết - Ceva), tính chất $PM = QM$ được thay bởi hai góc bằng nhau thì ta được bài toán rất hay gọi là định lý ấu trùng con bướm. Định lý ấu trùng con bướm cũng có rất nhiều tính chất tương tự như định lý con bướm.

Định lý ấu trùng con bướm được phát biểu như sau

Định lý 2 (Định lý ấu trùng con bướm)

Cho AD , BE và CF là ba cevian đồng quy trong tam giác ABC .

a) Ấu trùng con bướm thứ nhất:

Nếu $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ thì $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$.

b) Ấu trùng con bướm thứ hai:

Nếu $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ thì $\widehat{DAX} = \widehat{DAY}$, ở đây $X = FD \cap BE$; $Y = ED \cap CF$.

Định lý Ấu trùng con bướm thứ nhất (phần a) chính là bài toán thứ 5 trong kì thi Olympic Canada năm 1994. $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ ở phần a cho thấy AD là đường cao của tam giác ABC .

Trong khi đó, $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ ở phần b) cho thấy

AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Bây giờ, chúng ta sẽ không chứng minh định lý ấu trùng con bướm mà đi chứng minh định lý tổng quát của định lý này. Định lý tổng quát được phát biểu như sau

Định lý 3 (Định lý ấu trùng con bướm tổng quát 1)

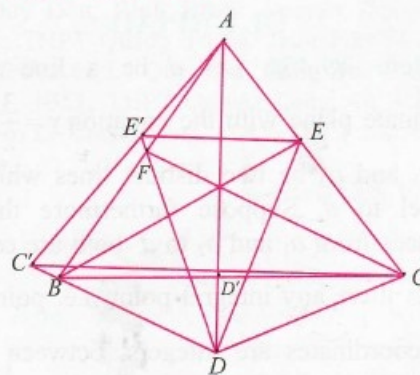
Cho AD' , BE , CF là ba cevian đồng quy trong tam giác ABC . Trên đường thẳng AD' lấy điểm D bất kì.

a) Ấu trùng con bướm thứ nhất:

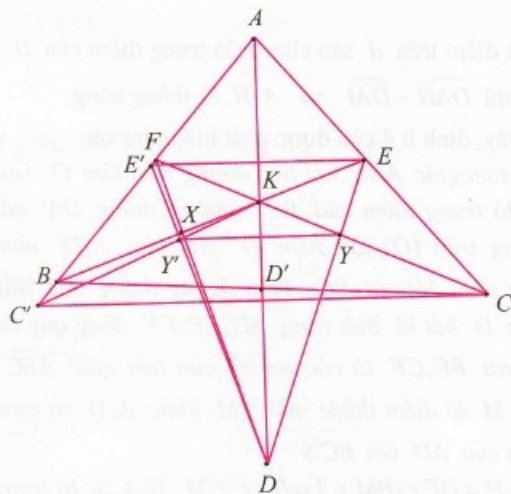
Nếu $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$, thì $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$.

b) Ấu trùng con bướm thứ hai:

Nếu $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$, thì $\widehat{DAX} = \widehat{DAY}$, ở đây $X = FD \cap BE$; $Y = ED \cap CF$.



Hình 1



Hình 2

Chứng minh. a) (h.1) Lấy C', E' lần lượt đối xứng với C, E qua AD . Ta có $\widehat{C'DA} = \widehat{BDA} (= \widehat{ADC})$.

Vậy C', B, D thẳng hàng.

Chứng minh $\widehat{ADF} = \widehat{ADE}$ tương đương với chứng minh ba điểm D, F, E' thẳng hàng.

Áp dụng định lý Ceva, ta có

$$\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = -1 \quad (1)$$

Vì DD' là phân giác của $\widehat{BDC}$ nên

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DC'} \quad (2)$$

Theo tính chất đối xứng, ta có $\frac{EC}{EA} = \frac{E'C'}{E'A}$ (3)

Từ (1), (2), (3), ta có

$$\frac{DB}{DC'} \cdot \frac{E'C'}{E'A} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

Theo định lý Menelaus đảo, ta có ba điểm D, F, E' thẳng hàng.

b) (h.2) Gọi K là giao điểm của ba cevian đồng quy AD', BE, CF . Lấy C', E', Y' lần lượt đối xứng với C, E, Y qua AD . Điều cần chứng minh tương đương với A, X, Y' thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFD và cát tuyến BXK , ta có

$$\frac{XF}{XD} \cdot \frac{KD}{KA} \cdot \frac{BA}{BF} = 1 \quad (4)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ADE và cát tuyến CYK ta có

$$\frac{YD}{YE} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{KA}{KD} = 1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5), ta có

$$\frac{XF}{XD} \cdot \frac{YD}{YE} \cdot \frac{KD}{KA} \cdot \frac{BA}{BF} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{KA}{KD} = 1.$$

Vậy $\frac{XF}{XD} \cdot \frac{YD}{YE} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{BF}{BA}$,

$$\text{hay } \frac{XF}{XD} \cdot \frac{YD}{YE} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{BF}{BA} \cdot \frac{AE}{AF} \quad (6)$$

$$\text{Do } \frac{CA}{BA} = \frac{D'C}{D'B} \quad (7)$$

$$\text{Theo định lý Ceva } \frac{D'C}{D'B} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = -1 \quad (8)$$

Theo tính chất đối xứng, ta có

$$\frac{YD}{YE} = \frac{Y'D}{Y'E'}; EA = E'A \quad (9)$$

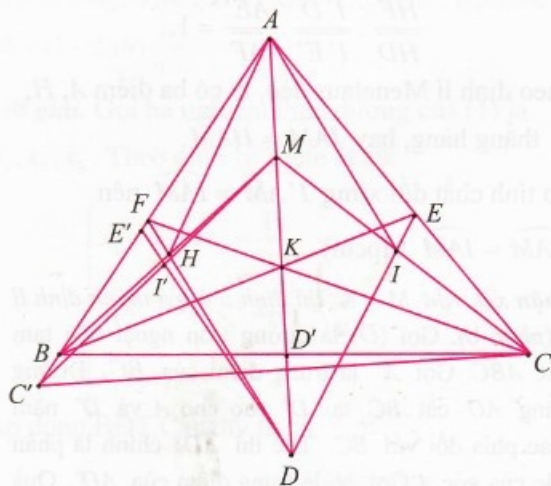
Từ (6), (7), (8), (9), ta có

$$\frac{XF}{XD} \cdot \frac{Y'D}{Y'E'} \cdot \frac{AE'}{AF} = 1.$$

Theo định lý Menelaus đảo, ta có ba điểm A, X, Y' thẳng hàng.

Phần b) của định lý 3 được phát biểu tổng quát hơn như sau:

Định lý 4 (Định lý ấu trùng con bướm tổng quát 2)
Cho AD', BE, CF là ba cevian đồng quy trong tam giác ABC . Trên đường thẳng AD' lấy điểm D bất kì. Gọi M là điểm thuộc AD (M khác A, D, D'). Gọi $H = DF \cap BM$; $I = DE \cap CM$.
Khi đó nếu $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$, thì $\widehat{DAH} = \widehat{DAI}$.



Hình 3

Chứng minh. (h.3) Gọi C', I', E' lần lượt là các điểm đối xứng với C, I, E qua AD . Khi đó ta có ba điểm D, I', E' thẳng hàng; ba điểm M, I', C' thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFD và cát tuyến BHM , ta có

$$\frac{HF}{HD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{BA}{BF} = 1 \quad (10)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AED và cát tuyến CIM , ta có

$$\frac{ID}{IE} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{MA}{MD} = 1 \quad (11)$$

Từ (10) và (11), ta có

$$\frac{HF}{HD} \cdot \frac{ID}{IE} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{BA}{BF} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{MA}{MD} = 1 \quad (12)$$

Mà $DI = DI'$; $IE = I'E'$, nên từ (12) ta có

$$\begin{aligned} \frac{HF}{HD} \cdot \frac{I'D}{I'E'} &= \frac{CA}{CE} \cdot \frac{BF}{BA} \\ \Rightarrow \frac{HF}{HD} \cdot \frac{I'D}{I'E'} \cdot \frac{AE'}{AF} &= \frac{AE'}{AF} \cdot \frac{CA}{CE} \cdot \frac{BF}{BA} \end{aligned} \quad (13)$$

Ta lại có $AE' = AE$; $\frac{CA}{BA} = \frac{CD'}{D'B}$ (14)

Áp dụng định lý Ceva, ta có

$$\frac{EA}{EC} \cdot \frac{D'C}{D'B} \cdot \frac{FB}{FA} = -1 \quad (15)$$

Từ (13), (14), (15), suy ra

$$\frac{HF}{HD} \cdot \frac{I'D}{I'E'} \cdot \frac{AE'}{AF} = 1.$$

Theo định lý Menelaus đảo, ta có ba điểm $A, H,$

I' thẳng hàng, hay $\widehat{IAM} = \widehat{HAM}$.

Do tính chất đối xứng $\widehat{I'AM} = \widehat{IAM}$ nên

$\widehat{HAM} = \widehat{IAM}$ (đpcm).

Nhận xét. Khi $M \equiv K$ thì định lý 4 trở thành định lý 3 (phần b). Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi A' là trung điểm của BC . Đường thẳng AO cắt BC tại D' sao cho A và D' nằm khác phía đối với BC . Thế thì AD' chính là phân giác của góc A . Gọi N là trung điểm của AD' . Qua I , dựng đường thẳng $d \parallel ON$ cắt AD' tại S . Gọi

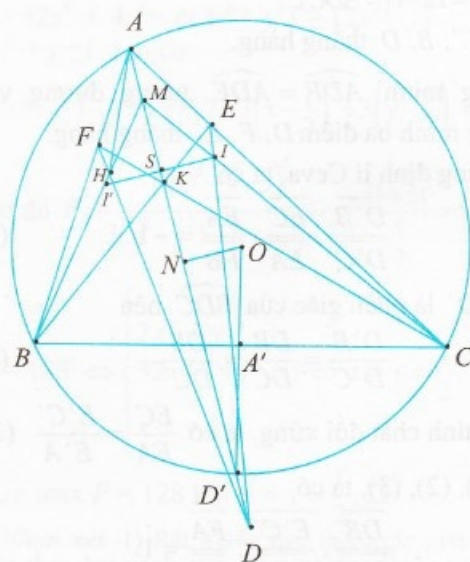
I' là điểm trên d sao cho S là trung điểm của II' .

Thế thì $\widehat{DAH} = \widehat{DAI} \Leftrightarrow A, H, I'$ thẳng hàng.

Từ đây, định lý 4 còn được phát biểu như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi A' là trung điểm của BC . Đường thẳng OA' cắt đường tròn (O) tại điểm D' sao cho A, D' nằm khác phía đối với BC . Trên đường thẳng AD' lấy điểm D bất kì. Biết rằng AD, BE, CF đồng quy tại K với BE, CF là các cevian của tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc AD (M khác A, D và giao điểm của AD với BC).

Gọi $H = DF \cap BM$; $I = DE \cap CM$. Gọi N là trung điểm của AD' . Qua I dựng đường thẳng $d \parallel ON$ cắt AD' tại S . Gọi I' là điểm trên d sao cho S là trung điểm của II' . Khi đó A, H, I' thẳng hàng (h.4).



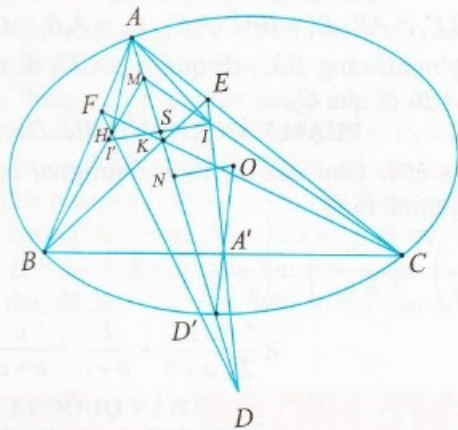
Hình 4

Dem chiếu song song mặt phẳng chứa hình vẽ xuống mặt phẳng không song song với nó sao cho qua phép chiếu song song, đường tròn biến thành elip. Từ phát biểu tương đương của định lý 4 ta đã chứng minh được lý tổng quát của định lý 4 sau

Định lý 5 (Định lý ấu trùng con bướm tổng quát 3)

Cho tam giác ABC nội tiếp elip tâm O . Gọi A' là trung điểm của BC . Đường thẳng OA' cắt elip tại điểm D' sao cho A, D' nằm khác phía

đối với BC . Trên đường thẳng AD' lấy điểm D bất kì. Biết AD, BE, CF đồng quy tại K với BE, CF là các cevian của tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc AD (M khác A, D và giao của AD với BC). Gọi $H = DF \cap BM$; $I = DE \cap CM$. Gọi N là trung điểm của AD' . Qua I dựng đường thẳng $d \parallel ON$ cắt AD' tại S . Gọi I' là điểm trên d sao cho S là trung điểm của II' . Khi đó ba điểm A, H, I' thẳng hàng (h.5).



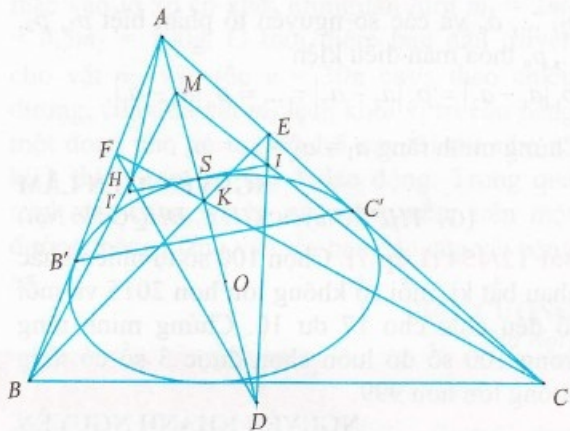
Hình 5

Một câu hỏi được đặt ra là có thể mở rộng định lý 4 đối với đường tròn nội tiếp tam giác thành định lý tổng quát đối với elip nội tiếp tam giác được không? Trước tiên, chúng ta phát biểu định lý tương đương với định lý 4 dưới dạng

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi các tiếp điểm của AC, AB với đường tròn (O) là B', C' . Trên đường thẳng AO lấy điểm D bất kì. Biết AD, BE, CF đồng quy tại K với BE, CF là các cevian của tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc AD (M khác A, D và giao của AD với BC). Gọi $H = DF \cap BM$; $I = DE \cap CM$. Qua I dựng đường thẳng d song song với $B'C'$ cắt AO tại S . Gọi I' là điểm trên d sao cho S là trung điểm của II' . Khi đó ba điểm A, H, I' thẳng hàng.

Cũng làm tương tự như định lý 5 trên, ta được định lý tổng quát sau

Định lý 6 (Định lý ấu trùng con bướm tổng quát 4)
Cho tam giác ABC ngoại tiếp elip tâm O . Gọi các tiếp điểm của AC, AB với elip (O) là B', C' . Trên đường thẳng AO lấy điểm D bất kì. Biết AD, BE, CF đồng quy tại K với BE, CF là các cevian của tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc AD (M khác A, D và giao của AD với BC). Gọi $H = DF \cap BM$; $I = DE \cap CM$. Qua I dựng đường thẳng $d \parallel B'C'$ cắt AO tại S . Gọi I' là điểm trên d sao cho S là trung điểm của II' . Khi đó ba điểm A, H, I' thẳng hàng (h.6).



Hình 6

Nhận xét. a) Khi elip biến thành đường tròn thì các định lý 5, và định lý 6 chính là định lý 4.

b) Chúng ta biết rằng, mỗi tam giác đều nội tiếp đường tròn và đều ngoại tiếp đường tròn cho nên yếu tố đường tròn luôn song hành với bài toán đối với tam giác. Trong nhiều trường hợp nó là yếu tố “ẩn tàng”. Vì vậy, chúng ta luôn phải nghĩ rằng bất cứ tam giác nào đều có đường tròn gắn liền với nó, hoặc là đường tròn ngoại tiếp, hoặc là đường tròn nội tiếp để từ đó có thể mở rộng bài toán đối với đường tròn thành bài toán đối với elip. Khi ta muốn mở rộng bài toán theo hướng này thì ta sẽ phải chuyển đổi những yếu tố Euclid như các góc bằng nhau, phân giác, vuông góc, ... thành các yếu tố là bất biến qua phép chiếu song song. Chẳng hạn như các yếu tố là đường thẳng song song, trung điểm của đoạn thẳng, tiếp điểm, thẳng hàng, đồng quy, cắt nhau, ...

Hy vọng bài viết đã mang đến cho các bạn những kết quả mới mẻ và bổ ích. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/454 (Lớp 6). Với $n \geq 2$, xét các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, \dots, p_n$ thỏa mãn điều kiện

$$p_1 | a_1 - a_2 = p_2 | a_2 - a_3 = \dots = p_n | a_n - a_1.$$

Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

NGUYỄN TIẾN LÂM

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/454 (Lớp 7). Chọn 100 số tự nhiên khác nhau bất kì, mỗi số không lớn hơn 2015 và mỗi số đều chia cho 17 dư 10. Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn chọn được 3 số có tổng không lớn hơn 999.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(Hải Phòng)

Bài T3/454. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì giá trị của biểu thức

$$\sqrt{\frac{(1^4+4)(2^4+4)\dots(n^4+4)}{2}}$$
 luôn là một số vô tỉ.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/454. Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì trên cạnh BC (D khác B , D khác C). Các đường trung trực của các đoạn thẳng BD , CD theo thứ tự cắt AB , AC tại M và N . Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng MN ; E , F theo thứ tự là trung điểm của BD và CD . Chứng minh rằng $\widehat{EHF} = \widehat{BAC}$.

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

Bài T5/454. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (các hệ số a, b, c nguyên, $a > 0$). Biết rằng phương trình có hai nghiệm dương phân biệt bé hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số a .

ĐÀO CHÍ THANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/454. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{z}-1 \\ \sqrt{y-\sqrt{z}} = \sqrt{x}-1 \\ \sqrt{z-\sqrt{x}} = \sqrt{y}-1 \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T7/454. Cho P là một điểm nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC . Gọi

$$A_1 = BC \cap AP, B_1 = AC \cap BP, C_1 = AB \cap CP,$$

$$A_2 = BC \cap B_1C_1, B_2 = AC \cap A_1C_1, C_2 = AB \cap A_1B_1;$$

$$A_3 = B_1C_1 \cap AP, B_3 = BP \cap A_1C_1, C_3 = A_1B_1 \cap CP.$$

Chứng minh rằng B_3C_3 đi qua A_2 ; A_3C_3 đi qua B_2 và A_3B_3 đi qua C_2 .

PHẠM VĂN KHÁNH (Hải Dương)

Bài T8/454. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + 3 \\ & \geq \frac{5}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right). \end{aligned}$$

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/454. Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng d có phương trình $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$. Gọi a_1 và a_2 là hai đường thẳng (phân biệt) song song và cách đều đường thẳng d một khoảng bằng $\frac{1}{12}$.

Hỏi miền mặt phẳng chứa đường thẳng d với biên là a_1 và a_2 có chứa điểm nguyên nào không? (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ đều là số nguyên).

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Trường ĐHSPT Hà Nội)

Bài T10/454. Cho phương trình

$$2014^x + nx = 2013.$$

Chứng tỏ rằng với mọi số n nguyên dương phương trình trên có đúng một nghiệm x_n , tìm $\lim x_n$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T11/454. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(x+y)f(x+y) = xf(x) + yf(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/454. Cho tam giác ABC . Điểm M di động trên đoạn BC . (I_1) , (I_2) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp tam giác ABM , ACM . Tiếp tuyến chung XY khác BC của (I_1) , (I_2) cắt AM tại N ($X \in (I_1)$; $Y \in (I_2)$). Z , T theo thứ tự là tiếp điểm của AM và (I_1) , (I_2) . K là giao điểm của XT và YZ . Chứng minh rằng NK luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên DHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/454. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0 \cos \omega t$ (U_0 và ω không đổi) vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp gồm điện trở R , tụ điện có điện dung C , cuộn cảm thuần có độ tự cảm L thay đổi được. Khi $L = L_1$ và $L = L_2$ điện áp hiệu dụng ở hai đầu cuộn cảm có cùng giá trị; độ lệch pha của điện áp ở hai đầu đoạn mạch so với cường độ dòng điện lần lượt là φ_1 và φ_2 . Khi $L = L_0$ điện áp giữa hai đầu cuộn cảm đạt cực đại; độ lệch pha của điện áp hai đầu đoạn

mạch so với cường độ dòng điện là φ . Tìm φ theo φ_1 và φ_2 . Áp dụng bằng số: $\varphi_1 = 0,52 \text{ rad}$, $\varphi_2 = 1,05 \text{ rad}$.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

Bài L2/454. Ba con lắc lò xo 1, 2, 3 dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng trên ba trục nằm ngang song song với nhau nằm trong cùng một mặt phẳng và con lắc lò xo thứ 2 cách đều hai lò xo còn lại, vị trí cân bằng của vật có cùng tọa độ, trục tọa độ cùng chiều dương. Biết $k_1 = 2k_2 = 0,5k_3 = 100 \text{ N/m}$, khối lượng các vật nặng mắc vào lò xo có khối lượng lần lượt $m_1 = 2m_2 = 0,5m_3 = 100 \text{ g}$. Ở thời điểm ban đầu truyền cho vật m_1 vận tốc $v = 30\pi \text{ cm/s}$ theo chiều dương, còn đưa vật m_2 lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ có tọa độ $1,5 \text{ cm}$ rồi thả nhẹ và kích thích con lắc thứ 3 dao động. Trong quá trình dao động cả ba vật nặng nằm trên một đường thẳng. Tính vận tốc ban đầu của vật nặng m_3 .

VIỆT CƯỜNG
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/454 (For 6th Grade). Given n numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ and n distinct primes $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($n \geq 2$) satisfying

$$p_1 | a_1 - a_2 = p_2 | a_2 - a_3 = \dots = p_n | a_n - a_1.$$

Prove that $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Problem T2/454 (For 7th Grade). Choose 100 different natural numbers so that each of them is less than or equal to 2015 and has remainder 10 when divided by 17. Prove that, among these ones, we can always choose three numbers of which the sum is less than or equal to 999.

Problem T3/454. Prove that, for every positive integer n , the value of the expression

$$\frac{(1^4+4)(2^4+4)\dots(n^4+4)}{2}$$

is an irrational number.

Problem T4/454. Given a triangle ABC and D is any point on the side BC (D is different from B and C). The perpendicular bisectors of BD and CD intersect AB and AC respectively at M and N . Let H be the orthogonal projection of D on the line MN and E, F respectively the

midpoints of BD and CD . Prove that $\widehat{EHF} = \widehat{BAC}$.

Problem T5/454. Given the equation $ax^2 + bx + c = 0$ where the coefficients a, b, c are integers and $a > 0$. Suppose that the equation has two distinct positive roots which are less than 1. Find the smallest possible value for the coefficient a .

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/454. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{z}-1 \\ \sqrt{y-\sqrt{z}} = \sqrt{x}-1 \\ \sqrt{z-\sqrt{x}} = \sqrt{y}-1 \end{cases}$$

Problem T7/454. Let P be a point on the plane containing a triangle ABC . Suppose that $A_1 = BC \cap AP$, $B_1 = AC \cap BP$, $C_1 = AB \cap CP$, $A_2 = BC \cap B_1C_1$, $B_2 = AC \cap A_1C_1$, $C_2 = AB \cap A_1B_1$; $A_3 = B_1C_1 \cap AP$, $B_3 = BP \cap A_1C_1$, $C_3 = A_1B_1 \cap CP$. Prove that A_2, B_2 and C_2 respectively are on the lines going through B_3C_3, A_3C_3 and A_3B_3 .

(Xem tiếp trang 11)



Bài T1/450. Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện: $(a+2):b$ và $(b+3):a$.

Lời giải. Giả sử các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện:

$$(a+2):b \text{ (1) và } (b+3):a \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $a+2 = bk$ và $b+3 = ah$ với k, h là các số nguyên dương, cho nên $a+2 \geq b$ và $b+3 \geq a$, do đó có $b \leq a+2 \leq b+5$. Xét các trường hợp sau đây.

1) Nếu $a+2 = b$ thì (1) thỏa mãn. Từ (2) có $b+3 = a+5$ chia hết cho a nên 5 chia hết cho a , do đó a chỉ có thể bằng 1 hoặc 5. Thử thấy $a=1$ thì $b=3$ và $a=5$ thì $b=7$ đều thỏa mãn.

2) Nếu $a+2 = b+1$ thì từ (1) có $b+1$ chia hết cho b nên 1 chia hết cho b , do đó $b=1$ và $a=0$, không thỏa mãn.

3) Nếu $a+2 = b+2$ hay là $a=b$ thì từ (1) có $b+2$ chia hết cho b nên 2 chia hết cho b , do đó b chỉ có thể bằng 1 hoặc 2. Thử thấy $a=b=2$ không thỏa mãn (2), còn $a=b=1$ thỏa mãn.

4) Nếu $a+2 = b+3$ thì từ (2) có $a+2$ chia hết cho a nên 2 chia hết cho a , do đó a chỉ có thể bằng 1 hoặc 2. Thử thấy $a=1$ thì $b=0$, không thỏa mãn, còn $a=2$ thì $b=1$ thỏa mãn.

5) Nếu $a+2 = b+4$ thì từ (2) có $b+3 = a+1$ chia hết cho a nên 1 chia hết cho a , do đó a chỉ có thể bằng 1. Với $a=1$ thì $b=-1$, không thỏa mãn.

6) Nếu $a+2 = b+5$ thì (2) thỏa mãn. Từ (1) có $b+5$ chia hết cho b nên 5 chia hết cho b , do đó b chỉ có thể bằng 1 hoặc 5. Thử thấy $b=1$ thì $a=4$ và $b=5$ thì $a=8$ đều thỏa mãn.

Vậy bài toán có 6 nghiệm $(a; b)$ là $(1; 1)$,

$(1; 3)$, $(2; 1)$, $(4; 1)$, $(5; 7)$, $(8; 5)$. $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn chưa đánh giá được $b \leq a+2 \leq b+5$ nên phải thử nhiều trường hợp. Các bạn sau

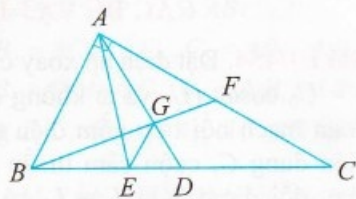
có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Triệu Hồng Ngọc, 6A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** Lê Tuấn Kiệt, Văn Quang Tuệ, Đỗ Trần Công Phương, 6A, THCS Phạm Văn Đồng; Nguyễn Thị Mỹ Huyền, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/450. Cho tam giác ABC vuông tại A , E là một điểm trên cạnh BC sao cho $EC = 2EB$. Chứng minh rằng $AC^2 = 3(EC^2 - EA^2)$.

Lời giải

Vẽ các trung tuyến AD và BF của tam giác ABC , chúng cắt nhau tại G . Theo bổ đề ta



có $AD = DB = DC = \frac{1}{2}BC$ tức là tam giác ABD cân tại D . Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $DG = \frac{1}{3}AD$. Mặt khác, từ đề bài ta có

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}, \text{ suy ra } \frac{DE}{BD} = \frac{1}{3},$$

hay $DE = \frac{1}{3}BD$. Từ các kết quả trên ta suy ra $DG = DE$ và do đó $\triangle DBG = \triangle DAE$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = BG$.

Bây giờ áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABF và ABC ta được:

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = BC^2 - AC^2 + AF^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}BG\right)^2 = \left(\frac{3}{2}EC\right)^2 - AC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}BG^2 = \frac{9}{4}EC^2 - \frac{3}{4}AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 3(EC^2 - EA^2) \text{ (vì } BG = AE), \text{ từ}$$

đây ta suy ra điều cần phải chứng minh. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng. Một số bạn sử dụng định lý Thales, không thuộc chương trình lớp 7.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Tạ Phương Chi, 7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 7A5, THCS Cầu Giấy; **Hải Phòng:** Đỗ Tiến Đạt, 7A2, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** Đặng Nữ Quỳnh Anh, Thái Bá Bảo, Hoàng Thị Bảo Ngọc, 7C, THCS Lý Nhật Quang; **Đô Lương:** **Quảng Ngãi:** Võ Quang Phú Thời, Đỗ Thị Mỹ Lan, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Trương Thị Mai Trâm, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nguyễn Thị Kiều Mầu, 7B, THCS Kim Vang, Võ Thành Hy, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Thành, Huỳnh Đạt Diệu Huyền, 7C, Võ Thị Hồng Kiều, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/450. Giải phương trình

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{4x} + \frac{3x}{2x^2 + 2} \quad (*)$$

Lời giải. ĐK: $|x| \geq 1$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{4x} + \frac{3x}{2x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{4x} - \frac{3x}{2x^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 1} = \frac{4x^4 - 3x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} \left(4 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}(4x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 1}(4x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 1}(4x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = 4 \quad (2)$$

- PT(1) có nghiệm $x = \pm 1$ (thỏa mãn ĐK).
- Nếu $x < -1$ thì dễ thấy PT(2) vô nghiệm.
- Nếu $x > 1$ thì PT(2) tương đương với

$$\sqrt{x^2 - 1}(4x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(4x^2 + 1)^2 = 16x^2(x^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 40x^4 + 23x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-23 \pm \sqrt{41}}{80} \text{ (không thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT(*) có hai nghiệm là: $x = -1$; $x = 1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn. **Nghệ An:** Nguyễn Trọng Bằng, 8A2, THCS Thị Trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nguyễn Văn Mạnh,** 8A, **Nguyễn Thị Quỳnh Trang,** 9C, **Nguyễn Thị Hằng,** 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** Tống Ngọc Chung, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Cao, Vương Tiến Đạt, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** Bùi Thị Liễu Dương, 8A4, Nguyễn Hồng Anh, 9A1, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/450. Cho BC là dây cung của đường tròn tâm O bán kính R và $BC = R$. A là một điểm trên cung lớn BC ($A \neq B$, $A \neq C$), M và N là các điểm trên dây cung AC sao cho:

$$AC = 2AN = \frac{3}{2}AM. \text{ Vẽ } MP \perp AB \text{ (} P \in AB \text{).}$$

Chứng minh rằng ba điểm P , O , N thẳng hàng.

Lời giải. • TH1: AC là đường kính của đường tròn (O) thì $N \equiv O$ nên hiển nhiên P , O , N thẳng hàng.

• TH2: AC không là đường kính.

Ta có $OB = OC = BC = R$ nên $\triangle OBC$ đều, do đó $\widehat{BOC} = 60^\circ$, dẫn tới $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Suy ra

$$MP = \frac{1}{2}AM = MC.$$

Tam giác CMP cân tại M nên

$$\widehat{MCP} = \widehat{MPC} = \frac{1}{2}\widehat{PMA} = 30^\circ.$$

Do đó $\triangle APC$ cân tại P , suy ra $PN \perp AC$ (1)

Mặt khác, do N là trung điểm của cạnh AC nên $ON \perp AC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra P , O , N thẳng hàng. $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này không khó nhưng cũng không có nhiều bạn tham gia giải. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phan Thị Nguyệt, Nguyễn Hồng Anh, 9A1, Trần Đức Duy, Nguyễn Văn Hiếu, 8A4, THCS Yên Lạc; **Nguyễn Minh Hiếu,** 9D, THCS Vĩnh Yên; **Phú Thọ:** Tạ Anh Dũng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Vương Tiến Đạt, Nguyễn Văn Cao, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Đỗ Hoài Phương,** 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai; **Nghệ An:** Nguyễn Thuỳ Linh, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Quảng Ngãi:** Võ Quang Phú Thời, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Võ Thành Hy, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN THANH HỒNG**Bài T5/454. Biết phương trình**

$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ ($a \neq 0$) (1) có ba nghiệm thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

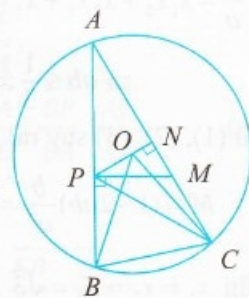
$$M = (1 - 2ab) \frac{b}{a^2}.$$

Lời giải. Gọi ba nghiệm thực dương của (1) là x_1, x_2, x_3 . Theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{a} \end{cases} \quad (*).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\bullet \frac{1}{a} = x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{a} = x_1 x_2 x_3 \geq 3\sqrt{3} \quad (1).$$

$$\bullet \frac{b}{a} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 3\sqrt{(x_1 x_2 x_3)^2} \geq 9 \quad (2).$$

$$\bullet \frac{b}{a} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - 2ab \geq \frac{1}{3} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$M = (1 - 2ab) \frac{b}{a^2} = (1 - 2ab) \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a} \geq 9\sqrt{3}.$$

Khi $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{3}$ thì $a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{3}$,

$$M = 9\sqrt{3}. \text{ Vậy min } M = 9\sqrt{3}. \square$$

► **Nhận xét.** 1) Để có (*) mà không áp dụng định lý Viète cho phương trình bậc 3, có thể lập luận như sau: Nếu (1) có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 - x^2 + bx - 1$. Khai triển về trái rồi đồng nhất hệ số hai vế, ta cũng được (*).

2) Các bạn tham gia đều tìm đúng kết quả. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Tạ Anh Dũng, 9A3, Nguyễn Tiến Long, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hồng Anh, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phùng Văn Nam**, 9E, THCS Vĩnh Yên. **Hà Nội:** Nguyễn Văn Cao, Vương Tiến Đạt, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa. **Hải Dương:** Đồng Xuân Luân, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách. **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/450. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $32x^6 + 4y^3 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{(2x^2 + y + 3)^3}{3(x^2 + y^2) - 3(x + y) + 2}.$$

Lời giải. Cách 1. Đặt $2x = a, 2y = b$. Từ giả thiết suy ra $a^6 + b^3 = 2$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$6 = (a^6 + 1 + 1) + (b^3 + 1 + 1)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^6 \cdot 1 \cdot 1} + 3\sqrt[3]{b^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3(a^2 + b)$$

$$\Rightarrow a^2 + b \leq 2.$$

$$\text{Do đó } 2P = \frac{8(2x^2 + y + 3)^3}{3(4x^2 + 4y^2) - 6(2x + 2y) + 8}$$

$$= \frac{(a^2 + b + 6)^3}{3(a^2 + b^2) - 6(a + b) + 8}$$

$$= \frac{(a^2 + b + 6)^3}{3(a - 1)^2 + 3(b - 1)^2 + 2}$$

$$\leq \frac{(2 + 6)^3}{2} = 256 \Rightarrow P \leq 128$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = 128$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Nhận xét rằng: Với mọi số dương a, b ta có $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$ (1), đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 3(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq 3ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 3(a + b)(a - b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Vì a, b là các số dương nên (2) luôn đúng, suy ra (1) được chứng minh.

Áp dụng BĐT (1) với $a = 2x^2$ và $b = y$, ta có $1 = 32x^6 + 4y^3 = 4(8x^6 + y^3) \geq (2x^2 + y)^3$, suy ra $2x^2 + y \leq 1$. Lại có

$$3(x^2 + y^2) - 3(x + y) + 2 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{(2x^2 + y + 3)^3}{3(x^2 + y^2) - 3(x + y) + 2} \leq \frac{(1 + 3)^3}{\frac{1}{2}} = 128.$$

$$P = 128 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = y \\ 32x^6 + 4y^3 = 1 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\max P = 128$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều theo hai cách trên. Tuy nhiên, nhiều bạn suy luận quá dài dòng.

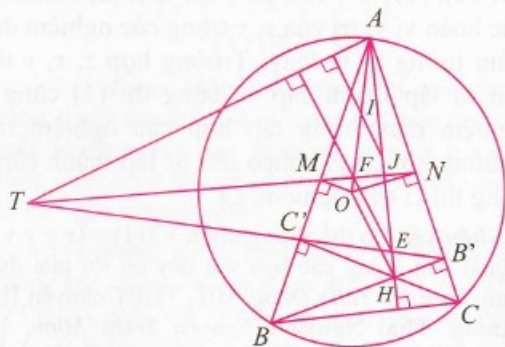
2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Hoàng Lê Nhật Tùng, 11T2, THPT chuyên KHTN Hà Nội; **Hưng Yên:** Chu Minh Huy, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** Võ Tuấn Dũng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; TP Việt Trì; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Thanh Hương, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghe An:** Hồ Xuân Hùng, 11T1, THPT Đô Lương 1; **Hà Tĩnh:** Phan Anh Tuấn, Bùi Huyền Trang, Nguyễn Đức Thắng, 10T1, Lê Hoàng Minh Hằng, Đoàn Yến Chi, Trác Thị Thùy, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Lê Quang Trung, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** Hồ Sỹ Hoàng, 12B1, THPT Đakrông; **Phú Yên:** Nguyễn Chí Lương, Hồ Minh Hoàng, Ngô Lê Phương Trinh, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Khánh Hòa:** Hà Xuân Khang, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP

Nha Trang; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** Lê Long Quốc, 10A1T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đông Tháp:** Ngô Hiếu Nhân, 12A5, THPT Cao Lãnh; **An Giang:** Đặng Phú Trung Tín, 11 T1, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/450. Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. AH cắt $B'C'$ ở E , AO cắt MN ở F . Chứng minh rằng $EF \parallel OH$.



Lời giải. Từ giả thiết có $MN \parallel BC$ và tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp, suy ra tứ giác $B'C'MN$ nội tiếp. Gọi T là giao điểm của $B'C'$ và MN ; I, J theo thứ tự là trung điểm của OA và AH . Ta có $TM \cdot TN = TC' \cdot TB'$, nên TA là trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMON$ và $AB'HC'$. Từ đó $TA \perp IJ$ (1). Mặt khác, vì $TF \perp AE, OA \perp TE$ (do $OA \perp B'C'$ kết quả quen thuộc) nên F là trực tâm $\triangle TAE$.

Suy ra $EF \perp TA$ (2). Từ (1) và (2) ta thu được kết quả $IJ \parallel EF$. Lại vì IJ là đường trung bình của tam giác AOH , nên $OH \parallel IJ$. Do đó $EF \parallel OH$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn giải đúng bài này. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Văn Cao, Vương Tiến Đạt, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Vũ Đức Văn, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vũ Bá Sang, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông, Trần Thiện Nam, 11A1, THPT Ứng Hòa A, Phạm Thiên Long, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Hiếu, 9D, Phùng Văn Nam, 9E, THCS Vĩnh Yên, Nguyễn Hữu Huy, Nguyễn Văn Hùng, Lê Thị Thu Thủy, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Nguyễn Tiến Long, 9A1, THCS Lâm Thao, Võ Tuấn Dũng, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất

Thành; **Bắc Giang:** Nghiêm Văn Nghĩa, 10A1, THPT Lạng Giang Số 3; **Thái Nguyên:** Nguyễn Ngọc Thanh Tâm, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nghệ An:** Cao Hữu Đạt, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Bùi Thị Thanh Hằng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp I, Hồ Xuân Hùng, 11A1, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** Phan Nhật Duy, Lê Minh Tuấn, Nguyễn Quang Dũng, Bùi Huyền Trang, Trần Đình Hùng, Ngô Việt Hoàng, Phan Anh Tuấn, 10 Toán 1, Hà Thị Phương Anh, 10 Toán 2, Nguyễn Duy Tuấn, Nguyễn Văn Thế, Phạm Quốc Cường, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Lê Quang Trung, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Kon Tum:** Nguyễn Hoàng Lan, Lê Thị Thảo, 11A1 THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Huỳnh Nguyễn Như Phương, Ngô Lê Phương Trinh, Đặng Bảo Vinh, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Sóc Trăng:** Phạm Tiến Dũng, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Duy, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/450. Cho các số dương a, b, c . Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq k \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 \right).$$

Lời giải. Ta xét trường hợp riêng: a là số dương bất kì; $b = 1$; $c = a^3$.

Bất đẳng thức trong đầu bài trở thành:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a^3} + a^2 - 3 &\geq k \left(\frac{a^6 + a^2 + 1}{a^4 + a^3 + a} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2 (a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}{a^3} \\ &\geq k \cdot \frac{(a-1)^2 (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a + 1)}{a^4 + a^3 + a} \end{aligned}$$

Với $a \neq 1$, bất đẳng thức tương đương với

$$k \leq \frac{(a^3 + a^2 + 1)(a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}{a^2(a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a + 1)} \quad \forall a > 0, a \neq 1.$$

Do đó

$$k \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(a^3 + a^2 + 1)(a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}{a^2(a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a + 1)} = 1.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trong đầu bài đúng với $k = 1$.

Thật vậy, với $k = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai

dãy số $\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{c}}, \sqrt{\frac{c}{a}}$ và $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$, ta được

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)}{ab + bc + ca}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2.$$

BĐT (1) được chứng minh. Vậy $\max k = 1$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán khó nên có ít bạn tham gia gửi bài giải. Lời giải có hai bước:

1) Xét a là số dương bất kì; $b = 1$; $c = a^3$ và cho $a \rightarrow +\infty$ để suy ra $k \leq 1$ (điều kiện cần đối với k).

2) Chứng minh BĐT trong đầu bài đúng với $k = 1$ (điều kiện đủ để có $\max k = 1$).

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Yên Bái: Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Duy Tuấn, Võ Duy Khánh, Nguyễn Văn Thế, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/450. Giải phương trình sau trong tập hợp số nguyên dương:

$$\frac{x^2(x+y)(x+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+z)(y+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2(z+x)(z+y)}{(z-x)(z-y)} = 2160 + (x+y+z)^2 \quad (1)$$

biết ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng.

Lời giải. (Theo bạn Bùi Thị Thanh Hằng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp I, Nghệ An và đa số các bạn).

Nhận xét rằng $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ và vai trò bình đẳng của x, y , ta xét trường hợp x, y, z theo thứ tự này lập thành cấp số cộng. Giả sử $x = y + d, z = y - d, d \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x^2(x+y)(x+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(y+z)(y+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2(z+x)(z+y)}{(z-x)(z-y)} \\ &= \frac{(y+d)^2(2y+d)(2y)}{2d^2} - \frac{y^2(2y+d)(2y-d)}{d^2} \\ & \quad + \frac{(y-d)^2(2y)(2y-d)}{2d^2} \\ &= \frac{9y^2d^2}{d^2} = 9y^2. \end{aligned}$$

Vậy (1) có dạng $9y^2 = 2160 + (y+2d)^2$

$$\Leftrightarrow (y-d)(2y+d) = 540. \quad (2)$$

Để ý rằng 540 chia hết cho 3 đồng thời

$(y-d) + (2y+d) = 3y$ cũng chia hết cho 3 nên $y-d$ và $2y+d$ đều chia hết cho 3. Tính đến điều kiện x, y, z nguyên dương, ta có bảng

$y-d$	3	6	9	12	15	18	30
$2y+d$	108	90	60	45	36	30	18
d	58	26	14	7	2	-2	-14
y	61	32	23	19	17	16	16
x	119	58	37	26	19	14	2
z	3	6	9	12	15	18	30

Vậy nghiệm nguyên dương (x, y, z) của phương trình là $(119, 61, 3), (58, 32, 6), (37, 23, 9), (26, 19, 12), (19, 17, 15), (14, 16, 18), (2, 16, 30)$ và các hoán vị vị trí của x, y trong các nghiệm đó.

Làm tương tự ta thấy: Trường hợp z, x, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì (1) cũng có nghiệm nằm trong tập hợp của nghiệm trên. Trường hợp x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì (1) vô nghiệm. $\square$

► **Nhận xét.** Có thể chứng minh VT(1) = $(x+y+z)^2$. Ngoài bạn Hằng các bạn sau đây có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Võ Tuấn Dũng, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Nguyên:** Nguyễn Triều Minh, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Nội:** Hoàng Nhật Tùng, 11T2, THPT chuyên KHTN, Vũ Đức Văn, 10T1, THPT chuyên ĐHSPTN, Vũ Bá Sang, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Bắc Giang:** Nghiêm Văn Nghĩa, 10A1, THPT Lạng Giang Số 3; **Nam Định:** Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** Phan Nhật Duy, Nguyễn Ánh Triều, Ngô Việt Hoàng, Nguyễn Đức Thắng, 10T1, Nguyễn Văn Thế 11T1 THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 10A1, THPT Phan Bội Châu; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy Mân, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** Trần Nam Quang Trung, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Khánh Hòa:** Hà Xuân Khang, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 10A1, THPT Quang Trung, Trần Văn Thiên, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 10T1, THPT chuyên Long An; **Cần Thơ:** Nguyễn Lê Hoàng Long, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/454. Cho một bảng ô vuông kích thước 999×999 , các ô được tô bởi một trong hai màu Trắng hoặc Đỏ. Giả sử T là số bộ (C_1, C_2, C_3) các ô mà hai ô đầu trong cùng một hàng và hai ô cuối trong cùng một cột, với C_1 và C_3 màu Trắng, C_2 màu Đỏ. Tìm giá trị lớn nhất của T .

Lời giải

Ta chứng minh trong một bảng ô vuông $n \times n$

có nhiều nhất $\frac{4n^4}{27}$ bộ như

vậy. Thật vậy kí hiệu a_i là số ô trắng ở hàng thứ i , b_j là số ô trắng ở cột thứ j , K là tập hợp các ô đỏ. Do với mỗi ô đỏ (i, j) có a_i, b_j bộ (C_1, C_2, C_3) chấp nhận được, trong đó $C_2 = (i, j)$, vì vậy

$T = \sum_{(i,j) \in K} a_i b_j$. Áp dụng BĐT $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$T \leq \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in K} (a_i^2 + b_j^2) \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n-a_i) a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-b_j) b_j^2 \quad (1)$$

(vì trong hàng thứ i có $n-a_i$ ô đỏ, trong cột thứ j có $n-b_j$ ô đỏ).

Với $0 \leq x \leq n$, dùng BĐT Cauchy cho ba số thực không âm ta có

$$(n-x) \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot (2n-2x) \cdot x^2 \\ \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n-2x+2x}{3} \right)^3 = \frac{4n^3}{27},$$

đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2n-2x = x \Leftrightarrow x = \frac{2n}{3}$. Do

đó từ (1) ta nhận được

$$T \leq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{4n^3}{27} + \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{4n^3}{27} = \frac{4n^4}{27}. \text{ Đẳng thức xảy}$$

$$\text{ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = b_1 = b_2 = \dots = b_n = \frac{2n}{3} \quad (2)$$

Trường hợp $n = 999$, ta lặp lại mẫu sau 333×333 lần để tô màu hết các ô của bảng ô vuông 999×999 . Khi đó (2) được thỏa mãn. Bởi vậy

$$T = \frac{4 \cdot 999^4}{27} = 148.999^3.$$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của T bằng 148.999^3 . $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán hay về tính số phần tử của tập hợp kết hợp với kĩ thuật bất đẳng thức Cauchy. Chỉ có một bạn có lời giải đúng: **Vũ Bá Long**, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**. Đáng chú ý là bạn **Long** giải bài toán bằng phương pháp của lý thuyết xác suất.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/450. Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ và số nguyên tố p sao cho đa thức $f(x) = x^n - px + p^2$ phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn **Võ Duy Khánh**, 11T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**)

Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ trong đó

$$g(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$h(x) = x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \dots + b_1x + b_0,$$

với $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i=0, 1, \dots, m-1$), $b_i \in \mathbb{Z}$ ($i=0, 1, \dots, t-1$), $m+t=n$, $m \geq 1$, $t \geq 1$.

Ta có: $a_0 b_0 = p^2$ (*). Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Chỉ cho a_0 hoặc b_0 chia hết cho p . Giả sử $a_0 \vdots p$ và $b_0 \nmid p$. Gọi k là chỉ số bé nhất mà $a_k \nmid p$, tức là $a_0 \vdots p, a_1 \vdots p, \dots, a_{k-1} \vdots p, a_k \nmid p$.

Ta có $k \leq m \leq n-1$. Giả sử c_i là hệ số của $f(x)$. Do $k \leq n-1$ nên $c_k \vdots p$. Lại có

$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k$. Suy ra

$a_k b_0 \vdots p \Leftrightarrow a_k \vdots p$ (mâu thuẫn). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $a_0 \vdots p$ và $b_0 \vdots p$. Gọi r là chỉ số bé nhất mà $a_r \nmid p$ và s là chỉ số bé nhất mà $b_s \nmid p$. Tức là

$$\begin{cases} a_0 \vdots p, a_1 \vdots p, \dots, a_{r-1} \vdots p, a_r \nmid p & 1 \leq r \leq m \\ b_0 \vdots p, b_1 \vdots p, \dots, b_{s-1} \vdots p, b_s \nmid p & 1 \leq s \leq t \end{cases}$$

Đặt $r+s=k$. Ta có $c_k = a_r b_s + \sum_{i+j=k} a_i b_j$ (1),

trong đó $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq t$.

Từ (1) ta có $c_k \nmid p$ (do $c_i \vdots p$ với $0 \leq i \leq n-1$)

$\Rightarrow k = n \Leftrightarrow r+s = n$. Suy ra $r=m$; $s=t$

(do $r \leq m$, $s \leq t$). Thành thử $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \vdots p$

và $b_0, b_1, \dots, b_{t-1} \vdots p$. Giả sử $m \geq 2$, $t \geq 2$. Ta có

$-p = c_1 = a_0 b_1 + b_0 a_1 \vdots p^2$ (vô lý). Vậy $m=1$

hoặc $t=1$. Giả sử $t=1$, khi đó

$$x^n - px + p^2 = (x + b_0)(x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0).$$

Suy ra $a_0 b_0 = p^2$. Mà $a_0, b_0 \vdots p$ nên ta có hoặc

$a_0 = b_0 = p$ hoặc $a_0 = b_0 = -p$.

Nếu $a_0 = b_0 = p$ thì

$$f(-p) = 0 \Leftrightarrow (-p)^n + 2p^2 = 0 \Leftrightarrow -2 = (-1)^n p^{n-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ lẻ} \\ 2 = p^{n-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ p=2 \end{cases}$$

Thử lại $x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$.

Nếu $f(p) = 0 \Rightarrow p^n + 2p^2 = 0$, loại.

Đáp số: $n=3$; $p=2$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài này chỉ có bảy bạn tham gia giải trong đó có sáu bạn có lời giải đúng nhưng chưa thật chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tương đối tốt: **Yên Bái:** **Vũ Hồng Quân**, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn

Tất Thành; **Hưng Yên:** Trần Bá Trung, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Duy Tuấn, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

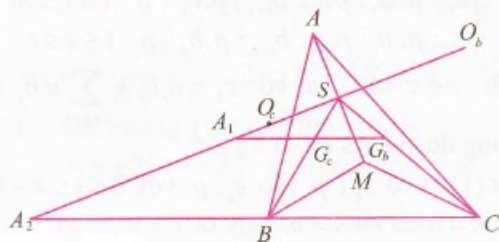
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/450. Cho tam giác đều ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB hoặc có điểm chung hoặc đôi một song song.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Xuân Dũng, 11T1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội).

Bổ đề. Cho tam giác ABC và điểm M sao cho các tam giác MBC, MCA, MAB không đều. Gọi $O_a, G_a; O_b, G_b; O_c, G_c$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của các tam giác MBC, MCA, MAB . Khi đó O_aG_a, O_bG_b, O_cG_c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi AO_a, BO_b, CO_c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Chứng minh. Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là giao điểm của O_bO_c và G_bG_c, BC . Các điểm B_1, B_2 và C_1, C_2 được định nghĩa tương tự (h.1).



Hình 1

Gọi S là trung điểm của AM .

Dễ thấy A_1A_2, G_bB, G_bC đồng quy tại S .

Vì G_b, G_c theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác MCA, MAB nên

$$\frac{SG_b}{SC} = \frac{1}{3} = \frac{SG_c}{SB}.$$

Do đó, theo định lý Thales, $G_bG_c \parallel CB$.

Vậy, lại theo định lý Thales, $\frac{A_1G_b}{A_1G_c} = \frac{A_2C}{A_2B}$.

Tương tự $\frac{B_1G_c}{B_1G_a} = \frac{B_2A}{B_2C}; \frac{C_1G_a}{C_1G_b} = \frac{C_2B}{C_2A}$.

Nhân vế với vế của ba đẳng thức trên, ta có

$$\frac{A_1G_b}{A_1G_c} \cdot \frac{B_1G_c}{B_1G_a} \cdot \frac{C_1G_a}{C_1G_b} = \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \quad (1).$$

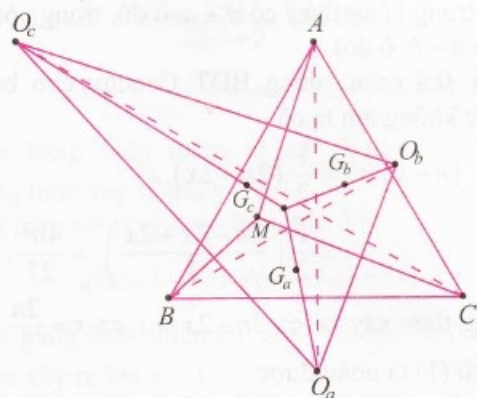
Vậy, các điều kiện sau tương đương:

- 1) O_aG_a, O_bG_b, O_cG_c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
- 2) A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.
- 3) A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.
- 4) AO_a, BO_b, CO_c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Chú ý, áp dụng định lý Desargues cho $\Delta O_aO_bO_c$ và $\Delta G_aG_bG_c$, ta có 1) $\Leftrightarrow$ 2); áp dụng định lý Menelaus cho $\Delta G_aG_bG_c$ và ΔABC , chú ý tới (1), ta có 2) $\Leftrightarrow$ 3); áp dụng định lý Desargues cho ΔABC và $\Delta O_aO_bO_c$, ta có 3) $\Leftrightarrow$ 4).

Trở lại giải bài T12/450 (h.2).

Gọi $O_a, G_a; O_b, G_b; O_c, G_c$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của các tam giác MBC, MCA, MAB .



Hình 2

Vì tam giác ABC đều và O_a, O_b, O_c theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MBC, MCA, MAB nên AO_a, BO_b, CO_c theo thứ tự là trung trực của BC, CA, AB . Do đó AO_a, BO_b, CO_c đồng quy. Vậy, theo bổ đề trên, O_aG_a, O_bG_b, O_cG_c hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. Nói cách khác đường thẳng Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. $\square$

>Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán trên bằng cách khác nhờ bổ đề quen thuộc sau

Đường thẳng Euler của tam giác không đều ABC là tập hợp

$$\Delta = \{X | (b^2 - c^2)XA^2 + (c^2 - a^2)XB^2 + (a^2 - b^2)XC^2 = 0\}.$$

2) Ngoài bạn Dũng, chỉ có sáu bạn tham gia giải bài toán trên: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hữu Huy, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** Vũ Duy Mạnh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hưng Yên:**

Trần Bá Trung, 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; Hà Nội: Nguyễn Ngọc Trường, Vũ Bá Long, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP. Hà Đông, Hoàng Lê Nhật Tùng, 11T2, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/450. Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, nguồn S phát bức xạ đơn sắc có bước sóng λ , màn quan sát cách mặt phẳng hai khe một khoảng không đổi D , khoảng cách giữa hai khe $S_1S_2 = a$ có thể thay đổi (nhưng S_1 và S_2 luôn cách đều S). Xét điểm M trên màn, lúc đầu là vân sáng bậc 4, nếu lần lượt giảm hoặc tăng khoảng cách S_1S_2 một lượng Δa thì tại đó là vân sáng bậc k và bậc $3k$. Nếu tăng khoảng cách S_1S_2 thêm $2\Delta a$ thì tại M là vân sáng hay vân tối bậc bao nhiêu?

Lời giải. Vì x_M không đổi nên ta có:

$$x_M = \frac{4\lambda D}{a} = \frac{k\lambda D}{a - \Delta a} = \frac{3k\lambda D}{a + \Delta a} = \frac{n\lambda D}{a + 2\Delta a}.$$

Từ đó ta có: $\frac{4}{a} = \frac{k}{a - \Delta a} = \frac{3k}{a + \Delta a} = \frac{n}{a + 2\Delta a}.$

Từ $\frac{k}{a - \Delta a} = \frac{3k}{a + \Delta a} \Rightarrow \frac{k}{a - \Delta a} = \frac{3k}{a + \Delta a} = \frac{2k}{a}$

Vì $\frac{2k}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow k = 2; \frac{4}{a} = \frac{k}{a - \Delta a} \Rightarrow a = 2\Delta a.$

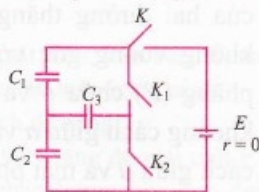
Suy ra $\frac{4}{a} = \frac{n}{a + 2\Delta a} \Leftrightarrow \frac{4}{a} = \frac{n}{a + a} \Rightarrow n = 8.$

Vậy nếu tăng khoảng cách S_1S_2 thêm $2\Delta a$ thì tại M là vân sáng bậc 8. $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn có lời giải đúng và chặt chẽ:
Nam Định: Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Chu Minh Thông, 12 A13K41, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Định:** Trần Lê Huỳnh Đức, 10 Lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Tô Đặng Xuân Hình, 11 Anh 2, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Cần Thơ:** Huỳnh Hữu Hạng, 12 A1, THPT Nguyễn Việt Hồng, quận Ninh Kiều, TP. Cần Thơ.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/450. Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Cho $C_3 = 2C_1 = 2C_2 = 2C$. Ban đầu các khoá K ngắt, các tụ điện chưa tích điện. Đóng K. Sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ngắt K và đóng K_1 . Sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ngắt K_1 và đóng K_2 .



1. Tìm điện tích các tụ điện sau khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập.

2. Tìm nhiệt lượng tổng cộng đã tỏa ra trong các quá trình đó.

Lời giải

• K đóng, K_1 và K_2 mở: Các tụ C_1 và C_2 được tích điện, tụ C_3 chưa tích điện.

Ta có: $q_1 = q_2 = \frac{CE}{2}$

Nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình này là:

$$Q_1 = A - W = q_1 E - \frac{1}{2} \frac{C}{2} E^2 = \frac{CE^2}{4}.$$

• Ngắt K, đóng K_1 : Tụ C_2 giữ nguyên điện tích. Tụ C_1 trao đổi điện tích với tụ C_3 . Gọi q'_1 và q'_3 là điện tích trên các tụ C_1 và C_3 khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ta có:

$$q'_1 + q'_3 = q_1 \quad (1) \quad \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_3}{C_3} \quad (2).$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: $q'_1 = \frac{CE}{6}; q'_3 = \frac{CE}{3}.$

Nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình này là:

$$Q_2 = \frac{q_1^2}{2C_1} - \left(\frac{q'^2_1}{2C_1} + \frac{q'^2_3}{2C_3} \right) = \frac{CE^2}{12}.$$

• Ngắt K_1 , đóng K_2 : Tụ C_1 giữ nguyên điện tích. Tụ C_2 trao đổi điện tích với tụ C_3 . Gọi q'_2 và q''_3 là điện tích trên các tụ C_2 và C_3 khi cân bằng tĩnh điện được thiết lập, ta có:

$$q'_2 + q''_3 = q_2 - q'_3 \quad (3) \quad \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q''_3}{C_3} \quad (4).$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$q'_2 = \frac{CE}{18}; q''_3 = \frac{CE}{9}.$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta tìm được nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình này:

$$Q_3 = \frac{4CE^2}{27}.$$

Tổng nhiệt lượng tỏa ra trong mạch là:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{13CE^2}{27}. \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Bình Định:** Trần Lê Huỳnh Đức, 10 Lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang:** Đặng Thành Nguyên, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN XUÂN QUANG

DIỄN ĐÀN**DAY
HOC
TOÁN****LÀM THẾ NÀO****ĐỂ HỌC SINH LỚP 12 ÔN TẬP MÔN
TOÁN HIỆU QUẢ****NGUYỄN QUANG THI**

(GV Trường THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Kỳ thi THPT Quốc gia đang đến gần, các trường THPT trên cả nước đang tiến hành ôn tập cho học sinh (HS) khối lớp 12. Chúng ta biết rằng, môn toán là môn bắt buộc để công nhận tốt nghiệp và xét tuyển sinh đại học. Do tính chất của kỳ thi nên nhiều giáo viên trăn trở làm thế nào để ôn luyện môn toán có hiệu quả, trong khi một lớp học (trừ lớp chuyên, lớp chọn) luôn có HS khá, giỏi, trung bình và yếu. Giáo viên ôn tập như thế nào mà HS khá giỏi không bị nhàm chán nhưng HS trung bình và yếu vẫn theo được. Theo chúng tôi, để HS ôn tập môn toán có hiệu quả thì cần có kế hoạch của nhà trường, khả năng ôn luyện của giáo viên và sự nỗ lực phấn đấu của HS.

I. ĐỐI VỚI NHÀ TRƯỜNG

Với phương châm HS khá giỏi thì một bài toán ta giải nhiều cách trong khi HS trung bình và yếu thì một cách giải được nhiều bài. Do đó, trong quá trình ôn tập nhà trường cần chia lớp học theo trình độ của HS.

- **Lớp khá giỏi:** Đây là những HS tinh tú của nhà trường nên yêu cầu đặt ra là xét tuyển vào các trường đại học top đầu và tốt giữa. Ngoài kiến thức hiện hành của lớp 12 giáo viên bổ trợ thêm kiến thức lớp 10 và lớp 11. Chương trình lớp 10 giáo viên rèn luyện chuyên đề về phương trình đường thẳng, đường tròn, elip. Chuyên đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và bất đẳng thức. Những HS thật sự xuất sắc mới ôn luyện mảng bất đẳng thức vì bất đẳng thức rất khó và chỉ chiếm một điểm. Chương trình lớp 11 giáo viên rèn luyện chuyên đề phương trình lượng giác, chuyên đề tổ hợp, nhị thức Newton, xác suất và chuyên đề khoảng cách, góc.

- **Lớp trung bình và yếu:** Đây là những HS nhà

trường cần quan tâm nên yêu cầu đặt ra là xét tuyển vào các trường Đại học top dưới, Cao đẳng và công nhận tốt nghiệp. Ngoài kiến thức hiện hành của lớp 12 giáo viên bổ trợ thêm kiến thức lớp 11 với các chuyên đề phương trình lượng giác, chuyên đề tổ hợp, nhị thức Newton, xác suất và chuyên đề khoảng cách, góc.

- **Phân công giáo viên ôn tập:** Nhà trường nên phân công giáo viên dạy theo từng chuyên đề để có cơ hội đào sâu kiến thức cho HS.

II. ĐỐI VỚI HỌC SINH

Là một giáo viên nhiều năm đứng trên bục giảng, tôi cho rằng mọi HS lớp 12 muốn ôn tập môn toán có hiệu quả thì cần đảm bảo các điều sau:

- **Biết hệ thống hoá (tổng kết) các kiến thức** đã học qua từng chuyên đề nhằm xem kiến thức nào là quan trọng cần ghi nhớ và biết vận dụng kiến thức vào giải toán. Ví dụ khi ôn tập chuyên đề hàm số HS cần nắm vững đường lối khảo sát và vẽ đồ thị ba hàm số, các bài toán liên quan đến khảo sát và biết cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

- **Biết phân tích và nhận xét các bài toán** trong từng chuyên đề. Mục đích là lập luận chặt chẽ và chính xác, biết đưa các bài toán giống nhau về một dạng để nắm lấy phương pháp giải tổng quát và biết tìm tòi lời giải tối ưu cho các bài toán khó. Ví dụ muốn xác định khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau a và b (a, b không vuông góc với nhau) thì HS chọn mặt phẳng (P) chứa b và song song với a . Khi đó, khoảng cách giữa a và b chính là khoảng cách giữa a và mặt phẳng (P) .

- **Kiên trì và chịu khó giải bài tập** trong từng chuyên đề của giáo viên biên soạn. Mục đích nhằm tìm ra một phương pháp tối ưu cho mỗi

bài toán. Ví dụ câu hệ phương trình trong đề thi tuyển sinh đại học những năm gần đây nếu HS chịu khó đầu tư suy nghĩ thì dùng kỹ thuật biến đổi và dùng tính chất hàm số sẽ giải được.

- HS phải thể hiện sự ham thích, say mê học toán. Mục đích tự tìm tòi các bài toán ngoài sách giáo khoa nhưng nó liên quan đến kiến thức đã học để tự giải, củng cố kiến thức và nâng cao năng lực giải toán.

Thiết nghĩ rằng một giáo viên thành công trong việc ôn tập cho HS là thực hiện đầy đủ các quy trình sau:

- * **Chuẩn bị bài trước khi lên lớp:** Đầu tư nghiên cứu, lựa chọn bài tập phù hợp với từng đối tượng HS qua mỗi chuyên đề. Xác định nội dung trọng tâm cần ôn tập của mỗi chuyên đề và chọn phương pháp dạy học phù hợp từng đối tượng HS. Ví dụ khi ôn tập *chuyên đề phương trình lượng giác* giáo viên cần khắc sâu dạng *phương trình tích, phương trình chứa ẩn ở mẫu*. Khi dạy *chuyên đề tích phân*, nội dung cần truyền đạt cho HS là tính tích phân và tính diện tích hình phẳng.

III. ĐỐI VỚI GIÁO VIÊN

- * **Quá trình lên lớp:**

- Phân phối thời gian hợp lý cho các khâu đó là kiểm tra bài cũ, truyền thụ kiến thức mới, luyện tập củng cố và hướng dẫn về nhà. Không được bỏ qua hoặc thực hiện qua loa một bước nào bởi mỗi bước có tầm quan trọng của nó.

- Giáo viên phải kiên trì không được nôn nóng trong việc rèn luyện ý thức và ý chí học tập cho HS để HS nhận thức học tập là cần thiết cho cuộc sống. Giáo viên hình thành động cơ học tập cho HS vì động cơ học tập không thể áp đặt từ bên ngoài mà có sự hướng dẫn của giáo viên để HS phấn đấu vươn lên trong học tập nhằm hình thành thói quen tốt, xoá bỏ thói quen xấu. Xây dựng uy tín của giáo viên dựa trên sự bồi dưỡng năng lực chuyên môn và phẩm chất nghề nghiệp để tạo niềm tin cho HS trong quá trình ôn tập.

- Cung cấp một số năng lực giải toán cho HS đó là: Năng lực suy luận chính xác, lập luận chặt chẽ các bước trong lời giải, trình bày lời giải rõ ràng. Năng lực toán học hoá tình huống và vận dụng các kiến thức đã học vào thực tiễn. Khả năng vận dụng kiến thức và phương pháp giải toán vào một số môn học khác có liên quan (Vật lý, Hoá học, Sinh học,...). Năng lực khái quát toán học: Hình thành phương pháp thông qua hoạt động giải bài tập. Biết phân loại các dạng toán để lấy phương pháp giải chung. Biết tổng quát bài toán thông qua bài toán cụ thể.

- Xây dựng tiết dạy luyện tập vì mục đích cuối cùng của HS lớp 12 khi ôn tập là giải được toán. Do đó, giáo viên hướng dẫn cách trình bày lời giải bài toán nhằm tránh sai lầm cho HS. Xây dựng các bài toán theo mức độ nâng cao dần trên cơ sở các bài toán trong sách giáo khoa, nhóm bài tập thể hiện qua bài soạn của giáo viên. Giúp HS tìm tòi lời giải, chủ động suy nghĩ nhiều hơn, làm nhiều hơn và tham gia giải bài tập nhiều hơn. Rút ra những thuật toán tự tạo và định hướng giải cho mỗi loại toán. Đặc biệt mỗi bài toán người ra đề mang dụng ý để cho mọi người hiểu rằng: Mỗi từ, mỗi chữ mang một dụng ý nào đó mà ta phải lột tả. Dân gian nói về “ Ông Ma Kẹ ” (Ma Kẹ là truyền thuyết họ đeo xung quanh mình áo tơ, áo rách để hù dọa). Vậy người ra đề bao quanh bài toán với những thứ hù dọa, nên mình phải tìm cách lột tả nó ra.

- Hướng dẫn về nhà: Bài tập về nhà phải phù hợp và vừa sức với trình độ HS, Giáo viên hướng dẫn và giúp HS nhận dạng bài tập và phương pháp giải. Chuẩn bị bài mới là có câu hỏi cụ thể và hướng dẫn HS cách thực hiện.

- * **Phối hợp với giáo viên chủ nhiệm và phụ huynh:** Trong quá trình ôn tập cần phối hợp với giáo viên chủ nhiệm và phụ huynh để duy trì sĩ số, nhắc nhở những HS còn chệnh mảng trong học tập, tìm hiểu hoàn cảnh khó khăn của HS để kịp thời động viên và giúp đỡ. Phân công những em khá giỏi giúp đỡ những HS yếu kém.

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG
PHÁP
GIẢI
TOÁN



GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

NHỜ ĐẾM SỐ LẦN XUẤT HIỆN CỦA
MỖI PHẦN TỬ TRONG TẬP HỢP

ĐỖ VĂN ĐỨC

(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài toán tổ hợp là bài toán khó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi HSG Quốc gia, Quốc tế... Có rất nhiều phương pháp để giải quyết các loại toán dạng này như dùng công thức truy hồi, số phức, đa thức, công thức đếm số phần tử của hợp các tập hợp,... Qua bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu tới các bạn đọc một phương pháp khả thủ vị là đếm số lần xuất hiện của mỗi phần tử trong tập hợp thông qua một số thí dụ sau đây

Thí dụ 1. (Đề thi HSG Ba Lan) Cho tập hợp M có n phần tử, với hai tập con tùy ý A, B của M . Tính số phần tử $A \cap B$. Chứng minh rằng tổng tất cả các số phần tử của mọi giao có thể gồm hai tập con của M là $n \cdot 4^{n-1}$.

Lời giải. Với mỗi phần tử $a \in M$, có $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ tập con A của M có chứa phần tử a . Suy ra có $(2^{n-1})^2 = 4^{n-1}$ cặp hai tập con của M có chứa phần tử a thuộc giao của hai tập hợp đó. Vậy mỗi phần tử $a \in M$ nó được đếm 4^{n-1} lần nên $\sum_{A, B \subset M} |A \cap B| = n \cdot 4^{n-1}$.

Theo cách giải trên có thể giải bài toán tổng quát sau

Thí dụ 2. Cho M là tập hợp có n phần tử, E là tập hợp tất cả các bộ (có thứ tự) $(A_1; A_2; \dots; A_k)$ trong đó $A_i \subset M$, $k \geq 2$ là số tự nhiên đã cho.

Chứng minh rằng: $\sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in E} \left| \bigcap_{i=1}^k A_i \right| = n \cdot 2^{(n-1)k}$.

Thí dụ 3. (Đề thi HSG Tiệp Khắc) Hãy tìm số các cặp khác nhau của các cặp tập hợp con không giao nhau thuộc tập hợp n phần tử.

Lời giải. Với mỗi số tự nhiên t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) ta tìm số cặp $(A_i; A_j)$ mà $A_i \cap A_j = \emptyset$ và $|A_i| + |A_j| = t$. Gọi A là tập hợp n phần tử, mỗi cách chọn ra t phần tử có C_t^n cách chọn ra từ đây k phần tử để làm tập A_i và có $(t - k)$ phần

tử còn lại làm tập A_j nên số bộ $(A_i; A_j)$ là $\sum_{k=0}^t \frac{C_t^n}{2} = 2^{t-1}$, do có một cặp $(\emptyset; \emptyset)$ nên số cặp cần tìm là:

$$\sum_{t=1}^n C_t^n \cdot 2^{t-1} + 1 = \frac{1}{2} \left[\sum_{t=0}^n C_t^n \cdot 2^t - 1 \right] + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Thí dụ 4. (Thi Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương lần 10 - 1997). Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ $(A_1; A_2; \dots; A_k)$ trong đó A_i là một tập con của $(1; 2; \dots; 1998)$ ($i = 1, 2, \dots, k$ và $k \in \mathbb{N}$). Hãy tính: $S = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$.

Lời giải. Đặt $n = 1998$, gọi $S_k(i)$ là số bộ

$(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F$ mà $i \in \bigcup_{j=1}^k A_j$ ($1 \leq i \leq n$). Do có

2^n tập con của tập $A = (1; 2; \dots; n)$ và có 2^{n-1} tập con của $A \setminus \{i\}$ nên $S_k(i) = 2^{nk} - 2^{(n-1)k}$
 $= 2^{(n-1)k} (2^k - 1) \Rightarrow S = n(2^k - 1) \cdot 2^{(n-1)k}$.

Theo cách giải trên ta có thể đưa ra một số bài toán sau

Thí dụ 5. Cho số tự nhiên k, n . Gọi $A = (1; 2; \dots; n)$, $A_i \subset A$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Gọi F là tập hợp các bộ có thứ tự $(A_1; A_2; \dots; A_k)$ và E là tập hợp các bộ không kể thứ tự $(A_1; A_2; \dots; A_k)$. Hãy tính:

$$1) S_1 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|.$$

$$2) S_2 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F} \sum_{m \in \bigcup_{i=1}^k A_i} m. \quad 3) S_3 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F} \sum_{i=1}^k \sum_{m \in A_i} m.$$

$$4) S_4 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in E} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|.$$

$$5) S_5 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in E} \sum_{m \in \bigcup_{i=1}^k A_i} m.$$

$$6) S_6 = \sum_{(A_1; A_2; \dots; A_k) \in E} \sum_{i=1}^k \sum_{m \in A_i} m.$$

Lời giải. 1) $S_1 = n(2^k - 1) \cdot 2^{(n-1)k}$ (theo thí dụ 4).

$$2) S_2 = \sum_{i=1}^n i S_k(i) = \sum_{i=1}^n i(2^k - 1) 2^{(n-1)k} \\ = \frac{n(n+1)}{2} (2^k - 1) 2^{(n-1)k}.$$

3) Để tính S_3 thì với mỗi $j \in \mathbb{N}$ ($1 \leq j \leq k$), ta tìm số bộ $(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F$ mà mỗi $a \in A$, a thuộc đúng j tập con của bộ. Do có 2^{n-1} tập con của $A \setminus \{a\}$ nên có tất cả $2^{(n-1)k}$ bộ

$(A_1; A_2; \dots; A_k) \in F$ mà $a \notin \bigcup_{i=1}^k A_i$. Mỗi bộ như

vậy ta có C_k^j cách chọn ra j tập. Để mỗi tập ta đưa thêm vào phần tử i nên có $2^{(n-1)k} \cdot C_k^j$ bộ thuộc F có đúng j tập chứa a . Suy ra:

$$S_3 = \sum_{a=1}^n \sum_{j=1}^k j a (2^{(n-1)k} \cdot C_k^j) = \sum_{a=1}^n a \cdot 2^{(n-1)k} \sum_{j=1}^k j C_k^j \\ = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{(n-1)k} \sum_{j=1}^k k C_{k-1}^{j-1} \\ = \frac{n(n+1)}{2} 2^{(n-1)k} k \cdot 2^{k-1} = n(n+1)k \cdot 2^{nk-2}$$

Các ý còn lại coi như bài tập bạn đọc tự giải.

Thí dụ 6. (Đề thi Olympic Tây Ban Nha) Xét các tập hợp A thỏa mãn: A gồm 100 số tự nhiên phân biệt sao cho a, b, c là các phần tử của A (có thể phân biệt hoặc không) thì tồn tại tam giác cạnh a, b, c mà không có góc tù. Gọi $S(A)$ là tổng các chu vi của tam giác được xét khi xác định tập A . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S(A)$.

Lời giải. Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$. Xét tam giác có 3 cạnh là a_1, a_1, a_{100} ta có: $\begin{cases} 2a_1 > a_{100} \\ a_1^2 + a_1^2 \geq a_{100}^2 \end{cases} \Rightarrow 2a_1^2 \geq a_{100}^2 \geq (a_1 + 99)^2 \Rightarrow a_1 \geq (1 + \sqrt{2}) \cdot 99$. Do a nguyên nên $a_1 \geq 240$. Với mỗi $a_i \in A$ nó là cạnh của một tam giác đều có ba cạnh $a_i, 99$ tam giác cân mà hai cạnh bên là $a_i, 99$ tam giác cân mà a_i là cạnh đáy, C_{99}^2 là tam giác thường mà a_i là một cạnh. Vậy

$$S(A) = (3 + 2 \cdot 99 + 99 + C_{99}^2) \sum_{i=1}^{100} a_i \\ \geq (3 + 297 + C_{99}^2) \sum_{i=1}^{100} (a_i + i - 1)$$

$$\geq (300 + C_{99}^2) \sum_{i=1}^{100} (240 + i - 1) = 149121450.$$

Có đẳng thức $\Leftrightarrow a_i = 239 + i$.

Thí dụ 7. (Vô địch Moskva 1985). Cho 1985 tập hợp, mỗi tập hợp trong đó gồm 45 phần tử, hợp của hai tập hợp bất kì là 89 phần tử. Có bao nhiêu phần tử chứa trong 1985 tập hợp đó.

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài sau:

Thí dụ 8. Cho các số nguyên dương k, n thỏa mãn: $n > k^2 - k + 1$, giả sử n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

a) $|A_i| = k$ ($1 \leq i \leq n$).

b) $|A_i \cup A_j| = 2k - 1$ ($\forall i \neq j$).

Xác định số phần tử của $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Lời giải. $|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$

$\Leftrightarrow |A_i \cap A_j| = 1$ ($\forall i \neq j$). Xét tập A_1 suy ra

$|A_1 \cap A_j| = 1$ ($\forall j = 2, 3, \dots, n$). Gọi x là phần tử

bất kì của A_1 . Khi đó: $\begin{cases} x \notin A_j & (\forall j = 2, 3, \dots, n) \\ x \in B_j & (1 \leq j \leq t \leq n-1) \end{cases}$

trong đó $B_j \in \{A_2, A_3, \dots, A_n\}$.

a) Nếu $t = n - 1 \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n(k - 1) + 1$.

b) Nếu $2 \leq t \leq n - 2 \Rightarrow \exists A_2$ sao cho $x \notin A_2$. Khi đó: $B_i \cap A_2 \neq B_j \cap A_2$ ($\forall i \neq j$) vì nếu

$$y \in B_i \cap A_2 = B_j \cap A_2 \quad (\forall i \neq j)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in B_i, y \in B_j \\ y \in A_2 \Rightarrow y \neq x \end{cases} \Rightarrow y \in B_i \cap B_j.$$

Suy ra x, y thuộc $B_i \cap B_j$ (mâu thuẫn). Vậy A_2 chứa t phần tử phân biệt của $B_1, B_2, \dots, B_t$ và phần tử x . Vậy: $|A_2| \geq t + 1 \Leftrightarrow k \geq t + 1 \Leftrightarrow t \leq k - 1$.

c) Nếu $t = 1$, phần tử x của A_1 là phần tử chung của A_1 và đúng một tập khác A_1 .

Vậy mỗi phần tử của A_1 có chung với các tập A_j ($j \neq 1$) nhiều nhất $k - 1$ phần tử với $k \geq 2$.

Suy ra số tập hợp nhỏ hơn

$$k(k - 1) < k(k - 1) + 1 < n \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

$$\text{Vậy } t = n - 1 \Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n(k - 1) + 1 (*).$$

Chú ý rằng với $k = 1$ kiểm tra trực tiếp ta thấy (*) đúng.

Thí dụ 9. (Đề thi của Áo – Ba Lan năm 1979). Cho số tự nhiên k, n thỏa mãn $k^2 \leq n-2$. Cho n tập hợp, mỗi tập hợp có k phần tử. Biết rằng hai tập hợp bất kì có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử chung cho n tập hợp trên.

Lời giải. Theo giả thiết $k^2 + 2 \leq n$. Do $k^2 + 2 > k^2 - k + 1$, suy ra $k^2 - k + 1 < n$ (thỏa mãn điều kiện thí dụ 8) nên theo chứng minh thí dụ 8 thì n tập hợp này có đúng một phần tử chung.

Chú ý: Điều kiện $k^2 - k + 1 < n$ là tối ưu nhất vì $k = 2$ và $n = 3$ thì $k^2 - k + 1 = n$ bài toán trên không đúng. Chọn $A_1 = \{a; b\}$, $A_2 = \{c; b\}$, $A_3 = \{a; c\}$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Khi đó $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \neq n(k-1) + 1$.

Thí dụ 10. (Phần Lan 1982) Tìm tổng S tất cả các số tự nhiên mà trong cách viết thập phân của mỗi số đó các chữ số tạo thành dãy tăng hoặc giảm.

Để giải thí dụ này ta có sử dụng tính tổng

$$S = \sum_{k=1}^9 ka^k = \frac{a-a^{10}}{(1-a)^2} - \frac{9a^{10}}{1-a} \quad (a \neq 1).$$

Lời giải. Ta tách bài toán ra hai bài toán sau :

Bài toán 1. Tìm tổng S_1 tất cả các số tự nhiên mà trong cách viết thập phân của mỗi số đó các chữ số tạo thành dãy tăng.

Lời giải. Gọi A là tập hợp tất cả các số của bài toán. Xét $a = a_p a_{p-1} \dots a_1 \in A$ ($a_p < a_{p-1} < \dots < a_1$). Với mỗi số k, j đã định, $k, j \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, ta tìm số các số $a \in A$ mà $a_j = k$. Do sau k có $9-k$ số lớn hơn k và trước k có $k-1$ số tự nhiên khác 0 bé hơn k nên số các số a là

$$S(k; j) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i C_{9-k}^{j-1} = 2^{k-1} C_{9-k}^{j-1}. \text{ Suy ra:}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^9 \sum_{j=1}^{10-k} S(k; j) k \cdot 10^{j-1} = \sum_{k=1}^9 \sum_{j=1}^{10-k} 2^{k-1} C_{9-k}^{j-1} k \cdot 10^{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^9 k 2^{k-1} \sum_{j=1}^{10-k} C_{9-k}^{j-1} 10^{j-1} = \sum_{k=1}^9 k 2^{k-1} 11^{9-k} \\ &= \frac{11^9}{2} \sum_{k=1}^9 k \left(\frac{2}{11} \right)^k = \frac{11^{10} - 46 \cdot 2^{10}}{81}. \end{aligned}$$

Bài toán 2. Tìm tổng S_2 tất cả các số tự nhiên mà trong cách viết thập phân của mỗi số đó các chữ số tạo thành dãy giảm.

Lời giải. Gọi B là tập hợp tất cả các số của bài toán. Xét $b = \overline{b_p b_{p-1} \dots b_1} \in B$ ($b_p > b_{p-1} > \dots > b_1$). Với mỗi số k, j đã định, $k, j \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, ta tìm số các số $b \in B$ mà $b_j = k$. Do sau k có $9-k$ số lớn hơn k và trước k có $k-1$ số tự nhiên khác 0 bé hơn k nên số các số a là

$$\begin{aligned} S(k; j) &= \sum_{i=0}^{9-k} C_{9-k}^i C_k^{j-1} = 2^{9-k} C_k^{j-1}. \text{ Suy ra:} \\ S_2 &= \sum_{k=1}^9 \sum_{j=1}^{k-1} 2^{9-k} C_k^{j-1} k \cdot 10^{j-1} = \sum_{k=1}^9 k \cdot 2^{9-k} 11^k \\ &= 2^9 \sum_{k=1}^9 k \left(\frac{11}{2} \right)^k = \frac{79 \cdot 11^{10} + 11 \cdot 2^{10}}{81}. \end{aligned}$$

Từ bài toán 1 và bài toán 2 ta có :

$$S = S_1 + S_2 - 45 = \frac{80 \cdot 11^{10} - 35 \cdot 2^{10}}{81} - 45.$$

Thí dụ 11. Cho các số tự nhiên q, n, k . Xét bộ các số nguyên $c = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sao cho $q+1 \leq \alpha_i \leq q+n$. Gọi $m(c) = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$,

$$M(c) = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}, T(c) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k}.$$

Tìm:

- S_1 bằng tổng tất cả các $m(c)$ lấy theo mọi bộ c .
- S_2 bằng tổng tất cả các $M(c)$ lấy theo mọi bộ c .
- S_3 bằng tổng tất cả các $T(c)$ lấy theo mọi bộ c .

Lời giải. a) Với mỗi số tự nhiên j ($1 \leq j \leq n$). Số bộ c mà α_i nhận giá trị từ $q+j$ đến $q+n$ là $(n+1-j)^k$ trong đó số bộ c mà α_i nhận giá trị từ $q+j+1$ đến $q+n$ là $(n-j)^k$. Vậy số bộ c có $m(c) = q+j$ là $(n+1-j)^k - (n-j)^k$. Suy ra :

$$S_1 = \sum_{j=1}^n (q+j) [(n+1-j)^k - (n-j)^k] = q \cdot n^k + \sum_{i=1}^n i^k.$$

b) Tương tự số bộ c có $M(c) = q+j$ là $j^k - (j-1)^k$. Suy ra :

$$S_2 = \sum_{j=1}^n (q+j) [j^k - (j-1)^k] = (q+n) \cdot n^k - \sum_{i=1}^n i^k.$$

c) **Cách 1.** Với mỗi số $\alpha \in \{q+1; q+2; \dots; q+n\}$ và α có mặt đúng t lần trong bộ $c = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ($1 \leq t \leq k$). Do có C_k^t cách đặt vào t trong k vị trí cùng một giá trị α và còn

$k-t$ vị trí để đặt $n-1$ số còn lại khác α , nên số lần α xuất hiện trong tổng S_3 là:

$$A = \sum_{t=1}^k C_k^t (n-1)^{k-t} t = (n-1)^k \sum_{t=1}^k t \left(\frac{1}{n-1} \right)^t C_k^t.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S_3 &= A \sum_{\alpha=q+1}^{q+n} \left(\frac{\alpha}{k} \right) = \frac{n(2q+n+1)A}{2k} \\ &= \frac{n(2q+1+n)(n-1)^k}{2k} \sum_{t=1}^k t \left(\frac{1}{n-1} \right)^t C_k^t \\ &= \frac{n(2q+1+n)(n-1)^k}{2k} \sum_{t=1}^k k \left(\frac{1}{n-1} \right)^t C_{k-1}^{t-1} \\ &= \frac{n \cdot k \cdot (2q+1+n)(n-1)^k}{2k(n-1)} \sum_{t=1}^k \left(\frac{1}{n-1} \right)^{t-1} C_{k-1}^{t-1} \\ &= \frac{n \cdot k \cdot (2q+1+n)(n-1)^k}{2k(n-1)} \left(\frac{1}{n-1} + 1 \right)^{k-1} \\ &= \frac{n^k(n+2q+1)}{2}. \end{aligned}$$

Cách 2. Do có n^k bộ c , mỗi bộ k phần tử mà mỗi phần tử $\alpha \in \{q+1; q+2; \dots; q+n\}$ có vai trò như nhau nên mỗi số α này được tính trong tổng S_3 là $\frac{kn^k}{n}$ lần. Do đó:

$$S_3 = \frac{kn^k}{n} \sum_{\alpha=q+1}^{q+n} \alpha = \frac{n^k(n+2q+1)}{2}.$$

Thí dụ 12. (Đề thi Bungari 1982). Chứng minh rằng với các số tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; 2]$ ($n \geq 2$)

ta có bất đẳng thức $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2$ (1)

Hãy xác định với giá trị nào của $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì xảy ra đẳng thức?

Lời giải. Ta sử dụng phương pháp đếm số lần xuất hiện của mỗi phần tử trong bất đẳng thức (1) để chứng minh bất đẳng thức này.

Không giảm tổng quát, ta giả sử

$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 2$. Khi đó:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = 2 \sum_{i=1}^n (2i-n-1)a_i.$$

Do mỗi số a_i sẽ có trong tổng trên là:

- Có trong $|a_i - a_j| = a_i - a_j$ ($j=1, 2, \dots, i-1$) là $i-1$ số a_j ; có trong $|a_i - a_j| = a_j - a_i$ ($j=i+1, i+2, \dots, n$) là

$n-i$ số $(-a_i)$. Suy ra số các số a_i có trong tổng trên là $(i-1) - (n-i) = 2i-n-1$. Với $2i-n-1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow i \leq \frac{n+1}{2}; 2i-n-1 \geq 0 \Leftrightarrow i \geq \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = 2 \sum_{i=1}^n (2i-n-1)a_i$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} (2i-n-1)a_i + 2 \sum_{i=1+\left[\frac{n+1}{2} \right]}^n (2i-n-1)a_i \\ &\leq 0 + 2 \sum_{i=1+\left[\frac{n+1}{2} \right]}^n (2i-n-1)2. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } n \text{ chẵn thì } 2 \sum_{i=1+\left[\frac{n+1}{2} \right]}^n (2i-n-1)2 = n^2.$$

$$\text{Nếu } n \text{ lẻ thì } 2 \sum_{i=1+\left[\frac{n+1}{2} \right]}^n (2i-n-1)2 = n^2 - 1.$$

Do đó: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2$. Đẳng thức xảy ra khi n

chẵn và $\frac{n}{2}$ số bằng 2, $\frac{n}{2}$ số bằng 0.

BÀI TẬP

1. Xét bất phương trình $a^3|x| \leq \sqrt{3}(a^2 - y^2)(1)$. Ta xét tất cả các giá trị của a để (1) có hữu hạn các cặp (x, y) với $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (1). Với mỗi a như thế gọi $N(a)$ là số các cặp khác nhau như vậy với mỗi $k \in \mathbb{N}$. Hãy tìm tất cả các giá trị a để $N(a) = k$.

2. Tìm số các cặp khác nhau gồm ba tập con đôi một rời nhau của tập n phần tử.

3. Gọi E là tập các cặp $(A; B)$ trong đó A, B rời nhau là các tập con của tập n phần tử. Tìm

$$S = \sum_{(A, B) \in E} |A \cup B|.$$

4. Chứng minh với $2n$ số tùy ý $x_{1i} \in [1; 2], x_{2i} \in [3; 4]$

$$\text{thì } \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |x_{kj} - x_{pi}| \leq 6n^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

5. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Xét họ H tất cả các tập hợp con A của X có tính chất mọi phần tử của A đều chia hết cho phần tử nhỏ nhất của A . Hỏi có bao nhiêu tập hợp con A như vậy?

6. Cho $A = \{a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \mid 1 \leq a_1 < a_2, a_2 > a_3 > a_4 \geq 0\}$

Hãy tìm: a) $S_i = \sum_{a \in A} a_i$ ($i=1, 2, 3, 4$). b) $S = \sum_{a \in A} a$.



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 454 (4.2015)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: 04.35121606

Email: toanhocuoivietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẢI, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Phan Đình Ảnh – Bài toán tính tổng quen thuộc và ứng dụng.

3 Hướng dẫn giải Đề thi chọn Học sinh giỏi môn Toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015.

4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Bắc Ninh, năm học 2014 – 2015.

5 Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Nguyễn Ngọc Duyệt – Phạm Bình Nguyên
Bình luận về cách nhân lượng liên hợp trong đề thi đại học các năm gần đây.

9 Hướng dẫn giải - Đề số 6.

11 Thử sức trước kì thi - Đề số 7.

12 Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Ngọc Giang – Định lý Ấu trùng bướm.

16 Đề ra kì này

Problems in This Issue

T1/454, ..., T12/454, L1/454, L2/454.

18 Giải bài kì trước

Solutions to Previous Problems

26 Diễn đàn dạy học toán

Nguyễn Quang Thi – Làm thế nào để học sinh lớp 12 ôn tập môn toán hiệu quả?

28 Diễn đàn phương pháp giải toán

Đỗ Văn Đức – Giải các bài toán tổ hợp nhờ đếm số lần xuất hiện của mỗi phần tử trong tập hợp.

Ảnh Bìa 1: Lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2014.

Từ trái qua phải: GS.TS Nguyễn Hữu Dư, em Trần Hồng Quân, em Nguyễn Thế Hoàn, GS.TSKH Lê Tuấn Hoa, em Vương Nguyễn Thùy Dương, GS.TSKH Phạm Thế Long, Cô giáo Nguyễn Ngọc Xuân, GS.TSKH Đỗ Long Vân, GS.TSKH Hà Huy Khoái.

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

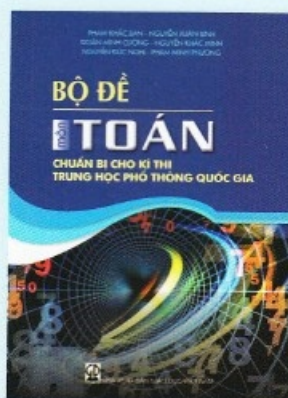
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc bộ sách

BỘ ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

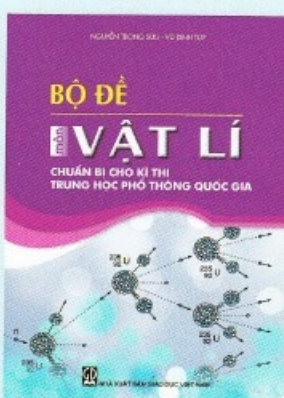
Để giúp các em học sinh Trung học phổ thông, đặc biệt là học sinh lớp 12, ôn tập và thi đạt kết quả tốt trong kì thi Trung học phổ thông quốc gia năm học 2014 - 2015, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn, xuất bản bộ sách

BỘ ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

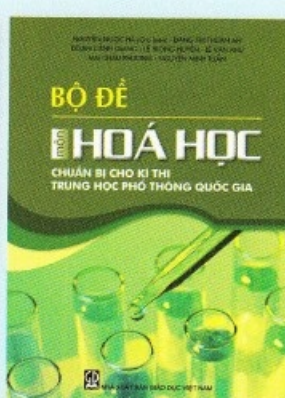
Bộ sách tập trung biên soạn, lựa chọn những câu hỏi, bài tập điển hình, tiêu biểu theo hướng đổi mới kiểm tra, đánh giá và thi tốt nghiệp Trung học phổ thông quốc gia do Bộ Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo. (Sách khổ 19 x 27cm)



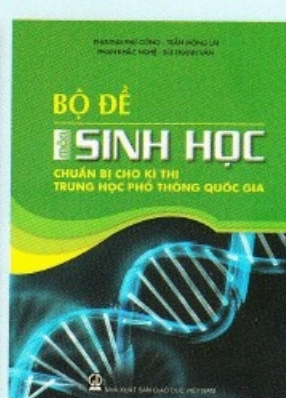
224 trang. Giá: 70.000đ



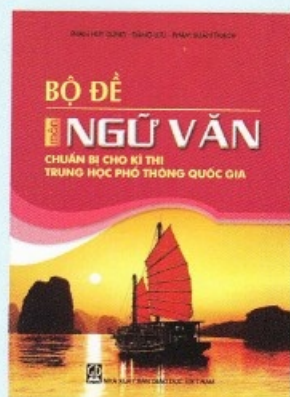
248 trang. Giá: 80.000đ



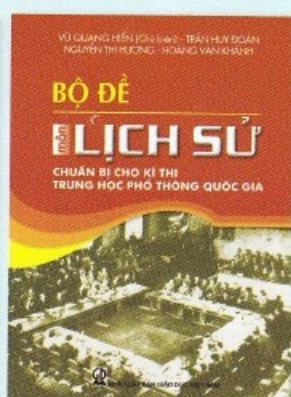
288 trang. Giá: 90.000đ



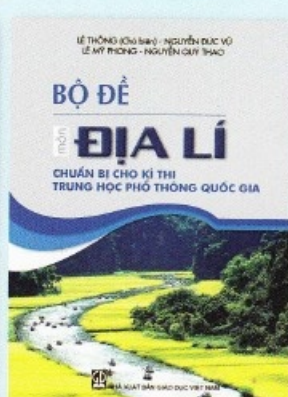
276 trang. Giá: 90.000đ



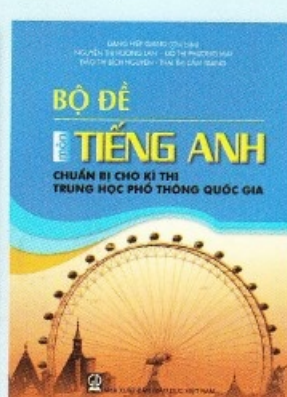
288 trang. Giá: 90.000đ



264 trang. Giá: 80.000đ



240 trang. Giá: 80.000đ



252 trang. Giá: 80.000đ

Thông tin liên hệ:

- Phòng Kinh doanh & Hợp tác xuất bản, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội
- Điện thoại: 043.6.210.196 ; 043.5.121.974 Fax: 043.5.121.973 Email: phathanh@xbgdhn.vn
- Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Q. Đống Đa, TP. Hà Nội

TRƯỜNG THPT KON TUM 40 NĂM HOẠT ĐỘNG VÀ TRƯỞNG THÀNH



ThS. Nguyễn Ngọc Duyệt
Bí thư Đảng bộ - Hiệu trưởng nhà trường



Tổ Toán Trường THPT Kon Tum

Trường THPT Kon Tum là ngôi trường giàu truyền thống của tỉnh Kon Tum, được thành lập sau ngày thống nhất đất nước và được vinh dự mang tên tỉnh Kon Tum. Tiền thân của trường là trường Cấp 3 Kon Tum, là trường cấp 3 duy nhất trên địa bàn tỉnh Kon Tum sau ngày giải phóng. Trải qua 40 năm hoạt động và phát triển, đến nay Trường THPT Kon Tum là trường trọng điểm của tỉnh Kon Tum, có uy tín với học sinh, phụ huynh và xã hội. Cơ sở vật chất của Trường khá đầy đủ với 42 phòng học, 3 phòng máy tính, 1 phòng Lab, 3 phòng bộ môn: Lý, Hóa, Sinh; cùng các thiết bị dạy học khác đảm bảo cho việc thực hiện đổi mới dạy học và học của Thầy và Trò. Trường hiện có 42 lớp học với 1531 học sinh, 100 giáo viên. Đội ngũ giáo viên của Trường ngày càng được nâng cao về chất lượng: Số giáo viên dạy giỏi cấp Tỉnh là 40, chiếm tỷ lệ: 40%; số giáo viên có trình độ Thạc sĩ là 14, tỷ lệ: 14%; số giáo viên THPT cao cấp là 11, tỷ lệ: 11%; Trường có 3 giáo viên đạt danh hiệu "Nhà giáo Ưu tú".

Hàng năm nhiều học sinh của Trường đạt giải cao trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp. Số học sinh giỏi bộ môn cấp Tỉnh hàng năm khoảng 55 em, đứng vị thứ 2 toàn tỉnh, chỉ sau Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành. Hàng năm Trường cũng luôn có học sinh đoạt giải cao trong kỳ thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, học sinh giỏi cấp Khu vực và học sinh của Trường cũng đoạt nhiều Huy chương Vàng Olympic 30/4. Trong 5 năm liền gần đây,

học sinh của Trường đỗ tốt nghiệp THPT là 100%; tỷ lệ đỗ Đại học nguyện vọng 1 là trên 80%. Đặc biệt năm 2013 và năm 2014 đều có học sinh đỗ thủ khoa khối C Đại học Đà Nẵng và nhiều học sinh có tổng điểm thi đại học đạt 27 điểm trở lên. Năm 2014, học sinh của Trường đoạt nhiều giải cao trong cuộc thi Vận dụng kiến thức liên môn để giải quyết các vấn đề thực tế và trong tháng 3 năm 2015 này, học sinh của Trường đã đoạt giải Ba toàn quốc trong cuộc thi về Khoa học kỹ thuật.

Đối với các hoạt động phong trào khác thì Trường luôn tham gia tích cực và đạt kết quả tốt: Đạt giải Nhất trong Hội khỏe Phù Đổng cấp Tỉnh; Luôn là đơn vị dẫn đầu trong các Hội diễn Văn nghệ, các cuộc thi TDTT và phong trào do các cấp tổ chức. Trường luôn đạt danh hiệu Xuất sắc về xây dựng phong trào trường học thân thiện học sinh tích cực. Trường THPT Kon Tum cũng là trường phổ thông duy nhất của tỉnh có Đảng bộ với 49 đảng viên, luôn đạt danh hiệu *Cơ sở Đảng trong sạch, vững mạnh* hàng năm, được Trung ương Đảng tặng *Bằng khen* về "Học tập và làm theo tấm gương đạo đức Hồ Chí Minh" theo chỉ thị 03 của Bộ Chính trị.

Tự hào về đội ngũ cán bộ, giáo viên đầy năng lực và nhiệt huyết, tự hào về những thành tích đã đạt được, Thầy và Trò trường THPT Kon Tum tiếp tục phấn đấu để đạt những thành tích tốt hơn nữa trong các năm học tới, xứng đáng với sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, xứng đáng với sự tin tưởng của nhân dân địa phương.