



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2015
Số 453

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Chào mừng ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3

<https://tieulun.hopto.org>



TÌM THỬ VỊ

TỪ BÀI TẬP TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Từ những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng với sự khéo léo, sáng tạo nhiều khi chúng ta sẽ giúp các em học sinh củng cố, ôn luyện, bồi dưỡng nâng cao kiến thức toán và khơi dậy tiềm năng tìm tòi sáng tạo trong học toán cho các em để các em tự tìm đến những điều lí thú và sâu sắc trong toán học. Chúng ta hãy cùng làm điều này từ một bài tập toán trong sách giáo khoa Toán 8.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

(Bài 58, trang 25, SGK Toán 8, tập một)

Lời giải.

Ta có $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$.

Vì $n, n+1, n-1$ là ba số nguyên liên tiếp với mọi n nên trong đó có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3. Mà $(2, 3) = 1$ nên $n(n+1)(n-1) \vdots 6$ với mọi số nguyên n .

Vậy $n^3 - n \vdots 6$ với mọi số nguyên n .

Ta cũng dễ nhận ra $n^3 - n + 6an^3 + 6bn \vdots 6$ với mọi số nguyên n, a, b . Điều đó giúp chúng ta có lời giải của bài toán sau:

Bài toán 1. a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta đều có $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm 1996)

b) Chứng minh rằng $17a^3 + a$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a .

c) Chứng minh rằng $31n^3 - 13n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Từ bài toán 2 ta cũng nhận thấy

$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \vdots 6$ với mọi số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Từ đó ta có lời giải của bài toán sau:

Bài toán 2. a) Cho ba số nguyên a, b, c . Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 8, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2011 - 2012).

b) Cho n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 6. Chứng tỏ rằng tổng $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ chia hết cho 6.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1990 - 1991).

c) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a - b + c = 2012$. Tìm dư của phép chia $a^3 - b^3 + c^3$ cho 6.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 8, trường THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 - 2013).

Hơn thế nữa, ta có bài toán:

Bài toán 3. a) Cho $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

$Q = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ ($a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên). Chứng minh rằng $P \vdots 6 \Leftrightarrow Q \vdots 6$.

b) Cho $A = x - y + z - t$, $B = x^3 - y^3 + z^3 - t^3$ (x, y, z, t là các số nguyên).

Chứng minh rằng $A \vdots 6 \Leftrightarrow B \vdots 6$.

c) Cho $M = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$,

$N = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3$ ($x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên). Chứng minh rằng $M \vdots 6 \Leftrightarrow N \vdots 6$.

Ta có $(2x+1)(x^3-x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x$.

Do đó với $x \in \mathbb{Z}$, giá trị của biểu thức

$\frac{12x+6}{2x^4+x^3-2x^2-x}$ là số nguyên khi và chỉ khi

$6 \vdots (x^3-x)$. Mà $(x^3-x) \vdots 6$. Do vậy $x^3-x = \pm 6$.

Chúng ta có bài toán mới:

Bài toán 4. Tìm các số nguyên x để giá trị của

biểu thức $M = \frac{12x+6}{2x^4+x^3-2x^2-x}$ là số nguyên.

Ở Bài toán 2, nếu n là số lẻ, ta có $n-1, n+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(n^3-n) \vdots 24$. Ta có lời giải cho bài toán sau:

(Xem tiếp trang 15)

Câu 1. Ta có:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow 2x+1 = \sqrt{2} \Rightarrow 4x^2+4x-1=0;$$

$$\sqrt{2x^2+2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}-2x=1.$$

Do đó $4x^5+4x^4-x^3+1 = x^3(4x^2+4x-1)+1=1$;
 $4x^5+4x^4-5x^3+5x+3 = x^3(4x^2+4x-1)-$
 $-x(4x^2+4x-1)+(4x^2+4x-1)+4=4$;
 $\frac{1-\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+2x}} = \frac{1-\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-2x=1.$

Vậy $A = 1^{19} + (\sqrt{4})^3 + 1^{2014} = 10.$

Câu 2. 1) Vì x, y nguyên nên ta có:

$$5x^2+2y^2 \leq 2xy+4x+2y \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (2x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2. \text{ Do đó}$$

$$(2x-1)^2 \leq 2, 2x-1 \text{ lẻ} \Rightarrow (2x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1. \text{ Với } x=0, \text{ từ } (*) \text{ có}$$

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow y=0 \text{ hoặc } y=1 \text{ (thỏa mãn); với}$$

$$x=1, \text{ từ } (*) \text{ có } 2(y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow y=1 \text{ (thỏa}$$

$$\text{mãn}).$$

Vậy $(x, y) \in \{(0; 0); (0; 1); (1; 1)\}.$

2) Ta có $(-9)(4x^3-y^3) =$
 $= (x+2y)(52x^2-82xy+21y^2)$

$$\Leftrightarrow 8x^3+2x^2y-13xy^2+3y^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(8x^2+10xy-3y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(4x-y)(2x+3y)=0.$$

Từ đó tìm được nghiệm $(x; y)$ của HPT là
 $(1; 1); (-1; -1).$

Câu 3. 1) Phương trình hoành độ giao điểm
 của (d) và (P) là: $2x^2+ax+a-2=0 \quad (*)$, có
 $\Delta=(a-4)^2$. Với $a \neq 4$ thì $(*)$ có hai nghiệm
 phân biệt $x_1=-1; x_2=\frac{2-a}{2}$ là hoành độ các

điểm A, B . Có thể giả sử $x_A=-1; x_B=\frac{2-a}{2}.$

Khi đó $A(-1; -2); B\left(\frac{2-a}{2}; \frac{(2-a)^2}{-2}\right).$

Ta có $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 = 5$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-a}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{(2-a)^2}{-2}+2\right)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow a^4-8a^3+17a^2-8a-4=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^3-6a^2+5a+2)=0.$$

Với $a^3-6a^2+5a+2=0 \Leftrightarrow a(a-1)(a-5)=-2$
 thì không tồn tại số nguyên a thỏa mãn.

Vậy $a=2$ là giá trị duy nhất cần tìm.

2) Sử dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{3}{2};$$

$$b + \frac{9}{4b} \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(b + \frac{9}{4b}\right) \geq \frac{3}{2};$$

$$c + \frac{4}{c} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(c + \frac{4}{c}\right) \geq 1.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta có:

$$\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{3}{4a} + \frac{9}{8b} + \frac{1}{c} \geq 4 \quad (1).$$

Từ $a+2b+3c \geq 10$ ta có

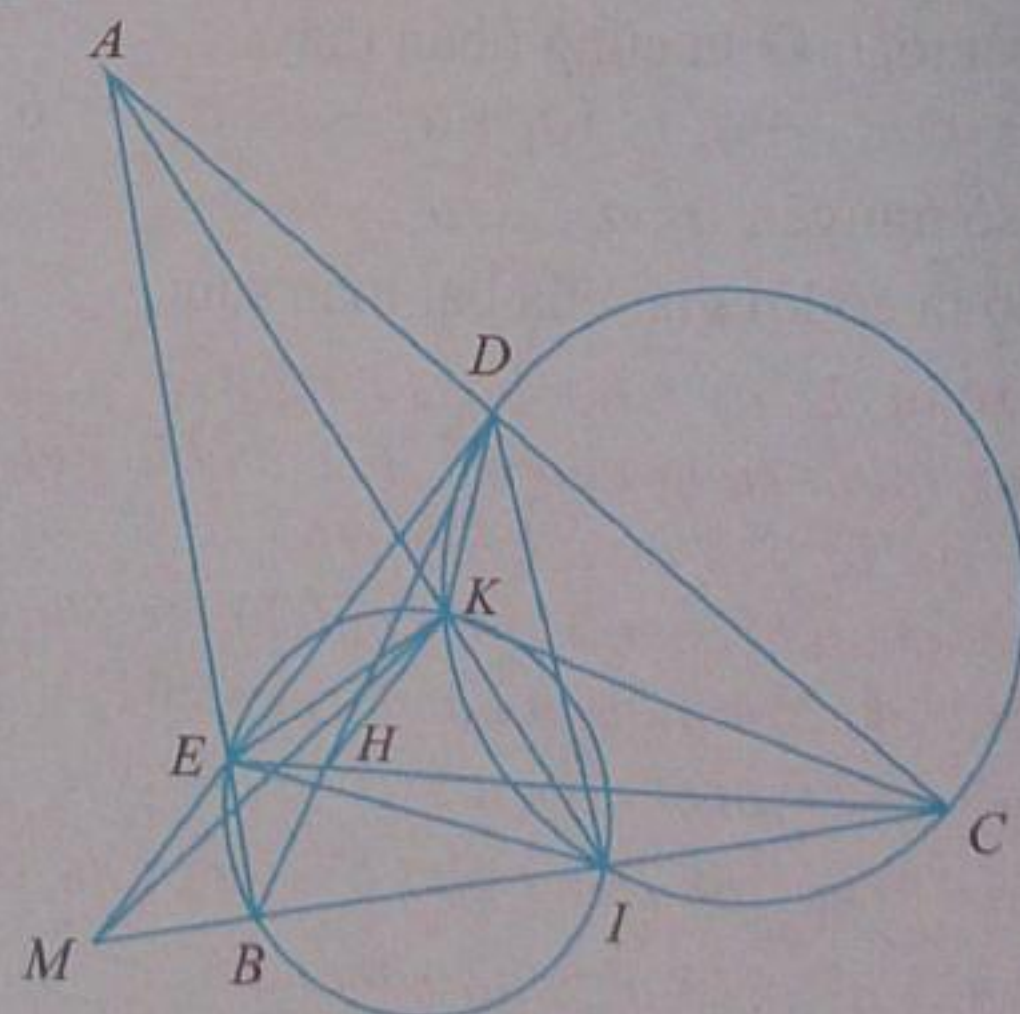
$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c = \frac{a+2b+3c}{4} \geq \frac{5}{2} \quad (2).$$

Cộng theo từng vế của (1) và (2) suy ra

$$a+b+c + \frac{3}{4a} + \frac{9}{8b} + \frac{1}{c} \geq \frac{13}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=1; b=\frac{3}{2}; c=2.$

Câu 4.



Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (3 điểm) Cho hai số dương a, b và số c

khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$.

Bài 2. (5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 3x^2$.

b) $2\sqrt{2+x-x^2} = 1 + \frac{1}{x}$.

Bài 3. (3 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 9,6 \\ xy - \frac{y}{x} = 7,5 \end{cases}$$

Bài 4. (3 điểm) Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức sau: $A = \frac{2-x}{1-2x} + \frac{1+2x}{3x}$.

Bài 5. (4 điểm) Từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của MB ; C là giao điểm của AE và (O) (C khác A) và H là giao điểm của AB và MO .

a) Chứng minh $HCEB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của MC và (O) (D khác C). Chứng minh ABD là tam giác cân.

c) Gọi J là giao điểm của BO và (O) (J khác B); K là giao điểm của AD và MJ . Tính tỉ số $\frac{KA}{KD}$.

Bài 6. (2 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n biết n có hai chữ số và n chia hết cho tích các chữ số của nó.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu

☞ 1) Ta có các tứ giác $BEKI, DKIC$ nội tiếp suy ra $\widehat{EKI} = 180^\circ - \widehat{ABC}$; $\widehat{DKI} = 180^\circ - \widehat{ACB}$
 $\Rightarrow \widehat{EKD} = 360^\circ - \widehat{EKI} - \widehat{DKI} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$

$$= 180^\circ - \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{EKD} + \widehat{BAC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác $AEKD$ nội tiếp. Mặt khác, dễ thấy tứ giác $AEHD$ cũng nội tiếp, suy ra A, E, H, K, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$; tứ giác $AEKD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AKE} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AKE}$; tứ giác $BEKI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EKI} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EKI} + \widehat{AKE} = 180^\circ \Rightarrow A, K, I \text{ thẳng hàng.}$$

3) Ta có $\triangle BDC$ vuông tại D và DI là trung tuyến $\Rightarrow ID = IC \Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$; $\triangle BDC$ có $\widehat{DIA} + \widehat{IAC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD} = \widehat{KCD} + \widehat{ICK}$ mà tứ giác $DKIC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DIA} = \widehat{KCD}$

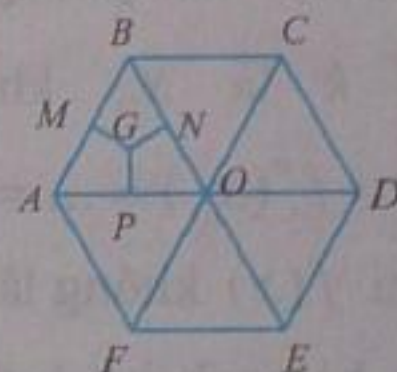
$$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICK} \quad (1). \text{ Tứ giác } AEKD \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{KED} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$$\widehat{KED} = \widehat{ICK} \Rightarrow \text{tứ giác } MEKC \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MKC}.$$

Câu 5. Chia lục giác đều $ABCDEF$ tâm O thành 6 tam giác đều có cạnh 4cm (hình vẽ). Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 4 trong 19



điểm nằm trong hay trên cạnh của 1 trong 6 tam giác đó. Không mất tổng quát, giả sử đó là $\triangle OAB$ (có trọng tâm G). Với $GM \perp AB$, $GN \perp OB$, $GP \perp OA$, $\triangle OAB$ được chia thành ba tứ giác $GMBN, GMAP, GPON$ lần lượt nội tiếp các đường tròn đường kính GB, GA, GO đều bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. Theo nguyên lý Dirichlet

có ít nhất 2 trong 4 điểm đang xét nằm trong hay trên cạnh của 1 trong 4 tứ giác nói trên nên khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá đường kính $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác, ta có đpcm.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)



TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM BỘI

NGUYỄN VĂN NHỎ

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) có sự đánh giá tổng các hàm số theo tổng các hàm số thường gây khó khăn cho người giải toán. Bài viết giới thiệu phương pháp sử dụng tính chất nghiệm bội để tìm GTLN & GTNN của một biểu thức.

I. PHƯƠNG PHÁP

- Để ước lượng biểu thức $p(x)$ theo biểu thức $q(x)$ ta có thể xét hàm số $f(x) = p(x) - kq(x) + m$ trên miền D . Khi $f(x)$ là đa thức ta tìm điều kiện để PT $f(x) = 0$ có nghiệm bội chẵn k là x_0 trên D , nghĩa là viết được: $f(x) = (x - x_0)^k A(x) (*)$, khi đó trên miền D nếu $A(x) \geq 0$ ($A(x) \leq 0$) thì $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$). Chú ý rằng, đa thức $f(x)$ có nghiệm bội k là x_0 khi và chỉ khi $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Khi $f(x)$ không là đa thức ($f(x)$ là hàm phân thức, hàm vô tỉ, ...), thì ta vẫn có thể sử dụng ý tưởng trên để đưa $f(x)$ về dạng (*).
- Phương pháp ở trên thường áp dụng để thiết lập các đánh giá có dạng:

$$\sum_{i=1}^n p(a_i) \geq k \sum_{i=1}^n q(a_i) - nm$$

$$\text{hoặc } \sum_{i=1}^n p(a_i) \leq k \sum_{i=1}^n q(a_i) - nm$$

(với $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số xác định trên miền D nào đó). Khi $q(x)$ là một nhị thức bậc nhất thì phương pháp đã nêu là phương pháp dùng tiếp tuyến để chứng minh BĐT như bạn đọc đã biết.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. Cho các số thực thỏa mãn $a, b, c \geq \frac{-1}{2}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTNN của biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3$.

Phân tích. Để đánh giá a^3 theo a^2 ta xét hàm số $f(x) = x^3 - kx^2 + m$ và từ điều kiện để PT $f(x) = 0$ có nghiệm bội 2 tại $x = 1$, suy ra: $f(1) = f'(1) = 0$ từ đó tìm được $k = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2(2x+1) \geq 0, \forall x \geq \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } x^3 \geq \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \forall x \geq \frac{-1}{2} (*).$$

Áp dụng (*) ta có:

$$a^3 \geq \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}, b^3 \geq \frac{3}{2}b^2 - \frac{1}{2}, c^3 \geq \frac{3}{2}c^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{3}{2} = 3;$$

$$P = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1. \text{ Vậy min } P = 3.$$

Thí dụ 2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx \leq 3xyz$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1}$.

Phân tích. Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2}{x+1} - \frac{k}{x} + m$ ta cần tìm điều kiện để $f(1) = f'(1) = 0$. Từ đó ta tìm được: $k = \frac{-3}{4}$, $m = \frac{-5}{4}$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{3}{4x} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4x(x+1)}(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3)$$

$$= \frac{4x+3}{4x(x+1)}(x-1)^2 \geq 0, \forall x > 0.$$

Suy ra $\frac{x^2}{x+1} \geq \frac{5}{4} - \frac{3}{4x}, \forall x > 0$. Tương tự:

$$\frac{y^2}{y+1} \geq \frac{5}{4} - \frac{3}{4y}, \forall y > 0, \frac{z^2}{z+1} \geq \frac{5}{4} - \frac{3}{4z}, \forall z > 0$$

Cộng từng vế các BĐT trên, ta có:

$$P \geq \frac{15}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{15}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq \frac{3}{2}.$$

Khi $x=y=z=1$ thì $P = \frac{3}{2}$. Vậy $\min P = \frac{3}{2}$.

Thí dụ 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \sqrt{3+a} + \sqrt{3+b} + \sqrt{3+c} - (a+b+c).$$

Phân tích. Xét hàm số:

$f(x) = \sqrt{3+x} - x - kx^2 + m$ và tìm điều kiện để

$$f(1) = f'(1) = 0, \text{ ta tìm được } k = \frac{-3}{8}, m = \frac{-11}{8}.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh:

$$\sqrt{3+x} - x \leq \frac{-3}{8}x^2 + \frac{11}{8}, \forall x \in (0; \sqrt{3}) \quad (*).$$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow 8\sqrt{3+x} \leq -3x^2 + 8x + 11$.

Vì $x \in (0; \sqrt{3})$ nên hai vế của $(*)$ luôn dương,

bình phương hai vế của $(*)$, rút gọn ta được:

$$9x^4 - 48x^3 - 2x^2 + 112x - 71 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2 - 30x - 71) \leq 0$$

BĐT này đúng vì với $x \in (0; \sqrt{3})$ thì

$$9x^2 - 30x - 71 < 0.$$

Khi đó theo $(*)$ ta có:

$$P \leq \frac{-3}{8}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{33}{8} = 3, P = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy $\max P = 3$.

Thí dụ 4. Cho các số thực dương a, b, c

thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Tìm GTNN của

$$\text{biểu thức: } Q = \frac{2a+1}{\sqrt{3a+1}} + \frac{2b+1}{\sqrt{3b+1}} + \frac{2c+1}{\sqrt{3c+1}}.$$

Phân tích. Để đánh giá Q ta cần ước lượng

biểu thức $\frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}}$ theo biểu thức $\frac{1}{x}$, ta xét

hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}} - \frac{k}{x} + m$ và tìm

điều kiện để $f(1) = f'(1) = 0$ ta tìm được

$$k = \frac{-7}{16}, m = \frac{-31}{16}.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh BĐT:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}} \geq \frac{31}{16} - \frac{7}{16x}, \forall x > 0 \quad (*).$$

Nếu $0 < x \leq \frac{7}{31}$ thì $(*)$ đúng, nếu $x > \frac{7}{31}$ thì bình phương hai vế của $(*)$ và rút gọn ta được:

$$1024x^4 - 1859x^3 + 597x^2 + 287x - 49 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(1024x^2 + 189x - 49) \geq 0.$$

BĐT này đúng với mọi $x > \frac{7}{31}$ vì tam thức

bậc hai $1024x^2 + 189x - 49 > 0, \forall x > \frac{7}{31}$, như

vậy BĐT $(*)$ đúng. Khi đó áp dụng $(*)$ ta

$$\text{được: } Q \geq \frac{93}{16} - \frac{7}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{9}{2}.$$

Khi $a = b = c = 1$ thì $Q = \frac{9}{2}$. Vậy $\min Q = \frac{9}{2}$.

Thí dụ 5. Cho các số thực $a, b, c \in (0; 1, 1)$,

thỏa mãn: $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Tìm GTNN

của biểu thức:

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3}}.$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \geq \frac{3}{16} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2}, \forall x \in (0; 1, 1) \quad (*).$$

Ta thấy $(*) \Leftrightarrow 16x^2 \geq \sqrt{x^2+3}(3x^2+8x-3) \quad (1).$

Nếu $0 < x \leq \frac{1}{3}$ thì (1) đúng.

Nếu $x \in \left(\frac{1}{3}; 1, 1 \right)$ thì bình phương hai vế của (1), biến đổi đưa về

$$(x-1)^2(9x^4 + 66x^3 - 60x^2 - 90x + 27) \leq 0 \quad (2).$$

Lập bảng biến thiên ta thấy:

$$9x^4 + 66x^3 - 60x^2 - 90x + 27 < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1, 1\right).$$

Như vậy (2) đúng $\forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1, 1\right)$, suy ra (*) đúng. Từ đó áp dụng (*) ta được:

$$Q \geq \frac{3}{16} \left(a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Mặt khác, khi $a = b = c = 1$ thì $Q = \frac{3}{2}$. Vậy $\min Q = \frac{3}{2}$.

Thí dụ 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTNN của biểu thức: $S = \frac{a^3 + b^3}{a + 2b} + \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} + \frac{c^3 + a^3}{c + 2a}$.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT:

$$\frac{x^3 + 1}{x + 2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18}, \forall x > 0 \quad (*).$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 18(x^3 + 1) \geq (x + 2)(7x^2 + 5)$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(11x + 8) \geq 0 \quad (1).$$

BĐT (1) đúng với mọi $x > 0$ nên (*) đúng.

Áp dụng (*) cho x lần lượt là $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + 2b} \geq \frac{7a^2}{18} + \frac{5b^2}{18}, \frac{b^3 + c^3}{b + 2c} \geq \frac{7b^2}{18} + \frac{5c^2}{18},$$

$$\frac{c^3 + a^3}{c + 2a} \geq \frac{7c^2}{18} + \frac{5a^2}{18}. \text{ Từ các BĐT trên suy ra:}$$

$$S \geq \frac{12(a^2 + b^2 + c^2)}{18} = 2. \text{ Ngoài ra ta thấy, khi}$$

$a = b = c = 1$ thì $S = 2$. Vậy $\min S = 2$.

Thí dụ 7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geq \frac{4}{3}.$$

Phân tích. Để thấy dấu bằng xảy ra ở BDT trên khi $a = b = 0, c = 1$ và các hoán vị nên ta

cần tìm k, m để $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2} - kx^2 + m$ thỏa

mãn $f'(0) = f'(1) = f(0) = f(1) = 0$, từ đó tìm

$$\text{được: } k = \frac{-1}{6}, m = \frac{-1}{2}.$$

Lời giải. Ta cần chứng minh BDT:

$$\frac{1}{x^3 + 2} \geq \frac{-1}{6}x^2 + \frac{1}{2}, \forall x \geq 0 \quad (*).$$

Thật vậy, ta biến đổi (*) về dạng tương đương: $x^2(x - 1)^2(x + 2) \geq 0$.

BĐT này đúng với mọi số thực x không âm, từ đó suy ra (*) đúng. Khi đó áp dụng (*) ta

$$\text{được: } S \geq \frac{-1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2} = \frac{4}{3}.$$

Vậy BDT đã cho đúng. Dấu bằng trong BDT đã cho xảy ra khi và chỉ khi:

$$(a; b; c) \in \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}.$$

Kết luận. Từ bài viết ở trên chúng ta rút ra một kinh nghiệm rất quý báu cho việc học toán là phải biết cách khai thác các khái niệm, tính chất toán học đã biết để bổ sung các công cụ trong giải toán. Đề thành thạo phương pháp đã nêu đề nghị các bạn hãy giải các bài toán sau

BÀI TẬP

1. Cho các số thực a, b, c không bé hơn $\frac{2}{3}$, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1}.$$

2. Cho các số thực a, b, c, d, e không bé hơn -4 , $a + b + c + d + e = 5$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 5$. Tìm GTNN của biểu thức: $Q = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$.

3. Cho các số thực âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q = 2(a + b + c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

4. Cho các số thực a, b, c không bé hơn $-\frac{3}{4}$, $a^4 + b^4 + c^4 + \frac{7}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{11}{4}$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$Q = 4\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) + 9(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a + b + c).$$

5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng: $2^a + 2^b + 2^c \geq 6$.

6. Cho tam giác ABC có số đo các góc $A, B, C \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt[4]{32}}{2} + 1 \leq \sin^{\frac{3}{2}} A + \sin^{\frac{3}{2}} B + \sin^{\frac{3}{2}} C \leq \frac{3\sqrt[4]{108}}{4}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) TXĐ: $D = \mathbb{R}$, ta có

$$y' = 4x^3 - 4mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó nghiệm của $(*)$ là: $x = \pm\sqrt{m}$.

Gọi $A(0;1), B(-\sqrt{m};1-m^2), C(\sqrt{m};1-m^2)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Do tính đối xứng của đồ thị suy ra $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AM \perp BC$ và $M(0;1-m^2)$.

Ta có $AM^2 = m^4, BC^2 = 4m$. Theo giả thiết

$$S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AM \cdot BC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AM^2 \cdot BC^2 = 128$$

$$\Leftrightarrow 4m^5 = 128 \Leftrightarrow m^5 = 32 \Leftrightarrow m = 2. \text{ Vậy } m = 2.$$

Câu 2. Đặt

$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2-1) \Rightarrow dx = tdt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases} \text{ Suy ra}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{t^2-1}{2} \right) dt = \frac{1}{3}.$$

Câu 3. Đặt $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i,$$

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i; (a,b,c,d \in \mathbb{R})$$

Khi đó

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 2 \\ \sqrt{c^2+d^2} = 5 \\ \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow ac+bd = \frac{13}{2}$$

$$\text{Vậy } |z_1 + z_2| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{(a^2+b^2) + 2(ac+bd) + (c^2+d^2)} = \sqrt{42}.$$

Câu 4. • Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1), \overrightarrow{n_p} = (2; 2; -1), \text{ suy ra}$$

$$\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}] = (3; -1; 4) \text{ và } (Q) \text{ đi qua}$$

điểm $B(-1; 1; -1)$. Vậy:

$$(Q): 3(x+1) - 1(y-1) + 4(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 4z + 8 = 0.$$

$$\bullet \text{ Ta có: } R = d(B; (P)) = \frac{|2(-1) + 2 \cdot 1 - 1(-1) + 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1.$$

$$\text{Vậy PT } (S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1.$$

Câu 5. ĐK: $3^x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 5$. Khi đó

PT đã cho tương đương với: $(\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{3^x - 5})^2$

$$-2\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{(3^x - 5)(3^x + 5)} + (\sqrt[4]{3^x + 5})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3} \sqrt[4]{3^x - 5} - \sqrt[4]{3^x + 5})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{3^x - 5} = \sqrt[4]{3^x + 5}$$

$$\Leftrightarrow 9(3^x - 5) = 3^x + 5 \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{25}{4}$$

(thỏa mãn ĐK)

Câu 6. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $IH \perp CD$

thì $CD \perp SH$, nên $\widehat{SHI} = 60^\circ$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

$$\bullet \text{ Ta có } S_{ABCD} = a^2; SI = IH \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt)}.$$

• Ta có

$$AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC))$$

$$= d(A, (SBC)). \text{ Trong mặt phẳng } (SAB), \text{ kẻ}$$

$$AK \perp SB \text{ thì } AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(AD, SC).$$

$$SB = \sqrt{SI^2 + IB^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{31}}{3}.$$

$$\text{Từ } SB \cdot AK = AB \cdot SI$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot SI}{SB} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{31}}{3}} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}.$$

Câu 7. Đường thẳng AB đi qua điểm $I(3;1)$

có VTPT $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 \neq 0)$ nên có PT

là $(AB): ax + by - 3a - b = 0$. Từ giả thiết có

$$\cos 45^\circ = \frac{|a+3b|}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0$$

Chọn $b=1 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$

• Với $a=2$ và $b=1$ thì
 $(AB): 2x+y-7=0, (AC): x-2y+2=0.$

Ta tìm được $A\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right)$ (thỏa mãn ĐK $x_A < 3$)

Suy ra $B\left(\frac{18}{5}; -\frac{1}{5}\right), C(0;1).$

• Với $a=-\frac{1}{2}$ và $b=1$

$(AB): x-2y-1=0, (AC): 2x+y-11=0$

Ta tìm được $A\left(\frac{23}{5}; \frac{9}{5}\right)$ (loại).

Vậy $A\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right), B\left(\frac{18}{5}; -\frac{1}{5}\right), C(0;1).$

Câu 8. ĐK: $y+5x+2 \geq 0$. PT thứ hai của hệ tương đương với

$$3x + \sqrt{1+9x^2} = \frac{1}{(y+\sqrt{1+y^2})} = (-y) + \sqrt{1+(-y)^2} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

(vì $\sqrt{1+t^2} > |t|$). Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên từ (*) có $3x = -y$, thay vào PT $8x^3 + 2y = \sqrt{y+5x+2}$ ta được

$$(2x)^3 - 3(2x) = \sqrt{(2x)+2}$$

ĐK: $x \geq -1$, đặt $t=2x \Rightarrow t \geq -2$, ta được

$$t^3 - 3t = \sqrt{t+2}$$

• Nếu $t > 2$ thì $t^3 - 3t = t + t(t^2 - 4)$

$= t + t(t-2)(t+2) > t > \sqrt{t+2}$, PT vô nghiệm.

• Nếu $-2 \leq t \leq 2$ thì đặt $t = 2\cos a, a \in [0; \pi]$,

ta được PT: $8\cos^2 a - 6\cos a = \sqrt{2\cos a + 2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3a = 2\left|\cos \frac{a}{2}\right| \Leftrightarrow \cos 3a = \cos \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=\frac{4\pi}{5} \text{ hoặc } a=\frac{4\pi}{7}$$

Vậy hệ PT đã cho có ba nghiệm: $(1; -3),$

$$\left(\cos \frac{4\pi}{5}; -3\cos \frac{4\pi}{5}\right), \left(\cos \frac{4\pi}{7}; -3\cos \frac{4\pi}{7}\right).$$

Câu 9. Theo giả thiết có $xy \geq 1$

Nhận xét: Với $x > 0, y > 0$ và $xy \geq 1$ thì:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

Thật vậy: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$

$$\Leftrightarrow (2+x+y)(1+\sqrt{xy}) \geq 2(1+x+y+xy)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} + (x+y)\sqrt{xy} \geq x+y+2xy$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{xy}-1) \geq 0,$$

BĐT đúng với mọi $xy \geq 1$. Với $z \leq 1$ suy ra

$$M \geq \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{4-1}{3(1+xy)}$$

$$= \left(\frac{x}{1+y} + 1\right) + \left(\frac{y}{1+x} + 1\right) + \frac{1}{1+xy} - 2$$

$$= (1+x+y) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right) + \frac{1}{1+xy} - 2$$

$$\geq (1+2\sqrt{xy}) \left(\frac{2}{\sqrt{xy}+1}\right) + \frac{1}{1+xy} - 2. \text{ Đặt } t = \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow M \geq (1+2t) \left(\frac{2}{1+t}\right) + \frac{1}{t^2+1} - 2 = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2}$ xác định trên

$$[1; +\infty), \text{ ta có } f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(t+1)^2(t^2+1)^2} \geq 0, \forall t \in [1; +\infty).$$

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$, với

$t \geq 1 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}$. Vậy $\min M = \frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.

NGUYỄN QUANG THI
 (GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

THÙ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1 (2 điểm). Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

b) Xác định tham số m để qua điểm uốn của đồ thị (C_m) kẻ được một đường thẳng (d) tạo với đồ thị (C_m) một hình phẳng (H) và (d) tiếp tục chắn trên hai trục tọa độ một tam giác (T) sao cho diện tích của (H) và (T) bằng nhau đều bằng 2 (đvdt).

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình

$$\tan x \cdot \cot 2x = (1 + \sin x)(4 \cos^2 x + 4 \sin x - 5).$$

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(4 \tan x)}{\sin 2x \cdot \ln(2 \tan x)} dx.$$

Câu 4 (1 điểm).

a) Trong trường hợp khai triển theo nhị thức Newton của biểu thức $(1+x^2)^n$ ta có hệ số chứa x^8 bằng 210. Tính tổng các hệ số của các số hạng được khai triển từ biểu thức trên theo trường hợp đó.

b) Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1| = \sqrt{34}$ và $|z+1+mi| = |z+m+2i|$. Xác định tham số $m \in \mathbb{R}$ để tồn tại hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện trên sao cho $|z_1 - z_2|$ là lớn nhất.

Câu 5 (1 điểm).

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, qua hai điểm $M(1; -1; 1), N(0; -1; 0)$ hãy lập

phương trình mặt phẳng (α) cắt mặt cầu

$(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$ theo thiết diện là một đường tròn mà có diện tích $S = \pi$.

Câu 6 (1 điểm).

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$

và $SA = a$. Qua A dựng mặt phẳng (α) vuông góc với SC sao cho (α) cắt SC, SB, SD lần lượt tại G, M, N .

Tính theo a thể tích khối nón (H) , biết rằng đường tròn đáy của (H) ngoại tiếp tứ giác $AMGN$ và đỉnh O của (H) nằm trên đáy $ABCD$ của hình chóp $S.ABCD$.

Câu 7 (1 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , hãy tính diện tích tam giác ABC biết rằng hai điểm $H(5;5), I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $x+y-8=0$ là phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.

Câu 8 (1 điểm).

Giải phương trình nghiệm thực

$$(x - \ln x) \sqrt{2x^2 + 2} = x + 1.$$

Câu 9 (1 điểm).

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 z}{y^2 (xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2 (xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh,
Tuy Hòa, Phú Yên)

THÔNG BÁO

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đang phát hành cuốn ĐÓNG TẬP TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2014. Giá bìa: 185.000 đồng. Tất cả 12 số Tạp chí TH&TT trong năm và Đặc san Tạp chí TH&TT Số 9, Số 10 được đóng tập bìa cứng. Bạn đọc muốn có trọn bộ TH&TT năm 2014 hãy liên hệ với Toà soạn.

TH&TT



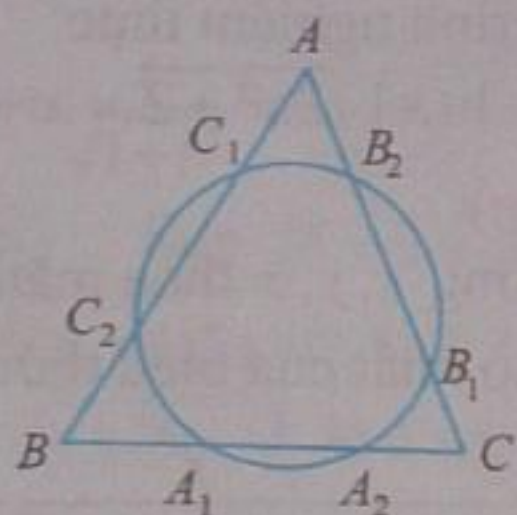
MỘT CÁCH CHỨNG MINH 6 ĐIỂM CÙNG NẪM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

LÊ VIỆT ÂN
(Thừa Thiên - Huế)

Để chứng minh sáu điểm cùng thuộc một đường tròn (hay đồng viên), thông thường ta sẽ chỉ ra một điểm nào đó cụ thể cách đều sáu điểm đã cho hay là chứng minh mỗi điểm trong các điểm đã cho cùng nằm trên một đường tròn đã chọn trước. Sau đây xin giới thiệu một cách chứng minh sáu điểm cùng nằm trên một đường tròn bằng cách dựa vào một kết quả mà ta sẽ gọi nó là **định lý sáu điểm đồng viên**. Định lý đó có nội dung như sau:

Định lý sáu điểm đồng viên: Cho tam giác ABC , các điểm A_1, A_2 thuộc BC ; B_1, B_2 thuộc AC ; C_1, C_2 thuộc AB . Biết rằng các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 thuộc một đường tròn; C_1, C_2, A_1, A_2 thuộc một đường tròn; A_1, A_2, B_1, B_2 thuộc một đường tròn. Khi đó sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh. (h.1)



Hình 1

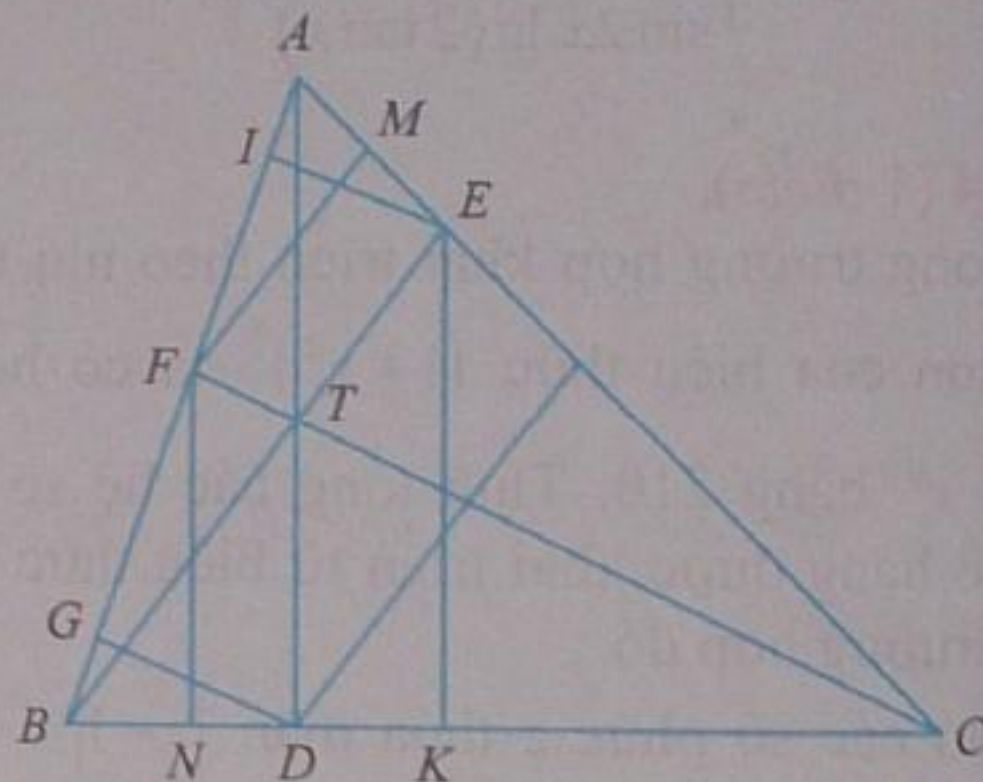
Giả sử (C_a) là đường tròn đi qua bốn điểm B_1, B_2, C_1, C_2 ; (C_b) là đường tròn qua bốn điểm C_1, C_2, A_1, A_2 ; (C_c) là đường tròn qua bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 .

Ta thấy: BC là trục đẳng phương của (C_b) và (C_c) ; CA là trục đẳng phương của (C_c) và (C_a) ; AB là trục đẳng phương của (C_a) và (C_b) . Nếu $(C_a), (C_b), (C_c)$ đôi một phân biệt thì BC, CA, AB hoặc đồng quy hoặc đôi một song song, mâu thuẫn. Vậy có hai trong ba

$(C_a), (C_b), (C_c)$ đường tròn trùng nhau, suy ra sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn. Bây giờ ta đi xét một số thí dụ sau:

Thí dụ 1. (Bài T4/245, TH&TT, tháng 11/1997). Giả sử AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác $\triangle ABC$. G, P là hình chiếu của D lên AB, AC . I, K thứ tự là hình chiếu của E lên AB, BC . M, N thứ tự là hình chiếu của F lên AC, BC . Chứng minh 6 điểm G, P, I, K, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải. (h.2)



Hình 2

- Nếu $\triangle ABC$ vuông thì bài toán đúng.
- Ta xét trường hợp $\triangle ABC$ không vuông. Gọi T là trực tâm của $\triangle ABC$. Vì E, F, M, I cùng thuộc đường tròn đường kính EF nên

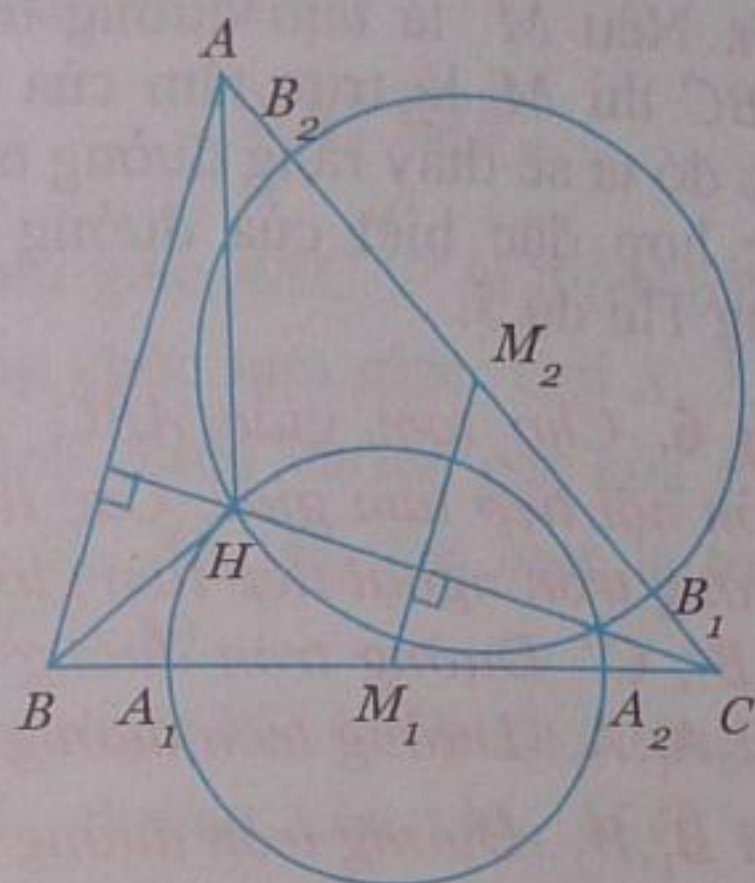
$$\overline{AM} \cdot \overline{AE} = \overline{AI} \cdot \overline{AF} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AM}}$$

$$\text{Thales ta có: } \frac{\overline{AE}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}$$

ra $\overline{AI} \cdot \overline{AG} = \overline{AM} \cdot \overline{AP} \Rightarrow P, M, I, G$ cùng thuộc một đường tròn. Tương tự: I, G, N, K cùng thuộc một đường tròn và N, K, P, M cùng thuộc một đường tròn. Vậy theo định lý sáu điểm ta có đpcm. $\square$

❖ **Thí dụ 2. (IMO 2008)** Cho $\triangle ABC$, trực tâm H . M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường tròn tâm M_1 , bán kính M_1H cắt cạnh BC tại A_1, A_2 ; đường tròn tâm M_2 , bán kính M_2H cắt cạnh CA tại B_1, B_2 ; đường tròn tâm M_3 , bán kính M_3H cắt cạnh AB tại C_1, C_2 . Chứng minh sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. (h.3)

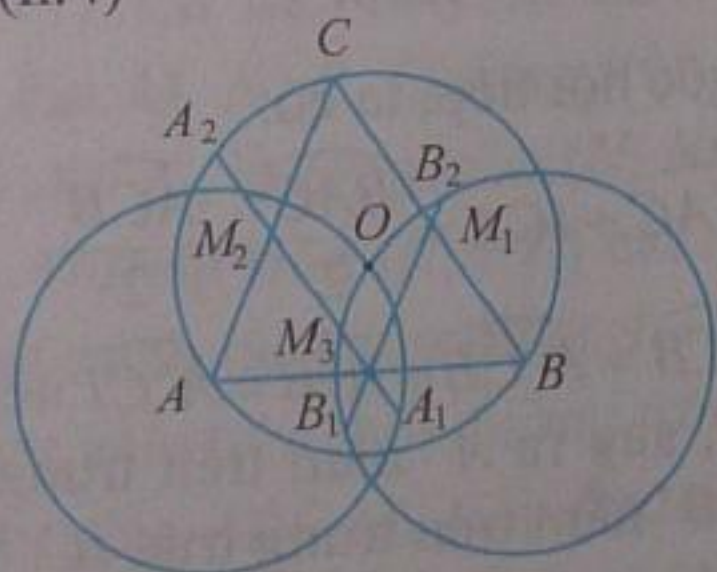


Hình 3

Do $M_1M_2 \parallel AB$ và $AB \perp HC$ nên $M_1M_2 \perp HC$. Suy ra HC là trục đẳng phương của của (M_1, M_1H) và $(M_2, M_2H) \Rightarrow \overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = \overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2}$ suy ra A_1, A_2, B_1, B_2 cùng thuộc đường tròn. Tương tự A_1, A_2, C_1, C_2 cùng thuộc đường tròn và C_1, C_2, B_1, B_2 cùng thuộc đường tròn. Áp dụng định lý sáu điểm đồng viên ta có đpcm. $\square$

❖ **Thí dụ 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường tròn (A, AO) cắt M_2M_3 tại A_1, A_2 ; đường tròn (B, BO) cắt M_3M_1 tại B_1, B_2 ; đường tròn (C, CO) cắt M_1M_2 tại C_1, C_2 . Chứng minh sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Ta có $\overline{M_3A_1} \cdot \overline{M_3A_2} = \mathcal{P}_{M_3/(A,AO)} = AO^2 - AM_3^2$, và

$$\overline{M_3B_1} \cdot \overline{M_3B_2} = \mathcal{P}_{M_3/(B,BO)} = BO^2 - BM_3^2.$$

Mà $AO = BO, AM_3 = BM_3$ nên:

$$\overline{M_3A_1} \cdot \overline{M_3A_2} = \overline{M_3B_1} \cdot \overline{M_3B_2}.$$

Hay A_1, A_2, B_1, B_2 cùng thuộc đường tròn.

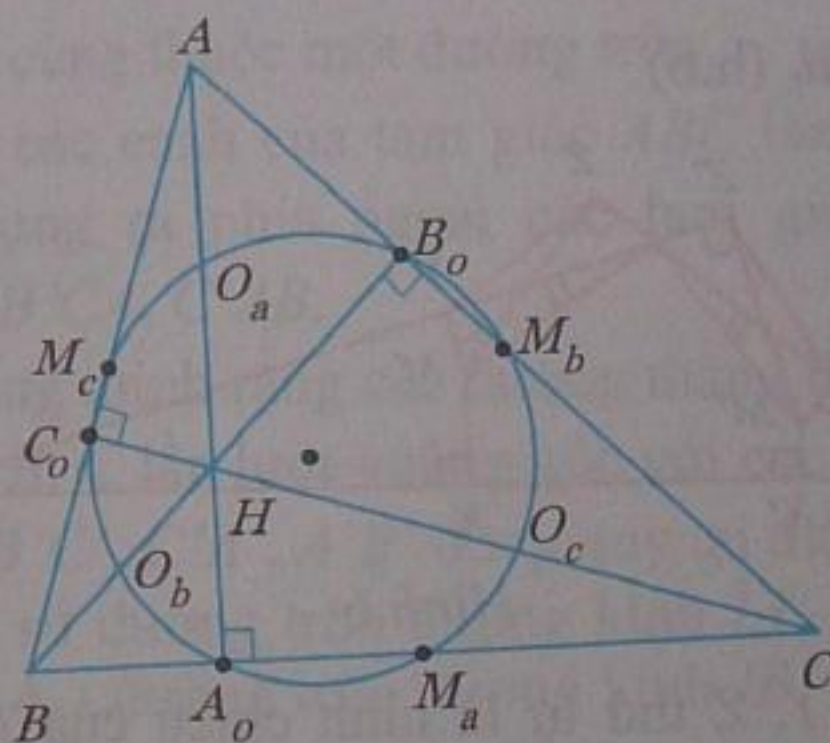
Tương tự A_1, A_2, C_1, C_2 cùng thuộc đường tròn; C_1, C_2, B_1, B_2 cùng thuộc đường tròn.

Áp dụng định lý sáu điểm đồng viên ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta chứng minh được bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC và các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ thỏa mãn (O_1) đi qua B và C ; (O_2) đi qua C và A ; (O_3) đi qua A và B . Từ các đỉnh của tam giác ta dựng các đường tròn $(A), (B), (C)$ có bán kính bằng nhau sao cho đường tròn (A) cắt O_2O_3 tại hai điểm phân biệt A_1 và A_2 ; (B) cắt O_3O_1 tại hai điểm phân biệt B_1 và B_2 ; (C) cắt O_1O_2 tại hai điểm phân biệt C_1 và C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

❖ **Thí dụ 4.** Cho tam giác ABC có trực tâm H . Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của tam giác; chân đường cao hạ từ A, B, C tương ứng xuống BC, CA, AB ; trung điểm của HA, HB, HC cùng thuộc một đường tròn. (Đường tròn này gọi là đường tròn 9 - điểm Euler của tam giác ABC).

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Gọi A_0, B_0, C_0 là chân đường cao hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB ; M_a, M_b, M_c là

trung điểm của các cạnh BC, CA, AB ; O_a, O_b, O_c là trung điểm của HA, HB, HC .

Xét $\triangle ABC$, ta có bốn điểm A, B, A_0, B_0 cùng thuộc đường tròn đường kính AB nên $\overline{CB.CA_0} = \overline{CA.CB_0}$. Từ đó

$\overline{CM_b.CB_0} = \overline{CM_a.CA_0}$ nên bốn điểm M_a, M_b, A_0, B_0 cùng thuộc một đường tròn.

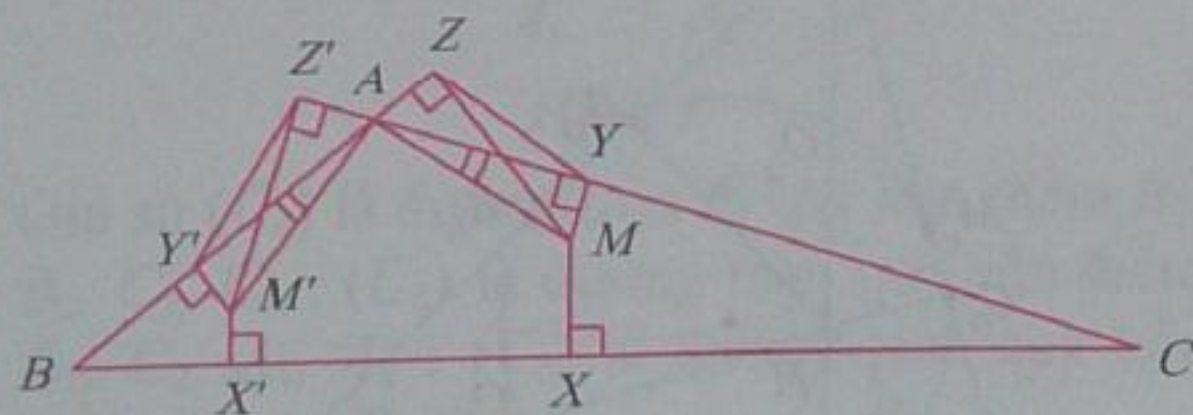
Tương tự bốn điểm M_b, M_c, B_0, C_0 cùng thuộc một đường tròn và bốn điểm M_c, M_a, C_0, A_0 cùng thuộc một đường tròn nên theo định lý sáu điểm đồng viên ta có 6 điểm $A_0, B_0, C_0, M_a, M_b, M_c$ cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự xét $\triangle HCA$ thì 6 điểm $A_0, B_0, C_0, O_a, M_b, O_c$ cùng thuộc một đường tròn và xét $\triangle HAB$ thì 6 điểm $A_0, B_0, C_0, O_a, O_b, M_c$ cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó 9 điểm $A_0, B_0, C_0, M_a, M_b, M_c, O_a, O_b, O_c$ cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_0B_0C_0$. $\square$

Thí dụ 5. (Bài T9/170, TH&TT) Giả sử M là một điểm bất kì trong mặt phẳng của tam giác ABC không nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác sao cho các đường thẳng đối xứng với AM, BN và CM lần lượt qua các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ đồng quy tại M' . Chứng minh rằng các hình chiếu của hai điểm M và M' trên các đường thẳng BC, CA và AB cùng nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn sáu điểm).

Lời giải. (h.6)



Hình 6

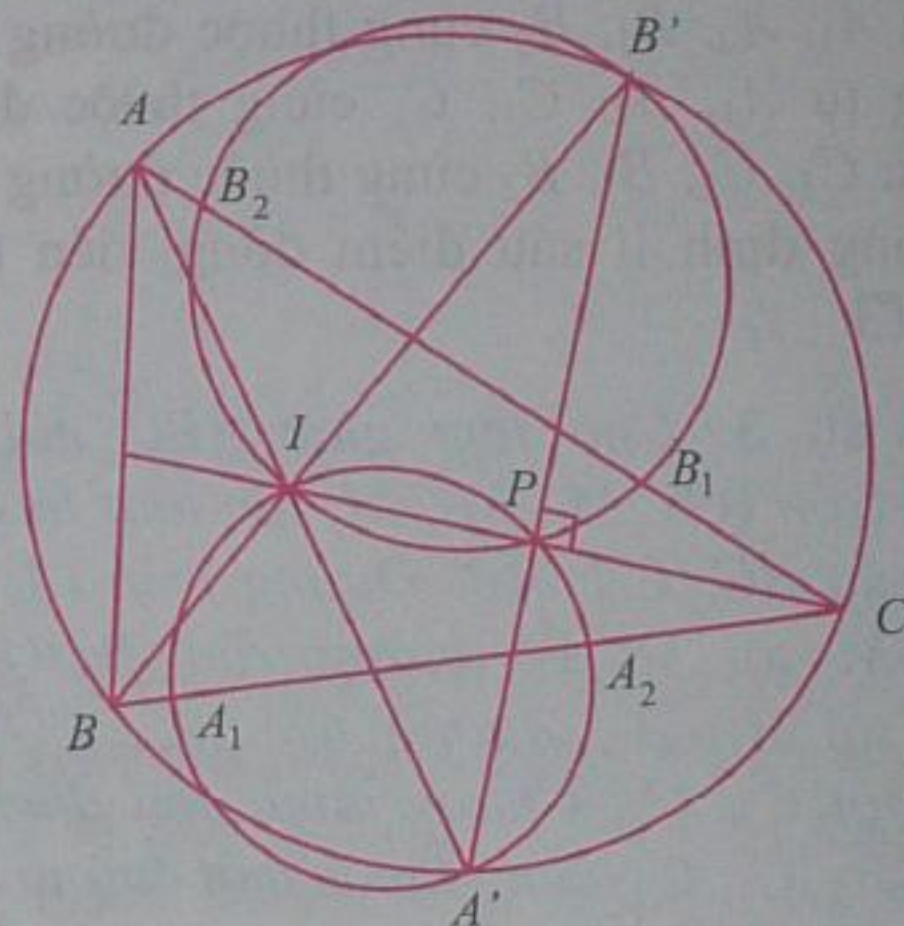
Gọi X, Y, Z thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB và X', Y', Z' thứ tự là hình chiếu của M' trên BC, CA, AB . Nối YZ và $Y'Z'$. Khi đó thì M và M' là hai điểm liên hợp đẳng giác trong $\triangle ABC$ nên hai tam giác vuông AMY và

$AM'Z'$ đồng dạng nên $\widehat{AMY} = \widehat{AM'Z'}$, từ đó $\widehat{AZY} = \widehat{AY'Z'}$ nên bốn điểm Y, Z, Y', Z' cùng thuộc một đường tròn. Hoàn toàn tương tự ta cũng có bốn điểm Z, X, Z', X' cùng thuộc một đường tròn và bốn điểm X, Y, X', Y' cùng thuộc một đường tròn. Vậy theo định lý sáu điểm đồng viên ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì M' là trực tâm của tam giác ABC . Lúc đó ta sẽ thấy rằng đường tròn Euler là trường hợp đặc biệt của đường tròn sáu điểm trong Thí dụ 5.

Thí dụ 6. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm A', B', C' . Đường tròn đường kính IA' cắt BC tại A_1, A_2 . Đường tròn đường kính IB' cắt CA tại B_1, B_2 . Đường tròn đường kính IC' cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. (h.7)



Hình 7

Sử dụng góc nội tiếp, ta có:

$$\widehat{A'IC} = \widehat{A'AC} + \widehat{ICA} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2}$$

$= \widehat{A'AB} + \widehat{ICB} = \widehat{A'CB} + \widehat{ICB} = \widehat{A'CI}$ nên $\triangle A'IC$ cân tại A' , suy ra A' nằm trên trung trực IC . Tương tự B' nằm trên trung trực IC . Vậy $A'B'$ là đường trung trực của IC hay $A'B'$ vuông

góc với IC tại trung điểm P của IC , dẫn đến P nằm trên các đường tròn đường kính IA' và IB' . Khi đó: $\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = \overline{CP} \cdot \overline{CI} = \overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2}$
 $\Rightarrow A_1, A_2, B_1, B_2$ cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự A_1, A_2, C_1, C_2 cùng thuộc một đường tròn và B_1, B_2, C_1, C_2 cùng thuộc một đường tròn. Vậy theo định lý sáu điểm đồng viên ta có đpcm. $\square$

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC , P là điểm bất kì trong mặt phẳng chứa tam giác. Gọi X, Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB . M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Đường tròn (M_1, M_1P) cắt đường thẳng YZ tại A_1, A_2 ; đường tròn (M_2, M_2P) cắt đường thẳng ZX tại B_1, B_2 ; đường tròn (M_3, M_3P) cắt đường thẳng XY tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ hoặc cùng thẳng hàng hoặc cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường tròn (A, AP) cắt đường thẳng YZ tại A_1, A_2 ; đường tròn (B, BP) cắt đường thẳng ZX tại B_1, B_2 ; đường tròn (C, CP) cắt đường thẳng XY tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ hoặc cùng thẳng hàng hoặc cùng đồng viên.

2. (Mở rộng Thí dụ 2) Cho tam giác ABC và điểm H bất kì cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi X, Y, Z tương ứng là hình chiếu vuông góc của H trên BC, CA, AB sao cho X, Y, Z không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt BC, CA, AB theo thứ tự tại điểm thứ hai M, N, P . Đường tròn (M, MH) cắt BC tại A_1, A_2 . Đường tròn (N, NH) cắt CA tại B_1, B_2 . Đường tròn (P, PH) cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và AA', BB', CC' là các đường cao. Đường

tròn tâm A' , bán kính $A'O$ cắt BC tại A_1, A_2 ; đường tròn tâm B' , bán kính $B'O$ cắt CA tại B_1, B_2 ; đường tròn tâm C' , bán kính $C'O$ cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

4. Cho tam giác ABC và điểm P nằm phía trong tam giác. Trên các đoạn thẳng PA, PB, PC lấy các điểm A', B', C' . Đường tròn ngoại tiếp tam giác $PB'C'$ cắt BC tại A_1, A_2 ; đường tròn ngoại tiếp tam giác $PC'A'$ cắt CA tại B_1, B_2 ; đường tròn ngoại tiếp tam giác $PA'B'$ cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

5. Cho tam giác ABC và điểm P nằm phía trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB . Đường tròn đường kính PA' cắt BC tại A_1, A_2 ; đường tròn đường kính PB' cắt CA tại B_1, B_2 ; đường tròn đường kính PC' cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

6. Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng của P lần lượt qua BC, CA, AB . Đường tròn đường kính PA cắt $B'C'$ tại A_1, A_2 ; đường tròn đường kính PB cắt $C'A'$ tại B_1, B_2 ; đường tròn đường kính PC cắt $A'B'$ tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

7. Lấy các cạnh của tam giác ABC làm cạnh đáy, dựng ra phía ngoài các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$.

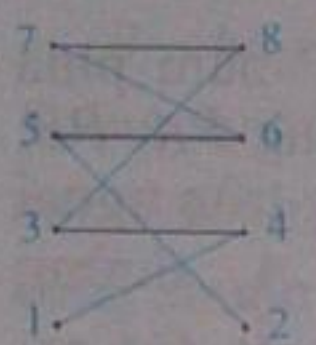
a) Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua A, B, C lần lượt vuông góc với các đường thẳng $B'C', C'A', A'B'$ đồng quy tại điểm I .

b) Giả sử đường tròn đường kính IA' cắt BC tại A_1, A_2 ; đường tròn đường kính IB' cắt CA tại B_1, B_2 và đường tròn đường kính IC' cắt AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.

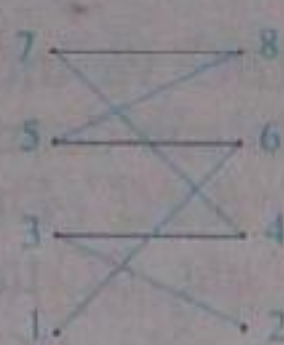


GIẢI ĐÁP BÀI TOÁN XÂU DÂY GIÀY

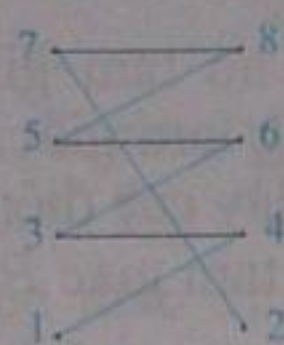
(Đề đăng trên TH&TT số 445 tháng 7 năm 2014)



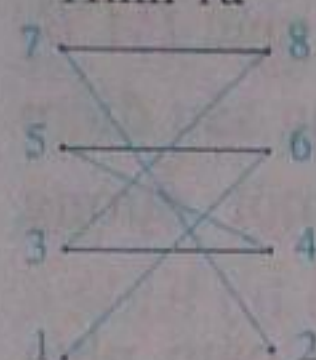
Hình 1a



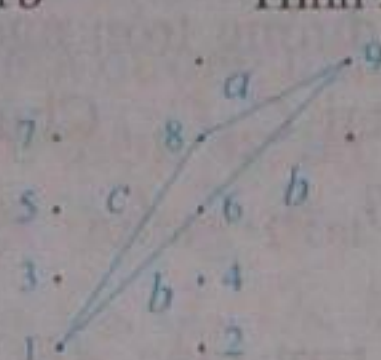
Hình 1b



Hình 2a



Hình 3a



Hình 4

Có tất cả 6 kiểu xâu dây giày như trên các hình (1a), (2a), (3a), (1b), (2b), (3b). Bạn đọc tự vẽ các hình (2b), (3b), đó là các hình đối xứng với hình (2a), hình (3a) qua trung trục của đoạn nối lỗ (1) và lỗ (2). Gọi độ dài đoạn dây nối từ lỗ số (1) đến lỗ số (4) là

a , nối từ lỗ số (1) đến lỗ số (6) là b , nối từ lỗ số (1) đến lỗ số (8) là c , nối từ lỗ số (3) đến lỗ số (4) là d thì độ dài của đoạn dây từ lỗ số (1) đến lỗ số (2) của các hình (2a) và (2b) đều là $m = 3a + c + 3d$, đoạn nối từ lỗ số (1) đến lỗ số (2) của các hình (1a) và (1b) đều là $n = 2a + 2b + 3d$, đoạn nối từ lỗ số (1) đến lỗ số (2) của các hình (3a) và (3b) đều là $p = a + 2b + c + 3d$. Dễ thấy $c > b > a$

nên $p - n = (a + 2b + c) - (2a + 2b) = c - a > 0$

hay là $p > n$. Ta chỉ còn so sánh m và n . Trong tam giác với ba đỉnh là (1), (8), (9) (hình 4) có $a + c > 2b$, do đó

$$m - n = (3a + c) - (2a + 2b) = a + c - 2b > 0$$

hay là $m > n$.

Vậy kiểu xâu dây ngắn nhất từ lỗ (1) đến lỗ (2) là kiểu ở các hình (1a) hoặc (1b).

PHI PHI

TÌM THỬ VỊ ... (Tiếp theo trang 1)

Bài toán 5. Với a là số nguyên tố, $a > 3$. Chứng minh rằng $a^3 - a$ chia hết cho $24a$.

(Đề thi chọn lọc học sinh giỏi Toán, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 - 2014).

Vì ta có $3^{2014} + 2015$ chia cho 6 dư 2, giúp chúng ta đề xuất được bài toán mới.

Bài toán 6. Số $3^{2014} + 2015$ được viết dưới dạng tổng của các số mà mỗi số là một số nguyên. Ta lấy thừa bậc 3 từng số hạng ấy, rồi cộng chúng lại, đem tổng này chia cho 6. Tìm số dư của phép chia này.

“Gia công” thêm chút nữa, chúng ta có bài toán:

Bài toán 7. Cho 20 số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ thỏa mãn $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{20}^3 = 2014$. Viết 20 số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ theo thứ tự tùy ý trên cùng một hàng. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được một hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó chia cho 6 có số dư là bao nhiêu?

Ta còn có: $b(a^3 - a) - a(b^3 - b) = a^3b - ab^3$, giúp đến được với một bài toán hay sau:

Bài toán 8. Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi a, b là các số nguyên.

Bài toán 8 cho ta $n^3 - n = 6m$. Vì vậy ta có thêm được bài toán “khó mà dễ” sau:

Bài toán 9. Chứng minh rằng mọi số nguyên n đều viết được dưới dạng $n^3 - 6m$ trong đó m cũng là

một số nguyên.

Chúng ta có với $y \in \mathbb{Z}$:

- Nếu $y < 0$ thì 6^y không là số nguyên.

- Nếu $y = 0$ thì $6^y = 1$.

- Nếu $y > 0$ thì $6^y : 6$.

Đây là cơ sở để giải quyết bài toán 10.

Bài toán 10. Giải các phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 - x = 6^y + 23$

b) $x^3 + 11x - 4 \cdot 6^y - 12y = 26$

c) $5x^3 - 8 \cdot 6^y + x - 24y = 130$

Và chúng ta còn có:

ĐỊNH LÝ FERMAT NHỎ

Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên sao cho $(a, p) = 1$. Khi đó $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p .

HỆ QUẢ: Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên. Khi đó $a^p - a$ chia hết cho p .

Mặt khác a^p và a cùng tính chẵn, lẻ nên $a^p - a$ chia hết cho 2. Vì vậy với $p \neq 2$, ta đã đến được với bài toán tổng quát của Bài toán 9.

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Cho p là số nguyên tố, $p > 3$. Chứng minh rằng $n^p - n$ chia hết cho $2p$ với mọi số nguyên n .

Các bạn hãy tiếp tục tìm kiếm các bài toán HAY và KHÓ từ Bài toán 9 và hãy đi tìm điều thú vị của bài toán tổng quát. Chắc chắn rằng sẽ còn nhiều điều đang chờ chúng ta.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/453 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x! + y! + z! = \overline{xyz}$, với $\overline{xyz}$ là số tự nhiên có ba chữ số và $n! = 1.2.3 \dots n$, $0! = 1$.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T2/453 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 50^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Trên cạnh AB và BC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{CAE} = 30^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{CDE}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN (Hải Phòng)

Bài T3/453. Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a+b+c}{(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)}$$

ĐÀO QUỐC DŨNG

(GV THPT Lê Viết Thuật, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T4/453. Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Lấy K trên đoạn DC . Vẽ $AS \perp HK$ tại S , EF cắt AH tại I . Chứng minh rằng SH là phân giác của góc $\widehat{DSI}$.

NGÔ VINH CHIẾN

(GV THCS Bạch Đằng, Q3, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/453. Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Chứng minh ít nhất một trong các phương trình sau vô nghiệm

$$ax^2 + 2bx + 2c = 0, \quad bx^2 + 2cx + 2a = 0,$$

$$cx^2 + 2ax + 2b = 0.$$

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bình khiêm, Vĩnh Long)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/453. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = 1 \end{cases}$$

NGUYỄN XUÂN NGHĨA (Nam Định)

Bài T7/453. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một điểm M di động trên cạnh đáy AB (M khác A, B). Mặt phẳng (α) đi qua M đồng thời song song với SA, BD . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (α) và tìm vị trí điểm M để thiết diện đó có diện tích lớn nhất.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh)

Bài T8/453. Giải phương trình

$$3\sin^3 x + 2\cos^3 x = 2\sin x + \cos x.$$

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/453. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn $4a + 1$ và $4b - 1$ nguyên tố cùng nhau và $a + b$ là ước của $16ab + 1$.

ĐÀO HUY TRƯỜNG

(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T10/453. Cho đa thức

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0; n \geq 2)$$

có các hệ số đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên k sao cho $P(x) + k$ không phân tích được thành tích của hai đa thức hệ số nguyên với bậc lớn hơn 0.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/453. Cho hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là toàn ánh và hàm $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ là đơn ánh thỏa mãn $f(n) \geq g(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T12/453. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M, N là hai điểm cố định trên (O) sao cho $MN \parallel BC$. P là một điểm di chuyển trên đường thẳng AM . Đường thẳng qua P song song với BC cắt CA, AB lần lượt tại E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác NEF cắt đường tròn (O) tại Q khác N . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/453. Cho 4 viên bi hình cầu đồng chất, cùng kích thước và được chế tạo chính xác. Sắp xếp chúng thành một khối đôi một tiếp xúc nhau trên một mặt bàn phẳng. Xác định μ_1, μ_2 lần lượt là hệ số ma sát giữa các

viên bi và giữa bi với mặt bàn, để cơ hệ có thể duy trì trạng thái cân bằng ban đầu.

NGÔ AN HOA KỲ (TP. Hồ Chí Minh)

Bài L2/453. Hai bản tụ điện đặt trong không khí có cùng diện tích S , có thể chuyển động không ma sát dọc theo một sợi dây cách điện nằm ngang xuyên qua tâm của chúng. Bản 1 có khối lượng m , điện tích Q , còn bản 2 có khối lượng $2m$, điện tích $-2Q$. Ban đầu hai bản được giữ cách nhau một khoảng $3d$ (d rất nhỏ so với kích thước các bản).

1) Xác định năng lượng điện trường giữa hai bản tụ điện.

2) Ở một thời điểm nào đó, người ta buông hai bản ra. Xác định vận tốc của mỗi bản khi chúng cách nhau một khoảng d .

VŨ THANH KHIẾT (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/453 (For 6th grade). Find all natural numbers x, y, z such that $x! + y! + z! = \overline{xyz}$ and $\overline{xyz}$ is a three-digit number. Recall that $n! = 1.2.3 \dots n$ and $0! = 1$.

Problem T2/453 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{BAC} = 50^\circ, \widehat{ABC} = 60^\circ$. On the sides AB and BC , choose D and E respectively such that $\widehat{ACD} = \widehat{CAE} = 30^\circ$. Find the angle $\widehat{CDE}$.

Problem T3/453. Given three positive numbers a, b , and c . Find the maximum value of the expression

$$T = \frac{a+b+c}{(4a^2+2b^2+1)(4c^2+3)}.$$

Problem T4/453. Suppose that ABC is an acute triangle. Its altitudes AD, BE , and CF are concurrent at the point H . Let K be a point

on the side DC and choose S on HK such that $AS \perp HK$. Let I be the intersection between EF and AH . Prove that SH is the angle bisector of the angle $\widehat{DSI}$.

Problem T5/453. Let a, b, c be positive numbers satisfying

$$a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Prove that at least one of the following equations has no solution

$$ax^2 + 2bx + 2c = 0, \quad bx^2 + 2cx + 2a = 0,$$

$$cx^2 + 2ax + 2b = 0.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/453. Solve the system of equations:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = 1 \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 29)



Bài T1/449 (Lớp 6). Cho năm số nguyên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích năm số nguyên đó.

Lời giải. Gọi năm số nguyên cần tìm là a, b, c, d, e với $a < b < c < d < e$ thì $e - c \geq 2; d - b \geq 2$. Theo giả thiết có $a + b + c > d + e$. Nếu điều kiện này thỏa mãn thì tổng của ba số bất kì trong chúng đều không nhỏ hơn $a + b + c$, còn tổng của hai số bất kì trong chúng đều không lớn hơn $d + e$, do đó tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Từ điều kiện trên có $a > d - b + e - c \geq 2 + 2 = 4$, hay $a \geq 5$. Từ đó $b \geq 6, c \geq 7, d \geq 8, e \geq 9$ nên tích $abcde \geq 5.6.7.8.9$. Vậy giá trị nhỏ nhất của tích năm số nguyên đó bằng $5.6.7.8.9 = 15120$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn cho kết quả đúng nhưng lập luận không chặt chẽ.

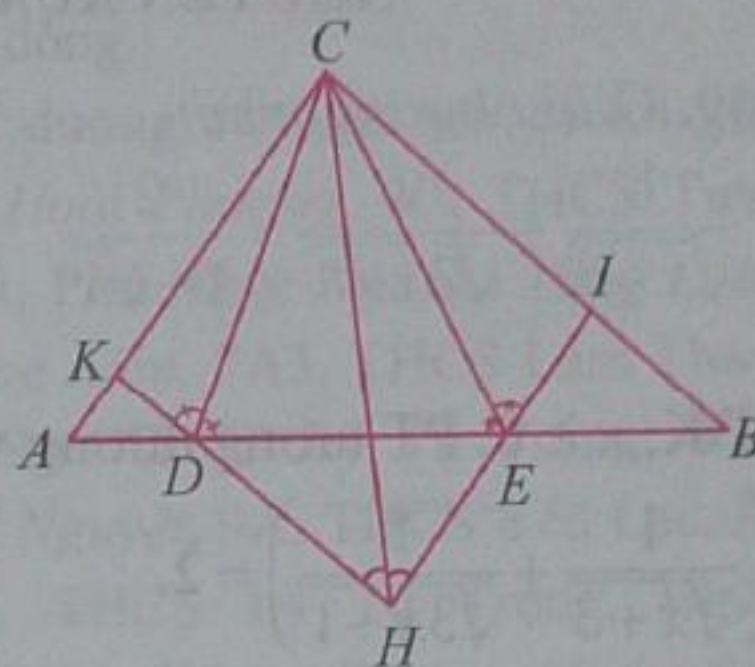
Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Ngô Bình Minh, Nguyễn Chí Công, Lê Trung Hiếu, Bùi Tiến Mạnh, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Đoàn Thị Minh Hương, Nguyễn Duy Toán, Nguyễn Khắc Tú, Nguyễn Duy Quyết, 6A1, Tạ Kim Thanh Hiền, 6A4, THCS Yên Lạc.

VIỆT HẢI

Bài T2/449. Cho tam giác ABC với $AB > AC, AB > BC$. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm D và E sao cho $BC = BD$ và $AC = AE$. Qua D và E kẻ DK song song với BC

và EI song song với CA ($K \in CA, I \in CB$).

Chứng minh rằng $CK = CI$



Lời giải

Do $CA + CB > AB$ suy ra

$AE + BD > AE + EB \Rightarrow BD > BE$, nên E nằm giữa B và D . Tương tự, D nằm giữa A và E . Gọi H là giao điểm của KD và IE .

Ta có $\widehat{ACE} = \widehat{AEC}$ (do $\triangle ACE$ cân tại A),

$\widehat{ACE} = \widehat{CEI}$ (so le), suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{IEC}$ hay EC là phân giác của $\widehat{DEI}$. Tương tự, DC là phân giác của $\widehat{EDK}$. Như vậy C là giao điểm hai đường phân giác ngoài tại D và E của tam giác DHE , do đó HC là phân giác của $\widehat{DHE}$, tức là $\widehat{CHK} = \widehat{CHI}$.

Mà $\widehat{CHK} = \widehat{HCI}, \widehat{CHI} = \widehat{HCK}$ (so le) nên $\widehat{HCK} = \widehat{HCI}$. Ta có $\triangle HCK = \triangle HCI$ (g.c.g), suy ra $CK = CI$ (đpcm). $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán tương đối dễ và có nhiều cách giải. Tất cả các bạn tham gia giải bài đều cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt nhất: **Phú Thọ:** Lê Na, 7A, THCS Thị Trấn II, Yên Lập; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Thanh Hiền, 6A4, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Đinh Hoàng Nhật Minh, 7A5, THCS Cầu Giấy; **Nghệ An:** Võ Phương Tâm, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Đặng Nữ Quỳnh Anh, Nguyễn Đình Tuấn, Thái Bá Bảo, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Mai Thị Thu Thảo, 7C, THCS Thị trấn Sông Vệ, Tư Nghĩa, Võ Thành Hy, 7A, THCS Hành Trung, Nguyễn Thị Kiều Mẫn, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Trương Thị Mai Trâm,

Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/449. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$. PT tương đương với:

$$(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right) = 2.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{3x+1} \right),$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3x+1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x+3} \right),$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{3}{2} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} & (1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} + 3 \right) = 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$, thỏa mãn ĐK.

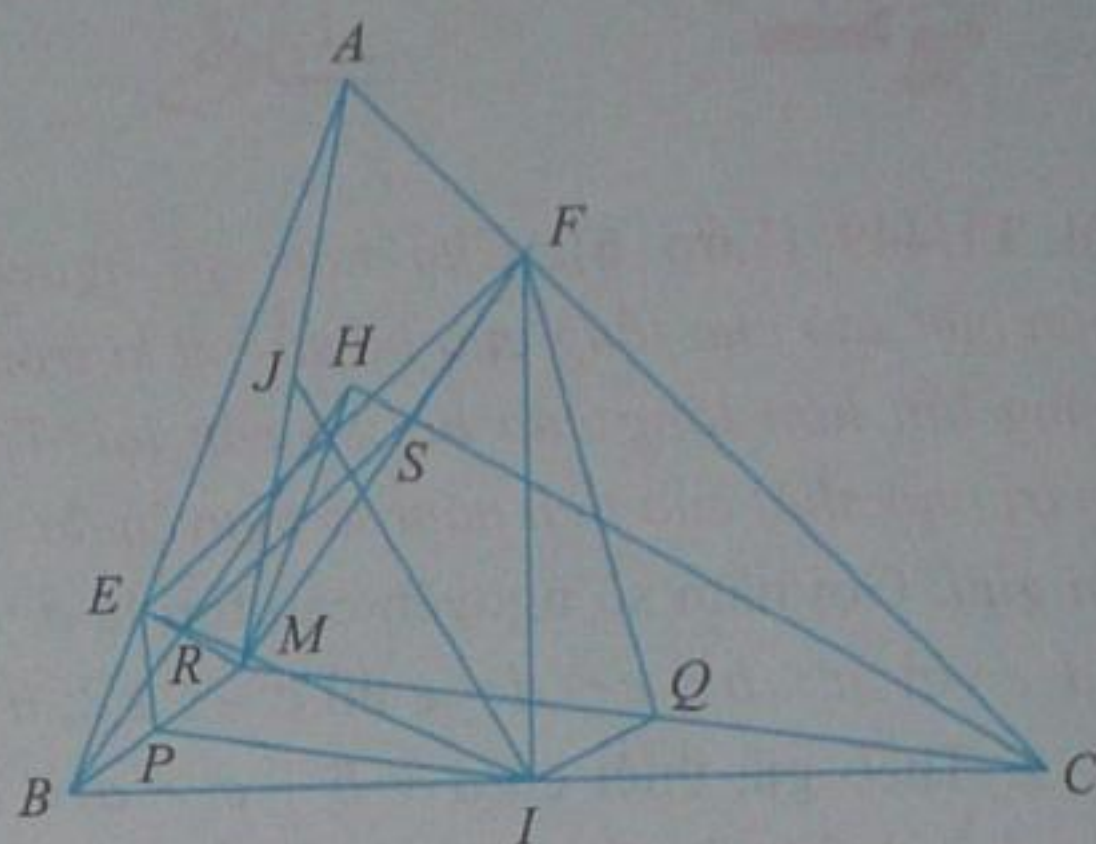
Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt nhất:

Vĩnh Phúc: Bùi Thị Liễu Dương, 8A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Nguyễn Lê Sơn, 9A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Hà Nội:** Nguyễn Duy Khương, 9A9, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Mạnh, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Quảng Bình:** Phan Trần Hương, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/449. Cho tam giác nhọn ABC với H là trực tâm. M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và I, J tương ứng là trung điểm BC, MA . Chứng minh rằng các đường thẳng MH, EF và IJ đồng quy.



Lời giải

• Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của MB và MC . Dễ thấy $IPMQ$ hình bình hành, nên có $\widehat{IPM} = \widehat{IQM}$. (1)

Lại có $\widehat{MPE} = 2\widehat{EBP} = 2\widehat{QCF} = \widehat{MQF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IPE} = \widehat{FQI}$ (3)

Dễ thấy

$$IP = FQ = \frac{MC}{2}; IQ = EP = \frac{MB}{2}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle IPE = \triangle FQI \Rightarrow IE = IF$.

Rõ ràng $JE = JF = \frac{AM}{2}$. Do đó IJ là trung trực của đoạn EF .

• Gọi R là giao điểm của HB và ME , S là giao điểm của HC và MF . Ta có $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$

$90^\circ - \widehat{BAC}$, suy ra

$$\triangle ERB \sim \triangle FSC \text{ (g-g)} \quad (5)$$

Hơn nữa, dễ thấy

$$\triangle EMB \sim \triangle FMC \text{ (g-g)} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{ER}{EM} = \frac{FS}{FM} \Rightarrow RS \parallel EF$.

Vì $MRHS$ là hình bình hành nên MH đi qua trung điểm của RS . Từ đó suy ra MH đi qua

trung điểm của EF . Vậy EF , IJ và MH đồng quy tại trung điểm của EF . $\square$

► **Nhận xét.** Không có nhiều bạn tham gia giải bài toán trên. Một số lời giải còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Viên, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Đỗ Hoài Phương, 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai, Nguyễn Thành Long, Nguyễn Tuấn Anh, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Nguyễn Khải Hưng, Nguyễn Thị Hồng, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/449. Tìm tất cả các cặp số nguyên

$(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^4 + y^3 = xy^3 + 1.$$

Lời giải. Ta có $x^4 + y^3 = xy^3 + 1$ (*)

$$\Leftrightarrow (x^4 - 1) + (y^3 - xy^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) - (x-1)y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1 - y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^3 + x^2 + x + 1 - y^3 = 0 \end{cases}$$

• Với $x-1=0$ thì $x=1$, thay vào (*) ta được $1 + y^3 = 1 + y^3$ luôn nghiệm đúng với mọi y . Do đó có vô số cặp số nguyên $(x, y) = (1; t)$ với $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (*).

• Với $x^3 + x^2 + x + 1 - y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = y^3,$$

$$\text{do } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x,$$

$$\text{nên } x^3 < y^3 \quad (1)$$

Lại do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x(x+1) \geq 0$, suy ra

$$x^3 + x^2 + x + 1 \leq x^3 + x^2 + x + 1 + 2x(x+1) = (x+1)^3, \text{ nên } y^3 \leq (x+1)^3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $x, y \in \mathbb{Z}$ suy ra $y^3 = (x+1)^3$. Điều này xảy ra khi $x(x+1) = 0$, tức là $x=0$ hoặc $x=-1$. Khi $x=0$ thì $y=1$; khi $x=-1$ thì $y=0$. Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn (*) là $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(1; t)$ với $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, việc suy luận để $y^3 = (x+1)^3$ của một số bạn còn chưa chặt chẽ hoặc dài dòng.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Đỗ Hoài Phương, 9C, THCS Tuyết Nghĩa, Quốc Oai; **Phú Thọ:** Nguyễn Tùng Lâm, Nguyễn Hữu Trung Kiên, 7A3, THCS Lâm Thao, Nguyễn Lê Sơn, 9A, THCS Lý Tự Trọng; **Vĩnh Phúc:** Phan Thị Nguyệt, 9A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Lê Sơn, 9A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Minh, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Nguyễn Văn Hưng, Nguyễn Thị Thảo Linh, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, 8A, Nguyễn Đình Tuấn Ngọc, 8C, Lê Đình Linh, Nguyễn Thị Hằng, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thục Hiền, 9D, THCS Xuân Diệu; **Vĩnh Long:** Ngô Hoàng Anh, 9/12, THCS Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Trương Thị Mai Trâm, 7A, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/449. Giải phương trình

$$8^x - 9|x| = 2 - 3^x.$$

Lời giải. Phương trình tương đương với $8^x + 3^x = 9|x| + 2$ (1).

Nếu $x < 0$: ta có

$$8^x + 3^x < 8^0 + 3^0 = 2 < 9|x| + 2.$$

Phương trình (1) không thỏa mãn.

Nếu $x \geq 0$: phương trình (1) tương đương với $8^x + 3^x - 9x - 2 = 0$ (2)

Xét hàm số $f(x) = 8^x + 3^x - 9x - 2$.

Ta có $f'(x) = 8^x \ln 8 + 3^x \ln 3 - 9$;

$$f''(x) = 8^x \ln^2 8 + 3^x \ln^2 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm thực. Lại có $f(0) = 0$; $f(1) = 0$ nên

phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm là $x=0$; $x=1$. Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$. Vậy phương trình trong đầu bài có hai nghiệm là $x=0$; $x=1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai và $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f'(x)$ liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$; phương trình $f'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm; suy ra phương trình $f(x)=0$ có không quá hai nghiệm thực.

Tổng quát: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp n và $f^{(n)}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (hoặc $f^{(n)}(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$) thì phương trình $f(x)=0$ có không quá n nghiệm thực. Có thể sử dụng **bất đẳng thức Bernoulli** để chứng minh $8^x + 3^x < 9x + 2$ khi $x \in (0;1)$ và $8^x + 3^x > 9x + 2$ khi $x > 1$; suy ra phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;+\infty)$. Bất đẳng thức này ít được dùng khi giải các bài toán trong chương trình phổ thông.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Bắc Ninh: Vũ Đăng Chiến, 11AQ1, THPT Thuận Thành số 1; **Hà Tĩnh:** Võ Duy Khánh, Nguyễn Văn Thế, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh;

Quảng Bình: Hoàng Thanh Việt, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** Vương Hoài Thanh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Tiến Phát, 11A7, THPT số 1 Đức Phổ, H. Đức Phổ; **Vĩnh Long:** Trần Chí Nhật Nam, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm;

Nghệ An: Hồ Xuân Hùng, 11T1, THPT Đô Lương I, Đà Sơn, Đô Lương; **Gia Lai:** Nguyễn Quang Nhật, 11C3A, THPT chuyên Hùng Vương, TP Pleiku; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/449. Cho tam giác ABC với ba cạnh là $AB=c; BC=a; CA=b$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R , bán kính đường tròn nội tiếp là r . Chứng minh rằng:

$$\frac{r}{R} \leq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)^2}.$$

Lời giải: Kí hiệu S là diện tích của $\triangle ABC$; O , G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm $\triangle ABC$. Khi đó từ các công thức

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{abc}{4R} \quad \text{suy ra}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{abc}{2R^2(a+b+c)} \quad (1)$$

Áp dụng công thức Leibnitz

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ ta có}$$

$$R^2 \geq \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{27}(a+b+c)^2$$

(theo BĐT Bunyakovsky) (2)

Mặt khác, theo BĐT Cauchy cho ba số dương ta thấy

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt{abc} \cdot 3\sqrt{a^2b^2c^2} = 9abc.$$

$$\text{Suy ra } abc \leq \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{r}{R} \leq \frac{27(a+b+c)(ab+bc+ca)}{18(a+b+c)^3} = \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv G$ và

$a=b=c$. Nghĩa là khi $\triangle ABC$ đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng theo các hướng: sử dụng lượng giác, bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Schur bậc 4... Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Đặng Thanh Tùng, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Nguyễn Ngọc Chi Lan, 11A Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Vũ Bá Sang, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Phú Thọ:** Nguyễn Anh Hào, 9A1, THCS Lâm Thao, Nguyễn Đức Thuận, Lê Bảo Anh, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Bùi Thị Liễu Dương, Trần Đức Duy, 8A4, THCS Yên Lạc, Bùi Duy Cường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Thanh

Hương, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** Đoàn Thị Nhài, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, Phan Đức Tiến, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Hồ Xuân Hùng, 11T1, THPT Đô Lương I, Dương Đức Mạnh, 11A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Tuấn, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Trần Hữu Trí, Trần Văn Thiên, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Hồ Minh Hoàng, Ngô Lê Phương Trinh, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Long An:** Nguyễn Hồng Hà Vy, 12T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** Trần Duy Quân, 12T1, THPT chuyên Bình Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/449. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{x + 2z}{x + z}.$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{x + 2z}{x + z} \\ &= \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz} + 1} + \frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz} + 1} + \frac{1 + \frac{2z}{x}}{1 + \frac{z}{x}} \\ &= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z} + 1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y} + 1} + \frac{1 + \frac{2z}{x}}{1 + \frac{z}{x}} \\ &= \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{a^2 + 1} + \frac{1 + 2c^2}{1 + c^2} \end{aligned}$$

trong đó ta ký hiệu

$$a^2 = \frac{x}{y}, b^2 = \frac{y}{z}, c^2 = \frac{z}{x} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+).$$

Chú ý $a^2 b^2 = \frac{x}{z} = \frac{1}{c^2} \geq 1$ do $x \geq z$.

Hai biến đổi sau là quen thuộc với nhiều bạn học sinh:

$$+ \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{a^2 + 1} - \frac{2ab}{ab + 1} = \frac{F}{(b^2 + 1)(a^2 + 1)(ab + 1)},$$

trong đó

$$\begin{aligned} F &= a^2(b^2 + 1)(ab + 1) + b^2(b^2 + 1)(ab + 1) \\ &\quad - 2ab(b^2 + 1)(a^2 + 1) \\ &= ab(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (a^4 + b^4 - a^3b - ab^3) \\ &\quad + (a^2 + b^2 - 2ab) \\ &= ab(a^2 - b^2)^2 + (a - b)(a^3 - b^3) + (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{a^2 + 1} \geq \frac{2ab}{ab + 1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c} + 1} = \frac{2}{1 + c} \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

$$+ \frac{2}{1 + c} + \frac{1 + 2c^2}{1 + c^2} - \frac{5}{2} = \frac{G}{2(1 + c)(1 + c^2)},$$

trong đó

$$\begin{aligned} G &= 2(2(1 + c^2) + (1 + c)(1 + 2c^2)) - 5(1 + c)(1 + c^2) \\ &= 2(2 + 2c^2 + 1 + c + 2c^2 + 2c^3) - 5(1 + c + c^2 + c^3) \\ &= 1 - 3c + 3c^2 - c^3 = (1 - c)^3 \geq 0 \quad \text{do } c < 1 \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $P \geq \frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 1 \Leftrightarrow x = y = z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{2}$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán cực trị trên có biến đổi phức tạp, nhưng là các biến đổi cơ bản của kiến thức lớp 8. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Bắc Giang:** Nghiêm Văn Nghĩa, 10A1, THPT Lạng Giang số 3; **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Anh, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** Triệu Ninh Ngân, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Khánh Hưng, 10T2, THPT chuyên; **Bình Định:** Trần Văn Thiên, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Phú Yên:** Nguyễn Chí Lương, Ngô Lê Phương Trinh, 10A1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/449. Tìm phần nguyên của biểu thức

$$B \text{ với } B = \frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{9}{11} + \dots + \frac{2013}{2015}.$$

Lời giải. (Theo bạn Hoàng Thanh Việt, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình).

Ta có

$$B = \sum_{k=0}^{503} \frac{4k+1}{4k+3} = \sum_{k=0}^{503} \left(1 - \frac{2}{4k+3}\right) = 504 - \sum_{k=0}^{503} \frac{2}{4k+3} \quad (1)$$

Theo định lý Lagrange ta có

$$\ln(4k+3) - \ln(4k-1) = \frac{1}{c}(4k+3 - 4k+1) = \frac{4}{c}$$

$$\text{với } 4k-1 < c < 4k+3 \text{ hay } \frac{4}{4k+3} < \frac{4}{c} < \frac{4}{4k-1}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{2}{4k+3} \leq \frac{\ln(4k+3) - \ln(4k-1)}{2} \leq \frac{2}{4k-1} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } C = \sum_{k=0}^{503} \frac{2}{4k+3} = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{503} \frac{2}{4k+3}$$

Từ (2) ta có

$$C \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{503} [\ln(4k+3) - \ln(4k-1)] + \frac{2}{3} \\ = \frac{\ln 2015 - \ln 3}{2} + \frac{2}{3} < 4,$$

$$\text{và } C = \sum_{k=0}^{503} \frac{2}{4k+3} = \sum_{k=1}^{504} \frac{2}{4k-1} \\ \geq \sum_{k=1}^{504} \frac{\ln(4k+3) - \ln(4k-1)}{2} = \frac{\ln 2019 - \ln 3}{2} > 3.$$

Do đó $501 > B = 504 - C > 500$, suy ra

$$[B] = 500. \square$$

➤ **Nhận xét.** 1) Một số bạn chứng minh BĐT: $500 < B < 501$ bằng cách dùng *BĐT Cauchy* cho n số.

2) Chỉ có ít bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải đúng là: **Hà Tĩnh:** Võ Duy Khánh, Nguyễn Văn Thế, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Gia Lai:** Nguyễn Quang Nhật, 11C3, THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy Mân, Đặng Bảo Vinh, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/449. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n , $f(n)$ là ước của $3^n - 1$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng các đa thức hằng $f(x) \equiv c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện bài ra khi và chỉ khi

$$c \in \{-1, 1, -2, 2\}.$$

Giả sử $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên bậc m ($m \geq 1$). Khi đó luôn tồn tại số nguyên dương l để $f(n) \notin \{-1, 1, -2, 2\}$. Thật vậy, nếu ngược lại, ta luôn có $f(2m+1) \in \{-1, 1, -2, 2\}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ nên tồn tại $l \in \{-1, 1, -2, 2\}$ sao cho có vô số số nguyên dương k để $f(2k+1) = l$.

Điều này dẫn đến phương trình $f(x) = l$ có vô số nghiệm nên $f(x) \equiv l$, trái với giả thiết là $f(x)$ không là đa thức hằng số.

Lấy p ($(p, 3) = 1$) là ước nguyên tố tùy ý của $f(n)$ mà $f(n) \notin \{-1, 1, -2, 2\}$. Vì $f(p) | (3^n - 1)$ nên $p | (3^n - 1)$ hay $3^n \equiv 1 \pmod{p}$. Mặt khác, theo tính chất cơ bản của đa thức thì $f(n+p) - f(n)$ chia hết cho p nên $f(n+p)$ chia hết cho p . Vì $f(n+p) | (3^{n+p} - 1)$ nên $p | (3^{n+p} - 1)$ hay $3^{n+p} \equiv 1 \pmod{p}$. Theo định lý Fermat nhỏ thì $3^p \equiv 3 \pmod{p}$ nên $1 \equiv 3^{n+p} = 3^n 3^p \equiv 1 \times 3 \equiv 3 \pmod{p}$. Suy ra $p = 2$. Vậy $f(n)$ chỉ có ước nguyên tố 2, hay $f(n) = f(2m+1)$ chỉ có ước nguyên tố 2: $3^n - 1 = 3^{2m+1} - 1 = 3 \times 9^m - 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Suy ra $3^n - 1$ không chia hết cho 4. Mà $3^n - 1$ chia hết cho $f(n)$, tức $f(n) = \pm 2$, mâu thuẫn. **Kết luận:** $f(x) \equiv c$ với $c \in \{-1, 1, -2, 2\}$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: Vũ Bá Sang, 11T1 THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Bùi Duy Cường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Yên:** Nguyễn Chí Lương, 10T1, THPT Chuyên Lương Văn Chánh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Võ Duy Khánh, Trần Mạnh Tuấn Vũ, 10T1, Phan Duy Sơn, 12T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình**

Định: Trần Văn Thiên, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Tường, Hoàng Thái Lễ, 11T THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/453. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều

$$\text{kiện: } \begin{cases} x_0 = 4, x_1 = 34 \\ x_{n+2} \cdot x_n = x_{n+1}^2 + 18 \cdot 10^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $S_n = \sum_{k=0}^{2n} x_{n+k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lẻ n , ta luôn có: $S_n \vdots 66$.

Lời giải: Ta sẽ chứng minh: $x_n = \frac{10^{n+1} + 2}{3}$ (2)

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy với $n=0$ thì $x_0 = 4$, (2) đúng. Với $n=1$ thì $x_1 = 34$, (2) đúng. Giả sử (2) đúng với n và $n+1$, ta sẽ chứng minh (2) đúng với $n+2$. Ta có:

$$\begin{aligned} x_{n+2} \cdot x_n &= x_{n+1}^2 + 18 \cdot 10^{n+1} = \left(\frac{10^{n+2} + 2}{3} \right)^2 + 18 \cdot 10^{n+1} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} &= \frac{10^{2n+4} + 4 \cdot 10^{n+2} + 4 + 162 \cdot 10^{n+1}}{9} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} &= \frac{10^{2n+4} + 202 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} \cdot \frac{10^{n+1} + 2}{3} &= \frac{10^{n+1} + 2}{3} \cdot \frac{10^{n+3} + 2}{3} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= \frac{10^{n+3} + 2}{3}. \end{aligned}$$

Như vậy (2) đúng với $n+2$.

Theo nguyên lý quy nạp (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$S_n = \frac{10^{n+1}(1+10+10^2+\dots+10^{2n})+2 \cdot 27}{3} = \frac{T}{3}.$$

Ta luôn có:

$$10^k \equiv 1 \pmod{9}, 10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Do đó: } T \equiv 1 \cdot 27 + 2 \cdot 27 \equiv 0 \pmod{9};$$

$$T \equiv 1 \cdot 1 + 2 \cdot 27 = 55 \equiv 0 \pmod{11} \text{ (vì } n \text{ lẻ)}.$$

Suy ra $T \vdots 9, T \vdots 11$. Rõ ràng $T \vdots 2$, và do 2, 9, 11 là ba số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên $T \vdots 2 \cdot 9 \cdot 11$. Vậy $S_n \vdots 66$. $\square$

Nhận xét. 1) Để tìm ra công thức (2), ta có thể làm như sau:

Từ (1) suy ra: $x_{n+1} \cdot x_{n-1} = x_n^2 + 18 \cdot 10^n$ hay

$$10 x_{n+1} \cdot x_{n-1} = 10 x_n^2 + 18 \cdot 10^{n+1}. \text{ Vậy}$$

$$x_{n+2} \cdot x_n - 10 x_{n+1} \cdot x_{n-1} = x_{n+1}^2 - 10 x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_n(x_{n+2} + 10 x_n) = x_{n+1}(x_{n+1} + 10 x_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{n+2} + 10 x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + 10 x_{n-1}}{x_n}. \text{ Do đó}$$

$$\frac{x_{n+2} + 10 x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + 10 x_{n-1}}{x_n} = \dots = \frac{x_2 + 10 x_0}{x_1} = 11.$$

Suy ra $x_{n+2} = 11 x_{n+1} - 10 x_n$. Vậy (x_n) là dãy hồi quy tuyến tính thuần nhất bậc hai có PT đặc

$$\text{trung: } \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}. \text{ Do đó}$$

$x_n = a_1 \cdot 10^n + a_2$. Từ điều kiện $x_0 = 4, x_1 = 34$ ta tìm được $a_1 = \frac{10}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$, do đó có (2).

2) Các bạn tham gia đều giải đúng bài này với nhiều cách giải khác nhau. Các bạn có lời giải ngắn gọn là: **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Bùi Duy Cường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tiến Tài, 11 Toán, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Trần Quang Huy, 11A1, THPT chuyên – Đại học Vinh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Võ Duy Khánh, 11T1, Phan Nhật Duy, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Hoàng Thanh Việt, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** Trần Duy Quân, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Long An:** Nguyễn Giáp Phương Duy, 11A2, THPT Hậu Nghĩa.

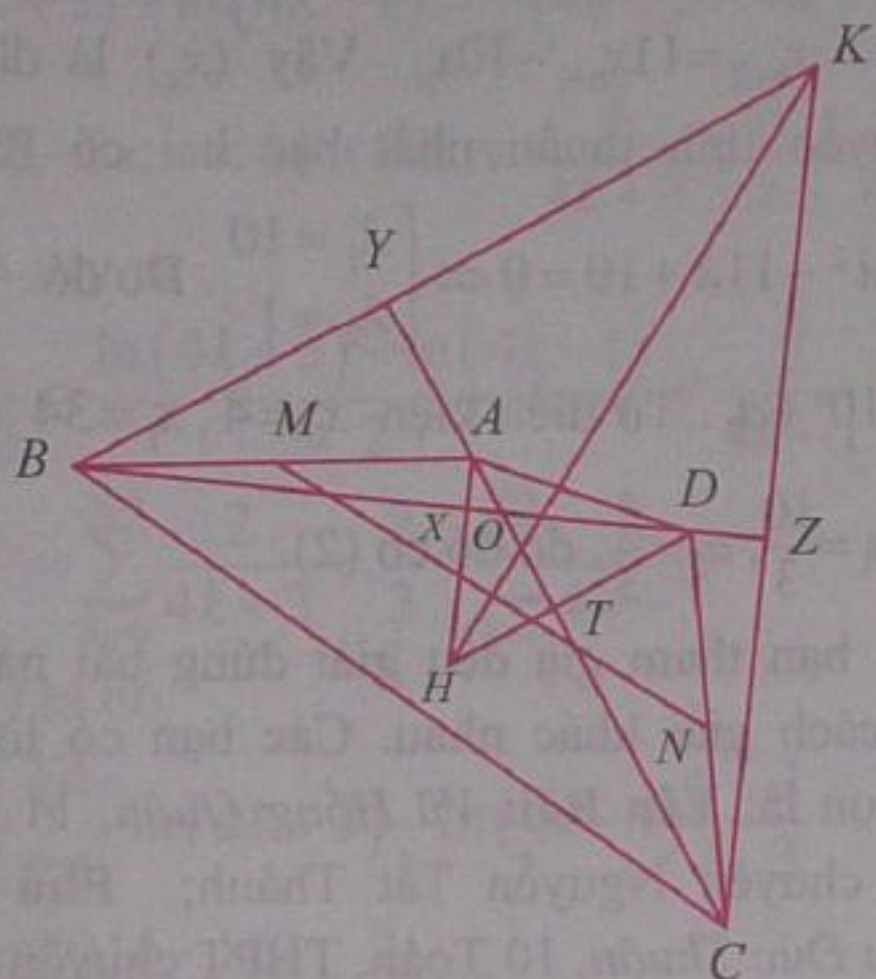
TRẦN HỮU NAM

Bài T12/449. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E, F lần lượt di chuyển trên các đoạn CA, AB sao cho $BF = CE$. BE cắt CF tại D. Gọi H, K thứ tự là trực tâm tam giác DEF, DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.

Lời giải: Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$, O là giao điểm của AC và BD . H, K theo thứ tự là trực tâm của các tam giác OAD, OBC . M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Khi đó HK là trung trực của MN .

Chứng minh: Gọi $(M), (N)$ theo thứ tự là các đường tròn đường kính AB và CD ; X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C, D trên OB, OA, OD, OC (h.1)



Hình 1

Dễ thấy $\mathcal{P}_{H/(M)} = \overline{HA.HX} = \overline{HD.HT} = \mathcal{P}_{H/(N)}$;

$\mathcal{P}_{K/(M)} = \overline{KB.KY} = \overline{KC.KZ} = \mathcal{P}_{K/(N)}$.

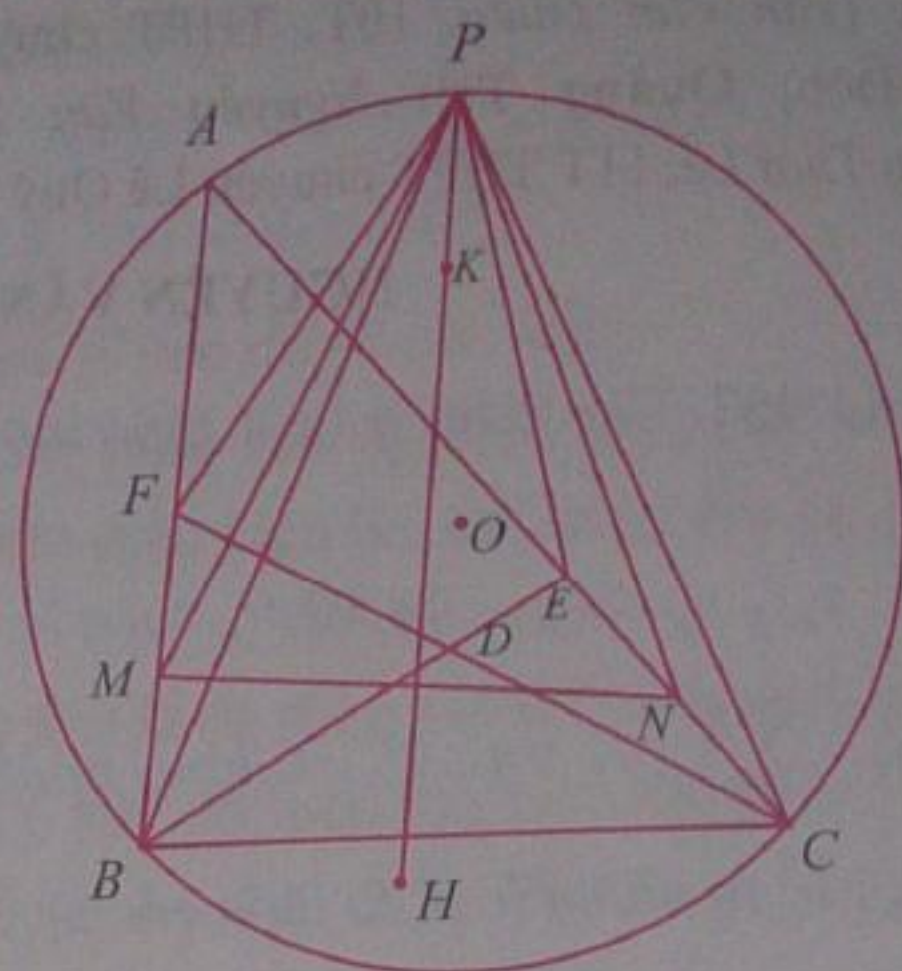
Do đó MN là trục đẳng phương của $(M), (N)$.

Kết hợp với $AB = CD$, suy ra HK là trung trực của đoạn thẳng MN .

Trở lại giải bài T12/449.

Trường hợp 1. $AB = AC$. Dễ thấy HK luôn đi qua điểm A .

Trường hợp 2. $AB \neq AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; P là điểm chính giữa cung BAC của (O) ; M, N theo thứ tự là trung điểm của BF, CE (h.2).



Hình 2

Dễ thấy $BF = CE; BP = CP$;

$\widehat{FBP} = \widehat{ABP} = \widehat{ACP} = \widehat{ECP}$. Do đó $\Delta PBF = \Delta PCE$.

Kết hợp với $MB = MF; NC = NE$, suy ra $\Delta PFM = \Delta PEN$. Do đó $PM = PN$.

Vậy theo bổ đề trên, HK luôn đi qua một điểm cố định (điểm P). $\square$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này dễ và quen thuộc, tuy nhiên chỉ có sáu bạn tham gia giải: **Yên Bái:** Vũ Hồng Quân, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hữu Huy, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Yên:** Nguyễn Huỳnh Huy Nhân, 10T1, THPT Lương Văn Chánh; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Thế, Võ Duy Khánh, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Nội:** Nguyễn Ngọc Chi Lan, 11A1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

L1/449. Một viên đạn khối lượng M được bắn lên với vận tốc $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang góc α . Đến điểm cao nhất thì nó nổ, vỡ thành hai mảnh. Mảnh nhỏ có khối lượng m với vận tốc có môđun v , bật ra sau theo phương ngang so với mảnh lớn. Hỏi tâm xa của mảnh lớn tăng thêm bao nhiêu so với trường hợp đạn không nổ?

Lời giải: Gọi v' là vận tốc mảnh nhỏ so với mặt đất, V là vận tốc mảnh lớn so với mặt đất, ta có: $v' = -v + V$

Ngay trước khi nổ đạn có động lượng $Mv_0 \cos \alpha$. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang ta có:

$$Mv_0 \cos \alpha = (M - m)V + m(V - v)$$

$$\Rightarrow V = v_0 \cos \alpha + \frac{m}{M}v$$

Biết vật ném ngang từ độ cao $h = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g$ với vận tốc u thì có tầm xa: $l = u \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{uv_0 \sin \alpha}{g}$.

Trường hợp đạn không nổ thì $u = v_0 \cos \alpha$ và

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Trường hợp đạn nổ, mảnh lớn có

$$u = V = v_0 \cos \alpha + \frac{m}{M}v \text{ nên mảnh lớn có } l'$$

$$\text{lớn hơn } l \text{ một đoạn: } \frac{mv}{M} \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Bình Định:** Trần Lê Huỳnh Đức, 10 Lý, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** Phan Xuân Sang, 12A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/449. Để đo chu kỳ T của một chất phóng xạ người ta dùng máy đếm xung. Biết rằng trong $t_1 = 45$ giờ đầu tiên máy đếm được n_1 xung; trong $t_2 = 2t_1$ giờ tiếp theo máy đếm được $n_2 = \frac{9}{64}n_1$ xung. Xác định chu kỳ bán rã T .

Lời giải. Số xung đếm được bằng số hạt đã bị phân rã, nên ta có:

$$n_1 = k\Delta N_1 = kN_{01} \left(1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}\right);$$

$$N_{02} = N_{01} 2^{-\frac{t_1}{T}}; t_2 = 2t_1$$

$$n_2 = k\Delta N_2 = kN_{02} \left(1 - 2^{-\frac{t_2}{T}}\right)$$

$$= kN_{01} 2^{-\frac{t_1}{T}} \left(1 - 2^{-\frac{2t_1}{T}}\right)$$

$$= kN_{01} 2^{-\frac{t_1}{T}} \left(1 - \left(2^{-\frac{2t_1}{T}}\right)^2\right)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{kN_{01} 2^{-\frac{t_1}{T}} \left(1 - \left(2^{-\frac{2t_1}{T}}\right)^2\right)}{kN_{01} \left(1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{64} = \frac{2^{-\frac{t_1}{T}} \left(1 - \left(2^{-\frac{2t_1}{T}}\right)^2\right)}{1 - 2^{-\frac{t_1}{T}}}$$

Đặt $x = 2^{-\frac{t_1}{T}}$, với điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{64} = \frac{x(1 - x^2)}{1 - x} \Leftrightarrow 9(1 - x) = 64(x - x^3)$$

$$\Rightarrow 64x^3 - 73x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{8}; x = 1; x = \frac{1}{8}.$$

So sánh với điều kiện trên thì $x = \frac{1}{8}$ là nhận

$$\text{được } 2^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Leftrightarrow \frac{t_1}{T} = 3$$

$$\Rightarrow T = \frac{t_1}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ giờ. } \quad \square$$

► **Nhận xét.** Một số bạn có lời giải đúng và chặt chẽ: **Hà Nội:** Trần Phương Nam, 12A13, THPT Ngọc Tảo; **Nam Định:** Phạm Ngọc Nam, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** Trần Bảo Trung, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** Huỳnh Văn Phúc, 12A1, THPT Cao Bá Quát, Núi Thành; **Đồng Nai:** Tô Đăng Xuân Hinh, 11Anh 2, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Cần Thơ:** Huỳnh Hữu Hạng, 12A1, THPT Nguyễn Việt Hồng, Quận Ninh Kiều, TP Cần Thơ.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

KỠ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

NĂM 2015 - MÔN TOÁN

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT năm 2015 đã được tổ chức trong các ngày 8, 9 và 10/01/2015, cho 12 môn học (ngày 10/01 là ngày thi thực hành cho các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học). Tham dự kỳ thi, ở môn Toán có 460 học sinh (nhiều hơn 4 học sinh so với năm 2014) thuộc 68 đơn vị dự thi.

1. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (8/1/2015)

Bài 1 (5 điểm). Cho a là một số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi:

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2 + a} \sqrt{u_n^2 + 3}$$

với mọi $n \geq 1$.

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq (a + b + c)^2.$$

Bài 3 (5 điểm). Cho số nguyên dương K . Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^K thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- n chia hết cho 3;
- các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2; 0; 1; 5\}$.

Bài 4 (5 điểm). Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) , BC không là đường kính. Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E, F lần

lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Cho (I) là đường tròn thay đổi đi qua E, F và có tâm là I .

a) Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại điểm D .

Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \sqrt{\frac{\cot B}{\cot C}}$.

b) Giả sử (I) cắt cạnh BC tại hai điểm M, N . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là các giao điểm của (I) với đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC . Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại điểm T (T cùng phía A đối với PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\widehat{MTN}$ đi qua một điểm cố định.

Ngày thi thứ hai (9/1/2015)

Bài 5 (7 điểm). Cho $(f_n(x))$ là dãy đa thức xác định bởi:

$$f_0(x) = 2, f_1(x) = 3x,$$

$$f_n(x) = 3xf_{n-1}(x) + (1 - x - 2x^2)f_{n-2}(x)$$

với mọi $n \geq 2$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $f_n(x)$ chia hết cho đa thức $x^3 - x^2 + x$.

Bài 6 (7 điểm). Với a, n nguyên dương, xét phương trình $a^2x + 6ay + 36z = n$, trong đó x, y, z là các số tự nhiên.

a) Tìm tất cả các giá trị của a để với mọi $n \geq 250$, phương trình đã cho luôn có nghiệm (x, y, z) .

b) Biết rằng $a > 1$ và nguyên tố cùng nhau với 6. Tìm giá trị lớn nhất của n theo a để phương trình đã cho không có nghiệm (x, y, z) .

Bài 7 (6 điểm). Có m học sinh nữ và n học sinh nam ($m, n \geq 2$) tham gia một Liên hoan Song ca. Tại Liên hoan Song ca, mỗi buổi biểu diễn một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một số bài song ca nam-nữ mà trong đó mỗi đôi nam-nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam-nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan Song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

a) Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.

b) Chứng minh rằng Ban tổ chức Liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

2. GIẢI THƯỜNG

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành và kết quả chấm thi, theo đề nghị của Tổ chấm thi môn Toán và Hội đồng chấm thi chọn HSGQG THPT năm 2015, Lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định trao giải cho 222 thí sinh (chiếm 48,68% tổng số thí sinh dự thi), với mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- **Giải Nhất:** từ 33 điểm đến 40 điểm;
- **Giải Nhì:** từ 21,50 điểm đến 32,75 điểm;
- **Giải Ba:** từ 17 điểm đến 21,25 điểm;
- **Giải Khuyến khích:** từ 13 điểm đến 16,75 điểm.

Theo đó, có 1 thí sinh được trao giải Nhất, 47 thí sinh được trao giải Nhì, 75 thí sinh được trao giải Ba và 99 thí sinh được trao giải Khuyến khích.

Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao giải.

• **Giải Nhất:** Nguyễn Tuấn Hải Đăng (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội; 33 điểm).

• **Giải Nhì:** Nguyễn Minh Quân (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Lê Thị Hải Linh, Nguyễn Đăng Quân (THPT chuyên, Bắc Ninh); Lê Nhật Hoàng, Mai Tiến Luật (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định); Hoàng Đăng Thiện (THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước); Nguyễn Ngọc Bảo, Trần Trọng Hiếu, Cao Xuân Huy, Nguyễn Văn Gia Thịnh (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Tiến Thành (THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam); Trần Hậu Mạnh Cường, Nguyễn Thị Việt Hà, Nguyễn Như Hoàng (THPT chuyên, Hà Tĩnh); Tăng Văn Đạt, Phạm Văn Tuấn (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); Nguyễn Khánh Hưng, Lương Thế Sơn, Lê Xuân Tùng (THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng); Phạm Thị Minh Phương, Vũ Đức Tài (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); Nguyễn Bá Tuấn Anh, Thái Bá Mạnh, Phan Duy Phúc, Hoàng Anh Tài, Nguyễn Văn Tâm, Nguyễn Đắc Tiến Trình, Nguyễn Tất Tuấn, Nguyễn Anh Tú (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Phạm Ngô Thành Đạt (THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi); Nguyễn Mạnh Linh (THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh); Đỗ Trọng Đạt, Cao Minh Hiếu, Hoàng Trung Hiếu, Vũ Xuân Trung (THPT Chuyên, Thái Bình); Trịnh Hoàng Đức (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa); Nguyễn Tiến Thép, Nguyễn Quốc Trung (THPT chuyên, Vĩnh Phúc); Nguyễn Đức Minh, Phan Minh Nghĩa, Tạ Hà Nguyên (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Vinh Khang (PTNK - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh); Nguyễn Chí Hiếu, Nguyễn Trường Sơn, Trần Hoàng Sơn, Chu Văn Trang (THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội).

• **Giải Ba:** Huỳnh Văn Y (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Nguyễn Thúy Quỳnh (THPT chuyên, Bắc Ninh); Phạm Lương Hào, Phan Thanh Hào (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định); Vũ Xuân Anh (THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước); Dương Đức Thịnh (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); Nguyễn Đắc Nhân Tâm (THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ); Lê Vũ Nam Anh, Nguyễn Hữu Minh Thông (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Trần Xuân Lương (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên); Đặng Vũ Đức, Nguyễn Thị Huệ, Trịnh Ngọc Tú (THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam); Phùng Đắc Vũ Anh (THPT chuyên Hà Nội-).

Amsterdam, Hà Nội), Nguyễn Việt Hưng (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội); Hà Trọng Hiếu, Phan Vĩnh Khánh, Trần Đức Mạnh, Lê Văn Trường Nhật, Trần Hồng Sơn, Nguyễn Văn Thế (THPT chuyên, Hà Tĩnh); Đặng Văn Khuyến (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); Nguyễn Huy Hoàng, Vũ Hồng Quân (THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng); Trần Thị Thu Huệ (THPT chuyên, Hưng Yên); Trần Đức Cường, Đỗ Đức Duy, Nguyễn Hoàng Vũ (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); Võ Hải Thiện (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Hà Quý Anh, Tạ Hữu Nam, Lê Tuấn Nghĩa (THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình); Nguyễn Trọng Đức, Lê Minh Hoàng, Phạm Minh Hùng, Nguyễn Quang Khải, Vũ Thị Mai, Hứa Hà Phương, Nguyễn Hoàng Việt (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Nguyễn Trường Nhật (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình); Võ Quang Hưng (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam); Phạm Thọ Hải Minh, Vũ Xuân Trường, Đinh Ngọc Tùng, Nguyễn Thanh Tùng (THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh); Văn Tiến Đức, Nguyễn Văn Thành (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị); Bùi Thị Ngọc Ánh, Nguyễn Văn Huy (THPT chuyên, Thái Bình); Lê Thanh Thái Bình, Bùi Thị Thùy Dung, Nguyễn Tiến Đạt, Lê Đình Quang Huy, Lê Duy Thái, Phạm Văn Thắng (THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa); Phan Thị Băng Dung, Nguyễn Hà Duy, Nguyễn Đại Nghĩa, Phạm Lâm Tùng (THPT chuyên, Tuyên Quang); Nguyễn Việt Hoàng (THPT chuyên, Vĩnh Phúc); Nguyễn Xuân Dũng, Trần Quang Huy, Nguyễn Tiến Khải, Phan Anh Quân, Trịnh Huy Vũ (THPT Chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội); Phạm Thảo Nguyên (nữ), Nguyễn Minh Quang, Nguyễn Võ Thanh Thiện (PTNK - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh); Trần Quốc Nam (THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội); Phạm Trung Dũng, Lê Ngọc Hào, Trần Nhật Hiệp, Thái Doãn Hùng, Đinh Xuân Bảo Hưng (THPT chuyên, ĐH Vinh).

• **Giải Khuyến khích:** Nguyễn Hoàng Thủ Khoa (THPT Chu Văn An, An Giang); Nguyễn Thanh Lâm, Lê Thành Long, Lê Thị Anh Thư (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Nguyễn Mạnh Dũng, Nguyễn Thị Huyền, Thân Thị Quỳnh, Nguyễn Văn Tiến (THPT chuyên, Bắc Giang); Trần Minh Danh (THPT chuyên, Bạc Liêu); Lê Huy Cường (THPT chuyên, Bắc Ninh); Trương Minh Nhật Quang, Nguyễn Thịnh Tín (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định); Nguyễn

Gia Bảo, Nguyễn Hiếu Liêm (THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương); Trần Trung Nguyên (THPT chuyên Bình Long, Bình Phước); Lý Anh, Trần Ngọc Bách (THPT chuyên Phan Ngọc Hiền, Cà Mau); Nguyễn Tuấn Dũng, Nguyễn Quang Duy (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Phan An Phú, Lương Thu Phương (nữ) (THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đắk Nông); Hà Quang Bình (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên); Nguyễn Phi Hiếu (THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai); Nguyễn Kinh Luân (THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, Đồng Tháp); Nguyễn Hữu Huy (THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai); Đặng Quang Huy, Ngô Thành Trung, Lê Anh Tuấn (THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam); Nguyễn Đình Tuấn Anh, Đoàn Việt Cường, Hoàng Cao Phong, Phạm Đức Thắng, Lương Quốc Trung (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội), Nguyễn Việt Anh (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội); Trần Thị Thúy Quỳnh (THPT chuyên, Hà Tĩnh); Nguyễn Đức Anh, Hoàng Xuân Bách, Nguyễn Đình Đức, Nguyễn Việt Hoàng, Vũ Quang Minh (THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); Phạm Văn Chiến, Nguyễn Trung Kiên, Dương Minh Trung (THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng); Đỗ Quang Vinh (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình); Nguyễn Long Duy, Trần Huy Phan, Phan Văn Quý (THPT Chuyên, Hưng Yên); Nguyễn Việt Hùng (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum); Trần Xuân Chiến (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Lai Châu); Đoàn Thị Kiều Ngân, Đỗ Quang Thịnh (THPT chuyên Thăng Long, THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng); Đinh Minh Hiếu, Khuất Minh Quyền (nữ), Nguyễn Đắc Thành (THPT chuyên, Lào Cai); Trần Phúc Tài (THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); Ngô Thị Trà (THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An); Phạm Duy Minh (THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình); Nguyễn Minh Nhật (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận); Phạm Quý Vương (THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Nguyễn Trần Hậu (THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên); Trần Thanh Bình, Nguyễn Trần Duy, Hồ Anh Tiến (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình); Nguyễn Vĩnh Ngọc Nữ (nữ) (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam); Đinh Thanh Hải, Đỗ Châu Trinh (THPT chuyên Lê Thánh Tông, Quảng Nam); Nguyễn Lê Duy (THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi); Đoàn Thị Hiền (THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh); Lê Ngọc Tuấn Khang (THPT chuyên, Thái Bình); Lê

Đức Dũng, Đào Minh Hoàng, Vũ Huy Hoàng, Nguyễn Ngọc Thanh Tâm (nữ), Bùi Xuân Trường (THPT chuyên, Thái Nguyên); Nguyễn Quang Anh, Nguyễn Thị Nguyên Khoa, Nguyễn Hồ Minh Phước (THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế); Trần Minh Hiền, Châu Hoàng Long, Nguyễn Minh Thông (THPT chuyên, Tiền Giang); Huỳnh Phước Toàn (THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh); Đoàn Nguyễn Trà My (nữ) (THPT chuyên, Tuyên Quang); Nguyễn Thanh Phong, Nguyễn Võ Hữu Thắng (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long); Lê Minh Tuấn Anh, Nguyễn Hồng Ngọc (nữ), Lê Tân Phúc, Hà Văn Thái, Đường Thị Thảo (THPT chuyên, Vĩnh Phúc); Hoàng Ngọc Hiếu, Nguyễn Khánh Hòa, Nguyễn Huy Hoàng, Vũ Hồng Quân (THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái); Nguyễn Huy Tuyển (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội); Darma Lê Mạnh Cường, Vũ Hùng (PTNK - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh); Giang Trung Hiếu, Nguyễn Việt Hoàng, Nguyễn Nhật Minh, Nguyễn Doãn Thanh Tùng (THPT Chuyên, ĐHSP Hà Nội).

3. TUYỂN CHỌN HỌC SINH THAM DỰ KỲ THI CHỌN HỌC SINH DỰ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ NĂM 2015 (IMO 2015)

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T7/453. Given a quadrilateral pyramid $S.ABCD$ whose base $ABCD$ is a parallelogram. A point M varies on the side AB (M is different from A and B). Let (α) be a plane which goes through M and is parallel to SA and BD . Determine the cross section of $S.ABCD$ determined by (α) and find the position for M so that that cross section has maximal area.

Problem T8/453. Solve the equation $3\sin^3 x + 2\cos^3 x = 2\sin x + \cos x$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/453. Find all pairs of positive integers (a, b) so that $4a + 1$ and $4b - 1$ are coprime and $a + b$ is a divisor of $16ab + 1$.

Problem T10/453. Given a polynomial $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$; $n \geq 2$)

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành và kết quả kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Toán, Bộ GD&ĐT quyết định triệu tập học sinh Nguyễn Thế Hoàn (lớp 12 trường THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội, thành viên đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2014) và 48 học sinh đạt từ 21,50 điểm trở lên trong kỳ thi vừa nêu tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi IMO 2015, được tổ chức trong các ngày 25 và 26/3/2015 tại Thủ đô Hà Nội. Theo Quy chế, 06 thí sinh có điểm thi cao nhất trong kỳ thi này sẽ được triệu tập vào đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2015. Dưới đây là danh sách các đơn vị có học sinh được triệu tập tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi IMO 2015:

Nghệ An (8 học sinh); ĐHQG Hà Nội (5 học sinh); Đà Nẵng, Thái Bình, ĐHSP Hà Nội (mỗi đơn vị có 4 học sinh); Hà Tĩnh, Hải Phòng (mỗi đơn vị có 3 học sinh); Bắc Ninh, Bình Định, Hải Dương, Nam Định, Vĩnh Phúc, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh (mỗi đơn vị có 2 học sinh); Bà Rịa - Vũng Tàu, Bình Phước, Hà Nam, Quảng Ngãi, Quảng Ninh và Thanh Hóa (mỗi đơn vị có 1 học sinh).

with integral coefficients. Prove that there are infinitely many integers k such that $P(x) + k$ cannot be factorized as a product of two positive degree polynomials with integral coefficients.

Problem T11/453. Suppose that the function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is onto and the function $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is one-to-one. Assume furthermore that $f(n) \geq g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Show that

$$f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problem T12/453. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O) . M and N are two fixed points on (O) so that $MN \parallel BC$. Let P vary on the line AM . The line through P which is parallel to BC intersects CA , AB at E , F respectively. The circumscribed circle of the triangle NEF intersects (O) at the second point Q (different from N). Prove that the line PQ always goes through a fixed point when P moves.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)



EUCLID

VÀ TÁC PHẨM "NGUYÊN LÝ" BẤT HỦ



EUCLID

(Khoảng 325 - 265 TCN)

nền văn minh nhân loại, xin trả lời ngay: tác phẩm *Nguyên lý* của *Euclid*. Vì sao vậy? Vì *Euclid* đã đặt nền móng vững chắc để các thế hệ kế tiếp xây dựng nên lâu đài toán học tráng lệ, và chính *Nguyên lý* cũng toả bóng mát đến tận ngày nay.

1. THÂN THỂ VÀ SỰ NGHIỆP

Thật đáng tiếc là người ta biết quá ít về đời sống và con người của *Euclid*. Ngay cả ngày tháng và nơi sinh của ông cũng không được biết. Nhưng theo những tư liệu lịch sử để lại, *Euclid* sống cùng thời với *Ptolemy*, một hoàng đế lên ngôi vào khoảng năm 306 trước công nguyên và định đô tại thành phố Alexandria (Ai Cập). Tại đây, vị hoàng đế này đã cho xây dựng một trường đại học cực lớn và mời những người tài năng khắp nơi đến làm việc. *Euclid*, một nhà toán học Hy Lạp theo trường phái Plato ở Athens cũng

Nếu có người hỏi: Ai là nhà toán học vĩ đại nhất trong mọi thời đại, không ngần ngại tôi sẽ trả lời: *Euclid*. Nếu hỏi tác phẩm toán học nào ảnh hưởng sâu sắc nhất tới sự phát triển của

được mời đến đảm nhiệm chức vụ đứng đầu Ban toán và ông đã đặt nền móng cho trường phái toán học Alexandria nổi tiếng và tồn tại ngót nghìn năm.

Hai câu chuyện sau đây nói lên phẩm chất đạo đức trung thực của *Euclid*. Trong tác phẩm *Tóm lược Eudemus*, *Proclus* đã kể lại rằng một lần hoàng đế *Ptolemy* hỏi có con đường nào ngắn nhất dành riêng cho các hoàng đế để tới kiến thức về hình học không, *Euclid* đã thẳng thắn trả lời: không có con đường hoàng gia nào trong hình học cả. *Stobaeus* lại kể một câu chuyện khác: có một môn sinh theo *Euclid* học hình học đã hỏi rằng liệu kiếm được gì khi học môn này, ngay lúc đó *Euclid* ra lệnh cho một nô lệ đưa cho anh ta một đồng xu "vì anh ta phải kiếm được lời từ những điều học được".

Euclid là tác giả của ít nhất 10 công trình khoa học nhưng hiện nay chỉ còn lưu giữ được 5 công trình với văn bản khá đầy đủ. Trong đó *Nguyên lý* là tác phẩm chính làm cho *Euclid* trở thành bất tử. Theo các nhà thống kê học, kể từ lần ấn loát đầu tiên năm 1482 đến nay, *Nguyên lý* đã được xuất bản trên một nghìn lần và trong hai thiên niên kỷ qua đã ngự trị trong giảng dạy hình học của hầu hết các nước trên thế giới.

2. NỘI DUNG CỦA "NGUYÊN LÝ"

Trái với những nhận định khá phổ biến, *Nguyên lý* của *Euclid* không phải chỉ nói về hình học mà còn chứa đựng không ít những

nội dung của Lý thuyết số và Đại số sơ cấp. Đây là một công trình đồ sộ với 13 quyển.

Quyển I bắt đầu bằng những định nghĩa cơ sở, những định đề và các tiên đề. 48 mệnh đề của quyển I chia thành 3 nhóm. 26 mệnh đề đầu tiên chủ yếu nói về tính chất tam giác. 6 mệnh đề tiếp theo xác lập lý thuyết đường thẳng song song. Các mệnh đề còn lại nói về hình bình hành và hình vuông, đặc biệt có nhắc đến các quan hệ diện tích.

Quyển II nói về phép biến đổi diện tích và đại số hình học của trường phái Pythagoras. Cuối quyển này là hai mệnh đề xác lập sự khái quát hoá của định lý Pythagoras mà ngày nay ta gọi là “Luật côsin”. **Quyển III** bao gồm các định lý quen thuộc về đường tròn, các dây cung và các tiếp tuyến. **Quyển IV** trình bày những lập luận về các phép dựng hình Pythagoras bằng thước kẻ và compa để dựng các đa giác đều có 3, 4, 5, 6 và 15 cạnh.

Quyển V chủ yếu trình bày về lý thuyết tỷ lệ thức của Eudoxus. **Quyển VI** áp dụng lý thuyết đó cho hình học phẳng. Ở đây ta tìm thấy những định lý cơ bản về tam giác đồng dạng, các phép dựng thành phần của tỷ lệ thứ ba, thứ tư và trung bình nhân, phép giải hình học các phương trình bậc hai.

Các **quyển VII, VIII, IX** gồm 102 mệnh đề trình bày về lý thuyết số sơ cấp. **Quyển VII** bắt đầu bằng một quá trình mà ngày nay gọi là *thuật toán Euclid* để tìm ước số chung lớn nhất của hai số tự nhiên. **Quyển VIII** nói về liên phân số và các cấp số nhân liên quan. Một số định lý quan trọng có thể tìm thấy trong **quyển IX** như mệnh đề IX.14 tương đương với *Định lý cơ bản của số học*, nói rằng *mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố (theo thứ tự tăng dần)*. Phép chứng minh của Euclid cho mệnh đề IX.20 nói rằng *số các số nguyên tố là vô hạn* được các nhà

toán học đời sau đánh giá là một mẫu mực của sự tao nhã trong toán học.

Quyển X nói về các số vô tỷ, tức là nói về các đoạn thẳng vô ước với một đoạn thẳng cho trước nào đó.

Ba quyển cuối cùng **XI, XII, XIII** nói về hình học không gian. Các định nghĩa, định lý về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian và những định lý về hình hộp được đề cập trong **quyển XI**, phương pháp giới hạn giữ một vai trò quan trọng trong việc xem xét thể tích ở **quyển XII** và các phép dựng nội tiếp 5 đa diện đều trong hình cầu được trình bày trong **quyển XIII**.

3. GIÁ TRỊ CỦA “NGUYÊN LÝ”

Giá trị của *Nguyên lý* không chỉ ở những *nội dung toán học* phong phú được trình bày mà còn chính ở *hình thức trình bày*. Có thể nói *Nguyên lý* của Euclid đã trở thành nguyên mẫu của hình thức toán học hiện đại.

Thành tựu to lớn nhất của *Nguyên lý* là đã trình bày một cách chặt chẽ và trong sáng hình thức suy luận theo *kiểu tiên đề* của các nhà toán học Hy Lạp cổ đại. Hình thức suy luận này đã tác động lên những thế hệ kế tiếp một ấn tượng quá mạnh mẽ tới mức công trình này đã trở thành mẫu mực trong phép chứng minh chặt chẽ về toán học. Mặc dầu ở các thế kỷ XVII và XVIII, hình thức suy luận đó bị lãng quên song *phương pháp tiên đề* ngày nay đã thâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực của toán học và các nhà toán học tin tưởng rằng: *tư duy tiên đề không chỉ là tư duy toán học mà chính là tư duy toán học*.

Tuy nhiên, phương pháp tiên đề cần dựa vào một số điểm xuất phát nào đó được mặc nhiên thừa nhận là đúng. Đây là hạn chế khó tránh khỏi của *Nguyên lý* do tính thời đại mà Euclid đã sống.

LÊ QUỐC HÁN

(GV Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An) Sưu tầm



Tap chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 453 (3.2015)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606

Email: toanhocvatuoi@vietnam.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Đức Tấn – Tìm thú vị từ bài tập toán trong sách giáo khoa.
- 2 Hướng dẫn giải Đề thi chọn Học sinh giỏi môn Toán lớp 9 Tỉnh Hưng Yên, năm học 2013 – 2014.
- 3 Đề thi Học sinh giỏi Toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014.
- 4 **Diễn đàn dạy học Toán**
Nguyễn Văn Nho – Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng phương pháp nghiệm bội.
- 7 Hướng dẫn giải - Đề số 5.
- 9 Thử sức trước kì thi - Đề số 6.
- 10 **Diễn đàn phương pháp giải toán**
Lê Viết Ân – Một cách chứng minh 6 điểm cùng nằm trên một đường tròn.
- 14 **Giải trí toán học**
Phi Phi – Giải đáp bài toán xâu dây giấy.
- 15 **Đề ra kì này**
Problems in This Issue
T1/453, ..., T12/453, L1/453, L2/453.
- 17 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
Giải các bài của Số 449.
- 26 Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2015 – Môn Toán.
- 30 **Lịch sử toán học**
History of Maths
Euclid và tác phẩm “Nguyên Lý” bất hủ.
Ảnh Bìa 1: Chúc mừng Cô giáo. Nguồn: Baomoi.com

Trưởng ban biên tập: ThS. NGUYỄN ANH QUÂN

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: VŨ MAI ANH

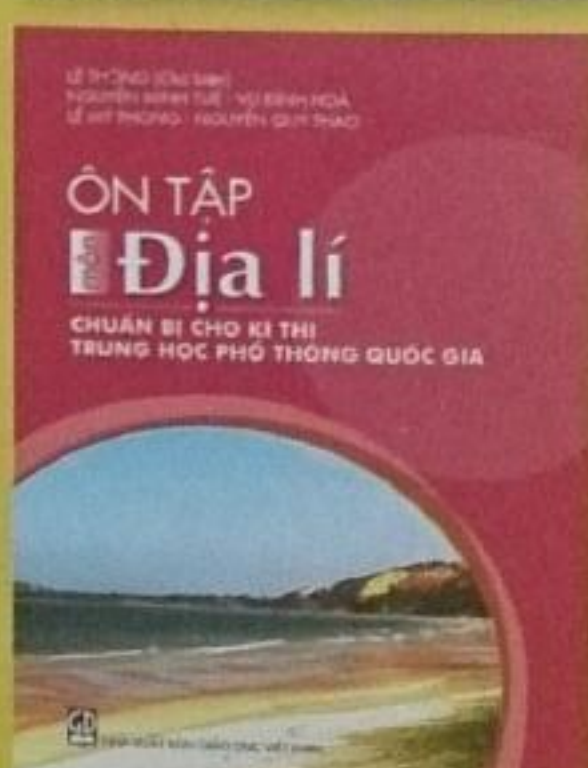
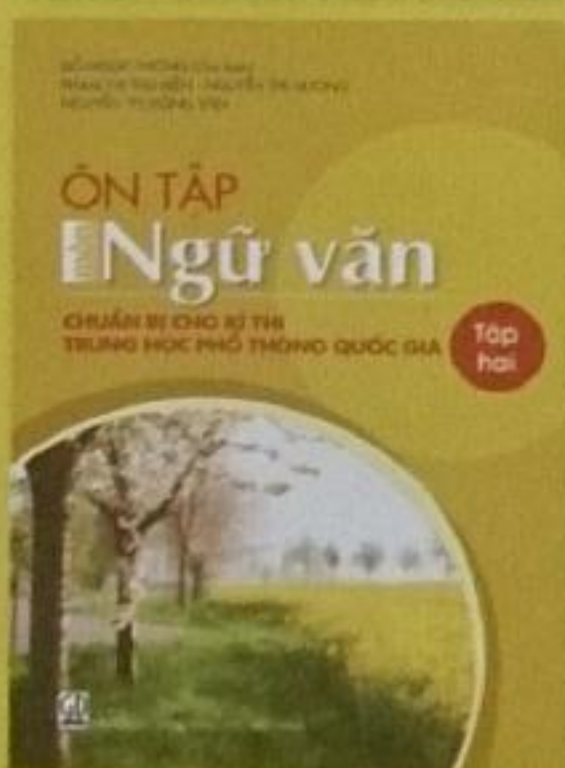
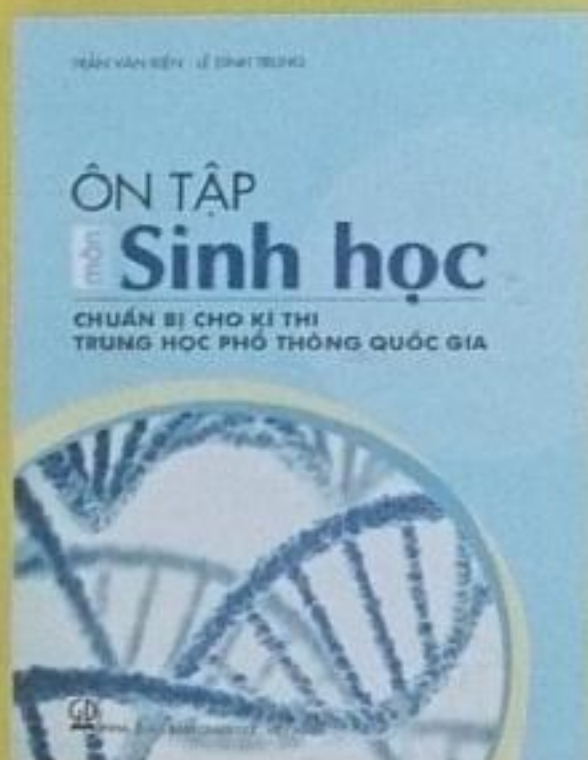
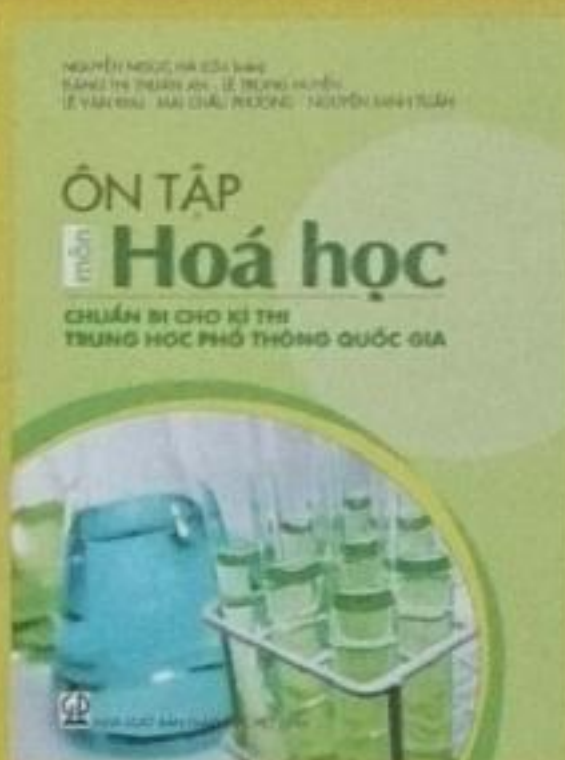
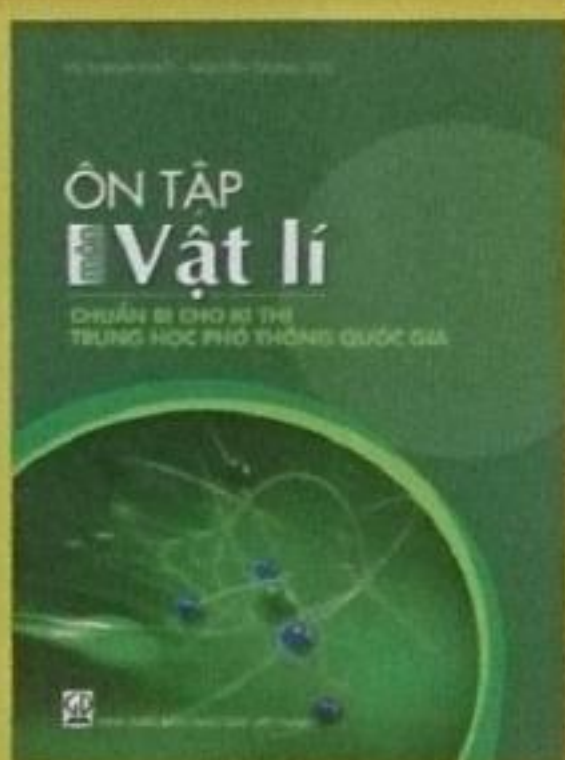
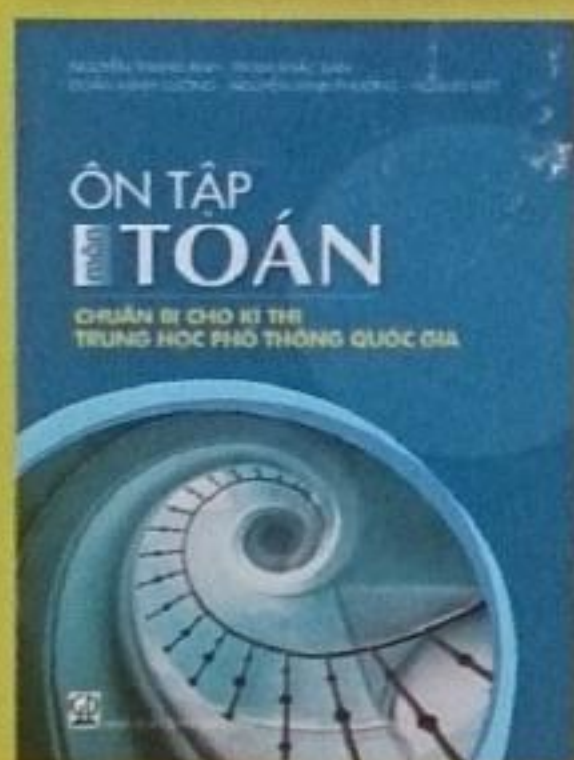


NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc bộ sách
ÔN TẬP CHUẨN BỊ CHO KÌ THI
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

Để giúp các em học sinh Trung học phổ thông, đặc biệt là học sinh lớp 12, ôn tập và thi đạt kết quả tốt trong kì thi Trung học phổ thông quốc gia năm học 2014 - 2015, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn, xuất bản bộ sách **Ôn tập chuẩn bị cho kì thi Trung học phổ thông quốc gia**.

Bộ sách tập trung biên soạn, lựa chọn những câu hỏi, bài tập điển hình, tiêu biểu theo hướng đổi mới kiểm tra, đánh giá và thi tốt nghiệp Trung học phổ thông quốc gia do Bộ Giáo dục và Đào tạo chỉ đạo.



Bạn đọc có nhu cầu mua sách xin liên hệ: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
187B Giảng Võ - Hà Nội. ĐT: 04.35121974. Fax: 04.35121973

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT3M5

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2015

Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng
<https://hieu.lun.hopto.org>